

CHƯƠNG

IV

NGUYÊN HÀM
TÍCH PHÂN

BÀI. NGUYÊN HÀM

ĐỀ TEST SỐ 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

- A. $F'(x) = -f(x), \forall x \in K.$ B. $f'(x) = F(x), \forall x \in K.$
C. $F'(x) = f(x), \forall x \in K.$ D. $f'(x) = -F(x), \forall x \in K.$

Câu 2: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - 5$ là

- A. $\frac{2x^3}{3} + x^2 - 5x + C.$ B. $\frac{x^3}{3} + x^2 - 5x + C.$ C. $\frac{x^3}{6} + x^2 - 5x + C.$ D. $\frac{x^3}{6} + x^2 - 5x.$

Câu 3: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\sqrt{x}$ là

- A. $3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} + x\sqrt{x} + C.$ B. $\frac{\sqrt[3]{x}}{9} + 2\sqrt{x} + \frac{9x\sqrt{x}}{4} + C.$
C. $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} + x\sqrt{x} + C.$ D. $\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} + x\sqrt{x} + C.$

Câu 4: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$, với $f(x) = 3\sin x + \frac{4}{\cos^2 x}$, biết $F(0) = 2$.

Tính $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

- A. $\frac{13}{2} + 4\sqrt{3}.$ B. $\frac{7}{2} + 4\sqrt{3}.$ C. $-\frac{3}{2} + 4\sqrt{3}.$ D. $-\frac{5}{2} - 4\sqrt{3}.$

Câu 5: Cho $\int 5^x dx = F(x) + C$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

- A. $F'(x) = 5^x \ln x.$ B. $F'(x) = 5^x.$ C. $F'(x) = 5^x + C.$ D. $F'(x) = -5^x.$

Câu 6: Hàm số $F(x) = e^{x^3}$ là nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau:

- A. $f(x) = 3x^2 \cdot e^{x^3}.$ B. $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3}.$ C. $f(x) = e^{3x^2}.$ D. $f(x) = \frac{e^{x^3}}{3x^2}.$

Câu 7: Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ trên $(-1; +\infty)$ là

- A. $x - \frac{1}{(x+1)^2}.$ B. $x - \ln(x+1).$ C. $-\frac{1}{(x+1)^2}.$ D. $x + \ln(x+1).$

Câu 8: Cho $f'(x) = 2x - \cos 2x$. Tìm $f(x)$ biết $f(0) = 0$.

A. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \sin 2x$. **B.** $f(x) = x^2 + \frac{1}{2} \sin 2x$.

C. $f(x) = x^2 - \frac{1}{2} \sin 2x$. **D.** $f(x) = x^2 + \sin 2x$.

Câu 9: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{2024}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2023} x^{2023} + C$.

B. $\int f(x) dx = 2024 x^{2023} + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{2025} x^{2025} + C$.

D. $\int f(x) dx = x^{2025} + C$.

Câu 10: Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ trên $(0; +\infty)$ và $F(e) = 3$. Tính $F(5)$?

A. $F(5) = \ln 5 + C$.

B. $F(5) = \ln 5$.

C. $F(5) = \ln 5 + 2$.

D. $F(5) = \ln 5 + 5$.

Câu 11: Một quả bóng được ném lên từ độ cao $20m$ với vận tốc được tính bởi công thức $v(t) = -10t + 16$ (m/s). Công thức nào sau đây tính độ cao của quả bóng theo thời gian t ?

A. $h(t) = -5t^2 + 16t + C$. **B.** $h(t) = -5t^2 + 16t + 20$.

C. $h(t) = 5t^2 - 16t + 20$. **D.** $h(t) = 5t^2 - 16t + C$.

Câu 12: Một ô tô đang chạy với vận tốc $70 km/h$ thì hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t) = -10t + 30$ (m/s). Tính quãng đường ô tô đi được sau 3 giây kể từ khi hãm phanh?

A. $45(m)$.

B. $45(m)$.

C. $45(m)$.

D. $45(m)$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Gọi $F(x)$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$, $F(1) = 1$.

a) $F(x) = x^3 + x^2 + 1 + C$.

b) Giá trị $F(-1)$ bằng -2 .

c) Họ nguyên hàm của hàm số $F(x)$ bằng $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$.

d) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x-1)$ bằng $x^3 - 4x^2 + 6x + C$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x) = e^x + \sin x$.

a) Hàm số $f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = e^x + \sin x$.

b) Biết $f(0) = 2$ hàm số $f(x)$ được xác định bởi $f(x) = e^x - \cos x + 2$.

c) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - \cos x + 2$ là $F(x) = e^x - \sin x + 2x + C$.

d) Biết $f(0) = 2$. $F(x)$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$, $F(0) = 0$. Tổng $f\left(\frac{\pi}{2}\right) + F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

bằng $e^{\frac{\pi}{2}} + \pi$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = \tan^2 x + \frac{1}{x^2}$ với $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4}{\pi}$.

a) $f(x) = \frac{\tan^3 x}{3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{3}$.

b) $f\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$.

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Khi đó: $F'\left(\frac{\pi}{6}\right) \in (0; 1)$.

d) $F''\left(\frac{\pi}{2025}\right) - f'\left(\frac{\pi}{2025}\right) = 0$.

Câu 4: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{6^{x+1} + 3^{2x}}{2^{2x+3}}$.

a) $F'(x) = \frac{6^{x+1} + 3^{2x}}{2^{2x+3}}$.

b) $F(x) = \frac{\int (6^{x+1} + 3^{2x}) dx}{\int 2^{2x+3} dx}$.

c) $F(x) = \int \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x \right] dx$.

d) Nếu $F(0) = 0$ thì $F(1) = \frac{29}{64(\ln 3 - \ln 2)}$.

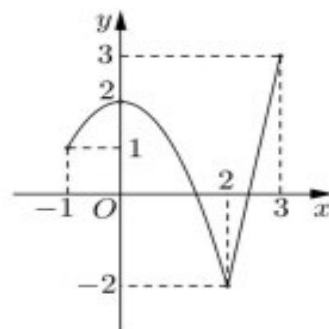
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Bạn Huyền chạy thể dục buổi sáng với $a(t) = -\frac{1}{24}t^3 + \frac{5}{16}t^2$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc xuất phát. Vào thời điểm $t = 5$ (s) sau khi xuất phát thì vận tốc của bạn Huyền đạt được bằng bao nhiêu?

Câu 2: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có $f'(x) = 3x^2 + 2x - m + 1$, $f(2) = 1$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $M(1; -3)$. Tính $f(-1)$

Câu 3: Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang với gia tốc phụ thuộc thời gian t (s) là $a(t) = 2t - 7$ (m/s²). Biết vận tốc đầu bằng 10 (m/s), hỏi sau bao lâu thì chất điểm đạt vận tốc 18 (m/s)?

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$, có đồ thị là một phần của parabol và một phần là đoạn thẳng như trong hình bên dưới. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ và $F(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ thỏa mãn $F(-1) = -\frac{5}{3}$. Giá trị của $F(0) + F(3)$ bằng bao nhiêu? (kết quả lấy đến chữ số thập phân thứ nhất sau dấu phẩy).



Câu 5: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t phút. Biết $h'(t) = 3at^2 + bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 phút thì thể tích nước trong bể là $150 dm^3$, sau 10 phút thì thể tích nước trong bể là $1100 dm^3$. Thể tích của nước trong bể sau khi bơm được 20 phút là bao nhiêu dm^3 ?

Câu 6: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x^4 + 2x^3 + x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $F(1) = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S = F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2021)$ viết dưới dạng $a + \frac{1}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}$). Tổng $a + b$ bằng?

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

A. $F'(x) = -f(x), \forall x \in K.$

B. $f'(x) = F(x), \forall x \in K.$

C. $F'(x) = f(x), \forall x \in K.$

D. $f'(x) = -F(x), \forall x \in K.$

Lời giải

Theo định nghĩa thì hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in K.$

Câu 2: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - 5$ là

A. $\frac{2x^3}{3} + x^2 - 5x + C.$ **B.** $\frac{x^3}{3} + x^2 - 5x + C.$

C. $\frac{x^3}{6} + x^2 - 5x + C.$ **D.** $\frac{x^3}{6} + x^2 - 5x.$

Lời giải

$$\int f(x) dx = \int \left(\frac{x^2}{2} + 2x - 5 \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \frac{x^2}{2} - 5x + C = \frac{x^3}{6} + x^2 - 5x + C.$$

Câu 3: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\sqrt{x}$ là

A. $3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} + x\sqrt{x} + C.$

B. $\frac{\sqrt[3]{x}}{9} + 2\sqrt{x} + \frac{9x\sqrt{x}}{4} + C.$

C. $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} + x\sqrt{x} + C.$

D. $\sqrt[3]{x} + \sqrt{x} + x\sqrt{x} + C.$

Lời giải

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\sqrt{x} \right) dx = \int x^{-\frac{2}{3}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \frac{3}{2} \int x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= 3 \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} + x\sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Câu 4: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$, với $f(x) = 3\sin x + \frac{4}{\cos^2 x}$, biết $F(0) = 2$.

Tính $F\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

A. $\frac{13}{2} + 4\sqrt{3}.$

B. $\frac{7}{2} + 4\sqrt{3}.$

C. $-\frac{3}{2} + 4\sqrt{3}.$

D. $-\frac{5}{2} - 4\sqrt{3}.$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int f(x) dx = \int \left(3\sin x + \frac{4}{\cos^2 x} \right) dx = 3 \int \sin x dx + 4 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = -3\cos x + 4\tan x + C.$$

$$\text{Do đó } F(x) = -3\cos x + 4\tan x + C.$$

$$F(0) = 2 \Leftrightarrow -3 + C = 2 \Leftrightarrow C = 5.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = -3 \cos x + 4 \tan x + 5.$$

$$\text{Vậy } F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3 \cos \frac{\pi}{3} + 4 \tan \frac{\pi}{3} + 5 = \frac{7}{2} + 4\sqrt{3}.$$

Câu 5: Cho $\int 5^x dx = F(x) + C$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $F'(x) = 5^x \cdot \ln x$. **B.** $F'(x) = 5^x$. **C.** $F'(x) = 5^x + C$. **D.** $F'(x) = -5^x$.

Lời giải

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số 5^x nên $F'(x) = 5^x$.

Câu 6: Hàm số $F(x) = e^{x^3}$ là nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau:

A. $f(x) = 3x^2 \cdot e^{x^3}$. **B.** $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3}$. **C.** $f(x) = e^{3x^2}$. **D.** $f(x) = \frac{e^{x^3}}{3x^2}$.

Lời giải

Ta có $f(x) = F'(x)$ suy ra $f(x) = 3x^2 \cdot e^{x^3}$.

Câu 7: Một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ trên $(-1; +\infty)$ là

A. $x - \frac{1}{(x+1)^2}$. **B.** $x - \ln(x+1)$. **C.** $-\frac{1}{(x+1)^2}$. **D.** $x + \ln(x+1)$.

Lời giải

Trên $(-1; +\infty)$ ta có $(x + \ln(x+1))' = \frac{x+2}{x+1} = f(x)$.

Vậy một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ trên $(-1; +\infty)$ là $x + \ln(x+1)$.

Câu 8: Cho $f'(x) = 2x - \cos 2x$. Tìm $f(x)$ biết $f(0) = 0$.

A. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \sin 2x$. **B.** $f(x) = x^2 + \frac{1}{2} \sin 2x$.
C. $f(x) = x^2 - \frac{1}{2} \sin 2x$. **D.** $f(x) = x^2 + \sin 2x$.

Lời giải

Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x - \cos 2x) dx = x^2 - \frac{1}{2} \sin 2x + C$.

Mà $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$. Vậy $f(x) = x^2 - \frac{1}{2} \sin 2x$.

Câu 9: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^{2024}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2023} \cdot x^{2023} + C$. **B.** $\int f(x) dx = 2024 \cdot x^{2023} + C$.
C. $\int f(x) dx = \frac{1}{2025} \cdot x^{2025} + C$. **D.** $\int f(x) dx = x^{2025} + C$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)dx = \frac{1}{2025} \cdot x^{2025} + C$.

- Câu 10:** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ trên $(0; +\infty)$ và $F(e) = 3$. Tính $F(5)$?
- A. $F(5) = \ln 5 + C$. B. $F(5) = \ln 5$. **C. $F(5) = \ln 5 + 2$.** D. $F(5) = \ln 5 + 5$.

Lời giải

Ta có: nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ trên $(0; +\infty)$ là $F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$.

Do $F(e) = 3 \Rightarrow \ln e + C = 3 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow F(5) = \ln 5 + 2$.

- Câu 11:** Một quả bóng được ném lên từ độ cao $20m$ với vận tốc được tính bởi công thức $v(t) = -10t + 16$ (m/s). Công thức nào sau đây tính độ cao của quả bóng theo thời gian t ?
- A. $h(t) = -5t^2 + 16t + C$. **B. $h(t) = -5t^2 + 16t + 20$.**
- C. $h(t) = 5t^2 - 16t + 20$. D. $h(t) = 5t^2 - 16t + C$.

Lời giải

Gọi $h(t)$ là độ cao của quả bóng tại thời điểm t .

Suy ra: $h'(t) = v(t)$, do đó: $h(t)$ là một nguyên hàm của $v(t)$

Ta có: $\int (-10t + 16)dt = -5t^2 + 16t + C$.

Do quả bóng được ném lên từ độ cao $20m$ nên tại thời điểm $t = 0$ thì $h = 20$. Hay

$h(0) = 20 \Rightarrow C = 20$.

Vậy: $h(t) = -5t^2 + 16t + 20$.

- Câu 12:** Một ô tô đang chạy với vận tốc $70km/h$ thì hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t) = -10t + 30$ (m/s). Tính quãng đường ô tô đi được sau 3 giây kể từ khi hãm phanh?
- A. $45(m)$. B. $45(m)$. C. $45(m)$. **D. $45(m)$.**

Lời giải

Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong t giây kể từ khi hãm phanh.

Ta có: $s(t) = \int (-10t + 30) = -5t^2 + 30t + C$. Do $s(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

Khi đó: $s(t) = -5t^2 + 30t \Rightarrow s(3) = -5 \cdot 9 + 30 \cdot 3 = 45(m)$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

- Câu 1:** Cho hàm số $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Gọi $F(x)$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$, $F(1) = 1$.
- a) $F(x) = x^3 + x^2 + 1 + C$.
- b) Giá trị $F(-1)$ bằng -2 .
- c) Họ nguyên hàm của hàm số $F(x)$ bằng $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$.
- d) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x-1)$ bằng $x^3 - 4x^2 + 6x + C$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) Sai

Ta có $\int f(x)dx = \int (3x^2 - 2x + 1)dx = x^3 - x^2 + x + C \Rightarrow F(x) = x^3 - x^2 + x + C$.

b) Sai

Ta có $F(1) = 1 - 1 + 1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = x^3 - x^2 + x \Rightarrow F(-1) = -3$.

c) Đúng

Ta có $\int F(x)dx = \int (x^3 - x^2 + x)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$.

d) Đúng

Ta có $f(x) = 3x^2 - 2x + 1 \Rightarrow f(x-1) = 3(x-1)^2 - 2(x-1) + 1 = 3x^2 - 8x + 6$.

$\Rightarrow \int f(x-1)dx = \int (3x^2 - 8x + 6)dx = x^3 - 4x^2 + 6x + C$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x) = e^x + \sin x$.

a) Hàm số $f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = e^x + \sin x$.

b) Biết $f(0) = 2$ hàm số $f(x)$ được xác định bởi $f(x) = e^x - \cos x + 2$.

c) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - \cos x + 2$ là $F(x) = e^x - \sin x + 2x + C$.

d) Biết $f(0) = 2$. $F(x)$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x)$, $F(0) = 0$. Tổng $f\left(\frac{\pi}{2}\right) + F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng $e^{\frac{\pi}{2}} + \pi$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Đúng

Vì $f'(x) = e^x + \sin x = g(x)$ nên $f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)$.

b) Đúng

Ta có $f'(x) = e^x + \sin x \Rightarrow \int f'(x)dx = \int (e^x + \sin x)dx \Leftrightarrow f(x) = e^x - \cos x + C$.

Lại có $f(0) = 2 \Rightarrow e^0 - \cos 0 + C = 2 \Leftrightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = e^x - \cos x + 2$.

c) Đúng

Ta có $\int f(x)dx = \int (e^x - \cos x + 2)dx = e^x - \sin x + 2x + C \Rightarrow F(x) = e^x - \sin x + 2x + C$.

d) Sai

Ta có $f'(x) = e^x + \sin x \Rightarrow \int f'(x)dx = \int (e^x + \sin x)dx \Leftrightarrow f(x) = e^x - \cos x + C$.

Lại có $f(0) = 2 \Rightarrow e^0 - \cos 0 + C = 2 \Leftrightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = e^x - \cos x + 2$.

Mặt khác $\int f(x)dx = \int (e^x - \cos x + 2)dx = e^x - \sin x + 2x + C \Rightarrow F(x) = e^x - \sin x + 2x + C$.

Vì $F(0) = 0 \Rightarrow e^0 - \sin 0 + 2.0 + C = 0 \Leftrightarrow C = -1 \Rightarrow F(x) = e^x - \sin x + 2x - 1$.

$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) + F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(e^{\frac{\pi}{2}} - \cos \frac{\pi}{2} + 2\right) + \left(e^{\frac{\pi}{2}} - \sin \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 1\right) = 2e^{\frac{\pi}{2}} + \pi$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = \tan^2 x + \frac{1}{x^2}$ với $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4}{\pi}$.

a) $f(x) = \frac{\tan^3 x}{3} - \frac{1}{x} - \frac{1}{3}.$

b) $f\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0.$

c) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Khi đó: $F'\left(\frac{\pi}{6}\right) \in (0;1).$

d) $F''\left(\frac{\pi}{2025}\right) - f'\left(\frac{\pi}{2025}\right) = 0.$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

a) Sai

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(\tan^2 x + \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 + \frac{1}{x^2} \right) dx = \tan x - x - \frac{1}{x} + C.$$

$$\text{Mà } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4}{\pi} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi} + C = -\frac{4}{\pi} \Rightarrow C = \frac{\pi}{4} - 1.$$

$$\Rightarrow f(x) = \tan x - x - \frac{1}{x} + \frac{\pi}{4} - 1.$$

b) Đúng.

$$\text{Ta có: } f(x) = \tan x - x - \frac{1}{x} + \frac{\pi}{4} - 1 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} - \frac{1}{\frac{\pi}{3}} + \frac{\pi}{4} - 1$$

$$= \sqrt{3} - \frac{\pi}{12} - \frac{3}{\pi} - 1 \approx -0,48.$$

$$\text{Do đó: } f\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0.$$

c) Sai.

$$\text{Gọi } F(x) \text{ là một nguyên hàm của } f(x). \text{ Khi đó: } F'\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \tan \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} - \frac{1}{\frac{\pi}{6}} + \frac{\pi}{4} - 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{12} - \frac{6}{\pi} - 1 \approx -2,07.$$

$$\text{Do đó: } F'\left(\frac{\pi}{6}\right) \notin (0;1).$$

d) Đúng.

$$F''\left(\frac{\pi}{2025}\right) - f'\left(\frac{\pi}{2025}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2025}\right) - f'\left(\frac{\pi}{2025}\right) = 0.$$

Câu 4: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{6^{x+1} + 3^{2x}}{2^{2x+3}}.$

a) $F'(x) = \frac{6^{x+1} + 3^{2x}}{2^{2x+3}}.$

b) $F(x) = \frac{\int (6^{x+1} + 3^{2x}) dx}{\int 2^{2x+3} dx}.$

c) $F(x) = \int \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x \right] dx.$

d) Nếu $F(0) = 0$ thì $F(1) = \frac{29}{64(\ln 3 - \ln 2)}.$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Theo định nghĩa nguyên hàm suy ra $F'(x) = f(x) = \frac{6^{x+1} + 3^{2x}}{2^{2x+3}}.$

Vậy a) đúng.

b) Theo tính chất nguyên hàm suy ra $F(x) = \int \frac{6^{x+1} + 3^{2x}}{2^{2x+3}} dx \neq \frac{\int (6^{x+1} + 3^{2x}) dx}{\int 2^{2x+3} dx}.$

Vậy b) sai.

c) Ta có $F(x) = \int \frac{6^{x+1} + 3^{2x}}{2^{2x+3}} dx = \int \frac{6 \cdot 6^x + 9^x}{8 \cdot 4^x} dx = \int \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x \right] dx.$

Vậy c) đúng

d) Từ câu c) ta có:

$$F(x) = \int \left[\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x \right] dx = \frac{\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln \frac{3}{2}} + \frac{\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x}{\ln \frac{9}{4}} + C = \frac{\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}}{\ln 3 - \ln 2} + C.$$

Do $F(0) = 0$ nên $\frac{13}{16(\ln 3 - \ln 2)} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{13}{16(\ln 3 - \ln 2)}.$

Suy ra $F(x) = \frac{\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}}{\ln 3 - \ln 2} - \frac{13}{16(\ln 3 - \ln 2)}$

Khi đó $F(1) = \frac{81}{64(\ln 3 - \ln 2)} - \frac{13}{16(\ln 3 - \ln 2)} = \frac{29}{64(\ln 3 - \ln 2)}.$

Vậy d) đúng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Bạn Huyền chạy thể dục buổi sáng với $a(t) = -\frac{1}{24}t^3 + \frac{5}{16}t^2$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc xuất phát. Vào thời điểm $t = 5$ (s) sau khi xuất phát thì vận tốc của bạn Huyền đạt được bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 6,51

$$\text{Ta có } v(t) = \int a(t) dt = \int \left(-\frac{1}{24}t^3 + \frac{5}{16}t^2 \right) dt = -\frac{1}{96}t^4 + \frac{5}{48}t^3 + C.$$

$$\text{Tại thời điểm ban đầu } (t = 0) \text{ thì vận tốc bằng } 0 \text{ nên } v(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow v(t) = -\frac{1}{96}t^4 + \frac{5}{48}t^3.$$

$$\text{Tại thời điểm } t = 5(s) \text{ thì vận tốc bạn Huyền đạt được là } v(5) = -\frac{1}{96}.5^4 + \frac{5}{48}.5^3 = 6,51(m/s).$$

Câu 2: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có $f'(x) = 3x^2 + 2x - m + 1$, $f(2) = 1$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua điểm $M(1; -3)$. Tính $f(-1)$

Lời giải

Trả lời: 7

$$\text{Ta có } f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2 + 2x - m + 1) dx = x^3 + x^2 + (1-m)x + C.$$

$$\text{Theo giả thiết } \begin{cases} f(2) = 1 \\ f(1) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^3 + 2^2 + (1-m).2 + C = 1 \\ 1 + 1 + (1-m) + C = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m + C = -13 \\ -m + C = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 7 \\ C = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = x^3 + x^2 - 6x + 1. \text{ Vậy } f(-1) = 7.$$

Câu 3: Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang với gia tốc phụ thuộc thời gian $t(s)$ là $a(t) = 2t - 7 (m/s^2)$. Biết vận tốc đầu bằng $10 (m/s)$, hỏi sau bao lâu thì chất điểm đạt vận tốc $18 (m/s)$?

Lời giải

Trả lời: 8

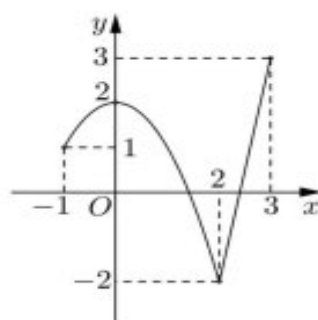
$$\text{Ta có } v(t) = \int a(t) dt = \int (2t - 7) dt = t^2 - 7t + C, \text{ mặt khác } v(0) = 10 \text{ nên } C = v(0) = 10.$$

$$\Rightarrow v(t) = t^2 - 7t + 10.$$

$$\text{Để chất điểm đạt vận tốc } 18 (m/s) \text{ thì } v(t) = 18 \Leftrightarrow t^2 - 7t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8 \text{ (nhận)} \\ t = -1 \text{ (loại)} \end{cases}.$$

Vậy tại thời điểm $t = 8(s)$ thì chất điểm đạt vận tốc $18 (m/s)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$, có đồ thị là một phần của parabol và một phần là đoạn thẳng như trong hình bên dưới. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ và $F(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ thỏa mãn $F(-1) = -\frac{5}{3}$. Giá trị của $F(0) + F(3)$ bằng bao nhiêu? (kết quả lấy đến chữ số thập phân thứ nhất sau dấu phẩy).



Lời giải

Trả lời: 1,8.

+) Trên $[-1; 2]$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ là một phần của parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ đi qua

$$\text{các điểm } (-1; 1), (0; 2), (2; -2) \text{ nên } \begin{cases} a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 1 \\ c = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow (P): y = -x^2 + 2.$$

+) Trên $[2; 3]$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đoạn thẳng $(d): y = mx + n$ đi qua các điểm

$$(2; -2), (3; 3) \text{ nên } \begin{cases} 2m + n = -2 \\ 3m + n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ n = -12 \end{cases} \Rightarrow (d): y = 5x - 12.$$

$$\text{Vậy } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{khi } -1 \leq x \leq 2 \\ 5x - 12 & \text{khi } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}.$$

$$\text{+) Từ đó } F(x) = \begin{cases} \frac{-x^3}{3} + 2x + C_1 & \text{khi } -1 \leq x \leq 2 \\ \frac{5x^2}{2} - 12x + C_2 & \text{khi } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}.$$

$$\text{Do } F(-1) = -\frac{5}{3} \Rightarrow C_1 = 0.$$

$$\text{Ta có } F(x) \text{ liên tục tại } x = 2 \text{ nên } \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{-x^3}{3} + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{5x^2}{2} - 12x + C_2 \right) \Rightarrow C_2 = \frac{46}{3}.$$

$$\text{Khi đó : } F(x) = \begin{cases} \frac{-x^3}{3} + 2x & \text{khi } -1 \leq x \leq 2 \\ \frac{5x^2}{2} - 12x + \frac{46}{3} & \text{khi } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } F(0) + F(3) = \frac{11}{6} \approx 1,8.$$

Câu 5: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t phút. Biết $h'(t) = 3at^2 + bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 phút thì thể tích nước trong bể là $150 dm^3$, sau 10 phút thì thể tích nước trong bể là $1100 dm^3$. Thể tích của nước trong bể sau khi bơm được 20 phút là bao nhiêu dm^3 ?

Lời giải

Trả lời: 8400.

$$\text{Ta có: } h(t) = \int h'(t) dt = \int (3at^2 + bt) dt = at^3 + b \frac{t^2}{2} + C.$$

$$\text{Do ban đầu bể không có nước nên } h(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow h(t) = at^3 + b \frac{t^2}{2}.$$

$$\text{Lúc 5 phút: } h(5) = a \cdot 5^3 + b \cdot \frac{5^2}{2} = 150 \quad (1).$$

$$\text{Lúc 10 phút: } h(10) = a \cdot 10^3 + b \cdot \frac{10^2}{2} = 1100 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } a = 1, b = 2 \Rightarrow h(t) = t^3 + t^2 \Rightarrow h(20) = 20^3 + 20^2 = 8400 dm^3.$$

Câu 6: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $F(1) = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S = F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2021)$ viết dưới dạng $a + \frac{1}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}$). Tổng $a + b$ bằng?

Lời giải**Trả lời: 4042**Xét trên khoảng $(0; +\infty)$:

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}.$$

Khi đó

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{(2x+1)}{(x^2+x)^2} dt = \int \frac{1}{(x^2+x)^2} d(x^2+x) = -\frac{1}{x^2+x} + C = -\frac{1}{x(x+1)} + C.$$

$$\text{Mặt khác, } F(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 1.$$

$$\text{Vậy } F(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + 1 = -\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right] + 1.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} S &= F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2021) = -\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2021.2022}\right) + 2021 \\ &= -\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022}\right) + 2021 = -\left(1 - \frac{1}{2022}\right) + 2021 \\ &= 2020 + \frac{1}{2022} = a + \frac{1}{b}. \text{ Suy ra } a = 2020; b = 2022. \end{aligned}$$

Vậy tổng $a + b = 2020 + 2022 = 4042$.

CHƯƠNG

IV

NGUYÊN HÀM
TÍCH PHÂNBÀI. NGUYÊN HÀM
ĐỀ TEST SỐ 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4$ là

- A. $x^4 + C$. B. $4x^3 + C$. C. $\frac{x^5}{5} + C$. D. $x^5 + C$.

Câu 2: Cho hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Biết $F(1) = 1$, tính $F(4)$.

- A. 7. B. 2. C. 5. D. 3.

Câu 3: Tìm khẳng định đúng.

- A. $\int \sin x \cdot dx = \cos x + C$. B. $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$.
C. $\int \cos x \cdot dx = -\sin x + C$ D. $\int \cos 2x \cdot dx = \sin 2x + C$.

Câu 4: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}$.

- A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C$. B. $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C$.
C. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C$. D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C$.

Câu 5: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là

- A. $e^x + \frac{x^2}{2} + C$. B. $e^x + x^2 + C$. C. $\frac{e^x}{\ln 2} + x^2 + C$. D. $e + \frac{x^2}{2} + C$.

Câu 6: Tính $\int \frac{1}{x \cdot \ln 2} \cdot \log_2 x \cdot dx$.

- A. $\log x^2 + C$. B. $\frac{\log_2^2 x}{2} + C$. C. $\log_2^2 x + C$. D. $\frac{\log_2 x^2}{2} + C$.

Câu 7: Tính $\int \frac{2}{x} \cdot \ln x \cdot dx$.

- A. $\ln^2 x + C$. B. $\ln x^2 + C$. C. $\ln x + C$. D. $2 \cdot \ln x + C$.

Câu 8: Họ tất cả các nguyên hàm của $f(x) = x^2 + \sin 2x$ là

- A. $2x + 2 \cos 2x + C$. B. $2x - 2 \cos 2x + C$. C. $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} \cos 2x + C$. D. $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cos 2x + C$.

Câu 9: Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{x^2 - 2025}{x(x^2 + 2025)} dx$.

A. $I = \ln \left| x - \frac{2025}{x} \right| + C$. **B.** $I = \ln \left| 1 - \frac{2025}{x} \right| + C$.

C. $I = \ln \left| x + \frac{2025}{x} \right| + C$. **D.** $I = \ln \left| 1 + \frac{2025}{x} \right| + C$.

Câu 10: Biết $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2025} + \sqrt{x+2024}} = a(x+2025)\sqrt{x+2025} + b(x+2024)\sqrt{x+2024} + C$ với a, b là các số hữu tỉ và C là hằng số bất kì. Tính $S = 2025a + 3b$.

A. 1348.

B. 4049.

C. -1348.

D. 1352.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-45; 45\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 2025}$, $f(25) = 0$. Tính $f(-50)$ thuộc khoảng nào?

A. $(0; 1)$.

B. $(-1; 0)$.

C. $(-2; -1)$.

D. $(1; 2)$.

Câu 12: Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{x^2 + 45}{x^4 - 90x^2 + 2025} dx$.

A. $I = \ln \left| \frac{x^2 + x - 45}{x^2 - x - 45} \right| + C$.

B. $I = \ln \left| \frac{x^2 - x - 45}{x^2 + x - 45} \right| + C$.

C. $I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2 + x - 45}{x^2 - x - 45} \right| + C$.

D. $I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2 - x - 45}{x^2 + x - 45} \right| + C$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 6x$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 2$.

a) $F(x) = f'(x)$.

b) $F'(x) = f(x)$.

c) $F(x) = x^4 - 3x^2 + 2$.

d) $F(1) = 3$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ và $F(x) = \int f(x) dx$.

a) $F'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.

b) Hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

c) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - x$.

d) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 1$. Khi đó $F(1) = \frac{5}{4}$.

Câu 3: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x}$.

