

ThS. TRẦN THANH YÊN

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

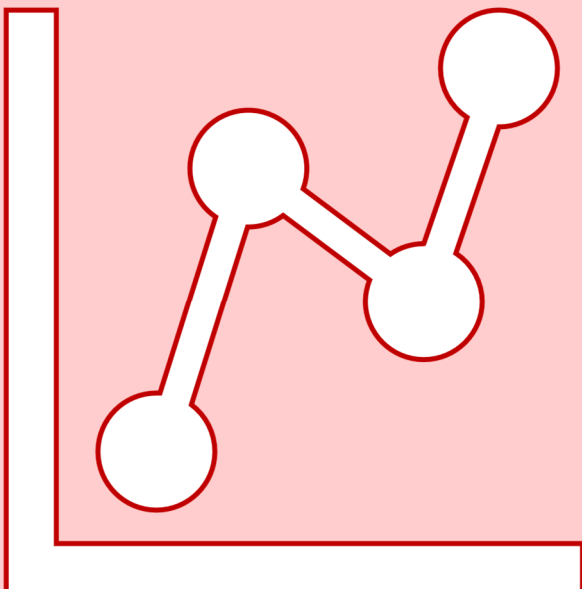
CHƯƠNG 1

12

TOÁN

Chân trời sáng tạo

(có thể dùng chung cả 3 bộ sách)



Lý thuyết và bài tập tự luận

Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Trắc nghiệm đúng sai

Trắc nghiệm trả lời ngắn

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ	TRANG
BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ	1
1. Tính đơn điệu của hàm số	1
2. Cực trị của hàm số	14
3. Tìm m để hàm số đồng biến, nghịch biến trên từng khoảng xác định	27
4. Tìm m để hàm số đồng biến, nghịch biến trên tập K	36
5. Cực trị của hàm số bậc ba có tham số	46
6. Cực trị của hàm số trùng phương có tham số	55
7. Cực trị của hàm số phân thức bậc hai trên bậc nhất có tham số	64
BÀI 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ	73
1. Tìm GTLN, GTNN của hàm số	74
2. Vận dụng tìm GTLN, GTNN của hàm số để giải quyết một số bài toán thực tiễn	91
BÀI 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ	105
BÀI 4. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ MỘT SỐ HÀM SỐ CƠ BẢN	120
1. Sơ đồ khảo sát hàm số	120
2. Khảo sát hàm số bậc ba	120
3. Khảo sát hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất	135
4. Khảo sát hàm số phân thức bậc hai trên bậc nhất	150
5. Vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết một số vấn đề liên quan đến thực tiễn	168
6. Phép biến đổi đồ thị - sự tương giao giữa hai đồ thị	173
ĐÁP ÁN	187

Giáo viên cần file word liên hệ:

ThS. Trần Thanh Yên

Facebook: <https://www.facebook.com/thanhhyendhsp>

Email: tthanhyen@gmail.com

CHƯƠNG 1.

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

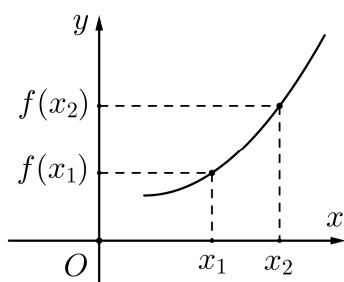
1. Tính đơn điệu của hàm số

Nhắc lại về tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

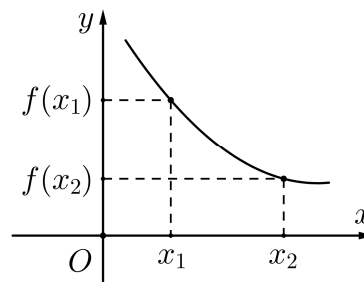
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K , với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc một đoạn.

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến (tăng) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến (giảm) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.



Hàm số đồng biến



Hàm số nghịch biến

Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K thì đồ thị của nó đi lên từ trái sang phải.

Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K thì đồ thị của nó đi xuống từ trái sang phải.

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là đơn điệu trên K .

Tính đơn điệu của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K .

Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K .

Chú ý:

Nếu K là một đoạn hoặc nửa khoảng thì phải bổ sung giả thiết “Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó”. Chẳng hạn: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ thì hàm số đồng biến trên đoạn $[a; b]$.

Chú ý:

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

- a) Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên K .
- b) Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số nghịch biến trên K .
- c) Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên K .

Nhận xét:

Nếu hàm số đồng biến trên K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.

Nếu hàm số nghịch biến trên K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$.

BẢNG ĐẠO HÀM CÁC HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

1. $c' = 0$	2. $x' = 1$
3. $(x^n)' = n.x^{n-1}$	4. $(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$
5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	6. $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
7. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	8. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
9. $(k.x)' = k$	10. $(k.u)' = k.u'$
11. $(\sin x)' = \cos x$	12. $(\sin u)' = u'.\cos u$
13. $(\cos x)' = -\sin x$	14. $(\cos u)' = -u'.\sin u$
15. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	16. $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
17. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	18. $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
19. $(e^x)' = e^x$	20. $(e^u)' = u'.e^u$
21. $(a^x)' = a^x.\ln a$	22. $(a^u)' = u'.a^u.\ln a$
23. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	24. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
25. $(\log_a x)' = \frac{1}{x.\ln a}$	26. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u.\ln a}$

ĐẠO HÀM CỦA TỔNG, HIỆU, TÍCH, THƯƠNG

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$	2. $(u.v)' = u'.v + u.v'$
3. $(u.v.w)' = u'.v.w + u.v'.w + u.v.w'$	4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$
5. $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	6. $\left(\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}\right)' = \frac{ad.x^2 + 2ae.x + be - dc}{(dx+e)^2}$
7. $\left(\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}\right)' = \frac{(a_1b_2-a_2b_1)x^2 + 2(a_1c_2-a_2c_1)x + b_1c_2-b_2c_1}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^2}$	

Chú ý:

Khi xét tính đơn điệu của hàm số mà chưa cho khoảng K , ta hiểu xét tính đơn điệu của hàm số đó trên tập xác định của nó.

CÁC BƯỚC XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Để xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tìm tập xác định D của hàm số.

Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$ của hàm số. Tìm các điểm $x \in D$ mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.

Bước 3. Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.

Bước 4. Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Một số quy tắc xét dấu biểu thức $f'(x)$

- Nếu $f'(x)$ là đa thức thì khoảng ngoài cùng bên phải cùng dấu với a là hệ số cao nhất.
- Qua nghiệm đơn (bội lẻ) đổi dấu, qua nghiệm kép (bội chẵn) không đổi dấu.

CASIO: CALC $X = X_0$ với X_0 là một số tùy ý trong khoảng $(a;b)$ để xác định dấu của $f'(x)$ trong khoảng đó (với $f'(x)$ liên tục và vô nghiệm trên khoảng $(a;b)$).

DẠNG TOÁN: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Ví dụ 1: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số: $y = -x^4 + 4x^2 - 3$.

Ví dụ 2: Xét tính đơn điệu của hàm số: $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$.

Ví dụ 3: Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số: $y = \sqrt{x^2 - 2x}$.

Ví dụ 4: Xét sự biến thiên của hàm số: $y = \frac{3x+1}{1-x}$.

Ví dụ 5: Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số: $y = \sin^2 x + \cos x$, $x \in [0; \pi]$.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1: Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau:

- a) $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$ b) $y = -\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - 9x - \frac{2}{3}$ c) $y = x^4 - 2x^2 + 3$
- d) $y = x + \frac{4}{x}$ e) $y = \frac{1}{x+1} - 2x$ f) $y = \sqrt{2x - x^2}$
- g) $y = \frac{\sqrt{2x^2 - x + 3}}{3x + 2}$ h) $y = \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$ i) $y = \sqrt{x^2 - x - 20}$
- j) $y = x - \ln(x+1)$ k) $y = 2x^2 \cdot e^{-x}$ l) $y = (x^2 - 1) \cdot e^x$
- m) $y = x \ln x$ n) $y = x^2 \ln x$ o) $y = x \cdot \log_2 x$
- p) $y = \ln(-x^2 + 5x - 6)$ q) $y = e^{x^2 - 4x + 4}$ r) $y = (x^2 + 1)e^x$

Câu 2: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của các hàm số:

- a) $y = x - \sin x, x \in [0; 2\pi]$ b) $y = \sin 3x, x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$
- c) $y = \sin 2x - x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ d) $y = \sin^2 x + \cos x + 1, x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Câu 3: Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam trong các năm từ 2010 đến 2017 có thể được tính xấp xỉ bằng công thức $f(x) = 0,01x^3 - 0,04x^2 + 0,25x + 0,44$ (tỉ USD) với x là số năm tính từ 2010 đến 2017 ($0 \leq x \leq 7$).

(Theo: <https://infographics.vn/interactive-xuat-khau-rau-quua-du-bao-bung-no-dat-4-ty-usd-trong-nam-2023/116220.vna>)



a) Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$.

b) Chứng minh rằng kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

Câu 4: Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $a(t)$.

a) Tìm các hàm $v(t)$ và $a(t)$.

b) Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

Câu 5: Thể tích V (đơn vị: centimet khối) của 1kg nước tại nhiệt độ T ($0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$) được tính bởi công thức sau: $V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3$.

(Nguồn: James Stewart, J. (2015). Calculus. Cengage Learning 8th edition, p.284)

a) Hỏi thể tích $V(T)$, $0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$, giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

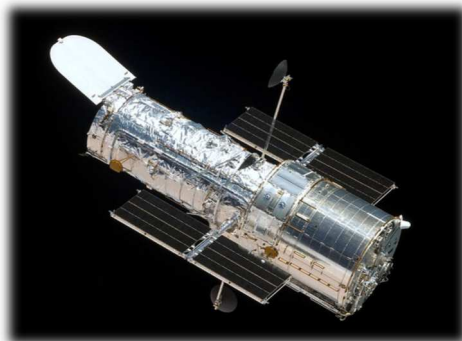
b) Tìm nhiệt độ $T_0 \in (0;30)$ để kể từ nhiệt độ T_0 trở lên thì thể tích V tăng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 6: Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0$ (s) cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t = 126$ (s), cho bởi hàm số sau:

$$v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23$$

(v được tính bằng ft/s, 1 feet = 0,3048 m).

Hỏi gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian nào tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi?



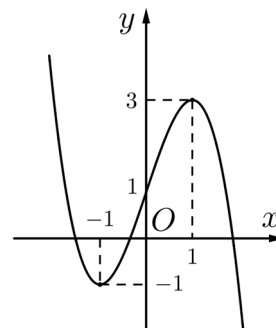
C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;3)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.



Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	5	$+\infty$	$-\infty$	-2	$-\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

Câu 3: Hàm số nào trong các hàm số sau có bảng biến thiên như hình dưới đây:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

- A. $y = x^3 + 3x^2 + 1$. B. $y = 2x^3 + 6x^2 - 1$. C. $y = x^3 + 3x^2 - 1$. D. $y = 2x^3 + 9x^2 - 1$.

Câu 4: Hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 + x^3 - x$ đồng biến trên các khoảng:

- A. $(-\infty; -1)$ và $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. B. $(-\infty; -1)$ và $(2; +\infty)$.
 C. $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ và $(2; +\infty)$. D. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 5: Hàm số $y = \frac{-x^2 + 2x - 4}{x - 2}$ đồng biến trên:

- A. $(0; 2)$ và $(2; 4)$. B. $(0; 2)$ và $(4; +\infty)$.
 C. $(-\infty; 0)$ và $(4; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$ và $(2; 4)$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{1-x}$. Phát biểu nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
 B. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
 C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
 D. Cả hai câu A và B đều đúng.

Câu 7: Cho hàm số $y = \sqrt{3x^2 - x^3}$. Phát biểu nào sau đây **sai**?

- A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; 3)$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; 3)$.
 D. Cả hai câu A và B đều đúng.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K . Điều kiện đủ để hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K là:

- A. $f'(x) > 0$ tại hữu hạn điểm thuộc K . B. $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$.
 C. $f'(x) > 0$ với mọi $x \in K$. D. $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[a; b]$. Điều kiện đủ để hàm số nghịch biến trên đoạn $[a; b]$ là:

- A. $f(x)$ liên tục trên $(a; b)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in [a; b]$.
 B. $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in [a; b]$.
 C. $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; b)$.
 D. $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in [a; b]$.

Câu 10: Các khoảng nghịch biến của hàm số $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 10$ là:

- A. $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$. B. $(-1; 0)$ và $(0; 1)$. C. $\mathbb{R} \setminus (-1; 1)$. D. $\mathbb{R}$.

Câu 11: Hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty; 0)$. B. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$. C. $(0; +\infty)$. D. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 12: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = x^3 + 3x^2 + 1$. B. $y = x^3 + 2x^2 - x + 1$.
 C. $y = x^4 + 2x^2 + 1$. D. $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

Câu 13: Hàm số $y = \sqrt{2 + x - x^2}$ nghịch biến trên khoảng

- A. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. B. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(-1; 2)$.

Câu 14: Hàm số $y = x^2 e^{-x}$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(0; 2)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(-\infty; 0)$. D. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Câu 15: Cho hàm số $y = (x^2 - 3)e^x$. Chọn đáp án đúng.

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 3)$.

Câu 16: Cho bốn hàm số sau: $y = \ln x$, $y = \sqrt{2x^2 + 4}$, $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$, $y = \ln(x^2 + 1)$. Có bao nhiêu hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 17: Cho hàm số $y = x - \ln(1 + x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $(-1; +\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $(-1; 0)$ và đồng biến trên $(0; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$ và nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Câu 18: Cho hàm số $y = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$.

B. Hàm số có đạo hàm $y' = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

C. Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Câu 19: Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$.

B. $y = \sqrt{x-1}$.

C. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số $y = f(x+1)$ đồng biến trên $(a; b)$.

B. Hàm số $y = -f(x) - 1$ nghịch biến trên $(a; b)$.

C. Hàm số $y = -f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$.

D. Hàm số $y = f(x) + 1$ đồng biến trên $(a; b)$.

Câu 21: Cho hàm số $y = -x + \sqrt{x^2 + 8}$. Chọn phát biểu đúng:

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -8)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-8; +\infty)$.

Câu 22: Cho hàm số $y = \frac{x}{x^2 + 1}$. Chọn phát biểu đúng:

A. Hàm số đồng biến trên $(-1; 1)$ và nghịch biến trên $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-1; 1)$, nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 23: Hàm số $y = \frac{3}{5}x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty; 0)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(0; 2)$.

D. Tất cả đều đúng.

Câu 24: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^2(x+1)^2(2x-1)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng:

- A. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. D. $(-1; 0)$.

Câu 25: Cho hàm số $y = \frac{x}{2} + \sin^2 x$, $x \in [0; \pi]$. Hỏi hàm số đồng biến trên các khoảng nào sau đây?

- A. $\left(0; \frac{7\pi}{12}\right), \left(\frac{11\pi}{12}; \pi\right)$. B. $\left(\frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right)$.
C. $\left(0; \frac{7\pi}{12}\right), \left(\frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right)$. D. $\left(\frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right), \left(\frac{11\pi}{12}; \pi\right)$.

Câu 26: Cho hàm số $y = x + \cos^2 x$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
B. Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi; +\infty\right)$ và nghịch biến trên $\left(-\infty; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$.
C. Hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi; +\infty\right)$ và đồng biến trên $\left(-\infty; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$.
D. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 27: Cho các hàm số sau:

(I): $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 4$; (II): $y = \frac{x-1}{x+1}$; (III): $y = \sqrt{x^2 + 4}$;

(IV): $y = x^3 + 4x - \sin x$; (V): $y = x^4 + x^2 + 2$.

Có bao nhiêu hàm số đồng biến trên những khoảng mà nó xác định?

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.

Câu 28: Cho hàm số $y = x + 3 + 2\sqrt{2-x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên $(-2; 2)$.
B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -2)$ và nghịch biến trên $(-2; 2)$.
C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên $(1; 2)$.
D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên $(1; 2)$.

Câu 29: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x + m \cos x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $|m| \leq 1$. B. $m > \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $|m| \geq 1$. D. $m < \frac{1}{2}$.

Câu 30: Tìm mối liên hệ giữa các tham số a và b để hàm số $y = 2x + a \sin x + b \cos x$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$.

A. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

B. $a + 2b = 2\sqrt{3}$.

C. $a^2 + b^2 \leq 4$.

D. $a + 2b \geq \frac{1+\sqrt{2}}{3}$.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai**Câu 1.** Cho hàm số $y = \frac{5}{x-2}$.

a) Đạo hàm của hàm số là $y' = \frac{-5}{(x-2)^2}$.

b) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.d) Hàm số nghịch biến trên 2 khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.**Câu 2.** Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$.a) Tập xác định của hàm số là $D = [0; 2]$.

b) $y' = \frac{1}{2\sqrt{2x - x^2}}$.

c) Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm trên đoạn $[0; 2]$.d) Khoảng đồng biến của hàm số là $(0; 1)$.**Câu 3.** Cho hàm số $y = x^3 - x^2 - x + 3$.

a) $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ x = 1 \end{cases}$.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.c) Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.d) Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$.**Câu 4.** Cho hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

a) $y' = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$.

b) Đồ thị hàm số đã cho luôn đi lên từ trái sang phải.

c) Hàm số đã cho có đồ thị luôn nằm phía trên trục hoành.

d) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x(x+1)^2(x-1)^4$.

a) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0;1)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

c) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

d) Hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = \frac{-2x-3}{x-1}$.

a) $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

b) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

c) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0;3)$, cắt trục hoành tại điểm $\left(-\frac{3}{2};0\right)$.

d) Đồ thị hàm số luôn đi lên từ trái sang phải.

Câu 7. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị (C) .

a) Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

b) $y' > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.

c) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung là $y = 3x - 2$.

d) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2025;2026)$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$.

a) Tập xác định của hàm số đã cho là $D = [-1;1]$.

b) $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

c) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

d) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt.

Câu 9. Cho hàm số bậc ba có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	20	-7	$+\infty$	

- a) Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.
- b) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-7; 20)$.
- c) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-20; -7)$.
- d) Hàm số đã cho có công thức là $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

Câu 10. Cho hàm số $y = x \ln x$.

- a) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt.
- b) Tập xác định của hàm số đã cho là $D = [0; +\infty)$.
- c) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{e}; +\infty\right)$.
- d) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{e}\right)$.

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Biết hàm số $y = x^2 \cdot e^x$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ và đồng biến trên các khoảng $(-\infty; a)$ và $(b; +\infty)$. Tính $S = a^2 + b^2$.

ĐS:

Câu 2: Giả sử tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 6x^2 + 18x + 1$ song song với đường thẳng $d: 12x - y = 0$ có dạng là $y = ax + b$. Tính tổng $a + b$.

ĐS:

Câu 3: Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ đồng biến trên 2 khoảng $(-\infty; a)$ và $(b; +\infty)$ với $b - a = 2$. Tính $S = a^2 - b^2$.

ĐS:

Câu 4: Biết hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + a}{x - 1}$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ và đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
Tìm giá trị của a .

ĐS:

Câu 5: Biết hàm số $y = e^x(x^2 - 3)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ và đồng biến trên các khoảng $(-\infty; a)$ và $(b; +\infty)$. Tính $S = a^2 + b^2$.

ĐS:

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết tất cả các giá trị của x để $f\left(\frac{1}{x}\right) > f(2)$ là $(-\infty; a) \cup (b; +\infty)$. Tính giá trị biểu thức $P = (a+1)(b-2)$.

ĐS:

Câu 7: Cho hàm số $y = x.e^{\sqrt{2-x^2}}$. Biết hàm số đã cho đồng biến trên một khoảng $(a; b)$ có độ dài bằng 2. Tính giá trị biểu thức $S = 2a + b$.

ĐS:

Câu 8: Cho hàm số $y = (x^2 - 2(m+4)x + 2m + 12)e^x$. Gọi S là tổng các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên tập xác định của nó. Tính S .

ĐS:

Câu 9: Gọi $M \in (C): y = \frac{2x+1}{x-1}$ có tung độ bằng 5. Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các trục tọa độ Ox , Oy lần lượt tại A và B . Diện tích tam giác OAB bằng $\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $T = ab$.

ĐS:

Câu 10: Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$, trong đó $f(t)$ được tính bằng nghìn người. Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Hỏi vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0,048 nghìn người/năm?

ĐS:

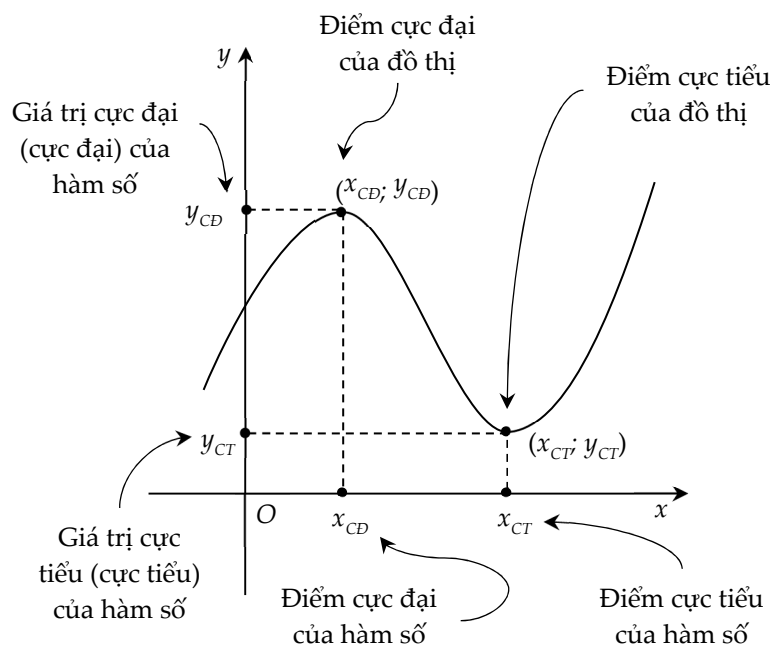
BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ (tiếp theo)**A. LÝ THUYẾT****2. Cực trị của hàm số****Khái niệm cực trị của hàm số**

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D và $x_0 \in D$.

- Nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và $(a; b) \subset D$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$ thì x_0 được gọi là một **điểm cực đại**, $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu là y_{CD} .
- Nếu tồn tại một khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và $(a; b) \subset D$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$ thì x_0 được gọi là một **điểm cực tiểu**, $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu là y_{CT} .

Chú ý:

- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị** của hàm số. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị** (còn gọi là **cực trị**) của hàm số.
- Nếu x_0 là một điểm cực trị (điểm cực đại, điểm cực tiểu) của hàm số $y = f(x)$ thì ta cũng nói hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị (cực đại, cực tiểu) tại x_0 .
- Hàm số có thể đạt cực đại và cực tiểu tại nhiều điểm trên D .
- Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì điểm $M(x_0; f(x_0))$ là một **điểm cực trị của đồ thị** hàm số $y = f(x)$.



Tìm cực trị của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 .
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

x	a	x_0	b
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		y_{CD}	

x	a	x_0	b
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		y_{CT}	

Chú ý:

- a) Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì hàm số không có cực trị tại x_0 .
- b) Nếu $f'(x)$ không đổi dấu trên khoảng K thì $f(x)$ không có cực trị trên khoảng đó.

Định lý

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(a; b)$ chứa x_0 . Khi đó:

- Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.
- Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số.

Chú ý: Chiều đảo của định lý này không chắc đúng. Nhưng đối với hàm số bậc ba, chiều đảo của định lý luôn đúng.

CÁC BƯỚC TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ**Quy tắc 1:**

Bước 1. Tìm tập xác định D của hàm số.

Bước 2. Tính đạo hàm $f'(x)$ của hàm số. Tìm các điểm x thuộc D mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.

Bước 3. Lập bảng biến thiên của hàm số.

Bước 4. Từ bảng biến thiên kết luận về cực trị của hàm số.

Quy tắc 2:

Bước 1. Tìm tập xác định D của hàm số.

Bước 2. Tính đạo hàm $f'(x)$ của hàm số. Giải phương trình $f'(x)$ và kí hiệu x_i ($i = 1, 2, \dots$) là các nghiệm của nó.

Bước 3. Tính đạo hàm cấp hai $f''(x)$ và tính các giá trị $f''(x_i)$.

Bước 4. Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i như sau:

$f''(x_i) > 0$: hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_i$.

$f''(x_i) < 0$: hàm số đạt cực đại tại $x = x_i$.

$f''(x_i) = 0$: chưa đủ cơ sở để kết luận $x = x_i$ có là điểm cực trị hay không.

DẠNG TOÁN: TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Ví dụ 1: Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 - 6x + 2$

b) $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$

c) $y = x^4 - 2x^2 + 2$

d) $y = -x^4 - 5x^2 + 2$

Ví dụ 2: Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2x-3}{x-2}$

b) $y = \frac{1}{2} - \frac{5}{2(2x+1)}$

c) $y = \frac{x^2 - 2x - 15}{x-3}$

d) $y = x - 5 + \frac{1}{x}$

Ví dụ 3: Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

b) $y = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$

c) $y = 2 \sin 2x - 3$

d) $y = 2 \cos 2x - 4x$

Ví dụ 4: Tìm cực trị của các hàm số sau:

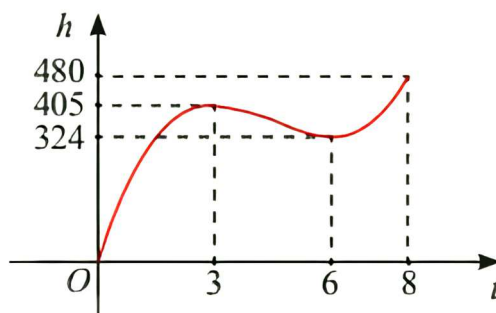
a) $y = x \ln x$

b) $y = \frac{e^x}{x+1}$

c) $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 e^x$

d) $y = \frac{\ln x}{x}$

Ví dụ 5: Trong 8 phút đầu kể từ khi xuất phát, độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi công thức $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$. Đồ thị của hàm số $h(t)$ được biểu diễn trong hình bên.



- a) Trong các khoảng thời gian nào khinh khí cầu tăng dần độ cao, giảm dần độ cao?
 b) Độ cao của khinh khí cầu vào các thời điểm 3 phút và 6 phút sau khi xuất phát có gì đặc biệt?

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1: Tìm cực trị của hàm số sau (nếu có):

- | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|---|
| a) $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ | b) $y = x^3 + 3x + 1$ | c) $y = \frac{x^4}{4} - x^2 + 2$ |
| d) $y = -\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$ | e) $y = \frac{-x-2}{x-3}$ | f) $y = -2 + \frac{1}{x-3}$ |
| g) $y = \sqrt{4-x^2} + 3$ | h) $y = x\sqrt{2-x^2} - 3$ | i) $y = x + \frac{1}{x}$ |
| j) $y = \sqrt{x^2 + 4x - 5}$ | k) $y = \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 2}$ | l) $y = \frac{4x^2 + 2x - 1}{2x^2 + x - 3}$ |

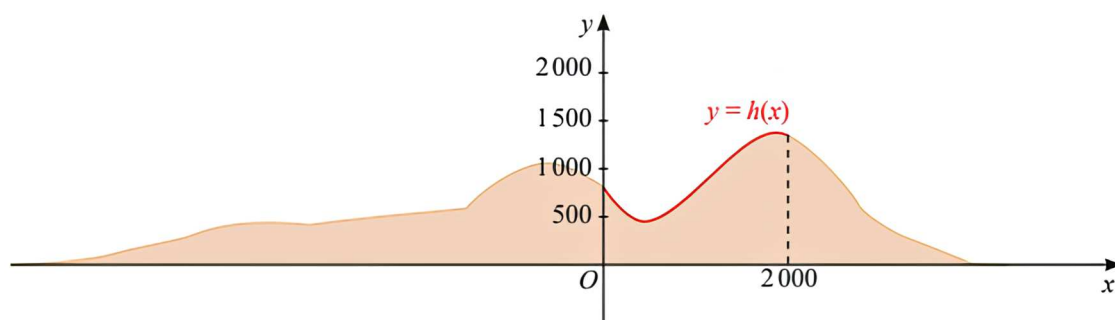
Câu 2: Tìm cực trị của các hàm số sau (nếu có):

- | | | |
|--------------------------|--------------------------------|--------------------|
| a) $y = x - \sin 2x + 2$ | b) $y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$ | c) $y = x^2 \ln x$ |
| d) $y = (-x + 3)e^x$ | e) $y = xe^{-x}$ | f) $y = x - \ln x$ |

Câu 3: Một phần lát cắt của dãy núi có độ cao tính bằng mét được mô tả bởi hàm số

$$y = h(x) = -\frac{1}{1320000}x^3 + \frac{9}{3520}x^2 - \frac{81}{44}x + 840 \text{ với } 0 \leq x \leq 2000.$$

Tìm tọa độ các đỉnh của lát cắt dãy núi trên đoạn $[0; 2000]$.

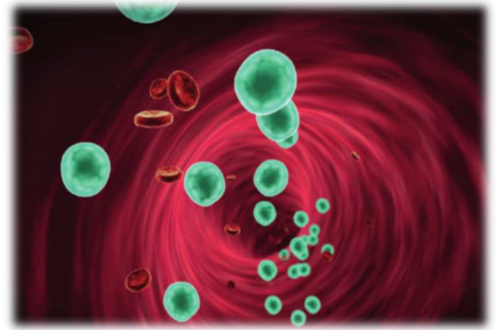


(Theo: Tập bản đồ bài tập và bài thực hành Địa lí 8, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2011).

Câu 4: Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ (mg/l) của thuốc trong máu sau x phút (kể từ khi bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức: $C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$.

(Nguồn: James Stewart, J. (2015). Calculus. Cengage Learning)

Để đưa ra những lời khuyên và cách xử lý phù hợp cho bệnh nhân, ta cần tìm khoảng thời gian mà nồng độ của thuốc trong máu đang tăng.



a) Hãy lập bảng biến thiên của hàm số $C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

b) Hàm nồng độ thuốc trong máu $C(x)$ tăng trong khoảng thời gian nào.

c) Hàm nồng độ thuốc trong máu $C(x)$ đạt giá trị cực đại là bao nhiêu trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm.

Câu 5: Một công ty tiến hành khai thác 17 giếng dầu trong khu vực được chỉ định. Trung bình mỗi giếng dầu chiết xuất được 245 thùng dầu mỗi ngày. Công ty có thể khai thác nhiều hơn 17 giếng dầu nhưng cứ khai thác thêm một giếng thì lượng dầu mỗi giếng chiết xuất được hằng ngày sẽ giảm 9 thùng. Để giám đốc công ty có thể quyết định số giếng cần thêm cho phù hợp với tài chính, hãy chỉ ra số giếng công ty có thể khai thác thêm để sản lượng dầu chiết xuất tăng lên.



C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$	

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số có 2 cực trị.

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 0.

C. Hàm số có giá trị cực đại bằng -4.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

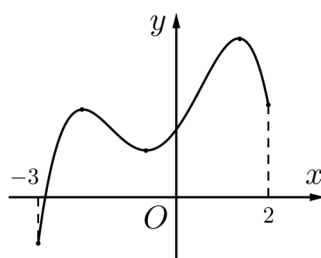
Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	$ $	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-3	$+\infty$	

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số có đúng 1 cực trị.
- B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 2.
- C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3 .
- D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

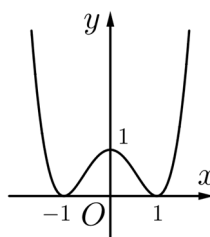
Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-3; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A. $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 0$.
- B. $f(x)$ có giá trị cực đại là $y = 0$.
- C. $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$.
- D. $f(x)$ có giá trị cực tiểu là $y = 0$.

Câu 5: Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ đạt cực tiểu tại:

- A. $x = 0$.
- B. $x = 2$.
- C. $x = 4$.
- D. $x = 0$ và $x = 2$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + \frac{2}{3}$. Điểm cực đại của đồ thị hàm số là:

- A. $x = 1$.
- B. $\left(3; \frac{2}{3}\right)$.
- C. $x = 3$.
- D. $(1; 2)$.

- Câu 7:** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 - 8x - 8$ có 2 điểm cực trị là x_1, x_2 . Hỏi tổng $x_1 + x_2$ là bao nhiêu?
- A. $x_1 + x_2 = -5$. B. $x_1 + x_2 = 5$. C. $x_1 + x_2 = -8$. D. $x_1 + x_2 = 8$.
- Câu 8:** Giá trị cực đại của hàm số $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 6$ là:
- A. $y_{CD} = 6$. B. $y_{CD} = 2$. C. $y_{CD} = 20$. D. $y_{CD} = -6$.
- Câu 9:** Biết đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ có 3 điểm cực trị là A, B, C . Khi đó diện tích tam giác ABC bằng:
- A. $S_{\Delta ABC} = 1$. B. $S_{\Delta ABC} = 2$. C. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}$. D. $S_{\Delta ABC} = \frac{3}{2}$.
- Câu 10:** Lập phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x$.
- A. $y = -\frac{5}{6}x + \frac{1}{2}$. B. $y = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}$. C. $y = -\frac{5}{6}x - \frac{1}{2}$. D. $y = \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}$.
- Câu 11:** Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$. Giá trị cực đại của hàm số là:
- A. $y_{CD} = -4$. B. $y_{CD} = -5$. C. $y_{CD} = 3$. D. $y_{CD} = -1$.
- Câu 12:** Tính giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = xe^x$.
- A. $y_{CT} = \frac{1}{e}$. B. $y_{CT} = e$. C. $y_{CT} = -\frac{1}{e}$. D. $y_{CT} = -1$.
- Câu 13:** Tìm điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = e^{-x^2+x}$.
- A. $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$. B. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$. C. $\left(\frac{1}{2}; \sqrt[4]{e}\right)$. D. $\left(-\frac{1}{2}; \sqrt[4]{e}\right)$.
- Câu 14:** Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
- A. 1. B. 2. C. 0. D. -1.
- Câu 15:** Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 5$ có 2 điểm cực trị A và B . Tính diện tích S của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.
- A. $S = 9$. B. $S = \frac{10}{3}$. C. $S = 5$. D. $S = 10$.
- Câu 16:** Khẳng định nào sau đây là đúng về hàm số $y = -2x^4 + 5x^2 + 2$?
- A. Có 2 cực đại và 1 cực tiểu. B. Có 2 cực tiểu và 1 cực đại.
C. Không có cực trị. D. Có đúng 1 điểm cực trị.
- Câu 17:** Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.B. Hàm số có 2 cực trị trong đó $y_{CD} < y_{CT}$.C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.D. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -2 .

Câu 18: Biết đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có 2 điểm cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB ?

A. $P(1;0)$.B. $M(0;-1)$.C. $N(1;-10)$.D. $Q(-1;10)$.

Câu 19: Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = -2x + 1 - \frac{2}{x+2}$.

A. $y_{CD} = 1$.B. $y_{CD} = -1$.C. $y_{CD} = 9$.D. $y_{CD} = -9$.

Câu 20: Hàm số $y = x - \sin 2x$ đạt cực đại tại:

A. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.D. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$.

Câu 21: Gọi x_1, x_2 là 2 điểm cực trị của hàm số $y = \frac{x^2 - 4x}{x+1}$. Tính giá trị của biểu thức $P = x_1 + x_2$.

A. $P = -5$.B. $P = -2$.C. $P = -1$.D. $P = -4$.

Câu 22: Tìm giá trị cực đại của hàm số $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$.

A. $y_{CD} = 1$.B. $y_{CD} = 2$.C. $y_{CD} = 3$.D. $y_{CD} = 6$.

Câu 23: Gọi M, n lần lượt là giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x+2}$. Khi đó giá trị của biểu thức $M^2 - 2n$ bằng:

A. 8.

B. 7.

C. 9.

D. 6.

Câu 24: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có 2 điểm cực trị.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.C. Hàm số đạt cực đại $x = 2$.

D. Hàm số không có cực trị.

Câu 25: Điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \sqrt{1 + 4x - x^4}$ có tọa độ là:

A. $(1;2)$.B. $(0;1)$.C. $(2;3)$.D. $(3;4)$.

Câu 26: Biết đồ thị hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có 2 điểm cực trị là $A(0;2)$ và $B(2;-14)$. Tính giá trị $f(1)$.

A. $f(1) = 0$.B. $f(1) = -7$.C. $f(1) = -5$.D. $f(1) = -6$.

Câu 27: Biết hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$, $f(1) = -3$ và đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Tính giá trị của hàm số tại $x = -1$.

A. $f(-1) = -3$.B. $f(-1) = 4$.C. $f(-1) = 13$.D. $f(-1) = 2$.

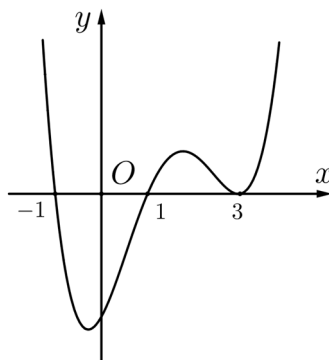
Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x(x-1)^2(x+3)^3$. Số điểm cực trị của hàm số là:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)^3(x+2)$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$. B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$. D. Hàm số không có cực trị.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ như hình bên. Biết đồ thị $y = f(x)$ chỉ cắt trục hoành tại đúng 3 điểm. Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. Hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực đại là $f(-1)$.
B. Hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực đại là $f(0)$.
C. Hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực đại là $f(1)$.
D. Hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực tiểu là $f(3)$.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

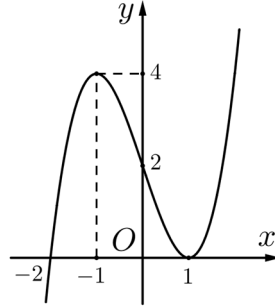
x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	0	3	0	$+\infty$

- a) Điểm cực tiểu của hàm số là $x = -2$ và $x = 2$.
b) Hàm số đạt cực trị tại $x = 0$.
c) Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.
d) Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x(x-1)^2(x+3)^3$.

- a) Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là 2.
- b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
- c) Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = -3$.
- d) Hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 0$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



- a) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại 2 điểm.
- b) Hàm số $y = f'(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.
- c) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -2$.
- d) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên khoảng $(0; 2)$ như sau:

x	0	1	2
y'		+	-
y	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$

- a) Trên khoảng $(0; 2)$, hàm số không có cực trị.
- b) Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.
- c) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $x = 2$.
- d) Giá trị $f(1)$ là cực đại của hàm số.

Câu 5. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$.

- a) Giá trị cực đại của hàm số là $\frac{1}{3}$.
- b) Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.
- c) Điểm $M(6; -3)$ thuộc đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A, B của đồ thị hàm số trên.

d) Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị A, B của đồ thị hàm số trên chắn trên 2 trục tọa độ một tam giác có diện tích là $\frac{3}{2}$.

Câu 6. Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) .

- Số điểm cực tiểu của hàm số trên là 1.
- Hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.
- Ba điểm cực trị A, B, C của đồ thị (C) tạo thành một tam giác vuông.
- Diện tích tam giác ABC bằng 1.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$-$
y	$+\infty$	-1	3	1	$-\infty$

- Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x = 5$.
- $x = 2$ là điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$.
- Hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị.

Câu 8. Cho hàm số $y = \frac{mx^2 - 2x + m - 1}{2x + 1}$ (m là tham số) có đồ thị là (C) .

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.
- Hàm số đã cho luôn có 2 điểm cực trị nếu $m \neq 0$.
- Với $m = 2$ thì hàm số có $y_{CT} = \sqrt{5} - 2$.
- Đường thẳng nối hai điểm cực trị của (C) vuông góc với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất khi m bằng -1 .

Câu 9. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1 - m$ có đồ thị (C) .

- Phương trình $y' = 0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt.
- Khi $m = -1$, đồ thị hàm số có điểm cực đại nằm trên trục hoành.
- Hàm số có cực đại và cực tiểu trái dấu khi $-1 < m < 3$.

d) Với $m = 3$ hoặc $m = -1$ thì 2 điểm cực trị của (C) cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2.

Câu 10. Cho hàm số $y = x^3 - x + m$ có đồ thị (C) .

a) Hàm số đã cho luôn có 2 điểm cực trị.

b) Với mọi giá trị m ta luôn có $|y_{CD} - y_{CT}| = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

c) Khi $m = \pm 3$ thì 2 điểm cực trị của đồ thị (C) cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

d) Đường thẳng nối điểm cực đại với điểm cực tiểu của đồ thị (C) đi qua điểm $M(3; -1)$ khi $m = -1$.

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Biết hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 7x - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 . Khi đó tích $x_1 \cdot x_2$ bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 2. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$.

ĐS:

Câu 3. Biết đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x$ có 2 điểm cực trị A và B và điểm $C(-2; y_C)$ thuộc đường thẳng AB . Khi đó giá trị y_C là bao nhiêu?

ĐS:

Câu 4. Cho hàm số $y = 2x^3 + bx^2 + cx + 1$. Biết $M(1; -6)$ là điểm cực tiểu và $N(x_N; y_N)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số. Khi đó $S = y_N - x_N$ bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 5. Biết đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + ax + b$ có điểm cực tiểu là $A(2; -2)$. Tính tổng $S = a + b$.

ĐS:

Câu 6. Biết khoảng cách giữa 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - mx + m}{x - 1}$ có dạng $a\sqrt{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}; a > 1$. Khi đó $S = a - 2b$ bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 7. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}\sin 3x + m\sin x$. Tìm giá trị của tham số m để hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \frac{\pi}{3}$.

ĐS:

Câu 8. Khoảng cách d giữa hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 1$ có dạng $d = a\sqrt{a}$. Khi đó $P = (a+1)^2$ bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 9. Biết đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - ax + b}{x - c}$ có 2 điểm cực trị là $A(0; -2)$ và $B(2; 2)$. Tính tổng $T = a + b + c$.

ĐS:

Câu 10. Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{4x^2 + x - 5}{x + 2}$ có dạng $y = ax + b$. Khi đó $T = a^2 - b^2$ bằng bao nhiêu?

ĐS:

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ (tiếp theo)**A. LÝ THUYẾT****Nhắc lại về tam thức bậc hai không đổi dấu trên $\mathbb{R}$**

Cho tam thức $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) với $\Delta = b^2 - 4ac$ hoặc $\Delta' = b'^2 - ac$, $b' = \frac{b}{2}$. Khi đó:

- $ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$
- $ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
- $ax^2 + bx + c \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$
- $ax^2 + bx + c < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

DẠNG TOÁN: TÌM m ĐỂ HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN HOẶC NGHỊCH BIẾN TRÊN TỪNG KHOẢNG XÁC ĐỊNH**Đối với các hàm số sơ cấp $y = f(x)$, nói chung ta có:**

- Hàm số đồng biến (tăng) trên $D \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in D$.
- Hàm số nghịch biến (giảm) trên $D \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in D$.

Một số dạng hàm số thường gặp:

Hàm số bậc ba có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) thì:Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Hàm số đồng biến (tăng) trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$.

Hàm số nghịch biến (giảm) trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$.

Hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất có dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (điều kiện: $c \neq 0, ad - bc \neq 0$) thì:

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$. Đạo hàm $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$.

Hàm số đồng biến (tăng) trên từng khoảng của $D \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow ad - bc > 0$.

Hàm số nghịch biến (giảm) trên từng khoảng của $D \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow ad - bc < 0$.

Hàm số phân thức bậc hai trên bậc một có dạng $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ (điều kiện: $a \neq 0, m \neq 0$) thì:

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$. Đạo hàm $y' = \frac{am.x^2 + 2an.x + bn - mc}{(mx + n)^2}$.

Đặt $g(x) = am.x^2 + 2an.x + bn - mc$.

Hàm số đồng biến (tăng) trên từng khoảng của D

$$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in D$$

$\Leftrightarrow a.m > 0$ và phương trình $am.x^2 + 2an.x + bn - mc = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a.m > 0 \\ \Delta_{g(x)} \leq 0 \end{cases}.$$

Hàm số nghịch biến (giảm) trên từng khoảng của D

$$\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in D$$

$\Leftrightarrow a.m < 0$ và phương trình $am.x^2 + 2an.x + bn - mc = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a.m < 0 \\ \Delta_{g(x)} \leq 0 \end{cases}.$$

Chú ý:

- Công thức trên áp dụng cho hàm số có điều kiện là $a \neq 0, m \neq 0$. Trong trường hợp a và m chưa chắc khác 0 thì ta phải xét $a = 0, m = 0$ trước.
- Nếu đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu (tức là $-\frac{n}{m}$ **không là nghiệm** của tử) thì trong các công thức trên, $\Delta_{g(x)}$ có thể không có dấu bằng " $=$ ".

Ví dụ 1: Tìm tham số m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2: Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}(3-m)x^3 - (m+3)x^2 + (m+2)x - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 3: Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{mx-2}{x-m+1}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Ví dụ 4: Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 - (m-1)x}{x-1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1: Xác định các giá trị của tham số m để hàm số:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 3(m+2)x + 3m - 1$ luôn đồng biến trên tập xác định của nó.

b) $y = -x^3 + 3x^2 - 3mx - 4$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

c) $y = (m+2)\frac{x^3}{3} - (m-1)x^2 + 4x - 1$ luôn đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

Câu 2: Xác định các giá trị của tham số m để hàm số:

a) $y = \frac{x+m}{x-m}$ luôn đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

b) $y = \frac{(m+2)x-1}{3x-m}$ luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Câu 3: Xác định các giá trị của tham số m để hàm số

a) $y = \frac{x^2 + mx - 5}{3 - x}$ luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

b) $y = \frac{x^2 + 2x + m - 2}{x + 1}$ luôn đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Xác định m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m \geq 3$. B. $m < 3$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. $m \in \emptyset$.

Câu 2: Cho hàm số $y = (m^2 - 1)\frac{x^3}{3} + (m + 1)x^2 + 3x - 1$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số luôn đồng biến trên tập xác định.

- A. $m \geq 2$. B. $m \leq -1$. C. $-1 \leq m \leq 2$. D. $m \leq -1 \vee m \geq 2$.