- a) $\int f(x)dx = x + \ln|x| + C$.
- b) Nếu $F(1) = 0$ thì $F(2) = 2 + \ln 2$.
- c) $F(2x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(2x)$.
- d) Hàm số $f(e^x)$ có một nguyên hàm là $2x + e^{-x}$.

Câu 4: Cho hàm số $F(x) = \int (4^x + 2^x + 1)dx$.

- a) $F(x) = \int 4^x dx + \int 2^x dx + \int dx$.
- b) $F(x) = \frac{2^{2x} + 2^x}{\ln 2} + x + C$.
- c) Nếu $F(1) = \frac{4}{\ln 2}$ thì $F(2) = \frac{12}{\ln 2} - 1$.
- d) Nếu $G(x) = \int \frac{8^x + 1}{2^x + 1} dx$ thì $G(x) = F(x) + C$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(2)$ (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \cos x \cdot \sin^2 x$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2025$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 3: Biết rằng hàm số $F(x) = x + 2024$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$; hàm số $G(x) = \frac{x^2}{4} + 2025$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)$. Gọi $H(x) = \int f(x) \cdot g(x) dx$, biết $H(4) = 4$. Tính $H(1)$.

Câu 4: Một hồ bơi có dạng hình hộp chữ nhật có chiều cao 3,0(m) đang không chứa nước. Người ta cần thay nước mới cho hồ bơi nên dùng máy bơm để bơm nước vào hồ, giả sử $h(t)$ (m) là chiều cao của mực nước đã được bơm vào tại thời điểm t giờ. Biết rằng tốc độ tăng chiều cao của mực nước tại giờ thứ t kể từ lúc bắt đầu bơm nước vào hồ là $h'(t) = \frac{\sqrt[3]{t+3}}{5}$. Hỏi sau bao nhiêu giờ kể từ lúc bắt đầu bơm thì hồ đạt được độ sâu 2,1(m) (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 5: Một xe ô tô đang chuyển động đều thì người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật trên đường. Sau 1 giây thì người lái xe bắt đầu đạp phanh. Ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -5m/s^2$. Biết rằng kể từ lúc nhìn thấy chướng ngại vật cho đến khi dừng hẳn thì xe đi thêm được quãng đường 41,6 mét. Vận tốc của xe khi người lái xe bắt đầu phanh là bao nhiêu m/s ?

Câu 6: Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc $15m/s$ thì nhìn thấy chướng ngại vật trên đường cách đó 50m, người lái xe hãm phanh khẩn cấp. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -3t + 15(m/s)$, trong đó t (giây). Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4$ là

- A. $x^4 + C$. B. $4x^3 + C$. C. $\frac{x^5}{5} + C$. D. $x^5 + C$.

Lời giải

Ta có $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$. Vậy đáp án đúng là **C**.

Câu 2: Cho hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Biết $F(1) = 1$, tính $F(4)$.

- A. 7. B. 2. C. 5. D. 3.

Lời giải

Ta có $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$.

Khi đó: $F(1) = 1 \Leftrightarrow C = -1$. Suy ra $F(4) = 4 - 1 = 3$. Vậy đáp án đúng là **D**.

Câu 3: Tìm khẳng định đúng.

- A. $\int \sin x dx = \cos x + C$. B. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
C. $\int \cos x dx = -\sin x + C$ D. $\int \cos 2x dx = \sin 2x + C$.

Lời giải

Ta có $\int \sin x dx = -\cos x + C$. Vậy đáp án đúng là **B**.

Câu 4: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}$.

- A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C$. B. $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C$.
C. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C$. D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C$.

Lời giải

Ta có: $\int \left(x^2 - 3^x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C$.

Câu 5: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là

- A. $e^x + \frac{x^2}{2} + C$. B. $e^x + x^2 + C$. C. $\frac{e^x}{\ln 2} + x^2 + C$. D. $e + \frac{x^2}{2} + C$.

Lời giải

Ta có $\int (e^x + x) dx = e^x + \frac{1}{2}x^2 + C$.

Câu 6: Tính $\int \frac{1}{x \ln 2} \cdot \log_2 x dx$.

- A. $\log x^2 + C$. B. $\frac{\log_2^2 x}{2} + C$. C. $\log_2^2 x + C$. D. $\frac{\log_2 x^2}{2} + C$.

Lời giải

Ta có

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln 2} \cdot \log_2 x dx = \int \log_2 x \cdot \left(\frac{1}{x \cdot \ln 2} \right) dx = \int \log_2 x \cdot (\log_2 x)' dx = \int \log_2 x dx (\log_2 x) = \frac{\log_2^2 x}{2} + C.$$

Câu 7: Tính $\int \frac{2}{x} \cdot \ln x dx$.

A. $\ln^2 x + C$.

B. $\ln x^2 + C$.

C. $\ln x + C$.

D. $2 \cdot \ln x + C$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int \frac{2}{x} \cdot \ln x dx = 2 \int \frac{1}{x} \cdot \ln x dx = 2 \int (\ln x)' \cdot \ln x dx = 2 \int \ln x d(\ln x) = 2 \frac{\ln^2 x}{2} = \ln^2 x.$$

Câu 8: Họ tất cả các nguyên hàm của $f(x) = x^2 + \sin 2x$ là

A. $2x + 2 \cos 2x + C$.

B. $2x - 2 \cos 2x + C$.

C. $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} \cos 2x + C$.

D. $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cos 2x + C$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int (x^2 + \sin 2x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

Câu 9: Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{x^2 - 2025}{x(x^2 + 2025)} dx$.

A. $I = \ln \left| x - \frac{2025}{x} \right| + C$.

B. $I = \ln \left| 1 - \frac{2025}{x} \right| + C$.

C. $I = \ln \left| x + \frac{2025}{x} \right| + C$.

D. $I = \ln \left| 1 + \frac{2025}{x} \right| + C$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } I = \int \frac{x^2 - 2025}{x(x^2 + 2025)} dx = \int \frac{1 - \frac{2025}{x^2}}{\frac{2025}{x + \frac{2025}{x}}} dx = \int \frac{1}{\left(x + \frac{2025}{x} \right)} d \left(x + \frac{2025}{x} \right)$$

$$\text{Vậy } I = \ln \left| x + \frac{2025}{x} \right| + C.$$

Câu 10: Biết $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2025} + \sqrt{x+2024}} = a(x+2025)\sqrt{x+2025} + b(x+2024)\sqrt{x+2024} + C$ với a, b là các số hữu tỉ và C là hằng số bất kì. Tính $S = 2025a + 3b$.

A. 1348.

B. 4049.

C. -1348.

D. 1352.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int \frac{dx}{\sqrt{x+2025} + \sqrt{x+2024}} &= \int \frac{\sqrt{x+2025} - \sqrt{x+2024}}{x+2025 - (x+2024)} dx = \int (\sqrt{x+2025} - \sqrt{x+2024}) dx \\ &= \frac{2}{3} (x+2025)\sqrt{x+2025} - \frac{2}{3} (x+2024)\sqrt{x+2024} + C. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } a = \frac{2}{3}, b = -\frac{2}{3}. \text{ Vậy } S = 2025a + 3b = 1348.$$

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-45; 45\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 2025}$, $f(25) = 0$. Tính $f(-50)$ thuộc khoảng nào?

- A.** $(0; 1)$. **B.** $(-1; 0)$. **C.** $(-2; -1)$. **D.** $(1; 2)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x^2 - 2025} dx = \frac{1}{90} \int \left(\frac{1}{x-45} - \frac{1}{x+45} \right) dx = \frac{1}{90} \ln \left| \frac{x-45}{x+45} \right| + C$$

$$\text{Mà } f(25) = 0 \Rightarrow \frac{1}{90} \ln \frac{2}{7} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{90} \ln \frac{2}{7}$$

$$\text{Khi đó } f(x) = \frac{1}{90} \ln \left| \frac{x-45}{x+45} \right| - \frac{1}{90} \ln \frac{2}{7}$$

$$\text{Do đó } f(-50) = \frac{1}{90} \ln 19 - \frac{1}{90} \ln \frac{2}{7} = \frac{1}{90} \ln \frac{133}{2} \approx 0,047 \in (0; 1)$$

Câu 12: Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{x^2 + 45}{x^4 - 90x^2 + 2025} dx$.

- A.** $I = \ln \left| \frac{x^2 + x - 45}{x^2 - x - 45} \right| + C$. **B.** $I = \ln \left| \frac{x^2 - x - 45}{x^2 + x - 45} \right| + C$.
C. $I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2 + x - 45}{x^2 - x - 45} \right| + C$. **D.** $I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2 - x - 45}{x^2 + x - 45} \right| + C$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } I &= \int \frac{x^2 + 45}{x^4 - 90x^2 + 2025} dx = \int \frac{1 + \frac{45}{x^2}}{x^2 - 91 + \frac{2025}{x^2}} dx = \int \frac{\left(1 + \frac{45}{x^2}\right)}{x^2 + \frac{45^2}{x^2} - 91} dx = \int \frac{\left(1 + \frac{45}{x^2}\right)}{\left(x - \frac{45}{x}\right)^2 - 1} dx \\ &= \int \frac{1}{\left(x - \frac{45}{x}\right)^2 - 1} d\left(x - \frac{45}{x}\right) = \frac{1}{2} \left[\ln \left|x - \frac{45}{x} - 1\right| - \ln \left|x - \frac{45}{x} + 1\right| \right] = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2 - x - 45}{x^2 + x - 45} \right| + C. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2 - x - 45}{x^2 + x - 45} \right| + C.$$

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 4x^3 - 6x$. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 2$.

- a) $F(x) = f'(x)$.
 b) $F'(x) = f(x)$.
 c) $F(x) = x^4 - 3x^2 + 2$.
 d) $F(1) = 3$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------------	----------------	----------------	---------------

+) Theo định nghĩa $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ nên $F'(x) = f(x)$ suy ra a) sai và b)

đúng.

+) Ta có: $F(x) = \int 4x^3 dx - \int 6x dx = x^4 - 3x^2 + C$.

Theo giả thiết $F(0) = 2$ suy ra $C = 2 \Rightarrow F(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ nên c) đúng.

+) Vì c) đúng suy ra $F(1) = 1^4 - 3 \cdot 1^2 + 2 = 0$ suy ra d) sai.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ và $F(x) = \int f(x) dx$.

a) $F'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.

b) Hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

c) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - x$.

d) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 1$. Khi đó $F(1) = \frac{5}{4}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Do $F(x) = \int f(x) dx$ nên $F'(x) = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$. Vậy câu a) đúng.

b) Do $y' = x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = f(x)$ nên câu b) đúng.

c) Do $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - x + C$. Vậy câu c) sai.

d) Có $F(0) = C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \Rightarrow F(1) = \frac{1}{4}$. Vậy câu d) sai.

Câu 3: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x}$.

a) $\int f(x) dx = x + \ln|x| + C$.

b) Nếu $F(1) = 0$ thì $F(2) = 2 + \ln 2$.

c) $F(2x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(2x)$.

d) Hàm số $f(e^x)$ có một nguyên hàm là $2x + e^{-x}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
--------	---------	--------	--------

a) Sai.

Ta có $\int f(x) dx = \int \frac{2x+1}{x} dx = \int \left(2 + \frac{1}{x} \right) dx = 2x + \ln|x| + C$.

b) Đúng.

Ta có $\int f(x) dx = \int \frac{2x+1}{x} dx = \int \left(2 + \frac{1}{x} \right) dx = 2x + \ln|x| + C$, suy ra $F(x) = 2x + \ln|x| + C$.

Mà $F(1) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 + C = 0 \Leftrightarrow C = -2$.

Vậy $F(2) = 2 \cdot 2 + \ln 2 - 2 = 2 + \ln 2$

c) Sai

Ta có $f(x) = \frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x} \Rightarrow f(2x) = 2 + \frac{1}{2x}$.

$$\int f(2x) dx = \int \left(2 + \frac{1}{2x}\right) dx = 2x + \frac{1}{2} \ln|x| + C.$$

Mà $F(x) = 2x + \ln|x| + C \Rightarrow F(2x) = 4x + \ln|2x| + C$.

Vậy $F(2x)$ không phải là một nguyên hàm của hàm số $f(2x)$.

d) Sai.

Hàm số $f(e^x) = 2 + \frac{1}{e^x} = 2 + e^{-x} \Rightarrow \int f(e^x) dx = \int (2 + e^{-x}) dx = 2x - e^{-x} + C$.

Câu 4: Cho hàm số $F(x) = \int (4^x + 2^x + 1) dx$.

a) $F(x) = \int 4^x dx + \int 2^x dx + \int dx$.

b) $F(x) = \frac{2^{2x} + 2^x}{\ln 2} + x + C$.

c) Nếu $F(1) = \frac{4}{\ln 2}$ thì $F(2) = \frac{12}{\ln 2} - 1$.

d) Nếu $G(x) = \int \frac{8^x + 1}{2^x + 1} dx$ thì $G(x) = F(x) + C$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

a) Theo tính chất của nguyên hàm, ta có: $F(x) = \int (4^x + 2^x + 1) dx = \int 4^x dx + \int 2^x dx + \int dx$.

Vậy a) đúng.

b) $F(x) = \int (4^x + 2^x + 1) dx = \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2^x}{\ln 2} + x + C = \frac{2^{2x}}{2 \ln 2} + \frac{2^x}{\ln 2} + x + C = \frac{2^{2x-1} + 2^x}{\ln 2} + x + C$.

Vậy b) sai.

c) Do $F(x) = \frac{2^{2x-1} + 2^x}{\ln 2} + x + C$ và $F(1) = \frac{4}{\ln 2}$ nên $\frac{4}{\ln 2} + 1 + C = \frac{4}{\ln 2} \Leftrightarrow C = -1$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{2^{2x-1} + 2^x}{\ln 2} + x - 1 \Rightarrow F(2) = \frac{12}{\ln 2} + 1.$$

Vậy c) sai.

d) Ta có:

$$G(x) = \int \frac{8^x + 1}{2^x + 1} dx = \int \frac{2^{3x} + 1}{2^x + 1} dx = \int \frac{(2^x + 1)(4^x - 2^x + 1)}{2^x + 1} dx = \int (4^x - 2^x + 1) dx \neq F(x) + C.$$

Vậy d) sai.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(2)$ (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 11,9.

$$F(x) = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C.$$

$$F(0) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^0 + C = \frac{3}{2} \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}.$$

$$F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}.$$

$$F(2) \approx 11,9.$$

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \cos x \cdot \sin^2 x$ có một nguyên hàm $F(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2025$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Trả lời: 2025.

$$\begin{aligned} +) \text{ Ta có } f(x) &= \cos x \cdot \sin^2 x = \cos x \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) = \frac{1}{2} (\cos x - \cos x \cos 2x) \\ &= \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{4} (\cos 3x + \cos x) = \frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{4} \cos 3x. \end{aligned}$$

$$+) F(x) = \int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{4} \cos 3x \right) dx = \frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{12} \sin 3x + C.$$

$$\text{Lại có: } F(0) = 2025 \Rightarrow C = 2025 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4} \sin x - \frac{1}{12} \sin 3x + 2025$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{12} \sin \frac{3\pi}{2} + 2025 = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + 2025 = \frac{6076}{3} \approx 2025.$$

$$\text{Vậy } F\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 2025.$$

Câu 3: Biết rằng hàm số $F(x) = x + 2024$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$; hàm số $G(x) = \frac{x^2}{4} + 2025$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)$. Gọi $H(x) = \int f(x) \cdot g(x) dx$, biết $H(4) = 4$. Tính $H(1)$.

Lời giải

$$\text{Trả lời: } \frac{1}{4} = 0,25$$

$$* f(x) = F'(x) = 1; g(x) = G'(x) = \frac{x}{2}.$$

$$* H(x) = \int f(x) \cdot g(x) dx = \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4} + C$$

$$* H(4) = 4 \text{ nên suy ra } C = 0. \text{ Do đó } H(x) = \frac{x^2}{4}.$$

$$* H(1) = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Câu 4: Một hồ bơi có dạng hình hộp chữ nhật có chiều cao 3,0(m) đang không chứa nước. Người ta cần thay nước mới cho hồ bơi nên dùng máy bơm để bơm nước vào hồ, giả sử $h(t)$ (m) là chiều cao của mực nước đã được bơm vào tại thời điểm t giờ. Biết rằng tốc độ tăng chiều cao của mực

nước tại giờ thứ t kể từ lúc bắt đầu bơm nước vào hồ là $h'(t) = \frac{\sqrt[3]{t+3}}{5}$. Hỏi sau bao nhiêu giờ kể từ lúc bắt đầu bơm thì hồ đạt được độ sâu 2,1(m) (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Trả lời: 6 .

$$* h(t) = \int h'(t) dt = \frac{1}{5} \int (t+3)^{\frac{1}{3}} dt = \frac{3}{20} (t+3)^{\frac{4}{3}} + C.$$

$$* h(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{9\sqrt[3]{3}}{20} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{9\sqrt[3]{3}}{20} \rightarrow h(t) = \frac{3}{20} (t+3)^{\frac{4}{3}} - \frac{9\sqrt[3]{3}}{20}.$$

$$* h(t) = 2,1 \Leftrightarrow \frac{3}{20} (t+3)^{\frac{4}{3}} - \frac{9\sqrt[3]{3}}{20} = 2,1 \Leftrightarrow (t+3)^{\frac{4}{3}} \approx 18,33 \rightarrow t \approx 6.$$

Vậy sau khi bơm khoảng 6 giờ thì độ sâu của mực nước trong hồ là 2,1 (m).

Câu 5: Một xe ô tô đang chuyển động đều thì người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật trên đường. Sau 1 giây thì người lái xe bắt đầu đạp phanh. Ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -5m/s^2$. Biết rằng kể từ lúc nhìn thấy chướng ngại vật cho đến khi dừng hẳn thì xe đi thêm được quãng đường 41,6 mét. Vận tốc của xe khi người lái xe bắt đầu phanh là bao nhiêu m/s ?

Lời giải

Trả lời: 16

Gọi vận tốc của xe khi bắt đầu phanh là v_0 (m/s)

Vận tốc tại thời điểm t kể từ lúc bắt đầu phanh là: $v(t) = \int (-5) dt = -5t + C$.

Vận tốc của vật tại thời điểm bắt đầu phanh xe là v_0 (m/s) nên ta có

$$v(0) = v_0 \Rightarrow C = v_0 \Rightarrow v(t) = -5t + v_0$$

Quãng đường vật đi được tại thời điểm t kể từ khi bắt đầu đạp phanh là $S(t) = \int v(t) dt$

$$= \int (-5t + v_0) dt = -\frac{5}{2} t^2 + v_0 t + C.$$

$$\text{Ta có } S(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow S(t) = -\frac{5}{2} t^2 + v_0 t.$$

$$\text{Khi xe dừng hẳn ta có } v(t) = 0 \Leftrightarrow -5t + v_0 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{v_0}{5}.$$

Quãng đường xe đi được từ khi bắt đầu đạp phanh đến khi dừng hẳn là

$$S = S\left(\frac{v_0}{5}\right) = -\frac{5}{2} \left(\frac{v_0}{5}\right)^2 + \frac{v_0^2}{5} = \frac{v_0^2}{10} \text{ (m)}.$$

Quãng đường người lái xe đi từ khi nhìn thấy chướng ngại vật đến khi đạp phanh là v_0 (m).

$$\text{Theo bài ra ta có phương trình } \frac{v_0^2}{10} + v_0 = 41,6.$$

$$\text{Giải phương trình ta được } \begin{cases} v_0 = 16 \\ v_0 = -26 \end{cases}.$$

Vậy vận tốc khi người lái xe bắt đầu phanh là 16 (m/s).

Câu 6: Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc $15m/s$ thì nhìn thấy chướng ngại vật trên đường cách đó 50m, người lái xe hãm phanh khẩn cấp. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với

vận tốc $v(t) = -3t + 15 (m/s)$, trong đó t (giây). Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô đi chuyển được bao nhiêu mét? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 37,5

Quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) là một nguyên hàm của $v(t)$ nên:

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (-3t + 15) dt = -\frac{3t^2}{2} + 15t + C$$

$$\Rightarrow s(t) = -\frac{3t^2}{2} + 15t + C$$

$$\text{Cho } t = 0 \Rightarrow s(0) = 0$$

$$\Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow s(t) = -\frac{3t^2}{2} + 15t$$

$$\text{Khi xe dừng hẳn thì } v(t) = 0 \Leftrightarrow -3t + 15 = 0 \Rightarrow t = 5.$$

Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây.

$$\text{Sau khi đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe đi được quãng đường: } s(5) = -\frac{3 \cdot 5^2}{2} + 15 \cdot 5 = 37,5 (m)$$

----- **HẾT** -----

CHƯƠNG

IV

NGUYÊN HÀM
TÍCH PHÂNBÀI. TÍCH PHÂN
ĐỀ TEST SỐ 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tính $\int_{-1}^3 x^2 dx$ được kết quả là

A. $\frac{28}{3}$.

B. $\frac{26}{3}$.

C. $\frac{25}{3}$.

D. $\frac{29}{3}$.

Câu 2: Cho $I = \int_{-1}^3 |2x - 4| dx$. Chọn khẳng định đúng.

A. $I = \left| \int_{-1}^3 (2x - 4) dx \right|$.

B. $I = -\int_{-1}^2 (2x - 4) dx + \int_2^3 (2x - 4) dx$.

C. $I = \int_{-1}^2 (2x - 4) dx + \int_2^3 (2x - 4) dx$.

D. $I = \int_{-1}^2 (2x - 4) dx - \int_2^3 (2x - 4) dx$.

Câu 3: Tính $\int_1^3 \frac{2x^2 + 1}{x} dx$ được kết quả là

A. $8 - \ln 3$.

B. $8 + 2 \ln 3$.

C. $8 + \ln 3$.

D. $7 + \ln 3$.

Câu 4: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx$ được kết quả là

A. -1 .

B. $-\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 1 .

Câu 5: Kết quả phép tính $\int_1^2 3^x dx$ bằng

A. $\frac{2}{\ln 3}$.

B. 6 .

C. $\frac{-6}{\ln 3}$.

D. $\frac{6}{\ln 3}$.

Câu 6: Biết rằng $\int_1^3 f(t) dt = 4$. Tính $\int_1^3 2f(x) dx$

A. 2 .

B. 6 .

C. 4 .

D. 8 .

Câu 7: Biết rằng $\int_0^3 (2x + 1)^2 dx = \left(\frac{a}{3} x^3 + bx^2 + cx \right) \Big|_0^3$. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$

A. 9 .

B. 5 .

C. 6 .

D. 7 .

Câu 8: Biết $I = \int_{-2}^2 |x+1| dx$. Tìm mệnh đề đúng

- A.** $I = \int_{-2}^2 |x+1| dx = \int_{-1}^2 (x+1) dx + \int_{-2}^{-1} (x+1) dx$. **B.** $I = \int_{-2}^2 |x+1| dx = \int_{-2}^{-1} (x+1) dx - \int_{-1}^2 (x+1) dx$.
C. $I = \int_{-2}^2 |x+1| dx = \int_{-2}^2 (x+1) dx$. **D.** $I = \int_{-2}^2 |x+1| dx = \int_{-1}^2 (x+1) dx - \int_{-2}^{-1} (x+1) dx$.

Câu 9: Kết quả phép tính $I = \int_1^2 \frac{x^2 + 2x + 3}{x} dx$ bằng.

- A.** $I = 6 + 3 \ln 2$. **B.** $I = \frac{5}{2} - 3 \ln 2$. **C.** $I = \frac{3}{2} - 3 \ln 2$. **D.** $I = \frac{7}{2} + 3 \ln 2$

Câu 10: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x - \sin x + 4) dx$

- A.** $\frac{\pi^2 + 16\pi + 8\sqrt{2} - 16}{16}$. **B.** $\frac{\pi^2 + 16\pi + 2\sqrt{2} - 4}{16}$.
C. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 8\sqrt{2}}{16}$. **D.** $\frac{\pi^2 + 16\pi - 16}{16}$.

Câu 11: Tính $\int_{-3}^1 \sqrt{3 - 2x - x^2} dx$

- A.** 2π . **B.** 4π . **C.** 6π . **D.** 9π .

Câu 12: Khu vực trung tâm một quảng trường có dạng hình tròn đường kính AB bằng 10m. Người ta trang trí khu vực này bằng hai đường Parabol đối xứng nhau qua AB, nằm trong hình tròn, đi qua các điểm A, B và có đỉnh cách mép hình tròn 1m. Phần giới hạn bởi 2 parabol được trồng hoa với chi phí 200 nghìn đồng 1 mét vuông, phần còn lại được lát gốm sứ với chi phí 800 nghìn đồng 1 mét vuông. Tổng chi phí để hoàn thành khu vực này gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A.** 15,708 (triệu đồng). **B.** 42,667 (triệu đồng).
C. 20,165 (triệu đồng). **D.** 30,832 (triệu đồng).

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = e^x$.

- a)** Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
b) $f'(1) = e$.
c) $\int_0^{\ln 2} f'(x) dx = 1$.
d) $\int_0^1 f(x) dx = e + 1$.

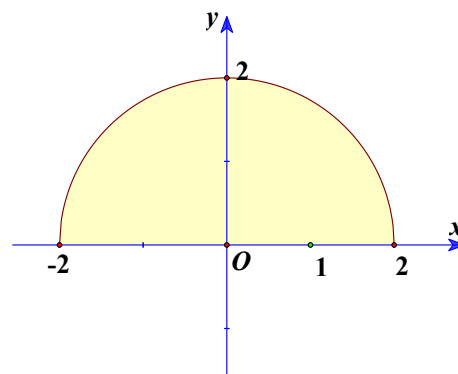
Câu 2: Cho hàm số $y = \sqrt{4-x^2}$.

a) $y = \sqrt{4-x^2}$, $x \in [0; 2]$ là phương trình một phần tư của đường tròn tâm tại gốc toạ độ O, bán kính bằng 2 và nằm ở góc phần tư thứ I.

b) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$ là một phần hai diện tích hình tròn như hình bên.

c) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2$.

d) $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = 2\pi$.



Câu 3: Tại một nhà máy sản xuất một loại phân bón, gọi $P(x)$ là lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x (tấn) sản phẩm trong một tuần. Khi đó đạo hàm $P'(x)$ gọi là lợi nhuận cận biên, cho biết tốc độ tăng lợi nhuận theo lượng sản phẩm bán được. Giả sử lợi nhuận cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức

$$P'(x) = 17 - 0,025x \text{ với } 0 \leq x \leq 100$$

Biết nhà máy lỗ 24 triệu đồng nếu không bán được lượng sản phẩm nào trong tuần.

a) Công thức lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x (tấn) sản phẩm trong một tuần là $P(x) = 17x - 0,0125x^2 + C$ với C là một hằng số bất kỳ

b) Có thể tính được lợi nhuận của nhà máy thu được khi bán 120 tấn sản phẩm trong tuần.

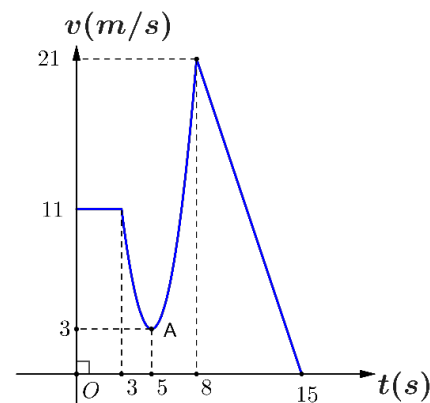
c) Lợi nhuận nhà máy thu được khi bán 80 tấn sản phẩm trong tuần là 1 tỉ 256 triệu đồng.

d) Nếu nhà máy bán được từ 1,3 tấn sản phẩm trên tuần trở lên thì nhà máy luôn có lãi.

Câu 4: Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)$ (m/s)

có dạng đường thẳng khi $0 \leq t \leq 3(s)$ và $8 \leq t \leq 15(s)$ và

$v(t)$ có dạng đường Parabol khi $3 \leq t \leq 8(s)$ (như hình vẽ)



a) Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 15$ là $v(15) = 21(m/s)$.

b) Quãng đường chất điểm di chuyển được trong 3 giây đầu tiên là: $S_1 = \int_0^3 11 dt$ (m)

c) Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian từ 8 giây đến 15 giây bằng 73,5(m).

d) Vận tốc trung bình v_{tb} của chất điểm trong khoảng thời gian từ 3 đến 8 giây thỏa mãn $v_{tb} < 7(m/s)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{ khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - x & \text{ khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x) dx$.

Câu 2: Cho $0 \leq m \leq 2$ và tích phân $I = \int_0^m |x - 2| dx = 2$. Tìm m bằng

Câu 3: Cho tích phân $\int_1^2 \left(\frac{x^2 + 1}{x} \right) dx = \ln a + \frac{b}{c}$, biết a, b, c là số nguyên. Tính tổng $a + b + c$.

Câu 4: Một vật chuyển động với gia tốc được cho bởi hàm số $a(t) = 10 \sin t$ (m/s²). Lúc bắt đầu chuyển động vật có vận tốc 5 m/s. Tính gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất trong π (s) đầu tiên.

Câu 5: Trường THPT Lê Quý Đôn muốn làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Tính số tiền nhà trường phải trả (đơn vị nghìn đồng).

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên R thỏa mãn điều kiện

$$f(x) + x(f'(x) - 2 \sin x) = x^2 \cos x, x \in R \text{ và } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \text{ Tính } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x} dx$$

----- **HẾT** -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tính $\int_{-1}^3 x^2 dx$ được kết quả là

A. $\frac{28}{3}$.

B. $\frac{26}{3}$.

C. $\frac{25}{3}$.

D. $\frac{29}{3}$.

Lời giải

Ta có $\int_{-1}^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^3 = \frac{1}{3} [3^3 - (-1)^3] = \frac{28}{3}$.

Câu 2: Cho $I = \int_{-1}^3 |2x - 4| dx$. Chọn khẳng định đúng.

A. $I = \left| \int_{-1}^3 (2x - 4) dx \right|$.

B. $I = -\int_{-1}^2 (2x - 4) dx + \int_2^3 (2x - 4) dx$.

C. $I = \int_{-1}^2 (2x - 4) dx + \int_2^3 (2x - 4) dx$.

D. $I = \int_{-1}^2 (2x - 4) dx - \int_2^3 (2x - 4) dx$.

Lời giải

Ta thấy $2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Vậy $I = \int_{-1}^3 |2x - 4| dx = -\int_{-1}^2 (2x - 4) dx + \int_2^3 (2x - 4) dx$.

Câu 3: Tính $\int_1^3 \frac{2x^2 + 1}{x} dx$ được kết quả là

A. $8 - \ln 3$.

B. $8 + 2 \ln 3$.

C. $8 + \ln 3$.

D. $7 + \ln 3$.

Lời giải

Ta có $\int_1^3 \frac{2x^2 + 1}{x} dx = \int_1^3 \left(2x + \frac{1}{x} \right) dx = \left(x^2 + \ln|x| \right) \Big|_1^3 = (3^2 + \ln 3) - 1^2 = 8 + \ln 3$.

Câu 4: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx$ được kết quả là

A. -1 .

B. $-\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 1 .

Lời giải

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin \frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2}$.