Câu 3: Tập tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + 3x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là:

- A. $[-3; 3]$. B. $(-3; 3)$. C. $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$. D. $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

Câu 4: Tập tất cả các giá trị của m để hàm số $y = mx^3 + mx^2 + (m + 1)x - 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là:

- A. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup (0; +\infty)$. B. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (0; +\infty)$.
C. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right]$. D. $\left[-\frac{3}{2}; 0\right)$.

Câu 5: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2 - m)x^3 + 2mx^2 + 3x - 2$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. 4. B. 5. C. 3. D. 0.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = mx^3 + mx^2 + m(m - 1)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m \leq \frac{4}{3} \wedge m \neq 0$. B. $m = 0 \vee m \geq \frac{4}{3}$. C. $m \geq \frac{4}{3}$. D. $0 < m \leq \frac{4}{3}$.

Câu 8: Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m + 2)x + 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq -2 \end{cases}$. B. $-2 \leq m \leq -1$. C. $-2 < m < -1$. D. $\begin{cases} m > -1 \\ m < -2 \end{cases}$.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m \in \emptyset$. B. $m \neq 1$. C. $m = 1$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - 2mx^2 + (3m+5)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 4. B. 2. C. 5. D. 6.

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \sin x + \cos x + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$. B. $m \leq -\sqrt{2}$. C. $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$. D. $m \geq \sqrt{2}$.

Câu 12: Tìm m để hàm số $y = mx - \sin x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m \geq 1$. B. $m = 1$. C. $m \geq -1$. D. $m < 1$.

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx+2}{2x+m}$ luôn đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

A. $m < -2$ hoặc $m > 2$. B. $m = 2$. C. $-2 < m < 2$. D. $m = -2$.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx+3}{3x+m}$ luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

A. $-3 < m < 3$. B. $m < -3$. C. $-3 < m < 0$. D. $m > 3$.

Câu 15: Điều kiện cần và đủ của m để hàm số $y = \frac{mx+5}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định là:

A. $m \geq -5$. B. $m > -5$. C. $m \geq 5$. D. $m > 5$.

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{mx+4-3m}{x+m}$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

A. $m > 1$. B. $m < -4$. C. $-4 < m < 1$. D. $m \leq -4 \vee m \geq 1$.

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{(m+1)x-2}{x-m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

A. $-2 < m < 1$. B. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases}$. C. $-2 \leq m \leq 1$. D. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -2 \end{cases}$.

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{mx-2m-3}{x-m}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

A. 5. B. 4. C. Vô số. D. 3.

- Câu 19:** Cho hàm số $y = \frac{mx+4-3m}{x+m}$, m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số giảm trên từng khoảng xác định.
- A. $m > 1$. B. $m < -4$. C. $-4 < m < 1$. D. $m \leq -4 \vee m \geq 1$.
- Câu 20:** Cho hàm số $y = \frac{(m+1)x-2}{x-m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.
- A. $-2 < m < 1$. B. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases}$. C. $-2 \leq m \leq 1$. D. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -2 \end{cases}$.
- Câu 21:** Cho hàm số $y = \frac{mx+4m}{x+m}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Số phần tử của S là:
- A. 3. B. 5. C. 4. D. Vô số.
- Câu 22:** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{x^2 - (m+1)x + 2m-1}{x-m}$ tăng trên từng khoảng xác định của nó.
- A. $m > 1$. B. $m \leq 1$. C. $m < 1$. D. $m \geq 1$.
- Câu 23:** Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - m}{x-1}$ ($m \neq 1$). Chọn câu trả lời đúng:
- A. Hàm số luôn giảm trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$ với $m < 1$.
 B. Hàm số luôn giảm trên tập xác định.
 C. Hàm số luôn tăng trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$ với $m > 1$.
 D. Hàm số luôn tăng trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- Câu 24:** Tập tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x + 1 + \frac{m}{x-2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định là:
- A. $[0; 1)$. B. $(-\infty; 0]$. C. $[0; +\infty) \setminus \{1\}$. D. $(-\infty; 0)$.
- Câu 25:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = 3x + \frac{m^2 + 3m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?
- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.
- Câu 26:** Cho hàm số $y = \frac{mx^2 - mx + 1}{x-1}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.
- A. $m < 0$. B. $m \in \emptyset$. C. $m \leq 0$. D. $m > 0$.

Câu 27: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (m-1)x + 2}{1-x}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

- A. $m < -2$. B. $m \geq -2$. C. $m > -2$. D. $m \leq -2$.

Câu 28: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - (m+1)x - m^2 + 4m - 2}{x-1}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

- A. $1 \leq m \leq 2$. B. $\begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$. C. $-2 \leq m \leq 1$. D. $\begin{cases} m > 2 \\ m < 1 \end{cases}$.

Câu 29: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x-1}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

- A. $m \leq 0$. B. $m < 0$. C. $m \leq -1$. D. $m < -1$.

Câu 30: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + 3m^2 - 3}{x-2m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

- A. $-1 < m < 1$. B. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -1 \end{cases}$. C. $-1 \leq m \leq 1$. D. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x - m$.

- a) Đạo hàm $y' = x^2 + 2mx + 4 - m$.
b) Với $m = 2$, hàm số có điểm cực trị là $x = -2$.
c) Với $m = -\frac{17}{4}$, hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1; 8)$.
d) Có 5 giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + (2m+1)x - 4m - 7$.

- a) Với $m = 0$, hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 2 - \sqrt{5}$.
b) Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $A\left(2; \frac{1}{3}\right)$ với mọi m .
c) Với $m = 1$, hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 4)$.
d) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m < -\frac{5}{2}$.

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = (m-1)x^3 - 3(m-1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- a) Với $m = 1$, hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.
- b) Với $m = 0$, đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực trị nằm về 2 phía so với trục hoành.
- c) Với $m = 3$, hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2025; 2030)$.
- d) Có 2 giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + (m+1)x - 3m$ có đồ thị (C) .

- a) Hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- b) Với $m = 0$, hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-3; -1)$.
- c) Giao điểm của (C) và đường thẳng $d: x = -2$ có tung độ dương khi $m < \frac{2}{3}$.
- d) Có 3 giá trị nguyên dương của m để hàm số đã cho **không** đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{mx - 2m - 3}{x - m}$.

- a) Hàm số đã cho không có cực trị với mọi giá trị m .
- b) Với $m = 5$, hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 2025)$.
- c) Có 18 giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[0; 20]$ để hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng xác định.
- d) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Số phần tử của S là 3.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{2x + m - 1}{x + 2m}$ có tập xác định D .

- a) Hàm số đã cho luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.
- b) Với $0 < m < 1$ thì đồ thị hàm số đã cho luôn cắt trục tung tại điểm có tung độ âm.
- c) Với $m = 2$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-4; +\infty)$.
- d) Hàm số đã cho nghịch biến trên tập xác định D khi $m < -\frac{1}{3}$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{2mx - m - 2}{x + m}$.

- a) Đạo hàm $y' = \frac{2m^2 + m + 2}{(x + m)^2}$.
- b) Hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-m\}$ với mọi giá trị m .
- c) Hàm số đã cho luôn đồng biến trên $(-m; +\infty)$ với mọi giá trị m .
- d) Hàm số đã cho đồng biến trên tất cả các khoảng không chứa $x = -m$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - (m+1)x + 4m^2 - 4m}{x - m + 1}$.

- a) Hàm số đã cho luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định.
- b) Với $m = 0$, hàm số đã cho có cực đại bằng $-3 - 2\sqrt{2}$.
- c) Với $m = 2$, hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- d) Với $m \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, hàm số đã cho luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - m(m+1)x + m^3 + 1}{x - m}$.

- a) Đạo hàm $y' = \frac{x^2 - 2mx + m^2 - 1}{(x - m)^2}$.
- b) Hàm số đã cho luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.
- c) Hàm số đã cho luôn có cực đại và cực tiểu.
- d) Với $m = 0$, ta có $x_{CB} - x_{CT} = 2$.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - (m+3)x}{-x + m - 2}$ có đồ thị (C) .

- a) Với $m = 0$, ta có đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = \frac{-x^2 - 4x + 6}{(x + 2)^2}$.
- b) Với $m = 1$, hàm số đã cho đồng biến trên tập $(-1 - \sqrt{5}; -1) \cup (-1; -1 + \sqrt{5})$.
- c) Với $m = -3$, đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị có tọa độ nguyên.
- d) Với $m \geq 2$, hàm số đã cho nghịch biến trên 2 khoảng xác định.

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m+2)x^2 + mx - 7$. Biết tập các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là $[a; b]$. Tính $S = a^2 - b^2$.

ĐS:

Câu 2: Tập các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (m+3)x - 5 + m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ chứa bao nhiêu số nguyên?

ĐS:

Câu 3: Cho hàm số $y = (m-1)x^3 + (m-1)x^2 + x + m$. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tính tổng bình phương các phần tử của S .

ĐS:

Câu 4: Tổng tất cả các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y = \sin 2x - mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là bao nhiêu?

ĐS:

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{2mx+3}{mx+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

ĐS:

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{m^2x-2}{(m+1)x-1}$. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Tính tổng bình phương các phần tử của S .

ĐS:

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{mx+2025}{x+m}$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số trên nghịch biến trên mỗi khoảng xác định?

ĐS:

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (2m+3)x - m^2 + 17m}{x+m}$. Biết tập hợp các giá trị của m để hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định là $(-\infty; a] \cup [b; +\infty)$. Tính giá trị biểu thức $T = \frac{2030(a+1)}{b}$.

ĐS:

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (m+1)x - m - 6}{x-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định?

ĐS:

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m}{-mx + 1}$. Biết tập tất cả các giá trị của m để hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng xác định là đoạn $\left[a; \frac{1+\sqrt{b}}{2} \right]$ với $a, b \in \mathbb{N}$. Tính $T = a^2 + b^2$.

ĐS:

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ (tiếp theo)**A. LÝ THUYẾT**

DẠNG TOÁN: TÌM THAM SỐ m ĐỂ HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN HOẶC NGHỊCH BIẾN TRÊN KHOẢNG, ĐOẠN, NỬA KHOẢNG K

Phương pháp tổng quát:

Đối với các hàm số sơ cấp $y = f(x)$, nói chung ta có:

- Hàm số đồng biến (tăng) trên $K \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in K$.
- Hàm số nghịch biến (giảm) trên $K \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in K$.

Phương pháp hàm số (phương pháp cô lập tham số m): dựa vào việc tìm GTLN, GTNN của một hàm số $g(x)$ trên K để tìm điều kiện cho m : Chỉ áp dụng cho các bài cô lập được tham số m trong điều kiện $y' \geq 0, \forall x \in K$ hoặc $y' \leq 0, \forall x \in K$.

Bước 1: Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.

Bước 2: Cô lập (tách) m (hay biểu thức chứa m) ra khỏi biến x và chuyển m về một vế. Đặt vế còn lại là $g(x)$.

Bước 3: Lập bảng biến thiên của $g(x)$.

Bước 4: Kết luận: Theo quy tắc “Lớn hơn hoặc bằng số lớn – Nhỏ hơn hoặc bằng số nhỏ”.

DẠNG TOÁN: TÌM m ĐỂ HÀM SỐ BẬC BA ĐỒNG BIẾN HOẶC NGHỊCH BIẾN TRÊN KHOẢNG, ĐOẠN, NỬA KHOẢNG K

Xét hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

Ta có $y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Trường hợp 1: Cô lập được tham số m : Sử dụng phương pháp này.

Trường hợp 2: Không cô lập được tham số m :

TH1: $\Delta \leq 0$: Khi đó y' cùng dấu với a .

Tức là:

Nếu $a > 0$ thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên K .

Nếu $a < 0$ thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số nghịch biến trên K .

TH2: $\Delta > 0$: Khi đó $y' = f'(x)$ có 2 nghiệm x_1, x_2 và đổi dấu khi qua 2 nghiệm.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f'(x)$	cùng dấu với a	0	trái dấu với a	0	cùng dấu với a

Dựa vào đề bài, so sánh x_1, x_2 với số $a \in \mathbb{R}$ để tìm ra m .

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và số $a \in \mathbb{R}$. Khi đó:

$$\begin{aligned} \bullet \quad x_2 > x_1 > a &\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - a) \cdot (x_2 - a) > 0 \\ x_1 + x_2 > 2a \end{cases} & \bullet \quad x_1 < x_2 < a &\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - a) \cdot (x_2 - a) > 0 \\ x_1 + x_2 < 2a \end{cases} \\ \bullet \quad x_1 < a < x_2 &\Leftrightarrow (x_1 - a) \cdot (x_2 - a) < 0 \end{aligned}$$

DẠNG TOÁN: TÌM m ĐỂ HÀM SỐ PHÂN THỨC $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$) ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN TRÊN KHOẢNG, ĐOẠN, NỬA KHOẢNG K

$$\text{Hàm số đồng biến trên } K \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in K \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc > 0 \\ -\frac{d}{c} \notin K \end{cases};$$

$$\text{Hàm số nghịch biến trên } K \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in K \Leftrightarrow \begin{cases} ad - bc < 0 \\ -\frac{d}{c} \notin K \end{cases}.$$

DẠNG TOÁN: TÌM m ĐỂ HÀM SỐ PHÂN THỨC $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$) ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN TRÊN KHOẢNG, ĐOẠN, NỬA KHOẢNG K

$$\text{Ta có đạo hàm } y' = \frac{am.x^2 + 2an.x + bn - mc}{(mx + n)^2}. \text{ Đặt } g(x) = am.x^2 + 2an.x + bn - mc.$$

$$\text{Hàm số đồng biến trên } K \Leftrightarrow \begin{cases} y' \geq 0, \forall x \in K \\ -\frac{n}{m} \notin K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} am.x^2 + 2an.x + bn - mc \geq 0, \forall x \in K \\ -\frac{n}{m} \notin K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} am > 0 \\ \Delta_{g(x)} \leq 0; \\ -\frac{n}{m} \notin K \end{cases}$$

$$\text{Hàm số nghịch biến trên } K \Leftrightarrow \begin{cases} y' \leq 0, \forall x \in K \\ -\frac{n}{m} \notin K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} am.x^2 + 2an.x + bn - mc \leq 0, \forall x \in K \\ -\frac{n}{m} \notin K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} am < 0 \\ \Delta_{g(x)} \leq 0. \\ -\frac{n}{m} \notin K \end{cases}$$

Trường hợp 1: Cô lập được tham số m : Sử dụng phương pháp này.

Trường hợp 2: Không cô lập được tham số m :

TH1: Hàm số đồng biến (hoặc nghịch biến) trên từng khoảng xác định (khi đó nó sẽ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên tập K).

TH2: Hàm số có 2 điểm cực trị x_1, x_2 . Lập bảng biến thiên, so sánh x_1, x_2 với số $a \in \mathbb{R}$ để tìm ra m .

Ví dụ 1: Tìm tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (m+1)x + 4m$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Ví dụ 2: Tìm tham số m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 - (m+1)x + 1$ đồng biến trên đoạn $[0; 2]$.

Ví dụ 3: Tìm tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m-2)x^2 - m(m-3)x - \frac{1}{3}$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Ví dụ 4: Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Ví dụ 5: Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{(m+1)x+2m+2}{x+m}$ nghịch biến trên $(-1; +\infty)$.

Ví dụ 6: Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{2x^2 + (m+1)x + 2m-1}{x+1}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Ví dụ 7: Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx + m}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

DẠNG TOÁN: TÌM m ĐỂ HÀM SỐ BẬC BA ĐƠN ĐIỆU TRÊN KHOẢNG (ĐOẠN) CÓ ĐỘ DÀI ĐÚNG BẰNG SỐ k

Tìm tập xác định D . Tính đạo hàm y' . Tính Δ và xét 2 trường hợp $\Delta \leq 0$ và $\Delta > 0$.

Chú ý: $|x_1 - x_2| = k \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = k^2$, sử dụng định lý Vi-ét đưa về phương trình theo m .

Ví dụ 1: Tìm m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ nghịch biến trên khoảng có độ dài đúng bằng 1.

Ví dụ 2: Tìm m để hàm số $y = -x^3 + x^2 - (2-m)x + 1$ đồng biến trên đoạn có độ dài đúng bằng 2.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1: Xác định giá trị của tham số m để hàm số:

a) $y = x^3 + 3x^2 + (m+1)x + 4m$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

b) $y = \frac{x^3}{3} + (m+1)x^2 - (m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

c) $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

d) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - m + 2$ nghịch biến trong khoảng $(-2; 0)$.

□ $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m^2 - m$ đồng biến trên nửa khoảng $[2; +\infty)$.

Câu 2: Xác định giá trị của tham số m để hàm số:

a) $y = \frac{(m+3)x+3m-1}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

b) $y = \frac{(m+2)x-3}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; 4)$.

Câu 3: Xác định giá trị của tham số m để hàm số:

a) $y = \frac{x^2 + m^2x + m - 2}{x + 1}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

b) $y = \frac{mx^2 - (m + 2)x + m^2 - 2m + 2}{x - 1}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Câu 4: Xác định giá trị của tham số m để hàm số:

a) $y = -x^3 + m^2x^2 + mx + 3m + 5$ đồng biến trên đoạn có độ dài đúng bằng 3.

b) $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ nghịch biến trên một khoảng có độ dài đúng bằng 1.

c) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + 2mx - 3m + 1$ nghịch biến trên một khoảng có độ dài bằng 3.

d) $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m - 1)x^2 + (m + 3)x - 4$ đồng biến trên một khoảng có độ dài đúng bằng 4.

□) $y = x^3 - 3m^2x^2 + x + m - 1$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Tất cả giá trị của m để hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ là:

A. $m \geq 0$. B. $m \leq 0$. C. $m \geq 12$. D. $m \leq 12$.

Câu 2: Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m - 1)x - m + 2$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

A. $m < -\frac{1}{2}$. B. $m \leq -\frac{1}{2}$. C. $m > 1$. D. $m = 0$.

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị tham số m để hàm số $y = x^3 + (1 - 2m)x^2 + (2 - m)x + m + 2$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $m \leq -\frac{7}{4}$. B. $m \leq -1$. C. $m \leq 2$. D. $m \leq \frac{5}{4}$.

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m - 1)x^2 + (m + 3)x - 10$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.

A. $m = 0$. B. $m \leq \frac{12}{7}$. C. $m \geq \frac{12}{7}$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 5: Tập tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m - 6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ là:

A. $(-\infty; 3)$. B. $(-\infty; 3]$. C. $[3; 6]$. D. $(-\infty; 6]$.

- Câu 6:** Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x - 3$ đồng biến trên $(3; +\infty)$. Số phần tử của tập S là:
- A. 6. B. 2. C. 1. D. 3.
- Câu 7:** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 6mx + m$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- A. $m \leq -\frac{1}{4}$. B. $m \geq \frac{1}{4}$. C. $m \geq 2$. D. $m \geq 0$.
- Câu 8:** Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-20; 20)$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?
- A. 21. B. 20. C. 40. D. 11.
- Câu 9:** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{x+1}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- A. $0 \leq m < 1$. B. $m = -2$. C. $m \geq 2$. D. $m \leq -2$.
- Câu 10:** Tìm m để hàm số $y = \frac{mx+7m-8}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
- A. $-8 < m \leq 1$. B. $-8 < m < 1$. C. $\frac{4}{5} < m \leq 3$. D. $\frac{4}{5} < m < 3$.
- Câu 11:** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx-9}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
- A. $2 < m < 3$. B. $2 \leq m < 3$. C. $m < 2 \vee m > 3$. D. Không có giá trị m .
- Câu 12:** Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên m để hàm số $y = \frac{m^2x+5}{2mx+1}$ nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$. Tính tổng T các phần tử trong S .
- A. $T = 35$. B. $T = 40$. C. $T = 45$. D. $T = 50$.
- Câu 13:** Tìm m để hàm số $y = \frac{mx-2}{x-m-1}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- A. $m < -2$. B. $m < 2$. C. $m \leq -2$. D. $m \leq 2$.
- Câu 14:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- A. $0 < m \leq 1$. B. $0 < m < 1$. C. $m > 1$. D. $0 \leq m < 1$.
- Câu 15:** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{m - \sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$.
- A. $m \geq 1$. B. $m \leq \frac{3}{2}$. C. $m \leq \sqrt{2}$. D. $m \leq \frac{5}{4}$.
- Câu 16:** Tìm tất cả các giá trị của m sao cho hàm số $y = \frac{m \cos x - 4}{\cos x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$.

A. $m > 2$.

B. $m < -2$.

C. $m > 2$ hoặc $m < -2$.

D. $m \geq 2$ hoặc $m \leq -2$.

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị của m sao cho hàm số $y = \frac{-2\sin x - 1}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

A. $m \geq -\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{1}{2} < m < 0$ hoặc $m > 1$.

C. $-\frac{1}{2} < m \leq 0$ hoặc $m \geq 1$.

D. $m > -\frac{1}{2}$.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $m \leq 0 \vee 1 \leq m < 2$.

B. $m \leq 0$.

C. $1 \leq m < 2$.

D. $m \geq 2$.

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{\ln x - 6}{\ln x - 2m}$ đồng biến trên khoảng $(1; e)$?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Câu 20: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx^2 + (1-m)x + 2m}{2x-3}$ đồng biến trên nửa khoảng $[4; +\infty)$.

A. $m \leq \frac{3}{7}$.

B. $m \geq \frac{3}{7}$.

C. $m > -\frac{3}{7}$.

D. $m \leq -\frac{3}{7}$.

Câu 21: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{-2x^2 - 3x + m}{2x+1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

A. $m < 1$.

B. $m \leq 1$.

C. $m > -1$.

D. $m \geq -1$.

Câu 22: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{2x^2 + mx + 2 - m}{x + m - 1}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $m < -\sqrt{2} \vee m = 2$.

B. $m \leq 2$.

C. $m > -\sqrt{2}$.

D. $m \leq -\sqrt{2} \vee m \geq 2$.

Câu 23: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + 5x + m^2 + 6}{x+3}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 9.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 24: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{\cos^2 x + m}{\cos x + 1}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

A. $m > 3$.

B. $m \leq 9$.

C. $m < 9$.

D. $m \geq 3$.

Câu 25: Hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ nghịch biến trên một khoảng có độ dài đúng bằng 1 với:

A. $m = \frac{9}{4}$.

B. $m = -\frac{9}{4}$.

C. $m = \frac{9}{2}$.

D. $m = -\frac{9}{2}$.

Câu 26: Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 + 4x + 7$ có độ dài khoảng nghịch biến đúng bằng $2\sqrt{5}$.

A. $m = -2, m = 4$.

B. $m = 1, m = 3$.

C. $m = 0, m = -1$.

D. $m = 2, m = -4$.

Câu 27: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 2m - 3$ đồng biến trên một khoảng có độ dài lớn hơn 1.

A. $m \geq 0$.

B. $m \leq 0$.

C. $-\frac{5}{4} < m < 0$.

D. $m > -\frac{5}{4}$.

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ giảm trên đoạn có độ dài lớn nhất bằng 2.

A. $m = 0$.

B. $0 \leq m < 3$.

C. $m = 2$.

D. $m > 3$.

Câu 29: Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 6x^2 + mx + 5$ đồng biến trên một khoảng có độ dài đúng bằng 1.

A. $m = -\frac{45}{4}$.

B. $m = -\frac{25}{4}$.

C. $m = -12$.

D. $m = \frac{2}{5}$.

Câu 30: Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^4 + (2m-3)x^2 + m$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ là $\left[-\infty; \frac{p}{q}\right]$, trong đó phân số $\frac{p}{q}$ tối giản và $q > 0$. Khi đó tổng $p + q$ bằng:

A. 5.

B. 9.

C. 7.

D. 3.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1: Cho hàm số $y = 2x^3 - 2x^2 + mx + 3$.

a) Khi $m = 1$, hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Hàm số đã cho luôn có 2 điểm cực trị.

c) Không có giá trị nào của m để hàm số đã cho luôn nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

d) Hàm số đã cho luôn đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $m \geq -2$.

Câu 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx + 1$ có đồ thị (C) .

a) Hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $m \leq 0$.

b) Hai điểm cực trị của (C) nếu có luôn nằm về 2 phía so với trục tung.

c) Với $m = 9$, hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-3; 3)$.

d) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ khi và chỉ khi $m \geq 3$.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{mx^3}{3} + 7mx^2 + 14x - m + 2$.

- a) Khi $m = 1$, hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.
- b) Khi $m = -\frac{7}{60}$, hàm số có cực tiểu là $y_{CT} = \frac{2899}{60}$.
- c) Có duy nhất một giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- d) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $m \in \left(-\infty; -\frac{14}{15}\right]$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$.

- a) Khi $m > 2025$, hàm số đã cho đồng biến trên 2 khoảng của tập xác định.
- b) Hàm số đã cho luôn đi qua điểm $A(2; 2)$.
- c) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $-2 < m < 2$.
- d) Không có giá trị nào của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2025)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{3x+1}-8}{\sqrt{3x+1}+m}$.

- a) Đặt $t = \sqrt{3x+1}$, hàm số đã cho trở thành $y = \frac{t-8}{t+m}$ với $t \in (0; +\infty)$.
- b) Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m < -8$.
- c) Không có giá trị nào của m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- d) Có 17 giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 5)$.

Câu 6: Tìm m để hàm số $y = \frac{2\cos x + 1}{\cos x - m}$.

- a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = \frac{-2m-1}{(\cos x - m)^2}$.
- b) Đặt $t = \cos x$, hàm số đã cho trở thành $y = \frac{2t+1}{t-m}$ với $t \in [-1; 1]$.
- c) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi hàm số $y = \frac{2t+1}{t-m}$ nghịch biến trên đoạn $[0; 1]$.
- d) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$ khi và chỉ khi $m \geq 1$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - mx + 2m$ có đồ thị (C) .

- a) Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khi $m > -4$.
- b) Với $m = -3$, đoạn thẳng AB có độ dài bằng $2\sqrt{13}$ với A, B là 2 điểm cực trị của (C) .
- c) Với $m \leq 5$, hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; 2025)$.
- d) Hàm số đã cho nghịch biến trên một đoạn có độ dài đúng bằng 1 đơn vị khi $m = -\frac{15}{4}$.

Câu 8: Cho hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (m+1)x + 2$.

- a) Với $m = 0$, hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
- b) Đạo hàm y' có biệt thức $\Delta' = 36m^2 + 33m + 6$.
- c) Không có giá trị nào của m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- d) Có duy nhất 1 giá trị của m để hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn có độ dài đúng bằng 2 đơn vị.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + (m-1)x}{x-1}$.

- a) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = \frac{-x^2 - 2x + m - 1}{(x-1)^2}$.
- b) Không có giá trị nào của m để hàm số đã cho đồng biến trên 2 khoảng xác định.
- c) Khi $m = -2$, đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực trị có tọa độ nguyên.
- d) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 1)$ khi và chỉ khi $m \leq 1$.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + m - 2}{x + 1}$ có đồ thị (C) .

- a) Khi $m = 7$, khoảng cách giữa 2 điểm cực trị của đồ thị (C) bằng $2\sqrt{5}$.
- b) Với $m \leq 3$ thì hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định.
- c) Có 2 giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[0; 20]$ để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-3; 3)$.
- d) Có 39 giá trị nguyên không âm của m để hàm số đã cho đồng biến trên nửa khoảng $[5; +\infty)$.

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Biết hàm số $f(x) = x^3 - 2mx^2 + x$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ khi và chỉ khi $m \geq \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S = a^2 + b^2$.
ĐS:

Câu 2: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x - 3$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$. Số phần tử của tập S là bao nhiêu?

ĐS:

Câu 3: Biết tập tất cả các giá trị của m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m - 9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ là $\left(-\infty; -\frac{a}{b}\right]$. Tính giá trị $T = 2025b - 2026a$.

ĐS:

Câu 4: Biết tập tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$ có dạng $(-\infty; a] \cup [b; +\infty)$. Tính giá trị $P = \frac{a}{b}$.

ĐS:

Câu 5: Biết tập các giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx + 4}{x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ là nửa khoảng $(a; b]$. Tính $S = a + b$.

ĐS:

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{x + 6}{x + 5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10; +\infty)$?

ĐS:

Câu 7: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên không âm của m để hàm số $y = \frac{\ln x - 10}{\ln x - m}$ đồng biến trên khoảng $(1; e^3)$. Số phần tử của S là bao nhiêu?

ĐS:

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2; 25]$ để hàm số $y = \frac{x^2 + 5x - m - 1}{5x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(1; 4)$?

ĐS:

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $x + 5 + \frac{1 - m}{x - 2}$ đồng biến trên nửa khoảng $[5; +\infty)$?

ĐS:

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2025; 2025]$ để hàm số $-x + 3 + \frac{m - 2}{x + 1}$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

ĐS:

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ (tiếp theo)**A. LÝ THUYẾT****DẠNG TOÁN: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ BẬC BA CÓ THAM SỐ**

Cực trị của hàm số bậc ba (C): $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

Đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Ta có $\Delta = 4b^2 - 12ac$ ($\Delta' = b^2 - 3ac$).

Hàm số bậc ba hoặc có 2 cực trị hoặc không có cực trị.

Hàm số có cực trị		Hàm số không có cực trị			
$y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt		$y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm			
$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$		$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$			
$\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$		$\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$			
Hàm số có 2 cực trị (1 cực đại và 1 cực tiểu)		Hàm số luôn đồng biến (nếu $a > 0$) (hoặc luôn nghịch biến (nếu $a < 0$)) trên $\mathbb{R}$			
$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
					

Chú ý: Nếu hệ số a có chứa tham số m chưa chắc khác 0 thì ta cần xét thêm trường hợp $a = 0$.

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của (C): $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

Khi hàm số có 2 điểm cực trị, chia y cho y' ta được dư là $ax + b$. Khi đó $\Delta: y = ax + b$ là đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của (C).

Hoặc nhớ công thức sau: $\Delta: y = \frac{2}{3} \left(c - \frac{b^2}{3a} \right) x + d - \frac{bc}{9a}$.

Điều kiện để hàm số đạt cực trị tại một điểm

Đối với hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$), ta có:

- $\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0$ là điểm cực tiểu của hàm số.
- $\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0$ là điểm cực đại của hàm số.

Ví dụ 1: Tìm m để hàm số $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$ có cực đại, cực tiểu.

Ví dụ 2: Tìm m để hàm số $y = x^3 - 2mx + 4$ không có điểm cực trị.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m^2 - 1)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Ví dụ 4: Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - 3mx + 5$ đạt cực đại tại $x = -3$.

Ví dụ 5: Tìm m để hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m - 3)x + 5$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 4$.

Ví dụ 6: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$ có 2 điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 48.

Ví dụ 7: Xác định tọa độ 2 điểm cực trị và viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ (C).

Ví dụ 8: Viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 6x + 4$ (C).

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số:

a) $y = \frac{x^3}{3} - (m - 1)x^2 + mx + 5$ có 2 điểm cực trị.

b) $y = x^3 + mx^2 + (4m + 3)x + 2m - 1$ có 2 điểm cực trị.

c) $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ có cực tiểu và cực đại.

d) $y = (m + 1)x^3 - x^2 + x$ không có cực trị.

e) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3(m + 1)x + m - 1$ không có điểm cực trị.

Câu 2: Tìm tất cả giá trị của m để hàm số:

a) $y = -x^3 + (m + 3)x^2 - (m^2 + 2m)x - 2$ đạt cực đại tại $x = 2$.

b) $y = x^3 - 3mx^2 + (m^2 - 1)x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

c) $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại $x = 1$.

d) $y = x^3 - mx^2 + 2(m + 1)x - 1$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Câu 3: Tìm tất cả giá trị của m để:

a) Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$ có 2 điểm cực trị là $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ thỏa mãn $x_A^2 + x_B^2 = 2$.

b) Hàm số $y = x^3 - 3mx + 1$ có 2 cực trị và giá trị cực đại bằng 3.

c) Hàm số $y = 2x^3 + mx^2 - 12x - 13$ có 2 điểm cực trị cách đều trục tung.

d) Hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ có 2 cực trị x_1, x_2 thỏa $x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$.

Câu 4: Tìm tất cả giá trị của m để:

a) Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 1$ có 2 điểm cực trị tạo với $A(2; 3)$ tam giác cân tại A .

b) Đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx$ có 2 điểm cực trị A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với $d: y = x + 2$.

c) Đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ có điểm cực đại và cực tiểu cách đều gốc tọa độ O .

d) Đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3(m-3)x^2 - 3m + 11$ có 2 điểm cực trị A và B sao cho A, B, N thẳng hàng với $N(2; -1)$.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$). Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số có 2 cực trị khi $b^2 - 3ac > 0$. B. Hàm số có 2 cực trị khi $b^2 - 4ac > 0$.
C. Hàm số không có cực trị khi $b^2 - 3ac < 0$. D. Hàm số không có cực trị khi $b^2 - 4ac < 0$.

Câu 2: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a.c < 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số không có cực trị. B. Hàm số có 1 điểm cực trị.
C. Hàm số có 2 điểm cực trị. D. Hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 3: Đường thẳng qua điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - x + m$ đi qua điểm $M(3; -1)$ khi m bằng:

- A. 1. B. -1. C. 0. D. $\frac{5}{3}$.

Câu 4: Viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$.

- A. $2x + 3y + 9 = 0$. B. $2x + 3y - 6 = 0$. C. $2x - 3y + 9 = 0$. D. $-2x + 3y + 6 = 0$.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m+6)x - (2m+1)$ có 2 điểm cực trị.

- A. $-2 \leq m \leq 3$. B. $m \leq -2$ hoặc $m \geq 3$.
C. $m < -2$ hoặc $m > 3$. D. $-2 < m < 3$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (2m-1)x - 1$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $\forall m < 1$ thì hàm số có 2 điểm cực trị. B. Hàm số luôn có cực đại và cực tiểu.

C. $\forall m \neq 1$ thì hàm số có cực đại và cực tiểu. D. $\forall m > 1$ thì hàm số có cực trị.

Câu 7: Hàm số $y = x^3 + mx + 2$ không có cực trị khi:

A. $m < 0$. B. $m > 0$. C. $m \geq 0$. D. $m \leq 0$.

Câu 8: Cho hàm số $y = (m-2)x^3 - mx - 2$. Với giá trị nào của m thì hàm số không có cực trị?

A. $0 < m < 2$. B. $m < 1$. C. $0 \leq m \leq 2$. D. $m > 1$.

Câu 9: Tìm tất cả m để hàm số $y = mx^3 - 3(m-1)x^2 + 3(m+1)x + m$ có cực đại.

A. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \setminus \{0\}$. B. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$. C. $m > \frac{1}{3}$. D. $m < 1$.

Câu 10: Tất cả giá trị m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1$ có cực tiểu là:

A. $m < 1$. B. $m > 1$. C. $m \neq 1$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$. Tìm tất cả giá trị của m để hàm số có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 2$.

A. $m = 0$. B. $m = \pm 1$. C. $m = \pm 3$. D. $m = 2$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + (m-1)x$. Với giá trị nào của m thì hàm số đạt cực đại tại $x = 1$?

A. $m > 2$. B. $m = 2$. C. $m < 2$. D. $m \neq 2$.

Câu 13: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x + 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

A. $m = 1$. B. $m = 0$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

Câu 14: Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1-m^2)x + m^3 - m^2$. Phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

A. $y = -2x - m^2 + m$. B. $y = 2x - m^2 + m$. C. $y = 2x - m^2$. D. $y = -2x - m^2$.

Câu 15: Gọi x_1, x_2 là 2 điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$. Giá trị của m để $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$ là:

A. $m = 0$. B. $m = \pm \frac{9}{2}$. C. $m = \pm \frac{1}{2}$. D. $m = \pm 2$.

Câu 16: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

A. $m = -1$. B. $m = 1$. C. $m = -3$. D. $m = 3$.

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + (m-1)x + 2$ có 2 điểm cực trị đều nằm bên trái trục tung.

- A. $1 < m < 2$. B. $m > 1$. C. $m < 2$. D. $m < 1$.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (6m^2 - 3)x$ đạt cực trị tại $x = 1$.

- A. Không có giá trị nào của m . B. $m = 0$.
C. $m = 1$. D. $m = 0$ hoặc $m = 1$.

Câu 19: Cho hàm số $y = x^3 + x^2 + mx + 1$. Tất cả các giá trị của m để hàm số có 2 điểm cực trị nằm về 2 phía của trục tung là:

- A. $m > 0$. B. $m \geq \frac{1}{3}$. C. $m \leq \frac{1}{3}$. D. $m < 0$.

Câu 20: Tìm tất cả m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(m^2 - 1)x$ đạt cực tiểu tại $x_0 = 2$.

- A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m \neq \pm 1$. D. $m = \pm 1$.

Câu 21: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$. Tìm tham số m để hàm số có giá trị cực đại bằng 2.

- A. $m = 2$. B. $m = -2$. C. $m = -4$. D. $m = 0$.

Câu 22: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

- A. $m = 2$. B. $m = 5$. C. $m = 3$. D. $m = 1$.

Câu 23: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - m$ có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu.

- A. $m = -1, m = 0$. B. $m < 0, m > -1$. C. $-1 < m < 0$. D. $0 \leq m \leq 1$.

Câu 24: Để các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx - 5$ có hoành độ dương thì giá trị của m là:

- A. $-3 < m < -2$. B. $2 < m < 3$. C. $-1 < m < 1$. D. $-2 < m < 2$.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 = 2$.

- A. $m = 2$. B. $m = \pm 3$. C. $m = \pm 1$. D. $m = 0$.

Câu 26: Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có 2 điểm cực trị A, B thỏa $AB = \sqrt{20}$.

- A. $m = \pm 1$. B. $m = \pm 2$. C. $m = 1$ hoặc $m = 2$. D. $m = 1$.

Câu 27: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+2)x^2 + (m^2 + 4m + 3)x + 6m + 9$ (C). Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số (C) có cực đại tại x_1 , cực tiểu tại x_2 sao cho $x_1^2 = x_2$.

- A. $m = 1$. B. $m = -2$. C. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$. D. $m \in \emptyset$.

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3mx + 1$ có 2 điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O (với O là gốc tọa độ).

- A. $m = \frac{3}{2}$. B. $m = -\frac{1}{2}$. C. $m = 1$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Câu 29: Cho hàm số $y = x^3 + (m+3)x^2 - (2m+9)x + m+6$ có đồ thị (C) . Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (C) có 2 điểm cực trị A, B và khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng AB lớn nhất.

- A. $m = -6 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$. B. $m = -3 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$. C. $m = -3 \pm 6\sqrt{2}$. D. $m = -6 \pm 6\sqrt{2}$.

Câu 30: Tìm tất cả các giá trị của m để điểm $M(2m^3; m-1)$ cùng với 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $(C): y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x$ tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = 0$. D. $m = -1$.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 + 2x^2 + (m-3)x + m$ có đồ thị (C) .

- a) Hàm số đã cho không có cực trị khi và chỉ khi $m > \frac{13}{3}$.
 b) Khi $m = -4$, đồ thị hàm số có 1 điểm cực trị có tọa độ nguyên.
 c) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -2$ khi $m = 1$.
 d) Khi $m = 3$ thì đồ thị (C) có 2 điểm cực trị thẳng hàng với điểm $M(9; -5)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + m$ có đồ thị (C) .

- a) Khi $m < 3$, hàm số đã cho luôn có cực trị.
 b) Với mọi giá trị của m , hàm số đã cho không có điểm cực trị $x = 1$.
 c) Nếu $x = 0$ là điểm cực đại của hàm số đã cho thì giá trị cực tiểu của hàm số là $y = -4$.
 d) Điểm $A(1; 3)$ và 2 điểm cực trị của (C) thẳng hàng khi $m = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ tối giản. Khi đó $a+b=7$.

Câu 3: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx + 1$ có đồ thị (C) và điểm $A(2; 3)$.

- a) Với $m = 1$, đồ thị (C) đi qua điểm A .
 b) Với $m \geq 0$, đồ thị (C) luôn có 2 điểm cực trị nằm về 2 phía so với trục tung.
 c) Với $m = 4$, đồ thị (C) có 2 điểm cực trị có tọa độ nguyên.
 d) Có 1 giá trị nguyên của m để (C) có 2 điểm cực trị B và C thỏa tam giác ABC cân tại A .

Câu 4: Cho hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x - 2$.

- a) Với $m = 0$, hàm số đã cho không có cực trị.
- b) Hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 1$ khi và chỉ khi $m = 3$ hoặc $m = 1$.
- c) Hàm số đã cho có thể có điểm cực trị $x = 0$.
- d) Trong trường hợp hàm số có cực trị, nó luôn có một giá trị cực trị là -2 .

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - mx^2 + (m^2 - 1)x + 1$ có đồ thị (C) .

- a) Hàm số đã cho luôn có 2 điểm cực trị.
- b) Có 3 giá trị nguyên của m để (C) có 2 điểm cực trị trái dấu.
- c) Có 1 giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 1$.
- d) Hai điểm cực trị của (C) có khoảng cách không đổi.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (m+1)x^2 + (2m^2 + 1)x + m$.

- a) Hàm số đã cho luôn có cực trị.
- b) Không có giá trị nào của m để hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 1$.
- c) Có 18 giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- d) Trong trường hợp hàm số có 2 điểm cực trị thì 2 cực trị của hàm số luôn cùng dấu.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - (3m+2)x + 1$.

- a) Khi $m = -3$, ta có $x_{CT} = -3 - \sqrt{2}$.
- b) Khi $m > -1$, hàm số đã cho có một điểm cực đại cố định.
- c) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $-2 \leq m \leq -1$.
- d) Khi $m < -2$, hàm số đã cho có 2 điểm cực trị cùng dấu.

Câu 8: Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$.

- a) Với $m = 0$, hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- b) Với $m > -\frac{9}{4}$, hàm số đã cho có 2 điểm cực trị trái dấu.
- c) Có 5 giá trị nguyên của m để hàm số không có cực trị.
- d) Trong trường hợp có cực trị, hàm số đã cho luôn có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa $2x_1x_2 = 3 + x_1x_2$.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2 - m)x^3 - 2mx^2 + 3x - 1$.

- a) Với $m = 3$, đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B với độ dài $AB = \sqrt{10}$.
- b) Với $m = 0, m = 1$ thì hàm số đã cho không có cực trị.

- c) Với mọi giá trị dương của m , hàm số luôn có 2 cực trị.
 d) Hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $-3 \leq m \leq 0$.

Câu 10: Cho hàm số $y = mx^3 - x^2 + 3x + m - 2$ có đồ thị (C) .

- a) Với $m = 0$, hàm số đã cho chỉ có 1 điểm cực trị đó là điểm cực tiểu.
 b) Có 9 giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 c) Không có giá trị nguyên dương nào của m để hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.
 d) Với $m = -3$, hàm số đã cho có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa $x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) = -1$.

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Biết đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có 2 điểm cực trị là $A(1; 2)$ và $B(-1; 6)$. Tính $P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

ĐS:

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^2$ có 2 điểm cực trị?

ĐS:

Câu 3: Biết hàm số $y = x^3 - 3x + 1 - m$ có cực đại và cực tiểu trái dấu khi và chỉ khi $m \in (a; b)$. Tính $T = a^2 + b^2$.

ĐS:

Câu 4: Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)x + 5$ đạt cực đại tại $x = 0$.

ĐS:

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m^2 + m + 1)x + 1$. Với giá trị nào của m thì hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$?

ĐS:

Câu 6: Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

ĐS:

Câu 7: Cho hàm số $y = -x^3 + (2m+1)x^2 - (m^2-1)x - 5$. Biết đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị nằm về 2 phía của trục tung khi và chỉ khi $m \in (a; b)$. Tính $T = 2025a + 2026b$.

ĐS:

Câu 8: Biết khi $m = \frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}$; $\frac{a}{b}$ tối giản) thì đường thẳng $d: y = (2m-1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 1$. Khi đó $S = a^2 + b^2$ bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 9: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - (m^2 - 2)x + m^2$ với $m > 0$, có đồ thị (C) . Biết khoảng cách từ điểm $P(3;1)$ đến đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của (C) có giá trị lớn nhất. Khi đó m bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 10: Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C) . Biết đồ thị (C) có 2 điểm cực trị A, B và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ O . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = abc + ab + c$ là bao nhiêu?

ĐS:

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ (tiếp theo)**A. LÝ THUYẾT****DẠNG TOÁN: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG CÓ THAM SỐ****Cực trị hàm số trùng phương (C): $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)**

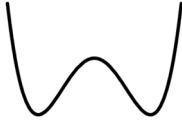
Ta có đạo hàm: $y' = 4ax^3 + 2bx$. Khi đó $y' = 4ax^3 + 2bx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$.

Hàm số trùng phương có 1 điểm cực trị hoặc có 3 điểm cực trị.

Hàm số có 1 điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 1 nghiệm $\Leftrightarrow x^2 = -\frac{b}{2a}$ vô nghiệm hoặc có nghiệm bằng 0

$$\Leftrightarrow -\frac{b}{2a} \leq 0 \Leftrightarrow ab \geq 0.$$

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -\frac{b}{2a} > 0 \Leftrightarrow ab < 0$.

Hàm số có 1 điểm cực trị $\Leftrightarrow ab \geq 0$		Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$	
			
Hàm số có đúng 1 điểm cực trị và điểm cực trị đó là điểm cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$	Hàm số có đúng 1 điểm cực trị và điểm cực trị đó là điểm cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$	Hàm số có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$	Hàm số có 1 điểm cực tiểu và 2 điểm cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$

Lưu ý:

Trường hợp hàm số có 3 điểm cực trị. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}} \end{cases}$.

Với $x = 0 \Rightarrow y = c$ và $x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}} \Rightarrow y = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$ với $\Delta = b^2 - 4ac$.

Vậy đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là $A(0; c)$, $B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, $C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Tính được $AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}$, $BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$.