Câu 5: Kết quả phép tính $\int_1^2 3^x dx$ bằng

A. $\frac{2}{\ln 3}$.

B. 6 .

C. $\frac{-6}{\ln 3}$.

D. $\frac{6}{\ln 3}$.

Lời giải

Ta có: $\int_1^2 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} \Big|_1^2 = \frac{9}{\ln 3} - \frac{3}{\ln 3} = \frac{6}{\ln 3}$

Câu 6: Biết rằng $\int_1^3 f(t) dt = 4$. Tính $\int_1^3 2f(x) dx$

A. 2.

B. 6.

C. 4.

D. 8

Lời giải

Ta có: $\int_1^3 f(t) dt = 4 \Rightarrow \int_1^3 f(x) dx = 4 \Rightarrow \int_1^3 2f(x) dx = 2 \cdot \int_1^3 f(x) dx = 8$

Câu 7: Biết rằng $\int_0^3 (2x+1)^2 dx = \left(\frac{a}{3}x^3 + bx^2 + cx \right) \Big|_0^3$. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$

A. 9.

B. 5.

C. 6.

D. 7

Lời giải

Ta có: $\int_0^3 (2x+1)^2 dx = \int_0^3 (4x^2 + 4x + 1) dx = \left(\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x \right) \Big|_0^3$. Do vậy $T = 4 + 2 + 1 = 7$

Câu 8: Biết $I = \int_{-2}^2 |x+1| dx$. Tìm mệnh đề đúng

A. $I = \int_{-2}^2 |x+1| dx = \int_{-1}^2 (x+1) dx + \int_{-2}^{-1} (x+1) dx$. B. $I = \int_{-2}^2 |x+1| dx = \int_{-2}^{-1} (x+1) dx - \int_{-1}^2 (x+1) dx$.

C. $I = \int_{-2}^2 |x+1| dx = \int_{-2}^2 (x+1) dx$. **D. $I = \int_{-2}^2 |x+1| dx = \int_{-1}^2 (x+1) dx - \int_{-2}^{-1} (x+1) dx$.**

Lời giải

Ta có: $I = \int_{-2}^2 |x+1| dx = \int_{-2}^{-1} |x+1| dx + \int_{-1}^2 |x+1| dx = \int_{-2}^{-1} -(x+1) dx + \int_{-1}^2 (x+1) dx$

Câu 9: Kết quả phép tính $I = \int_1^2 \frac{x^2 + 2x + 3}{x} dx$ bằng.

A. $I = 6 + 3 \ln 2$.

B. $I = \frac{5}{2} - 3 \ln 2$.

C. $I = \frac{3}{2} - 3 \ln 2$.

D. $I = \frac{7}{2} + 3 \ln 2$

Lời giải

Ta có: $\int_1^2 \frac{x^2 + 2x + 3}{x} dx = \int_1^2 \left(x + 2 + \frac{3}{x} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x + 3 \ln |x| \right) \Big|_1^2 = \frac{7}{2} + 3 \ln 2$

Câu 10: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x - \sin x + 4) dx$

A. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 8\sqrt{2} - 16}{16}$. B. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 2\sqrt{2} - 4}{16}$.

C. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 8\sqrt{2}}{16}$. **D. $\frac{\pi^2 + 16\pi - 16}{16}$.**

Lời giải

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x - \sin x + 4) dx = \left(x^2 + \cos x + 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi - 1 = \frac{\pi^2 + 16\pi + 8\sqrt{2} - 16}{16}.$$

Câu 11: Tính $\int_{-3}^1 \sqrt{3-2x-x^2} dx$

A. 2π .

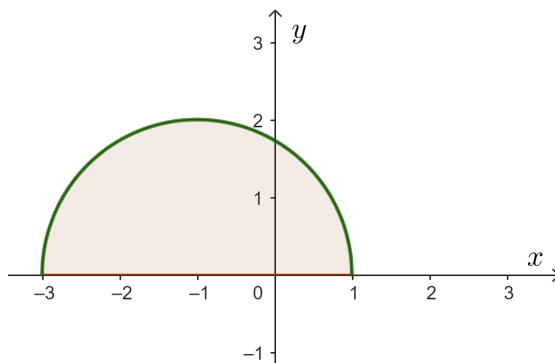
B. 4π .

C. 6π .

D. 9π .

Lời giải

Ta có $y = \sqrt{3-2x-x^2}$ là phương trình nửa phía trên trục hoành của đường tròn tâm $I(-1;0)$ và bán kính $R = 2$. Do đó, tích phân cần tính là diện tích nửa phía trên trục hoành của hình tròn tương ứng.



$$\int_{-3}^1 \sqrt{3-2x-x^2} dx = \frac{1}{2} \pi 2^2 = 2\pi$$

Câu 12: Khu vực trung tâm một quảng trường có dạng hình tròn đường kính AB bằng 10m. Người ta trang trí khu vực này bằng hai đường Parabol đối xứng nhau qua AB, nằm trong hình tròn, đi qua các điểm A, B và có đỉnh cách mép hình tròn 1m. Phần giới hạn bởi 2 parabol được trồng hoa với chi phí 200 nghìn đồng 1 mét vuông, phần còn lại được lát gốm sứ với chi phí 800 nghìn đồng 1 mét vuông. Tổng chi phí để hoàn thành khu vực này gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 15,708 (triệu đồng).

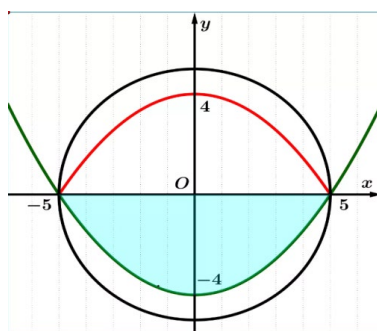
B. 42,667 (triệu đồng).

C. 20,165 (triệu đồng).

D. 30,832 (triệu đồng).

Lời giải

Xét hệ trục độ như hình vẽ.



Phương trình đường tròn là: $x^2 + y^2 = 25$

Phương trình của Parabol có bề lõm hướng lên là: $y = \frac{4}{25}x^2 - 4$

Diện tích phần trồng hoa giới hạn bởi 2 parabol là:

$$S_1 = 2 \int_{-5}^5 \left(\frac{4}{25}x^2 - 4 \right) dx = 4 \int_0^5 \left(\frac{4}{25}x^2 - 4 \right) dx = \frac{160}{3} (m^2).$$

Diện tích toàn bộ phần hình tròn là: $S_2 = 25\pi (m^2)$

Diện tích phần còn lại để trang trí gốm sứ là: $S = S_2 - S_1 = 25\pi - \frac{160}{3} (m^2)$.

Vậy tổng chi phí để làm khu vực trung tâm quảng trường là

$$\frac{160}{3} \cdot 200 + \left(25\pi - \frac{160}{3} \right) \cdot 800 = 30,832 \text{ (triệu đồng)}.$$

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = e^x$.

a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) $f'(1) = e$.

c) $\int_0^{\ln 2} f'(x) dx = 1$.

d) $\int_0^1 f(x) dx = e + 1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Hàm $y = e^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ vì $e > 1$.

b) $f'(x) = e^x \Rightarrow f'(1) = e$.

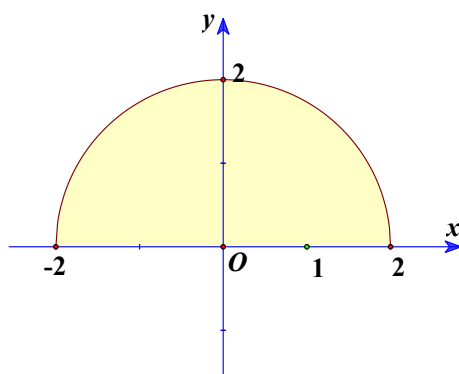
c) $\int_0^{\ln 2} f'(x) dx = f(x) \Big|_0^{\ln 2} = e^x \Big|_0^{\ln 2} = 2 - 1 = 1$.

d) $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$.

a) $y = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [0; 2]$ là phương trình một phần tư của đường tròn tâm tại gốc toạ độ O, bán kính bằng 2 và nằm ở góc phần tư thứ I.

b) $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$ là một phần hai diện tích hình tròn như hình bên dưới



c) $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2$.

d) $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = 2\pi$.

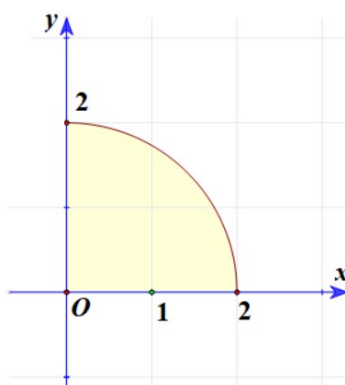
Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) $y = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$. Suy ra $y = \sqrt{4-x^2}$, $x \in [0; 2]$ là phương trình một phần tư của

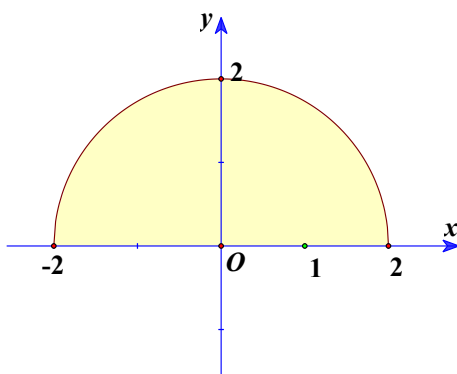
đường tròn tâm tại gốc tọa độ O, bán kính bằng 2 và nằm ở góc phần tư thứ I.

b) Sử dụng ý nghĩa hình học của tích phân thì $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$ là một phần tư diện tích hình tròn như hình bên dưới



c) Theo câu b thì $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2$

d) $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$ là một phần hai diện tích hình tròn như hình bên dưới



Do đó $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = 2\pi$.

Câu 3: Tại một nhà máy sản xuất một loại phân bón, gọi $P(x)$ là lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x (tấn) sản phẩm trong một tuần. Khi đó đạo hàm $P'(x)$ gọi là lợi nhuận cận biên, cho biết tốc độ tăng lợi nhuận theo lượng sản phẩm bán được. Giả sử lợi nhuận cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức

$$P'(x) = 17 - 0,025x \text{ với } 0 \leq x \leq 100$$

Biết nhà máy lỗ 24 triệu đồng nếu không bán được lượng sản phẩm nào trong tuần.

- a) Công thức lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x (tấn) sản phẩm trong một tuần là $P(x) = 17x - 0,0125x^2 + C$ với C là một hằng số bất kỳ
- b) Có thể tính được lợi nhuận của nhà máy thu được khi bán 120 tấn sản phẩm trong tuần.
- c) Lợi nhuận nhà máy thu được khi bán 80 tấn sản phẩm trong tuần là 1 tỉ 256 triệu đồng.
- d) Nếu nhà máy bán được từ 1,3 tấn sản phẩm trên tuần trở lên thì nhà máy luôn có lãi.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
--------	--------	---------	--------

a) **Sai** vì $C = -24$, không phải C bất kỳ.

$$P(x) = \int P'(x)dx = \int (17 - 0,025x)dx = 17x - 0,0125x^2 + C \text{ với } 0 \leq x \leq 100$$

Vì nhà máy lỗ 24 triệu đồng nếu không bán được lượng sản phẩm nào trong tuần nên

$$x = 0 \text{ thì } P(x) = -24, \text{ suy ra } P(0) = -24 \Leftrightarrow C = -24 \Rightarrow P(x) = 17x - 0,0125x^2 - 24$$

b) **Sai** vì chưa có công thức tính $P'(x)$ khi x lớn hơn 100. Công thức $P'(x)$ đề cho chỉ áp dụng được khi

$$0 \leq x \leq 100$$

c) **Đúng**

Khi bán 80 tấn sản phẩm trong tuần thì $x = 80$

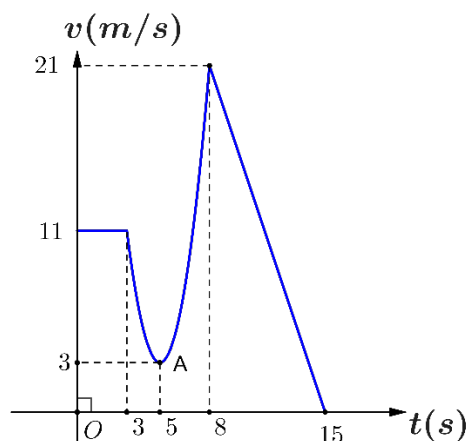
$$P(80) = 1256 \text{ triệu đồng.}$$

d) **Sai**

Nhà máy chỉ bắt đầu có lãi khi $P(x) > 0 \Rightarrow 17x - 0,0125x^2 - 24 > 0 \Rightarrow 1,41 < x < 1358,5$

Vậy nếu $1,3 \leq x \leq 1,41$ nhà máy vẫn có thể bị lỗ.

Câu 4: Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)$ (m/s) có dạng đường thẳng khi $0 \leq t \leq 3(s)$ và $8 \leq t \leq 15(s)$ và $v(t)$ có dạng đường Parabol khi $3 \leq t \leq 8(s)$ (như hình vẽ)



a) Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 15$ là $v(15) = 21(m/s)$.

b) Quãng đường chất điểm di chuyển được trong 3 giây đầu tiên là: $S_1 = \int_0^3 11dt$ (m)

c) Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian từ 8 giây đến 15 giây bằng 73,5(m)

d) Vận tốc trung bình v_{tb} của chất điểm trong khoảng thời gian từ 3 đến 8 giây thỏa mãn

$$v_{tb} < 7(m/s).$$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) Sai (Dựa vào đồ thị $v(t)$).

b) Đúng

Trong 3 giây đầu tiên, vận tốc của chuyển động là $v(t) = 11(m/s)$.

Do đó quãng đường chất điểm chuyển động trong 3 giây đầu tiên là: $S_1 = \int_0^3 11 dt (m)$

c) Đúng

Trong khoảng thời gian từ 8 đến 15 giây, đồ thị $v(t)$ là một đường thẳng đi qua hai điểm $(8;21)$ và $(15;0)$. Ta có: $v(t) = at + b$.

Từ giả thiết ta có hệ: $\begin{cases} 8a + b = 21 \\ 15a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 45 \end{cases}$.

Do đó $v(t) = -3t + 45 (8 \leq t \leq 15)$.

Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian này là:

$$S_2 = \int_8^{15} (-3t + 45) dt = -\frac{3t^2}{2} \Big|_8^{15} + 45t \Big|_8^{15} = \frac{147}{2} = 73,5(m).$$

d) Sai

Trong khoảng thời gian từ 3 đến 8 giây đồ thị $v(t)$ là một Parabol đi qua $(3;11), (5;3), (8;21)$ có phương trình dạng: $v(t) = at^2 + bt + c$.

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} 9a + 3b + c = 11 \\ 25a + 5b + c = 3 \\ 64a + 8b + c = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -20 \\ c = 53 \end{cases}$

Do đó: $v(t) = 2t^2 - 20t + 53 (3 \leq t \leq 8)$.

Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian này là:

$$S_3 = \int_3^8 v(t) dt = \int_3^8 (2t^2 - 20t + 53) dt = \left(\frac{2t^3}{3} - 10t^2 + 53t \right) \Big|_3^8 = \frac{115}{3} (m)$$

Vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian này là:

$$v_{tb} = \frac{S_3}{5} = \frac{23}{3} \approx 7,67(m/s).$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{ khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{ khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x) dx$.

Lời giải

Trả lời: $\frac{7}{2} = 3,5$

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\ &= \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^2 (4-x) dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + 4x \Big|_1^2 - \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 = 1 + 4 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}.\end{aligned}$$

Câu 2: Cho $0 \leq m \leq 2$ và tích phân $I = \int_0^m |x-2| dx = 2$. Tìm m bằng

Lời giải

Trả lời: 2

Do: $x \in [0; m] \Rightarrow x-2 \leq x-m \leq 0 \Rightarrow |x-2| = 2-x$

$$\text{Vậy: } I = \int_0^m (2-x) dx = \left(2x - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^m = 2m - \frac{m^2}{2} = 2 \Rightarrow m = 2$$

Câu 3: Cho tích phân $\int_1^2 \left(\frac{x^2+1}{x} \right) dx = \ln a + \frac{b}{c}$, biết a, b, c là số nguyên. Tính tổng $a+b+c$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(\frac{x^2+1}{x} \right) dx &= \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x| \right) \Big|_1^2 = \ln 2 + \frac{3}{2} = \ln a + \frac{b}{c} \Rightarrow a=2, b=3, c=2 \\ &\Rightarrow a+b+c=7.\end{aligned}$$

Câu 4: Một vật chuyển động với gia tốc được cho bởi hàm số $a(t) = 10 \sin t$ (m/s²). Lúc bắt đầu chuyển động vật có vận tốc 5 m/s. Tính gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất trong π (s) đầu tiên.

Lời giải

$$\text{Vận tốc của vật được biểu diễn bởi hàm số } v(t) = \int a(t) dt = \int 10 \sin t dt = -10 \cos t + C.$$

Khi vật bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc là 5 m/s nên ta có

$$v(0) = 5 \Leftrightarrow -10 \cos 0 + C = 5 \Leftrightarrow C = 15.$$

$$\text{Do đó } v(t) = -10 \cos t + 15.$$

$$\text{Ta có } -1 \leq \cos t \leq 1, \forall t \in [0; \pi]$$

$$\Leftrightarrow 10 \geq -10 \cos t \geq -10, \forall t \in [0; \pi]$$

$$\Leftrightarrow 25 \geq -10 \cos t + 15 \geq 5, \forall t \in [0; \pi]$$

$$\Leftrightarrow 25 \geq v(t) \geq 5, \forall t \in [0; \pi]$$

Vậy vận tốc của vật đạt giá trị lớn nhất là 25 m/s khi $t = \pi$.

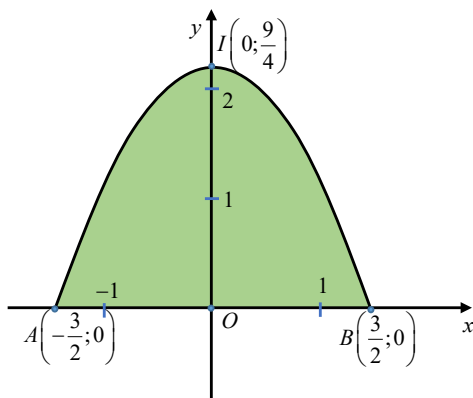
Khi đó, gia tốc của vật tại thời điểm $t = \pi$ là $a(\pi) = 10 \sin \pi = 0$ (m/s).

Câu 5: Trường THPT Lê Quý Đôn muốn làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Tính số tiền nhà trường phải trả (đơn vị nghìn đồng).

Lời giải

Trả lời: 6750

Gọi phương trình parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$. Do tính đối xứng của parabol nên ta có thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho (P) có đỉnh $I \in Oy$ (như hình vẽ).



Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{9}{4} = c, (I \in (P)) \\ \frac{9}{4}a - \frac{3}{2}b + c = 0 (A \in (P)) \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = 0 (B \in (P)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{9}{4} \\ a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Vậy $(P): y = -x^2 + \frac{9}{4}$.

Dựa vào đồ thị, diện tích của parabol là:

$$S = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4}\right) dx = 2 \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4}\right) dx = 2 \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{9}{4}x \right) \Bigg|_0^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2} \text{ m}^2.$$

Số tiền phải trả là: $\frac{9}{2} \cdot 1500000 = 6750000$ đồng = 6750 (nghìn đồng).

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên R thỏa mãn điều kiện

$$f(x) + x(f'(x) - 2 \sin x) = x^2 \cos x, x \in R \text{ và } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}. \text{ Tính } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x} dx$$

Lời giải

Từ giả thiết $f(x) + x(f'(x) - 2 \sin x) = x^2 \cos x$

$$\Leftrightarrow f(x) + xf'(x) = x^2 \cos x + 2x \sin x$$

$$\Leftrightarrow (xf(x))' = (x^2 \sin x)'$$

$$\Leftrightarrow xf(x) = x^2 \sin x + C$$

Mặt khác: $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x \sin x$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1.$$

CHƯƠNG

IV

NGUYÊN HÀM
TÍCH PHÂNBÀI. TÍCH PHÂN
ĐỀ TEST SỐ 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tính tích phân $\int_0^1 (2024x + 2025) dx$.

- A. 4049. B. -3037. C. 3037. D. -4049.

Câu 2: Tính tích phân $\int_0^8 |x^2 - 6x| dx$.

- A. $\frac{152}{3}$. B. $\frac{64}{3}$. C. $-\frac{64}{3}$. D. $-\frac{152}{3}$.

Câu 3: Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x + 3 \cos x) dx$.

- A. -1. B. 1. C. 0. D. 5.

Câu 4: Tính tích phân $\int_0^1 2^x \cdot 3^x dx$.

- A. $\frac{6}{\ln 6}$. B. $\frac{7}{\ln 6}$. C. $\frac{5}{\ln 6}$. D. $\frac{8}{\ln 18}$.

Câu 5: hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên đoạn $[c; d]$ và số thực k . Cho các khẳng định sau:

1) $\int_c^d f(x) dx$ là diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = c, x = d$.

2) $\int_d^d f(x) dx = 1$.

3) $\int_c^d f(x) dx = -\int_d^c f(x) dx$.

Số khẳng định **đúng** là.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 6: Tính tích phân $\int_0^2 (x^2 + 1)^2 dx$.

- A. $\frac{206}{15}$. B. $\frac{260}{15}$. C. $\frac{33}{4}$. D. $\frac{34}{3}$.

- Câu 7:** Tính tích phân $\int_1^9 \frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} dx$.
- A. 45. B. 43. C. 42. D. 44.
- Câu 8:** Tính tích phân $\int_1^2 \frac{2x^3 + 2x^2 + 1}{x+1} dx$.
- A. $\frac{14}{3} + \ln \frac{3}{2}$. B. $\frac{14}{3} + \ln \frac{3}{4}$. C. $11 + \ln \frac{3}{4}$. D. $11 + 2\ln \frac{3}{4}$.
- Câu 9:** Tính tích phân $\int_0^\pi \cos^2 x dx$.
- A. $\frac{\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{2}$. C. π . D. $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}$.
- Câu 10:** Một ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 27 - 9\sqrt{t}$. Tính quãng đường mà ô tô di chuyển được từ thời điểm $t = 0$ đến thời điểm mà vật dừng lại.
- A. 120m. B. 18m. C. 81m. D. 54m.
- Câu 11:** Một vật chuyển động với vận tốc ban đầu bằng 0, vận tốc biến đổi theo quy luật, và có gia tốc $a = 0,3 \text{ m/s}^2$. Xác định quãng đường vật đó đi được trong 40 phút đầu tiên.
- A. 12000m. B. 240m. C. 864000m. D. 3200m.
- Câu 12:** Gọi a, b là các số nguyên sao cho $\int_0^2 \sqrt{e^{x+2}} dx = 2ae^2 + be$. Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng
- A. 3. B. 8. C. 4. D. 5.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

- Câu 1:** Cho hàm số $f(x) = x^3 + 2x$ và hàm số $g(x) = x^2 + x$.
- a) Diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 3$ được tính bằng công thức $S = \int_1^3 (x^3 + 2x) dx$
- b) Gọi $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $S = F(3) - F(1)$.
- c) $I = 10 \int_1^3 f(x) dx + 6 \int_1^3 g(x) dx = 356$.
- d) $J = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx = \int_1^5 f(x) dx$.
- Câu 2:** Cho hàm số $f(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + x + 1$
- a) $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^5 - 4x^3 - x^2 + x + 1) dx = \left(\frac{x^6}{6} - x^4 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1$
- b) $I = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$
- c) $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^5 - 4x^3) dx + \int_0^1 (x^2 + x + 1) dx$.
- d) $J = \int_0^{\frac{1}{2}} f(2x) dx = \frac{1}{9}$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{khi } x \geq 2 \\ x - 2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$.

a) $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (x-2)dx$

b) $\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (x^2 - 2x)dx$

c) $\int_1^3 f(x)dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_2^3$

d) $\int_1^3 f(x)dx = \frac{5}{6}$

Câu 4: Sau khi xuất phát, ô tô di chuyển với tốc độ $v(t) = 2,01t - 0,025t^2$ ($0 \leq t \leq 10$). Trong đó $v(t)$ tính theo m/s, thời gian t tính theo s với $t = 0$ là thời điểm xe xuất phát.

a) Quãng đường xe di chuyển được tính theo công thức là $s(t) = 2,01t - 0,0125t^2$ ($0 \leq t \leq 10$)

b) Quãng đường xe di chuyển được trong 3 s là 8,82m.

c) Quãng đường xe di chuyển được trong giây thứ 9 xấp xỉ 15,277m

d) Trong khoảng thời gian không quá 10s đầu, khi vận tốc đạt giá trị lớn nhất thì gia tốc của xe là $1,51\text{m/s}^2$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho $\int_0^5 f(x)dx = -2$. Tích phân $\int_0^5 [4f(x) - 3x^2]dx$ bằng

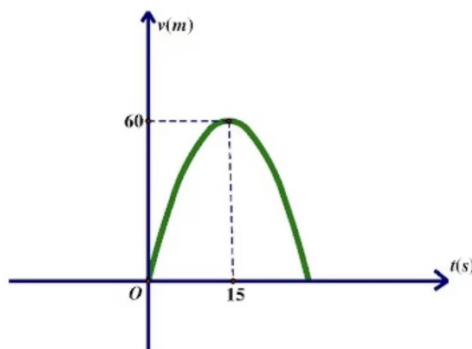
Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ và có bảng biến thiên như sau

Biết rằng $\int_2^5 |f'(x)|dx = 5$. Giá trị của $f(5)$ bằng

Câu 3: Biết $\int_1^3 \frac{x+2}{x}dx = a + b \ln c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}, c < 9$. Tính tổng $S = a + b + c$

Câu 4: Biết $I = \int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = \frac{1}{4e^a} - \frac{b}{e} + \frac{7}{4}$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Tính $P = a + b$ bằng

Câu 5: Một xe mô tô phân khối lớn sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu phóng nhanh với vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường Parabol như hình vẽ. Biết rằng sau $15s$ thì xe đạt đến vận tốc cao nhất $60m/s$ và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì xe đã đi được quãng đường bao nhiêu mét?



Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = f(x) + e^{2x}$; $f(0) = 1$. Biết tích phân $I = \int_0^{\ln 3} \frac{(f(x) + 1)^2}{1 + g(x) + e^{4x}} dx = a \cdot \ln b$, với $a, b, c \in \mathbb{N}$. Tính giá trị biểu thức $P = 2024a + b$.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tính tích phân $\int_0^1 (2024x + 2025) dx$.

A. 4049.

B. -3037.

C. 3037.

D. -4049.

Lời giải

Theo tính chất của tích phân, ta có:

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2024x + 2025) dx &= \int_0^1 2024x dx + \int_0^1 2025 dx \\ &= \left(\frac{2024x^2}{2} + 2025x \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{2024 \cdot 1^2}{2} + 2025 \cdot 1 \right) - \left(\frac{2024 \cdot 0^2}{2} + 2025 \cdot 0 \right) \\ &= 3037\end{aligned}$$

Chọn đáp án

C.

Câu 2: Tính tích phân $\int_0^8 |x^2 - 6x| dx$.

A. $\frac{152}{3}$.B. $\frac{64}{3}$.C. $\frac{-64}{3}$.D. $\frac{-152}{3}$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}\int_0^8 |x^2 - 6x| dx &= \int_0^6 |x^2 - 6x| dx + \int_6^8 |x^2 - 6x| dx = \int_0^6 (-x^2 + 6x) dx + \int_6^8 (x^2 - 6x) dx \\ &= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} \right) \Big|_0^6 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} \right) \Big|_6^8 = \frac{152}{3}\end{aligned}$$

Chọn đáp án

A.

Câu 3: Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x + 3 \cos x) dx$.

A. -1.

B. 1.

C. 0.

D. 5.

Lời giải

Theo tính chất của tích phân, ta có:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x + 3 \cos x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos x dx \\ &= \left(-2 \cos x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(3 \sin x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 3 - (-2) = 5\end{aligned}$$

Chọn đáp án

D.

Câu 4: Tính tích phân $\int_0^1 2^x \cdot 3^x dx$.

A. $\frac{6}{\ln 6}$.B. $\frac{7}{\ln 6}$.C. $\frac{5}{\ln 6}$.D. $\frac{8}{\ln 18}$.

Lời giải

Theo tính chất của tích phân, ta có:

$$\int_0^1 2^x \cdot 3^x dx = \int_0^1 6^x dx = \frac{6^x}{\ln 6} \Big|_0^1 = \frac{6^1}{\ln 6} - \frac{6^0}{\ln 6} = \frac{5}{\ln 6}.$$

Câu 5: hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên đoạn $[c; d]$ và số thực k . Cho các khẳng định sau:

1) $\int_c^d f(x) dx$ là diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = c, x = d$.

2) $\int_d^c f(x) dx = 1$.

3) $\int_c^d f(x) dx = -\int_d^c f(x) dx$.

Số khẳng định **đúng** là.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Khẳng định 1 sai vì $\int_c^d f(x) dx$ là diện tích của hình thang cong với $y = f(x)$ là hàm số “không âm”.

Khẳng định 2 sai. Vì $\int_d^c f(x) dx = 0$.

Khẳng định 3 đúng (theo lý thuyết của tích phân).

Câu 6: Tính tích phân $\int_0^2 (x^2 + 1)^2 dx$.

A. $\frac{206}{15}$.

B. $\frac{260}{15}$.

C. $\frac{33}{4}$.

D. $\frac{34}{3}$.

Lời giải

Theo tính chất của tích phân, ta có:

$$\int_0^2 (x^2 + 1)^2 dx = \int_0^2 (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right) \Big|_0^2 = \left(\frac{2^5}{5} + \frac{2 \cdot 2^3}{3} + 2 \right) - 0 = \frac{206}{15}$$

Câu 7: Tính tích phân $\int_1^9 \frac{x\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} dx$.

A. 45.

B. 43.

C. 42.

D. 44.

Lời giải

Theo tính chất của tích phân, ta có:

$$\int_1^9 \frac{x\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^9 \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x} \right) \Big|_1^9 = \left(\frac{9^2}{2} \right) - \left(\frac{5}{2} \right) = 44$$

Câu 8: Tính tích phân $\int_1^2 \frac{2x^3 + 2x^2 + 1}{x + 1} dx$.

A. $\frac{14}{3} + \ln \frac{3}{2}$.

B. $\frac{14}{3} + \ln \frac{3}{4}$.

C. $11 + \ln \frac{3}{4}$.

D. $11 + 2 \ln \frac{3}{4}$.

Lời giải

Theo tính chất của tích phân, ta có:

$$\int_1^2 \frac{2x^3 + 2x^2 + 1}{x+1} dx = \int_1^2 \left(2x^2 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\frac{2x^3}{3} + \ln|x+1| \right) \Big|_1^2 = \left(\frac{16}{3} + \ln 3 \right) - \left(\frac{2}{3} + \ln 2 \right) = \frac{14}{3} + \ln \frac{3}{2}$$

Câu 9: Tính tích phân $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$.

A. $\frac{\pi}{3}$.

B. $\frac{\pi}{2}$.

C. π .

D. $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}$.

Lời giải

Theo tính chất của tích phân, ta có:

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

Câu 10: Một ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 27 - 9\sqrt{t}$. Tính quãng đường mà ô tô di chuyển được từ thời điểm $t = 0$ đến thời điểm mà vật dừng lại.

A. $120m$.

B. $18m$.

C. $81m$.

D. $54m$.

Lời giải

Thời điểm vật dừng lại là $v = 0 \Leftrightarrow 27 - 9\sqrt{t} = 0 \Leftrightarrow t = 9(s)$

Quãng đường mà ô tô di chuyển được từ thời điểm $t = 0$ đến thời điểm mà vật dừng lại là:

$$s(t) = \int_0^9 (27 - 9\sqrt{t}) dt = \left(27t - 6t\sqrt{t} \right) \Big|_0^9 = 81(m).$$

Câu 11: Một vật chuyển động với vận tốc ban đầu bằng 0, vận tốc biến đổi theo quy luật, và có gia tốc $a = 0,3 m/s^2$. Xác định quãng đường vật đó đi được trong 40 phút đầu tiên.

A. $12000m$.

B. $240m$.

C. $864000m$.

D. $3200m$.

Lời giải

Đổi 40 phút = 2400s

Ta có $v(t) = \int 0,3 dt = 0,3t + C$

Do vận tốc ban đầu bằng 0 nên $v(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

Do vậy $v(t) = 0,3t$

Vậy quãng đường đi được trong 40 phút đầu tiên là

$$s = \int_0^{2400} 0,3t dt = 864000(m)$$

Câu 12: Gọi a, b là các số nguyên sao cho $\int_0^2 \sqrt{e^{x+2}} dx = 2ae^2 + be$. Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng

A. 3.

B. 8.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int_0^2 \sqrt{e^{x+2}} dx = \int_0^2 (e^{x+2})^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^2 e^{\frac{1}{2}x+1} dx = 2e^{\frac{1}{2}x+1} \Big|_0^2 = 2e^2 - 2e$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}.$$

Vậy $a^2 + b^2 = 5$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = x^3 + 2x$ và hàm số $g(x) = x^2 + x$.

a) Diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 3$ được tính bằng công thức $S = \int_1^3 (x^3 + 2x) dx$

b) Gọi $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $S = F(3) - F(1)$.

c) $I = 10 \int_1^3 f(x) dx + 6 \int_1^3 g(x) dx = 356$.

d) $J = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx = \int_1^5 f(x) dx$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) **Đúng:** Vì hàm số $f(x) = x^3 + 2x$ liên tục và không âm trên đoạn $[1; 3]$ nên theo ý nghĩa hình học của tích phân thì $S = \int_1^3 (x^3 + 2x) dx$

b) **Sai:** Vì $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x$ không là nguyên hàm của hàm số $f(x)$

Đáp án đúng thì $F(x) = \frac{x^4}{4} + x^2$

c) **Đúng:**

$F(x) = \frac{x^4}{4} + x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$, $F(3) = \frac{117}{4}$; $F(1) = \frac{5}{4}$

nên $\int_1^3 f(x) dx = \frac{117}{4} - \frac{5}{4} = 28$. Suy ra $10 \int_1^3 f(x) dx = 280$

$G(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)$, $G(3) = \frac{27}{2}$; $G(1) = \frac{5}{6}$

nên $\int_1^3 g(x) dx = \frac{27}{2} - \frac{5}{6} = \frac{38}{3}$. Suy ra $6 \int_1^3 g(x) dx = 76$

Vậy $I = 10 \int_1^3 f(x) dx + 6 \int_1^3 g(x) dx = 280 + 76 = 356$

d) **Đúng:** Theo tính chất của tích phân

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + x + 1$

a) $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^5 - 4x^3 - x^2 + x + 1) dx = \left(\frac{x^6}{6} - x^4 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1$

b) $I = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$

c) $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^5 - 4x^3) dx + \int_0^1 (x^2 + x + 1) dx.$

d) $J = \int_0^{\frac{1}{2}} f(2x) dx = \frac{1}{9}.$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
--------	---------	--------	--------

a) Sai: Vì Sai cận trên và cận dưới

b) Đúng:

c) Sai: Sai dấu

Sửa lại $I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^5 - 4x^3) dx + \int_0^1 (-x^2 + x + 1) dx$

d) Sai:

Vì $I = \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}$ nên $J = \int_0^{\frac{1}{2}} f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} f(2x) d(2x) = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) d(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{khi } x \geq 2 \\ x - 2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}.$

a) $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x - 2) dx$

b) $\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (x^2 - 2x) dx$

c) $\int_1^3 f(x) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_2^3$

d) $\int_1^3 f(x) dx = \frac{5}{6}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Đúng

Ta có: $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x - 2) dx$

b) Đúng

Ta có $\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (x^2 - 2x) dx$

c) Sai

Ta có $\int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 (x - 2) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_2^3.$

d) Đúng

$$\int_1^3 f(x) dx = \int_1^2 (x-2) dx + \int_2^3 (x^2-2x) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_2^3 = \left(-2 - \frac{-3}{2} \right) + \left(0 - \frac{-4}{3} \right) = \frac{5}{6}$$

Câu 4: Sau khi xuất phát, ô tô di chuyển với tốc độ $v(t) = 2,01t - 0,025t^2$ ($0 \leq t \leq 10$). Trong đó $v(t)$ tính theo m/s, thời gian t tính theo s với $t = 0$ là thời điểm xe xuất phát.

- a) Quãng đường xe di chuyển được tính theo công thức là $s(t) = 2,01 - 0,05t$ ($0 \leq t \leq 10$)
 b) Quãng đường xe di chuyển được trong 3 s là 8,82m.
 c) Quãng đường xe di chuyển được trong giây thứ 9 xấp xỉ 15,277m
 d) Trong khoảng thời gian không quá 10s đầu, khi vận tốc đạt giá trị lớn nhất thì gia tốc của xe là 1,51m/s²

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

a) Sai

Quãng đường xe di chuyển được phải là nguyên hàm của $v(t)$, $v'(t) = 2,01 - 0,05t$ ($0 \leq t \leq 10$) là công thức tính gia tốc của vật.

b) Đúng

Quãng đường xe di chuyển được trong 3 s là $\int_0^3 (2,01t - 0,025t^2) dt = 8,82m$.

c) Đúng

Quãng đường xe di chuyển được trong giây thứ 9:

$$s(9) - s(8) = \int_8^9 (2,01t - 0,025t^2) dt \approx 15,277m$$

d) Đúng

$$v(t) = 2,01t - 0,025t^2 \quad (0 \leq t \leq 10) \Rightarrow \max_{[0;10]} v(t) = 17,6m/s \text{ khi } t = 10s$$

$$\text{Gia tốc vật khi đó là } a(10) = v'(10) = 2,01 - 0,05 \cdot 10 = 1,51m/s^2$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho $\int_0^5 f(x) dx = -2$. Tích phân $\int_0^5 [4f(x) - 3x^2] dx$ bằng

Lời giải

Trả lời: -133

$$\int_0^5 [4f(x) - 3x^2] dx = 4 \int_0^5 f(x) dx - \int_0^5 3x^2 dx = -8 - x^3 \Big|_0^5 = -8 - 125 = -133.$$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ và có bảng biến thiên như sau

Biết rằng $\int_2^5 |f'(x)| dx = 5$. Giá trị của $f(5)$ bằng

Lời giải

Trả lời: 3

Từ bảng biến thiên ta có $x \in [3; 5] \Rightarrow f'(x) \geq 0$ và $x \in [2; 3] \Rightarrow f'(x) \leq 0, f(2) = 0, f(3) = -1$.

$$\int_2^5 |f'(x)| dx = 5 \Leftrightarrow \int_2^3 |f'(x)| dx + \int_3^5 |f'(x)| dx = 5$$

$$\Leftrightarrow -\int_2^3 f'(x) dx + \int_3^5 f'(x) dx = 5 \Leftrightarrow f(x) \Big|_3^2 + f(x) \Big|_3^5 = 5$$

$$\Leftrightarrow f(2) - f(3) + f(5) - f(3) = 5 \Leftrightarrow f(5) + 2 = 5 \Leftrightarrow f(5) = 3.$$

Câu 3: Biết $\int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = a + b \ln c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}, c < 9$. Tính tổng $S = a + b + c$

Lời giải

Trả lời: 7

$$\text{Ta có } \int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = \int_1^3 \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx = \int_1^3 dx + \int_1^3 \frac{2}{x} dx = 2 + 2 \ln |x| \Big|_1^3 = 2 + 2 \ln 3.$$

Do đó $a = 2, b = 2, c = 3 \Rightarrow S = 7$.

Câu 4: Biết $I = \int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = \frac{1}{4e^a} - \frac{b}{e} + \frac{7}{4}$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Tính $P = a + b$ bằng

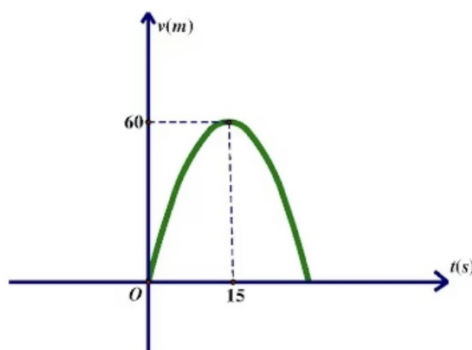
Lời giải

Trả lời: 6

$$I = \int_0^1 \frac{e^{2x-1} - e^{-3x} + 1}{e^x} dx = \int_0^1 (e^{x-1} - e^{-4x} + e^{-x}) dx = \left(e^{x-1} - \frac{e^{-4x}}{-4} + \frac{e^{-x}}{-1} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4e^4} - \frac{2}{e} + \frac{7}{4}$$

Do đó $a = 4, b = 2 \Rightarrow P = 4 + 2 = 6$.

Câu 5: Một xe mô tô phân khối lớn sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu phóng nhanh với vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường Parabol như hình vẽ. Biết rằng sau 15s thì xe đạt đến vận tốc cao nhất $60m/s$ và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì xe đã đi được quãng đường bao nhiêu mét?



Lời giải

Trả lời: 600.

Hàm số vận tốc có đồ thị là đường Parabol $v(t) = at^2 + bt + c$ ($a \neq 0$), theo hình vẽ ta thấy đỉnh của Parabol là $I(15; 60)$, đồng thời đi qua gốc $O(0; 0)$, suy ra:

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \\ \frac{-b}{2a} = 15 \\ a \cdot 15^2 + b \cdot 15 + c = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 30a + b = 0 \\ a \cdot 15^2 + b \cdot 15 + 0 = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{15} \\ b = 8 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow v(t) = -\frac{4}{15}t^2 + 8t.$$

Theo đồ thị xe bắt đầu tăng tốc lúc $t = 0$ và đạt vận tốc cao nhất lúc $t = 15s$ nên quãng đường đi được của xe từ lúc bắt đầu tăng tốc đến lúc đạt vận tốc cao nhất là:

$$\int_0^{15} v(t) dt = \int_0^{15} \left(-\frac{4}{15}t^2 + 8t \right) dt = \left(-\frac{4}{45}t^3 + 4t^2 \right) \Big|_0^{15} = 600 \text{ m}.$$

Vậy từ lúc bắt đầu tăng tốc đến lúc vận tốc đạt cao nhất thì xe đi được quãng đường dài 600 m.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số

$g(x) = f(x) + e^{2x}$; $f(0) = 1$. Biết tích phân $I = \int_0^{\ln 3} \frac{(f(x) + 1)^2}{1 + g(x) + e^{4x}} dx = a \cdot \ln b$, với $a, b, c \in \mathbb{N}$. Tính giá trị biểu thức $P = 2024a + b$.

Lời giải

Trả lời: 2027

Ta có:

$$f'(x) = f(x) + e^{2x} \Leftrightarrow \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} = e^x \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{e^x} \right]' = e^x.$$

$$\Rightarrow \int \left[\frac{f(x)}{e^x} \right]' dx = \int e^x dx \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^x} = e^x + C \Leftrightarrow f(x) = e^x (e^x + C).$$

Do $f(0) = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = e^{2x}$.

$$I = \int_0^{\ln 3} \frac{(f(x) + 1)^2}{1 + g(x) + e^{4x}} dx = \int_0^{\ln 3} \frac{(e^{2x} + 1)^2}{1 + 2e^{2x} + e^{4x}} dx = \int_0^{\ln 3} dx = \ln 3.$$

Vậy $a = 1; b = 3 \Rightarrow P = 2027$.

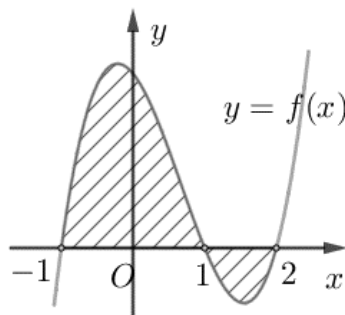
CHƯƠNG

IV

NGUYÊN HÀM
TÍCH PHÂNBÀI. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN
ĐỀ TEST SỐ 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = -1, x = 2$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$

B. $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$

C. $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$

D. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$

Câu 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = a, x = b, y = f(x)$ và trục hoành là

A. $S = \pi \int_a^b f(x) dx.$ **B.** $S = \int_a^b |f(x)| dx.$ **C.** $S = \int_a^b f(x) dx.$ **D.** $S = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$

Câu 3: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 3x, y = 0, x = 0, x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \int_0^2 (x^3 - 3x) dx.$ **B.** $S = \int_0^2 (x^3 - 3x)^2 dx.$ **C.** $S = \int_0^2 |x^3 - 3x| dx.$ **D.** $S = -\int_0^2 (x^3 - 3x) dx.$

Câu 4: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sin x, y = 0, x = 0, x = 2\pi$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \int_0^{2\pi} \sin x dx.$ **B.** $S = \int_0^{2\pi} |\sin x| dx.$ **C.** $S = \int_0^{2\pi} \sin x dx.$ **D.** $S = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx.$

Câu 5: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b$. Biết rằng $f(x) - g(x) = -8$ Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \int_a^b -8 dx.$ **B.** $S = \int_a^b 8 dx.$ **C.** $S = \int_a^b 64 dx.$ **D.** $S = \pi \int_a^b 64 dx.$

Câu 6: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 2x^2$, $y = x^5$, $x = 0$, $x = 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \int_0^1 (x^3 - 2x^2 - x^5) dx$.

B. $S = \int_0^1 |x^3 - 2x^2 - x^5| dx$.

C. $S = \int_0^1 (x^5 - (x^3 - 2x^2)) dx$.

D. $S = \pi \int_0^1 (x^3 - 2x^2 - x^5)^2 dx$.

Câu 7: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = 0$, $x = 1$, đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2$ và tiếp tuyến của nó tại điểm $x = -2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \int_0^1 (x^3 + 3x^2 - 4) dx$.

B. $S = \int_0^1 |x^3 + 3x^2 - 4| dx$.

C. $S = \int_0^1 (x^3 + 3x^2 - 4) dx$.

D. $S = \pi \int_0^1 (x^3 + 3x^2 - 4)^2 dx$.

Câu 8: Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1$ và $x = 2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 2$) cắt vật thể đó có diện tích $S(x) = 2024x$. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

A. $V = 3036$.

B. $V = 3036\pi$.

C. $V = 1518$.

D. $V = 1518\pi$.

Câu 9: Cắt một vật thể (T) bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 0$ và $x = 2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 2$) cắt vật thể đó có diện tích diện là một hình vuông có cạnh bằng $\sqrt{x^3}$. Tính thể tích vật thể (T).

A. $\frac{128}{7}$.

B. $\frac{128}{5}$.

C. $\frac{18}{7}$.

D. $\frac{28}{7}$.

Câu 10: Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$), xung quanh trục Ox .

A. $V = \int_a^b |f(x)| dx$.

B. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

C. $V = \int_a^b f^2(x) dx$.

D. $V = \pi \int_a^b f(x) dx$.

Câu 11: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.

B. $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.

C. $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.

D. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.

Câu 12: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = (\pi + 1)\pi$.

B. $V = \pi - 1$.

C. $V = \pi + 1$.

D. $V = (\pi - 1)\pi$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = e^x$ có đồ thị (C) .

- a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 3$ bằng e^3 .
- b) Khi $k = 4$ thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = k$ bằng 3.
- c) Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $x_0 = 1$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng d , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 3$ bằng $\frac{9e}{2}$.
- d) Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 3$ quanh trục Ox bằng e^6 .

Câu 2: Cho hàm số bậc hai $y = -x^2 + 5x$ và đường thẳng $y = 2x$.

- a) Tọa độ giao điểm của đường thẳng $y = 2x$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x$ là $A(0;0)$ và $B(3;6)$.
- b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x$, trục hoành là $\frac{27}{2}$.
- c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x$, $y = 2x$ là $\frac{9}{2}$.
- d) Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x$; $y = 2x$ và S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x$; $y = 2x$ và trục hoành. Tỉ số diện tích $\frac{S_1}{S_2}$ bằng $\frac{27}{6}$.

Câu 3: Cho vật thể (T) giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = -1$; $x = 1$. Cắt vật thể (T) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x(-1 \leq x \leq 1)$ ta thu được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $2\sqrt{1-x^2}$.

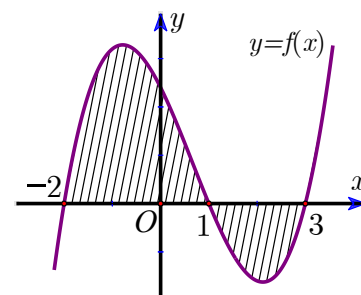
- a) Mặt cắt có diện tích $S(x)$ liên tục trên $[-1;1]$
- b) Thể tích vật thể được tính theo công thức $V = \pi \int_{-1}^1 S(x) dx$
- c) Diện tích của mặt cắt là $S(x) = 2(1-x^2)$.
- d) Thể tích của vật thể (T) bằng $\frac{16}{3}$.

Câu 4: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4x + 4(C_1)$, $y = 4x - 12(C_2)$.

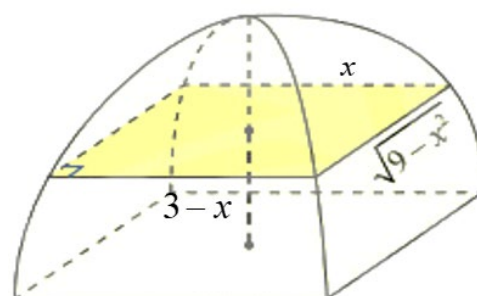
- a) Các đường (C_1) và (C_2) đều đi qua điểm $M(4;4)$.
- b) Diện tích của hình phẳng (H) là $S = \int_3^4 |x^2 - 8x + 16| dx$.
- c) Thể tích của vật tròn xoay là $V = \pi \int_2^4 (x^2 - 4x + 4)^2 dx - \pi \int_3^4 (4x - 12)^2 dx$.
- d) Nếu $V = \frac{a}{b} \cdot \pi$ (Với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì $a + b = 32$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ (như hình vẽ), có $\int_{-2}^1 f(x)dx = 8$; $\int_1^3 f(x)dx = 5$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -2$ và $x = 3$. Khi đó S bằng bao nhiêu?



Câu 2: Một chiếc lều mái vòm có hình dạng như hình bên. Nếu cắt lều bằng mặt phẳng song song với mặt đáy và cách mặt đáy một khoảng $3-x$ (mét) ($0 \leq x \leq 3$) thì được hình chữ nhật có các kích thước lần lượt là x và $\sqrt{9-x^2}$. Tính thể tích cái lều (đơn vị m^3).

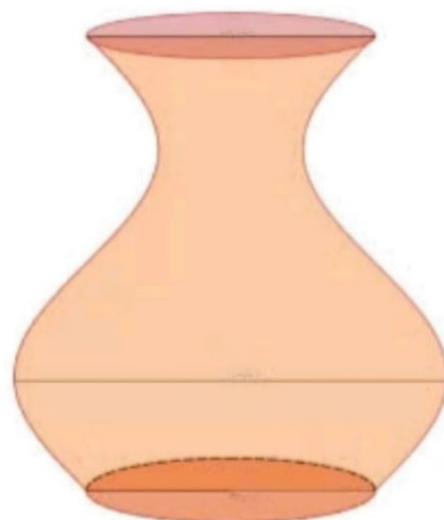


Câu 3: Một chiếc đèn cỏi có hình như bên. Nếu cắt đèn bằng mặt phẳng song song với mặt đáy và cách mặt đáy một khoảng x (dm) ($0 \leq x \leq 5$) thì được thiết diện là hình tròn có bán kính $\sqrt{9-x}$ (dm). Thể tích của chiếc đèn cỏi là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân hàng phần chục).



Câu 4: Diện tích của hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y = x^3 - x^2 - 12x$ và trục Ox xấp xỉ bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần mười)?

Câu 5: Một bình hoa có dạng khối tròn xoay với chiều cao là 25cm (tham khảo hình vẽ). Khi cắt bình hoa theo một mặt phẳng vuông góc với trục của nó thì ta luôn được thiết diện là một hình tròn có bán kính $R = \frac{4}{9}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{25}{36}$ (dm) với $x \in \left[0; \frac{5}{2}\right]$ là khoảng cách từ mặt cắt tới mặt đáy của bình hoa (tính theo đơn vị dm). Lượng nước cần đổ vào bình để mức nước trong bình cao bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bình chiếm tỉ lệ bao nhiêu phần trăm so với thể tích của bình hoa? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Câu 6: Người ta dự định lắp kính cho cửa của một mái vòm có dạng hình parabol. Hãy tính diện tích mặt kính cần lắp vào, biết rằng vòm cửa cao 21 m và rộng 70 m (**Hình 33**).



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

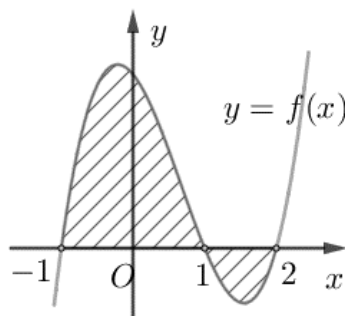
Hình 33

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$.

B. $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$.

C. $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$.

D. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$.

Lời giải

$$S = \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx$$

Nhìn hình ta thấy hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[-1; 1]$ nên

$$\int_{-1}^1 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 f(x) dx; \text{ hàm số } f(x) \text{ liên tục và nhận giá trị âm trên đoạn } [1; 2] \text{ nên}$$

$$\int_1^2 |f(x)| dx = -\int_1^2 f(x) dx$$

Vậy $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$

Câu 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ và trục hoành là

A. $S = \pi \int_a^b f(x) dx$.

B. $S = \int_a^b |f(x)| dx$.

C. $S = \int_a^b f(x) dx$.

D. $S = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

Lời giải

Ta có $S = \int_a^b |f(x)| dx$

Câu 3: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 3x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \int_0^2 (x^3 - 3x) dx$.

B. $S = \int_0^2 (x^3 - 3x)^2 dx$.

C. $S = \int_0^2 |x^3 - 3x| dx$.

D. $S = -\int_0^2 (x^3 - 3x) dx$.

Lời giải

Ta có $S = \int_0^2 |x^3 - 3x| dx$

Câu 4: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2\pi$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $S = \int_0^{\pi} \sin x dx$. B. $S = \int_0^{2\pi} |\sin x| dx$. C. $S = \int_0^{2\pi} \sin x dx$. D. $S = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$.

Lời giải

Ta có $S = \int_0^{2\pi} |\sin x| dx$

Câu 5: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$. Biết rằng $f(x) - g(x) = -8$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $S = \int_a^b -8 dx$. B. $S = \int_a^b 8 dx$. C. $S = \int_a^b 64 dx$. D. $S = \pi \int_a^b 64 dx$.

Lời giải

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_a^b |-8| dx = \int_a^b 8 dx$$

Câu 6: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 - 2x^2$, $y = x^5$, $x = 0$, $x = 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $S = \int_0^1 (x^3 - 2x^2 - x^5) dx$. B. $S = \int_0^1 |x^3 - 2x^2 - x^5| dx$.
C. $S = \int_0^1 (x^5 - (x^3 - 2x^2)) dx$. D. $S = \pi \int_0^1 (x^3 - 2x^2 - x^5)^2 dx$.

Lời giải

Ta có $S = \int_0^1 |x^3 - 2x^2 - x^5| dx$

Câu 7: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = 0$, $x = 1$, đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2$ và tiếp tuyến của nó tại điểm $x = -2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $S = \int_0^1 (x^3 + 3x^2 - 4) dx$. B. $S = \int_0^1 |x^3 + 3x^2 - 4| dx$.
C. $S = \int_0^1 (x^3 + 3x^2 - 4) dx$. D. $S = \pi \int_0^1 (x^3 + 3x^2 - 4)^2 dx$.

Lời giải

$y' = 3x^2 + 6x$; $y'(-2) = 0$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $x = -2$ là $y = 4$.

$$S = \int_0^1 |x^3 + 3x^2 - 4| dx.$$

Câu 8: Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1$ và $x = 2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 2$) cắt vật thể đó có diện tích $S(x) = 2024x$. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

- A. $V = 3036$. B. $V = 3036\pi$. C. $V = 1518$. D. $V = 1518\pi$.

Lời giải

Thể tích vật thể là: $V = \int_1^2 2024x dx = 3036$.

Câu 9: Cắt một vật thể (T) bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x=0$ và $x=2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 2$) cắt vật thể đó có diện tích diện là một hình vuông có cạnh bằng $\sqrt{x^3}$. Tính thể tích vật thể (T).

A. $\frac{128}{7}$.

B. $\frac{128}{5}$.

C. $\frac{18}{7}$.

D. $\frac{28}{7}$.

Lời giải

Diện tích thiết diện là $S(x) = \sqrt{x^3} \cdot \sqrt{x^3} = x^3$.

Thể tích của vật thể (T) là $V = \int_0^2 S(x) dx = \int_0^2 x^3 dx = \frac{128}{7}$.

Câu 10: Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a, x=b$ ($a < b$), xung quanh trục Ox .

A. $V = \int_a^b |f(x)| dx$.

B. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

C. $V = \int_a^b f^2(x) dx$.

D. $V = \pi \int_a^b f(x) dx$.

Lời giải

Ta có $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

Câu 11: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.

B. $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.

C. $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.

D. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.

Lời giải

Thể tích của vật thể được tạo nên là $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.

Câu 12: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x = \frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = (\pi + 1)\pi$.

B. $V = \pi - 1$.

C. $V = \pi + 1$.

D. $V = (\pi - 1)\pi$.

Lời giải

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{2 + \cos x} \right)^2 dx = \pi \left(2x + \sin x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi(\pi + 1).$$

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = e^x$ có đồ thị (C).

- a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 3$ bằng e^3 .
- b) Khi $k = 4$ thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = k$ bằng 3.
- c) Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $x_0 = 1$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng d , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 3$ bằng $\frac{9e}{2}$.
- d) Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 3$ quanh trục Ox bằng e^6 .

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------------	---------------	----------------	---------------

a) Sai.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 3$ là

$$S = \int_0^3 e^x dx = e^x \Big|_0^3 = e^3 - 1.$$

b) Sai.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , trục hoành và hai đường thẳng

$$x = 0; x = k (k > 0) \text{ bằng } 3 \text{ nên ta có: } \int_0^k e^x dx = 3 \Leftrightarrow e^x \Big|_0^k = 3 \Leftrightarrow e^k - 1 = 3 \Leftrightarrow k = \ln 4.$$

c) Đúng.

Phương trình tiếp tuyến d của đồ thị hàm số tại điểm $x_0 = 1$ là $y = e(x - 1) + e \Leftrightarrow y = ex$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng d , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 3$

$$\text{là } S = \int_0^3 (ex) dx = e \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{9e}{2}.$$

d) Sai.

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị (C) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 3$ quanh trục Ox là

$$V = \int_0^3 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^3 = \frac{1}{2} (e^6 - 1).$$

Câu 2: Cho hàm số bậc hai $y = -x^2 + 5x$ và đường thẳng $y = 2x$.

a) Toạ độ giao điểm của đường thẳng $y = 2x$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x$ là $A(0;0)$ và $B(3;6)$.

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x$, trục hoành là $\frac{27}{2}$

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x$, $y = 2x$ là $\frac{9}{2}$

d) Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x$; $y = 2x$ và S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x$; $y = 2x$ và trục hoành. Tỉ số diện tích $\frac{S_1}{S_2}$ bằng $\frac{27}{6}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x$ và đường thẳng $y = 2x$.

Ta có: $-x^2 + 5x = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$. Khi đó ta có 2 giao điểm $A(0;0); B(3;6)$.

b) Sai.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x$, trục hoành là

$$S = \int_0^5 |-x^2 + 5x| dx = \frac{125}{6}.$$

c) Đúng.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x, y = 2x$ là

$$S_1 = \int_0^3 |-x^2 + 3x| dx = \frac{9}{2}.$$

d) Sai.

$$\text{Ta có: } S_2 = S - S_1 = \frac{125}{6} - \frac{9}{2} = \frac{49}{3}.$$

$$\text{Khi đó } \frac{S_1}{S_2} = \frac{27}{98}.$$

Câu 3: Cho vật thể (T) giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = -1; x = 1$. Cắt vật thể (T) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại x ($-1 \leq x \leq 1$) ta thu được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $2\sqrt{1-x^2}$.

a) Mặt cắt có diện tích $S(x)$ liên tục trên $[-1;1]$

b) Thể tích vật thể được tính theo công thức $V = \pi \int_{-1}^1 S(x) dx$

c) Diện tích của mặt cắt là $S(x) = 2(1-x^2)$.

d) Thể tích của vật thể (T) bằng $\frac{16}{3}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại x ($-1 \leq x \leq 1$) cắt vật thể (T) theo mặt cắt có diện tích không đổi $S(x)$ liên tục $[-1;1]$

$$\text{Diện tích của mặt cắt là } S(x) = \left(2\sqrt{1-x^2}\right)^2 = 4(1-x^2).$$

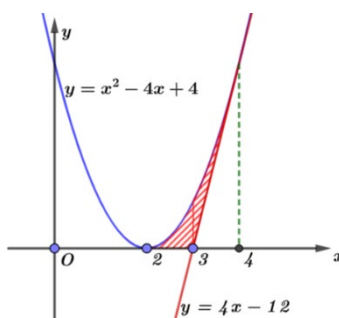
$$\text{Thể tích vật thể } (T) \text{ là } V = \int_{-1}^1 S(x) dx = \int_{-1}^1 \left(2\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = \frac{16}{3} (\text{đvtt}).$$

Câu 4: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4x + 4 (C_1), y = 4x - 12 (C_2)$.

- a) Các đường (C_1) và (C_2) đều đi qua điểm $M(4;4)$
- b) Diện tích của hình phẳng (H) là $S = \int_3^4 |x^2 - 8x + 16| dx$
- c) Thể tích của vật tròn xoay là $V = \pi \int_2^4 (x^2 - 4x + 4)^2 dx - \pi \int_3^4 (4x - 12)^2 dx$.
- d) Nếu $V = \frac{a}{b} \cdot \pi$ (Với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì $a + b = 32$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------



♦ Xét các phương trình hoành độ giao điểm của $y = x^2 - 4x + 4$, $y = 4x - 12$ và trục hoành.

$$x^2 - 4x + 4 = 4x - 12 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Diện tích hình phẳng (H) : $S = \int_2^4 |x^2 - 8x + 16| dx$

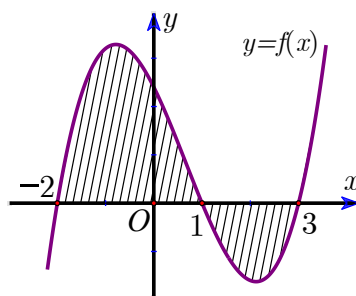
♦ Khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục hoành ta được một khối tròn xoay có thể tích

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_2^4 (x^2 - 4x + 4)^2 dx - \pi \int_3^4 (4x - 12)^2 dx \\ &= \pi \int_2^4 (x - 2)^4 dx - \pi \int_3^4 (4x - 12)^2 dx \\ &= \pi \frac{(x - 2)^5}{5} \Big|_2^4 - \pi \frac{(4x - 12)^3}{12} \Big|_3^4 = \frac{32}{5} \pi - \frac{16}{3} \pi = \frac{16}{15} \pi. \end{aligned}$$

♦ Suy ra $\begin{cases} a = 16 \\ b = 15 \end{cases}$. Vậy $a + b = 31$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ (như hình vẽ), có $\int_{-2}^1 f(x) dx = 8$; $\int_1^3 f(x) dx = 5$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -2$ và $x = 3$. Khi đó S bằng bao nhiêu?