Một số điều kiện liên quan các điểm cực trị của đồ thị (C): $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

Giả sử đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 điểm cực trị $A(0; c)$, $B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, $C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ tạo thành tam giác ABC thỏa mãn dữ kiện:

Dữ kiện	Công thức thỏa $ab < 0$
1. Tam giác ABC vuông cân tại A	$8a + b^3 = 0$
2. Tam giác ABC đều	$24a + b^3 = 0$
3. Tam giác ABC có góc $\widehat{BAC} = \alpha$	$8a + b^3 \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} = 0$
4. Tam giác ABC có diện tích $S_{\Delta ABC} = S_0$	$32a^3 (S_0)^2 + b^5 = 0$
5. Tam giác ABC có diện tích $\max S = S_0$	$S_0 = \sqrt{-\frac{b^5}{32a^3}}$
6. Tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp $r_{\Delta ABC} = r_0$	$r_0 = \frac{b^2}{4 a \left(1 + \sqrt{1 - \frac{b^3}{8a}}\right)}$
7. Tam giác ABC có độ dài cạnh $BC = m_0$	$am_0^2 + 2b = 0$
8. Tam giác ABC có độ dài $AB = AC = n_0$	$16a^2 n_0^2 - b^4 + 8ab = 0$
9. Tam giác ABC với 2 điểm cực trị $B, C \in Ox$	$b^2 - 4ac = 0$
10. Tam giác ABC có 3 góc nhọn	$b(8a + b^3) > 0$
11. Tam giác ABC có trọng tâm O	$b^2 - 6ac = 0$
12. Tam giác ABC có trực tâm O	$b^3 + 8a - 4ac = 0$
13. Tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R_{\Delta ABC} = R$	$R = \frac{b^3 - 8a}{8 a b}$
14. Tam giác ABC cùng điểm O tạo hình thoi	$b^2 - 2ac = 0$
15. Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3 - 8a - 4abc = 0$
16. Tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp	$b^3 - 8a - 8abc = 0$
17. Tam giác ABC có cạnh $BC = kAB = kAC$	$b^3 \cdot k^2 - 8a(k^2 - 4) = 0$
18. Trục hoành chia tam giác ABC thành 2 phần có diện tích bằng nhau	$b^2 = 4\sqrt{2} ac $
19. Ba điểm cực trị A, B, C cách đều trục hoành	$b^2 - 8ac = 0$

Ví dụ 1: Tìm m để hàm số $y = x^4 - (m-1)x^2 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Ví dụ 2: Tìm m để hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 - 2m - 1$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$. Tìm m để hàm số có 3 điểm cực trị.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = mx^4 + (2m+1)x^2 + 1$. Tìm m để hàm số chỉ có 1 điểm cực trị và điểm cực trị đó là điểm cực tiểu.

Ví dụ 5: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có 3 điểm cực trị tạo thành 3 đỉnh của một tam giác vuông.

Ví dụ 6: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có 3 điểm cực trị là các đỉnh của một tam giác có diện tích bằng 4.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1: Tìm m để:

- Hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ có 3 điểm cực trị.
- Hàm số $y = (m+1)x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$ chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.
- Hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$ có đúng 1 điểm cực trị.
- Hàm số $y = (m-1)x^4 - 3mx^2 + 5$ có cực đại mà không có cực tiểu.
- Hàm số $y = x^4 + (m^2 - 4)x^2 + 3$ có 3 điểm cực trị.

Câu 2: Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{4}(m-1)x^4$ đạt cực đại tại $x = 0$.

Câu 3: Tìm m để đồ thị hàm số $y = mx^4 - 4x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị là các đỉnh của một tam giác vuông cân.

Câu 4: Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 4(m-1)x^2 + 2m - 1$ có 3 điểm cực trị, đồng thời 3 điểm cực trị này tạo thành tam giác đều.

Câu 5: Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(1-m^2)x^2 + m + 1$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích lớn nhất.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Xác định m để đồ thị hàm số $y = mx^4 - m^2x^2 + 2$ có 3 điểm cực trị.

- A. $m < 0$. B. $m > 0$. C. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. D. Không tồn tại m .

Câu 2: Hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - mx^2 + 1$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi:

- A. $m > 0$. B. $m = 0$. C. $m \neq 0$. D. $m < 0$.

Câu 3: Tìm m để hàm số $y = mx^4 + 2(m-1)x^2 + 2$ có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

- A. $m < 0$. B. $0 < m < 1$. C. $m > 2$. D. $1 < m < 2$.

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{9}{8}x^4 + 3(m-2025)x^2 - 2026$ có 3 điểm cực trị.

- A. $m \leq 2026$. B. $m < 2025$. C. $m \geq 2025$. D. $m \geq -2026$.

Câu 5: Với tất cả các giá trị nào của m thì hàm số $y = (m-1)x^4 + (m^2 - 2m)x^2 + m^2$ có 3 điểm cực trị?

- A. $\begin{cases} m < 0 \\ 1 < m < 2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m > 2 \\ 0 < m < 1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m < -1 \\ 1 < m < 2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} -1 < m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = mx^4 + (m-1)x^2 + 1 - 2m$ có đúng 1 cực trị.

- A. $m \in [1; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.
C. $m \in (-\infty; 0]$. D. $m \in [0; 1]$.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = (m-1)x^4 + mx^2 + 2$ có đúng 1 điểm cực trị và đó là điểm cực tiểu.

- A. $m \in [0; 1]$. B. $m \in [1; +\infty)$. C. $m \in (0; +\infty)$. D. $m \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = (m-1)x^4 - 2(m-3)x^2 + 1$ không có cực đại.

- A. $1 \leq m \leq 3$. B. $m \leq 1$. C. $m \geq 1$. D. $1 < m \leq 3$.

Câu 9: Cho hàm số $y = (m-1)x^4 - 3mx^2 + 5$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có cực đại mà không có cực tiểu.

- A. $m \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$. B. $m \in [0; 1]$.
C. $m \in (0; 1)$. D. $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = (m+1)x^4 + 2(m-2)x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị.

- A. $m < -1$. B. $-1 \leq m \leq 2$. C. $-1 < m < 2$. D. $m > 2$.

Câu 11: Cho hàm số $y = mx^4 - (m-1)x^2 - 2$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có 3 điểm cực trị.

- A. $m \leq 1$. B. $0 < m < 1$. C. $m > 0$. D. $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = mx^4 + (m+1)x^2 + 1$ chỉ có 1 điểm cực trị và đó là điểm cực tiểu.

- A. $m > 0 \vee -1 < m < 0$. B. $m \geq 0$. C. $-1 < m < 0$. D. $m > -1$.

Câu 13: Hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 2m + 3$ có đúng 1 điểm cực trị thì giá trị của m là:

- A. $m \geq 2$. B. $m < 2$. C. $m > 2$. D. $m = 2$.

- Câu 14:** Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = (m-1)x^4 - (m^2-2)x^2 + 2025$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.
- A. $m = -2$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = 0$.
- Câu 15:** Để đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2(m+1)x^2 + 3 - m$ có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác vuông thì giá trị của tham số m là:
- A. $m = 2$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. $m = 0$.
- Câu 16:** Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}mx^2$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.
- A. $m = \frac{2}{3}\sqrt[3]{6}$. B. $m = \sqrt[3]{6}$. C. $m = \frac{3}{2}\sqrt[3]{6}$. D. $m = 2\sqrt[3]{6}$.
- Câu 17:** Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 4m - 4$. Xác định giá trị của m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 1.
- A. $m = 1$. B. $m = 3$. C. $m = 5$. D. $m = 7$.
- Câu 18:** Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 3$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác cân.
- A. $m \geq 0$. B. $m = 1$. C. $m > 0$. D. $m < 3$.
- Câu 19:** Đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2mx^2$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác đều khi:
- A. $m = 0$ hoặc $m = 27$. B. $m = 0, m = \sqrt[3]{3}$.
C. $m = \sqrt[3]{3}$. D. $m = 0$.
- Câu 20:** Giá trị của tham số m bằng bao nhiêu để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có 3 điểm cực trị $A(0;1), B, C$ thỏa mãn $BC = 4$?
- A. $m = \pm 4$. B. $m = \sqrt{2}$. C. $m = 4$. D. $m = \pm\sqrt{2}$.
- Câu 21:** Cho hàm số $y = x^4 - 2(1-m^2)x^2 + m + 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành tam giác có diện tích lớn nhất.
- A. $m = -\frac{1}{2}$. B. $m = \frac{1}{2}$. C. $m = 0$. D. $m = 1$.
- Câu 22:** Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ (C) có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh của một tam giác vuông cân.
- A. $m = \pm 1$. B. $m = 1$ hoặc $m = 0$.
C. $m = -1$ hoặc $m = 0$. D. $m = -1$.
- Câu 23:** Cho hàm số $y = x^4 - 2(m^2 - m + 1)x^2 + m - 1$ với m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu, đồng thời khoảng cách giữa 2 điểm cực tiểu ngắn nhất.

A. $m = -\frac{1}{2}$.

B. $m = \frac{1}{2}$.

C. $m = \frac{3}{2}$.

D. $m = -\frac{3}{2}$.

Câu 24: Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - (3m+1)x^2 + 2(m+1)$. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác có trọng tâm là gốc tọa độ.

A. $m = -\frac{2}{3}$.

B. $m = \frac{2}{3}$.

C. $m = -\frac{1}{3}$.

D. $m = \frac{1}{3}$.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

A. $m > 0$.

B. $m < 1$.

C. $0 < m < \sqrt[3]{4}$.

D. $0 < m < 1$.

Câu 26: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m+1)x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$ chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $m < -1$.

B. $-1 \leq m \leq 0$.

C. $m > 1$.

D. $-1 \leq m < 0$.

Câu 27: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị A, B, C thỏa mãn $OA \cdot OB \cdot OC = 12$ với O là gốc tọa độ?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 4.

Câu 28: Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - 4$ có đồ thị là (C_m) . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để 3 điểm cực trị của (C_m) đều nằm trên các trục tọa độ.

A. $m = \pm 2$.

B. $m = 2$.

C. $m > 0$.

D. $m = -2, m > 0$.

Câu 29: Tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(1-m)x^2 + m^2 - 3$ có các điểm cực trị nằm phía trên trục hoành là:

A. $m < 2$.

B. $m \geq \sqrt{3}$.

C. $m > \sqrt{3}$.

D. $m > 2$.

Câu 30: Số giá trị của tham số m để 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 + (6m-4)x^2 + 1-m$ là 3 đỉnh của một tam giác vuông là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1: Cho hàm số $y = x^4 + (m+1)x^2 + 4$ có đồ thị (C) .

a) Với $m = -3$, hàm số có $y_{CT} = 3$.

b) Với $m = 0$, hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

c) (C) có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $m < -1$.

d) Có 2 giá trị nguyên của m để đồ thị (C) có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác vuông.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = mx^4 - (m^2-1)x^2 + 2$ có đồ thị (C) .

- a) Khi $m = 0$, hàm số đã cho có giá trị cực đại bằng 2.
- b) Hàm số đã cho có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi $m \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$.
- c) Có 2 giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số có một cực tiểu và không có cực đại.
- d) Có 2 giá trị của m để đồ thị (C) có 2 điểm cực tiểu thỏa khoảng cách giữa chúng bằng 2.

Câu 3: Cho hàm số $y = mx^4 + (4m - 5)x^2 + \frac{1}{4}$.

- a) Với $m = 1$, hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.
- b) Với $m \leq 0$, hàm số đã cho chỉ có 1 điểm cực đại.
- c) Khi hàm số có $y_{CT} = -\frac{17}{4}$ thì $x_{CT} = \pm 2$.
- d) Có 2 giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực tiểu thuộc trục hoành Ox .

Câu 4: Cho hàm số $y = x^4 + 2(m - 4)x^2 + m + 5$ có đồ thị (C) .

- a) Khi $m = 5$, hàm số đã cho có duy nhất 1 điểm cực đại.
- b) Khi $m = 0$, điểm $M(2; -11)$ là một điểm cực tiểu của đồ thị (C) .
- c) Có 2 giá trị nguyên dương của m để hàm số có giá trị cực tiểu âm.
- d) Có duy nhất một giá trị của m để đồ thị (C) có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

Câu 5: Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 1$.

- a) Khi $m = 2$, hàm số đã cho có y_{CD} và y_{CT} thỏa $|y_{CD} - y_{CT}| = 3$.
- b) Hàm số có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu khi và chỉ khi $m < -3$.
- c) Hàm số đã cho có cực tiểu khi và chỉ khi $|m| > 3$.
- d) Với m là số dương, nếu hàm số chỉ có 1 điểm cực tiểu thì nó không có cực đại.

Câu 6: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$.

- a) Khi $m = 2$, hàm số đã cho có $x_{CT} = \pm 2$.
- b) Hàm số đã cho chỉ có duy nhất 1 điểm cực trị khi và chỉ khi $m < 0$.
- c) Khi hàm số đã cho có 3 điểm cực trị thì các giá trị cực trị này luôn dương.
- d) Có 1 giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị tạo thành 3 đỉnh của một tam giác vuông.

Câu 7: Cho hàm số $y = 2x^4 - 4mx^2 + m - 1$.

- a) Khi $m = 3$, hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.
- b) Với $0 < m < 2$, các điểm cực trị của đồ thị hàm số luôn nằm phía dưới trục hoành.
- c) Tất cả giá trị thực của m để hàm số có cực tiểu mà không có cực đại là $m \leq 1$.

d) Biết với $m = m_0$ thì đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác đều, khi đó $m_0 \in (0;1)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = mx^4 + 2(m^2 - 5)x^2 + 4$.

a) Khi $m = -1$, hàm số có $y_{CT} = 4$.

b) Có đúng 3 số nguyên m thuộc đoạn $[-3;3]$ để hàm số đã cho có duy nhất 1 điểm cực trị.

c) Có 2 số nguyên m để hàm số có 3 điểm cực trị trong đó có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

d) Có duy nhất 1 giá trị của m để hàm số có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác vuông.

Câu 9: Cho hàm số $y = (m+1)x^4 + (3m-10)x^2 + 2$.

a) Có 4 giá trị nguyên của m để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

b) Khi $m = 0$, hàm số đã cho có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu.

c) Khi $m = -2$, đồ thị hàm số có duy nhất 1 điểm cực trị có tọa độ là $(0;2)$.

d) Khi hàm số có $x_{CT} = -1$ thì $y_{CT} < 0$.

Câu 10: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m - 4$ có đồ thị (C) .

a) (C) đi qua điểm $N(-2;0)$ khi $m = 2$.

b) Khi $m = 3$, hàm số có cực đại và cực tiểu thỏa $y_{CD} + y_{CT} = 5$.

c) Khi hàm số có $x_{CT} = \pm 2$ thì $y_{CD} = 4$.

d) Khi $m = 1$, đồ thị (C) có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 2.

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Biết A, B, C là 3 điểm cực trị của đồ thị (C) . Tính diện tích S của tam giác ABC .

ĐS:

Câu 2: Biết đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ qua O và có một điểm cực tiểu là $A(\sqrt{3}; -9)$. Khi đó $T = a + b + c$ bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 3: Biết đồ thị hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có 2 điểm cực trị là $A(0;2)$, $B(2;-14)$. Tính $f(1)$.

ĐS:

Câu 4: Biết đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$ có 3 điểm cực trị là 3 đỉnh của một tam giác có diện tích bằng 4 khi $m = \sqrt[5]{a}$. Khi đó a bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 5: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-5;5]$ để hàm số $y = 2x^4 + (m^2 - 3m - 4)x^2 + m - 1$ có duy nhất 1 điểm cực trị và đó là cực tiểu. Tính số phần tử của tập S .

ĐS:

Câu 6: Cho hàm số $y = (m-1)x^4 + (m^2 + 3m + 2)x^2 + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị?

ĐS:

Câu 7: Cho hàm số $y = x^4 - 2(1-m^2)x^2 + m + 1$. Tìm m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích lớn nhất.

ĐS:

Câu 8: Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m^2 + m$. Tìm m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có một góc bằng 120° .

ĐS:

Câu 9: Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$. Tìm m dương để đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị A, B, C sao cho $OA = BC$, với O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc trục tung, B và C là 2 điểm cực trị còn lại.

ĐS:

Câu 10: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích S thỏa mãn $1 < S < 2026$?

ĐS:

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ (tiếp theo)**A. LÝ THUYẾT****DẠNG TOÁN: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ PHÂN THỨC BẬC 2 TRÊN BẬC 1 CÓ THAM SỐ**

Cực trị của hàm số phân thức $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ (điều kiện $a \neq 0, m \neq 0$)

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$. Đạo hàm $y' = \frac{am.x^2 + 2an.x + bn - mc}{(mx + n)^2}$.

Đặt $g(x) = am.x^2 + 2an.x + bn - mc$.

Hàm số này hoặc không có cực trị hoặc có 2 cực trị (1 cực đại, 1 cực tiểu).

- Hàm số không có cực trị**

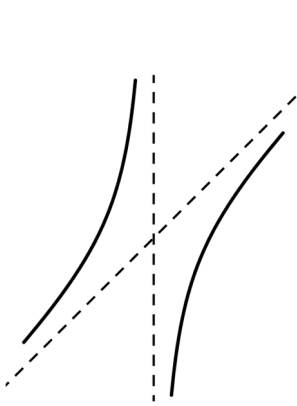
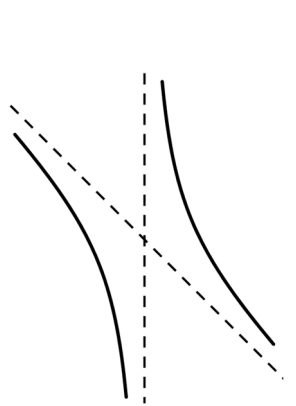
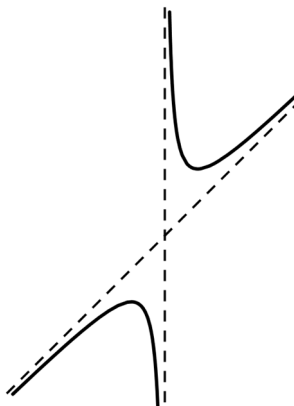
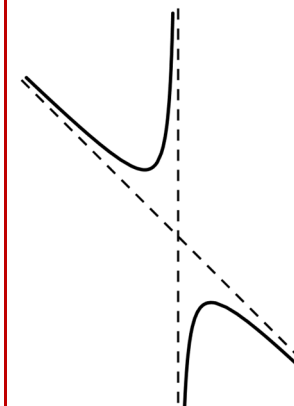
$$\Leftrightarrow g(x) = 0 \text{ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} am \neq 0 \\ \Delta_{g(x)} \leq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định (khi $am > 0$) hoặc nghịch biến trên mỗi khoảng xác định (khi $am < 0$).

- Hàm số có 2 cực trị**

$$\Leftrightarrow g(x) = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt khác } -\frac{n}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} am \neq 0 \\ \Delta_{g(x)} > 0 \\ g\left(-\frac{n}{m}\right) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} am \neq 0 \\ \Delta_{g(x)} > 0 \end{cases}$$

Hàm số không có cực trị		Hàm số có cực trị (2 cực trị: 1 cực đại, 1 cực tiểu)	
$\begin{cases} am > 0 \\ \Delta_{g(x)} \leq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} am < 0 \\ \Delta_{g(x)} \leq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} am > 0 \\ \Delta_{g(x)} > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} am < 0 \\ \Delta_{g(x)} > 0 \end{cases}$
			
$g(x) = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm		$g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt	

Chú ý: Nếu hệ số a và m chưa chắc khác 0 thì ta cần xét thêm các trường hợp $a = 0$ và $m = 0$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số phân thức bậc 2 trên bậc 1

Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$. Khi hàm số có 2 cực trị thì phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị

của đồ thị hàm số đó là $\Delta: y = \frac{2ax + b}{m}$ (đạo hàm tử, đạo hàm mẫu).

Ví dụ 1: Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 3m - 1}{x}$ có cực trị.

Ví dụ 2: Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Ví dụ 3: Tìm m để hàm số $\frac{x^2 - mx + m}{x - m}$ có 2 điểm cực trị trái dấu.

Ví dụ 4: Tìm m để hàm số $\frac{x^2 - mx + 3(m + 2)}{x - 1}$ có cực đại, cực tiểu nằm về 2 phía so với trục Ox .

Ví dụ 5: Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 2m}{x + 1}$ có 2 điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O .

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1: Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 2}{x - m}$ có cực đại và cực tiểu.

Câu 2: Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2 + (2m + 3)x + m^2 + 4m}{x + m}$ có 2 điểm cực trị trái dấu.

Câu 3: Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x + m}{x + 1}$ có 2 điểm cực trị nằm về 2 phía so với trục hoành.

Câu 4: Tìm m để hàm số $\frac{x^2 + (m + 1)x - m + 1}{x - m}$ có cực đại, cực tiểu cùng dấu.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - (3m + 2)x + m + 4}{x - 1}$. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu và hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số có khoảng cách nhỏ hơn 3.

Câu 6: Tìm m để hàm số $y = \frac{(m - 1)x^2 + x + 2}{(m + 1)x + 2}$ có cực đại, cực tiểu và $(y_{CB} - y_{CT})(m + 1) + 8 = 0$.

Câu 7: Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx + 2}{x + 1}$ có cực đại, cực tiểu và khoảng cách từ 2 điểm đó đến đường thẳng $x + y + 2 = 0$ bằng nhau.

Câu 8: Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2 + (m + 2)x + 3m + 2}{x + 2}$ có cực đại, cực tiểu và $y_{CB}^2 + y_{CT}^2 > \frac{1}{2}$.

- Câu 9:** Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x - 1}$ có cực đại, cực tiểu nằm về 2 phía của trục Ox .
- Câu 10:** Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2 + 2mx - 5}{x - 1}$ có cực đại, cực tiểu nằm về 2 phía so với đường thẳng $y = 2x$.
- Câu 11:** Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 - 2(m+1)x + 2(m+3)}{x - 3}$ có cực đại, cực tiểu cùng thuộc góc phần tư thứ (I) trên mặt phẳng tọa độ.
- Câu 12:** Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2 + (m+1)x + 2m - 6}{x + 2m}$ có 2 cực trị cùng dấu.
- Câu 13:** Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + mx - m}{x - 1}$ có 2 điểm cực trị nằm về 2 phía so với đường thẳng $x - 2y - 1 = 0$.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

- Câu 1:** Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$. B. Hàm số có hai cực trị thỏa $y_{CD} < y_{CT}$.
- C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$. D. Giá trị cực tiểu bằng -2 .
- Câu 2:** Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{x - 1}$.
- A. $y = 4x + 1$. B. $y = 2x + 3$. C. $y = 2x - 1$. D. $y = 2x$.
- Câu 3:** Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. Cực tiểu của hàm số bằng -2 . B. Cực tiểu của hàm số bằng 0 .
- C. Cực tiểu của hàm số bằng -1 . D. Cực tiểu của hàm số bằng 2 .
- Câu 4:** Cho hàm số $y = \frac{(x-1)^2}{x-2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. Giá trị cực đại của hàm số bằng 3 . B. Giá trị cực đại của hàm số bằng 4 .
- C. Giá trị cực đại của hàm số bằng 0 . D. Giá trị cực đại của hàm số bằng 1 .
- Câu 5:** Tìm giá trị cực tiểu của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$.
- A. 1 . B. 2 . C. -3 . D. -6 .
- Câu 6:** Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$. Điểm cực đại của đồ thị hàm số là:

- A. $(-1;1)$. B. $(3;9)$. C. $x_{CB} = -1$. D. $x_{CB} = 3$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{-2x^2 + x + 2}{2x + 1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số không có cực trị. B. Cực tiểu của hàm số bằng -6 .
C. Cực đại của hàm số bằng 1 . D. Cực tiểu của hàm số bằng -3 .

Câu 8: Điểm cực tiểu của hàm số $y = \frac{2x^2 + 5x + 4}{x + 2}$ là:

- A. $x = -1$. B. $(-1;1)$. C. $x = -3$. D. $(-3;-7)$.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng 4 . B. Giá trị cực đại của hàm số bằng 2 .
C. Giá trị cực đại của hàm số bằng -2 . D. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -4 .

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x}$. Tính tổng giá trị cực đại y_{CB} và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số.

- A. $y_{CB} + y_{CT} = -4$. B. $y_{CB} + y_{CT} = -2$. C. $y_{CB} + y_{CT} = 0$. D. $y_{CB} + y_{CT} = 2$.

Câu 11: Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y = \frac{x^2 - 4x}{x + 1}$. Tính giá trị của biểu thức $P = x_1 \cdot x_2$.

- A. $P = -5$. B. $P = -2$. C. $P = -1$. D. $P = -4$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x}$ có giá trị cực đại y_1 và giá trị cực tiểu y_2 . Tính $S = y_1 - y_2$.

- A. $S = -1$. B. $S = -5$. C. $S = 4$. D. $S = -4$.

Câu 13: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - ax + b}{x - 1}$. Đặt $A = a - b$, $B = a + 2b$. Tính giá trị của tổng $A + 2B$ để đồ thị hàm số đạt cực đại tại điểm $M(0;-1)$.

- A. 3 . B. 0 . C. 6 . D. 1 .

Câu 14: Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x + 1}$ có hai điểm cực trị thuộc đường thẳng $d: y = ax + b$. Khi đó tích ab bằng:

- A. -8 . B. -6 . C. 4 . D. -4 .

Câu 15: Viết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1}$.

- A. $y = 2x + 2$. B. $y = x + 1$. C. $y = 2x + 1$. D. $y = 1 - x$.

Câu 16: Điều kiện của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 - mx}{1 - x}$ có cực đại và cực tiểu là:

- A. $m < 1$. B. $m > -1$. C. $m < 2$. D. $m > -2$.

Câu 17: Điều kiện của tham số m để hàm số $y = \frac{2x^2 + (m-2)x}{x-1}$ có cực đại và cực tiểu là:

- A. $m < 1$. B. $m > 1$. C. $m < 2$. D. $m > 0$.

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - m - 1}{x + 1}$. Hàm số có cực trị khi và chỉ khi:

- A. $m < 1$. B. $m > 1$. C. $m < 0$. D. $m > 0$.

Câu 19: Biết rằng đồ thị $(C): y = \frac{x^2 + 2x + m}{x - 2}$ có 2 điểm cực trị A, B . Hãy tính khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng AB .

- A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{3}{\sqrt{5}}$. D. $\sqrt{5}$.

Câu 20: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + mx + m^2}{x - 1}$ có 2 điểm cực trị A, B . Khi góc $\widehat{AOB} = 90^\circ$ thì tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng:

- A. $\frac{1}{16}$. B. 8. C. $\frac{1}{8}$. D. 16.

Câu 21: Với tham số m , đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 - mx}{x + 1}$ có 2 điểm cực trị A, B và $AB = 5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $m > 2$. B. $0 < m < 1$. C. $1 < m < 2$. D. $m < 0$.

Câu 22: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - |m|x + 4}{x - |m|}$. Biết rằng đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị phân biệt A, B . Tìm số giá trị m sao cho 3 điểm $A, B, C(4;2)$ phân biệt và thẳng hàng.

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 23: Tìm m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 2$.

- A. $m = -1$. B. $m = -3$. C. $m = 1$. D. $m = 3$.

Câu 24: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + m + 2}{2x - 2m}$. Để hàm số có cực đại và cực tiểu, điều kiện của tham số m là:

- A. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$. B. $-1 < m < 2$. C. $-2 < m < 1$. D. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 1 \end{cases}$.

Câu 25: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có giá trị cực đại là 7.

- A. $m = 7$. B. $m = 5$. C. $m = -9$. D. $m = -5$.

Câu 26: Khoảng cách giữa 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - mx + m}{x - 1}$ bằng:

- A. $2\sqrt{5}$. B. $5\sqrt{2}$. C. $4\sqrt{5}$. D. $\sqrt{5}$.

Câu 27: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$ có cực đại và cực tiểu.

- A. $m < 0$. B. $m = 0$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. $m > 0$.

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + 2}{x - m}$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

- A. Không tồn tại m . B. $m = -1$. C. $m = 1$. D. $m \neq \pm 1$.

Câu 29: Tập tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{x^2 + x + m^2}{x + 1}$ đạt cực đại tại $x = 1$ là:

- A. $\{-2\}$. B. $\{2\}$. C. $\{2; -2\}$. D. $\emptyset$.

Câu 30: Tìm m để hàm số $\frac{x^2 - mx - m + 5}{x - m}$ có cực đại, cực tiểu cùng dấu.

- A. $\begin{cases} m < -2 - 2\sqrt{6} \\ -2 + 2\sqrt{6} < m < 5 \end{cases}$. B. $m < 5$.
C. $-2 - 2\sqrt{6} < m < 5$. D. $-2 - 2\sqrt{6} < m < -2 + 2\sqrt{6}$.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 2}{mx - 1}$.

- a) Khi $m = 0$, hàm số có 1 điểm cực đại.
b) Hàm số có cực trị khi và chỉ khi $-1 \leq m \leq 1$.
c) Có 1 giá trị của m để hàm số có cực đại, cực tiểu với hoành độ thỏa mãn $x_1 + x_2 = 4x_1x_2$.
d) Đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu với hoành độ dương khi và chỉ khi $m > 0$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 4mx + m + 3}{x - 1}$.

- a) Với $m = 1$, hàm số đã cho có $y_{CB} = -4$.
b) Với $m < \frac{4}{3}$, hàm số đã cho không có cực trị.
c) Có 1 giá trị nguyên của m để 2 điểm cực trị A, B của đồ thị hàm số thẳng hàng với gốc tọa độ $O(0;0)$.
d) Có 2 giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực trị A, B thỏa tam giác OAB vuông tại O .

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 3}{x + 1}$.

- a) Với $m = 3$, đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là $A(0;3)$ và $B(-2;-1)$.
- b) Hàm số không có cực trị khi $m \geq 4$.
- c) Có vô số giá trị của m để hàm số đã cho có 2 điểm cực trị cùng dương.
- d) Có 13 giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B nằm về 2 phía so với đường thẳng $2x + y - 1 = 0$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - (5m - 1)x + 3m + 1}{x + 1}$.

- a) Với $m = 2$, đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực trị có tọa độ nguyên.
- b) Trong trường hợp hàm số có 2 điểm cực trị thì 2 điểm cực trị này luôn trái dấu.
- c) Khi đồ thị hàm số đi qua điểm $O(0;0)$ thì hàm số không có cực trị.
- d) Đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực đại, cực tiểu A, B sao cho đoạn AB cắt cả trục hoành và trục tung khi và chỉ khi $0 < m < 1$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - m(m + 1)x + m^3 + 1}{x - m}$.

- a) Khi $m = 0$, hàm số có cực đại, cực tiểu thỏa $y_{CD} - y_{CT} = 0$.
- b) Hàm số đã cho có cực trị khi và chỉ khi $m > -1$.
- c) Trong trường hợp có cực trị thì cực đại của hàm số luôn âm.
- d) Điểm $A\left(-\frac{1}{2}; -\frac{7}{4}\right)$ vừa là điểm cực đại của đồ thị hàm số ứng với giá trị m nào đó, vừa là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số ứng với một giá trị khác của m .

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + m(m^2 - 1)x - m^4 + 1}{x - m}$ có đồ thị (C)

- a) Với $m = -2$, hàm số đã cho có 2 điểm cực trị trái dấu.
- b) Hàm số đã cho luôn có 2 cực trị.
- c) Khoảng cách giữa 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số luôn không đổi.
- d) Góc tọa độ $O(0;0)$ là điểm cực đại của (C) ứng với một giá trị nào đó của m và cũng có thể là điểm cực tiểu của (C) ứng với một giá trị khác của m .

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x + m}{x - 4}$.

- a) Trong trường hợp hàm số có cực trị, đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $y = -2x + 3$.
- b) Với $m > -4$, hàm số đã cho có cực đại, cực tiểu.
- c) Có 1 giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực trị thẳng hàng với điểm $M(1;-1)$.

d) Với $m = 3$, hàm số có 2 cực trị thỏa mãn $|y_{CD} - y_{CT}| = 4$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$.

a) Hàm số có cực trị khi và chỉ khi $m < 0$ hoặc $m > 1$.

b) Với $m = 2$, hàm số đã cho có 2 cực trị cùng dấu.

c) Với $m < 0$, hàm số đã cho luôn có $x_{CD} < 0$.

d) Hàm số có cực đại, cực tiểu thỏa $|y_{CD} - y_{CT}| > 8$ khi và chỉ khi $m < \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ hoặc $m > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (2m + 1)x + m^2 + m + 4}{2(x + m)}$.

a) Khi $m = 1$, hàm số đã cho có $x_{CD} = 1$.

b) Hàm số đã cho luôn có 2 cực trị.

c) Các giá trị cực trị của hàm số luôn không đổi.

d) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số luôn bằng 16.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - (m + 1)x + m + 1}{x - 1}$.

a) Hàm số đã cho luôn có 2 cực trị.

b) Hàm số đã cho luôn có $x_{CD} = 2$.

c) Khi đồ thị hàm số đi qua điểm $M(3; 2)$ thì 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số cách đều gốc tọa độ $O(0; 0)$.

d) Đồ thị hàm số có 2 cực trị thỏa $(y_{CD})^2 = 2 \cdot y_{CT}$ khi và chỉ khi $m = 1$ hoặc $m = -5$.

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + 2x + 1}{2x + 1}$. Tìm m để đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; 0)$.

ĐS:

Câu 2: Cho hàm số $y = x + m + \frac{n}{x + 1}$. Biết hàm số đạt cực đại tại $x = -2$, giá trị cực đại bằng -2 . Tính tổng $S = m + 2n$.

ĐS:

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - mx + m}{x - 1}$. Biết khoảng cách giữa 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số có dạng $a\sqrt{b}$ với a, b là các số nguyên tố. Tính tích $P = ab$

ĐS:

Câu 4: Tìm m để khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + mx}{1 - x}$ bằng 10.

ĐS:

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = mx + \frac{1}{x}$ có 2 điểm cực trị đều thuộc hình tròn tâm $O(0;0)$, bán kính bằng 6?

ĐS:

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m}{x+2}$. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực trị A, B thỏa tam giác OAB vuông?

ĐS:

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - (m+3)x + 3m+1}{x-1}$. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-10;10]$ để hàm số đã cho có cực đại, cực tiểu và các giá trị cực đại, cực tiểu của hàm số cùng âm. Tính tổng các phần tử của S .

ĐS:

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - (2m+5)x + m+3}{x+1}$. Biết hàm số đã cho có cực trị tại điểm $x > 1$ khi và chỉ khi $m > -\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$; $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính tích $P = a.b$.

ĐS:

Câu 9: Biết rằng với mọi $m < 0$, điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 2m - 4}{x+2}$ luôn thuộc một parabol cố định $(P): y = ax^2 + bx + c$. Giá trị của biểu thức $S = a + b + c$ bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - (m+1)x - m^2 + 4m - 2}{x-1}$. Biết rằng khi $m = \frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}$; $\frac{a}{b}$ tối giản) thì hàm số có 2 cực trị thỏa mãn $y_{CB} \cdot y_{CT}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T = a^2 + b^2$.

ĐS:

BÀI 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

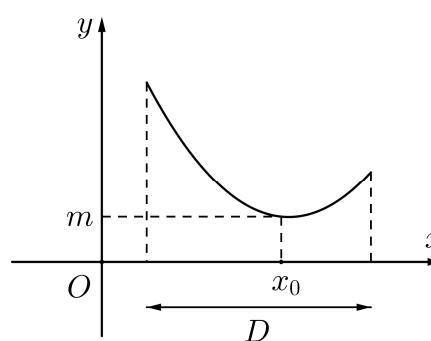
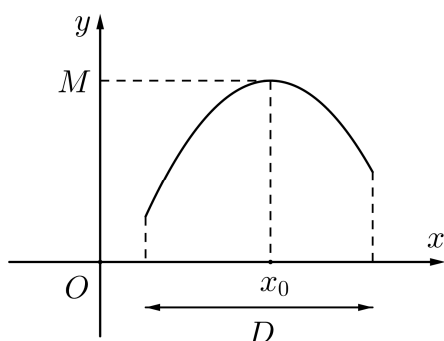
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D .

Số M được gọi là **giá trị lớn nhất (GTLN) của hàm số** $y = f(x)$ trên D , nếu $f(x) \leq M$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$. Kí hiệu: $M = \max_D f(x)$.

Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số** $y = f(x)$ trên D , nếu $f(x) \geq m$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$. Kí hiệu: $m = \min_D f(x)$.

Chú ý: Ta quy ước khi chỉ nói giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ (mà không cho rõ tập hợp D) thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định của nó.

Nhận xét: Nếu biết đồ thị của hàm số trên tập hợp D , ta có thể xác định được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên D .



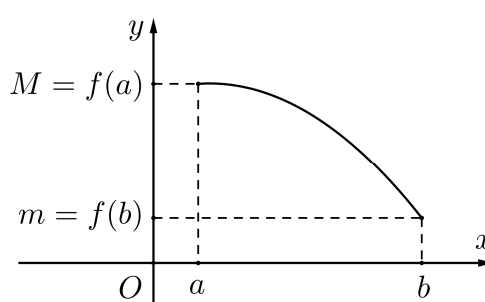
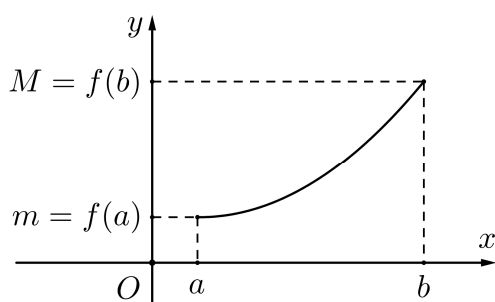
2. Định lý

Mọi hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ đều có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

Hơn nữa:

a) Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\max_{[a; b]} f(x) = f(b)$ và $\min_{[a; b]} f(x) = f(a)$.

b) Nếu hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a; b]$ thì $\max_{[a; b]} f(x) = f(a)$ và $\min_{[a; b]} f(x) = f(b)$.



DẠNG TOÁN: TÌM GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ

Phương pháp chung là sử dụng đạo hàm và lập bảng biến thiên của hàm số đó.

DẠNG TOÁN: TÌM GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN ĐOẠN $[a; b]$

Bước 1. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.

Bước 2. Tìm các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ trên khoảng $(a; b)$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc không tồn tại.

Bước 3. Tính $f(a); f(x_1); f(x_2); \dots; f(x_n); f(b)$.

Bước 4. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các giá trị tìm được ở Bước 3. Khi đó:

$$M = \max_{[a; b]} f(x), \quad m = \min_{[a; b]} f(x).$$

Ví dụ 1: Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ trên đoạn $[-1; 5]$.

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0; 2]$.

Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{8-x}$.

DẠNG TOÁN: TÌM GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ TRÊN TẬP HỢP KHÔNG PHẢI ĐOẠN $[a; b]$

Lập bảng biến thiên của hàm số đã cho trên tập hợp cần xét để xác định giá trị lớn nhất, nhỏ nhất (nếu có).

Ví dụ 4: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ví dụ 5: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = -x^4 + 4x^2 + 3$ trên khoảng $(-1; 1)$.

Ví dụ 6: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = x + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(-2; 2)$.

DẠNG TOÁN: TÌM GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ

Để tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên tập D , ta có thể đặt ẩn phụ t và đưa hàm số biến x về hàm số theo biến mới t , lưu ý nhớ tìm điều kiện của t khi đặt ẩn phụ.

Ví dụ 7: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = (2 \sin x + 1)^2 + 2$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ví dụ 8: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = 2 \sin^2 x - \cos x + 1$.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1: Tìm GTLN, GTNN của các hàm số sau nếu có:

a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ trên $[-1; 4]$

b) $y = \frac{2-x}{1-x}$ trên $[2; 5]$

c) $y = -x^4 - 2x^2 + 7$ trên $[-1; 3]$

d) $y = x + \frac{1}{x+3}$ trên $\left[-\frac{5}{2}; 0\right]$

Câu 2: Tìm GTLN, GTNN của các hàm số sau nếu có:

a) $y = -\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}$

b) $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$

c) $y = 2x + \sqrt{5-x^2} - 4$

d) $y = x\sqrt{1-x^2}$

e) $y = 2\sqrt{1-x^2} + x^2$

f) $y = \sqrt{4-x^2}$

Câu 3: Tìm GTLN, GTNN của các hàm số sau nếu có:

a) $y = x + \frac{4}{x}$ trên đoạn $[1; 4]$

b) $y = \frac{x-3}{1+x}$ trên đoạn $[0; 7]$

c) $y = -x^3 + 3x + 2$ trên đoạn $[-3; 4]$

d) $y = x^4 - 2x^2 + 3$ trên đoạn $[-2; 1]$

e) $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$ trên đoạn $[2; 4]$

f) $y = -x^4 + 2x^2 - 1$ trên đoạn $[0; 5]$

Câu 4: Tìm GTLN, GTNN của các hàm số sau nếu có:

a) $y = \sqrt{x} + \sqrt{4-x} + 3$

b) $y = 5 + \sqrt{2x+4} + \sqrt{10-x}$

c) $y = \sqrt{-x^2 + 5x - 4} + 9$

d) $y = 3 - \sqrt{-2x^2 + 5x + 7}$

e) $y = 5\sqrt{9-x^2} + 2$

f) $y = 3x + \sqrt{10-x^2}$

g) $y = -x + \sqrt{8-x^2}$

h) $y = (x+1)\sqrt{3-x^2} + 4$

Câu 5: Tìm GTLN, GTNN của các hàm số sau nếu có:

a) $y = -x^4 + 2x^2 + 1$

b) $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ trên khoảng $(-3; 1)$

c) $y = -x^3 + x^2 - 2x + 1$ trên khoảng $(-1; 5)$

d) $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

e) $y = \frac{3x^2 - 4x}{x^2 - 1}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$

f) $y = x + 1 - \frac{1}{x+2}$ trên khoảng $(-3; +\infty)$

Câu 6: Tìm GTLN, GTNN của các hàm số sau nếu có:

a) $y = \sin 2x$ trên đoạn $\left[0; \frac{7\pi}{12}\right]$

b) $y = \cos 2x - 3$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

c) $y = \cos^2 x + 3\sin x + 7$

d) $y = \frac{2\sin x - 1}{\sin x + 2}$

Câu 7: Tìm các giá trị của m để GTNN của hàm số $f(x) = \frac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng -2 .

Câu 8: Tìm tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 + 3m - 1 = 0$ có nghiệm trong $[1; +\infty)$.

Câu 9: Tìm m để bất phương trình $m < -x^2 + 2x + 3$ có nghiệm.

Câu 10: Sự phân hủy của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hòa tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ ($t \geq 0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số: $y = y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$.

Vào các thời điểm nào nồng độ oxygen trong nước cao nhất và thấp nhất?

(Theo: www.researchgate.net/publication/264903978_Microrespirometric_characterization_of_activated_sludge_inhibition_by_copper_and_zinc)

Câu 11: Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}$, $t \geq 0$ trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

Câu 12: Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ độ cao 2 m với vận tốc ban đầu là 24,5 m/s. Trong Vật lý, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí thì độ cao h (mét) của vật sau t (giây) được cho bởi công thức $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$. Hỏi tại thời điểm nào thì vật đạt độ cao lớn nhất?

Câu 13: Khối lượng q (kg) của một mặt hàng mà cửa tiệm bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán p (nghìn đồng/kg) theo công thức $p = 15 - \frac{1}{2}q$. Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của cửa tiệm được tính theo công thức $R = pq$.

a) Viết công thức biểu diễn R theo p .

b) Tìm giá bán mỗi kilôgam sản phẩm để đạt được doanh thu cao nhất và xác định doanh thu cao nhất đó.

Câu 14: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được tính theo công thức $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$ (mg / L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Câu 15: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$. Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ bao nhiêu?

Câu 16: Một vật chuyển động theo quy luật $s = t^3 - 6t^2 + 42t + 1$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc nhỏ nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Câu 17: Một vật chuyển động theo quy luật $S = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$, với t (s) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (m) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Câu 18: Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hóa bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2$, $0 \leq t \leq 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần).

- a) Hãy ước tính số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương đó.
- b) Đạo hàm $N'(t)$ biểu thị tốc độ lây lan của virus (còn gọi là tốc độ truyền bệnh). Hỏi virus sẽ lây lan nhanh nhất khi nào?

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 1

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Xét hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	-1	0	2	5	
y'	+	0	-	0	+
y	3	4	0	$+\infty$	

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x = -1$ và đạt GTLN tại $x = 5$ trên đoạn $[-1; 5]$.
- B. Hàm số đã cho không tồn tại GTLN trên đoạn $[-1; 5]$.
- C. Hàm số đã cho đạt GTNN tại $x = -1$ và $x = 2$ trên đoạn $[-1; 5]$.
- D. Hàm số đã cho đạt GTLN tại $x = 0$ trên đoạn $[-1; 5]$.

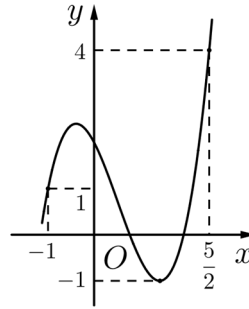
Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	+		-
y	-1	2	1

Khẳng định nào sau đây là đúng?

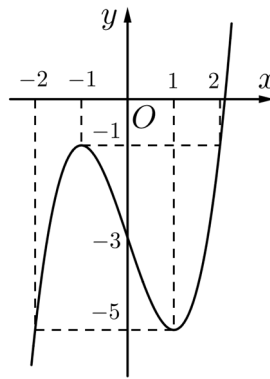
- A. GTLN của hàm số bằng 2.
- B. GTNN của hàm số bằng -1.
- C. GTNN của hàm số bằng 1.
- D. GTNN của hàm số bằng -1 và 1.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)$ trên $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$ là:



- A. $M = 4, m = -1$. B. $M = 4, m = 1$. C. $M = \frac{5}{2}, m = 1$. D. $M = \frac{5}{2}, m = -1$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$.



- A. $m = -5, M = 0$. B. $m = -5, M = -1$. C. $m = -1, M = 0$. D. $m = -2, M = 2$.

Câu 5: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[0; 2]$ là:

- A. $\min_{[0;2]} y = 0$. B. $\min_{[0;2]} y = 3$. C. $\min_{[0;2]} y = 5$. D. $\min_{[0;2]} y = 7$.

Câu 6: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4; 4]$ là:

- A. $\min_{[-4;4]} f(x) = -50$. B. $\min_{[-4;4]} f(x) = 0$. C. $\min_{[-4;4]} f(x) = -41$. D. $\min_{[-4;4]} f(x) = 15$.

Câu 7: Gọi M, m lần lượt là GTLN, GTNN của hàm số $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ trên đoạn $\left[-2; -\frac{1}{2}\right]$. Tính $P = M - m$.

- A. $P = -5$. B. $P = 1$. C. $P = 4$. D. $P = 5$.

Câu 8: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$ là:

- A. $\min_{[0;3]} y = -3$. B. $\min_{[0;3]} y = \frac{1}{2}$. C. $\min_{[0;3]} y = -1$. D. $\min_{[0;3]} y = 1$.

Câu 9: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{5-4x}$ trên đoạn $[-1; 1]$ là:

- A. $\max_{[-1;1]} y = \sqrt{5}$ và $\min_{[-1;1]} y = 0$. B. $\max_{[-1;1]} y = 1$ và $\min_{[-1;1]} y = -3$.

C. $\max_{[-1;1]} y = 3$ và $\min_{[-1;1]} y = 1$.

D. $\max_{[-1;1]} y = 0$ và $\min_{[-1;1]} y = -\sqrt{5}$.

Câu 10: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x^2 + x - 2}{2 - x}$ trên đoạn $[-2; 1]$ lần lượt là:

A. 2 và 0.

B. 1 và -2.

C. 0 và -2.

D. 1 và -1.

Câu 11: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ trên đoạn $[-2; 4]$. Tính tổng $M + m$.

A. -18.

B. -2.

C. 14.

D. -22.

Câu 12: Cho hàm số $y = x + \sqrt{12 - 3x^2}$. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng:

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Câu 13: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{x - m^2}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng:

A. $\frac{1 + m^2}{2}$.

B. $-m^2$.

C. $\frac{1 - m^2}{2}$.

D. m^2 .

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = \frac{x - m^2}{x + 8}$. Tìm giá trị lớn nhất của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 3]$ bằng -2.

A. $m = 4$.

B. $m = 5$.

C. $m = -4$.

D. $m = 1$.

Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{x + m}{x + 1}$ thỏa $\min_{[1; 2]} y + \max_{[1; 2]} y = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $0 < m \leq 2$.

B. $2 < m \leq 4$.

C. $m \leq 0$.

D. $m > 4$.

Câu 16: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - \ln(x + 1)$ trên đoạn $[0; 2]$ là:

A. 0.

B. $1 - \ln 2$.

C. $2 - \ln 3$.

D. Đáp án khác.

Câu 17: Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4})$ trên đoạn $[0; \sqrt{5}]$. Khi đó tổng $M + m$ bằng:

A. $\ln(6 + 3\sqrt{5})$.

B. $\ln(6 + 2\sqrt{5})$.

C. $\ln(6 - 2\sqrt{5})$.

D. $\ln(6 - 3\sqrt{5})$.

Câu 18: Tìm tập giá trị T của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ với $x \in [1; e^2]$.

A. $T = [0; e]$.

B. $T = \left[\frac{1}{e}; e\right]$.

C. $T = \left[0; \frac{1}{e}\right]$.

D. $T = \left[0; \frac{2}{e^2}\right]$.

Câu 19: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \ln(2x^2 + e^2)$ trên $[0; e]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $M + m = 5$.

B. $M + m = 4 + \ln 3$.

C. $M + m = 4 + \ln 2$.

D. $M + m = 2 + \ln 3$.

Câu 20: Cho hàm số $y = \frac{m \ln x + 1}{\ln x - m}$ có giá trị nhỏ nhất trên $[1; e]$ bằng -3 . Khi đó:

- A. $m > 2$. B. $m > 5$. C. $m < 3$. D. $m < 0$.

Câu 21: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2 \sin x - \frac{4}{3} \sin^3 x$ trên $[0; \pi]$ là:

- A. $\max_{[0; \pi]} y = 2$. B. $\max_{[0; \pi]} y = \frac{2}{3}$. C. $\max_{[0; \pi]} y = 0$. D. $\max_{[0; \pi]} y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 22: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \cos^3 x + 3 \sin^2 x + 5$ trên tập xác định là:

- A. 4. B. 8. C. 10. D. 9.

Câu 23: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 \sin^2 x - \cos x + 1$. Khi đó tích $M.m$ là:

- A. $M.m = 0$. B. $M.m = \frac{25}{4}$. C. $M.m = \frac{25}{8}$. D. $M.m = 2$.

Câu 24: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \cos^2 x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ là:

- A. $\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{1}{2}, \min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = -1$. B. $\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{\pi}{4}, \min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{\pi}{6}$.
C. $\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}, \min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = 1$. D. $\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}, \min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{1}{2}$.

Câu 25: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $\min_{(0; +\infty)} y = 2$. B. $\min_{(0; +\infty)} y = 4$. C. $\min_{(0; +\infty)} y = 0$. D. $\min_{(0; +\infty)} y = 3$.

Câu 26: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \frac{1}{x}$ trên nửa khoảng $(0; 2]$ là:

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 27: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ là:

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 28: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + 2 + \frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là:

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 29: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1}$ là:

- A. $\max_{\mathbb{R}} y = -1$. B. $\max_{\mathbb{R}} y = 1$. C. $\max_{\mathbb{R}} y = 9$. D. $\max_{\mathbb{R}} y = 10$.

Câu 30: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ bằng:

- A. $\min_{\mathbb{R}} y = 3.$ B. $\min_{\mathbb{R}} y = 5.$ C. $\min_{\mathbb{R}} y = 3 + \sqrt{5}.$ D. $\min_{\mathbb{R}} y = 0.$

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1: Cho hàm số $y = x^4 - \frac{2}{3}x^3 - x^2$.

- a) Hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.
 b) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.
 c) $\max_{(-1;1)} y = f(-1) = \frac{2}{3}$.
 d) Hàm số luôn có giá trị nhỏ nhất trên mọi khoảng mà nó xác định.

Câu 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$.

- a) Cực đại của hàm số đã cho bằng -1 .
 b) Trên khoảng $(0;2025)$, hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 8 .
 c) $\max_{[-4;-3]} y = \min_{[3;4]} y$.
 d) Trên đoạn $[a;b]$ tùy ý với $b \leq 0$, hàm số luôn có giá trị lớn nhất không vượt quá 40 .

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$.

- a) Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;0) \cup (2;+\infty)$.
 b) Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.
 c) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ là -3 .
 d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng $(0;+\infty)$ là 1 .

Câu 4: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 5$.

- a) Hàm số đã cho có cực đại bằng 1 .
 b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.
 c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;2]$ bằng -3 .
 d) Hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

Câu 5: Cho hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$.

- a) Tập xác định $D = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

- b) Trên khoảng $(0; 2)$, đạo hàm của hàm số đã cho luôn dương.
- c) Hàm số đã cho có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất lần lượt là $2\sqrt{2}$ và -2 .
- d) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ âm.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{mx-4}{x+m}$.

- a) Hàm số đã cho luôn đồng biến trên tập xác định.
- b) Khi $m = 1$, ta có $\min_{[-2;2]} y = 6$.
- c) Hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất bằng 5 trên $[-2; 6]$ khi $m = 34$.
- d) Có 2 giá trị của m thỏa $\min_{[0;4]} y + \max_{[0;4]} y = \frac{19}{2}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = -x^2 + 4x - m$.

- a) Hàm số đã cho luôn nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- b) Hàm số đã cho không có cực đại.
- c) Có 1 giá trị nguyên dương của m để hàm số đã cho có GTLN trên đoạn $[-1; 3]$ bằng 10.
- d) Khi $\max_{[-1;4]} f(x) = 10$ thì $\min_{[2;7]} f(x) = -15$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{mx+1}{x-m}$.

- a) Hàm số đã cho luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $-1 < m < 1$.
- b) Với mọi m , đồ thị hàm số luôn cắt 2 trục tọa độ tại 2 điểm A, B thỏa $OA = OB$.
- c) Biết giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1; 2]$ bằng -2 . Khi đó giá trị của m bằng 3.
- d) Có 2 giá trị của m thỏa $\min_{[-2;-1]} y + \max_{[-2;-1]} y = -9$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2mx^2 - m + 2$.

- a) Nếu $f(1) = 0$ thì $f(5) = 40$.
- b) Hàm số đã cho luôn có 2 điểm cực trị.
- c) Với $m = 3$, ta có $\min_{[-1;5]} f(x) = -1$.
- d) Có 1 giá trị của m để hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ bằng 6.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$.

- a) Khi $m = 0$, ta có $\min_{(0;+\infty)} y = -2$.

b) Hàm số đã cho luôn có 2 cực trị.

c) Với mọi giá trị của m , ta luôn có $\max_{(-\infty; m)} y - \min_{(m; +\infty)} y = 4$.

d) Có 1 giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 2]$ tại một điểm $x_0 \in (0; 2)$.

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^3]$.

ĐS:

Câu 2: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3\sqrt{x-1} + 4\sqrt{5-x}$. Tính $M + m$.

ĐS:

Câu 3: Biết giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Khi đó $S = a^2 - b^2$ bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 4: Biết giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2\cos^3 x - \cos 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ là $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Khi đó tích $P = a.b$ bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 5: Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

ĐS:

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + m^2x - 2m^2 + 2m - 9$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[0; 3]} y \leq 3$. Biết $S = [a; b]$. Xác định $T = a - b$.

ĐS:

Câu 7: Biết khoảng $(a; b)$ là tập tất cả các giá trị của $m > 0$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[m+1; m+2]$ luôn nhỏ hơn 3. Khi đó tổng $T = 2025a + 2026b$ bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \frac{x - m^2 - 2}{x - m}$. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị của m để $\max_{[0; 4]} f(x) = -1$. Tổng bình phương các phần tử của S bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = x^3 + (m^2 + 1)x + m^2 - 2$. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để $\min_{[0;2]} f(x) = 7$. Tích các phần tử trong S bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 10: Biết rằng giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = mx + \frac{36}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 20. Tìm m .

ĐS:

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 2

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ trên đoạn $[0;2]$ là:

- A. $\max_{[0;2]} f(x) = 64$. B. $\max_{[0;2]} f(x) = 1$. C. $\max_{[0;2]} f(x) = 0$. D. $\max_{[0;2]} f(x) = 9$.

Câu 2: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ trên đoạn $[0;2]$ là:

- A. $\frac{1}{4}$. B. 2. C. $-\frac{1}{2}$. D. 0.

Câu 3: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{4}{x+1}$ trên đoạn $[0;4]$ là:

- A. 3. B. $\frac{24}{5}$. C. 4. D. -5.

Câu 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 1$ trên $[-1;2]$.

- A. $\min_{[-1;2]} y = -5$. B. $\min_{[-1;2]} y = -4$. C. $\min_{[-1;2]} y = -3$. D. $\min_{[-1;2]} y = 1$.

Câu 5: Hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2}}$ đạt GTLN và GTNN trên đoạn $[-3;0]$ lần lượt tại x_1, x_2 . Khi đó $x_1 \cdot x_2$ bằng:

- A. 2. B. 0. C. 6. D. $\sqrt{2}$.

Câu 6: Hàm số $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất lần lượt là:

- A. $\sqrt{2}, 1$. B. 1, 0. C. 2, $\sqrt{2}$. D. 2, 1.

Câu 7: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 2$ trên đoạn $[-1;2]$. Khi đó, $M - m$ có giá trị bằng:

- A. -6. B. 12. C. -12. D. 3.

Câu 8: Với giá trị nào của m thì hàm số $y = \frac{mx-1}{x+m}$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{3}$ trên $[0;2]$.

- A. $m = -1$. B. $m = 1$. C. $m = -3$. D. $m = 3$.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{5mx}{x^2 + 1}$ với $m \neq 0$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 1$ trên đoạn $[-2; 2]$.

- A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. B. $m > 0$. C. $m < 0$. D. Không tồn tại m .

Câu 10: Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $f(x) = e^{2-3x}$ trên đoạn $[0; 2]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $m + M = 1$. B. $M - m = e$. C. $M.m = \frac{1}{e^2}$. D. $\frac{M}{m} = e^2$.

Câu 11: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x.e^x$ trên đoạn $[-2; 2]$ là:

- A. $\max_{[-2; 2]} y = 2e^2, \min_{[-2; 2]} y = -\frac{2}{e^2}$. B. $\max_{[-2; 2]} y = -\frac{1}{e}, \min_{[-2; 2]} y = -\frac{2}{e^2}$.
C. $\max_{[-2; 2]} y = 2e^2, \min_{[-2; 2]} y = -\frac{1}{e}$. D. Tất cả đều sai.

Câu 12: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - \ln(1 - 2x)$ trên đoạn $[-2; 0]$. Biết $M + m = a + b \ln 2 + c \ln 5$, ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Khi đó tổng $a + b + c$ bằng:

- A. $-\frac{3}{4}$. B. $\frac{9}{4}$. C. $\frac{15}{4}$. D. $\frac{17}{4}$.

Câu 13: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \log_3^2 x - 4 \log_3 x + 1$ trên đoạn $[1; 27]$.

- A. 1. B. -3. C. 0. D. -2.

Câu 14: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 \ln x$ trên đoạn $[1; 2]$.

- A. $\min_{[1; 2]} y = 4 \ln 2$. B. $\min_{[1; 2]} y = \frac{1}{e}$. C. $\min_{[1; 2]} y = -\frac{1}{e}$. D. $\min_{[1; 2]} y = 0$.

Câu 15: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1$ trên tập xác định $\mathbb{R}$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $-\frac{1}{8}$. D. Không tồn tại.

Câu 16: Giá trị lớn nhất M , giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 2 \sin^2 x + 2 \sin x - 1$ là:

- A. $M = -1, m = \frac{-3}{2}$. B. $M = 3, m = -1$. C. $M = 3, m = -\frac{3}{2}$. D. $M = \frac{3}{2}, m = -3$.

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho. Chọn mệnh đề đúng.

- A. $M = m + \frac{2}{3}$. B. $M = m + 1$. C. $M = \frac{3}{2}m$. D. $M = m + \frac{3}{2}$.

Câu 18: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sin x(1 + \cos x)$ trên đoạn $[0; \pi]$.

A. $M = \frac{3\sqrt{3}}{2}, m = 1$. B. $M = \frac{3\sqrt{3}}{4}, m = 0$. C. $M = 3\sqrt{3}, m = 1$. D. $M = \sqrt{3}, m = 1$.

Câu 19: Điều kiện của m để phương trình $x + \sqrt{1 - x^2} = m$ có nghiệm là:

A. $m \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. B. $m \in [-1; \sqrt{2}]$. C. $m \in [1; \sqrt{2}]$. D. $m \in (-1; \sqrt{2})$.

Câu 20: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = 4$.

Câu 21: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{(x+2)^2}{x}$ trên $(0; +\infty)$ là:

A. 2. B. $-\infty$. C. 8. D. Không tồn tại.

Câu 22: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x(x+2)(x+4)(x+6) + 5$ trên nửa khoảng $[-4; +\infty)$ là:

A. $\min_{[-4; +\infty)} y = -8$. B. $\min_{[-4; +\infty)} y = -11$. C. $\min_{[-4; +\infty)} y = -17$. D. $\min_{[-4; +\infty)} y = -9$.

Câu 23: Hàm số $y = \frac{x^2 - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$ có giá trị nhỏ nhất tại điểm có hoành độ bằng:

A. 0. B. 2. C. 3. D. -2.

Câu 24: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$.

A. $\frac{1}{3}$. B. 1. C. 3. D. Không tồn tại.

Câu 25: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + \frac{54}{x-2}$ trên khoảng $(2; +\infty)$.

A. $\min_{(2; +\infty)} y = 0$. B. $\min_{(2; +\infty)} y = -13$. C. $\min_{(2; +\infty)} y = 23$. D. $\min_{(2; +\infty)} y = -21$.

Câu 26: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 4x}$ trên khoảng $(0; 3)$ là:

A. 4. B. 0. C. -2. D. 2.

Câu 27: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x} - 2x^2}{\sqrt{x} + 1}$. Khi đó giá trị của $M - m$ là:

A. -2. B. -1. C. 1. D. 2.

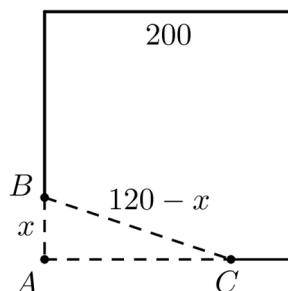
Câu 28: Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích S thì hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

A. $2\sqrt{S}$. B. $4\sqrt{S}$. C. $2S$. D. $4S$.

Câu 29: Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích 48 cm^2 , hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng:

- A. $16\sqrt{3} \text{ cm}$. B. $4\sqrt{3} \text{ cm}$. C. 24 cm . D. $8\sqrt{3} \text{ cm}$.

Câu 30: Cho một tấm gỗ hình vuông cạnh 200 cm . Người ta cắt một tấm gỗ có hình một tam giác vuông ABC từ tấm gỗ hình vuông đã cho như hình vẽ sau. Biết $AB = x$ ($0 < x < 60 \text{ cm}$) là một cạnh góc vuông của tam giác ABC và tổng độ dài cạnh góc vuông AB với cạnh huyền BC bằng 120 cm . Tìm x để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.



- A. $x = 40 \text{ cm}$. B. $x = 50 \text{ cm}$. C. $x = 30 \text{ cm}$. D. $x = 20 \text{ cm}$.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1: Cho hàm số $y = \sqrt{x} \ln x$.

- a) Tập xác định $D = [0; +\infty)$.
b) Đạo hàm $y' = \frac{(\ln x + 2)\sqrt{x}}{2x}$.
c) Hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; e]$ tại $x = x_0$. Khi đó $x_0 \in (2; e]$.
d) Hàm số đã cho không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = 3x + 1 + \frac{3}{x+2}$.

- a) Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên tập $K = (-2; 1]$ bằng 5 .
b) Hàm số $f(x)$ có một điểm cực trị trên khoảng $(-2; +\infty)$.
c) Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên khoảng $(-2; 2025)$ bằng 1 .
d) Không tồn tại giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên nửa khoảng $\left[-\frac{3}{2}; 0\right)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = 2x + 3\sqrt{9 - x^2}$.

- a) Tập xác định $D = [-3; 3]$.
b) Hàm số đã cho có 1 điểm cực trị.
c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng -6 .
d) Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho đạt được tại điểm cực trị của hàm số.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$.

- a) Tập xác định $D = \{-1; 1\}$.
- b) Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm có hoành độ âm.
- c) Hàm số đã cho không có điểm cực đại.
- d) Hàm số đã cho có tập giá trị là đoạn $[-1; \sqrt{2}]$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$.

- a) Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.
- b) Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 3]$ lần lượt là $\frac{5}{2}$ và $-2 + 2\sqrt{2}$.
- c) Hàm số đã cho có cực đại nhỏ hơn cực tiểu.
- d) $\max_{(-\infty; -1)} y + \min_{(-1; +\infty)} y > 0$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{x + m^2 + 2m}{x - 2}$.

- a) Hàm số đã cho không có cực trị.
- b) Trên mỗi khoảng xác định, hàm số luôn có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.
- c) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-4; -3]$ luôn nhỏ hơn giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[3; 4]$.
- d) Có 2 giá trị nguyên của m thỏa $\max_{[3; 4]} y + \min_{[3; 4]} y = \frac{19}{2}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x + m + 1$.

- a) Hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- b) Trên nửa khoảng $(2025; 2026]$, không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số đã cho.
- c) Hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất bằng 5 trên đoạn $[0; 3]$ khi $m = 4$.
- d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2; -1]$ luôn âm khi và chỉ khi $m \leq -\frac{7}{3}$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \frac{mx - 1}{x + m}$.

- a) Hàm số đã cho luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.
- b) Khi đồ thị hàm số đã cho đi qua $M(3; 2)$ thì $\max_{[0; 4]} f(x) = -\frac{1}{7}$.
- c) Có 1 giá trị nguyên âm của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[1; 2]$ bằng 2.

d) Có vô số giá trị m thỏa $\max_{[-1;3]} f(x) = 2 \min_{[-1;3]} f(x)$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + a$.

a) Đồ thị hàm số đã cho luôn có 1 điểm cực trị thuộc trục tung.

b) Với $a = 4$ thì hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0.

c) Khi đồ thị hàm số đi qua điểm $M(-1;1)$ thì $\min_{[-1;1]} f(x) = 1$.

d) Với mọi $a \in (0;4)$ thì giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số luôn cùng dấu.

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = \frac{x - m^2 + m}{x + 1}$.

a) Hàm số đã cho luôn đồng biến trên khoảng $(2025; +\infty)$.

b) Với $m = 3$, ta có $\max_{[1;5]} f(x) = -\frac{1}{6}$.

c) Với $m = -7$, ta có $\min_{[0;2]} y + \max_{[0;2]} y = 74$.

d) Có 2 giá trị của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;1]$ bằng -2 .

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2$ trên đoạn $[-2;1]$. Tính giá trị của $T = M + m$.

ĐS:

Câu 2: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$. Khi đó $M - m$ bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 3: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{2} \cos x$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Tính $M - m$.

ĐS:

Câu 4: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + e^2})$ trên đoạn $[0; e]$.

ĐS:

Câu 5: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin 2x - 2 \sin x$.

ĐS:

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \frac{x - m^2 - m}{x + 1}$. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 1]$ bằng -2 . Tổng bình phương các phần tử của S bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = m\sqrt{x-1}$ với $m \neq 0$. Biết $\max_{[2;5]} f(x) + \min_{[2;5]} f(x) = m^2 - 10$. Khi đó tổng bình phương các giá trị của m nhận được là bao nhiêu?

ĐS:

Câu 8: Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{8 - x^2} + m$ bằng $4 + 2\sqrt{2}$. Khi đó giá trị của m là bao nhiêu?

ĐS:

Câu 9: Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 2.

ĐS:

Câu 10: Cho hàm số $y = -x^3 + mx^2 - (m^2 + m + 1)x$. Gọi S là tập hợp các giá trị của m thỏa $\min_{[-1;1]} y = -6$. Tích các phần tử trong S bằng bao nhiêu?

ĐS:

BÀI 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ**(tiếp theo)****A. LÝ THUYẾT****DẠNG TOÁN: VẬN DỤNG TÌM GTLN, GTNN CỦA HÀM SỐ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TIỄN**

Dựa vào giả thiết bài toán, đặt biến x phù hợp, lập hàm số biểu diễn giá trị cần tìm GTLN, GTNN để giải quyết.

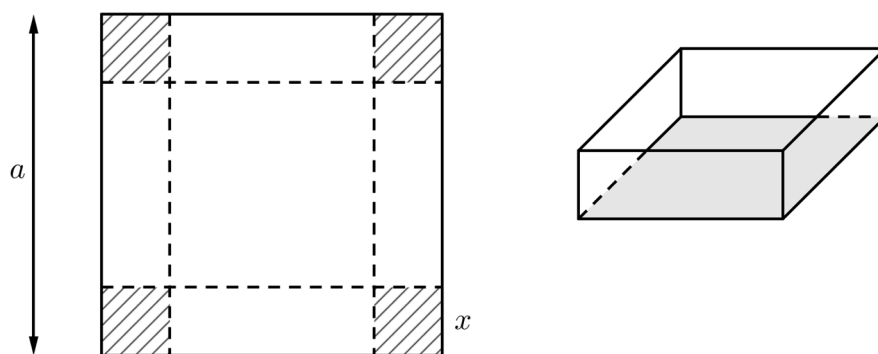
Ví dụ 1: Hai số có hiệu là 13, tích của chúng bé nhất khi hai số đó bằng bao nhiêu?

Ví dụ 2: Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

Ví dụ 3: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất bằng bao nhiêu miligam?

Ví dụ 4: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Khi đó vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất trong khoảng 8 giây đầu tiên bằng bao nhiêu?

Ví dụ 5: Một công ty sản xuất những chiếc hộp đựng thực phẩm có dạng hình hộp chữ nhật. Từ một tấm nhôm hình vuông cạnh a cm, họ cần tính toán để cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gấp tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp. Tìm cạnh của hình vuông bị cắt sao cho thể tích của hộp đựng thực phẩm đó lớn nhất (chứa được nhiều thực phẩm nhất)?

**B. BÀI TẬP TỰ LUẬN**

Câu 1: Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Hỏi muốn thể tích khối trụ đó bằng 2 (lít) và diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất thì bán kính R của đáy bằng bao nhiêu cm? (Làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy).

ĐS:

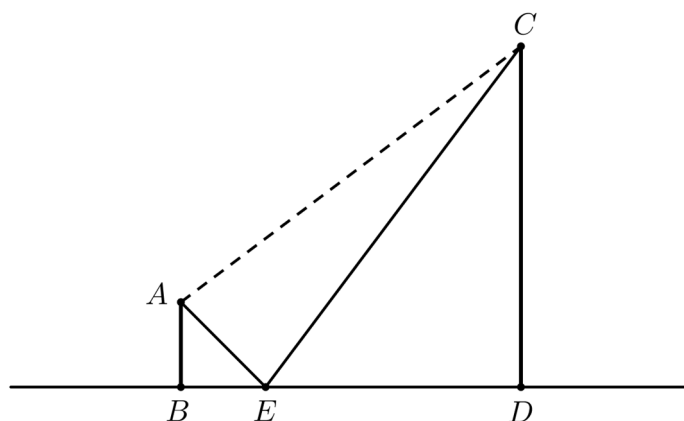
Câu 2: Từ một bờ tường có sẵn, người ta muốn rào một khu đất với cuộn lưới rào có chiều dài 100 (m), không rào bờ tường. Vậy làm thế nào để rào khu đất ấy theo hình chữ nhật sao cho nó có diện tích lớn nhất. Tính chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật đó.

ĐS:

Câu 3: Một tấm thiếc hình chữ nhật dài 45 cm, rộng 24 cm được làm thành một cái hộp không nắp bằng cách cắt bốn hình vuông bằng nhau từ mỗi góc và gấp mép lên. Hỏi các hình vuông được cắt ra có cạnh là bao nhiêu để hộp nhận được có thể tích lớn nhất?

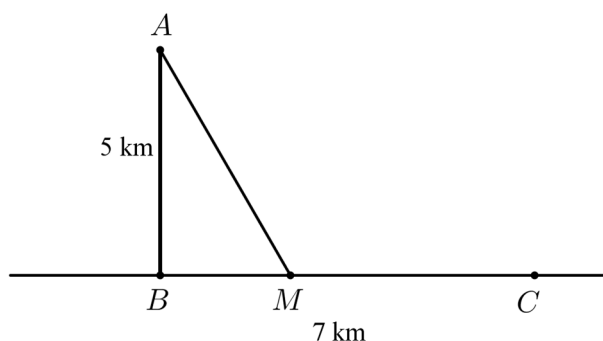
ĐS:

Câu 4: Có hai cây cột dựng đứng trên mặt đất lần lượt là $AB = 1$ m, $CD = 4$ m và đỉnh của hai cột là hai điểm A và C cách nhau 5 m. Người ta chọn một vị trí E trên mặt đất (nằm giữa B, D) để giăng dây nối đến hai đỉnh cột để trang trí như hình bên. Vị trí E cách chân cột ngắn AB bao nhiêu mét, lúc đó độ dài sợi dây là bao nhiêu?



ĐS:

Câu 5: Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng AB là 5km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến điểm M trên bờ biển với vận tốc 4km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6km/h (xem hình vẽ dưới đây). Tính độ dài đoạn BM để người đó đến kho nhanh nhất.



ĐS:

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Người ta tiêm một loại thuốc vào mạch máu ở cánh tay phải của một bệnh nhân. Sau thời gian là t giờ, nồng độ thuốc hấp thu trong máu của bệnh nhân đó được xác định theo công thức

$C(t) = \frac{0,28}{t^2 + 4}$ ($0 < t < 24$). Hỏi sau bao nhiêu giờ thì nồng độ thuốc hấp thu trong máu của bệnh nhân đó là cao nhất?

- A. 24 giờ. B. 4 giờ. C. 2 giờ. D. 1 giờ.

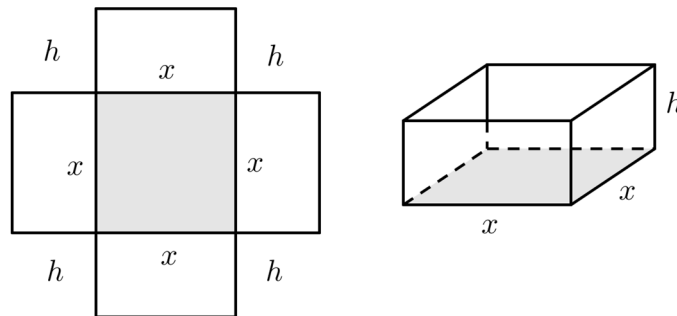
Câu 2: Người ta giới thiệu một loại thuốc kích thích sự sinh sản của một loại vi khuẩn. Sau ít phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3$ ($0 \leq t \leq 30$). Hỏi sau bao nhiêu phút thì số lượng vi khuẩn lớn nhất?

- A. 10 phút. B. 20 phút. C. 30 phút. D. 15 phút.

Câu 3: Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300 km trong t giờ. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ đó được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là hằng số và E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng tiêu hao là ít nhất bằng:

- A. 6 km/h. B. 8 km/h. C. 7 km/h. D. 9 km/h.

Câu 4: Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các-tông theo mẫu như hình vẽ. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x cm, chiều cao h cm và có thể tích 500 cm^3 . Để tổng diện tích của mảnh các-tông nhỏ nhất thì giá trị của x bằng:



- A. 25 cm. B. 30 cm. C. 10 cm. D. 20 cm.

Câu 5: Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi 16 cm, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng:

- A. 64 cm^2 . B. 4 cm^2 . C. 16 cm^2 . D. 8 cm^2 .

Câu 6: Xét tam giác có chu vi là 16 cm, độ dài một cạnh tam giác là 6 cm. Tìm diện tích lớn nhất của tam giác đó.

- A. $S = 12 \text{ cm}^2$. B. $S = 7 \text{ cm}^2$. C. $S = 12\sqrt{2} \text{ cm}^2$. D. $S = 7\sqrt{2} \text{ cm}^2$.

Câu 7: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S(t) = -2t^3 + 18t^2 + 2t + 1$, trong đó t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Thời gian vận tốc chất điểm đạt giá trị lớn nhất là:

- A. $t = 5 \text{ s}$. B. $t = 6 \text{ s}$. C. $t = 3 \text{ s}$. D. $t = 1 \text{ s}$.

Câu 8: Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 24 m/s. B. 108 m/s. C. 18 m/s. D. 64 m/s.

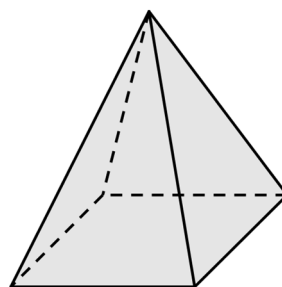
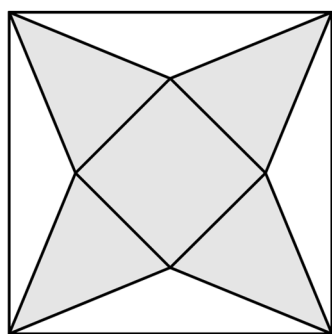
Câu 9: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t) = -\frac{1}{4}t^4 + 3t^2 - 2t - 4$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Tại thời điểm nào vận tốc đạt giá trị lớn nhất?

- A. $t = \sqrt{2}$. B. $t = 1$. C. $t = \sqrt{3}$. D. $t = 2$.

Câu 10: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s = 6t^2 - t^3$ (trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây mà chất điểm bắt đầu chuyển động). Tính thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc (m/s) của chất điểm đạt giá trị lớn nhất.

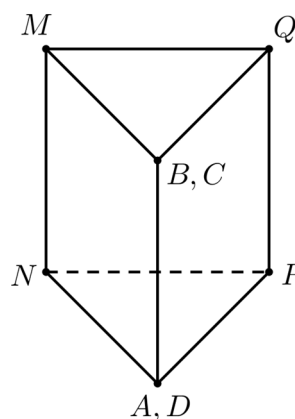
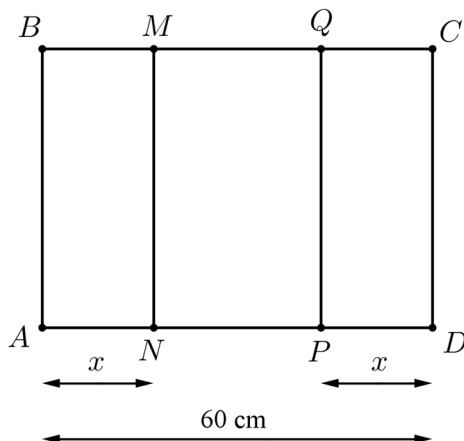
- A. $t = 2$. B. $t = 4$. C. $t = 1$. D. $t = 3$.

Câu 11: Người ta cắt một tờ giấy hình vuông cạnh bằng 1 để gấp thành một hình chóp tứ giác đều sao cho bốn đỉnh của hình vuông dán lại thành đỉnh của hình chóp như hình vẽ. Để thể tích khối chóp lớn nhất thì cạnh đáy x của hình chóp bằng:



- A. $x = \frac{\sqrt{2}}{5}$. B. $x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$. C. $x = 2\sqrt{2}$. D. $x = \frac{2}{5}$.

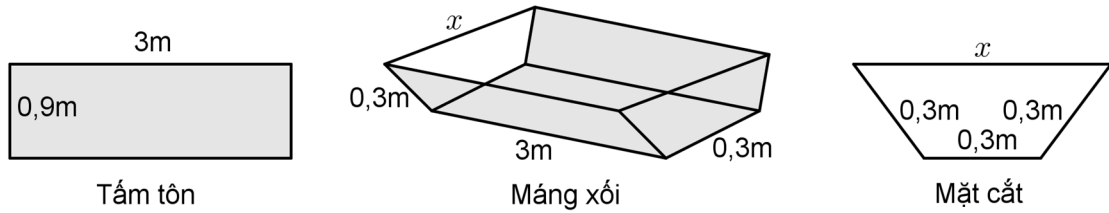
Câu 12: Cho một tấm nhôm hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 60\text{cm}$. Ta gấp tấm nhôm theo 2 cạnh MN và PQ vào phía trong đến khi AB và DC trùng nhau như hình vẽ dưới đây để được một hình lăng trụ khuyết 2 đáy.



Tìm x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất.

- A. $x = 20\text{ cm}$. B. $x = 18\text{ cm}$. C. $x = 25\text{ cm}$. D. $x = 4\text{ cm}$.

Câu 13: Để làm một máng xối nước, từ một tấm tôn kích thước $0,9\text{m} \times 3\text{m}$ người ta gấp tấm tôn đó như hình vẽ dưới, biết mặt cắt của máng xối là một hình thang cân và máng xối là một hình lăng trụ không có nắp đáy phía trên. Hỏi x bằng bao nhiêu mét thì thể tích máng xối lớn nhất?

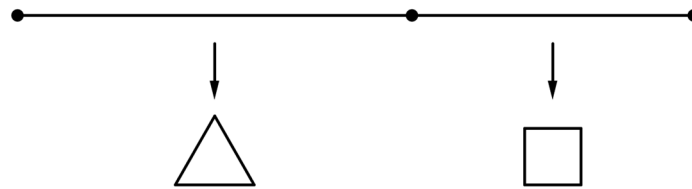


- A. $x = 0,5$ m. B. $x = 0,4$ m. C. $x = 0,6$ m. D. $x = 0,65$ m.

Câu 14: Một sợi dây có chiều dài 28 mét là được cắt thành 2 đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất.

- A. 14 m. B. $\frac{196}{4 + \pi}$ m. C. $\frac{112}{4 + \pi}$ m. D. $\frac{28\pi}{4 + \pi}$ m.

Câu 15: Một sợi dây có chiều dài là 6 mét, được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất?



- A. $\frac{18}{9 + 4\sqrt{3}}$ m. B. $\frac{36\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}}$ m. C. $\frac{12}{4 + \sqrt{3}}$ m. D. $\frac{18\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}}$ m.

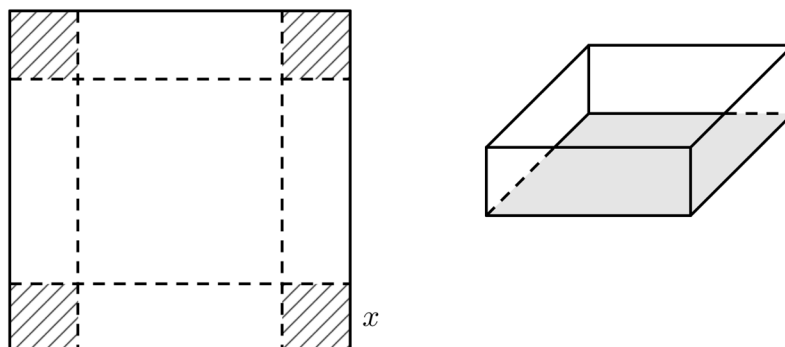
Câu 16: Một viên đá được bắn thẳng đứng lên trên với vận tốc ban đầu là 40 m/s từ một điểm cao 5 m cách mặt đất. Vận tốc của viên đá sau t giây được cho bởi công thức $v(t) = 40 - 10t$ m/s. Tính độ cao lớn nhất viên đá có thể lên tới so với mặt đất.

- A. 85 m. B. 80 m. C. 90 m. D. 75 m.

Câu 17: Cho một hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều. Thể tích của hình lăng trụ là V . Để diện tích toàn phần của hình lăng trụ nhỏ nhất thì cạnh đáy của lăng trụ là:

- A. $\sqrt[3]{4V}$. B. $\sqrt[3]{V}$. C. $\sqrt[3]{2V}$. D. $\sqrt[3]{6V}$.

Câu 18: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x cm, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

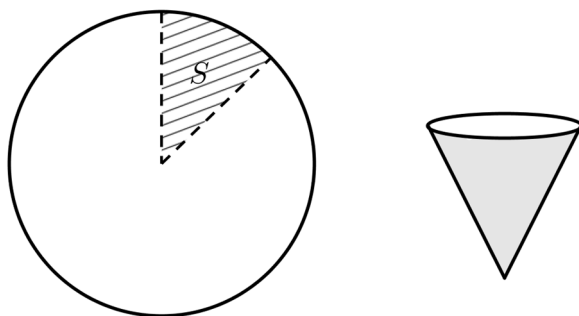


- A. $x = 6$ cm. B. $x = 3$ cm. C. $x = 2$ cm. D. $x = 4$ cm.

Câu 19: Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước $80\text{cm} \times 50\text{cm}$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x cm để khi gấp lại được một chiếc hộp không nắp. Hỏi để chiếc hộp có thể tích lớn nhất thì x bằng bao nhiêu?

- A. $x = 12$. B. $x = 11$. C. $x = 10$. D. $x = 9$.

Câu 20: Từ một tấm tôn hình tròn có đường kính bằng 60 cm, người ta cắt bỏ đi một hình quạt S của tấm tôn đó, rồi gán các mép vừa cắt lại với nhau để được một cái nón không có nắp (như hình vẽ). Hỏi bằng cách làm đó người ta có thể tạo ra cái nón có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?



- A. $1800\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$. B. $2480\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$. C. $2000\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$. D. $1125\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$.

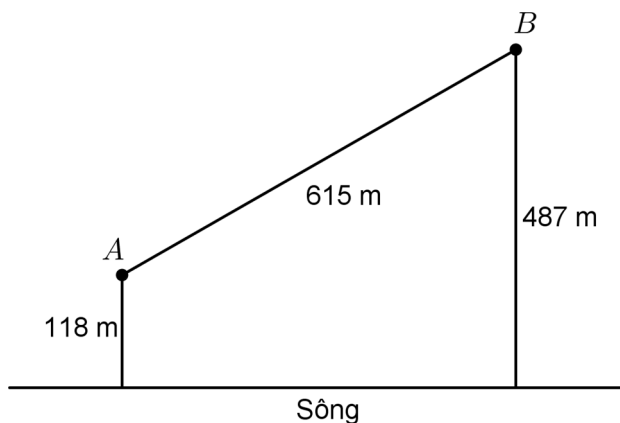
Câu 21: Một trang trại chăn nuôi dự định xây dựng một hầm biogas với thể tích 12 m^3 để chứa chất thải chăn nuôi và tạo khí sinh học. Dự kiến hầm chứa có dạng hình hộp chữ nhật có chiều sâu gấp rưỡi chiều rộng. Hãy xác định các kích thước đáy (dài, rộng – tính theo đơn vị m, làm tròn đến 2 chữ số thập phân sau dấu phẩy) của hầm biogas để thi công tiết kiệm nguyên vật liệu nhất (diện tích toàn phần nhỏ nhất) (không tính đến bề dày của thành bể).

- A. Dài 2,42 m và rộng 1,82 m. B. Dài 2,74 m và rộng 1,71 m.
C. Dài 2,26 m và rộng 1,88 m. D. Dài 2,19 m và rộng 1,91 m.

Câu 22: Người ta muốn làm một cái bình thủy tinh hình lăng trụ đứng có nắp đáy, đáy là tam giác đều để đựng 16 lít nước. Để tiết kiệm chi phí nhất (không tính đến độ dày tấm thủy tinh) thì cạnh đáy của bình là bao nhiêu?

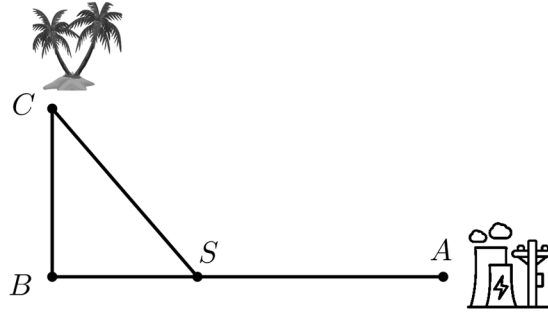
- A. 4 m. B. 4 dm. C. $2\sqrt[3]{2}$ dm. D. $2\sqrt[3]{4}$ m.

Câu 23: Cho hai vị trí A , B cách nhau 615 m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118 m và 487 m. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước và mang về B . Tính độ dài đoạn đường ngắn nhất mà người đó phải đi.



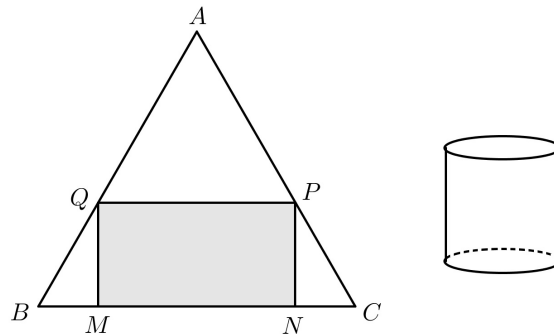
- A. 569,5 m. B. 671,4 m. C. 779,8 m. D. 741,2 m.

Câu 24: Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C . Khoảng cách ngắn nhất từ C đến B là 1 km. Khoảng cách từ B đến A là 4 km. Mỗi km dây điện đặt dưới nước mất 5000 USD, còn đặt dưới đất mất 3000 USD. Hỏi điểm S trên bờ cách A bao nhiêu để khi mắc dây điện từ A qua S rồi đến C là ít tốn kém nhất?



- A. 2 km. B. $\frac{13}{4}$ km. C. $\frac{5}{2}$ km. D. 3 km.

Câu 25: Người ta muốn làm một chiếc thùng hình trụ không đáy từ nguyên liệu là mảnh tôn hình tam giác đều ABC có cạnh bằng 90 cm. Người ta cắt mảnh tôn hình chữ nhật $MNPQ$ từ mảnh tôn nguyên liệu (với M, N thuộc cạnh BC ; P và Q tương ứng thuộc cạnh AC và AB) để tạo thành hình trụ có chiều cao bằng MQ . Thể tích lớn nhất của chiếc thùng có thể làm được là:

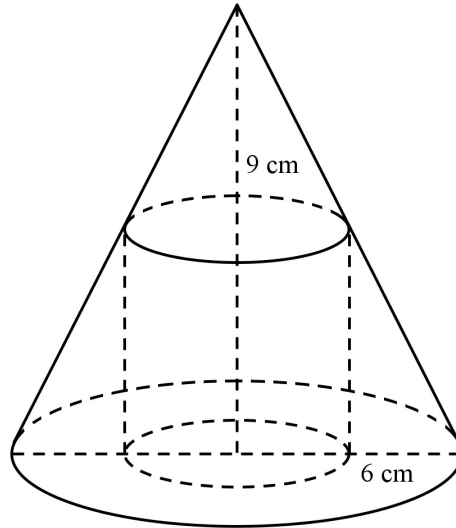


- A. $\frac{91125}{4\pi} \text{ cm}^3$. B. $\frac{91125}{2\pi} \text{ cm}^3$. C. $\frac{108000\sqrt{3}}{\pi} \text{ cm}^3$. D. $\frac{13500\sqrt{3}}{\pi} \text{ cm}^3$.