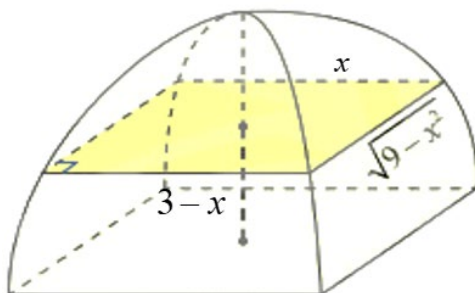
Lời giải

Trả lời: 3

Ta có $S = \int_{-2}^3 |f(x)| dx = S = \int_{-2}^1 |f(x)| dx + \int_1^3 |f(x)| dx.$

Do $f(x) \geq 0$ với $\forall x \in [-2; 1]$ và $f(x) \leq 0$ với $\forall x \in [1; 3]$ nên $S = \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx = 3$

Câu 2: Một chiếc lều mái vòm có hình dạng như hình bên. Nếu cắt lều bằng mặt phẳng song song với mặt đáy và cách mặt đáy một khoảng $3-x$ (mét) ($0 \leq x \leq 3$) thì được hình chữ nhật có các kích thước lần lượt là x và $\sqrt{9-x^2}$. Tính thể tích cái lều (đơn vị m^3).



Lời giải

Trả lời: 9

Thể tích lều được tính bởi công thức $V = \int_0^3 (x\sqrt{9-x^2}) dx = 9(m^3)$

Câu 3: Một chiếc đèn cỏi có hình như bên. Nếu cắt đèn bằng mặt phẳng song song với mặt đáy và cách mặt đáy một khoảng x (dm) ($0 \leq x \leq 5$) thì được thiết diện là hình tròn có bán kính $\sqrt{9-x}$ (dm). Thể tích của chiếc đèn cỏi là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân hàng phần chục).



Lời giải

Trả lời: 25,1

Diện tích của mặt cắt là: $S(x) = \pi(\sqrt{9-x})^2 \text{ (dm}^2\text{)}$

Ta có: Thể tích của khối tròn xoay tạo thành là: $V = \pi \int_0^4 \pi(\sqrt{9-x})^2 dx \approx (\text{dm}^3)$

Câu 4: Diện tích của hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y = x^3 - x^2 - 12x$ và trục Ox xấp xỉ bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần mười)?

Lời giải

Trả lời: 78,1.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \\ x = 4 \end{cases}$$

Diện tích của hình phẳng (H) là $S = \int_{-3}^4 |x^3 - x^2 - 12x| dx$

$$\begin{aligned} &= \int_{-3}^0 |x^3 - x^2 - 12x| dx + \int_0^4 |x^3 - x^2 - 12x| dx = \left| \int_{-3}^0 (x^3 - x^2 - 12x) dx \right| + \left| \int_0^4 (x^3 - x^2 - 12x) dx \right| \\ &= \left| \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 \right) \right|_{-3}^0 + \left| \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 \right) \right|_0^4 = \left| \frac{99}{4} \right| + \left| -\frac{160}{3} \right| = \frac{937}{12} \approx 78,1. \end{aligned}$$

Câu 5: . Một bình hoa có dạng khối tròn xoay với chiều cao là 25cm (tham khảo hình vẽ). Khi cắt bình hoa theo một mặt phẳng vuông góc với trục của nó thì ta luôn được thiết diện là một hình tròn có bán kính $R = \frac{4}{9}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{25}{36}$ (dm) với $x \in \left[0; \frac{5}{2}\right]$ là khoảng cách từ mặt cắt tới mặt đáy của bình hoa (tính theo đơn vị dm). Lượng nước cần đổ vào bình để mức nước trong bình cao bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bình chiếm tỉ lệ bao nhiêu phần trăm so với thể tích của bình hoa? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Trả lời: 92

Diện tích của mặt cắt vuông góc với trục tại vị trí cách mặt đáy của bình hoa một khoảng x (dm)

$$\text{là: } S(x) = \pi R^2 = \pi \left(\frac{4}{9}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{25}{36} \right)^2 (dm^2)$$

$$\text{Lượng nước đổ đầy bình hoa là: } V = \int_0^{\frac{5}{2}} S(x) dx = \pi \int_0^{\frac{5}{2}} \left(\frac{4}{9}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{25}{36} \right)^2 dx \approx 3,66 (dm^3)$$

Lượng nước đổ vào bình cao bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bình là:

$$V_1 = \int_0^{\frac{5}{3}} S(x) dx = \pi \int_0^{\frac{5}{3}} \left(\frac{4}{9}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{25}{36} \right)^2 dx \approx 3,37 (dm^3)$$

Vậy tỉ lệ phần trăm lượng nước cần đổ vào bình để mức nước trong bình cao bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao

của bình so với thể tích của bình hoa là $\frac{V_1}{V} \cdot 100\% = \frac{3,37}{3,66} \cdot 100\% \approx 92\%$.

Câu 6: Người ta dự định lắp kính cho cửa của một mái vòm có dạng hình parabol. Hãy tính diện tích mặt kính cần lắp vào, biết rằng vòm cửa cao 21 m và rộng 70 m (**Hình 33**).



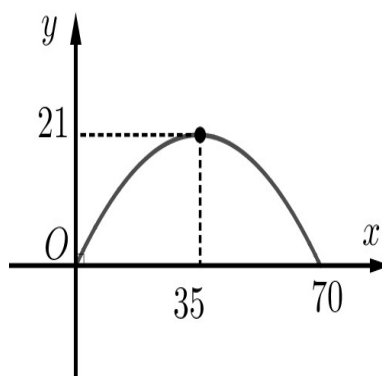
(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Hình 33

Lời giải

Trả lời: 980

Chọn hệ tọa độ Oxy với gốc tọa độ O trùng với chân cửa bên trái như hình dưới đây.



Gọi đồ thị hàm số biểu thị cho cửa đã cho có dạng: $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$).

Đồ thị hàm số này đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và các điểm $A(35;21)$, $B(70;0)$ nên

$$\begin{cases} c = 0 \\ 1225a + 35b + c = 21 \\ 4900a + 70b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{175} \\ b = \frac{6}{5} \\ c = 0 \end{cases}$$

Suy ra: $y = -\frac{3}{175}x^2 + \frac{6}{5}x$.

Diện tích mặt kính cần lắp là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -\frac{3}{175}x^2 + \frac{6}{5}x$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0; x = 70$.

$$\text{Ta có: } S = \int_0^{70} \left(-\frac{3}{175}x^2 + \frac{6}{5}x \right) dx = \left(-\frac{1}{175}x^3 + \frac{3}{5}x^2 \right) \Bigg|_0^{70} = 980 \text{ (m}^2\text{)}.$$

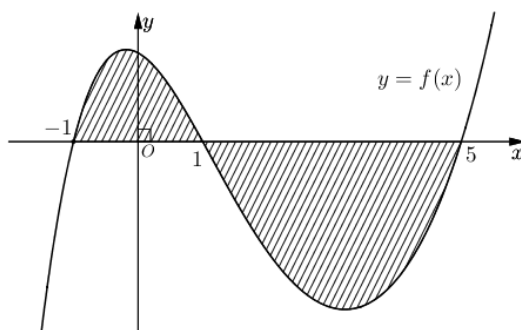
CHƯƠNG

IV

NGUYÊN HÀM
TÍCH PHÂNBÀI. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN
ĐỀ TEST SỐ 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 5$ như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $S = -\int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^5 f(x)dx$.

B. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx$.

C. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^5 f(x)dx$.

D. $S = -\int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx$.

Câu 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$ và $x = 3$.

A. e^3 .

B. $e^3 - 1$.

C. $e^2 - 1$.

D. $e(e^2 - 1)$.

Câu 3: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ bằng

A. 8.

B. 12.

C. 10.

D. 9.

Câu 4: Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = 2$.

B. $V = \frac{4\pi}{3}$.

C. $V = 2\pi$.

D. $V = \frac{4}{3}$.

Câu 5: Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $S = \pi \int_0^2 2^x dx$

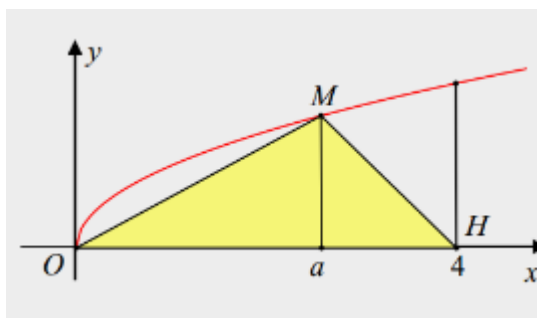
B. $S = \int_0^2 2^x dx$

C. $S = \pi \int_0^2 2^{2x} dx$

D. $S = \int_0^2 2^{2x} dx$

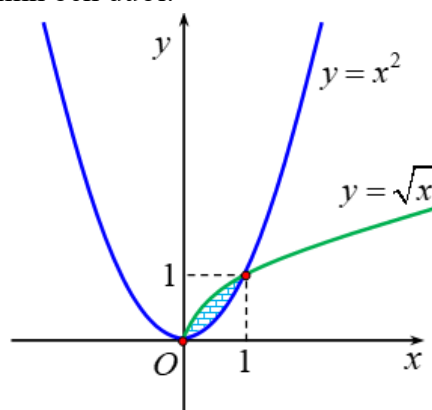
- Câu 6:** Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$, $y = -1$, $x = 0$ và $x = 1$ được tính bởi công thức nào sau đây?
- A. $S = \pi \int_0^1 (2x^2 + 1) dx$. B. $S = \int_0^1 (2x^2 - 1) dx$. C. $S = \int_0^1 (2x^2 + 1)^2 dx$. D. $S = \int_0^1 (2x^2 + 1) dx$.
- Câu 7:** Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 2$, $x = 0$, $x = 1$.
- A. $S = 4 \ln 2 + e - 5$. B. $S = 4 \ln 2 + e - 6$. C. $S = e^2 - 7$. D. $S = e - 3$.
- Câu 8:** Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 2x$, $y = x + 6$ là
- A. $S = \frac{59}{6} (đvdt)$. B. $S = \frac{256}{6} (đvdt)$. C. $S = \frac{125}{6} (đvdt)$. D. $S = \frac{65}{6} (đvdt)$.
- Câu 9:** Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{2x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$ bằng
- A. $V = 3\pi$. B. $V = 2\pi$. C. $V = \frac{\pi}{2}$. D. $V = 3$.
- Câu 10:** Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y = -x^2 + 2x$, trục hoành. Quay hình phẳng (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:
- A. $\frac{496\pi}{15}$. B. $\frac{32\pi}{15}$. C. $\frac{4\pi}{3}$. D. $\frac{16\pi}{15}$.
- Câu 11:** Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1; x = 3$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành bằng
- A. $\frac{16\pi}{15}$. B. $\frac{16}{15}$. C. $\frac{4\pi}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.
- Câu 12:** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$, $y = 0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là
- A. $\int_0^2 (2x - x^2) dx$ B. $\pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$ C. $\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$ D. $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$
- PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.
- Câu 1:** Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, $y = 2e^x$ và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$.
- a) Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$ là $S = \pi \int_0^4 x dx$.
- b) Gọi V là thể tích của khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2e^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$ khi quay quanh trục Ox . Khi đó, $V = 2\pi(e^8 - 1)$
- c) Diện tích của hình H là $S_H = 2e^4 - \frac{16}{3}$.
- d) Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi hình H khi quay quanh trục Ox là $2\pi(e^8 - 5)$
- Câu 2:** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$.

- a) Công thức tính diện tích hình phẳng (H) là $\int_0^4 \sqrt{x} dx$.
- b) Diện tích hình phẳng (H) là $\frac{19}{6}$.
- c) Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, $x = 0, x = 4$ và trục hoành Ox là 8π .
- d) Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $x = 0, x = 4$ và trục Ox . Đường thẳng $x = a (0 < a < 4)$ cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại M .



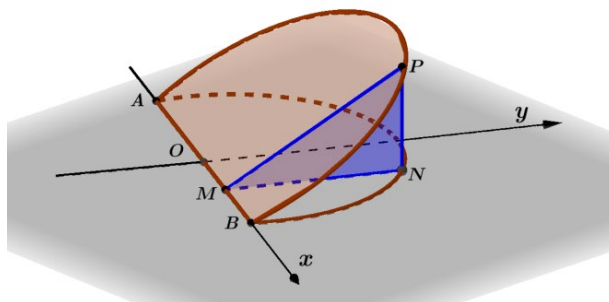
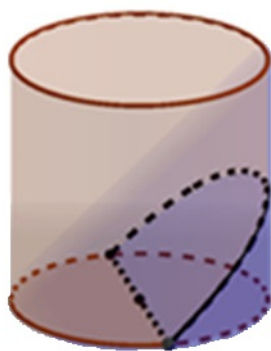
Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác MOH quanh trục Ox . Biết rằng $V = 2V_1$. Khi đó $a = 3$.

Câu 3: Cho hình phẳng được tô trong hình bên dưới.



- a) Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2; y = \sqrt{x}$
- b) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\frac{1}{3}$.
- c) Thể tích của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng trên quanh trục Ox là $\pi \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$.
- d) Thể tích V của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $(P): y = x^2; (C): y = \sqrt{x}$ quanh trục Oy bằng $\frac{3\pi}{10}$.

Câu 4: Cho một vật thể bằng gỗ có dạng hình trụ với chiều cao và bán kính đáy cùng bằng 1. Cắt khối gỗ đó bởi một mặt phẳng đi qua đường kính của một mặt đáy của khối gỗ và tạo với mặt phẳng đáy của khối gỗ một góc 30° ta thu được khối gỗ hình nêm (H) và đặt khối (H) vào hệ trục tọa độ như hình vẽ.

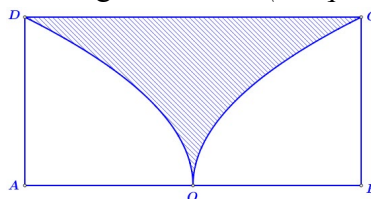


- a) Nửa đường tròn đáy khối gỗ hình trụ có phương trình là $y = \sqrt{1+x^2}$, $(-1 \leq x \leq 1)$.
- b) Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm M có hoành độ x , cắt hình nêm theo thiết diện là $\triangle MNP$ vuông tại N và có góc $\widehat{PMN} = 30^\circ$. Lúc đó đoạn MN bằng $\sqrt{1-x^2}$.
- c) Diện tích tam giác MNP bằng $1-x^2$.
- d) Thể tích hình nêm (H) bằng $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

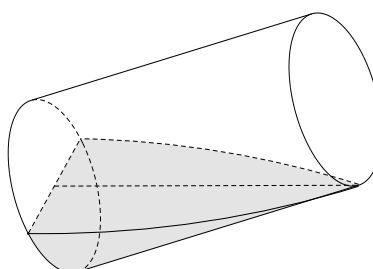
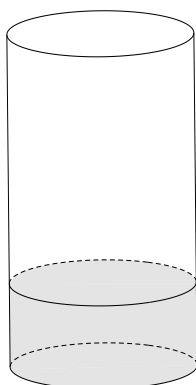
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Tìm a để diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = \frac{x^2-2x}{x-1}$, đường thẳng $d: y = x-1$ và $x = a$, $x = 2a$ ($a > 1$) bằng $\ln 3$?

Câu 2: Từ hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 10$ cm và chiều rộng $BC = 5$ cm; Người ta cắt bỏ miền (R) được giới hạn bởi cạnh CD của hình chữ nhật và hai nửa đường parabol có chung đỉnh là trung điểm của cạnh AB , chúng lần lượt đi qua hai đầu mút C, D của hình chữ nhật đó (phần tô đậm như hình vẽ). Phần còn lại cho quay quanh trục AB để tạo nên một đồ vật làm trang trí, thể tích của vật trang trí đó bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Câu 3: Có một cốc nước thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 6 cm, chiều cao lòng cốc là 10 cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích (đơn vị: cm^3) lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì đáy mực nước trùng với đường kính đáy cốc.

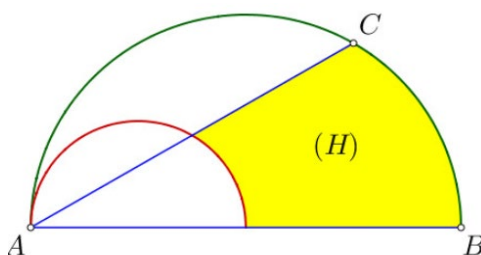


- Câu 4:** Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 60 (cm). Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô màu sẫm như hình vẽ bên).



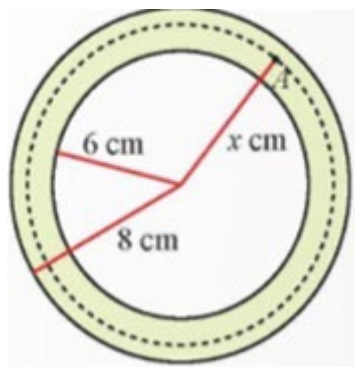
Diện tích phần cánh hoa của viên gạch là

- Câu 5:** Cho hai nửa đường tròn như hình vẽ, biết đường kính của đường tròn lớn gấp đôi đường kính của đường tròn nhỏ



Nửa đường tròn đường kính AB có diện tích là 32π và $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Ký hiệu (H) là hình phẳng được tô màu như trong hình vẽ. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình (H) quay quanh trục AB . (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

- Câu 6:** Mặt cắt ngang của một ống dẫn khí nóng là hình vành khuyên như hình vẽ, khi bên trong ống được duy trì ở $150^\circ C$.



Biết rằng nhiệt độ $T(^\circ C)$ tại điểm A trên thành ống là hàm số của khoảng cách $x(cm)$ từ A đến tâm của mặt cắt và $T'(x) = \frac{30}{x}$ ($6 \leq x \leq 8$).

(Nguồn: Y.A.Cengel, A.I.Gahjar, Heat and Mass Transfer, Mc Graw Hill, 2015).

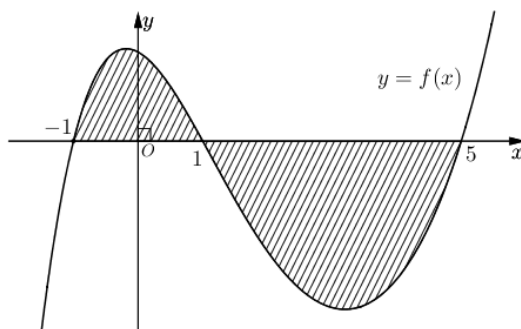
Tìm nhiệt độ mặt ngoài của ống? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 5$ như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $S = -\int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^5 f(x)dx.$

B. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx.$

C. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^5 f(x)dx.$

D. $S = -\int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx.$

Lời giải

Ta có: $S = \int_{-1}^1 |f(x)|dx + \int_1^5 |f(x)|dx = \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^5 f(x)dx.$

Câu 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$ và $x = 3$.

A. $e^3.$

B. $e^3 - 1.$

C. $e^2 - 1.$

D. $e(e^2 - 1).$

Lời giải

Chọn B

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$

và $x = 3$ là $S = \int_0^3 e^x dx = e^x \Big|_0^3 = e^3 - 1.$

Câu 3: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$ bằng

A. 8.

B. 12.

C. 10.

D. 9.

Lời giải

Ta có: $S = \int_0^2 |3x^2 + 1|dx = \int_0^2 (3x^2 + 1)dx = (x^3 + x) \Big|_0^2 = 10.$

Câu 4: Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = 2.$

B. $V = \frac{4\pi}{3}.$

C. $V = 2\pi.$

D. $V = \frac{4}{3}.$

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay được tính theo công thức:

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x^2 + 1} \right)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

Câu 5: Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \pi \int_0^2 2^x dx$

B. $S = \int_0^2 2^x dx$

C. $S = \pi \int_0^2 2^{2x} dx$

D. $S = \int_0^2 2^{2x} dx$

Lời giải

Chọn B

$$S = \int_0^2 |2^x| dx = \int_0^2 2^x dx \quad (\text{do } 2^x > 0, \forall x \in [0; 2]).$$

Câu 6: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$, $y = -1$, $x = 0$ và $x = 1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $S = \pi \int_0^1 (2x^2 + 1) dx$. **B.** $S = \int_0^1 (2x^2 - 1) dx$. **C.** $S = \int_0^1 (2x^2 + 1)^2 dx$. **D.** $S = \int_0^1 (2x^2 + 1) dx$.

Lời giải

$$\text{Diện tích hình phẳng cần tìm là } S = \int_0^1 |2x^2 + 1| dx = \int_0^1 (2x^2 + 1) dx \quad \text{do } 2x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in [0; 1].$$

Câu 7: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 2$, $x = 0$, $x = 1$.

A. $S = 4 \ln 2 + e - 5$.

B. $S = 4 \ln 2 + e - 6$.

C. $S = e^2 - 7$.

D. $S = e - 3$.

Lời giải

$$\text{Gọi } S \text{ là diện tích cần tìm. Ta có } S = \int_0^1 |e^x - 2| dx.$$

$$\text{Xét } e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2.$$

Bảng xét dấu $e^x - 2$:

x	0	$\ln 2$	1
$e^x - 2$	—	0	+

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= \int_0^1 |e^x - 2| dx = - \int_0^{\ln 2} (e^x - 2) dx + \int_{\ln 2}^1 (e^x - 2) dx = (2x - e^x) \Big|_0^{\ln 2} + (e^x - 2x) \Big|_{\ln 2}^1 \\ &= 4 \ln 2 + e - 5. \text{ Vậy } S = 4 \ln 2 + e - 5. \end{aligned}$$

Câu 8: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 2x$, $y = x + 6$ là

A. $S = \frac{59}{6} (\text{đvdt})$.

B. $S = \frac{256}{6} (\text{đvdt})$.

C. $S = \frac{125}{6} (\text{đvdt})$.

D. $S = \frac{65}{6} (\text{đvdt})$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường cong là

$$\begin{aligned}x^2 + 2x &= x + 6 \\ \Leftrightarrow x^2 + x - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Suy ra } S &= \int_{-3}^2 |(x^2 + 2x) - (x + 6)| dx = \int_{-3}^2 |x^2 + x - 6| dx \\ &= \int_{-3}^2 (-x^2 - x + 6) dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x\right) \Big|_{-3}^2 = \frac{125}{6} \text{ (đvdt)}.\end{aligned}$$

Câu 9: Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{2x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$ bằng

A. $V = 3\pi$.

B. $V = 2\pi$.

C. $V = \frac{\pi}{2}$.

D. $V = 3$.

Lời giải

$$\text{Thể tích khối tròn xoay: } V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_1^2 (\sqrt{2x})^2 dx = \pi \int_1^2 2x dx = \pi x^2 \Big|_1^2 = 4\pi - \pi = 3\pi.$$

Câu 10: Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y = -x^2 + 2x$, trục hoành. Quay hình phẳng (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\frac{496\pi}{15}$.

B. $\frac{32\pi}{15}$.

C. $\frac{4\pi}{3}$.

D. $\frac{16\pi}{15}$.

Lời giải

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm của } (H) \text{ và trục hoành } -x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V = \pi \int_0^2 (-x^2 + 2x)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{16\pi}{15}.$$

Câu 11: Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1; x = 3$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành bằng

A. $\frac{16\pi}{15}$.

B. $\frac{16}{15}$.

C. $\frac{4\pi}{3}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành là:

$$V = \pi \int_1^3 [x^2 - 4x + 3]^2 dx = \pi \int_1^3 [x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9] dx = \frac{16\pi}{15} \text{ (đvtt)}.$$

Câu 12: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$, $y = 0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

A. $\int_0^2 (2x - x^2) dx$

B. $\pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$

C. $\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$

D. $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$

Lời giải

Theo công thức ta chọn $V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------	---------	---------	---------

Câu 1: Gọi H là hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}, y = 2e^x$ và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$.

a) Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$ là $S = \pi \int_0^4 x dx$.

b) Gọi V là thể tích của khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2e^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$ khi quay quanh trục Ox . Khi đó, $V = 2\pi(e^8 - 1)$

c) Diện tích của hình H là $S_H = 2e^4 - \frac{16}{3}$.

d) Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi hình H khi quay quanh trục Ox là $2\pi(e^8 - 5)$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) Sai

Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$ là $S = \int_0^4 \sqrt{x} dx$.

b) Đúng

Gọi V là thể tích của khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2e^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$ khi quay quanh trục Ox .

Khi đó, $V = \pi \int_0^4 (2e^x)^2 dx = \pi \int_0^4 4e^{2x} dx = 2\pi e^{2x} \Big|_0^4 = 2\pi(e^8 - 1)$

c) Sai

Diện tích của hình H là $S_H = \int_0^4 |2e^x - \sqrt{x}| dx = \int_0^4 (2e^x - \sqrt{x}) dx = \left(2e^x - \frac{2}{3} x\sqrt{x} \right) \Big|_0^4 = 2e^4 - \frac{22}{3}$.

(Vì $2e^x - \sqrt{x} > 0, \forall x \in [0; 4]$)

d) Đúng

Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi hình H khi quay quanh trục Ox là

$V = \pi \int_0^4 \left| (2e^x)^2 - (\sqrt{x})^2 \right| dx = \pi \int_0^4 |4e^{2x} - x| dx = \pi \int_0^4 (4e^{2x} - x) dx = \pi \left(2e^{2x} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^4 = 2\pi(e^8 - 5)$

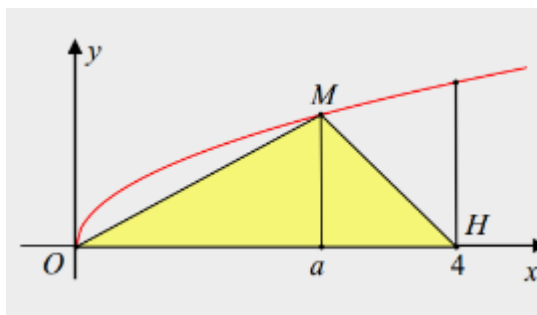
Câu 2: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$.

a) Công thức tính diện tích hình phẳng (H) là $\int_0^4 \sqrt{x} dx$.

b) Diện tích hình phẳng (H) là $\frac{19}{6}$.

c) Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, $x = 0, x = 4$ và trục hoành Ox là 8π .

d) Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $x = 0, x = 4$ và trục Ox . Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại M .



Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác MOH quanh trục Ox . Biết rằng $V = 2V_1$. Khi đó $a = 3$.

Lời giải

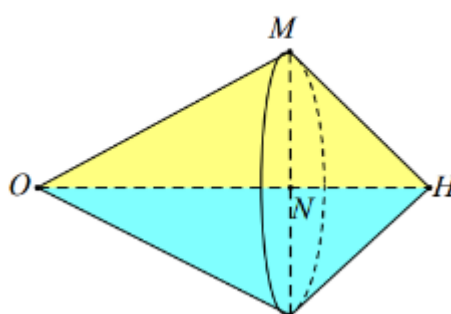
a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Ta có $S = \int_0^4 \sqrt{x} dx$. Vậy a) Đúng.

b) $S = \int_0^4 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{16}{3}$. Vậy b) Sai

c) Ta có $V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = 8\pi$. Vậy c) Đúng

d) $V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = 8\pi \Rightarrow V_1 = \frac{V}{2} = 4\pi$

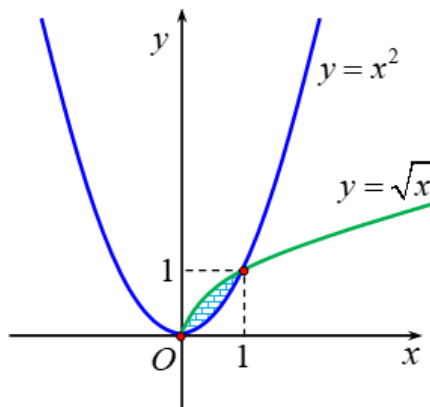


Tam giác MOH quanh trục Ox tạo nên hai khối nón chung đáy. Gọi N là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Suy ra $r = MN = y_M = y(a) = \sqrt{a}$.

$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot OH \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \pi \cdot (\sqrt{a})^2 = \frac{4\pi a}{3}$. Suy ra $4\pi = \frac{4\pi a}{3} \Rightarrow a = 3$

Vậy d) Đúng.

Câu 3: Cho hình phẳng được tô trong hình bên dưới.



- a) Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2; y = \sqrt{x}$
- b) Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\frac{1}{3}$.
- c) Thể tích của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng trên quanh trục Ox là $\pi \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$.
- d) Thể tích V của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $(P): y = x^2; (C): y = \sqrt{x}$ quanh trục Oy bằng $\frac{3\pi}{10}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
----------------	----------------	---------------	----------------

a) Đúng

Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2; y = \sqrt{x}$

b, Đúng

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Khi đó diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị $y = x^2; y = \sqrt{x}$ là:

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{1}{3}.$$

c, Sai

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 - x = 0$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Khi đó thể tích của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng trên quanh trục Ox là

$$\pi \int_0^1 (x - x^4) dx.$$

d, Đúng

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 - x = 0$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=1 \Rightarrow y=1 \end{cases}$$

Mặt khác:

$$(P): y = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{y} \\ x = -\sqrt{y} \end{cases} (y \geq 0)$$

$$(C): y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$$

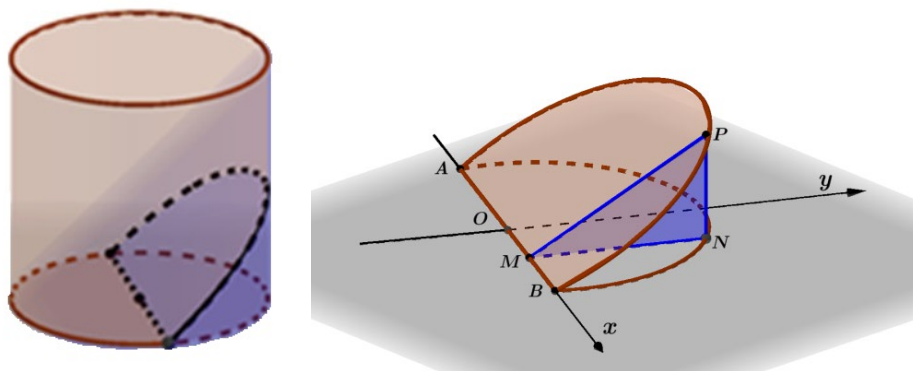
$$\text{Xét } (H_1): \begin{cases} x = \sqrt{y} \\ Oy \\ y = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ quay quanh } Oy \text{ được } V_1$$

$$\text{Xét } (H_2): \begin{cases} x = y^2 \\ Oy \\ y = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ quay quanh } Oy \text{ được } V_2$$

Do đó, thể tích cần tìm chính là:

$$V = V_1 - V_2 = \pi \left[\int_0^1 (\sqrt{y})^2 dy - \int_0^1 (y^2)^2 dy \right] = \frac{3\pi}{10}.$$

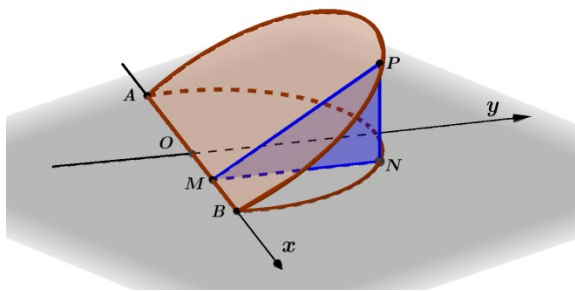
Câu 4: Cho một vật thể bằng gỗ có dạng hình trụ với chiều cao và bán kính đáy cùng bằng 1. Cắt khối gỗ đó bởi một mặt phẳng đi qua đường kính của một mặt đáy của khối gỗ và tạo với mặt phẳng đáy của khối gỗ một góc 30° ta thu được khối gỗ hình nêm (H) và đặt khối (H) vào hệ trục tọa độ như hình vẽ.



- Nửa đường tròn đáy khối gỗ hình trụ có phương trình là $y = \sqrt{1+x^2}$, $(-1 \leq x \leq 1)$.
- Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm M có hoành độ x , cắt hình nêm theo thiết diện là $\triangle MNP$ vuông tại N và có góc $\widehat{PMN} = 30^\circ$. Lúc đó đoạn MN bằng $\sqrt{1-x^2}$.
- Diện tích tam giác MNP bằng $1-x^2$.
- Thể tích hình nêm (H) bằng $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------



a) Sai.