Câu 26: Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón (không có nắp) có thể tích 27 cm^3 với chiều cao là h và bán kính đáy là r . Để lượng giấy tiêu thụ là ít nhất thì giá trị của r là:

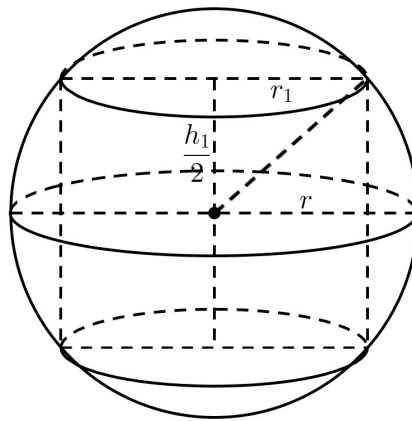
- A. $r = \sqrt[3]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$. B. $r = \sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}$. C. $r = \sqrt[3]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$. D. $r = \sqrt[6]{\frac{3^6}{2\pi^2}}$.

Câu 27: Cho khối nón có chiều cao 9 cm và bán kính đáy 6 cm. Tìm thể tích lớn nhất của khối trụ nội tiếp khối nón (như hình vẽ).



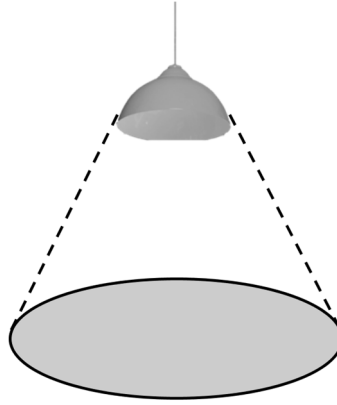
- A. $V = 36\pi$. B. $V = 54\pi$. C. $V = 48\pi$. D. $V = \frac{81}{2}\pi$.

Câu 28: Cho hình trụ chiều cao h_1 , bán kính r_1 nội tiếp trong hình cầu bán kính r . Xác định chiều cao h_1 và bán kính r_1 của khối trụ để nó có thể tích lớn nhất.



- A. $h_1 = \frac{2\sqrt{3}r}{3}; r_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}r$. B. $h_1 = \frac{3\sqrt{3}r}{3}; r_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}r$.
 C. $h_1 = \frac{2\sqrt{3}r}{5}; r_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}r$. D. $h_1 = \frac{2\sqrt{3}r}{3}; r_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}r$.

Câu 29: Nhà Nam có một chiếc bàn tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$ m. Nam muốn mắc một bóng điện ở phía trên và chính giữa chiếc bàn sao cho mép bàn nhận được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C của bóng điện được biểu thị bởi công thức $C = c \frac{\sin \alpha}{l^2}$ (α là góc tạo bởi tia sáng tới mép bàn và mặt bàn, c là hằng số tỉ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng, l là khoảng cách từ mép bàn tới bóng điện). Khoảng cách Nam cần treo bóng điện tính từ mặt bàn là:



- A. 1 m. B. 1,2 m. C. 1,5 m. D. 2 m.

Câu 30: Một cửa hàng bán bưởi, với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5.000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

- A. 44.000 đồng. B. 43.000 đồng. C. 42.000 đồng. D. 41.000 đồng.

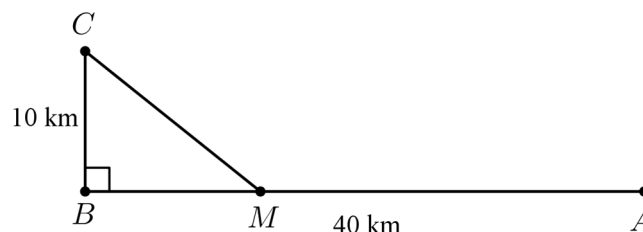
Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1: Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm được tính theo công thức $V(t) = \frac{1}{100} \left(30t^3 - \frac{t^4}{4} \right)$

(m^3) ($0 \leq t \leq 90$). Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $v(t) = V'(t)$.

- a) Thể tích nước sau 10 phút là 80 m^3 .
- b) Tốc độ bơm nước tại thời điểm $t = 20$ phút là $280 (\text{m}^3/\text{phút})$.
- c) Sau 60 phút, tốc độ bơm nước giảm.
- d) Tốc độ bơm nước cao nhất là $1000 (\text{m}^3/\text{phút})$.

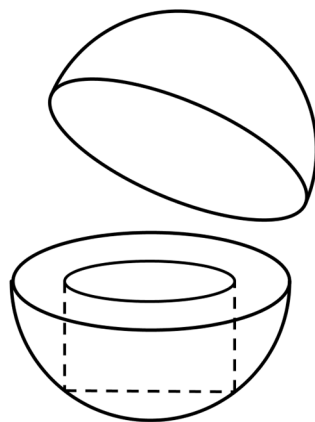
Câu 2: Một người cần đi từ khách sạn A bên bờ biển đến hòn đảo C . Biết rằng khoảng cách từ đảo C đến bờ biển là 10 km ($BC = 10 \text{ km}$), khoảng cách AB từ khách sạn A đến điểm gần nhất tính từ đảo C vào bờ là 40 km ($AB = 40 \text{ km}$). Người đó có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy. Biết chi phí đi đường thủy là $5 \text{ USD} / \text{km}$, đường bộ là $3 \text{ USD} / \text{km}$.



- a) Chi phí đi đường thủy thẳng từ A đến C là 200 USD .
- b) Chi phí đi đường bộ cao nhất là 120 USD .
- c) Người đó đi đường bộ trên bờ biển từ A đến M và đi đường thủy từ M đến C . Nếu đặt $BM = x$ km thì hàm số tính chi phí là $f(x) = \sqrt{100 + x^2} + (40 - x)$.

d) Để tiết kiệm nhất, người đó phải đi đường bộ một khoảng 32,5 km.

Câu 3: Một công ty mỹ phẩm chuẩn bị ra một mẫu sản phẩm dưỡng da mới mang tên Ngọc Trai. Với thiết kế là khối cầu như viên ngọc trai khổng lồ, bên trong là một khối trụ bên trong nửa khối cầu để đựng kem dưỡng, như hình vẽ (hình ảnh chỉ mang tính chất minh họa). Theo dự kiến nhà sản xuất có dự định để khối cầu có bán kính là $R = 3\sqrt{3}$ cm.



a) Nếu khối trụ có chiều cao bằng 3 cm thì bán kính đáy của nó là $3\sqrt{2}$ cm.

b) Nếu thể tích của khối trụ là 46π cm³ thì chiều cao của nó bằng 2 cm.

c) Hàm số (theo biến h là chiều cao khối trụ) tính thể tích khối trụ là $f(h) = -\pi \cdot h^3 + \pi R^2 \cdot h$ với $h \in (0; R)$.

d) Thể tích đựng kem lớn nhất của khối trụ đó là: 54π cm³.

Câu 4: Hằng ngày mực nước của một hồ thủy điện lên và xuống theo lượng nước mưa và các suối nước đổ về hồ. Từ lúc 8h sáng, độ sâu của mực nước trong hồ lên xuống sau thời gian t (tiếng) trong ngày được các chuyên gia tính toán và dự đoán như sau: $h(t) = 24t + 5t^2 - \frac{t^3}{3}$ (mét) ($0 \leq t \leq 16$)

. Theo tính toán đó:

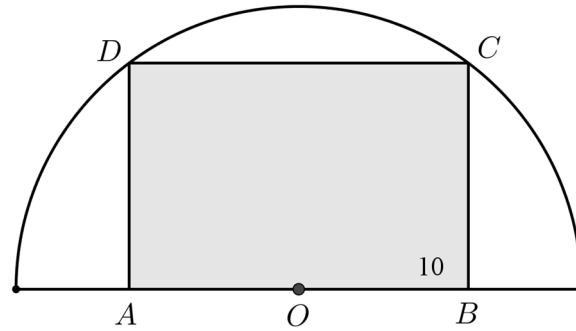
a) Vào 10h sáng, mực nước trong hồ đạt trên 65 m.

b) Chưa đầy 3 tiếng kể từ 8h sáng, mực nước trong hồ đã cao trên 110 m.

c) Mực nước cao nhất có thể đạt được là 432 m.

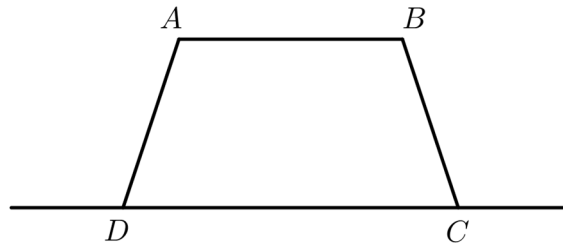
d) Biết rằng theo quy định, phải xả nước khi mực nước đạt cao nhất, và phải thông báo cho các hộ dân di dời trước khi xả nước 5 tiếng đồng hồ. Vậy cần thông báo di dời vào lúc 15h chiều cùng ngày.

Câu 5: Cho hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp nửa đường tròn tâm O , bán kính $R = 10$ (cạnh AB của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của đường tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp).



- a) Nếu đặt $AB = 2x$ thì diện tích hình chữ nhật đã cho là $f(x) = 2x\sqrt{100 - x^2}$ ($0 < x < 10$).
- b) Trong trường hợp $ABCD$ là hình vuông thì cạnh của nó có độ dài là $2\sqrt{5}$.
- c) Diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ là 100 (đvdt).
- d) Chu vi lớn nhất của hình chữ nhật $ABCD$ đạt được khi nó là hình vuông.

Câu 6: Một người nông dân có ba tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài 5 mét và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ (bờ sông là đường thẳng CD không phải rào).



- a) Nếu rào $ABCD$ thành hình vuông thì diện tích của nó là 25 m^2 .
- b) Chu vi hình thang cân $ABCD$ không vượt quá 30 m.
- c) Nếu đặt $CD = x$ thì diện tích hình thang là $S = \frac{1}{2}\sqrt{(15-x)(x+5)}^3 \text{ m}^2$.
- d) Ông ta có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là $\frac{75\sqrt{3}}{4} \text{ m}^2$.

Câu 7: Một gia đình cần xây một cái bể nước hình trụ bán kính r mét, chiều cao h mét có thể chứa được 150 m^3 có đáy được làm bằng bê tông, thành làm bằng tôn, bề mặt làm bằng kính. Biết giá thành vật liệu làm bằng bê tông là 100.000 đồng/ m^2 , tôn là 90.000 đồng/ m^2 , kính là 120.000 đồng/ m^2 . (Đơn vị độ dài làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy).

- a) Nếu chiều cao hình trụ bằng 5 thì bán kính đáy của nó bằng 9,55 m.
- b) Nếu đường kính đáy và chiều cao hình trụ bằng nhau thì chúng cùng bằng 3,63 m.
- c) Chi phí xây dựng bể nước là: $f(r) = 220.000\pi r^2 + \frac{27.000.000}{r}$ (đồng).
- d) Chi phí thấp nhất (làm tròn đến hàng đơn vị) cần dùng để xây bể nước đó là 15.039.288đ.

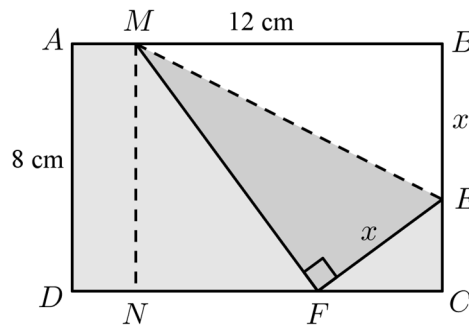
Câu 8: Một ca sĩ có buổi diễn âm nhạc có giá vé đã thông báo là 600 đô la thì sẽ có 1000 người đặt vé. Tuy nhiên sau khi đã có 1000 người đặt vé với giá 600 đô la thì quản lý kinh doanh của ca sĩ này nhận thấy, theo kinh nghiệm các buổi diễn trước, cứ mỗi 20 đô la giảm giá vé thì sẽ thu hút thêm 100 người mua vé nên ông quyết định mở ra một chương trình giảm giá vé (chỉ giảm 1 lần).

- a) Số tiền thu được sau khi bán 1000 vé đầu tiên là 600.000 đô la.
- b) Gọi x là số lần giảm bớt đi 20 đô la trong giá vé. Khi đó giá vé là $600 - 20x$ đô la.
- c) Số tiền thu thêm được sau khi giảm giá vé là: $f(x) = (600 - 20x)(1000 + 100x)$ đô la.
- d) Giá vé phù hợp để có được số tiền vé thu vào sau khi giảm giá là cao nhất là 400 đô la.

Câu 9: Người ta cần xây một hồ chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3} \text{ m}^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây hồ là 600.000 đồng/ m^2 .

- a) Gọi x (m) là chiều rộng của đáy hồ. Khi đó chiều cao của hồ là $h = \frac{500}{3x^2}$ (m).
- b) Diện tích cần xây là $S(x) = 2x^2 + \frac{500}{x}$ (m^2).
- c) Kích thước hồ lý tưởng là $10(\text{m}) \times 5(\text{m}) \times \frac{10}{3}(\text{m})$.
- d) Chi phí thuê nhân công thấp nhất là 85 triệu đồng.

Câu 10: Cho một tờ giấy hình chữ nhật $ABCD$ chiều dài 12 cm và chiều rộng 8 cm. Gấp góc bên phải của tờ giấy sao cho sau khi gấp, đỉnh của góc đó chạm đáy dưới như hình vẽ.



- a) Đặt $EF = x$ (cm) thì $FC = \sqrt{16x - 64}$ (cm).
- b) Độ dài $MF = \frac{x+8}{\sqrt{16x-64}}$.
- c) Hàm số tính độ dài nếp gấp là $f(x) = \frac{x^3}{x-4}$ với $4 < x < 8$.
- d) Độ dài nếp gấp nhỏ nhất bằng $6\sqrt{3}$ (cm).

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Một công ty sữa muốn thuê công ty bao bì sản xuất vỏ một hộp sữa dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông. Công ty bao bì báo giá tổng chi phí cho mỗi dm^2 vỏ hộp là 1200 đồng (cam kết không có chi phí phát sinh). Vậy nếu công ty sữa muốn chi trả cho mỗi vỏ hộp sản xuất là 9600 đồng thì có thể thiết kế ra hộp sữa đựng tối đa bao nhiêu lít (giả sử độ dày vỏ hộp không đáng kể)?

ĐS:

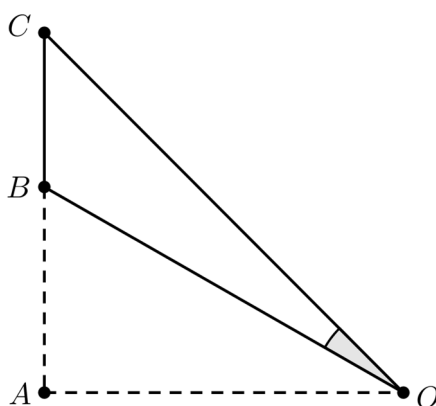
Câu 2: Một công ty sữa muốn thuê công ty bao bì sản xuất vỏ một hộp sữa dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông. Công ty bao bì báo giá tổng chi phí cho mỗi dm^2 vỏ hộp là 1200 đồng (cam kết không có chi phí phát sinh). Vậy nếu công ty sữa muốn thiết kế một hộp sữa có dung tích là 900 ml thì chi phí tối ưu nhất để chi trả cho mỗi vỏ hộp sản xuất là bao nhiêu nghìn đồng?

ĐS:

Câu 3: Chi phí về nhiên liệu của một con tàu được chia làm 2 phần. Trong đó phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghìn đồng/giờ. Phần thứ hai tỷ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v = 10$ km/h thì phần thứ hai bằng 30 nghìn đồng/giờ. Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nhiên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất? (đơn vị km/h).

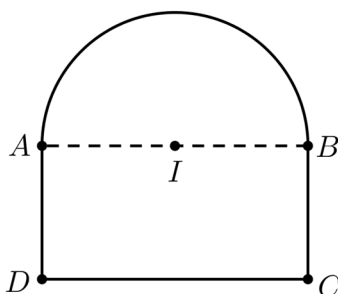
ĐS:

Câu 4: Một màn ảnh hình chữ nhật cao $1,4\text{ m}$ được đặt ở độ cao $1,8\text{ m}$ so với tầm mắt (tính đầu mép dưới của màn ảnh). Hỏi, để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng sao cho góc nhìn lớn nhất thì vị trí đứng cách màn ảnh là bao nhiêu?



ĐS:

Câu 5: Một cửa sổ có hình dạng như hình bên, bao gồm: một hình chữ nhật ghép với nửa hình tròn có tâm nằm trên cạnh của hình chữ nhật. Biết rằng tổng độ dài đường viền cho phép của cửa sổ là 4 mét. Hỏi diện tích lớn nhất của cửa sổ có thể làm được là bao nhiêu?



ĐS:

Câu 6: Giá trị lớn nhất của thể tích khối nón nội tiếp trong khối cầu có bán kính 10 là bao nhiêu?

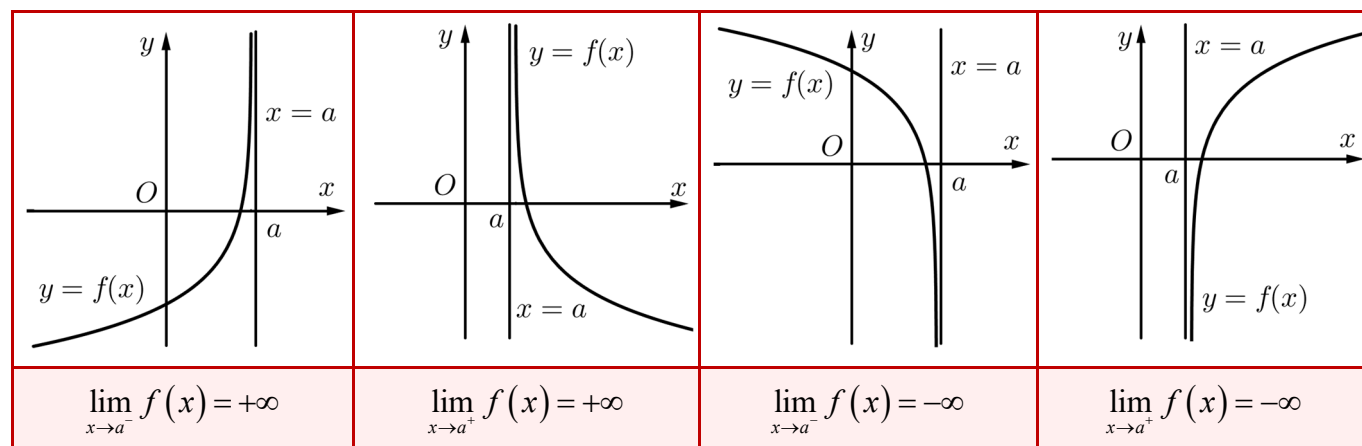
BÀI 3: ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

1. Đường tiệm cận đứng

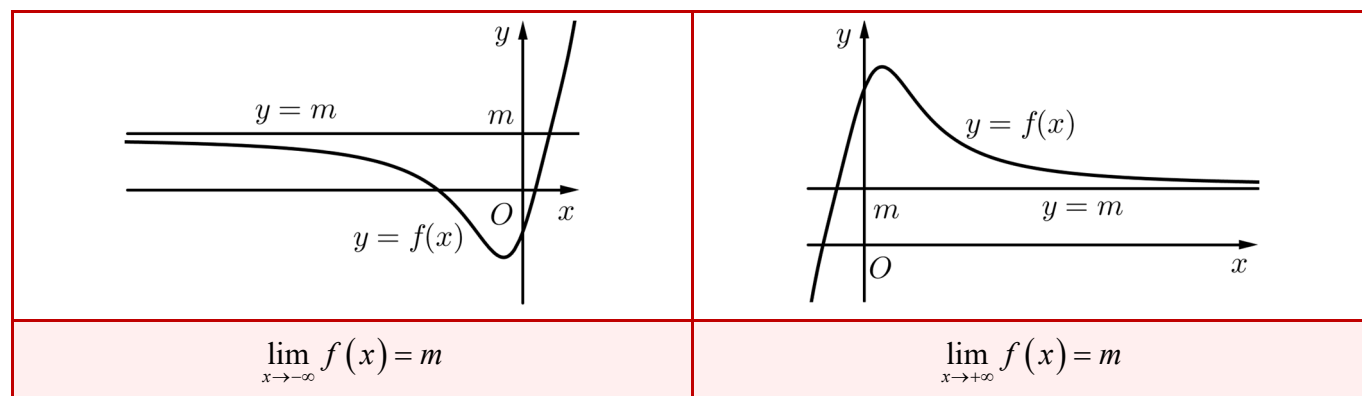
Đường thẳng $x = a$ được gọi là một **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty.$$



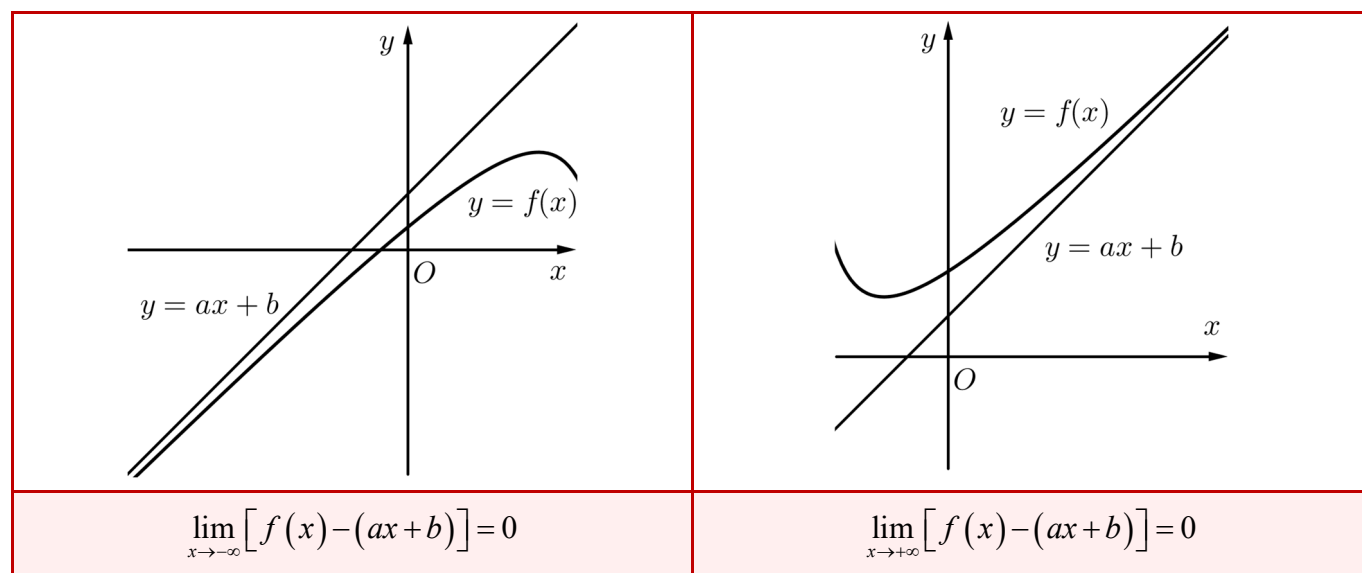
2. Đường tiệm cận ngang

Đường thẳng $y = m$ được gọi là một **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m$.



3. Đường tiệm cận xiên

Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$, được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

**Nhận xét:**

a) Trong trường hợp tổng quát, có thể tìm các hệ số a, b trong phương trình của đường tiệm cận xiên $y = ax + b$ theo công thức như sau:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] \quad \text{hoặc} \quad a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$$

b) Khi $a = 0$ thì đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = b$.

4. Tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$)

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng: $x = -\frac{d}{c}$, tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c}$ và không có tiệm cận xiên.

5. Tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng: $x = -\frac{n}{m}$, tiệm cận xiên: $y = \frac{a}{m}x - \frac{an - bm}{m^2}$ và không có tiệm cận ngang.

DẠNG TOÁN: TÌM TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ**Tìm tiệm cận ngang**

Ta tính đủ hai giới hạn sau:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m \Rightarrow y = m$ là tiệm cận ngang.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = n \Rightarrow y = n$ là tiệm cận ngang.

CASIO: Nhập $f(X)$ và CALC với $X = 99999$, $X = -99999$, kết quả ra hằng số.

Chú ý:

Cho đồ thị hàm phân thức $(C): y = \frac{f(x)}{g(x)}$ trong đó $f(x), g(x)$ là các hàm đa thức.

- Bậc tử < bậc mẫu: (C) có tiệm cận ngang $y = 0$.
- Bậc tử = bậc mẫu: (C) có tiệm cận ngang $y = \frac{a}{b}$ với a, b lần lượt là hệ số của số hạng có bậc cao nhất ở tử và ở mẫu.
- Bậc tử > bậc mẫu: (C) không có tiệm cận ngang.

Tìm tiệm cận đứng

Ta tìm các điểm mà tại đó hàm số không xác định (thường là nghiệm của mẫu $x = a$). Sau đó tính hai giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = a$ là tiệm cận đứng.
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = a$ là tiệm cận đứng.

Chú ý:

- Chỉ cần 1 trong 4 điều kiện trên thỏa mãn là đủ.
- Riêng với hàm phân thức thì $x = a$ thường là nghiệm của mẫu nhưng không nghiệm của tử.

CASIO: Nhập $f(X)$ và CALC với $X = a + 0,00001$ và $X = a - 0,00001$ với a thường là nghiệm của mẫu, kết quả ra số dương lớn $(+\infty)$ hoặc số âm lớn $(-\infty)$.

Tìm tiệm cận xiên

Ta tính cả 2 cặp giới hạn sau:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] \text{ và } a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$$

Chú ý: $a, b \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$.

Khi đó (các) đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

CASIO: Nhập $\frac{f(X)}{X}$ và CALC với $X = 99999$ để tìm a , nhập $f(X) - a \cdot X$ và CALC với $X = 99999$ để tìm b . Lặp lại bước trên với $X = -99999$.

Chú ý:

Đồ thị hàm phân thức có tiệm cận xiên khi và chỉ khi bậc của đa thức tử lớn hơn bậc của đa thức mẫu 1 bậc. Khi đó để tìm tiệm cận xiên ta chỉ cần chia tử cho mẫu được đa thức thương $ax + b$. Suy ra đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Ví dụ 1: Tìm các tiệm cận đứng của các đồ thị hàm số sau (nếu có):

a) $y = \frac{2x+3}{-x+6}$

b) $y = \frac{x+1}{2x^2+x-1}$

c) $y = \frac{x+1}{2x^2+x+1}$

d) $y = \frac{2x^2 + x - 1}{x + 1}$

e) $y = 5 - \frac{2}{x^2}$

f) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$

g) $y = \ln(x - 2)$

h) $y = e^{x+3}$

i) $y = \frac{\sqrt{4x^2 - x + 1}}{2x + 1}$

Ví dụ 2: Tìm các tiệm cận ngang của các đồ thị hàm số sau (nếu có):

a) $y = \frac{-3x + 2}{x - 1}$

b) $y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{-5x^2 - 3}$

c) $y = \frac{-5x^3 - 2x + 7}{2x + 3}$

d) $y = \frac{-3x^2 + 6x - 1}{2x^3 + 1}$

e) $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}$

f) $y = \frac{\sqrt{3 + x^2}}{x}$

g) $y = \frac{1 - 3x}{\sqrt{4x^2 - 1} - x + 1}$

h) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3} - x$

i) $y = 2x + 1 - \sqrt{4x^2 + 3}$

Ví dụ 3: Tìm các tiệm cận xiên của các đồ thị hàm số sau (nếu có):

a) $y = \frac{2x + 1}{x + 1}$

b) $y = \frac{x^2}{1 - x}$

c) $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 3}$

d) $y = 2x - 3 + \frac{1}{x + 2}$

e) $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$

f) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

g) $y = \frac{2x - 1}{3x^2 + 4x}$

h) $y = \frac{x^3 + 1}{x^2}$

i) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$

Ví dụ 4: Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{x - 1}{x^2 - mx + m}$ có đúng 1 tiệm cận đứng.

Ví dụ 5: Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{(m + 1)x - 5m}{2x - m}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

Ví dụ 6: Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{3x^2 - x}{x + 1}$ tạo với 2 trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng bao nhiêu?

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = \frac{2mx + m}{x - 1}$. Với giá trị nào của m thì TCD, TCN của đồ thị hàm số cùng 2 trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8?

Ví dụ 8: Để loại bỏ $p\%$ một loài tảo độc khỏi một hồ nước, người ta ước tính chi phí bỏ ra là

$$C(p) = \frac{45p}{100 - p} \text{ (triệu đồng), với } 0 \leq p < 100.$$

Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(p)$ và nêu ý nghĩa thực tiễn của đường tiệm cận này.

Ví dụ 9: Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian t cho bởi công thức $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$, với y được tính theo mg/l và t được tính theo giờ, $t \geq 0$. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = y(t)$. Từ đó, có nhận xét gì về nồng độ oxygen trong hồ khi thời gian t trở nên rất lớn?

(Theo: www.researchgate.net/publication/264903978_Microrespirometric_characterization_of_activated_sludge_inhibition_by_copper_and_zinc)

Ví dụ 10: Theo thuyết tương đối hẹp, khối lượng m (kg) của một hạt phụ thuộc vào tốc độ di chuyển v (km/s) của nó trong hệ quy chiếu quán tính theo công thức $m = m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, trong đó m_0 là

khối lượng nghỉ của hạt, $c = 300\,000$ km/s là tốc độ ánh sáng.

a) Khi hạt di chuyển với tốc độ càng gần tốc độ ánh sáng thì khối lượng của hạt thay đổi thế nào? Điều này thể hiện trên đồ thị hàm số $m = m(v)$ ở hình bên như thế nào?

b) Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số khối lượng hạt $m = m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

(Theo: <https://www.britannica.com/science/relativistic-mass>).

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1: Tìm các tiệm cận (đứng, ngang, xiên) của các đồ thị hàm số sau (nếu có):

a) $y = \frac{2x-1}{1-x}$

b) $y = \frac{-2x+3}{3x^2+1}$

c) $y = \frac{-2x^3+3}{3x^2+1}$

d) $y = \frac{x+2}{x^2-3x+2}$

e) $y = \frac{x^2-4x+2}{-2x+3}$

f) $y = \frac{2x^2-2}{x^2+2}$

g) $y = \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}$

h) $y = \frac{x^2-1}{\sqrt{x+1}}$

i) $y = \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}$

j) $y = \frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$

k) $y = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-3}}$

l) $y = 2x+1-\sqrt{x^2+1}$

Câu 2: Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2+mx+m}$ có đúng 1 tiệm cận đứng.

Câu 3: Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x-\sqrt{mx^2+1}}{x-1}$ có đúng 2 tiệm cận ngang.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x^2-2mx+4}$. Tìm m để đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{2x^2+(m+2)x+m-1}{x+1}$. Tìm m để đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;1)$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{2x^2-3x+m}{x-m}$. Tìm m để đồ thị có tiệm cận đứng và tiệm cận xiên cắt nhau tại điểm có tung độ bằng 7.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{(2x-1)\sqrt{mx^2-3}}{1-5x}$. Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận xiên có hệ số góc bằng $-\frac{2}{5}$. Xác định phương trình tiệm cận xiên đó.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{x+1}$ có đồ thị là (C) . Tìm các điểm M trên (C) thỏa mãn khoảng cách từ M tới tiệm cận đứng gấp 4 lần khoảng cách M tới tiệm cận ngang.

Câu 9: Nếu trong một ngày, một xưởng sản xuất được x kilogram sản phẩm thì chi phí trung bình (tính bằng nghìn đồng) cho một sản phẩm được cho bởi công thức: $C(x) = \frac{50x+2000}{x}$. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = C(x)$.

Câu 10: Giả sử số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2000 được mô tả bởi hàm số $N(t) = \frac{25t+10}{t+5}$, $t \geq 0$ trong đó $N(t)$ được tính bằng nghìn người.

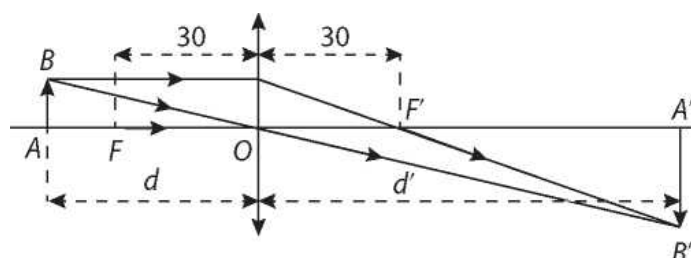
a) Tính số dân của thị trấn đó vào các năm 2000 và 2015.

b) Tính đạo hàm $N'(t)$ và $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$. Từ đó, giải thích tại sao số dân của thị trấn đó luôn tăng nhưng sẽ không vượt quá một ngưỡng nào đó.

Câu 11: Đường viền bóng của đèn ngủ lên tường là đồ thị của hàm số $y = 55 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2+144}$ với x và y tính bằng đơn vị centimét. Chứng minh rằng $y = 55 - \frac{1}{2}x$ là một tiệm cận xiên của đồ thị hàm số này.



Câu 12: Một thấu kính hội tụ có tiêu cự $f = 30$ cm. Trong Vật lí, ta biết rằng nếu đặt vật thật AB cách quang tâm O của thấu kính một khoảng d (cm) lớn hơn 30 cm thì được ảnh thật $A'B'$ cách quang tâm của thấu kính một khoảng d' (cm). Ngược lại, nếu $0 < d < 30$ thì ta có ảnh ảo. Công thức của thấu kính là $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$.



- a) Từ công thức thấu kính, tìm biểu thức xác định d' theo d .
- b) Xem biểu thức của d' ở câu a) là một hàm số theo d , kí hiệu là $h(d)$. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $h(d)$.

Câu 13: Tại một công ty sản xuất đồ chơi A, công ty phải chi 50 000 USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi A, công ty phải trả 5 USD cho nguyên liệu thô và nhân công. Gọi x ($x \geq 1$) là số đồ chơi A mà công ty đã sản xuất và $T(x)$ (đơn vị USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi A. Người ta xác định chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A là $M(x) = \frac{T(x)}{x}$.

- a) Xem $M(x)$ là hàm số theo x xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số này.
- b) Nêu nhận xét về chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A khi x đủ lớn.

Câu 14: Một bể chứa 5000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25 lít/phút.

- a) Chứng tỏ nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là $f(t) = \frac{30t}{200+t}$.
- b) Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.
- c) Nêu nhận xét về nồng độ muối trong bể sau thời gian t ngày càng lớn.

Câu 15: Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x (tháng) được tính theo công thức $S(x) = 200 \left(5 - \frac{9}{2+x} \right)$, trong đó $x \geq 1$ (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014).

- a) Xem $y = S(x)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.
- b) Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong x (tháng) khi x đủ lớn.

Câu 16: Giả sử khối lượng còn lại của một chất phóng xạ (gam) sau t ngày phân rã được cho bởi hàm số $m(t) = 15e^{-0,012t}$. Khối lượng $m(t)$ thay đổi ra sao khi $t \rightarrow +\infty$?

Câu 17: Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là

$$C(x) = 2x + 50 \text{ (triệu đồng)}.$$

Khi đó $f(x) = \frac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x)$ giảm và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Tính chất này nói lên điều gì?

Câu 18: Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng 144 m². Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là x (mét).

- a) Viết biểu thức tính chu vi $P(x)$ (mét) của mảnh vườn.
- b) Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $P(x)$.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
- B. Đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận ngang.
- C. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -1$.
- D. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là $x = 1$ và $x = -1$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có tập xác định là $D = (-3; 3) \setminus \{-1; 1\}$, liên tục trên các khoảng của tập D và có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) &= -\infty; & \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) &= -\infty; & \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) &= -\infty; \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= +\infty; & \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= +\infty; & \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= +\infty. \end{aligned}$$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số có đúng 2 tiệm cận đứng là $x = -3$ và $x = 3$.
- B. Đồ thị hàm số có đúng 2 tiệm cận đứng là $x = -1$ và $x = 1$.
- C. Đồ thị hàm số có đúng 4 tiệm cận đứng là $x = \pm 1$ và $x = \pm 3$.
- D. Đồ thị hàm số có 6 tiệm cận đứng.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ. Hỏi mệnh đề nào dưới đây sai?

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
y'				
y				

y' row: $-$ (between $-\infty$ and -1), $-$ (between -1 and 2), 0 (at 2), $+$ (between 2 and $+\infty$)
 y row: $+\infty$ (at $-\infty$), $+\infty$ (at -1), $+\infty$ (at 2), $+\infty$ (at $+\infty$)
 Arrows: From $+\infty$ at $-\infty$ to $-\infty$ at -1 ; from $+\infty$ at -1 to -1 at 2 ; from -1 at 2 to $+\infty$ at $+\infty$.

- A. Đồ thị hàm số có TCN là $y = -1$.
- B. Hàm số đạt cực trị tại $x = 2$.
- C. Hàm số không có đạo hàm tại $x = -1$.
- D. Đồ thị hàm số có TCD là $x = -1$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'			+	-
y			$+\infty$	0

$-\infty$ $\nearrow$ 1 $\searrow$

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 5: Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ nhận:

- A. $x=2$ là TCD, $y=1$ là TCN. B. $x=-2$ là TCD, $y=1$ là TCN.
 C. $x=1$ là TCD, $y=-2$ là TCN. D. $x=-2$ là TCD, $y=-1$ là TCN.

Câu 6: Đồ thị hàm số nào dưới đây có đường tiệm cận xiên?

- A. $y = \frac{x^2+2}{x-10}$. B. $y = \frac{x-10}{x^2+2}$. C. $y = x^2 - x + 3$. D. $y = \frac{x^3-2x^2+3}{x-2}$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{1-x}$ có đồ thị (C). Giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là:

- A. $M(2;1)$. B. $N(-2;1)$. C. $P(1;-2)$. D. $Q(1;2)$.

Câu 8: Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{-4x+5}{2x+3}$ tạo với 2 trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 9: Đồ thị hàm số $y = x\sqrt{1-\frac{1}{x}}$ có:

- A. Tiệm cận đứng là đường thẳng $x=0$. B. Tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$.
 C. Tiệm cận xiên là đường thẳng $y=-x-\frac{1}{2}$. D. Tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x-\frac{1}{2}$.

Câu 10: Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ là:

- A. $x=-2; y=1$. B. $x=2; y=1$. C. $x=\pm 2; y=1$. D. $x=\pm 2; y=0$.

Câu 11: Đồ thị hàm số $y = \frac{1-3x^2}{x^2-6x+9}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

- A. $x=3$ và $y=0$. B. $x=3$ và $y=-3$. C. $x=3$ và $y=1$. D. $x=-3$ và $y=3$.

Câu 12: Đồ thị hàm số $y = \frac{x+4}{\sqrt{x^2-4}}$ có bao nhiêu tiệm cận?

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 13: Tìm các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4x + 3}$.

- A. $x = 1$. B. $x = 1$ và $x = 3$. C. $x = 3$. D. $y = 1$.

Câu 14: Tìm các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x - 3}$.

- A. $y = 1$. B. $y = 3$ và $y = 1$. C. $y = 2$. D. $y = 3$.

Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{3x + 1}$, phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị là:

- A. $y = 2x + \frac{1}{3}$. B. $y = \frac{x}{3} - \frac{7}{9}$. C. $y = \frac{x}{3} + \frac{7}{9}$. D. $y = \frac{x}{3} + \frac{1}{9}$.

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là:

- A. $x = 1$. B. $y = 1$. C. $x = -1$. D. Không tồn tại.

Câu 17: Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - x + 2}}{x - 1}$.

- A. $y = \pm 1$. B. $y = 1$. C. $y = -1$. D. $x = \pm 1$.

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 4}{(x - 1)(x - 2)}$. Đồ thị hàm số có bao nhiêu tiệm cận?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 19: Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - x}{x - 1}$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng:

- A. $\frac{1}{2}$. B. 2. C. $\frac{1}{4}$. D. 1.

Câu 20: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{(x^2 - 1)(x - 2)^2}$ là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 21: Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 20}{\sqrt{x^4 - 16}}$ có số đường tiệm cận là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 22: Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x}$.

- A. $y = 0$. B. $x = 0$. C. Không tồn tại. D. $y = \pm 1$.

Câu 23: Gọi n, d lần lượt là số tiệm cận ngang, tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-1}-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $n+d=1$. B. $n+d=2$. C. $n+d=3$. D. $n+d=4$.

Câu 24: Số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2+2x+3} - x$ là:

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 25: Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-\sqrt{x^2-4}}{x^2-4x+3}$ là:

- A. $y=1$ và $x=3$. B. $y=0, y=1$ và $x=3$.
C. $y=0, x=1$ và $x=3$. D. $y=0$ và $x=3$.

Câu 26: Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

- A. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x+4}{x+2}$ có 1 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận xiên.
B. Đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{x^2-x-2}$ có 2 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận xiên.
C. Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+x+2}$ có 1 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang.
D. Đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$ có 1 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang.

Câu 27: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{mx-1}$. Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng?

- A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$. B. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. C. $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. D. $\forall m \in \mathbb{R}$.

Câu 28: Cho hàm số $y = \frac{2x^2-3x+m}{x-m}$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị của m để (C) không có tiệm cận đứng.

- A. $m=2$. B. $m=1$. C. $m=0$ hoặc $m=1$. D. $m=0$.

Câu 29: Giá trị của m để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+m}$ đi qua điểm $M(2;3)$ là:

- A. 0. B. -2. C. 2. D. 3.

Câu 30: Tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-1}{x^2+2mx-m}$ có 3 đường tiệm cận là:

- A. $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{1; \frac{1}{3}\right\}$. B. $m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.
C. $m \in (-1; 0) \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$. D. $m \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty) \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C) .

- a) Hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.
- b) Đồ thị (C) có 2 đường tiệm cận.
- c) Đồ thị hàm số $y = f(x) + x$ có tiệm cận xiên là $y = x - 2$.
- d) Gọi M là điểm tùy ý thuộc (C) , d là tổng khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận của (C) . Giá trị nhỏ nhất của d là $2\sqrt{2}$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ có đồ thị (C) .

- a) Đồ thị (C) không có tiệm cận đứng.
- b) Đồ thị (C) có 1 tiệm cận xiên.
- c) Đồ thị (C) có 2 tiệm cận ngang.
- d) Đồ thị (C) có tất cả 3 đường tiệm cận.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{1-3x^2}{x^2-6x+9}$.

- a) Đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.
- b) Đồ thị hàm số đã cho chỉ có 1 tiệm cận ngang.
- c) Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.
- d) Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị là $y = 3x - 3$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2-x+2}}{x-1}$.

- a) Đồ thị hàm số không có tiệm cận xiên.
- b) Đồ thị hàm số có các đường tiệm cận ngang là $y = 1$, $y = -1$.
- c) Đồ thị hàm số đã cho có tất cả 3 đường tiệm cận.
- d) Các đường tiệm cận của đồ thị cùng với trục Oy tạo thành 1 đa giác có diện tích bằng 1.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x^2-3x+2}{x+1}$.

- a) Đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận ngang.
- b) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là $x = -1$.
- c) Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị trái dấu.
- d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị cùng với 2 trục tọa độ tạo thành một tam giác cân.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x-2}$ có đồ thị (C) .

- a) Đồ thị (C) luôn có tiệm cận đứng nếu $2a+b \neq 0$.
- b) Nếu $ab > 0$ thì hàm số đã cho luôn đồng biến trên 2 khoảng xác định.
- c) Với $a \neq 0$, tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của (C) tạo với 2 trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích $S = 2a$.
- d) Nếu đồ thị (C) nhận đường thẳng $y = 3$ làm tiệm cận ngang và (C) đi qua điểm $A(3;1)$ thì $a+b = -5$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{(m-1)x+1}{2x+m}$.

- a) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng khi và chỉ khi $m \neq 2$.
- b) Khi $m = 1$, đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận.
- c) Có 4 giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng xác định.
- d) Gọi I là giao điểm của 2 đường tiệm cận. Khi đó 3 điểm $A(4;-6)$, $O(0;0)$, I thẳng hàng khi và chỉ khi $m = -2$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{mx^3}{x^2-x-2}$.

- a) Đồ thị hàm số đã cho luôn có 2 đường tiệm cận đứng là $x = -1$, $x = 2$.
- b) Với $m = 1$, đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận xiên là $y = x+1$.
- c) Khi đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $A(-4;-64)$ thì nó có tiệm cận xiên là $y = 18x-18$.
- d) Khi đồ thị hàm số có tiệm cận xiên thì tiệm cận xiên đó luôn đi qua 1 điểm cố định thuộc trục hoành.

Câu 9: Cho hàm số $y = ax + \sqrt{4x^2+1}$.

- a) Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng.
- b) Đồ thị hàm số đã cho luôn có tiệm cận.
- c) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang khi và chỉ khi $a = \pm 2$.
- d) Có 2 giá trị của a để đồ thị hàm số đã cho có 2 tiệm cận xiên vuông góc.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{x^2-5x+m}{x-2}$.

- a) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng khi $m \neq 6$.
- b) Với $m = 2$, đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y = x-3$.
- c) Hàm số đã cho luôn đồng biến trên 2 khoảng xác định.
- d) Đường tiệm cận xiên và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số hợp với nhau 1 góc bằng 45° .

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Biết đồ thị $y = \frac{(a-2b)x^2 + bx + 1}{x^2 + x - b}$ có đường tiệm cận đứng là $x = 1$ và đường tiệm cận ngang là $y = 0$. Tính $a + 2b$.

ĐS :

Câu 2: Đồ thị hàm số $y = \frac{2x + \sqrt{4x^2 - 3x + 2}}{x - 2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

ĐS:

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x + \sqrt{4x^2 - 3}}{2x + 3}$ có đồ thị là (C) . Gọi m là số tiệm cận của (C) và n là giá trị của hàm số đó tại $x = 1$. Tính tích $m.n$.

ĐS:

Câu 4: Biết 3 đường tiệm cận của đồ thị $(C): y = \frac{6x + 1 - \sqrt{x^2 - 2}}{x - 5}$ cùng với trục Oy tạo thành một đa giác có diện tích S . Khi đó S bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 5: Biết đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 3}{x^2 + 4x + 4}$ có tiệm cận đứng $x = a$ và tiệm cận ngang $y = b$. Khi đó giá trị $a + 2b$ bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{x + 5}{x^2 + 6x + m}$, có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để đồ thị hàm số có 3 tiệm cận?

ĐS:

Câu 7: Tổng tất cả các giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10; 10)$ để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 - 2x + m}{x^2 - m}$ có 2 tiệm cận đứng là bao nhiêu?

ĐS:

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - mx - 2m^2}{x - 2}$. Biết có 2 giá trị của m để đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên, đường tiệm cận đứng cùng với trục hoành tạo thành tam giác có diện tích bằng 8. Khi đó tổng bình phương các giá trị của m là bao nhiêu?

ĐS:

Câu 9: Biết đồ thị hàm số $y = \frac{4x^2 + 5}{x^2 - (m - 2)x - 5}$ có 2 tiệm cận đứng Δ_1, Δ_2 lần lượt nằm bên phải và bên trái trục tung. Gọi d_1, d_2 tương ứng là khoảng cách từ gốc tọa độ đến Δ_1, Δ_2 . Gọi S là tập

tất cả các giá trị nguyên của m thuộc khoảng $[-10;10]$ để $d_1 > d_2$. Tổng các phần tử trong S là bao nhiêu?

ĐS:

Câu 10: Cho hàm số $y = \sqrt{mx^2 + 2x} - x$. Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có 1 đường tiệm cận xiên có hệ số góc dương và đi qua điểm $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

ĐS:

BÀI 4. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ MỘT SỐ HÀM SỐ CƠ BẢN

A. LÝ THUYẾT

1. Sơ đồ khảo sát hàm số

CÁC BƯỚC KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta thực hiện các bước sau đây:

Bước 1. Tìm tập xác định D của hàm số.

Bước 2. Xét sự biến thiên của hàm số

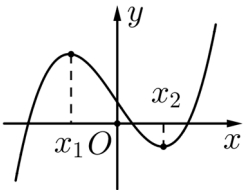
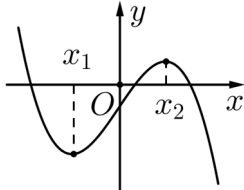
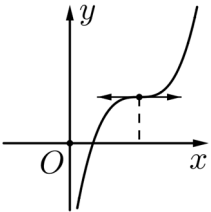
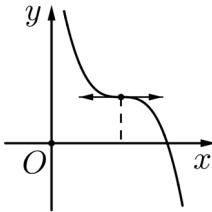
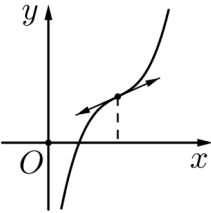
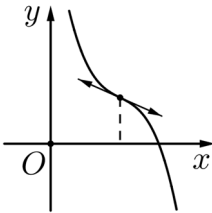
- Tìm đạo hàm y' . Xét dấu y' , xác định khoảng đơn điệu, cực trị (nếu có) của hàm số.
- Tìm giới hạn tại vô cực và giới hạn vô cực của hàm số và các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
- Lập bảng biến thiên của hàm số.

Bước 3. Vẽ đồ thị của hàm số

- Xác định các điểm cực trị (nếu có), giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có và dễ tìm),...
- Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
- Vẽ đồ thị hàm số.

Chú ý: Chỉ ra tâm đối xứng và trục đối xứng của đồ thị hàm số (nếu có).

2. Khảo sát hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt	 $\Delta_{y'} > 0 \Leftrightarrow b^2 - 3ac > 0$	 $\Delta_{y'} > 0 \Leftrightarrow b^2 - 3ac > 0$
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép	 $\Delta_{y'} = 0 \Leftrightarrow b^2 - 3ac = 0$	 $\Delta_{y'} = 0 \Leftrightarrow b^2 - 3ac = 0$
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm	 $\Delta_{y'} < 0 \Leftrightarrow b^2 - 3ac < 0$	 $\Delta_{y'} < 0 \Leftrightarrow b^2 - 3ac < 0$

Bảng biến thiên

$a > 0$					$a < 0$				
x	$-\infty$	$x_{\text{CĐ}}$	x_{CT}	$+\infty$	x	$-\infty$	x_{CT}	$x_{\text{CĐ}}$	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+	-	0	+	0
y	$-\infty$	$y_{\text{CĐ}}$	y_{CT}	$+\infty$	y	$+\infty$	y_{CT}	$y_{\text{CĐ}}$	$-\infty$
$y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt					$y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt				
x	$-\infty$	$-\frac{b}{3a}$		$+\infty$	x	$-\infty$	$-\frac{b}{3a}$		$+\infty$
y'	+	0	+		y'	-	0	-	
y	$-\infty$			$+\infty$	y	$+\infty$			$-\infty$
$y' = 0$ có nghiệm kép					$y' = 0$ có nghiệm kép				
x	$-\infty$			$+\infty$	x	$-\infty$			$+\infty$
y'	+				y'	-			
y	$-\infty$			$+\infty$	y	$+\infty$			$-\infty$
$y' = 0$ vô nghiệm					$y' = 0$ vô nghiệm				

Chú ý:

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ và $y'' = 6ax + 2b$.

Khi đó $y'' = 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$.

Đồ thị của hàm số bậc ba luôn nhận điểm $I(x_0; y_0)$ làm tâm đối xứng, trong đó $x_0 = -\frac{b}{3a}$ là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ và $y_0 = y(x_0)$. Điểm $I(x_0; y_0)$ được gọi là **điểm uốn** của đồ thị này, nó cũng là trung điểm của đoạn thẳng nối 2 điểm cực trị (nếu có).

Nhận dạng đồ thị hàm số bậc ba (C): $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

- Nhận biết dấu hệ số a :
 - Nét cuối đồ thị hướng lên: $a > 0$.
 - Nét cuối đồ thị hướng xuống: $a < 0$.
- Nhận biết dấu hệ số d : Xét giao điểm của đồ thị và trục tung Oy :
 - Nằm phía trên Ox : $d > 0$.
 - Nằm phía dưới Ox : $d < 0$.
 - Trùng với gốc tọa độ O : $d = 0$.

- Nhận biết dấu hệ số c :
 - Hai điểm cực trị nằm về 2 phía so với Oy : $ac < 0$.
 - Hai điểm cực trị nằm về 1 phía so với Oy : $ac > 0$.
 - Một điểm cực trị thuộc trục Oy : $c = 0$.
 - Không có cực trị: $c = 0$ hoặc $ac > 0$.
- Nhận biết dấu hệ số b :
 - Điểm uốn bên phải Oy : $ab < 0$.
 - Điểm uốn bên trái Oy : $ab > 0$.
 - Điểm uốn thuộc trục Oy : $b = 0$.

Ví dụ 1: Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2$ b) $y = -x^3 - 3x + 1$ c) $y = -x^3 + 3x^2 - 1$
 d) $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x$ e) $y = x^3 + x^2 + 2x$ f) $y = -2x^3 + 5$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1: Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số:

a) $y = -x^3 + 3x + 2$ b) $y = x^3 + 4x^2 + 4x$ c) $y = 2x^3 - 3x^2 - 2$
 d) $y = x^3 - x^2 + x$ e) $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$ f) $y = -x^3 + 3x - 1$
 g) $y = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$ h) $y = (x+1)^3 - 3x - 4$ i) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$
 j) $y = x^3 + x - 2$ k) $y = 2x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x - 3$ l) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào?

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		3		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 -1 -1 $-\infty$

A. $y = x^3 - 3x^2 - 1$. B. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. C. $y = x^3 + 3x^2 - 1$. D. $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.

Câu 2: Hàm số nào có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	–	0	–
y	$+\infty$	1	$-\infty$

A. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$.

B. $y = x^3 - x^2 + 2x$.

C. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$.

D. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

Câu 3: Bảng biến thiên sau là của hàm số nào dưới đây?

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	20	-7	$+\infty$	

A. $y = -2x^3 - 3x^2 + 12x$.

B. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

C. $y = -2x^4 - 3x^2 + 12$.

D. $y = 2x^3 - 3x^2 + 12x$.

Câu 4: Bảng biến thiên sau là của hàm số nào dưới đây?

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	+	0	−	0	+
y	$-\infty$	3	−1	$+\infty$	

A. $y = -x^3 + 3x^2 + 3$.

B. $y = x^3 - 3x^2 + 3$.

C. $y = x^3 + 3x^2 + 3$.

D. $y = x^3 - 6x^2 + 3$.

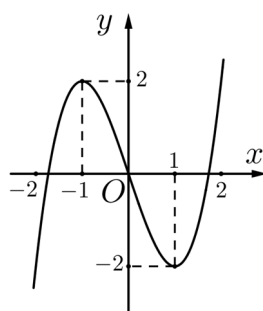
Câu 5: Đồ thị hình bên là của hàm số nào?

A. $y = x^3 + 3x$.

B. $y = x^3 - 3x$.

C. $y = -x^3 + 2x$.

D. $y = -x^3 - 2x$.



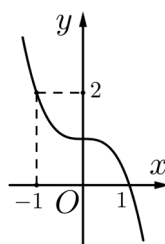
Câu 6: Đồ thị hình bên là của hàm số nào?

A. $y = -x^3 + 1$.

B. $y = -2x^3 + x^2$.

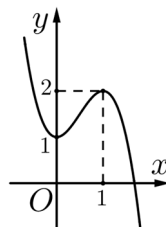
C. $y = 3x^2 + 1$.

D. $y = -4x^3 + 1$.



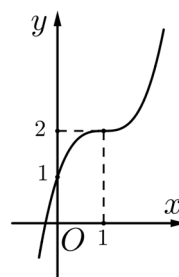
Câu 7: Đồ thị hình bên là của hàm số nào?

- A. $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$.
- B. $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.
- C. $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$.
- D. $y = -2x^3 + 3x^2 + 1$.



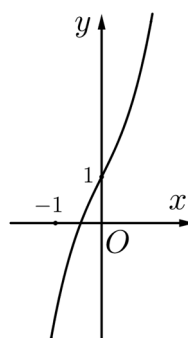
Câu 8: Đồ thị hình bên là của hàm số nào?

- A. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.
- B. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.
- C. $y = x^3 - 3x + 1$.
- D. $y = -x^3 - 3x^2 - 1$.



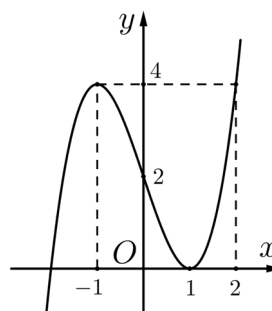
Câu 9: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?

- A. $y = x^3 + 2x + 1$.
- B. $y = x^3 - 2x + 1$.
- C. $y = -x^3 + 2x + 1$.
- D. $y = -x^3 - 2x + 1$.



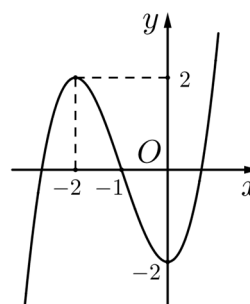
Câu 10: Đường cong hình bên là đồ thị của hàm số nào?

- A. $y = -x^3 + 3x + 2$.
- B. $y = x^3 + 4x - 5$.
- C. $y = -x^3 - 3x + 2$.
- D. $y = x^3 - 3x + 2$.



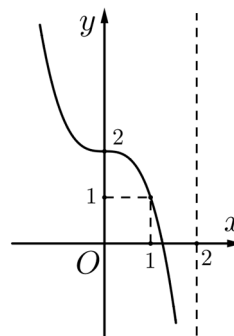
Câu 11: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?

- A. $y = -x^3 - 3x^2 - 2$.
- B. $y = x^3 + 3x^2 - 2$.
- C. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.
- D. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.



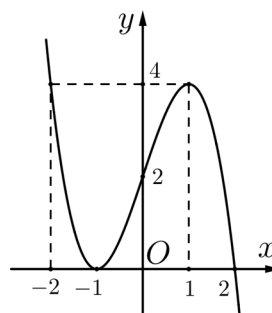
Câu 12: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?

- A. $y = -x^3 + 1$.
 B. $y = -x^3 + 3x + 2$.
 C. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.
 D. $y = -x^3 + 2$.



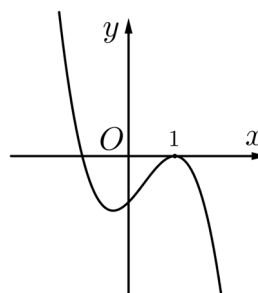
Câu 13: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?

- A. $y = -x^3 - 3x + 2$.
 B. $y = x^3 + 3x - 2$.
 C. $y = x^3 - 3x + 2$.
 D. $y = -x^3 + 3x + 2$.



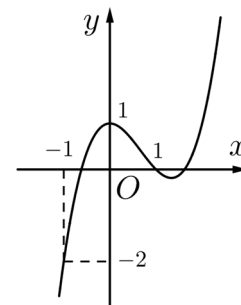
Câu 14: Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào?

- A. $y = x^3 + x^2 - x - 1$.
 B. $y = -x^3 + x^2 + 2x - 1$.
 C. $y = x^3 - x^2 + x - 1$.
 D. $y = -x^3 + x^2 + x - 1$.



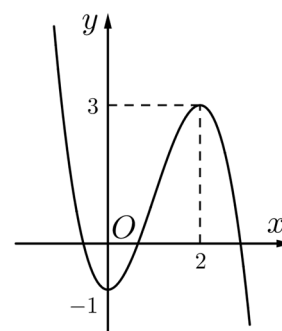
Câu 15: Đồ thị hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?

- A. $y = x^3 - 2x^2 + 1$.
 B. $y = x^3 - x^2 - 1$.
 C. $y = x^3 - 2x^2 + 2$.
 D. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.



Câu 16: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?

- A. $y = x^4 - x^2 + 1$.
 B. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
 C. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.
 D. $y = x^2 - 4x + 3$.



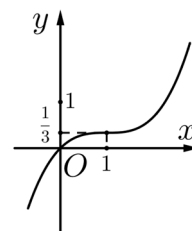
Câu 17: Đồ thị hình bên là của hàm số nào?

A. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$.

B. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 1$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x$.

D. $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$.



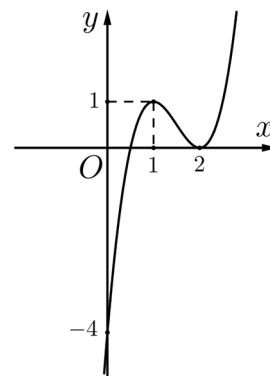
Câu 18: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.

B. $y = -2x^3 + 9x^2 - 12x$.

C. $y = x^3 - 3x + 2$.

D. $y = x^4 - 3x^2 + 2$.



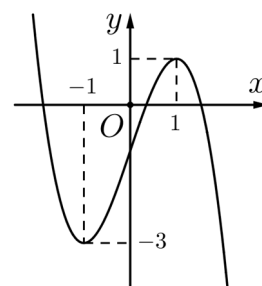
Câu 19: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = -x^2 + x - 1$.

B. $y = x^4 + x^2 - 1$.

C. $y = -x^3 + 3x - 1$.

D. $y = x^3 + x^2 - 1$.



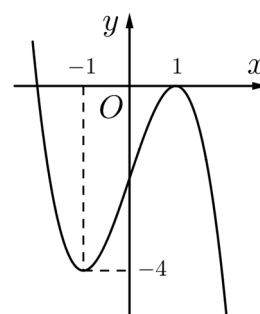
Câu 20: Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = -x^3 + 3x$.

B. $y = x^3 - 3x + 2$.

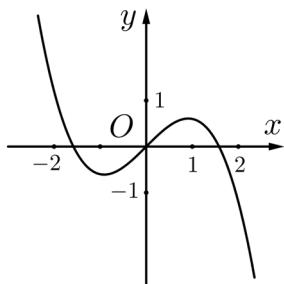
C. $y = x^3 + 3x - 2$.

D. $y = -x^3 + 3x - 2$.

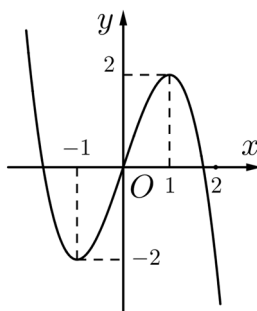


Câu 21: Hàm số $y = -x^3 + 3x$ có đồ thị là hình nào trong các hình dưới đây?

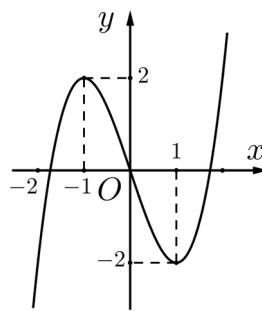
Hình 1



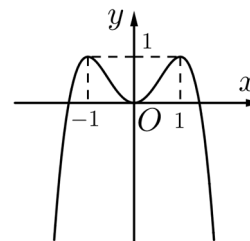
Hình 2



Hình 3



Hình 4



A. Hình 1.

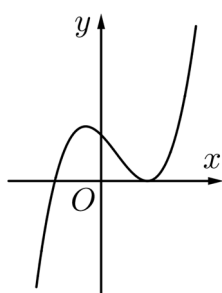
B. Hình 2.

C. Hình 3.

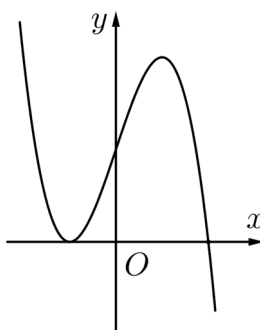
D. Hình 4.

Câu 22: Cho hàm số $y = x^3 + bx^2 - x + d$. Các đồ thị nào dưới đây có thể là đồ thị của hàm số đã cho?

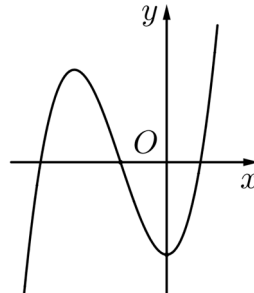
(I)



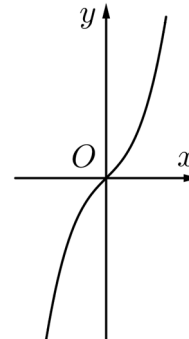
(II)



(III)



(IV)



A. (I).

B. (I) và (III).

C. (I), (III) và (IV).

D. (I), (II), (III) và (IV).

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 4$ có đồ thị như hình vẽ.

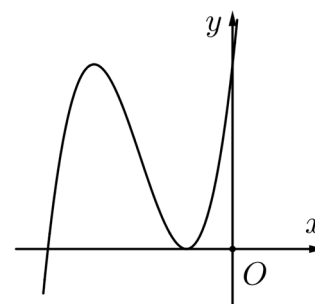
Hàm số $y = f(x)$ là hàm số nào trong các hàm số sau:

A. $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

B. $y = x^3 + 3x^2 + 4$.

C. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$.

D. $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$.



Câu 24: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.

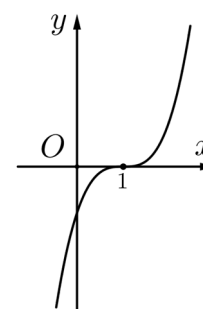
Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

B. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

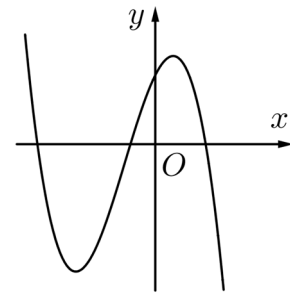
C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

D. $a > 0, b < 0, c > 0, d < 0$.



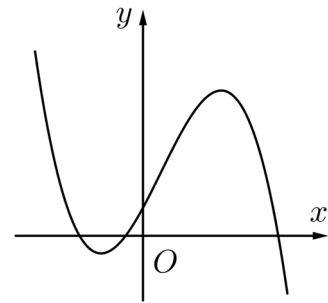
Câu 25: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
- B. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
- C. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.
- D. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.



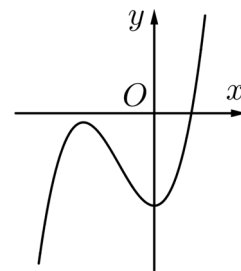
Câu 26: Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ sau. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
- B. $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
- C. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
- D. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.



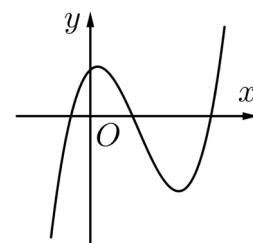
Câu 27: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a > 0, b > 0, c = 0, d < 0$.
- B. $a > 0, b > 0, c = 0, d > 0$.
- C. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
- D. $a > 0, b < 0, c = 0, d < 0$.



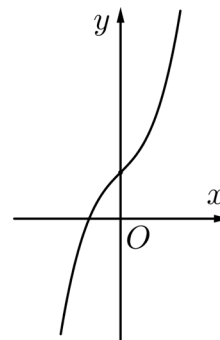
Câu 28: Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
- B. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.
- C. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
- D. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.



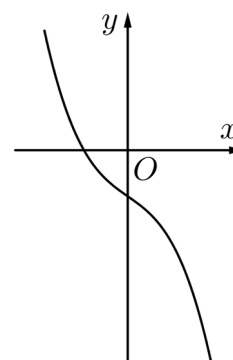
Câu 29: Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.
 B. $a > 0, b = 0, c > 0, d > 0$.
 C. $a > 0, b = 0, c < 0, d > 0$.
 D. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.



Câu 30: Cho đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
 B. $a < 0, b = 0, c > 0, d < 0$.
 C. $a < 0, b = 0, c < 0, d < 0$.
 D. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.



Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1: Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

- a) Hàm số đã cho có cực đại là -1 .
 b) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$.
 c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho là $I(0; 1)$.
 d) Giá trị biểu thức $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ là 11.

Câu 2: Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		2		$-\infty$
		-2			

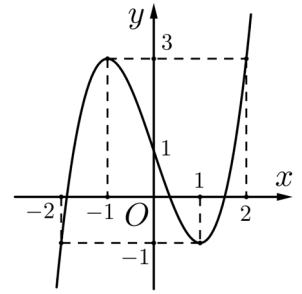
- a) Hàm số đã cho có hệ số $a < 0$.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

c) Hàm số đã cho thỏa $b^2 - 3ac \leq 0$.

d) Hàm số đã cho có hệ số $b = 3$.

Câu 3: Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như sau:



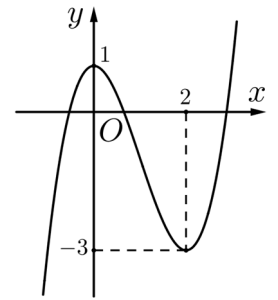
a) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

b) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 2]$ bằng 3.

c) Hàm số đã cho có hệ số $c < 0$.

d) Hàm số đã cho có công thức là $y = 2x^3 - 6x + 1$.

Câu 4: Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như sau:



a) Đồ thị hàm số đã cho có điểm cực đại có tọa độ là $(0;1)$.

b) Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt là $x = 1, x = 2$.

c) Hàm số đã cho có hệ số $a = 1$.

d) Trong các hệ số a, b, c, d chỉ có 1 số âm.

Câu 5: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3x$.

a) Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

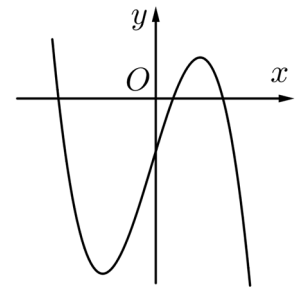
b) Hàm số đã cho có bảng biến thiên là:

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		+	
y	$-\infty$		$+\infty$

c) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là gốc tọa độ $O(0;0)$.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $(0;3)$ bằng 9.

Câu 6: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như sau:



a) $ad > 0$

b) $b < 0$

c) $bc > 0$

d) $abcd > 0$

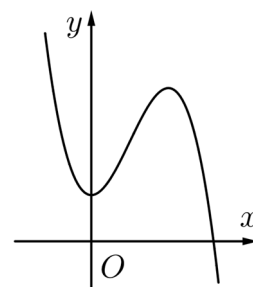
Câu 7: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như sau:

a) $y'(-1) < 0$.

b) Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $(0; +\infty)$ là $-\frac{2b}{3a}$.

c) Hàm số đã cho có hệ số $c = 0$.

d) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0; -\frac{2b}{3a}\right)$.



Câu 8: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	0	$+\infty$	

a) Hàm số đã cho có cực đại bằng 1.

b) Hàm số đã cho có hệ số $b = 0$.

c) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 1.

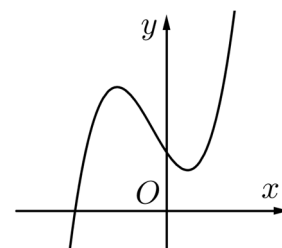
Câu 9: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như sau:

a) Hàm số đã cho có các hệ số thỏa $b^2 - 3ac > 0$.

b) Hàm số đã cho có hệ số $c < 0$.

c) Hàm số đã cho có 2 cực trị trái dấu.

d) Hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(0; +\infty)$, có giá trị lớn nhất trên khoảng $(-\infty; 0)$ nhưng không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.



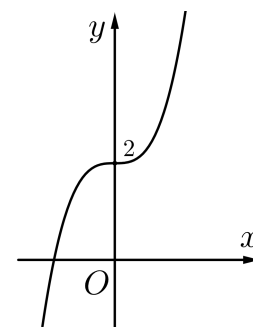
Câu 10: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như sau:

a) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

b) Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

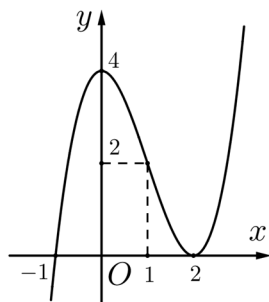
c) $\max_{(-\infty; 0]} y + \min_{[0; +\infty)} y = 2$.

d) Trong 4 hệ số a, b, c, d không có hệ số nào có giá trị âm.



Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

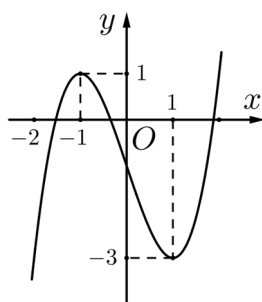
Câu 1: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như sau:



Tính giá trị biểu thức $T = a + 2b + 3c + 4d$.

ĐS:

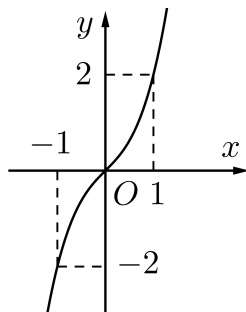
Câu 2: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như sau:



Tính giá trị $y(13)$.

ĐS:

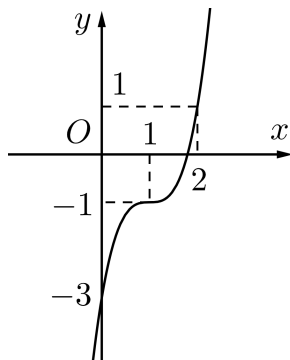
Câu 3: Cho hàm số $y = ax^3 + cx + d$ có đồ thị như sau:



Biết $y'(1) = 4$. Tính giá trị $y'(5)$.

ĐS:

Câu 4: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như sau:



Tính giá trị biểu thức $T = (a + b)(c + d)$.

ĐS:

Câu 5: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	10	2	$+\infty$	

Tính tổng $S = a + b + c + d$.

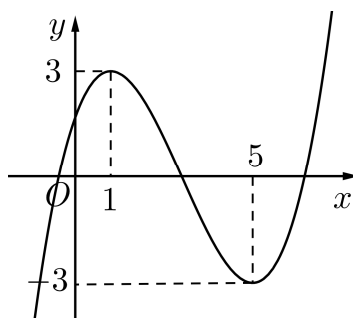
ĐS:

Câu 6: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau:

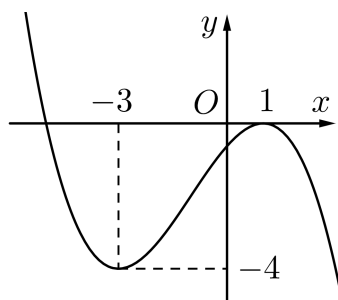
x	$-\infty$	x_{CT}		6	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0
y	$+\infty$			y_{CD}	
		-2			$-\infty$

Biết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là $x - y - 4 = 0$.Tính giá trị biểu thức $P = ab + cd$

ĐS:

Câu 7: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như sau:Tính tích $T = ac$.

ĐS:

Câu 8: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như sau:Tính tích $T = 4096.abcd$.

ĐS:

Câu 9: Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$. Biết đồ thị hàm số có 1 điểm cực trị là $A(3; -3)$ và đồ thị đi qua điểm $B(2; 2)$. Tính tổng $a + b + c$.

ĐS:

Câu 10: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Biết đồ thị hàm số có 1 điểm cực trị là $A(1; 4)$ và có tâm đối xứng là $I(-2; 1)$. Tính $S = 18a + 3b + 6c + 9d$.

ĐS:

BÀI 4. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ MỘT SỐ HÀM SỐ CƠ BẢN**(tiếp theo)****A. LÝ THUYẾT**

3. Khảo sát hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$)

$ad - bc > 0$	$ad - bc < 0$																								
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{d}{c}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">+</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>$\frac{a}{c}$</td><td>$+\infty$</td><td>$\frac{a}{c}$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$	y'	+		+	y	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$\frac{a}{c}$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{d}{c}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td colspan="2">-</td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td>$\frac{a}{c}$</td><td>$-\infty$</td><td>$\frac{a}{c}$</td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$	y'	-		-	y	$\frac{a}{c}$	$-\infty$	$\frac{a}{c}$
x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$																						
y'	+		+																						
y	$\frac{a}{c}$	$+\infty$	$\frac{a}{c}$																						
x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$																						
y'	-		-																						
y	$\frac{a}{c}$	$-\infty$	$\frac{a}{c}$																						

Chú ý: Đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$):

a) Có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{d}{c}$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{c}$.

b) Nhận giao điểm của 2 đường tiệm cận $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ làm tâm đối xứng.

c) Nhận 2 đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm trục đối xứng.

Nhận dạng đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$)

• Nhận biết tính đơn điệu:

- Hai nhánh đi lên: $ad - bc > 0$.

- Hai nhánh đi xuống: $ad - bc < 0$.

• Tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$:

- Nằm trên trái Oy : $cd > 0$.
- Nằm trên phải Oy : $cd < 0$.
- Trùng với Oy : $d = 0$.
- Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$:
 - Nằm phía trên Ox : $ac > 0$.
 - Nằm phía dưới Ox : $ac < 0$.
 - Trùng với Ox : $a = 0$.
- Giao điểm với trục hoành Ox : $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$:
 - Nằm trên trái Oy : $ab > 0$.
 - Nằm trên phải Oy : $ab < 0$.
 - Thuộc trục Oy : $b = 0$.
- Giao điểm với trục tung Oy : $B\left(0; \frac{b}{d}\right)$:
 - Nằm phía trên Ox : $bd > 0$.
 - Nằm phía dưới Ox : $bd < 0$.
 - Thuộc trục Ox : $b = 0$.

Ví dụ 1: Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số:

a) $y = \frac{2x-3}{x+1}$

b) $y = \frac{x+3}{x-2}$

c) $y = \frac{x-2}{x+1}$

d) $y = \frac{2x-1}{3x+2}$

e) $y = \frac{2x}{3x-1}$

f) $y = \frac{5+x}{2-x}$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1: Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số:

a) $y = \frac{x+3}{x-1}$

b) $y = \frac{1-2x}{2x-4}$

c) $y = \frac{-x+2}{2x+1}$

d) $y = \frac{x-1}{2x+2}$

e) $y = \frac{2-x}{2x-1}$

f) $y = \frac{-2x+1}{x+2}$

g) $y = \frac{-x+2}{2x+3}$

h) $y = \frac{x+1}{x-1}$

i) $y = 3 + \frac{1}{x}$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Bảng biến thiên ở bên là của hàm số nào?

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	2	$+\infty$	2

A. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

B. $y = \frac{x-1}{2x+1}$.

C. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

D. $y = \frac{x+2}{x+1}$.

Câu 2: Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình bên dưới?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-		-
y	1	$+\infty$	1

A. $y = \frac{x-3}{x-2}$.

B. $y = \frac{2x-1}{x+2}$.

C. $y = \frac{x+1}{x-2}$.

D. $y = \frac{2x+5}{x+2}$.

Câu 3: Bảng biến thiên sau là của hàm số nào dưới đây?

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	1	$+\infty$	1

A. $y = \frac{x-2}{x+1}$.

B. $y = \frac{x+3}{x+1}$.

C. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

D. $y = \frac{x}{-x+1}$.

Câu 4: Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như hình sau?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-		-
y	2	$+\infty$	2

A. $y = \frac{2x-1}{x-2}$.

B. $y = \frac{2x-3}{x+2}$.

C. $y = \frac{x+3}{x-2}$.

D. $y = \frac{2x-7}{x-2}$.

Câu 5: Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-		-
y	1	$+\infty$	1

A. $y = \frac{x+2}{x+1}$.

B. $y = \frac{x+2}{x-1}$.

C. $y = \frac{x+1}{x-2}$.

D. $y = \frac{x+3}{2+x}$.

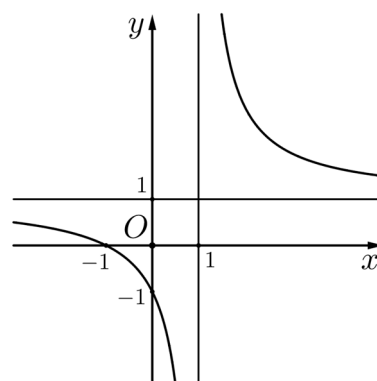
Câu 6: Đồ thị ở bên là của hàm số nào?

A. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

B. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

C. $y = \frac{2x+1}{2x-2}$.

D. $y = \frac{-x}{1-x}$.

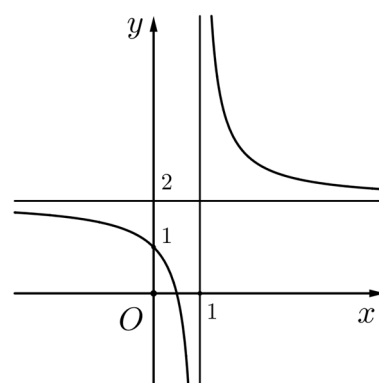
**Câu 7:** Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = \frac{2x-1}{2x-2}$.

B. $y = \frac{-2x+1}{x+1}$.

C. $y = \frac{2x-1}{1-x}$.

D. $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

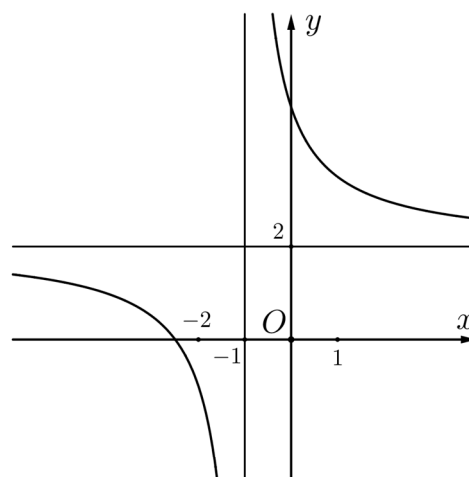
**Câu 8:** Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = x^3 + 3x^2 + 1$.

B. $y = \frac{2x+5}{x+1}$.

C. $y = x^4 - x^2 + 1$.

D. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

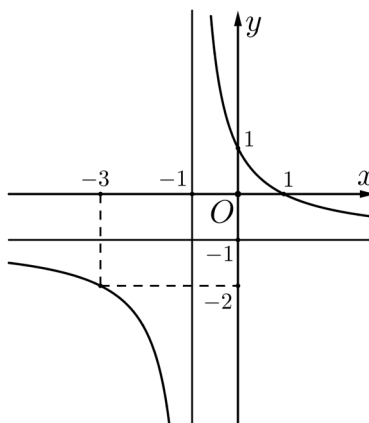
**Câu 9:** Đồ thị hình bên là của hàm số nào?

A. $y = \frac{-2x+1}{2x+1}$.

B. $y = \frac{-x}{x+1}$.

C. $y = \frac{-x+1}{x+1}$.

D. $y = \frac{-x+2}{x+1}$.



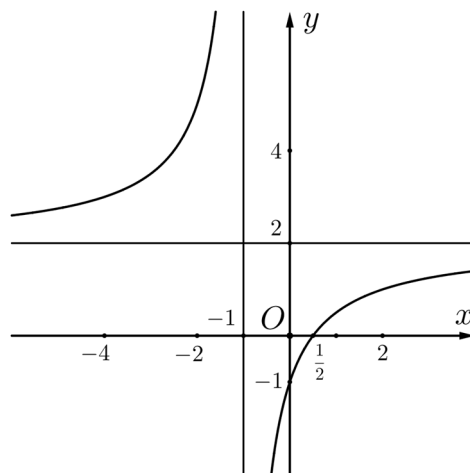
Câu 10: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

B. $y = \frac{2x+5}{x+1}$.

C. $y = 2x+1$.

D. $y = \frac{1-2x}{x+1}$.



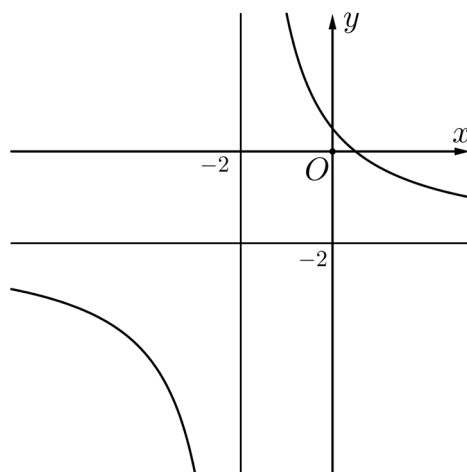
Câu 11: Đồ thị hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = \frac{2x-1}{x-2}$.

B. $y = \frac{2x-1}{x+2}$.

C. $y = \frac{-2x-1}{x+2}$.

D. $y = \frac{-2x+1}{x+2}$.



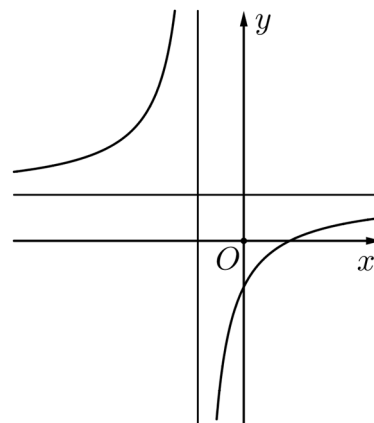
Câu 12: Hình bên là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = \frac{-x-1}{x+1}$.

B. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

C. $y = \frac{x+2}{x+1}$.

D. $y = \frac{2x+3}{x+1}$.



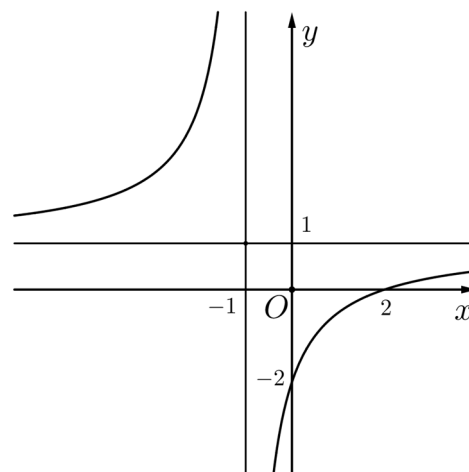
Câu 13: Đồ thị ở hình bên là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây?

A. $y = \frac{x-2}{x+1}$.

B. $y = \frac{x-2}{x-1}$.

C. $y = \frac{2-x}{x+1}$.

D. $y = \frac{x+2}{x-1}$.



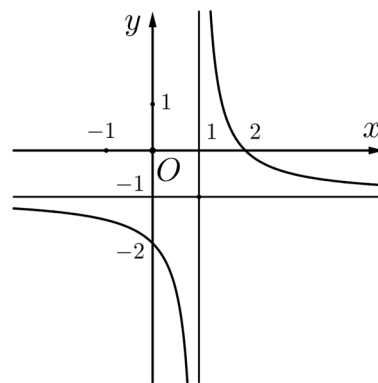
Câu 14: Đồ thị sau đây là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = \frac{x+2}{x+1}$.

B. $y = \frac{2-x}{x+1}$.

C. $y = \frac{-x-2}{x-1}$.

D. $y = \frac{2-x}{x-1}$.



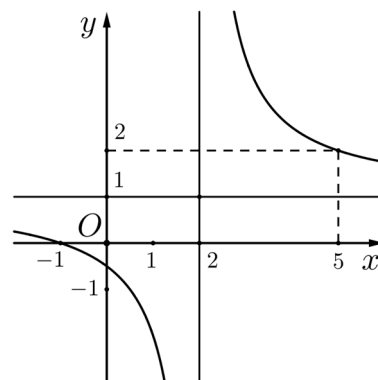
Câu 15: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = \frac{x-1}{x-2}$.

B. $y = \frac{2x+1}{2x-2}$.

C. $y = \frac{-x+1}{-x-2}$.

D. $y = \frac{x+1}{x-2}$.



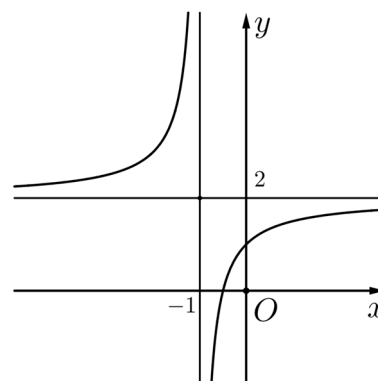
Câu 16: Đồ thị sau đây là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = \frac{x+3}{1-x}$.

B. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

C. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

D. $y = \frac{x+2}{x+1}$.



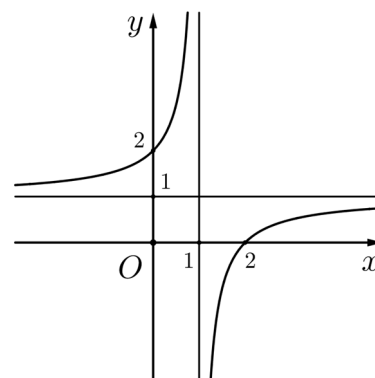
Câu 17: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = \frac{x-2}{x-1}$.

B. $y = \frac{x+2}{x-1}$.

C. $y = \frac{x-2}{1-x}$.

D. $y = \frac{x-3}{x-1}$.



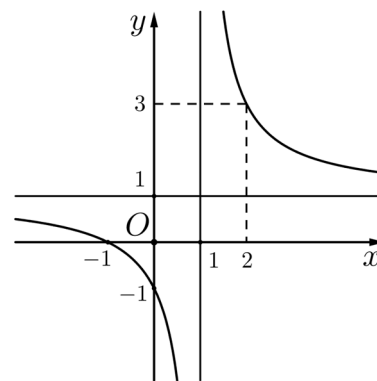
Câu 18: Đồ thị sau là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = \frac{2x-3}{2x-2}$.

B. $y = \frac{x}{x-1}$.

C. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

D. $y = \frac{x+1}{x-1}$.



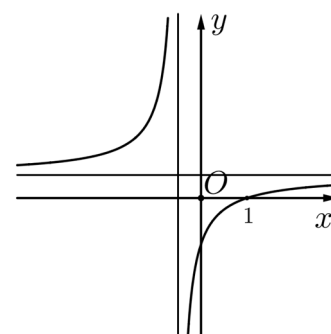
Câu 19: Đồ thị trong hình bên là của hàm số nào sau đây?

A. $y = \frac{x-1}{1-2x}$.

B. $y = \frac{x-1}{2x-1}$.

C. $y = \frac{x+1}{2x+1}$.

D. $y = \frac{x-1}{2x+1}$.



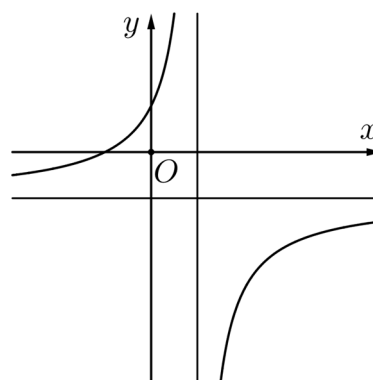
Câu 20: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

B. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

C. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

D. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.



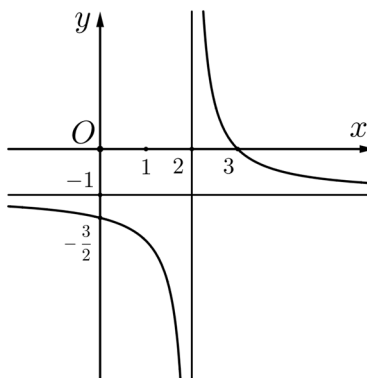
Câu 21: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính giá trị của $a+2b+c$.

A. -1.

B. -2.

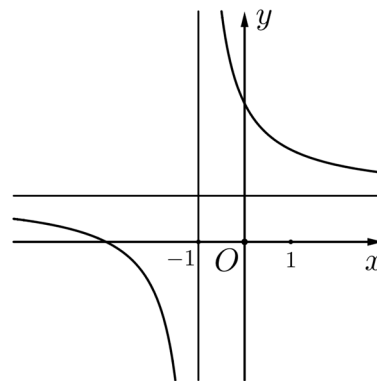
C. 0.

D. 3.



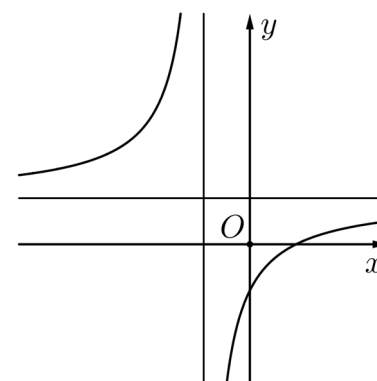
Câu 22: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A. $a < b < 0$.
- B. $b < 0 < a$.
- C. $0 < b < a$.
- D. $0 < a < b$.