Đường tròn tâm O bán kính bằng 1 có phương trình $x^2 + y^2 = 1$

Suy ra nửa đường tròn có phương trình $y = \sqrt{1-x^2}$, $(-1 \leq x \leq 1)$.

b) Đúng

Trong tam giác OMN vuông tại M có $OM = x$

Ta có $MN^2 + OM^2 = ON^2 \Rightarrow MN = \sqrt{ON^2 - OM^2} = \sqrt{1-x^2}$.

c) Sai

Ta có $MN = \sqrt{1-x^2}$, $NP = MN \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{3}}$

Diện tích tam giác MNP là $S(x) = S_{\Delta MNP} = \frac{1}{2} MN \cdot NP = \frac{1-x^2}{2\sqrt{3}}$.

d) Đúng

Với $S(x) = \frac{1-x^2}{2\sqrt{3}}$, thể tích hình nôm (H) bằng $V = \int_{-1}^1 S(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{2\sqrt{3}} dx = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Tìm a để diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = \frac{x^2-2x}{x-1}$, đường thẳng $d: y = x-1$ và $x = a$, $x = 2a$ ($a > 1$) bằng $\ln 3$?

Lời giải

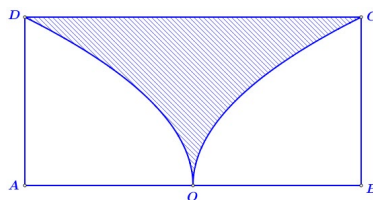
Trả lời: 2

Ta có: $S = \int_a^{2a} \left| \frac{x^2-2x}{x-1} - (x-1) \right| dx = \int_a^{2a} \left| \frac{1}{x-1} \right| dx = \int_a^{2a} \frac{1}{x-1} dx$ (vì $a > 1$) $= \ln(x-1) \Big|_a^{2a}$ (vì $a > 1$)

$= \ln(2a-1) - \ln(a-1) = \ln \frac{2a-1}{a-1}$.

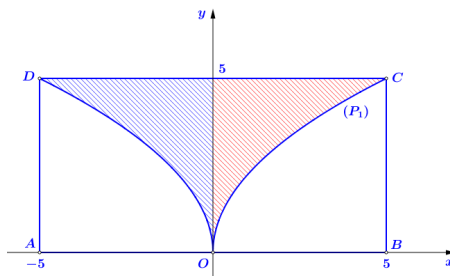
Ta có: $\ln \frac{2a-1}{a-1} = \ln 3 \Leftrightarrow \frac{2a-1}{a-1} = 3 \Leftrightarrow a = 2$.

Câu 2: Từ hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 10$ cm và chiều rộng $BC = 5$ cm; Người ta cắt bỏ miền (R) được giới hạn bởi cạnh CD của hình chữ nhật và hai nửa đường parabol có chung đỉnh là trung điểm của cạnh AB , chúng lần lượt đi qua hai đầu mút C, D của hình chữ nhật đó (phần tô đậm như hình vẽ). Phần còn lại cho quay quanh trục AB để tạo nên một đồ vật làm trang trí, thể tích của vật trang trí đó bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Trả lời: 393



Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh trục AB ta được khối trụ có

- Bán kính đáy $r = BC = 5$ cm.
- Chiều cao $h = AB = 10$ cm.

Do đó thể tích khối trụ này có thể tích $V_1 = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 250\pi$ (cm³)

Mặt khác, chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ thì $C(5;5)$ và parabol bên phải trục Ox có dạng $(P_1): y^2 = 2px$.

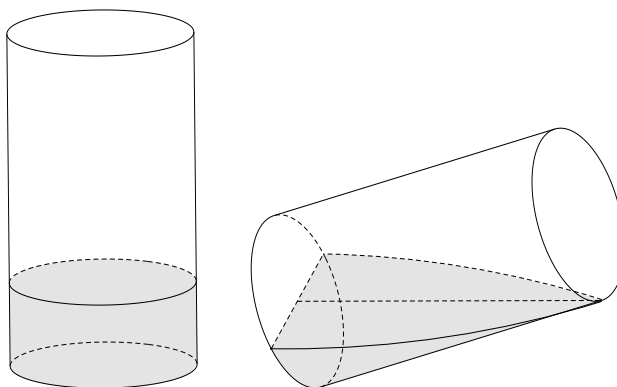
Ta có $C \in (P_1) \Leftrightarrow p = \frac{5}{2} \Rightarrow (P_1): y^2 = 5x$ hay $y = \sqrt{5x}$.

Khi đó miền (R) khi quay quanh trục Ox có thể tích

$$V_2 = 2\pi \int_0^5 \left[5^2 - 5x \right] dx = 2\pi \left(25x - \frac{5}{2}x^2 \right) \Big|_0^5 = 125\pi$$

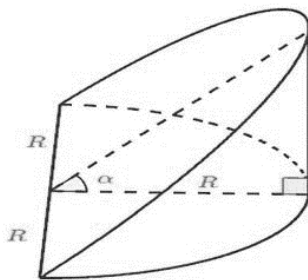
Vậy thể tích phần còn lại là $V = V_1 - V_2 = 125\pi \approx 393$ (cm³).

Câu 3: Có một cốc nước thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 6 cm, chiều cao lòng cốc là 10 cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích (đơn vị: cm³) lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì đáy mực nước trùng với đường kính đáy cốc.



Lời giải

Trả lời: 240



Chọn trục Ox trùng với đường kính đáy cốc, thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-R \leq x \leq R$) là một tam giác vuông có độ dài các cạnh là

$$\sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{và} \quad \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \tan \alpha.$$

Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện được tạo thành, ta có:

$$S(x) = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \tan \alpha = \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \tan \alpha.$$

Khối nước tạo thành khi nghiêng cốc có hình dạng cái nôm. Thể tích hình cái nôm là:

$$V = \int_{-R}^R S(x) dx = \int_{-R}^R \frac{1}{2} \tan \alpha (R^2 - x^2) dx = \frac{1}{2} \tan \alpha \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha.$$

$$\text{Suy ra } V_{kn} = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha. \Rightarrow V_{kn} = \frac{2}{3} R^3 \cdot \frac{h}{R} = \frac{2}{3} R^2 \cdot h = \frac{2}{3} 6^2 \cdot 10 = 240 \text{ cm}^3.$$

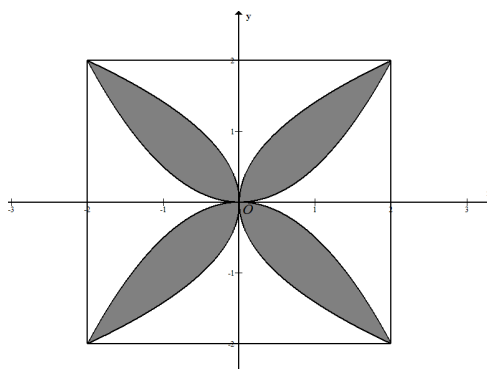
Câu 4: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 60 (cm) . Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô màu sẫm như hình vẽ bên).



Diện tích phần cánh hoa của viên gạch là

Lời giải

Trả lời: 300



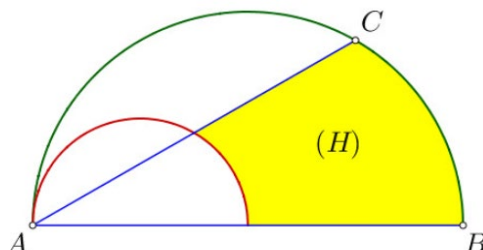
Chọn hệ tọa độ như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng $10 \text{ cm} = 1 \text{ dm}$), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có phương trình $y = \frac{x^2}{3}$, $y = -\frac{x^2}{3}$, $x = -\frac{y^2}{3}$, $x = \frac{y^2}{3}$.

Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phần tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{3}$, $y = \sqrt{3x}$ và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 3$.

Do đó diện tích một cánh hoa bằng

$$\int_0^3 \left(\sqrt{3x} - \frac{x^2}{3} \right) dx = 3 (\text{dm}^2) = 300 (\text{cm}^2).$$

Câu 5: Cho hai nửa đường tròn như hình vẽ, biết đường kính của đường tròn lớn gấp đôi đường kính của đường tròn nhỏ



Nửa đường tròn đường kính AB có diện tích là 32π và $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Ký hiệu (H) là hình phẳng được tô màu như trong hình vẽ. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình (H) quay quanh trục AB . (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

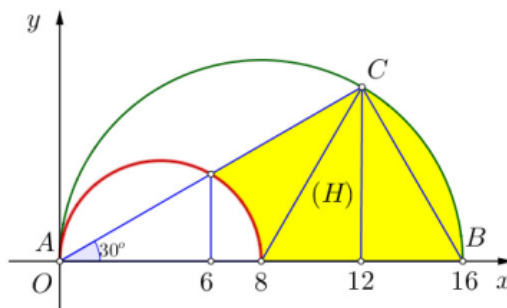
Lời giải

Trả lời: 821

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

Ký hiệu (C) , (C') lần lượt là các nửa đường tròn lớn và nửa đường tròn nhỏ trong hình vẽ.

R , r lần lượt là bán kính các đường tròn trên.



$$\text{Ta có: } \frac{1}{2}S = 32\pi \Leftrightarrow \frac{1}{2}\pi R^2 = 32\pi \Leftrightarrow R = 8 \text{ và } r = 4.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (C): y = \sqrt{64 - (x-8)^2} \\ (C'): y = \sqrt{16 - (x-4)^2} \end{cases}$$

$$\widehat{BAC} = 30^\circ \Rightarrow AC: y = x \tan 30^\circ \text{ hay } y = \frac{x\sqrt{3}}{3}.$$

Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường

$$x = 6; x = 12; y = \frac{\sqrt{3}}{3}x; y = 0 \text{ quanh trục } Ox.$$

Gọi V_2 là thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường

$$x = 12; x = 16; y = \sqrt{64 - (x - 8)^2}; y = 0 \text{ quanh trục } Ox.$$

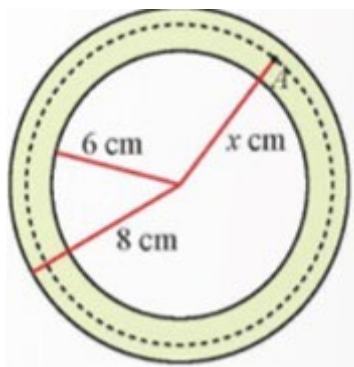
Gọi V_3 là thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường

$$x = 6; x = 8; y = \sqrt{16 - (x - 4)^2}; y = 0 \text{ quanh trục } Ox.$$

Khi đó, thể tích khối tròn xoay cần tìm là: $V = V_1 + V_2 - V_3$

$$\text{Hay } V = \pi \left(\int_6^{12} \frac{x^2}{3} dx + \int_{12}^{16} (64 - (x - 8)^2) dx - \int_6^8 (16 - (x - 4)^2) dx \right) = \frac{784}{3} \pi \approx 821.$$

Câu 6: Mặt cắt ngang của một ống dẫn khí nóng là hình vành khuyên như hình vẽ, khi bên trong ống được duy trì ở 150°C .



Biết rằng nhiệt độ $T(^\circ\text{C})$ tại điểm A trên thành ống là hàm số của khoảng cách $x(\text{cm})$ từ A

đến tâm của mặt cắt và $T'(x) = \frac{30}{x}$ ($6 \leq x \leq 8$).

(Nguồn: Y.A.Cengel, A.I.Gahjar, Heat and Mass Transfer, Mc Graw Hill, 2015).

Tìm nhiệt độ mặt ngoài của ống? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 141

Nhiệt độ tại điểm A trên thành ống là

$$T(x) = \int \left(-\frac{30}{x} \right) dx = -30 \ln|x| + C.$$

Vì $T(6) = 150^\circ\text{C}$ nên $-30 \ln 6 + C = 150 \Rightarrow C = 150 + 30 \ln 6$.

Do đó $T(x) = -30 \ln|x| + 150 + 30 \ln 6$.

Nhiệt độ ngoài mặt ống là $T(8) = -30 \ln 8 + 150 + 30 \ln 6 \approx 141^\circ\text{C}$.

CHƯƠNG

IV

NGUYÊN HÀM
TÍCH PHÂN

ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG 4

ĐỀ TEST SỐ 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^2$ là:

- A. $F(x) = 2x^3 + C$. B. $F(x) = \frac{2}{3}x^3$. C. $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$. D. $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + C$.

Câu 2: Nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là

- A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - \ln|x| + C$. B. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{x^2} + C$.
C. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln x + C$. D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$.

Câu 3: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 3$ thỏa mãn $F(0) = 2$, giá trị của $F(1)$ bằng

- A. 4. B. $\frac{13}{3}$. C. 2. D. $\frac{11}{3}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^0 f(x) dx = 3 \int_0^3 f(x) dx = 3$. Tích phân $\int_{-1}^3 f(x) dx$ bằng

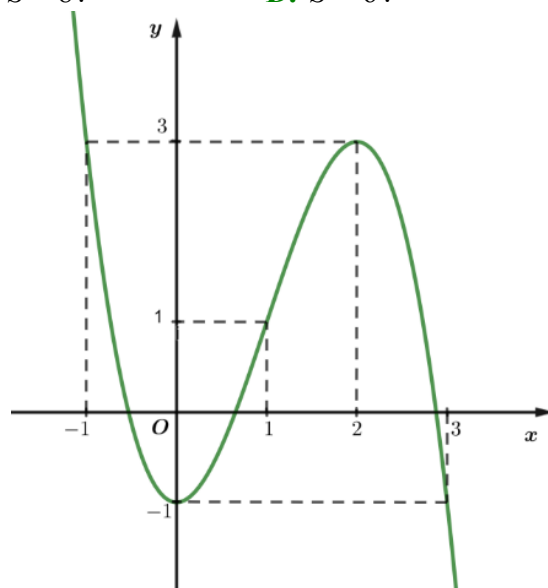
- A. 6. B. 4. C. 2. D. 0

Câu 5: Biết $\int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = a + b \ln c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}, c < 9$. Tính tổng $S = a + b + c$.

- A. $S = 7$. B. $S = 5$. C. $S = 8$. D. $S = 6$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên và đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $\int_1^2 f'(x) dx$ bằng

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 4.



Câu 7: Hàm số $F(x) = \log x$ là nguyên hàm của hàm số:

- A. $y = \frac{1}{x}$. B. $y = \frac{1}{x \ln 10}$. C. $y = \frac{\ln 10}{x}$. D. $y = \frac{1}{x \log 10}$.

Câu 8: Cho $\int_2^5 f(x)dx = 10$. Khi đó $\int_5^2 4f(x)dx$ bằng:

- A. 32. B. -40. C. 36. D. 40

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[1;9]$, thỏa mãn $\int_1^9 f(x)dx = 24$ và $\int_4^5 f(x)dx = 7$. Tính giá trị

biểu thức $I = \int_1^4 f(x)dx + \int_5^9 f(x)dx$.

- A. $I = 168$. B. $I = -17$. C. $I = 31$. D. $I = 17$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[-1;2]$. Biết $f(-1) = 1, f(2) = 10$, tính tích phân

$\int_{-1}^2 [2x + f'(x)]dx$.

- A. 13. B. 12. C. 11. D. -2.

Câu 11: Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 2$ quay quanh Ox . Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. $V = \pi \int_0^2 e^{2x} dx$. B. $V = \int_0^2 e^x dx$. C. $V = \pi \int_0^2 e^x dx$. D. $V = \int_0^2 e^{2x} dx$.

Câu 12: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1 + \sin t$ (m/s). Quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $t = 0$ (giây) đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}$ (giây) được tính theo công thức

- A. $s(t) = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 + \sin t)dt$. B. $s(t) = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 + \sin t)^2 dt$.
C. $s(t) = \left| \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 - \cos t)dt \right|$. D. $s(t) = v\left(\frac{3\pi}{4}\right) - v(0)$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho $F(x); G(x)$ lần lượt là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt{x} + 8; g(x) = 5^x - e^x$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Có $\int (f(x) - g(x))dx = F(x) - G(x) + C$.

b) $\int g(x)dx = 5^x \ln 5 - e^x + C_2$.

c) $F(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}} + 8x + C_1$.

d) Biết $F(0) = 5; G(0) = \frac{1}{\ln 5} - 1$. Ta có $F(1) - G(1) = \frac{67}{5} - \frac{5}{\ln 5} + e$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, có thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.

Biết $f(-1) = -\frac{35}{3}$, diện tích hình phẳng (A), (B) lần lượt

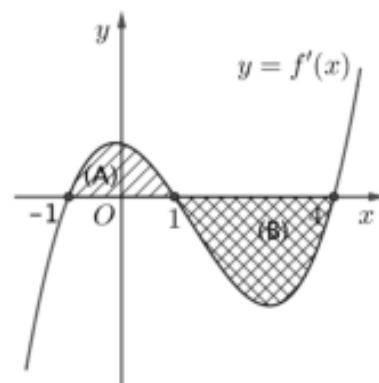
bằng $\frac{64}{3}$ và 63.

a) Giá trị của $\int_{-1}^4 f'(x)dx$ bằng $\frac{253}{3}$.

b) Giá trị của $f(1) = \frac{29}{3}$.

c) Tích phân $I = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} f'(2x+1)dx$ bằng $-\frac{125}{3}$.

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x) = -2x^2 + 16x$ làm tròn đến hàng đơn vị là 216.



Câu 3: Cho đồ thị như hình vẽ

a) Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{2x}$ và $y = 4 - x$ là $x = 2$.

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{2x}$,

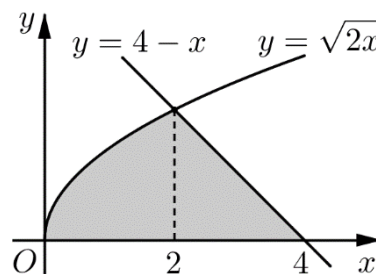
trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$ là $S_1 = \int_0^2 2x dx$.

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 4 - x$, trục hoành và hai đường thẳng

$x = 2, x = 4$ là $S_2 = \int_2^4 (x - 4) dx$.

d) Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \sqrt{2x}$, $y = 4 - x$ và trục hoành Ox

(như hình vẽ) được tính bởi công thức $S = \int_0^2 \sqrt{2x} dx + \int_2^4 (4 - x) dx$.



Câu 4: Một chiếc cổng có dạng là một parabol (P) có kích thước như hình vẽ, biết chiều cao cổng bằng chiều rộng của cổng và bằng 4m (Tham khảo hình vẽ). Người ta thiết kế cửa đi là một hình chữ nhật CDEF, phần còn lại dùng để trang trí. Biết chi phí phần tô đậm là 1.000.000 đồng/ m^2 .

a) Chọn hệ trục tọa độ Oxy , như hình vẽ thì phương trình của

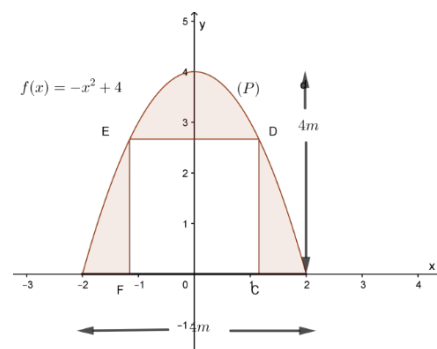
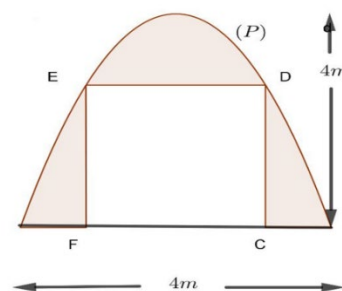
đường cong (P) cánh cổng là $y = f(x) = -x^2 + 4$.

b) Nếu chiều cao cửa đi là $CD = 2m$ thì chiều rộng của cửa là $CF = 2\sqrt{2}m$.

c) Nếu chiều cao cửa đi là $CD = 2m$ thì chi phí để trang trí

phần tô đậm là $\left(\frac{32 - 6\sqrt{2}}{3}\right)$ triệu đồng.

d) Số tiền ít nhất dùng để trang trí phần tô đậm (làm tròn đến hàng nghìn đồng) là 4.508.000 đồng.

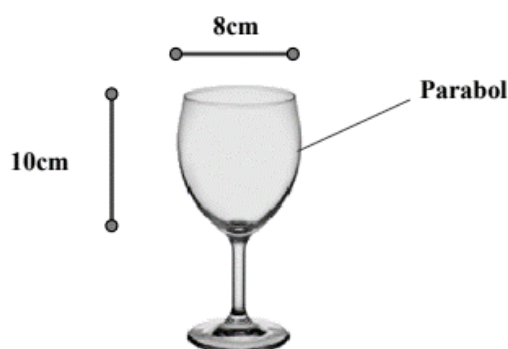


PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

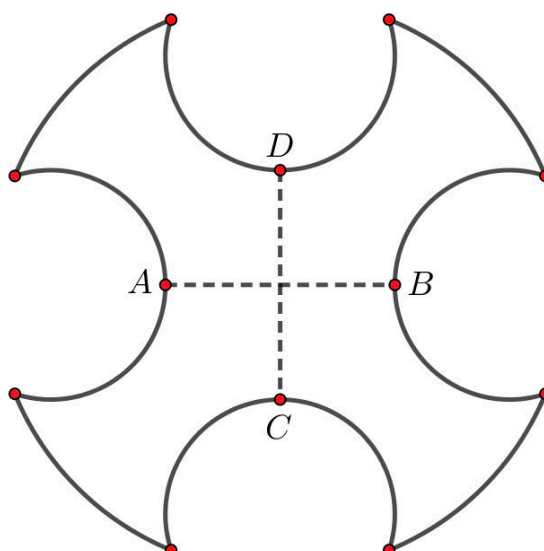
Câu 1: Thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi phép quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ được viết kết quả dưới dạng $\frac{a\pi}{b}$. Tính $V = 128a - 8b$.

Câu 2: Một ô tô đang chạy với vận tốc $20(m/s)$ thì người ta nhìn thấy một chướng ngại vật nên đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 20(m/s)$, trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ lúc đạp phanh. Quãng đường mà ô tô đi được trong 15 giây cuối bằng

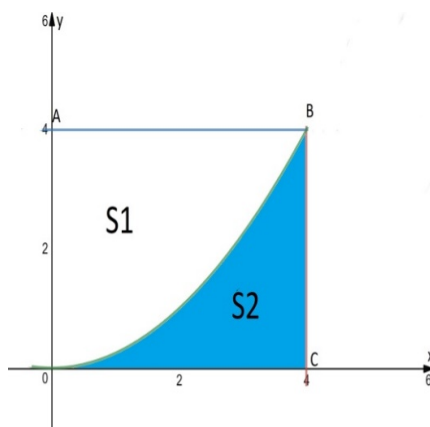
Câu 3: Một cốc rượu có hình dạng tròn xoay (không kể phần chân đế) có kích thước như hình vẽ bên dưới. Thiết diện dọc của cốc (bỏ dọc cốc thành 2 phần bằng nhau) là một đường Parabol. Tính thể tích rượu tối đa mà cốc có thể chứa được (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị, đơn vị đo thể tích là cm^3)



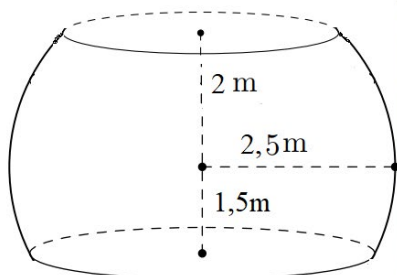
Câu 4: Một chi tiết máy hình đĩa tròn có dạng như hình vẽ bên nhận AB, CD làm các trục đối xứng. Người ta cần phủ sơn cả hai mặt của chi tiết. Biết rằng đường tròn lớn có bán kính $5 dm$, các đường tròn nhỏ đều có bán kính bằng $2 dm$, $AB = CD = 4 dm$ và chi phí sơn là $100\,000$ đồng/ m^2 . Tính chi phí x (nghìn đồng) để sơn hoàn thiện chi tiết máy (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Câu 5: Cho hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không bị gạch và bị gạch như hình vẽ bên dưới. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



Câu 6: Mặt trong của một hầm biogas có hình dạng là một phần của mặt cầu đã cắt bỏ hai phần của nó bằng hai mặt phẳng song song với nhau (như hình vẽ). Bán kính của mặt cầu bằng $2,5m$. Mặt đáy phía dưới cách tâm một khoảng bằng $1,5m$. Mặt đáy phía trên cách tâm một khoảng bằng $2m$. Tính gần đúng thể tích phần bên trong của hầm biogas đó (đơn vị là m^3 và kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x^2$ là:

- A. $F(x) = 2x^3 + C$. B. $F(x) = \frac{2}{3}x^3$. C. $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$. **D. $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + C$.**

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int 2x^2 dx = 2 \int x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} + C = \frac{2x^3}{3} + C.$$

Câu 2: Nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là

- A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - \ln|x| + C$. B. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{x^2} + C$.
C. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln x + C$. **D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C$.**

Lời giải

$$\text{Áp dụng công thức nguyên hàm ta có } \int \left(x^2 - 3x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C.$$

Câu 3: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 3$ thỏa mãn $F(0) = 2$, giá trị của $F(1)$ bằng

- A. 4. **B. $\frac{13}{3}$.** C. 2. D. $\frac{11}{3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int x^2 - 2x + 3 dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C.$$

$$F(x) \text{ là một nguyên hàm của hàm số } f(x) \text{ có } F(0) = 2 \Rightarrow C = 2.$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + 2 \Rightarrow F(1) = \frac{13}{3}.$$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^0 f(x) dx = 3 \int_0^3 f(x) dx = 3$. Tích phân $\int_{-1}^3 f(x) dx$ bằng

- A. 6. **B. 4.** C. 2. D. 0

Lời giải

$$\text{Có } \int_{-1}^0 f(x) dx = 3; \int_0^3 f(x) dx = 1; \int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx = 3 + 1 = 4.$$

Câu 5: Biết $\int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = a + b \ln c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}, c < 9$. Tính tổng $S = a + b + c$.

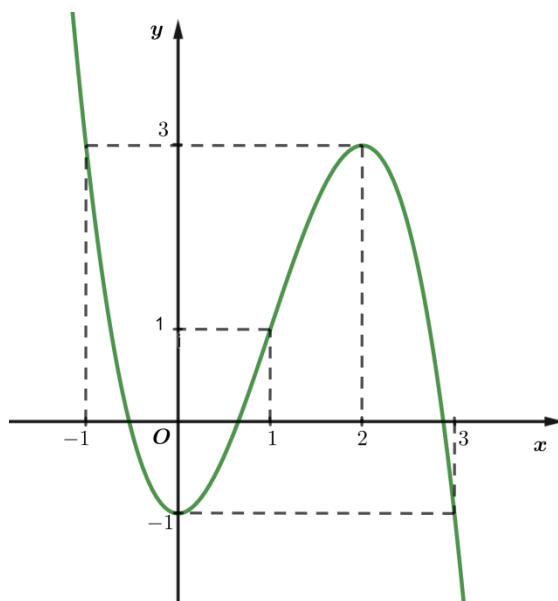
- A. $S = 7$.** B. $S = 5$. C. $S = 8$. D. $S = 6$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = \int_1^3 \left(1 + \frac{2}{x} \right) dx = \int_1^3 dx + \int_1^3 \frac{2}{x} dx = 2 + 2 \ln|x| \Big|_1^3 = 2 + 2 \ln 3.$$

$$\text{Do đó } a = 2, b = 2, c = 3 \Rightarrow S = 7.$$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên và đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $\int_1^2 f'(x)dx$ bằng



- A. 1. B. 2. C. 0. D. 4.

Lời giải

Ta có: $\int_1^2 f'(x)dx = f(x)|_1^2 = f(2) - f(1) = 3 - 1 = 2$.

Câu 7: Hàm số $F(x) = \log x$ là nguyên hàm của hàm số:

- A. $y = \frac{1}{x}$. B. $y = \frac{1}{x \ln 10}$. C. $y = \frac{\ln 10}{x}$. D. $y = \frac{1}{x \log 10}$.

Lời giải

Ta có: $F'(x) = (\log x)' = \frac{1}{x \ln 10}$ nên $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x \ln 10}$.

Câu 8: Cho $\int_2^5 f(x)dx = 10$. Khi đó $\int_5^2 4f(x)dx$ bằng:

- A. 32. B. -40. C. 36. D. 40

Lời giải

Ta có: $\int_5^2 4f(x)dx = -4 \int_2^5 f(x)dx = -4 \cdot 10 = -40$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[1;9]$, thỏa mãn $\int_1^9 f(x)dx = 24$ và $\int_4^5 f(x)dx = 7$. Tính giá trị

biểu thức $I = \int_1^4 f(x)dx + \int_5^9 f(x)dx$.

- A. $I = 168$. B. $I = -17$. C. $I = 31$. D. $I = 17$.

Lời giải

Ta có $24 = \int_1^9 f(x)dx = \int_1^4 f(x)dx + \int_4^5 f(x)dx + \int_5^9 f(x)dx = 7 + I \Leftrightarrow I = 24 - 7 = 17$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[-1; 2]$. Biết $f(-1) = 1, f(2) = 10$, tính tích phân

$$\int_{-1}^2 [2x + f'(x)] dx.$$

A. 13.

B. 12.

C. 11.

D. -2.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int_{-1}^2 [2x + f'(x)] dx = [x^2 + f(x)]_{-1}^2 = 3 + f(2) - f(-1) = 3 + 10 - 1 = 12.$$

Câu 11: Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 2$ quay quanh Ox . Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $V = \pi \int_0^2 e^{2x} dx.$

B. $V = \int_0^2 e^x dx.$

C. $V = \pi \int_0^2 e^x dx.$

D. $V = \int_0^2 e^{2x} dx.$

Lời giải

Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 2$ quay quanh Ox sẽ tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^2 e^{2x} dx.$

Câu 12: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 1 + \sin t$ (m/s). Quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $t = 0$ (giây) đến thời điểm $t = \frac{3\pi}{4}$ (giây) được tính theo công thức

A. $s(t) = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 + \sin t) dt.$

B. $s(t) = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 + \sin t)^2 dt.$

C. $s(t) = \left| \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 - \cos t) dt \right|.$

D. $s(t) = v\left(\frac{3\pi}{4}\right) - v(0).$

Lời giải

Gọi $s(t)$ là quãng đường mà vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $t = 0$ (giây) đến $t = \frac{3\pi}{4}$ (giây). Mà $s'(t) = v(t)$ nên ta có $s(t) = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 + \sin t) dt.$

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho $F(x); G(x)$ lần lượt là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt{x} + 8; g(x) = 5^x - e^x$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Có $\int (f(x) - g(x)) dx = F(x) - G(x) + C.$

b) $\int g(x) dx = 5^x \ln 5 - e^x + C_2.$

c) $F(x) = \frac{5}{2} x^{\frac{5}{2}} + 8x + C_1.$

d) Biết $F(0) = 5; G(0) = \frac{1}{\ln 5} - 1$. Ta có $F(1) - G(1) = \frac{67}{5} - \frac{5}{\ln 5} + e.$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Theo tính chất nguyên hàm ta có: $\int (f(x) - g(x))dx = F(x) - G(x) + C$.