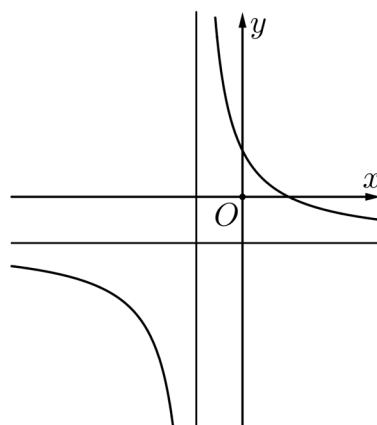
Câu 23: Tìm a, b, c để hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên.

- A. $\begin{cases} ad < 0 \\ bc > 0 \end{cases}$.
- B. $\begin{cases} ad < 0 \\ bc < 0 \end{cases}$.
- C. $\begin{cases} ad > 0 \\ bc < 0 \end{cases}$.
- D. $\begin{cases} ad > 0 \\ bc > 0 \end{cases}$.



Câu 24: Cho đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng.

- A. $ab > 0, bc < 0, ad > 0$.
- B. $ab > 0, bc < 0, ad < 0$.
- C. $ab < 0, bc > 0, ad < 0$.
- D. $ab < 0, bc < 0, ad < 0$.

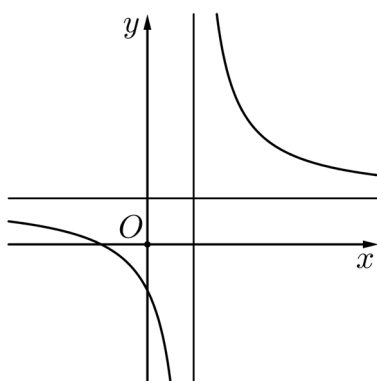


Câu 25: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (hàm số bậc nhất trên bậc nhất) có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Xét các mệnh đề sau

- (I): $ac > 0$
- (II): $cd < 0$
- (III): $bd < 0$
- (IV): $ab > 0$

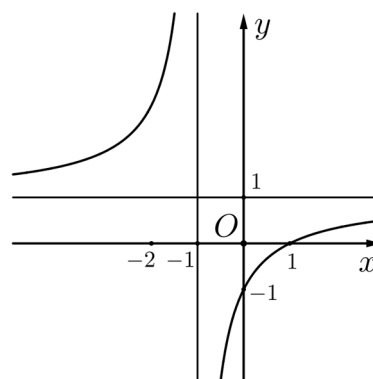
Số mệnh đề đúng là:

- A. 3.
- B. 1.
- C. 4.
- D. 2.



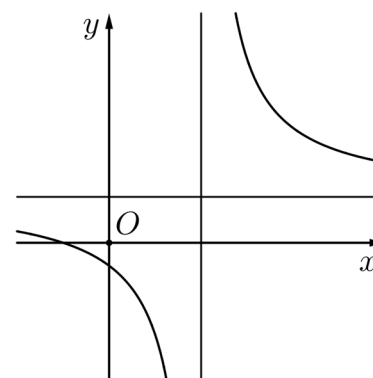
Câu 26: Xác định a, b để hàm số $y = \frac{ax-1}{x+b}$ có đồ thị như hình vẽ bên.

- A. $a=1, b=-1$.
 B. $a=1, b=1$.
 C. $a=-1, b=1$.
 D. $a=-1, b=-1$.



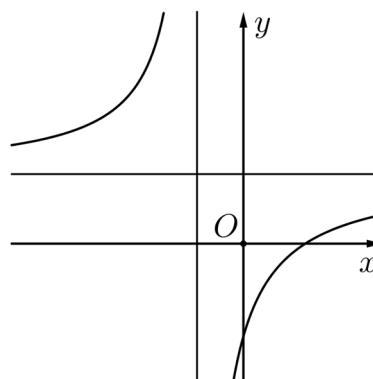
Câu 27: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a > 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $b > 0, c < 0, d < 0$.
 B. $b > 0, c > 0, d < 0$.
 C. $b < 0, c > 0, d < 0$.
 D. $b < 0, c < 0, d < 0$.

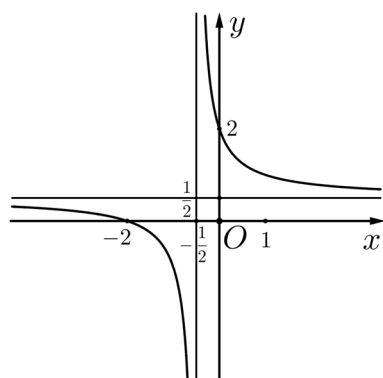


Câu 28: Tìm a, b, c để hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên.

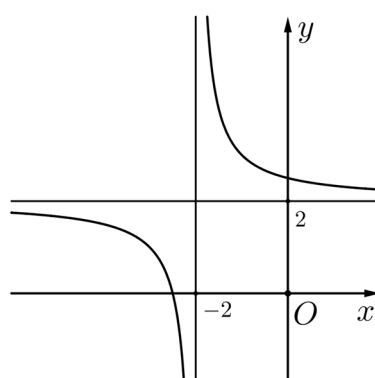
- A. $bd > 0, ad > 0$.
 B. $ad < 0, ab > 0$.
 C. $ab < 0, ad < 0$.
 D. $ad > 0, ab < 0$.



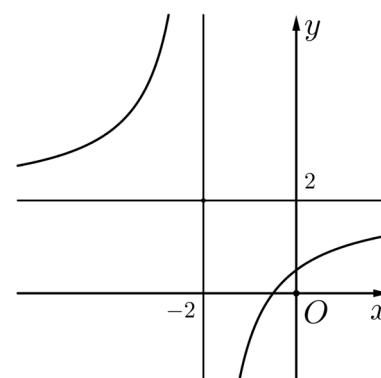
Câu 29: Cho hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m}$. Các đồ thị nào dưới đây có thể là đồ thị biểu diễn hàm số đã cho.



Hình (I)



Hình (II)

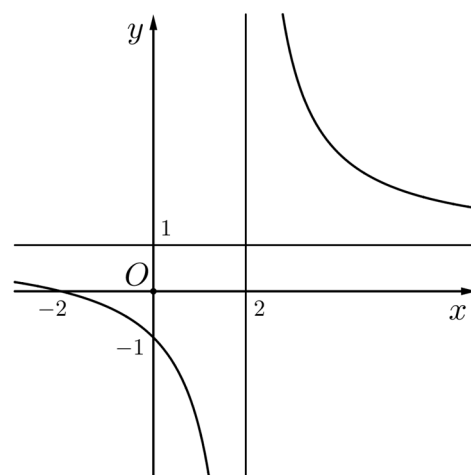


Hình (III)

- A. Hình (I) và (III). B. Hình (III). C. Hình (I). D. Hình (II).

Câu 30: Tìm a, b, c để hàm số $y = \frac{ax+2}{cx+b}$ có đồ thị như hình vẽ.

- A. $a = 2, b = 2, c = -1$.
- B. $a = 1, b = 1, c = -1$.
- C. $a = 1, b = 2, c = 1$.
- D. $a = 1, b = -2, c = 1$.



Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$.

- a) Hàm số có đạo hàm là $y' = \frac{-3}{(1-x)^2}$.
- b) Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(-2; 0)$.
- c) Giao điểm 2 đường tiệm cận của đồ thị nằm trên đường thẳng $\Delta: x - y + 1 = 0$.
- d) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(2; 4)$ là $y = -3x + 2$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{5x-3}{6x+1}$ có đồ thị (C) .

- a) Hàm số có đạo hàm là $y' = \frac{-13}{(6x+1)^2}$.
- b) Đồ thị (C) có tiệm cận đứng $x = -\frac{1}{6}$.
- c) Đồ thị (C) có tiệm cận ngang $x = \frac{5}{6}$.
- d) Đồ thị (C) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -3 .

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{2-3x}{x+1}$ có đồ thị (C) .

- a) $y'(-3) = -\frac{5}{4}$.
- b) $2.y(2) + y'(-2) = \frac{7}{3}$.
- c) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 2026)$.
- d) Giao điểm 2 đường tiệm cận của (C) là $I(-1; 2)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{-4x+1}{3x-5}$ có đồ thị (C) .

- a) Đồ thị (C) có đường tiệm cận ngang là $y = -\frac{4}{3}$.
- b) Hàm số đã cho đồng biến trên 2 khoảng xác định.
- c) Giao điểm I của 2 đường tiệm cận cách gốc tọa độ O một khoảng bằng $\frac{41}{9}$.
- d) Giao điểm của (C) với các trục tọa độ cách nhau một khoảng bằng $\frac{41}{20}$.

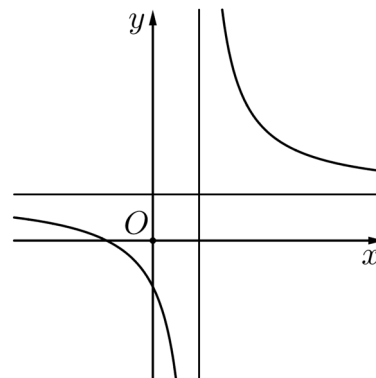
Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{ax+3}{bx+1}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'			
y	2	$+\infty$	2

- a) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng $x = 2$.
- b) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang $y = -1$.
- c) $y(-2) < y(2)$.
- d) Giá trị của biểu thức $a^2 + b^2$ bằng 5.

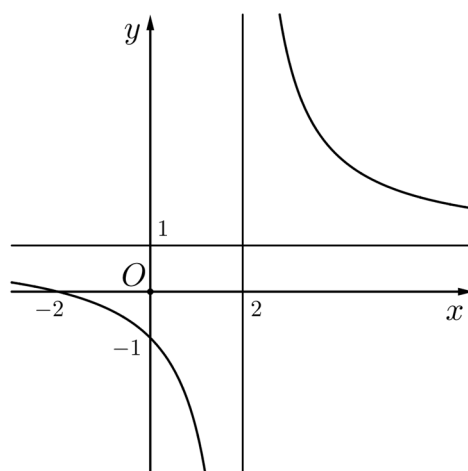
Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như sau:

- a) $ad - bc > 0$.
- b) a và d trái dấu.
- c) b và c cùng dấu.
- d) Trong 4 hệ số a, b, c, d có 3 hệ số cùng dấu với nhau.

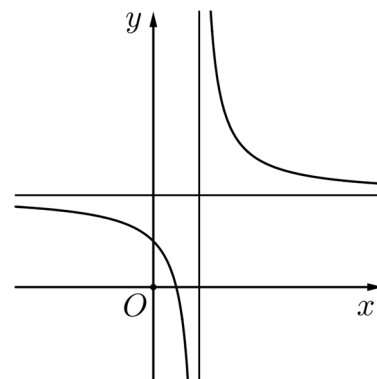


Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{ax+2}{cx+b}$ có đồ thị như hình sau:

- a) Hệ số $b = -2$.
- b) Hệ số $a = -1, c = -1$.
- c) $y'(3) = -4$.
- d) $y(1) + y'(1) = -7$.

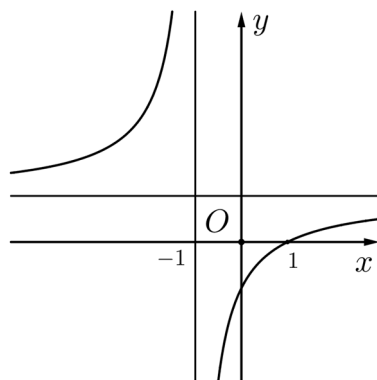


Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như sau:



- a) $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.
- b) Hệ số a và c trái dấu.
- c) Hệ số $b < 0$.
- d) Trong 4 hệ số a, b, c, d có 2 hệ số âm, 2 hệ số dương.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{ax-1}{x+d}$ có đồ thị như sau:



- a) Hệ số $d = 1$.
- b) $y'(-3) = \frac{1}{2}$.
- c) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[3; 2025]$ bằng $\frac{1}{2}$.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{N}; a < 10$) có đồ thị (C) nhận $x = -1$ là tiệm cận đứng.

Biết $y'(-2) = 3$ và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 5]$ bằng $\frac{9}{2}$.

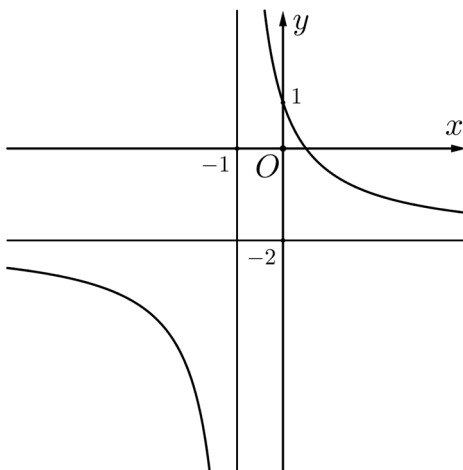
- a) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 2025)$.
- b) $5a + b = 9c$.
- c) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1.
- d) Giá trị của biểu thức $T = a + b + c + d$ là 9.

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{3x+5}{-3x+2}$. Biết đồ thị hàm số cắt 2 trục tọa độ tại $A(a; 0)$ và $B(0; b)$. Tính giá trị biểu thức $T = ab$.

ĐS:

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+1}$ có đồ thị như sau:



Tính giá trị biểu thức $T = y(a) + y(b)$.

ĐS:

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{ax+1-b}{x+d}$ có bảng biến thiên như sau. Biết đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2;3)$.

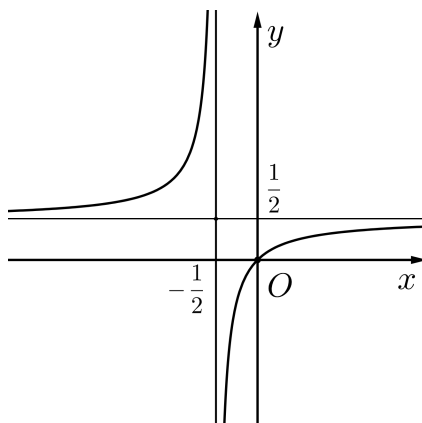
x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-		-
y	2	$+\infty$	2

$\swarrow$ $-\infty$ $\searrow$

Tính giá trị biểu thức $T = a + b + d$.

ĐS:

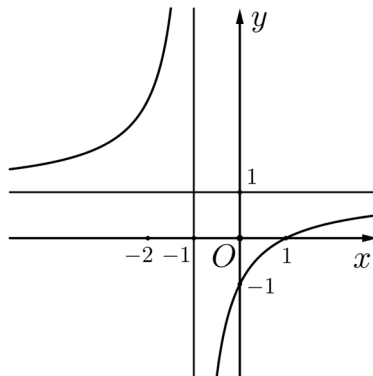
Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{2x+d}$ có đồ thị như sau:



Biết giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-10; -3]$ bằng $\frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính giá trị biểu thức $A = m^2 - n^2$.

ĐS:

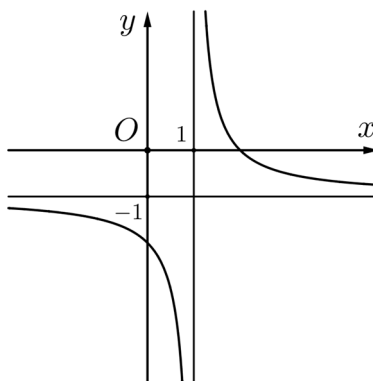
Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x-m^2-1}{x+1}$ có đồ thị như sau:



Biết $y(-12) = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $T = ab$.

ĐS:

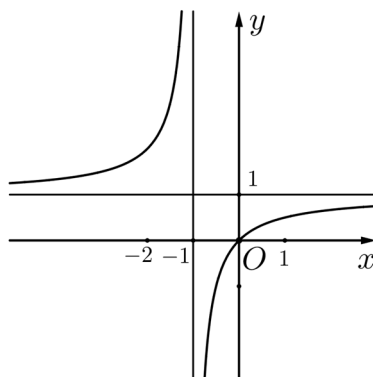
Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{-x+b}{cx+d}$ có đồ thị như sau:



Biết $y'(0) = -1$. Tính $S = 2b + 3c + 4d$.

ĐS:

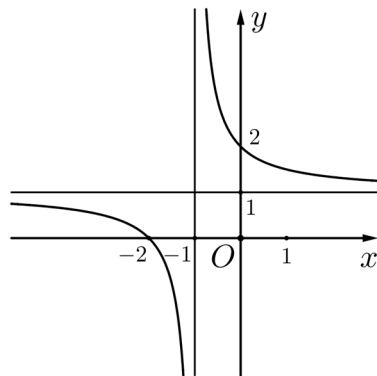
Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{2x+b}{cx+d}$ có đồ thị như sau:



Tính $S = (b+c+d)^2$.

ĐS:

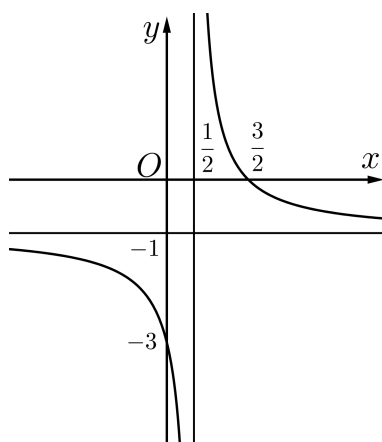
Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ và $\frac{b}{d}$ tối giản, có đồ thị như sau:



Tính giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[a+c; b+d]$.

ĐS:

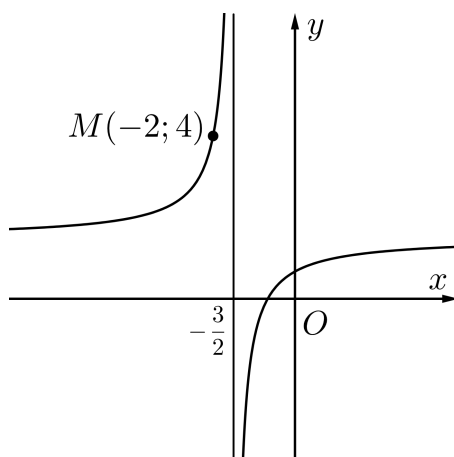
Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và $-5 < b, c < 0$, có đồ thị như sau:



Tính giá trị biểu thức $P = \frac{a-b}{c-d}$.

ĐS:

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{c}$ tối giản, có đồ thị như sau:



Biết $\min_{[1;5]} y = 1$. Tính giá trị $y'(-4)$.

ĐS:

BÀI 4. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ MỘT SỐ HÀM SỐ CƠ BẢN

(tiếp theo)

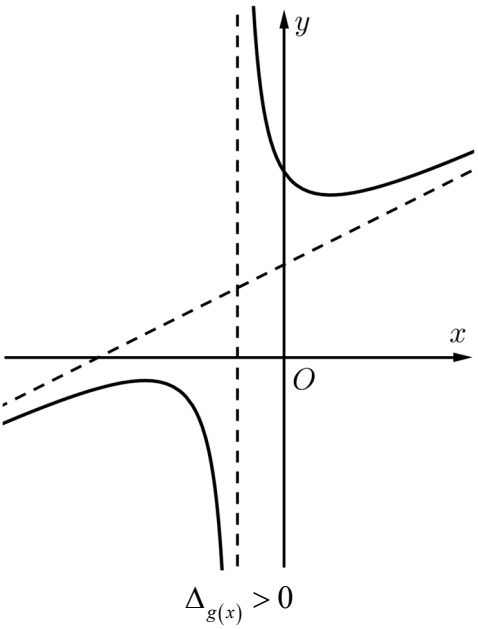
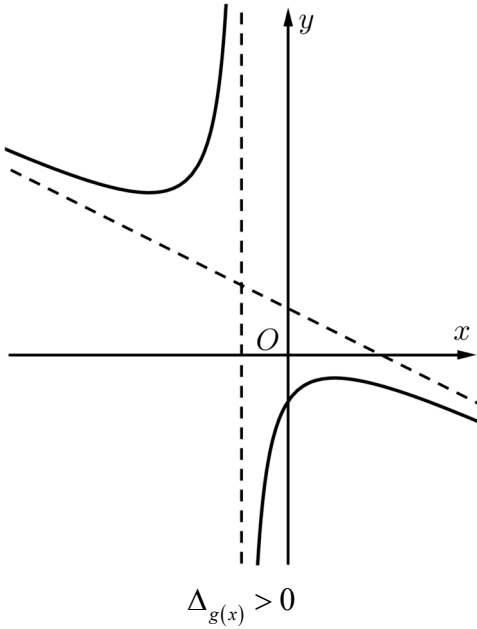
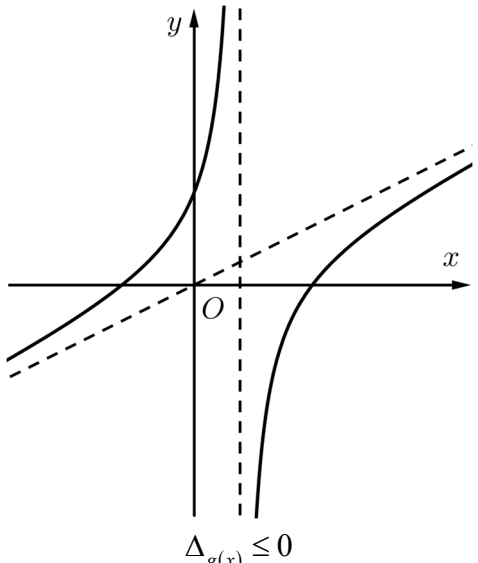
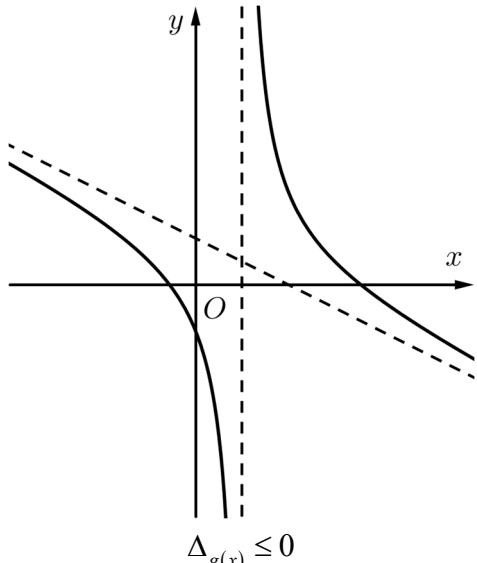
A. LÝ THUYẾT

4. Khảo sát hàm số phân thức bậc hai trên bậc nhất $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu, tức là $-\frac{n}{m}$ không là nghiệm của tử)

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$.

Đạo hàm $y' = \frac{am.x^2 + 2an.x + bn - mc}{(mx + n)^2}$. Đặt $g(x) = am.x^2 + 2an.x + bn - mc$.

Dấu của y' là dấu của $g(x) = am.x^2 + 2an.x + bn - mc$.

	$am > 0$	$am < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt	 $\Delta_{g(x)} > 0$	 $\Delta_{g(x)} > 0$
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm	 $\Delta_{g(x)} \leq 0$	 $\Delta_{g(x)} \leq 0$

Bảng biến thiên

$am > 0$						$am < 0$							
x	$-\infty$	x_{CD}		$-\frac{n}{m}$	x_{CT}	$+\infty$	x	$-\infty$	x_{CT}		$-\frac{n}{m}$	x_{CD}	$+\infty$
y'	+	0	-		-	0	+	-	0	+		0	-
y	y_{CD}			$+\infty$	y_{CT}	$+\infty$	y_{CT}			$+\infty$	y_{CD}	$-\infty$	$-\infty$
Hàm số có 2 cực trị						Hàm số có 2 cực trị							
x	$-\infty$			$-\frac{n}{m}$		$+\infty$	x	$-\infty$			$-\frac{n}{m}$		$+\infty$
y'	+				+		y'	-				-	
y	$-\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$+\infty$		y	$+\infty$	$-\infty$		$+\infty$	$-\infty$	
Hàm số không có cực trị						Hàm số không có cực trị							

Chú ý: Đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu):

a) Có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{n}{m}$, tiệm cận xiên là đường thẳng $y = \frac{a}{m}x - \frac{an - bm}{m^2}$.

b) Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng, tâm đối xứng này cũng là trung điểm của đoạn thẳng nối 2 điểm cực trị (nếu có).

c) Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm trục đối xứng.

Ví dụ 1: Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số:

a) $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$

b) $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2}$

c) $y = x - \frac{1}{x}$

d) $y = -x + 2 - \frac{1}{x + 1}$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1: Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số:

a) $y = 2x - \frac{1}{1 - 2x}$

b) $y = \frac{-x^2 + 3x + 1}{x + 2}$

c) $y = \frac{x^2 + 4x - 1}{x - 1}$

d) $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$

e) $y = \frac{2x^2}{x + 1}$

f) $y = -x + 1 + \frac{1}{x - 1}$

g) $y = \frac{x^2 - 4x + 9}{x - 4}$

h) $y = \frac{x^2 - x - 1}{2 - x}$

i) $y = \frac{x^2 + x - 3}{x - 1}$

j) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

k) $y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$

l) $y = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 2}$

m) $y = x - \frac{1}{x + 1}$

n) $y = \frac{x^2 - 3x + 8}{x - 1}$

o) $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$

p) $y = \frac{x^2 + 4}{x}$

q) $y = \frac{1 - x^2}{x}$

r) $y = \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1}$

s) $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2}$

t) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$

u) $y = \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$

v) $y = \frac{x^2 + x + 2}{1 - x}$

w) $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x + 1}$

x) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Bảng biến thiên sau là của hàm số nào dưới đây?

x	$-\infty$	0		1	2		$+\infty$
y'	+		0	-	- 0 +		
y		2			$+\infty$	$+\infty$	
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		6	$\nearrow$
			$-\infty$				

A. $y = \frac{x^2 + 4x - 2}{x - 1}$.

B. $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$.

C. $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 1}$.

D. $y = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$.

Câu 2: Bảng biến thiên sau là của hàm số nào dưới đây?

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$+\infty$	$+\infty$
					-1	

A. $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 2}$.

B. $y = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x + 2}$.

C. $y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$.

D. $y = \frac{-x^2 + 2x + 2}{-x + 2}$.

Câu 3: Bảng biến thiên sau là của hàm số nào dưới đây?

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	0	$+\infty$	4	$+\infty$	$+\infty$

A. $y = \frac{x^2}{x-1}$. B. $y = \frac{2x^2-2}{x-1}$. C. $y = \frac{3x^2-4x}{x-1}$. D. $y = \frac{-x^2}{x-1}$.

Câu 4: Bảng biến thiên sau là của hàm số nào dưới đây?

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$+\infty$	$+\infty$
				6		

A. $y = \frac{3x^2-10x+4}{x-2}$. B. $y = \frac{x^2-6x+4}{x-2}$. C. $y = \frac{-x^2+6x+4}{x-2}$. D. $y = \frac{x^2-2x+4}{x-2}$.

Câu 5: Bảng biến thiên sau là của hàm số nào dưới đây?

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
y'	$-$		$-$
y	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

A. $y = \frac{-x^2-3x+1}{x+3}$. B. $y = \frac{-x^2+2x-3}{x+3}$. C. $y = \frac{x^2+4x+1}{x+3}$. D. $y = \frac{x^2+2x}{x+3}$.

Câu 6: Bảng biến thiên sau là của hàm số nào dưới đây?

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y'	$-$		$-$
y	$+\infty$		$+\infty$
	$\searrow$		$\searrow$
	$-\infty$		$-\infty$

A. $y = \frac{-2x^2-4x-1}{x+2}$. B. $y = \frac{-2x^2-4x+1}{x+2}$. C. $y = \frac{-2x^2-3x-2}{x+2}$. D. $y = \frac{-2x^2-3x+1}{x+2}$.

Câu 7: Bảng biến thiên sau là của hàm số nào dưới đây?

x	$-\infty$	3	$+\infty$
y'	$+$		$+$
y	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

A. $y = \frac{-2x^2+3x+1}{-x+3}$. B. $y = \frac{-x^2+3x+1}{-x+3}$. C. $y = \frac{x^2+3x+1}{x-3}$. D. $y = \frac{2x^2+3x+1}{x-3}$.

Câu 8: Bảng biến thiên sau là của hàm số nào dưới đây?

x	$-\infty$		5		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	$-\infty$		$+\infty$		$+\infty$

A. $y = \frac{x^2 - 4x - 2}{x - 5}$. B. $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 5}$. C. $y = \frac{x^2 - x - 4}{x - 5}$. D. $y = \frac{x^2 - 5x - 2}{x - 5}$.

Câu 9: Bảng biến thiên sau là của hàm số nào dưới đây?

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow -\frac{9}{2}$	$\searrow -\infty$	$+\infty \searrow \frac{7}{2}$	$\nearrow +\infty$	

A. $y = \frac{x^2 + 2x - 8}{2x - 1}$. B. $y = \frac{x^2 + 2x + 8}{2x - 1}$. C. $y = \frac{2x^2 + x + 8}{2x + 1}$. D. $y = \frac{2x^2 + x - 8}{2x + 1}$.

Câu 10: Bảng biến thiên sau là của hàm số nào dưới đây?

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	2	$+\infty$	-6	$-\infty$	$-\infty$

A. $y = \frac{-x^2 + 2x - 4}{x - 2}$. B. $y = \frac{-2x^2 + 6x - 4}{x - 2}$. C. $y = \frac{-2x^2 + 6x + 4}{x - 2}$. D. $y = \frac{x^2 + 2x + 4}{x - 2}$.

Câu 11: Bảng biến thiên sau là của hàm số nào dưới đây?

x	$-\infty$	-5	-4	-3	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	12	$+\infty$	4	$-\infty$	$-\infty$

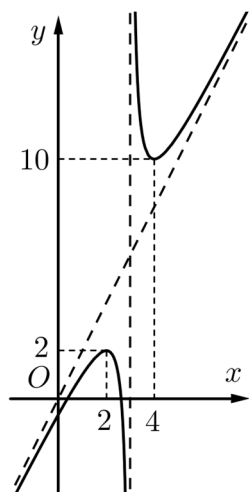
A. $y = \frac{-2x^2 + 8x + 2}{x - 4}$. B. $y = \frac{-x^2 + 13}{x + 4}$. C. $y = \frac{-x^2 + 13}{-x - 4}$. D. $y = \frac{2x^2 + 8x + 2}{-x - 4}$.

Câu 12: Bảng biến thiên sau là của hàm số nào dưới đây?

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	15	$+\infty$	$-\infty$	-9	$-\infty$

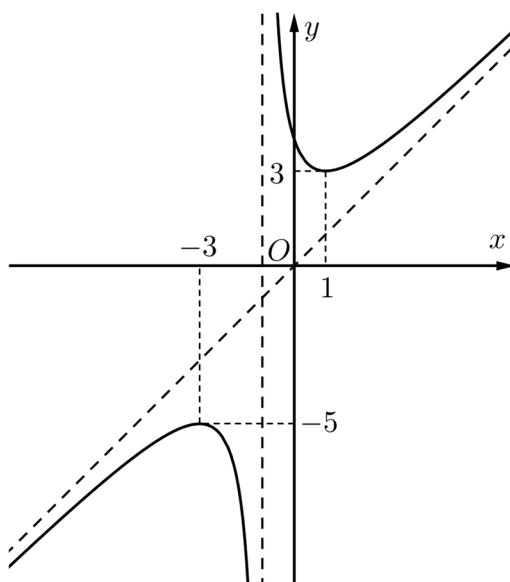
A. $y = \frac{2x^2 + x + 15}{-x - 1}$. B. $y = \frac{-x^2 + x - 18}{x + 1}$. C. $y = \frac{x^2 + 5x - 24}{x + 1}$. D. $y = \frac{3x^2 + 3x + 12}{-x - 1}$.

Câu 13: Đồ thị sau là của hàm số nào dưới đây?



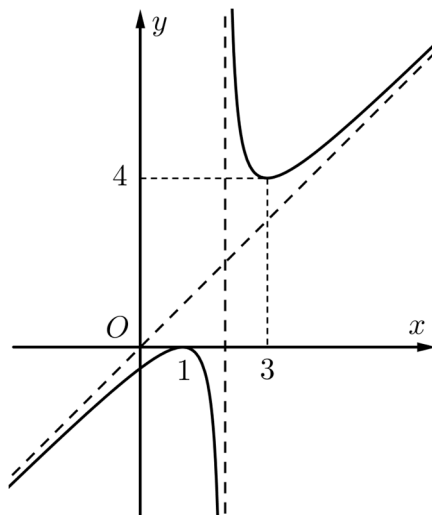
A. $y = \frac{2x^2 - 6x + 2}{x - 3}$. B. $y = \frac{2x^2 - 6x + 2}{x + 3}$. C. $y = \frac{x^2 - 6}{x - 3}$. D. $y = \frac{x^2 - 6}{x + 3}$.

Câu 14: Đồ thị sau là của hàm số nào dưới đây?



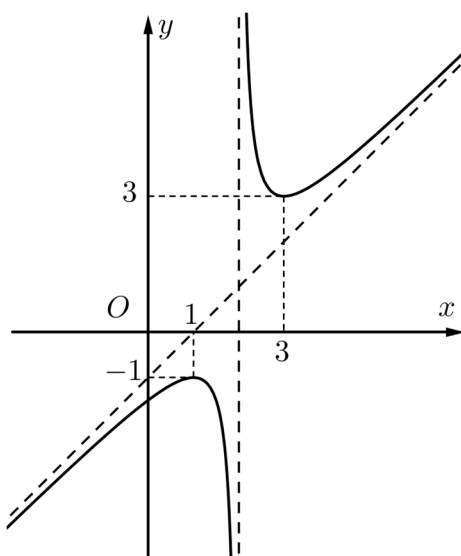
A. $y = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x + 1}$. B. $y = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$. C. $y = \frac{-x^2 - 3x + 10}{x + 1}$. D. $y = \frac{3x^2 + 5x - 2}{x + 1}$.

Câu 15: Đồ thị sau là của hàm số nào dưới đây?



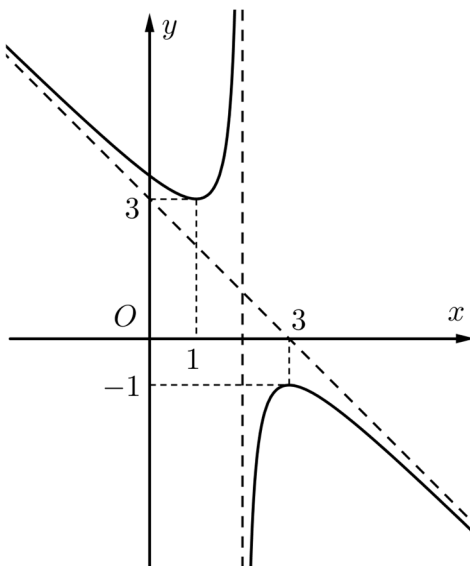
A. $y = \frac{-x^2 - 2x + 1}{x - 2}$. B. $y = \frac{2x^2 + 6x - 8}{x - 2}$. C. $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$. D. $y = \frac{-2x^2 + 6x - 8}{x - 2}$.

Câu 16: Đồ thị sau là của hàm số nào dưới đây?



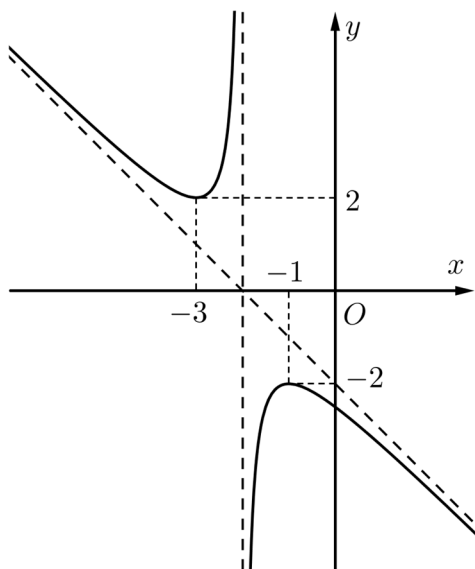
A. $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x + 2}$. B. $y = \frac{2x^2 - 7x + 6}{x - 2}$. C. $y = \frac{2x^2 - 7x + 6}{x + 2}$. D. $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$.

Câu 17: Đồ thị sau là của hàm số nào dưới đây?



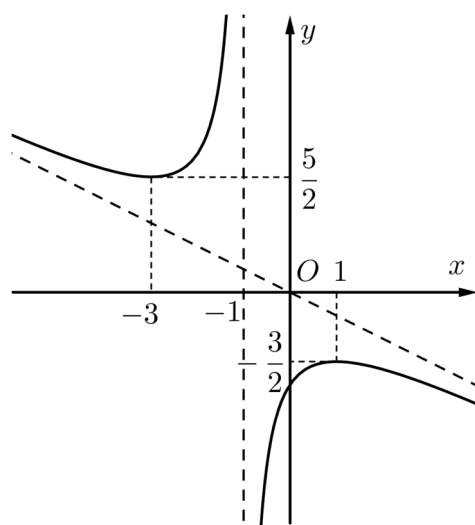
A. $y = \frac{2x^2 - 9x + 10}{-x + 2}$. B. $y = \frac{2x^2 - 9x + 10}{x + 2}$. C. $y = \frac{x^2 - 5x + 7}{x + 2}$. D. $y = \frac{x^2 - 5x + 7}{-x + 2}$.

Câu 18: Đồ thị sau là của hàm số nào dưới đây?



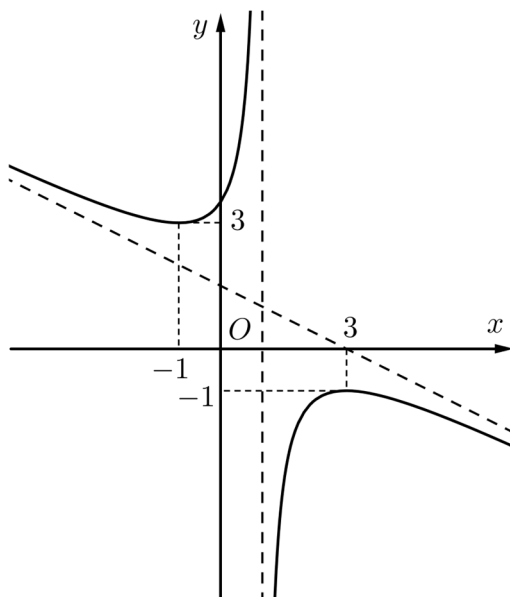
A. $y = \frac{2x^2 + 8x + 4}{x - 2}$. B. $y = \frac{-x^2 - 4x - 5}{x + 2}$. C. $y = \frac{2x^2 + 8x + 4}{x + 2}$. D. $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x - 2}$.

Câu 19: Đồ thị sau là của hàm số nào dưới đây?



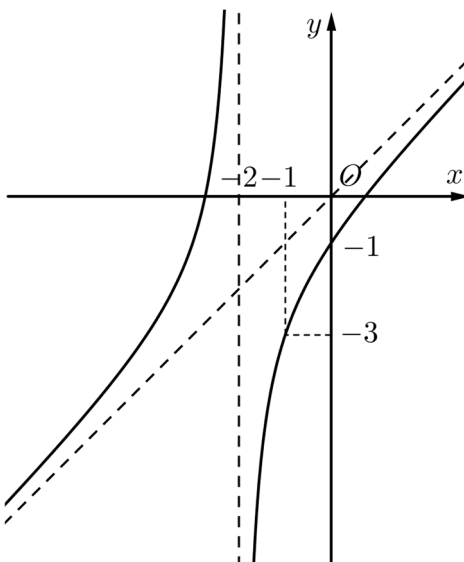
A. $y = \frac{x^2 + 3x - 10}{2x + 2}$. B. $y = \frac{-x^2 - x - 4}{2x + 2}$. C. $y = \frac{-2x^2 - 3x - 1}{2x + 2}$. D. $y = \frac{2x^2 + 5x - 13}{2x + 2}$.

Câu 20: Đồ thị sau là của hàm số nào dưới đây?



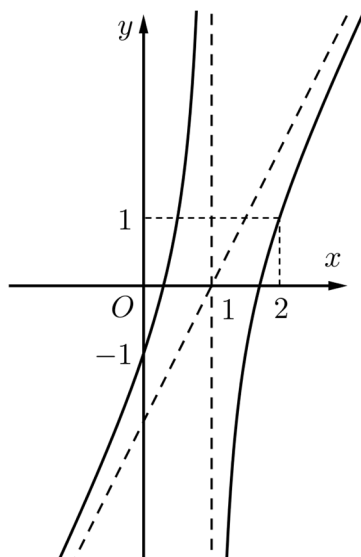
- A. $y = \frac{-x^2 + 4x - 7}{2x - 2}$. B. $y = \frac{-x^2 - 3x - 8}{x - 1}$. C. $y = \frac{-x^2 + 4x - 7}{x - 1}$. D. $y = \frac{-x^2 - 3x - 8}{2x - 2}$.

Câu 21: Đồ thị sau là của hàm số nào dưới đây?



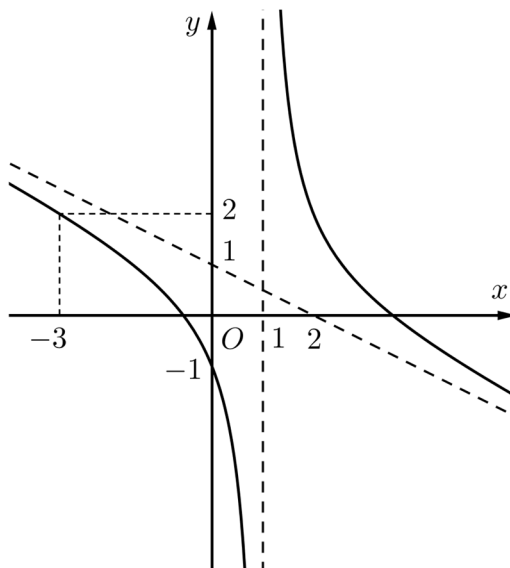
- A. $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 2}$. B. $y = \frac{3x^2 + 4x - 2}{x + 2}$. C. $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 2}$. D. $y = \frac{3x^2 + 4x - 2}{x - 2}$.

Câu 22: Đồ thị sau là của hàm số nào dưới đây?



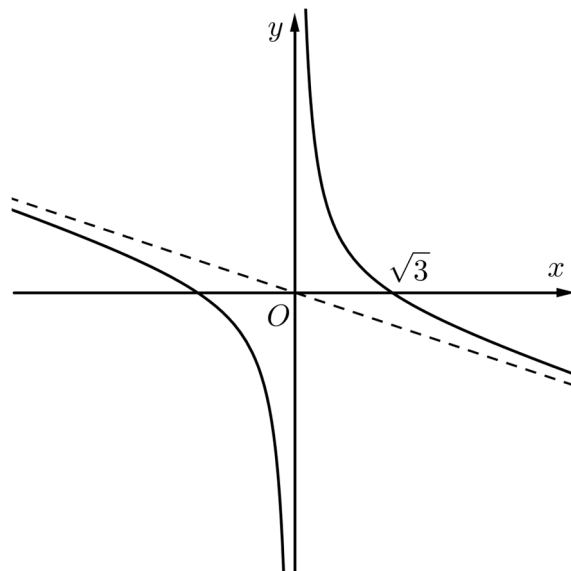
A. $y = \frac{3x^2 + 6x + 1}{x - 1}$. B. $y = \frac{2x^2 - 4x + 1}{x + 1}$. C. $y = \frac{2x^2 - 4x + 1}{x - 1}$. D. $y = \frac{3x^2 - 6x + 1}{x + 1}$.

Câu 23: Đồ thị sau là của hàm số nào dưới đây?



A. $y = \frac{x^2 + 6x + 1}{x - 1}$. B. $y = \frac{-x^2 + 1}{x - 1}$. C. $y = \frac{-x^2 + 3x + 2}{2x - 2}$. D. $y = \frac{-2x^2 - 3x + 1}{x - 1}$.

Câu 24: Đồ thị sau là của hàm số nào dưới đây?



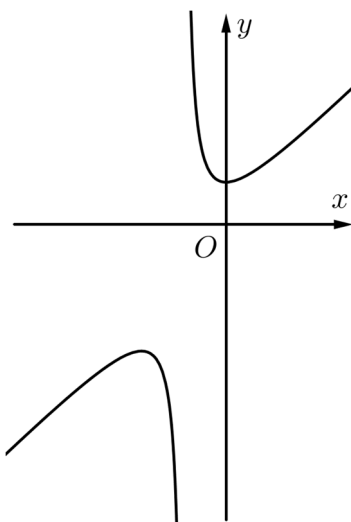
A. $y = \frac{x^2 - 3}{3x}$.

B. $y = \frac{x^2 - 3}{-3x}$.

C. $y = \frac{x^2 + 3}{-3x}$.

D. $y = \frac{x^2 + 3}{3x}$.

Câu 25: Đồ thị sau có thể là của hàm số nào dưới đây?



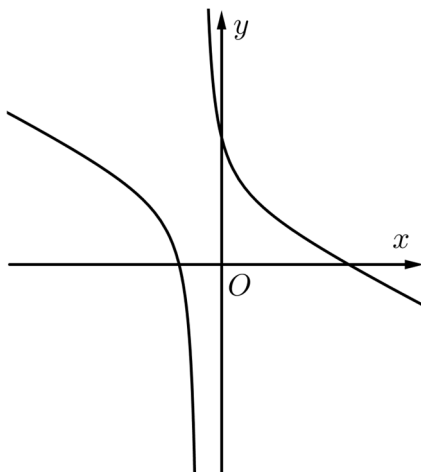
A. $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

B. $y = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$.

C. $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 2}$.

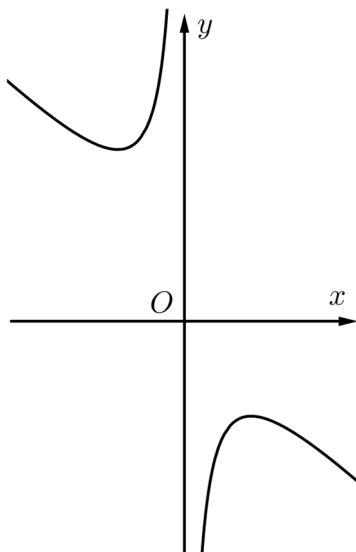
D. $y = \frac{x^2 + 4x + 2}{x + 3}$.