Suy ra mệnh đề a **đúng**.

b) Ta có:

$$\int g(x)dx = \int (5^x - e^x)dx = \frac{5^x}{\ln 5} - e^x + C_2$$

Suy ra mệnh đề b **sai**.

$$c) F(x) = \int f(x)dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 8 \right) dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 8x + C_1.$$

Suy ra mệnh đề c **sai**.

$$d) \text{ Ta có: } F(x) = \int f(x)dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 8 \right) dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 8x + C_1$$

$$\text{mà } F(0) = 5 \Rightarrow C_1 = 5 \Rightarrow F(x) = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 8x + 5$$

$$\text{Ta có: } G(x) = \frac{5^x}{\ln 5} - e^x + C_2$$

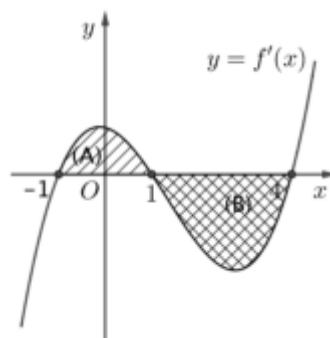
$$\text{mà } G(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\ln 5} - 1 + C_2 = \frac{1}{\ln 5} - 1 \Leftrightarrow C_2 = 0$$

$$\Rightarrow G(x) = \frac{5^x}{\ln 5} - e^x$$

$$\text{Do đó: } F(1) - G(1) = \frac{2}{5} + 8 + 5 - \frac{5}{\ln 5} + e = \frac{67}{5} - \frac{5}{\ln 5} + e.$$

Suy ra mệnh đề d **đúng**.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, có thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



Biết $f(-1) = -\frac{35}{3}$, diện tích hình phẳng (A), (B) lần lượt bằng $\frac{64}{3}$ và 63.

a) Giá trị của $\int_{-1}^4 f'(x)dx$ bằng $\frac{253}{3}$.

b) Giá trị của $f(1) = \frac{29}{3}$.

c) Tích phân $I = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} f'(2x+1)dx$ bằng $-\frac{125}{3}$.

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x) = -2x^2 + 16x$ làm tròn đến hàng đơn vị là 216.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

$$a) \int_{-1}^4 f'(x) dx = \int_{-1}^1 f'(x) dx + \int_1^4 f'(x) dx = \frac{64}{3} - 63 = -\frac{125}{3}.$$

$$b) S_{(A)} = \int_{-1}^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_{-1}^1 = f(1) - f(-1) = \frac{64}{3} \Rightarrow f(1) = \frac{64}{3} - \frac{35}{3} = \frac{29}{3}.$$

$$c) \text{Đặt: } u = 2x + 1 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2}.$$

$$\text{Đổi cận: } x = -1 \Rightarrow u = -1.$$

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow u = 4$$

$$\text{Khi đó: } I = \frac{1}{2} \int_{-1}^4 f'(u) du = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 f'(u) du + \int_1^4 f'(u) du \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{64}{3} - 63 \right] = -\frac{125}{6}.$$

$$d) \text{Ta có: } f'(x) = a(x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-4)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = ax^3 - 4ax^2 - ax + 4a.$$

$$\Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = \frac{a}{4} x^4 - \frac{4a}{3} x^3 - \frac{a}{2} x^2 + 4ax + C.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(-1) = -\frac{35}{3} \\ f(1) = -\frac{26}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{4} + \frac{4a}{3} - \frac{a}{2} - 4a + C = -\frac{35}{3} \\ \frac{a}{4} - \frac{4a}{3} - \frac{a}{2} + 4a + C = \frac{29}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{35}{12}a + C = -\frac{35}{3} \\ \frac{29}{12}a + C = \frac{29}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ C = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy: } f(x) = x^4 - \frac{16}{3}x^3 - 2x^2 + 16x$$

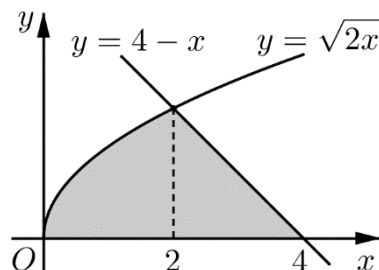
Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là:

$$x^4 - \frac{16}{3}x^3 - 2x^2 + 16x = -2x^2 + 16x \Leftrightarrow x^4 - \frac{16}{3}x^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{16}{3} \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là:

$$S = \int_0^{\frac{16}{3}} \left| x^4 - \frac{16}{3}x^3 \right| dx = -\int_0^{\frac{16}{3}} \left(x^4 - \frac{16}{3}x^3 \right) dx \approx 216.$$

Câu 3: Cho đồ thị như hình vẽ



a) Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{2x}$ và $y = 4 - x$ là $x = 2$.

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{2x}$, trục hoành và hai đường thẳng

$$x = 0, x = 2 \text{ là } S_1 = \int_0^2 2x dx.$$

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 4 - x$, trục hoành và hai đường thẳng

$$x = 2, x = 4 \text{ là } S_2 = \int_0^2 (x - 4) dx.$$

d) Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \sqrt{2x}$, $y = 4 - x$ và trục hoành Ox

(như hình vẽ) được tính bởi công thức $S = \int_0^2 \sqrt{2x} dx + \int_2^4 (4 - x) dx$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) Đúng.

$$\sqrt{2x} = 4 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x^2 - 10x + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{2x}$ và $y = 4 - x$ là $x = 2$.

b) Sai.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{2x}$, trục hoành và hai đường thẳng

$$x = 0, x = 2 \text{ là } S_1 = \int_0^2 \sqrt{2x} dx.$$

c) Sai.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 4 - x$, trục hoành và hai đường thẳng

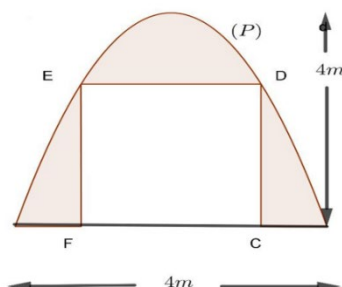
$$x = 2, x = 4 \text{ là } S_2 = \int_2^4 (4 - x) dx.$$

d) Đúng.

Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = \sqrt{2x}$, $y = 4 - x$ và trục hoành Ox

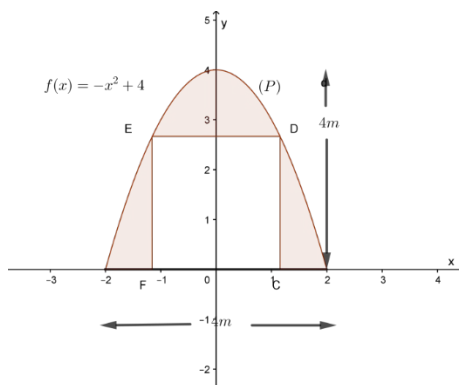
(như hình vẽ) được tính bởi công thức $S = \int_0^2 \sqrt{2x} dx + \int_2^4 (4 - x) dx$.

Câu 4: Một chiếc cổng có dạng là một parabol (P) có kích thước như hình vẽ, biết chiều cao cổng bằng chiều rộng của cổng và bằng $4m$ (Tham khảo hình vẽ). Người ta thiết kế cửa đi là một hình chữ nhật $CDEF$, phần còn lại dùng để trang trí. Biết chi phí phân tô đậm là $1.000.000$ đồng/ m^2 .



a) Chọn hệ trục tọa độ Oxy , như hình vẽ thì phương trình của đường cong (P) cánh cổng là

$$y = f(x) = -x^2 + 4.$$



b) Nếu chiều cao cửa đi là $CD = 2m$ thì chiều rộng của cửa là $CF = 2\sqrt{2}m$.

c) Nếu chiều cao cửa đi là $CD = 2m$ thì chi phí để trang trí phần tô đậm là $\left(\frac{32-6\sqrt{2}}{3}\right)$ triệu

đồng.

d) Số tiền ít nhất dùng để trang trí phần tô đậm (làm tròn đến hàng nghìn đồng) là 4.508.000 đồng.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a). ĐÚNG

Từ hình vẽ, ta có parabol (P) có dạng: $y = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Do (P) có đồ thị là parabol có đỉnh $(0; 4)$ và đi qua điểm có tọa độ là $(2; 0)$ nên

$$\begin{cases} b = 0 \\ c = 4 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases}. \text{ Vậy } (P) \text{ có phương trình } y = -x^2 + 4.$$

b). ĐÚNG

Theo giả thiết điểm D thuộc đồ thị (P) có tung độ bằng 2 suy ra hoành độ là nghiệm phương trình $-x^2 + 4 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$. Theo đồ thị điểm D có hoành độ dương nên $D(\sqrt{2}; 2)$

Chiều rộng của cửa là $CF = 2.OD = 2\sqrt{2}(m)$.

c) SAI

Ta có, diện tích của (P) tạo với trục hoành là: $S = \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx = \frac{32}{3} m^2$.

Diện tích hình chữ nhật $CDEF$ là $S_{CDEF} = 2.2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Diện tích cần trang trí là $S_1 = S - S_{CDEF} = \frac{32}{3} - 4\sqrt{2} = \frac{32-12\sqrt{2}}{3}$.

Chi phí để trang trí phần tô đậm là $\left(\frac{32-12\sqrt{2}}{3}\right).1000000$ (đồng)

d) ĐÚNG

Ta có, diện tích của (P) tạo với trục hoành là: $S = \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx = \frac{32}{3} m^2$.

Ta gọi điểm $C(a; 0) \Rightarrow D(a; -a^2 + 4); 0 < a < 2$.

Do đó, diện tích của hình chữ nhật $CDEF$ là: $S_{CDEF} = 2a(4 - a^2) = 8a - 2a^3$.

Theo đề bài, để phần trang trí, có chi phí nhỏ nhất thì diện tích của hình chữ nhật $CDEF$ đạt giá trị lớn nhất.

Do công chào đối xứng qua trục tung nên ta đặt: $g(a) = \frac{S_{CDEF}}{2} = 4a - a^3, 0 < a < 2$.

$$\Rightarrow g'(a) = 4 - 3a^2 \Rightarrow g'(a) = 0 \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Ta có, BBT:

a	0	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	
g'		+	0	-
$g(a)$			$\frac{16\sqrt{3}}{9}$	

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra diện tích hình chữ nhật $CDEF$ đạt giá trị lớn nhất là $\frac{32\sqrt{3}}{9}m^2$. Vậy, diện tích nhỏ nhất của phần dùng để trang trí là $\frac{96 - 32\sqrt{3}}{9}m^2$.

Do đó, số tiền ít nhất dùng để trang trí phần tô đậm là

$$\left(\frac{96 - 32\sqrt{3}}{9} \right) \cdot 1000000 = 4508263,795 \approx 4.508.000 \text{ đồng.}$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Thê tích vật thê tròn xoay tạo bởi phép quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ được viết kết quả dưới dạng $\frac{a\pi}{b}$. Tính $V = 128a - 8b$.

Lời giải

Trả lời: 2024

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 0 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 0 \\ 0 = x - 2 \Rightarrow x = 2 \\ \sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

Dựa vào hoành độ giao điểm của ba đường ta có diện tích hình phẳng gồm hai phần. Phần thứ nhất giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 0$; $x = 2$. Phần thứ hai giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ và $x = 2$; $x = 4$.

Thê tích vật thê bằng:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 (\sqrt{x})^2 dx + \pi \int_2^4 \left| (x-2)^2 - \sqrt{x}^2 \right| dx = \pi \int_0^2 x dx + \pi \int_2^4 (x - (x-2)^2) dx \\ &= \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 + \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{(x-2)^3}{3} \right) \Big|_2^4 = \frac{16\pi}{3}. \end{aligned}$$

Suy ra $a = 16$; $b = 3$.

Do đó $V = 128 \cdot 16 - 8 \cdot 3 = 2024$.

Câu 2: Một ô tô đang chạy với vận tốc $20(m/s)$ thì người ta nhìn thấy một chướng ngại vật nên đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 20(m/s)$, trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ lúc đạp phanh. Quãng đường mà ô tô đi được trong 15 giây cuối bằng

Lời giải

Trả lời: 200

Khi ô tô dừng lại, ta có $v(t) = 0 \Rightarrow -2t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 10(s)$.

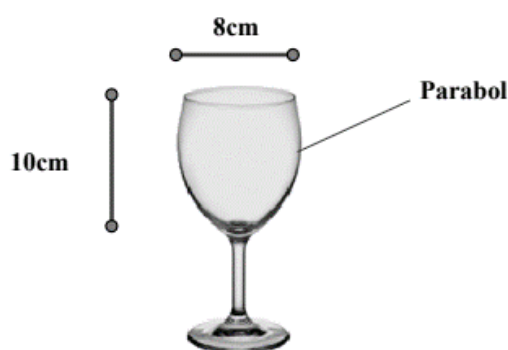
Quãng đường ô tô đi được từ lúc đạp phanh đến khi dừng lại là

$$s = \int_0^{10} v(t) dt = \int_0^{10} (-2t + 20) dt = \left(-t^2 + 20t \right) \Big|_0^{10} = 100(m)$$

Trong 5 giây trước đó, ô tô vẫn đi với vận tốc $20(m/s)$ nên quãng đường ô tô đi được trong 5 giây này là $5 \cdot 20 = 100(m)$.

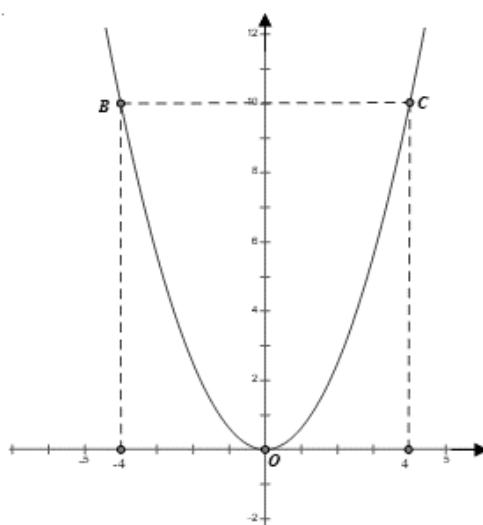
Vậy quãng đường mà ô tô đi được trong 15 giây cuối bằng $100 + 100 = 200(m)$.

Câu 3: Một cốc rượu có hình dạng tròn xoay (không kể phần chân đế) có kích thước như hình vẽ bên dưới. Thiết diện dọc của cốc (bỏ dọc cốc thành 2 phần bằng nhau) là một đường Parabol. Tính thể tích rượu tối đa mà cốc có thể chứa được (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị, đơn vị đo thể tích là cm^3)



Lời giải

Trả lời: 251

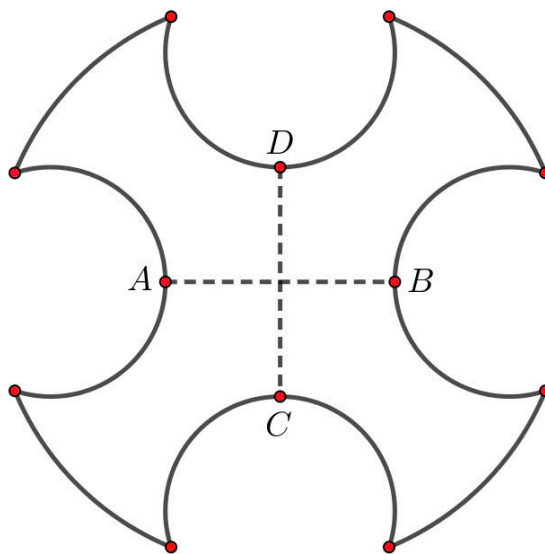


Parabol có phương trình $y = \frac{5}{8}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{5}y$

Thể tích tối đa cốc:

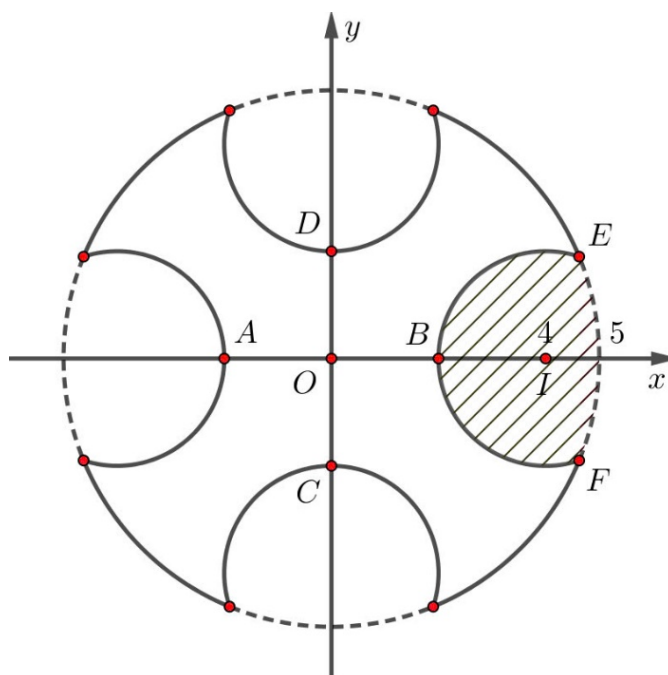
$$V = \pi \int_0^{10} \left(\frac{8}{5}y \right) dy \approx 251.$$

- Câu 4:** Một chi tiết máy hình đĩa tròn có dạng như hình vẽ bên nhận AB, CD làm các trục đối xứng. Người ta cần phủ sơn cả hai mặt của chi tiết. Biết rằng đường tròn lớn có bán kính 5 dm , các đường tròn nhỏ đều có bán kính bằng 2 dm , $AB = CD = 4\text{ dm}$ và chi phí sơn là $100\,000$ đồng/ m^2 . Tính chi phí x (nghìn đồng) để sơn hoàn thiện chi tiết máy (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Lời giải

Trả lời: 79,5



Chọn hệ toạ độ Oxy sao cho O trùng với giao điểm của AB và CD ; các tia lần lượt trùng với các tia OB, OD . Ta có:

Phương trình đường tròn lớn tâm O là: $x^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{25-x^2}$.

Phương trình đường tròn nhỏ tâm I là: $(x-4)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{4-(x-4)^2}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đường tròn là: $4-(x-4)^2 = 25-x^2 \Leftrightarrow x = \frac{37}{8}$.

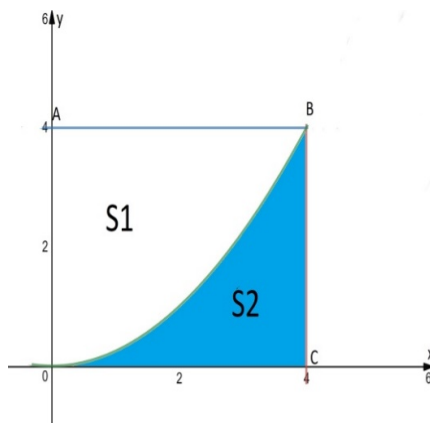
Gọi S, S_i, S' lần lượt là diện tích một mặt của chi tiết, diện tích đường tròn tâm O và diện tích phần gạch sọc.

$$\text{Ta có: } S = S_i - 4S' = 25\pi - 4 \cdot \left(2 \int_{\frac{37}{8}}^{\frac{37}{8}} \sqrt{4-(x-4)^2} dx + 2 \int_{\frac{37}{8}}^5 \sqrt{25-x^2} dx \right)$$

Vậy chi phí để sơn hoàn thiện chi tiết máy là: $x = S \cdot 2.1000 \approx 79,5$ (nghìn đồng).

Câu 5: Cho hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không bị gạch và bị gạch như

hình vẽ bên dưới. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng



Lời giải

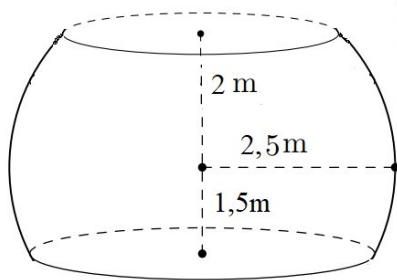
Trả lời: 2

$$\text{Diện tích phần bị gạch là } S_2 = \int_0^4 \frac{1}{4}x^2 dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = \frac{16}{3} \text{ (đvdt)}.$$

$$\text{Diện tích phần không bị gạch là } S_1 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \text{ (đvdt)}.$$

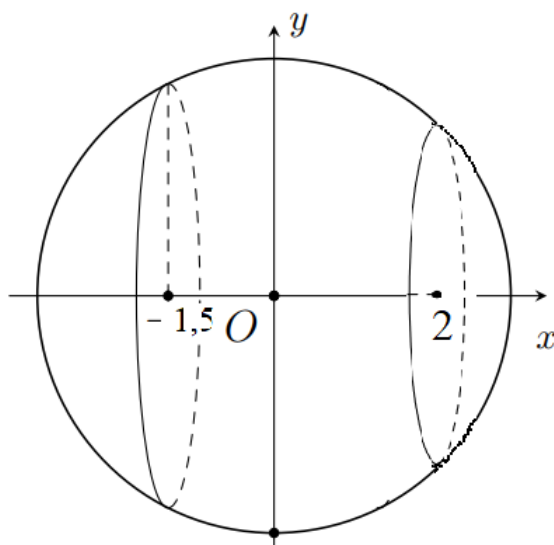
$$\text{Vậy } \frac{S_1}{S_2} = 2.$$

Câu 6: Mặt trong của một hầm biogas có hình dạng là một phần của mặt cầu đã cắt bỏ hai phần của nó bằng hai mặt phẳng song song với nhau (như hình vẽ). Bán kính của mặt cầu bằng $2,5m$. Mặt đáy phía dưới cách tâm một khoảng bằng $1,5m$. Mặt đáy phía trên cách tâm một khoảng bằng $2m$. Tính gần đúng thể tích phần bên trong của hầm biogas đó (đơn vị là m^3 và kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 56,8



Trên hệ trục Oxy xét đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 = 2,5^2$. Khi đó nửa phần trên trục hoành của (C) có phương trình $y = \sqrt{2,5^2 - x^2}$. Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi nửa phần trên trục hoành của (C) , trục Ox và các đường thẳng $x = -1,5, x = 2$. Quay hình phẳng (H) quanh trục hoành ta được khối tròn xoay có thể tích bằng thể tích phần không gian phía trong của hầm biogas.

Thể tích phần không gian bên trong hầm biogas được tính bởi công thức

$$V = \pi \int_{-1,5}^2 (2,5^2 - x^2) dx = \frac{217}{12} \pi \approx 56,8$$

CHƯƠNG

IV

NGUYÊN HÀM
TÍCH PHÂNÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG 4
ĐỀ TEST SỐ 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Nếu $\int f(x)dx = \frac{1}{x} + \ln x + C$ thì $f(x)$ là

A. $f(x) = \sqrt{x} + \ln x + C.$

B. $f(x) = -\sqrt{x} + \frac{1}{x} + \ln x + C.$

C. $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln x + C.$

D. $f(x) = \frac{x-1}{x^2}.$

Câu 2: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 6x + \sin 3x$, biết $F(0) = \frac{2}{3}$.

A. $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{2}{3}.$

B. $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} - 1.$

C. $F(x) = 3x^2 + \frac{\cos 3x}{3} + 1.$

D. $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + 1.$

Câu 3: Cho $\int_0^2 f(x)dx = 3$ và $\int_0^2 g(x)dx = 7$, khi đó $\int_0^2 [f(x) + 3g(x)]dx$ bằng

A. 16.

B. -18.

C. 24.

D. 10.

Câu 4: Cho $\int_1^2 [4f(x) - 2x]dx = 1$. Khi đó $\int_1^2 f(x)dx$ bằng:

A. 1.

B. -3.

C. 3.

D. -1.

Câu 5: Nếu $\int_2^m x^3 dx = 8$ thì giá trị của m bằng

A. $-2\sqrt{3}.$

B. $2\sqrt[4]{3}.$

C. $-2\sqrt[4]{3}.$

D. $\pm 2\sqrt[4]{3}.$

Câu 6: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

A. $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C.$

B. $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C.$

C. $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C.$

D. $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$

Câu 7: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x]dx = 5$.

A. $I = 7.$

B. $I = 5 + \frac{\pi}{2}.$

C. $I = 3.$

D. $I = 5 + \pi$

Câu 8: Tích phân $\int_0^1 (3x+1)(x+3)dx$ bằng

- A. 12. B. 9. C. 5. D. 6

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2\cos^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng.

- A. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 16}{16}$. B. $\frac{\pi^2 + 4}{16}$. C. $\frac{\pi^2 + 14\pi}{16}$. D. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 4}{16}$.

Câu 10: Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường $y = x^2 - x, y = 0, x = 0$ và $x = 2$ được tính bởi công thức nào sau đây?

- A. $S = \int_0^2 (x - x^2)dx$. B. $S = \int_1^2 (x^2 - x)dx - \int_0^1 (x^2 - x)dx$.
C. $S = \int_0^1 (x^2 - x)dx + \int_1^2 (x^2 - x)dx$. D. $S = \int_0^2 (x^2 - x)dx$.

Câu 11: Cho hình (H) giới hạn bởi parabol $y = 2x - x^2$ và trục hoành Ox . Thể tích khối tròn xoay khi hình (H) quay xung quanh trục Ox bằng:

- A. $\frac{15\pi}{16}$. B. $\frac{15\pi}{17}$. C. $\frac{16\pi}{15}$. D. $\frac{15\pi}{17}$.

Câu 12: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = k (k > 0)$ bằng $\frac{17}{2}$. k thuộc khoảng nào?

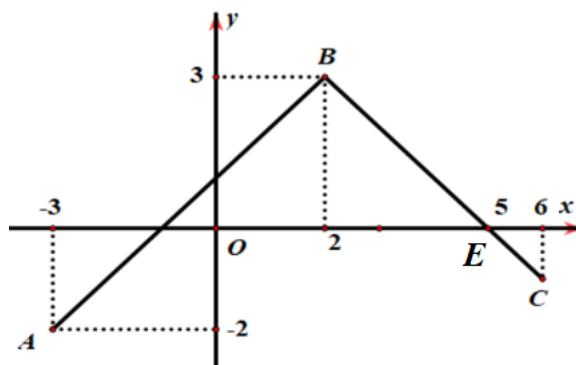
- A. $k \in (0; 2)$. B. $k \in (5; 10)$. C. $k \in (3; 5)$. D. $k \in (1; 3)$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 2x^2 - 3$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$

- a) $\int_{-1}^2 f(x)dx = F(2) - F(-1)$.
b) Nếu $F(0) = 1$ thì $F(2) = 12$.
c) Nếu $\int_0^2 af(x)dx = 32$ thì $a = 6$.
d) Biết $\int_0^2 e^{3x} f(x)dx = a + \frac{b.e^6}{27}$. Khi đó: $27a - b = -2$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $(C): y = f'(x)$ trên đoạn $[-3; 6]$ là đường gấp khúc như hình vẽ.



a) $\int_{-3}^{-1} f'(x) dx = -2$.

b) $\int_0^1 f'(x) dx = \frac{1}{2}$.

c) $f(2) - f(6) = 4$.

d) $f(5) + f(-3) - 2f(2) = 2$.

Câu 3: Cho D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - x$, $x = -1$, $x = 2$ và trục hoành. Gọi S là diện tích của D .

a) $S = \int_{-1}^2 |x^2 - x| dx$.

b) $S = \int_{-1}^0 (x^2 - x) dx + \int_0^2 (x^2 - x) dx$.

c) Thể tích của khối tròn xoay khi quay D quanh trục Ox được tính bằng $V = \pi \int_{-1}^2 (x^2 - x)^2 dx$.

d) $S = \frac{5}{6}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + m & \text{khi } x \geq 1 \\ 1 - 4x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ (m là tham số thực) liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng

$f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ là $F(x)$ thỏa mãn $F(-2) = -6$.

a) $m = -4$.

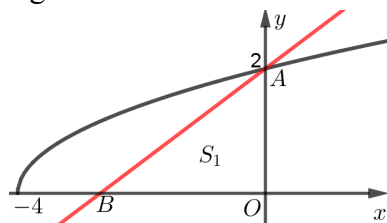
b) $F(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 - 4x + 7 & \text{khi } x \geq 1 \\ x - 2x^2 + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

c) $\int_{-1}^5 f(x) dx = 108$.

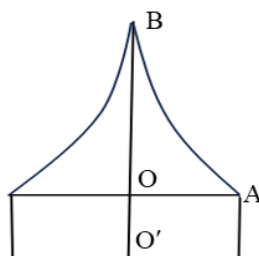
d) $\int_1^{e^2} f(\ln x) \frac{1}{x} dx = 3$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x+4}$, trục hoành và trục tung. Biết đường thẳng $d: ax + by - 16 = 0$ đi qua $A(0;2)$ và chia (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau (Hình bên). Giá trị $a + b$ bằng

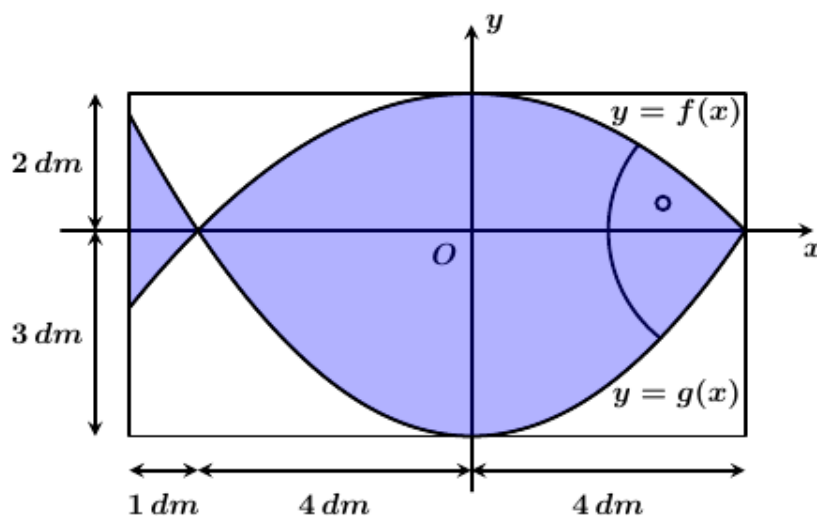


Câu 2: Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn Lan đã làm một chiếc mũ “cách điệu” cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 6$ cm, $OA = 10$ cm, $OB = 20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm B . Tính thể tích của chiếc mũ (làm tròn đến hàng phần nguyên, đơn vị cm^3)



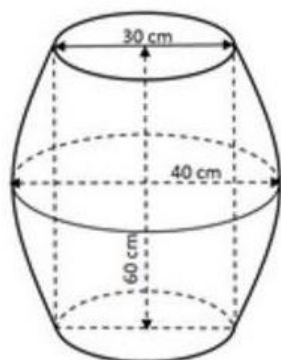
Câu 3: Một hộ gia đình sản xuất cơ khí nhỏ mỗi ngày sản xuất được x sản phẩm $(0 \leq x \leq 20)$. Chi phí biên để sản xuất x sản phẩm, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm số sau $C'(x) = 3x^2 - 4x + 10$. Biết rằng chi phí cố định ban đầu để sản xuất là 500 nghìn đồng. Giả sử cơ sở này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 270 nghìn đồng/sản phẩm. Tính lợi nhuận tối đa mà gia đình đó thu được khi sản xuất và bán sản phẩm?

Câu 4: Để trang trí một bảng gỗ hình chữ nhật có chiều dài 9 dm và chiều rộng 5 dm, người ta thiết kế một logo hình con cá. Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol với các kích thước được cho trong hình vẽ dưới đây (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là decimét), sau đó logo được sơn màu xanh với chi phí 20 000 đồng/ dm^2 ; phần còn lại sơn màu trắng với chi phí 10 000 đồng/ dm^2 .

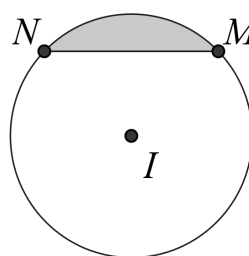
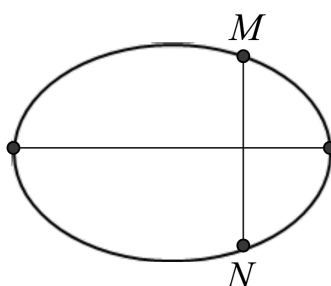
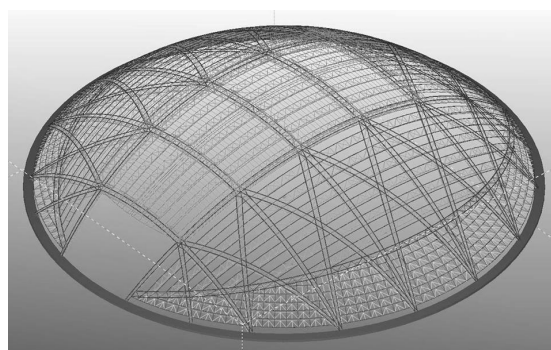
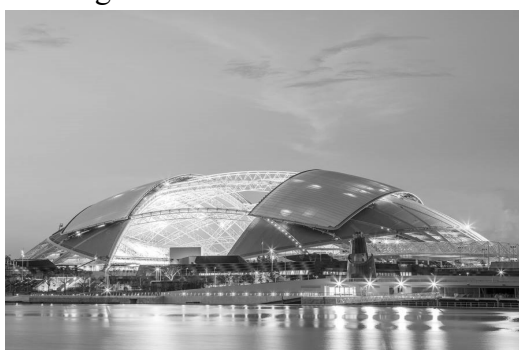


Số tiền cần dùng để trang trí bảng gỗ trên là bao nhiêu nghìn đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng nghìn đồng)

Câu 5: Một thùng đựng Bia hơi (có dạng như hình vẽ) có đường kính đáy là 30cm, đường kính lớn nhất của thân thùng là 40cm, chiều cao thùng là 60 cm, cạnh bên hông của thùng có hình dạng của một parabol. Tính thể tích của thùng Bia hơi. (làm tròn đến hàng phần chục).



Câu 6: Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015 . Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$ (hình vẽ). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt elip ở M, N (hình vẽ) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình 4) với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN} = 90^\circ$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Biết rằng cách tính công suất cần đủ là $200 \text{ BTU} / m^3$. Hỏi cần bao nhiêu chiếc điều hòa công suất 50000 BTU?



----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Nếu $\int f(x)dx = \frac{1}{x} + \ln x + C$ thì $f(x)$ là

A. $f(x) = \sqrt{x} + \ln x + C.$

B. $f(x) = -\sqrt{x} + \frac{1}{x} + \ln x + C.$

C. $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln x + C.$

D. $f(x) = \frac{x-1}{x^2}.$

Lời giải

Ta có $\left(\frac{1}{x} + \ln x + C\right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$, suy ra $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ là hàm số cần tìm.

Câu 2: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 6x + \sin 3x$, biết $F(0) = \frac{2}{3}$.

A. $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{2}{3}.$

B. $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} - 1.$

C. $F(x) = 3x^2 + \frac{\cos 3x}{3} + 1.$

D. $F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + 1.$

Lời giải

$$\int f(x)dx = \int (6x + \sin 3x)dx = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + C = F(x).$$

$$F(0) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 0 - \frac{1}{3} + C = \frac{2}{3} \Leftrightarrow C = 1. \text{ Vậy } F(x) = 3x^2 - \frac{\cos 3x}{3} + 1.$$

Câu 3: Cho $\int_0^2 f(x)dx = 3$ và $\int_0^2 g(x)dx = 7$, khi đó $\int_0^2 [f(x) + 3g(x)]dx$ bằng

A. 16.

B. -18.

C. 24.

D. 10.

Lời giải

Ta có

$$\int_0^2 [f(x) + 3g(x)]dx = \int_0^2 f(x)dx + 3\int_0^2 g(x)dx = 3 + 3.7 = 24.$$

Câu 4: Cho $\int_1^2 [4f(x) - 2x]dx = 1$. Khi đó $\int_1^2 f(x)dx$ bằng:

A. 1.

B. -3.

C. 3.

D. -1.

Lời giải

$$\int_1^2 [4f(x) - 2x]dx = 1 \Leftrightarrow 4\int_1^2 f(x)dx - 2\int_1^2 xdx = 1 \Leftrightarrow 4\int_1^2 f(x)dx - 2.\frac{x^2}{2}\bigg|_1^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 4\int_1^2 f(x)dx = 4 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx = 1$$

Câu 5: Nếu $\int_2^m x^3 dx = 8$ thì giá trị của m bằng

A. $-2\sqrt{3}.$

B. $2\sqrt[4]{3}.$

C. $-2\sqrt[4]{3}.$

D. $\pm 2\sqrt[4]{3}.$

Lời giải

Ta có: $\int_2^m x^3 dx = 8 \Leftrightarrow \frac{x^4}{4} \Big|_2^m = 8 \Leftrightarrow \frac{m^4 - 2^4}{4} = 8 \Leftrightarrow m^4 - 2^4 = 32 \Leftrightarrow m^4 = 48 \Rightarrow m = \pm \sqrt[4]{48} = \pm 2\sqrt[4]{3}$.

Câu 6: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

A. $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$. **B.** $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C$.

C. $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$. **D.** $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$

Lời giải

Áp dụng công thức $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, ($0 < a \neq 1$) ta được đáp án **A.**

Câu 7: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx = 5$.

A. $I = 7$. **B.** $I = 5 + \frac{\pi}{2}$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = 5 + \pi$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx - 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 5 - 2(0 - 1) = 7.$$

Câu 8: Tích phân $\int_0^1 (3x+1)(x+3) dx$ bằng

A. 12. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 6

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_0^1 (3x+1)(x+3) dx = \int_0^1 (3x^2 + 10x + 3) dx = (x^3 + 5x^2 + 3x) \Big|_0^1 = 9$.

Vậy: $\int_0^1 (3x+1)(x+3) dx = 9$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2 \cos^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng.

A. $\frac{\pi^2 + 16\pi + 16}{16}$. **B.** $\frac{\pi^2 + 4}{16}$. **C.** $\frac{\pi^2 + 14\pi}{16}$. **D.** $\frac{\pi^2 + 16\pi + 4}{16}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_0^1 (3x+1)(x+3) dx = \int_0^1 (3x^2 + 10x + 3) dx = (x^3 + 5x^2 + 3x) \Big|_0^1 = 9$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (2 \cos^2 x + 1) dx = \int \left(2 \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) + 1 \right) dx = \int (\cos 2x + 2) dx \\ &= \int \cos 2x dx + \int 2 dx = \frac{\sin 2x}{2} + 2x + C. \end{aligned}$$

Lại có $f(0) = 4 \Leftrightarrow C = 4 \Rightarrow f(x) = \frac{\sin 2x}{2} + 2x + 4.$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin 2x}{2} + 2x + 4 \right) dx = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x d(2x) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 dx \\ &= \frac{-\cos 2x}{4} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} + (x^2 + 4x) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2 + 16\pi + 4}{16}. \end{aligned}$$

Câu 10: Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường $y = x^2 - x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 2$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $S = \int_0^2 (x - x^2) dx.$

B. $S = \int_1^2 (x^2 - x) dx - \int_0^1 (x^2 - x) dx.$

C. $S = \int_0^1 (x^2 - x) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx.$

D. $S = \int_0^2 (x^2 - x) dx.$

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

$$S = \int_0^2 |x^2 - x| dx = - \int_0^1 (x^2 - x) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx.$$

Câu 11: Cho hình (H) giới hạn bởi parabol $y = 2x - x^2$ và trục hoành Ox . Thể tích khối tròn xoay khi hình (H) quay xung quanh trục Ox bằng:

A. $\frac{15\pi}{16}.$

B. $\frac{15\pi}{17}.$

C. $\frac{16\pi}{15}.$

D. $\frac{15\pi}{17}.$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol và trục hoành Ox là:

$$2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy hình (H) được giới hạn bởi: $y = 2x - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$.

Thể tích của khối tròn xoay khi hình (H) quay xung quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \pi \left(\frac{4}{3} x^3 - x^4 + \frac{1}{5} x^5 \right) \Bigg|_0^2 = \frac{16\pi}{15}.$$

Câu 12: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1$, $x = k$ ($k > 0$) bằng $\frac{17}{2}$. k thuộc khoảng nào?

A. $k \in (0; 2).$

B. $k \in (5; 10).$

C. $k \in (3; 5).$

D. $k \in (1; 3).$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S &= \int_{-1}^k |2x^3| dx = \frac{17}{2} \Leftrightarrow -\int_{-1}^0 2x^3 dx + \int_0^k 2x^3 dx = \frac{17}{2} \Leftrightarrow -\frac{x^4}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^4}{2} \Big|_0^k = \frac{17}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{k^4}{2} = \frac{17}{2} \Leftrightarrow k^4 = 16 \Leftrightarrow k = 2 \text{ (vì } k > 0 \text{)}. \end{aligned}$$

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 2x^2 - 3$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$

a) $\int_{-1}^2 f(x) dx = F(2) - F(-1).$

b) Nếu $F(0) = 1$ thì $F(2) = 12.$

c) Nếu $\int_0^2 af(x) dx = 32$ thì $a = 6.$

d) Biết $\int_0^2 e^{3x} f(x) dx = a + \frac{b.e^6}{27}$. Khi đó: $27a - b = -2.$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Đúng theo định nghĩa

b) Sai

$$\int_0^2 f(x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{16}{3}$$

$$\int_0^2 f(x) dx = F(2) - F(0)$$

$$\Rightarrow F(2) = \int_0^2 f(x) dx + F(0) = \frac{16}{3} + 1 = \frac{19}{3}$$

c) Đúng

$$\int_0^2 af(x) dx = 32 \Leftrightarrow a \cdot \int_0^2 f(x) dx = 32$$

$$\Leftrightarrow a \cdot \frac{16}{3} = 32 \Leftrightarrow a = 6$$

d) Đúng

Đặt $F(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{3x}$ là một nguyên hàm của hàm số $e^{3x} \cdot f(x)$

Khi đó: $F'(x) = e^{3x} \cdot f(x) \Rightarrow 3 \cdot e^{3x} (ax^2 + bx + c) + e^{3x} \cdot (2ax + b) = e^{3x} \cdot f(x)$

$$\Rightarrow 3(ax^2 + bx + c) + 2ax + b = f(x)$$

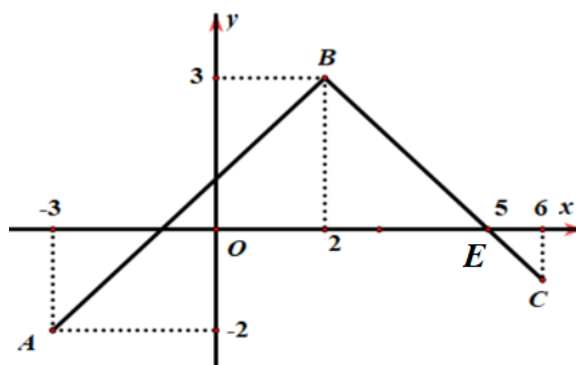
$$\Rightarrow 3ax^2 + (3b + 2a)x + 3c + b = 2x^2 - 3$$

Đồng nhất hai vế, ta được:
$$\begin{cases} 3a = 2 \\ 2a + 3b = 0 \\ b + 3c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -\frac{4}{9} \\ c = -\frac{23}{27} \end{cases}$$

Vậy:
$$\int_0^2 e^{3x} f(x) dx = e^{3x} \left(\frac{2}{3} x^2 - \frac{4}{9} x - \frac{23}{27} \right) \Big|_0^2 = e^6 \cdot \frac{25}{27} + \frac{23}{27}$$

Kết luận: $a = \frac{23}{27}$; $b = 25$ và $27a - b = -2$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $(C): y = f'(x)$ trên đoạn $[-3; 6]$ là đường gấp khúc như hình vẽ.



a) $\int_{-3}^{-1} f'(x) dx = -2$.

b) $\int_0^1 f'(x) dx = \frac{1}{2}$.

c) $f(2) - f(6) = 4$.

d) $f(5) + f(-3) - 2f(2) = 2$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Ta có đường thẳng AB đi qua 2 điểm $A(-3; -2), B(2; 3)$ nên phương trình đường thẳng AB

là $\frac{x+3}{2+3} = \frac{y+2}{3+2} \Leftrightarrow y = x + 1$.

Khi đó $\int_{-3}^{-1} f'(x) dx = \int_{-3}^{-1} (x+1) dx = -2$.

b) Ta có $\int_0^1 f'(x) dx = \int_0^1 (x+1) dx = \frac{3}{2}$.

c) Ta có đường thẳng BC đi qua 2 điểm $B(2; 3), E(5; 0)$ nên phương trình đường thẳng BC là

$\frac{x-2}{5-2} = \frac{y-3}{0-3} \Leftrightarrow y = -x + 5$.

Khi đó $\int_2^6 f'(x)dx = \int_2^6 (-x+5)dx = 4$. Vì vậy $f(2) - f(6) = -\int_2^6 f'(x)dx = -4$.

d) Ta có $\int_{-3}^2 f'(x)dx = \int_{-3}^2 (x+1)dx = \frac{5}{2} = f(2) - f(-3)$,

$\int_2^5 f'(x)dx = \int_2^5 (-x+5)dx = \frac{9}{2} = f(5) - f(2)$

Vì vậy $f(5) + f(-3) - 2f(2) = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = 2$.

Câu 3: Cho D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - x, x = -1, x = 2$ và trục hoành. Gọi S là diện tích của D .

a) $S = \int_{-1}^2 |x^2 - x|dx$.

b) $S = \int_{-1}^0 (x^2 - x)dx + \int_0^2 (x^2 - x)dx$.

c) Thể tích của khối tròn xoay khi quay D quanh trục Ox được tính bằng $V = \pi \int_{-1}^2 (x^2 - x)^2 dx$.

d) $S = \frac{5}{6}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a). ĐÚNG

$S = \int_{-1}^2 |x^2 - x|dx$

b). SAI

c). ĐÚNG

$V = \pi \int_{-1}^2 (x^2 - x)^2 dx$

d). SAI

Ta có $S = \int_{-1}^2 |x^2 - x|dx = \frac{11}{6}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + m & \text{khi } x \geq 1 \\ 1 - 4x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ (m là tham số thực) liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng

$f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ là $F(x)$ thỏa mãn $F(-2) = -6$.

a) $m = -4$.

b) $F(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 - 4x + 7 & \text{khi } x \geq 1 \\ x - 2x^2 + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

c) $\int_{-1}^5 f(x)dx = 108$.

d) $\int_1^{e^2} f(\ln x) \frac{1}{x} dx = 3$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) ĐÚNG

Ta có $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m + 1 = -3 \Leftrightarrow m = -4.$$

b) ĐÚNG

$$\text{Ta có } F(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + mx + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x - 2x^2 + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$F(-2) = (-2) - 2 \cdot (-2)^2 + C_2 = C_2 - 10 \Rightarrow C_2 = 10 - 6 = 4.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^3 - x^2 + mx + C_1) = m + C_1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 2x^2 + C_2) = -1 + C_2 = 3.$$

Ta lại có $F(x)$ liên tục tại $x = 1$.

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = F(1) \Leftrightarrow m + C_1 = 3 \Leftrightarrow C_1 = 3 - m = 7.$$

$$\text{Vậy } F(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 - 4x + 7 & \text{khi } x \geq 1 \\ x - 2x^2 + 4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

c) SAI

$$\text{Ta có } \int_{-1}^5 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx = \int_{-1}^1 (1 - 4x) dx + \int_1^5 (3x^2 - 2x - 4) dx = 86$$

d) SAI

$$\text{Đặt } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx.$$

$$\text{Khi } x = 1 \Rightarrow t = 0;$$

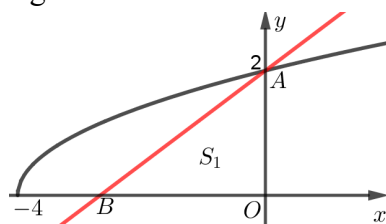
$$\text{Khi } x = e^2 \Rightarrow t = 2.$$

Do đó

$$\int_1^{e^2} f(\ln x) \frac{1}{x} dx = \int_0^2 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 (1 - 4x) dx + \int_1^2 (3x^2 - 2x - 4) dx = -1.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x+4}$, trục hoành và trục tung. Biết đường thẳng $d: ax + by - 16 = 0$ đi qua $A(0;2)$ và chia (H) thành hai phần có diện tích bằng nhau (Hình bên). Giá trị $a + b$ bằng



Lời giải

Trả lời: 2

Gọi S là diện tích hình (H) suy ra $S = \int_{-4}^0 \sqrt{x+4} dx = \frac{16}{3}$.

Gọi S_1 là diện tích hình (H_1) giới hạn bởi đường thẳng d , trục tung và trục hoành.

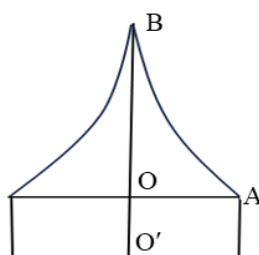
Do $d: ax + by - 16 = 0$ đi qua $A(0;2)$ suy ra $b = 8$.

Theo giả thiết thì $S_1 = \frac{S}{2} = \frac{8}{3}$ mà $S_1 = \frac{1}{2} OA \cdot OB \Rightarrow OB = \frac{8}{3} \Rightarrow B\left(-\frac{8}{3}; 0\right)$.

Do $B \in d \Rightarrow a = -6$.

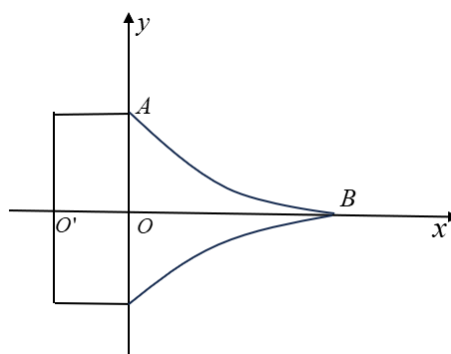
Vậy $a + b = 2$.

Câu 2: Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn Lan đã làm một chiếc mũ “cách điệu” cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 6$ cm, $OA = 10$ cm, $OB = 20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm B . Tính thể tích của chiếc mũ (làm tròn đến hàng phần nguyên, đơn vị cm^3)



Lời giải

Trả lời: 3142



Ta gọi thể tích của chiếc mũ là V .

Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA = 10$ cm và đường cao $OO' = 6$ cm là V_1 .

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Ox là V_2 .

Ta có $V = V_1 + V_2$

$$V_1 = 6 \cdot 10^2 \pi = 600\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Do parabol có đỉnh $B(20;0)$ nên nó có phương trình dạng $(P): y = a(x-20)^2$.

Vì (P) qua điểm $A(0;10)$ nên $a = \frac{1}{40}$. Do đó, $(P): y = \frac{1}{40}(x-20)^2$.

$$\text{Suy ra } V_2 = \pi \int_0^{20} \left[\frac{1}{40}(x-20)^2 \right]^2 dx = 400\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Do đó $V = V_1 + V_2 = 600\pi + 400\pi = 1000\pi \approx 3142(\text{cm}^3)$.

Câu 3: Một hộ gia đình sản xuất cơ khí nhỏ mỗi ngày sản xuất được x sản phẩm ($0 \leq x \leq 20$). Chi phí biên để sản xuất x sản phẩm, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm số sau $C'(x) = 3x^2 - 4x + 10$. Biết rằng chi phí cố định ban đầu để sản xuất là 500 nghìn đồng. Giả sử cơ sở này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 270 nghìn đồng/sản phẩm. Tính lợi nhuận tối đa mà gia đình đó thu được khi sản xuất và bán sản phẩm?

Lời giải

Trả lời: 1300

Chi phí để sản xuất x sản phẩm bằng $C(x) = \int C'(x)dx = x^3 - 2x^2 + 10x + C$

Mà chi phí cố định ban đầu để sản xuất là 500 nghìn đồng

Suy ra $C(0) = 500 \Rightarrow C = 500 \Rightarrow C(x) = x^3 - 2x^2 + 10x + 500$

Khi bán x sản phẩm, số tiền thu được là: $270x$ (nghìn đồng).

Do đó lợi nhuận thu được là: $T(x) = -x^3 + 2x^2 + 260x - 500$ (nghìn đồng).

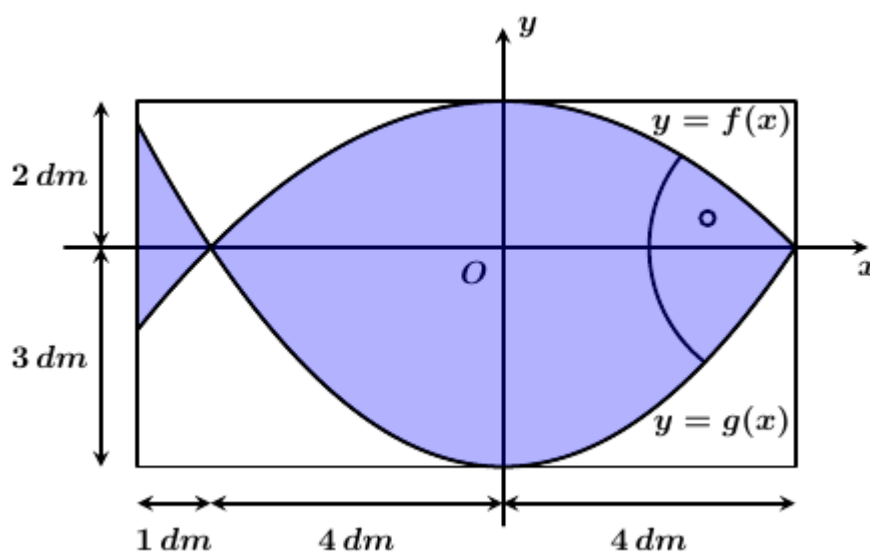
Ta có $T'(x) = -3x^2 + 4x + 260 = 0 \Leftrightarrow x = 10$ hoặc $x = -\frac{26}{3}$ (loại).

Bảng biến thiên

x	0	10	20	
$T'(x)$		+	0	-
$T(x)$			1300	

Lợi nhuận tối đa là 1300 nghìn đồng khi sản xuất 10 sản phẩm mỗi ngày.

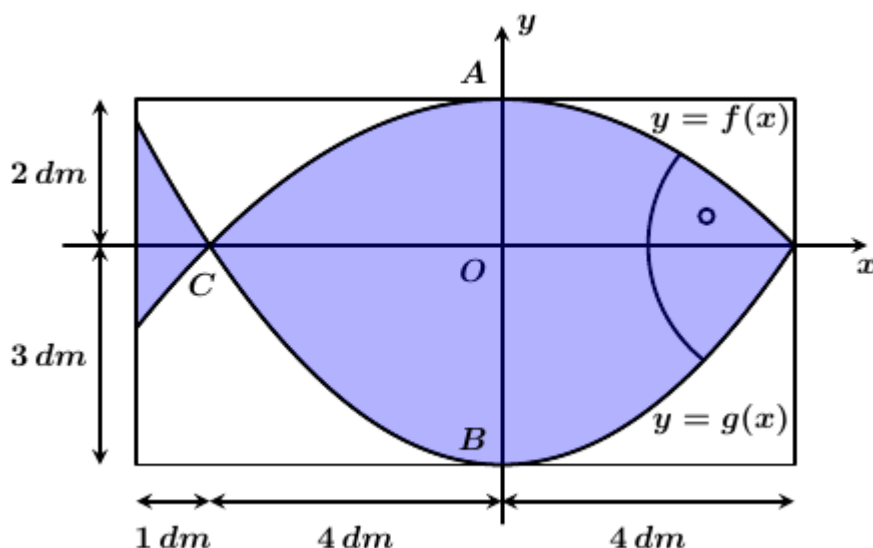
Câu 4: Để trang trí một bảng gỗ hình chữ nhật có chiều dài 9 dm và chiều rộng 5 dm, người ta thiết kế một logo hình con cá. Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol với các kích thước được cho trong hình vẽ dưới đây (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là decimét), sau đó logo được sơn màu xanh với chi phí 20 000 đồng/ dm^2 ; phần còn lại sơn màu trắng với chi phí 10 000 đồng/ dm^2 .



Số tiền cần dùng để trang trí bảng gỗ trên là bao nhiêu nghìn đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng nghìn đồng)

Lời giải

Trả lời: 730



Dựa vào đồ thị, ta thấy:

+ Parabol $y = f(x)$ có đỉnh là $A(0; 2)$ nên $y = f(x) = ax^2 + 2$

Mặt khác, $C(-4; 0)$ thuộc parabol $y = f(x)$ nên $y = f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 2$

+ Parabol $y = g(x)$ có đỉnh là $B(0; -3)$ nên $y = g(x) = bx^2 - 3$

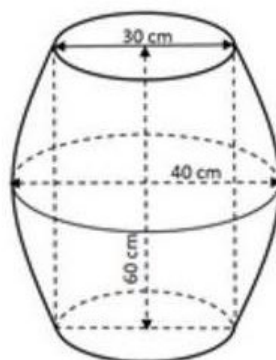
Mặt khác, $C(-4; 0)$ thuộc parabol $y = g(x)$ nên $y = g(x) = \frac{3}{16}x^2 - 3$

+ Diện tích logo hình con cá là: $S_1 = \int_{-5}^4 |f(x) - g(x)| dx = \frac{1345}{48} (dm^2)$

+ Diện tích phần được sơn màu trắng là: $S_2 = 9.5 - S_1 = \frac{815}{48} (dm^2)$

+ Chi phí để trang trí là: $20\,000.S_1 + 10\,000.S_2 \approx 730\,000$ (đồng).

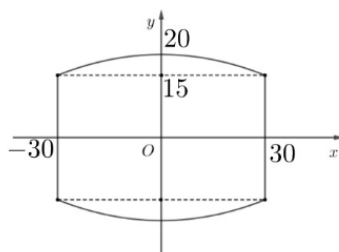
Câu 5: Một thùng đựng Bia hơi (có dạng như hình vẽ) có đường kính đáy là 30cm, đường kính lớn nhất của thân thùng là 40cm, chiều cao thùng là 60 cm, cạnh bên hông của thùng có hình dạng của một parabol. Tính thể tích của thùng Bia hơi. (làm tròn đến hàng phần chục).



Lời giải

Trả lời: 63,8

Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$ là parabol đi qua điểm $A\left(3; \frac{3}{2}\right)$ và có đỉnh $I(0; 2)$ (hình vẽ bên dưới).



Khi đó thể tích thùng Bia bằng thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi (P) , trục hoành và hai đường thẳng $x = 3; x = -3$ quay quanh trục Ox .

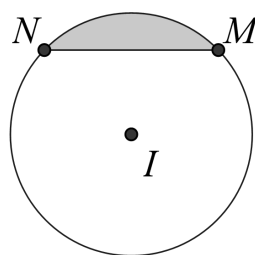
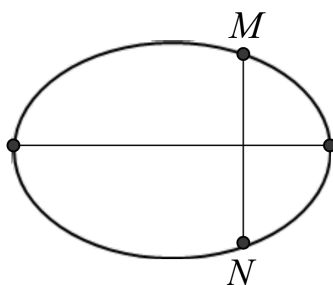
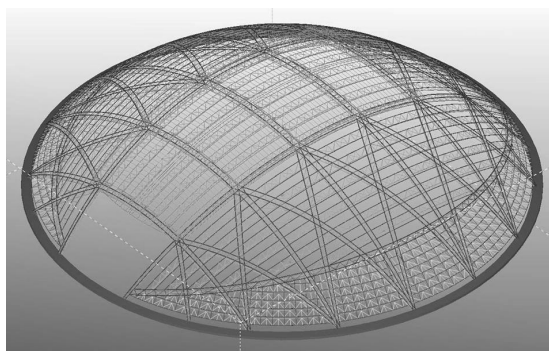
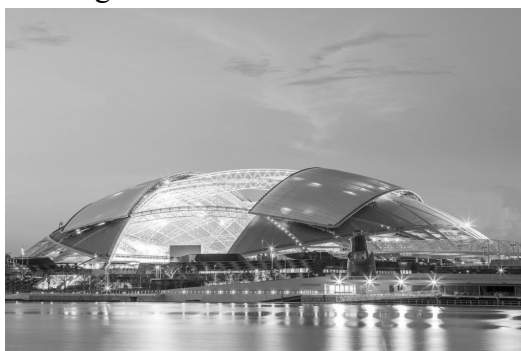
Ta thấy (P) có đỉnh $I(0;2)$ nên $(P): y = ax^2 + 2$, mặt khác (P) đi qua điểm $A\left(3; \frac{3}{2}\right)$ nên ta

tìm được (P) có phương trình $y = \frac{-x^2}{18} + 2$.

Khi đó thể tích thùng Bia là:

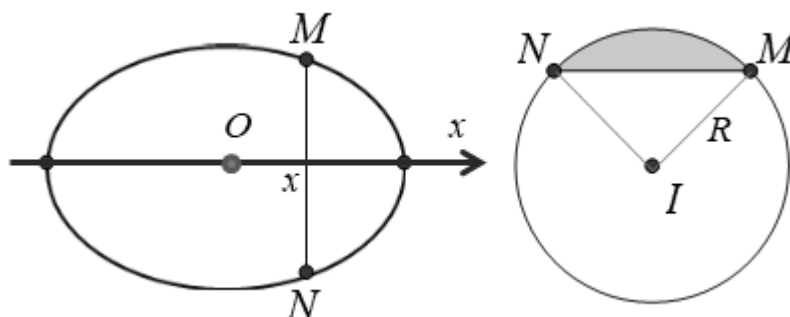
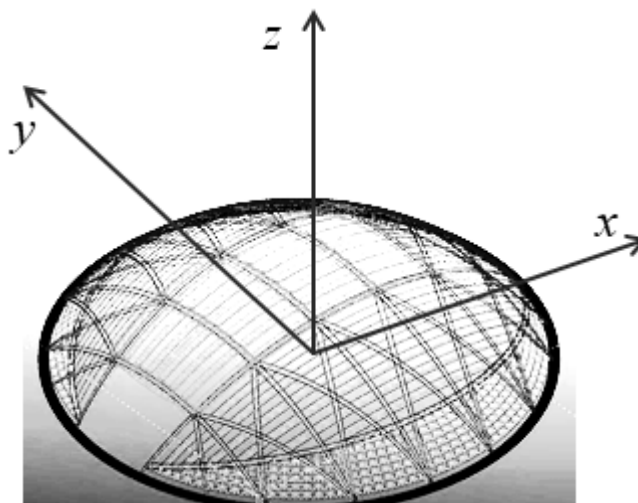
$$V = \pi \int_{-3}^3 \left(\frac{-x^2}{18} + 2 \right)^2 dx = \frac{203}{10} \pi (dm^3) \approx 63,8 \text{ (lít)}.$$

Câu 6: Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$ (hình vẽ). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt elip ở M, N (hình vẽ) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình 4) với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN} = 90^\circ$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Biết rằng cách tính công suất cần đủ là $200 \text{ BTU} / m^3$. Hỏi cần bao nhiêu chiếc điều hòa công suất 50000 BTU?



Lời giải

Trả lời: 463



Chọn hệ trục như hình vẽ

Ta cần tìm diện tích của $S(x)$ thiết diện.

Gọi $d(O, MN) = x$

$$(E): \frac{x^2}{75^2} + \frac{y^2}{45^2} = 1.$$

$$\text{Lúc đó } MN = 2y = 2\sqrt{45^2 \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right)} = 90\sqrt{1 - \frac{x^2}{75^2}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{MN}{\sqrt{2}} = \frac{90}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{75^2}} \Rightarrow R^2 = \frac{90^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right)$$

$$S(x) = \frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 = \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\right)R^2 = (\pi - 2)\frac{2025}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right).$$

Vậy thể tích khoảng không bên dưới mái che và bên trên mặt sân là

$$V = \int_{-75}^{75} (\pi - 2)\frac{2025}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right) dx \approx 115586m^3.$$

Số chiếc điều hòa cần lắp là

$$115586.200 : 50000 = 462,344$$

Vậy cần 463 chiếc điều hòa.