Câu 26: Đồ thị sau có thể là của hàm số nào dưới đây?



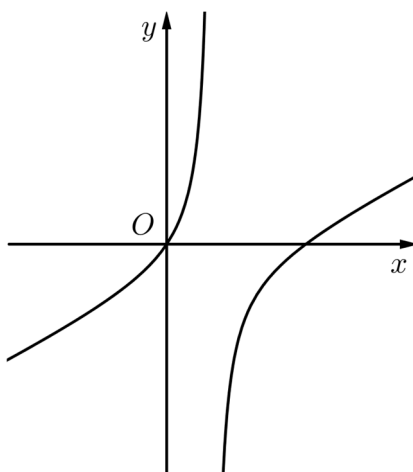
A. $y = \frac{-x^2 + 2x + 3}{2x + 1}$. B. $y = \frac{-2x^2 + x - 1}{2x + 1}$. C. $y = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x + 2}$. D. $y = \frac{x^2 + 3x + 4}{2x + 1}$.

Câu 27: Đồ thị sau có thể là của hàm số nào dưới đây?



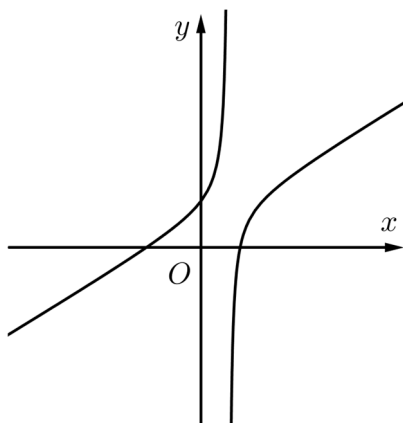
A. $y = \frac{-x^2 + x + 2}{x}$. B. $y = \frac{-x^2 + x + 3}{x}$. C. $y = \frac{-x^2 + x - 3}{x}$. D. $y = \frac{-x^2 + x + 1}{x}$.

Câu 28: Đồ thị sau có thể là của hàm số nào dưới đây?



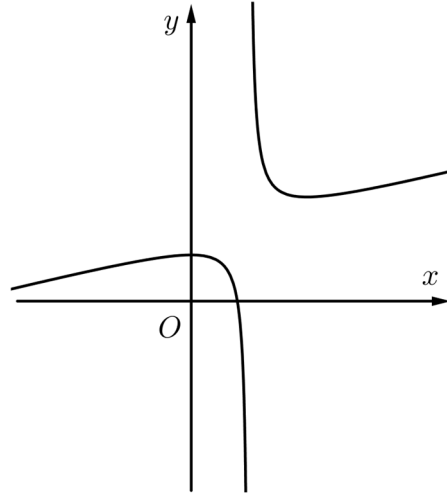
A. $y = \frac{x^2 + 3x}{2x - 2}$. B. $y = \frac{x^2 - 3x}{2x - 2}$. C. $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$. D. $y = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$.

Câu 29: Đồ thị sau có thể là của hàm số nào dưới đây?



A. $y = \frac{3x^2 + x - 3}{5x - 3}$. B. $y = \frac{x^2 - 5x + 2}{2x - 3}$. C. $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{2x - 3}$. D. $y = \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 2}$.

Câu 30: Đồ thị sau có thể là của hàm số nào dưới đây?



A. $y = \frac{x^2 + 4x - 5}{2x - 1}$. B. $y = \frac{x^2 + 4x - 5}{4x - 5}$. C. $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{2x - 3}$. D. $y = \frac{-x^2 + 4x - 5}{x - 1}$.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + 4x - 4}{x + 3}$.

- a) Tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.
- b) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -3$.
- c) Đồ thị hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định.
- d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có phương trình là $y = 2x - 2$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x - 1}{x + 2}$.

- a) Đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.
- b) Điểm $I(-2; 4)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.
- c) Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ -2 .
- d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số cùng với 2 trục tọa độ tạo thành tam giác có diện tích bằng 16.

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 5x + 4}{x + 1}$.

- a) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.
- b) Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị trái dấu.
- c) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên vuông góc với đường thẳng $y = x + 3$.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-5; -3]$ bằng 10.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x - 3}{-x + 1}$.

a) Hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = -1$.

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{5}{2}; 10\right)$.

c) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = -2x + 5$.

d) Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{mx^2 - mx + 1}{x - 1}$.

a) Khi $m = 1$, đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $A(2; 3)$.

b) Khi $m > 0$, hàm số đã cho luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.

c) Khi $m = 2$, đường tiệm cận xiên hợp với trục Ox một góc bằng 60° .

d) Đồ thị hàm số đã cho luôn đi qua 2 điểm cố định với mọi m .

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + (m-1)x + 2}{1-x}$.

a) Khi $m = -3$, hàm số đã cho không có cực trị.

b) Khi $m = 2$, đồ thị hàm số đã cho có tâm đối xứng là điểm $I(1; -3)$.

c) Đồ thị hàm số luôn cắt Ox tại 2 điểm phân biệt.

d) Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa $x_1 \cdot x_2 = -3$ khi $m = 1$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	1	$+\infty$	5	$+\infty$	

a) Nếu $n = -2$ thì $m = 1$.

b) Tích am luôn nhận giá trị dương.

c) $a + b + c = -1$.

d) Khi $m = 1$ thì ta có $4a + b = 3$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1		3	5		$+\infty$			
y'		-	0	+		+	0	-		
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$	$\nearrow$		-7	$\searrow$	$-\infty$
		1				$-\infty$			$-\infty$	

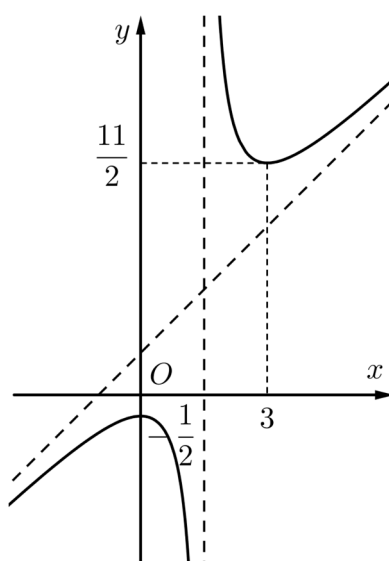
a) Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

b) $a + b + c = m + n$.

c) Hệ số a và n luôn cùng dấu.

d) Hệ số c và n luôn trái dấu.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ có đồ thị như sau:



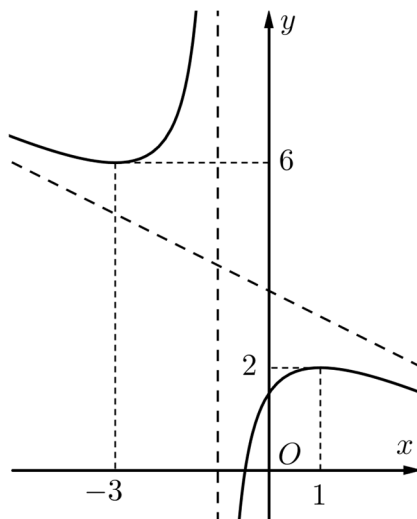
a) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $M\left(3; \frac{11}{2}\right)$.

b) $2c - n = 0$.

c) Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng $x = \frac{3}{2}$.

d) Nếu $a = 4$ thì $n = bc$.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{2x + n}$ có đồ thị như sau:



- a) Hệ số $n = -2$.
- b) Tổng $a + b + c = 8$.
- c) $y'(-3) = 6$.
- d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có phương trình là $x + 2y - 7 = 0$.

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x + 1}$. Biết đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; a)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng b . Tính giá trị biểu thức $S = a^2 + b^2$.

ĐS:

Câu 2: Biết đồ thị hàm số $y = \frac{-3x^2 + 16x}{x - 6}$ có 2 điểm cực trị $A(a; b)$ và $B(c; d)$. Tính giá trị biểu thức $S = a + b + c + d$.

ĐS:

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x + 2}{2x + 3}$. Biết đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $B(a; b)$ và có đường tiệm cận xiên là $y = mx + n$. Khi đó $T = a + 2b + 3m + 4n$ bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - x + 3}{-x + 2}$. Tính $\cos$ góc giữa hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho.

ĐS:

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + 4}$. Biết đồ thị hàm số có điểm cực trị $B(-3; 5)$ và có tâm đối xứng là điểm $I(-4; 7)$. Tính tổng $S = a^2 + b^2 + c^2$.

ĐS:

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + bx + c}{x + n}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	2	6	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-2	$+\infty$	14	$+\infty$	

Tính giá trị biểu thức $T = b^2 - 2nc$.

ĐS:

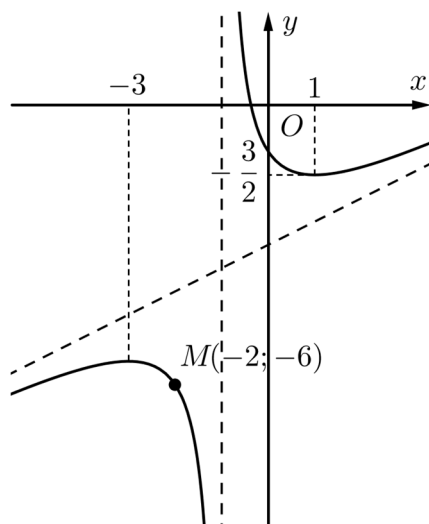
Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + 11x + c}{mx + n}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-8	-7	-6	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-21	$+\infty$	-13	$+\infty$	

Tính giá trị biểu thức $A = ac - mn$.

ĐS:

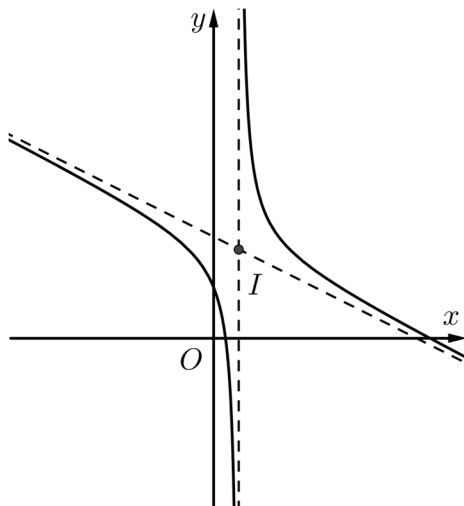
Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{2x + n}$ có đồ thị như sau:



Biết phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có dạng $Ax + By - 5 = 0$. Tính giá trị biểu thức $P = 2025a - 2026b$.

ĐS:

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{-2x^2 + bx + c}{4x + n}$ có đồ thị như sau:

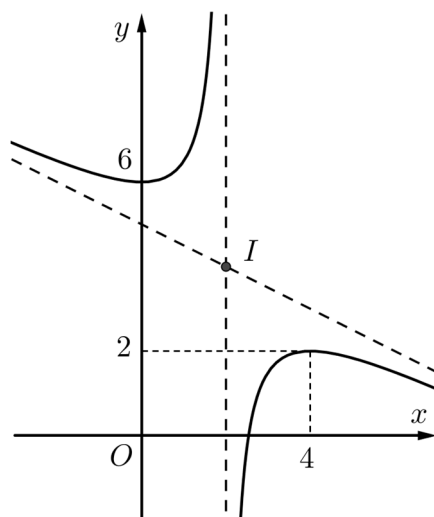


Biết đồ thị có tâm đối xứng là điểm $I\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{4}\right)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1.

Tính giá trị biểu thức $T = b^2 + c^2 - n$.

ĐS:

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{2x + n}$ có đồ thị như sau:



Tính giá trị biểu thức $S = a + b + c$.

ĐS:

BÀI 4. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ MỘT SỐ HÀM SỐ CƠ BẢN**(tiếp theo)****A. LÝ THUYẾT****5. Vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết một số vấn đề liên quan đến thực tiễn**

Ta có thể vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết nhiều bài toán liên quan đến thực tiễn trong những lĩnh vực khác nhau như kinh tế, khoa học, kỹ thuật, ...

Ví dụ 1. Giả sử chi phí tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình v (km/h) theo công thức:

$$C(v) = \frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v \quad (0 < v \leq 120)$$

- Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $C = C(v)$ trên $(0; 120]$.
- Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu để tiết kiệm tiền xăng nhất?
(Theo: http://laroche.lycee.free.fr/telecharger/bacpro/bacpro_maintenance_auto.pdf)

Ví dụ 2. Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$$C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500.$$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét.

Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa.

- Hãy viết biểu thức tính $B(x)$ và $L(x)$ theo x .
- Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = L(x)$ trên $[1; 18]$.
- Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày bao nhiêu mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa? Tính lợi nhuận tối đa đó.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1. Người ta muốn chế tạo một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có thể tích 500 cm^3 với yêu cầu dùng ít vật liệu nhất. Chiều cao hộp phải là 2 cm, các kích thước khác là x, y với $x > 0$ và $y > 0$.

- Hãy biểu thị y theo x .
- Chứng tỏ rằng diện tích toàn phần của chiếc hộp là: $S(x) = 500 + 4x + \frac{1000}{x}$.
- Lập bảng biến thiên của hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$.
- Kích thước của hộp là bao nhiêu thì dùng ít vật liệu nhất? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Câu 2. Trong một nhà hàng, mỗi tuần để chế biến x phần ăn (x lấy giá trị trong khoảng từ 30 đến 120) thì chi phí trung bình (đơn vị: nghìn đồng) của một phần ăn được cho bởi công thức:

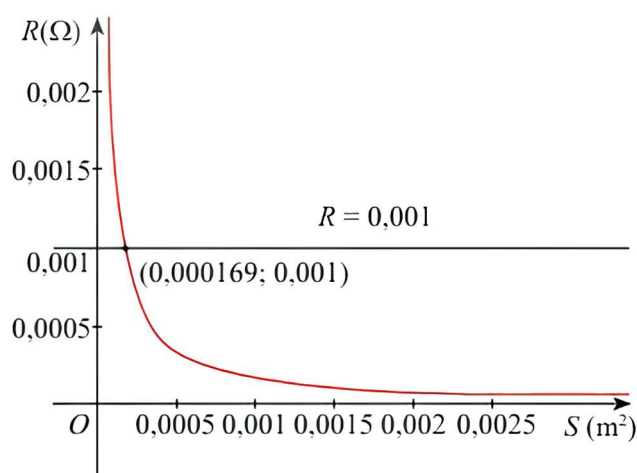
$$\overline{C}(x) = 2x - 230 + \frac{7200}{x}.$$

- a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \overline{C}(x)$ trên $[30; 120]$.
- b) Từ kết quả trên, tìm số phần ăn sao cho chi phí trung bình của một phần ăn là thấp nhất.

Câu 3. Điện trở R (Ω) của một đoạn dây dẫn hình trụ được làm từ vật liệu có điện trở suất ρ (Ωm), chiều dài l (m) và tiết diện S (m^2) được cho bởi công thức $R = \rho \cdot \frac{l}{S}$.

(Vật lí 11 - Chân trời sáng tạo, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2023, trang 104)

Giả sử người ta khảo sát sự biến thiên của điện trở R theo tiết diện S (ở nhiệt độ $20^\circ C$) của một sợi dây điện dài 10 m làm từ kim loại có điện trở suất ρ và thu được đồ thị hàm số như hình sau:



- a) Có nhận xét gì về sự biến thiên của điện trở R theo tiết diện S ?
- b) Từ đồ thị, hãy giải thích ý nghĩa của tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng $R = 0,001$.
- c) Tính điện trở suất ρ của dây điện. Từ đó, hãy cho biết dây điện được làm bằng kim loại nào trong số các kim loại được cho ở bảng sau:

Kim loại	Điện trở suất ở $20^\circ C$ (Ωm)
Bạc	$1,62 \cdot 10^{-8}$
Đồng	$1,69 \cdot 10^{-8}$
Vàng	$2,44 \cdot 10^{-8}$
Nhôm	$2,75 \cdot 10^{-8}$
Sắt	$9,68 \cdot 10^{-8}$

Câu 4. Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 2 m với vận tốc ban đầu 24,5 m/s là $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$ (theo Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

- a) Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.

b) Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?

c) Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

Câu 5. Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b . Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

Câu 6. Giả sử chi phí $C(x)$ (nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị của một loại hàng hoá nào đó được cho bởi hàm số $C(x) = 30\,000 + 300x - 2,5x^2 + 0,125x^3$.

a) Tìm hàm chi phí biên $C'(x)$.

b) Tìm $C'(200)$ và giải thích ý nghĩa.

c) So sánh $C'(200)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201.

Câu 7. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là

$$C(x) = \frac{300x}{100 - x} \text{ (triệu đồng)}, \quad 0 \leq x < 100.$$

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = C(x)$. Từ đó, hãy cho biết:

a) Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?

b) Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

Câu 8. Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu P (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}, \quad 0 \leq t \leq 10,$$

trong đó thời gian t được tính bằng giây. Tính tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim.

Câu 9. Một nhà phân tích thị trường làm việc cho một công ty sản xuất thiết bị gia dụng nhận thấy rằng nếu công ty sản xuất và bán x chiếc máy xay sinh tố hằng tháng thì lợi nhuận thu được (nghìn đồng) là

$$P(x) = -0,3x^3 + 36x^2 + 1800x - 48000.$$

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = P(x)$, $x \geq 0$. Sử dụng đồ thị đã vẽ để trả lời các câu hỏi sau:

a) Khi chỉ sản xuất một vài máy xay sinh tố, công ty sẽ bị lỗ (vì lúc này lợi nhuận âm). Hỏi hằng tháng công ty phải sản xuất ít nhất bao nhiêu chiếc máy xay sinh tố để hoà vốn?

b) Lợi nhuận lớn nhất mà công ty có thể đạt được là bao nhiêu? Công ty có nên sản xuất 200 chiếc máy xay sinh tố hằng tháng hay không?

Câu 10. Một nhà sản xuất trung bình bán được 1000 tivi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 14 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng, số lượng tivi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 tivi mỗi tuần.

- Tìm hàm cầu.
- Công ty nên giảm giá bao nhiêu cho người mua để doanh thu là lớn nhất?
- Nếu hàm chi phí hằng tuần là $C(x) = 12000 - 3x$ (triệu đồng), trong đó x là số tivi bán ra trong tuần, nhà sản xuất nên đặt giá bán như thế nào để lợi nhuận là lớn nhất?

Câu 11. Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho toạ độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y = t^3 - 12t + 3, t \geq 0$.

- Tìm các hàm vận tốc và gia tốc.
- Khi nào thì hạt chuyển động lên trên và khi nào thì hạt chuyển động xuống dưới?
- Tìm quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 3$.
- Khi nào hạt tăng tốc? Khi nào hạt giảm tốc?

Câu 12. Giả sử chi phí (tính bằng trăm nghìn đồng) để sản xuất đơn vị hàng hoá nào đó là:

$$C(x) = 23000 + 50x - 0,5x^2 + 0,00175x^3.$$

- Tìm hàm chi phí biên.
- Tìm $C'(100)$ và giải thích ý nghĩa của nó.
- So sánh $C'(100)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 101.

Câu 13. Giả sử hàm cầu đối với một loại hàng hoá được cho bởi công thức

$$p = \frac{354}{1 + 0,01x}, x \geq 0,$$

trong đó p là giá bán (nghìn đồng) của mỗi đơn vị sản phẩm và x là số lượng đơn vị sản phẩm đã bán.

- Tìm công thức tính x như là hàm số của p . Tìm tập xác định của hàm số này. Tính số đơn vị sản phẩm đã bán khi giá bán của mỗi đơn vị sản phẩm là 240 nghìn đồng.
- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $x = x(p)$. Từ đồ thị đã vẽ, hãy cho biết:
 - Số lượng đơn vị sản phẩm bán được sẽ thay đổi thế nào khi giá bán p tăng;
 - Ý nghĩa thực tiễn của giới hạn $\lim_{p \rightarrow 0^+} x(p)$.

Câu 14. Dân số của một quốc gia sau t (năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức:

$$N(t) = 100e^{0,012t} \quad (N(t) \text{ được tính bằng triệu người, } 0 \leq t \leq 50).$$

- Ước tính dân số của quốc gia này vào các năm 2030 và 2035 (kết quả tính bằng triệu người, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).

b) Xem $N(t)$ là hàm số của biến số t xác định trên đoạn $[0; 50]$. Xét chiều biến thiên của hàm số $N(t)$ trên đoạn $[0; 50]$.

c) Đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Vào năm nào tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm?

Câu 15. Trong 20 phút theo dõi, lưu lượng nước của một con sông được tính theo công thức

$$Q(t) = -\frac{1}{5}t^3 + 5t^2 + 100,$$

trong đó Q tính theo $\text{m}^3/\text{phút}$, t tính theo phút, $0 \leq t \leq 20$ (Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016).



Khi lưu lượng nước của con sông lên đến $550 \text{ m}^3/\text{phút}$ thì cảnh báo lũ được đưa ra. Trong thời gian theo dõi, lưu lượng nước của con sông lớn nhất là bao nhiêu? Cảnh báo lũ được đưa ra vào thời điểm nào?

Câu 16. Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng.

Trong khoảng 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm

$$h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250,$$

trong đó t là thời gian tính bằng giây và h là độ cao tính bằng kilômét (Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016).

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = h(t)$ với $0 \leq t \leq 50$ (đơn vị trên trục hoành là 10 giây, đơn vị trên trục tung là 10 km).

b) Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $0 \leq t \leq 50$. Xác định hàm số $v(t)$.

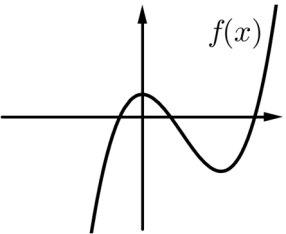
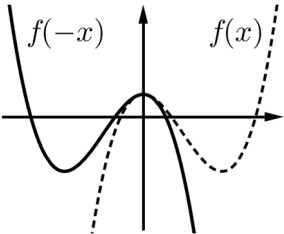
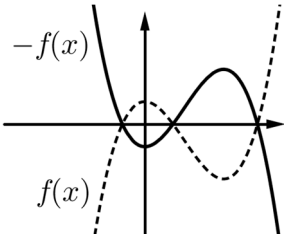
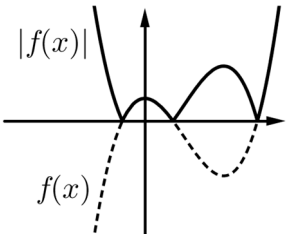
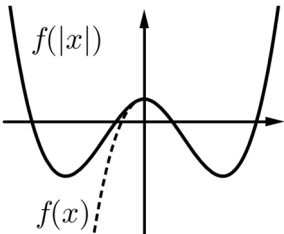
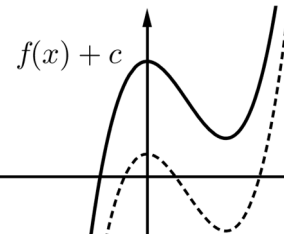
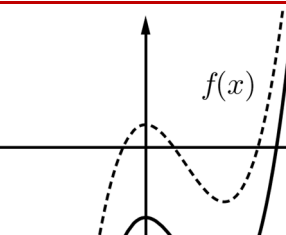
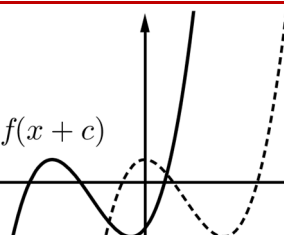
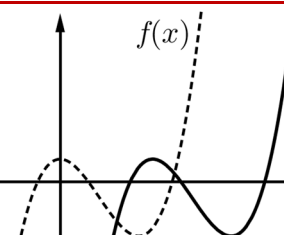
c) Vận tốc tức thời của con tàu lúc bắt đầu hãm phanh là bao nhiêu? Tại thời điểm $t = 25$ (giây) là bao nhiêu?

d) Tại thời điểm $t = 25$ (giây), vận tốc tức thời của con tàu vẫn giảm hay đang tăng trở lại

e) Tìm thời điểm t ($0 \leq t \leq 50$) sao cho con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng. Khoảng cách nhỏ nhất này là bao nhiêu?

BÀI 4. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ MỘT SỐ HÀM SỐ CƠ BẢN**(tiếp theo)****A. LÝ THUYẾT****6. Phép biến đổi đồ thị**

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) . Khi đó ta có một số phép biến đổi đồ thị thường gặp như sau:

 $(C): y = f(x)$	 $(C_1): y = f(-x)$ Lấy đối xứng (C) qua trục Oy.	 $(C_2): y = -f(x)$ Lấy đối xứng (C) qua trục Ox.
 $(C_3): y = f(x)$ - Giữ nguyên (C) nằm trên Ox. - Lấy đối xứng (C) nằm dưới Ox qua trục Ox và bỏ phần (C) nằm dưới Ox đó.	 $(C_4): y = f(x)$ - Giữ nguyên (C) bên phải Oy và bỏ phần (C) bên trái Oy. - Lấy đối xứng (C) bên phải Oy qua trục Oy.	 $(C_5): y = f(x) + c \ (c > 0)$ Tịnh tiến (C) theo phương Oy lên trên c đơn vị.
 $(C_6): y = f(x) - c \ (c > 0)$ Tịnh tiến (C) theo phương Oy xuống dưới c đơn vị.	 $(C_7): y = f(x+c) \ (c > 0)$ Tịnh tiến (C) theo phương Ox qua trái c đơn vị.	 $(C_8): y = f(x-c) \ (c > 0)$ Tịnh tiến (C) theo phương Ox qua phải c đơn vị.

Chú ý:

✓ Để vẽ đồ thị $y = |f(|x|)|$:

① Vẽ đồ thị $y = f(|x|)$;

② Vẽ đồ thị $y = |f(x)|$.

✓ Để vẽ đồ thị $y = |f(x)| \pm c$:

① Vẽ đồ thị $y = |f(x)|$;

② Tịnh tiến đồ thị lên trên hoặc xuống dưới c đơn vị.

✓ Để vẽ đồ thị $y = |f(x \pm c)|$:

① Tịnh tiến đồ thị qua phải hoặc qua trái c đơn vị;

② Vẽ như cách vẽ đồ thị $y = |f(x)|$.

✓ Để vẽ đồ thị $y = f(|x| \pm c)$:

① Tịnh tiến đồ thị qua phải hoặc qua trái c đơn vị;

② Vẽ như cách vẽ đồ thị $y = f(|x|)$.

✓ Để vẽ đồ thị $y = f(|x \pm c|)$:

① Vẽ đồ thị $y = f(|x|)$;

② Tịnh tiến đồ thị qua phải hoặc qua trái c đơn vị.

Sự tương giao của hai đồ thị

Xét 2 đồ thị $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (C') là: $f(x) = g(x)$ (*).

Khi đó, số điểm chung giữa 2 đồ thị (C) và (C') đúng bằng số nghiệm của phương trình (*).

Tiếp tuyến tại một điểm

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ là:

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

Trong đó: $M_0(x_0; y_0)$ là tiếp điểm và $k = y'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến.

Tiếp tuyến đi qua một điểm

Để lập phương trình tiếp tuyến d của (C) biết d đi qua điểm $A(x_A; y_A)$, ta thực hiện:

Cách 1:

Bước 1. Phương trình tiếp tuyến đi qua $A(x_A; y_A)$ và có hệ số góc k có dạng

$$d: y = k(x - x_A) + y_A \quad (*).$$

Bước 2. d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:
$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k \end{cases}.$$

Bước 3. Giải hệ này tìm được x suy ra k và thế vào phương trình $(*)$, ta được tiếp tuyến cần tìm.

Cách 2:

Bước 1. Gọi $M(x_0; f(x_0))$ là tiếp điểm và tính hệ số góc $k = y'(x_0)$ theo x_0 .

Bước 2. Phương trình tiếp tuyến có dạng $d: y = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$ (**). Do điểm $A(x_A; y_A) \in d$ nên $y_A = y'(x_0) \cdot (x_A - x_0) + y_0$ giải phương trình này ta tìm được x_0 .

Bước 3. Thay x_0 vào (**) ta được tiếp tuyến cần tìm.

Chú ý:

Tiếp tuyến $d \parallel \Delta: y = ax + b \Rightarrow$ hệ số góc bằng nhau: $k_d = k_\Delta \Leftrightarrow y'(x_0) = a$.

Tiếp tuyến $d \perp \Delta: y = ax + b, (a \neq 0) \Rightarrow$ tích hệ số góc bằng $-1 \Leftrightarrow y'(x_0) \cdot a = -1 \Leftrightarrow y'(x_0) = -\frac{1}{a}$.

Tiếp tuyến d tạo với trục hoành một góc α thì hệ số góc $k_d = \pm \tan \alpha \Leftrightarrow y'(x_0) = \pm \tan \alpha$.

Ví dụ 1: a) Từ đồ thị $(C): y = -x^3 + 3x^2 + 2$, vẽ đồ thị hàm số

$$(C_1): y = -|x|^3 + 3x^2 + 2 \text{ và } (C_2): y = |-x^3 + 3x^2 + 2|.$$

b) Từ đồ thị $(C): y = \frac{2x-1}{x-1}$, vẽ đồ thị $(C_1): y = \left| \frac{2x-1}{x-1} \right|$ và $(C_2): y = \frac{2|x|-1}{|x|-1}$.

c) Từ đồ thị $(C): y = \frac{-x^2-x+1}{x+2}$, vẽ đồ thị hàm số $(C_1): y = \left| \frac{-x^2-x+1}{x+2} \right|$ và $(C_2): y = \frac{-x^2-|x|+1}{|x|+2}$.

Ví dụ 2: Tìm m để phương trình $2x^3 - 6x - 2m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 3: Tìm m để đường thẳng $y = 3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{3x+2}{1-x}$ tại 2 điểm phân biệt.

Ví dụ 4: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 + mx^2 - x - m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Ví dụ 5: Tìm m để đường thẳng $y = -2m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+1}{x}$ tại 2 điểm phân biệt.

Ví dụ 6: Tìm m để phương trình $x^2 + 2x + 5 = (m^2 + 2m + 5)(x + 1)$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

Ví dụ 7: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) biết:

a) $(C): y = 3x^3 - 5x^2 + 1$, tiếp điểm $A(1; -1)$.

b) $(C): y = \frac{2x+1}{x-3}$, tiếp điểm có hoành độ $x_0 = -7$.

c) $(C): y = \frac{3x-2}{x+1}$, hệ số góc của tiếp tuyến là $k = 5$.

d) $(C): y = 1 + \frac{4}{3x+7}$, tiếp tuyến song song với đường thẳng $6x + 2y + 1 = 0$.

e) $(C): y = -2x^3 + 5x + 1$, tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x - 19y + 2 = 0$.

f) $(C): y = x^3 - 3x + 1$, tiếp tuyến đi qua điểm $A(1; -6)$.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1: a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$.

b) Dựa vào đồ thị (C) , tìm m để phương trình $x^3 - 3x + m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} (C)$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) .

b) Tìm m để phương trình $\left| \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \right| - m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 3: Cho hàm số $(C): y = \frac{-x-1}{1-x}$. Tìm m để (C) cắt $d: y = x - m$ tại 2 điểm phân biệt.

Câu 4: Cho hàm số $y = mx^3 - x^2 - 2x + 8m$ có đồ thị là (C_m) . Tìm m đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Câu 5: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + 1$ có đồ thị (C) . Tìm m để đường thẳng $d: y = -x + 1$ cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt.

Câu 6: Tìm m để phương trình $x - \frac{1}{x+1} - m + 3 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{2x^2}{x+1} + 3m - 2 (C)$. Tìm m để đồ thị (C) cắt đường thẳng $d: y = -2$ tại 2 điểm phân biệt.

Câu 8: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4 (C)$. Tìm m để đường thẳng $d: y = m(x+1)$ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $M(-1; 0)$ và A, B sao cho $MA = 2MB$.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{mx-1}{x+2}$ có đồ thị là (C) . Tìm m để đường thẳng $d: y = 2x - 1$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB = \sqrt{10}$.

Câu 10: Cho hàm số $y = x^3 + (m+3)x^2 + 1 - m$ có đồ thị (C) .

a) Tìm m để hàm số có điểm cực đại là $x = -1$.

b) Tìm m để đồ thị (C) cắt trục hoành tại $x = -2$.

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{(m+1)x - 2m + 1}{x - 1}$ có đồ thị là (C) .

a) Tìm m để đồ thị (C) đi qua điểm $A(0; -1)$.

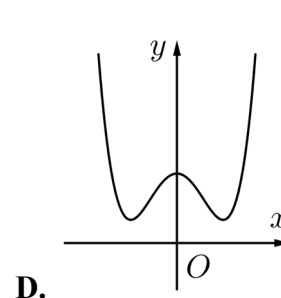
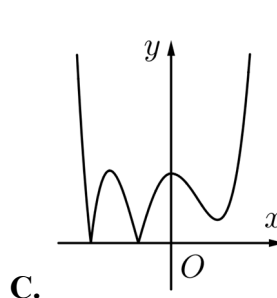
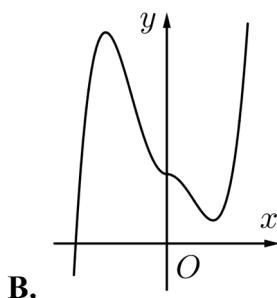
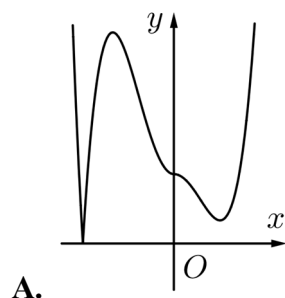
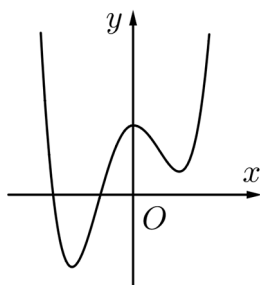
b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số với m tìm được.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị trên tại giao điểm của nó với trục tung.

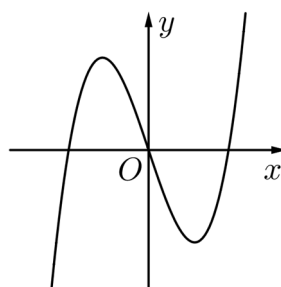
C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

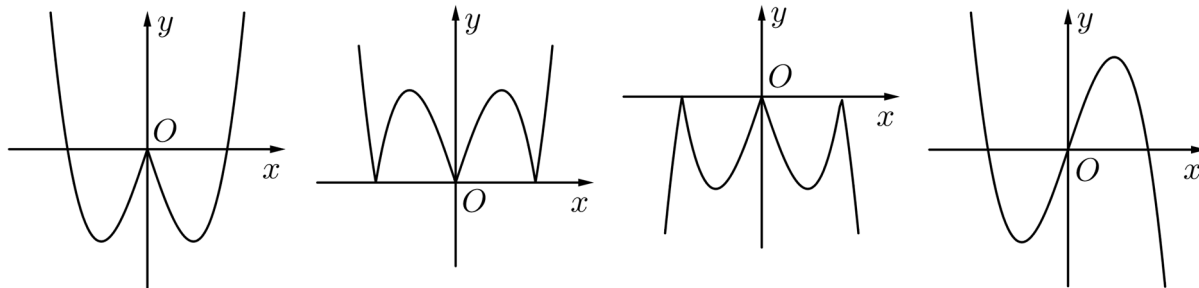
Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ là hình nào sau đây?



Câu 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị như hình vẽ:



Đồ thị hàm số $y = |x|^3 - 3|x|$ là:



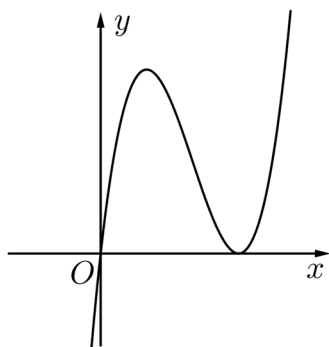
A.

B.

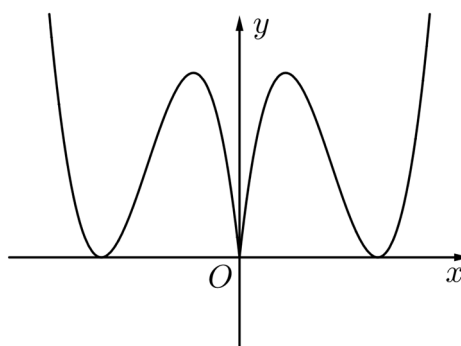
C.

D.

Câu 3: Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

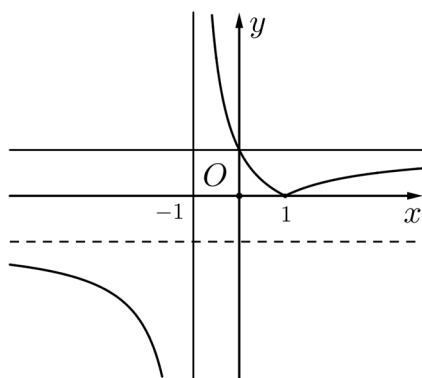
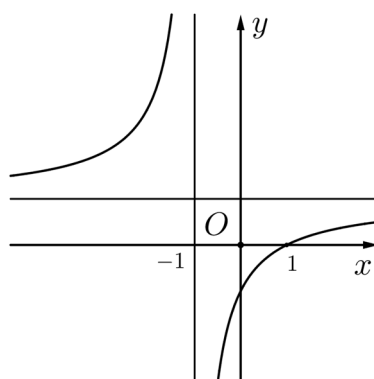
A. $y = |x|^3 + 6|x|^2 + 9|x|$.

B. $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$.

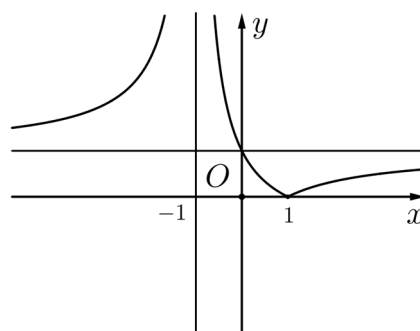
C. $y = |x^3 - 6x^2 + 9x|$.

D. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$.

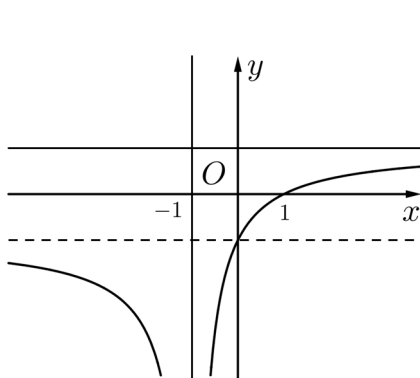
Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị như hình bên. Đồ thị hàm số $y = \frac{|x-1|}{x+1}$ là hình nào sau đây?



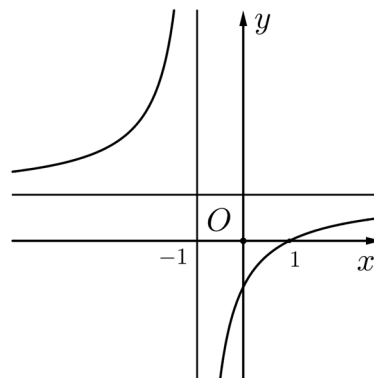
A.



B.

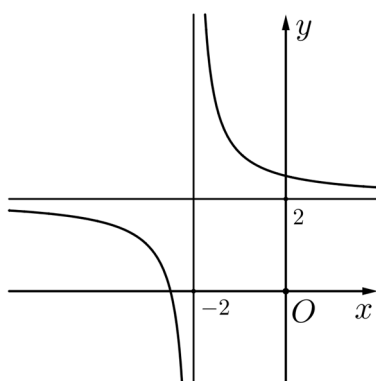


C.

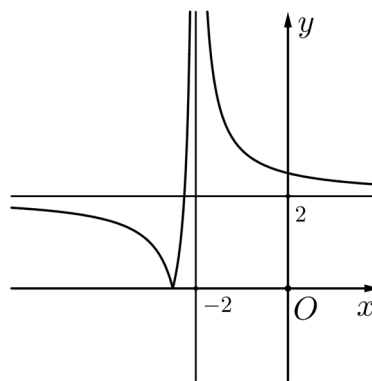


D.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{2x+5}{x+2}$ có đồ thị như Hình 1.



Hình 1



Hình 2

Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào?

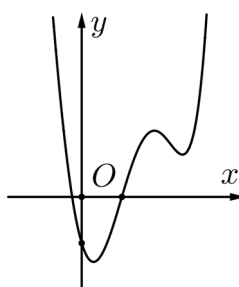
A. $y = \left| \frac{2x+5}{x+2} \right|$.

B. $y = \frac{2|x|+5}{|x|+2}$.

C. $y = -\frac{2x+5}{x+2}$.

D. $y = \left| \frac{2|x|+5}{|x|+2} \right|$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(|x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3.

B. 4.

C. 6.

D. 7.

Câu 7: Hàm số $y = |x|^3 - x^2 + 4$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Câu 8: Hàm số $y = |3x^3 + 4x - 1|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 2]$ bằng:

A. 0.

B. 1.

C. -1.

D. 2.

Câu 9: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ tại điểm $C(-2; 3)$ là:

A. $y = 2x + 1$. B. $y = -2x + 7$. C. $y = 2x + 7$. D. $y = -2x - 1$.

Câu 10: Cho đường cong $(C): y = x^3 - 3x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

A. $y = -9x + 5$. B. $y = 9x + 5$. C. $y = 9x - 5$. D. $y = -9x - 5$.

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{-2x+3}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại các giao điểm của nó và đường thẳng $y = x - 3$.

A. $y = -x - 3, y = x + 1$. B. $y = x - 3, y = -x + 1$.
C. $y = -x + 3, y = -x + 1$. D. $y = -x - 3, y = -x + 1$.

Câu 12: Gọi M là điểm trên $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$ có tung độ bằng 5. Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A và B . Tính diện tích tam giác OAB .

A. $\frac{121}{6}$. B. $\frac{119}{6}$. C. $\frac{123}{6}$. D. $\frac{125}{6}$.

Câu 13: Cho hàm số $y = \frac{x+3}{2x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $7x + y + 2026 = 0$.

A. $y = -7x + 11$. B. $y = -7x + 11, y = -7x - 3$.
C. $y = -7x - 3, y = -7x + 4$. D. $y = -7x + 11, y = -7x - 10$.

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{2x^2-5x}{x-2}$ có đồ thị là (C) . Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $d: 4y + x - 1 = 0$ có phương trình là:

A. $y = 4x + 7$ và $y = 4x + 11$. B. $y = 4x + 3$ và $y = 4x + 5$.
C. $y = 4x + 5$ và $y = 4x - 7$. D. $y = 4x - 1$ và $y = 4x - 9$.

Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = 2x - 3$. Số giao điểm của (C) và d là:

A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Câu 16: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x+3)(x^2+3x+2)$ với trục Ox là:

A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

Câu 17: Tất cả giá trị của tham số m để phương trình $x^3 - 3x - m + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt là:

A. $-1 < m < 3$. B. $-1 \leq m \leq 3$.
C. $m = 1$. D. $m < -1$ hoặc $m > 3$.

Câu 18: Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 6$ có đồ thị là (C) . Tìm m để đường thẳng $d: y = mx - 2m - 4$ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt.

- A. $m \geq -3$. B. $m > -3$. C. $1 \neq m > -3$. D. $m = -3$.

Câu 19: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Tìm m để đường thẳng $d: y = x + m - 1$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2\sqrt{3}$.

- A. $m = 4 \pm \sqrt{3}$. B. $m = 4 \pm \sqrt{10}$. C. $m = 2 \pm \sqrt{3}$. D. $m = 2 \pm \sqrt{10}$.

Câu 20: Biết đường thẳng $d: y = -x + m$ luôn cắt đồ thị $(C): y = \frac{2x+1}{x+2}$ tại 2 điểm phân biệt A, B . Độ dài đoạn AB đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

- A. 4. B. $\sqrt{6}$. C. $3\sqrt{6}$. D. $2\sqrt{6}$.

Câu 21: Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x - 1}{1 - x}$ (C) và đường thẳng $d: y = 2x + m$. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt.

- A. $m > -1$. B. $-5 < m < -1$. C. $m < -5$. D. $m < -5 \vee m > -1$.

Câu 22: Biết đường thẳng $y = 2x + 3$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 + 3x}{2x - 1}$ tại 2 điểm A, B . Độ dài đoạn AB bằng:

- A. $\frac{5\sqrt{5}}{4}$. B. $5\sqrt{5}$. C. $\frac{5\sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{9\sqrt{5}}{2}$.

Câu 23: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = -2x + m$. Tìm m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thuộc nhánh phải của (C) .

- A. $m > 11$. B. $m < -1$.
C. $m < -1$ hoặc $m > 11$. D. $m > 5$.

Câu 24: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho đường thẳng $y = (m+1)x + 2$ cắt đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + 3x - 2}{x + 1}$ tại 2 điểm phân biệt.

- A. $m \in (-\infty; 0] \cup [16; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; 0) \cup (16; +\infty)$.
C. $m \in (16; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; 0)$.

Câu 25: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = m$. Tất cả các giá trị của tham số m để (C) cắt d tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB = \sqrt{2}$ là:

- A. $m = 1 + \sqrt{6}$. B. $\begin{cases} m = 1 + \sqrt{6} \\ m = 1 - \sqrt{6} \end{cases}$. C. $m = 1 - \sqrt{6}$. D. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $f(x) = 2m + 1$ có 3 nghiệm phân biệt.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				3		$-\infty$
			$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$		
			-1				

- A. $0 < m < 1$. B. $0 < m < 2$. C. $-1 < m < 0$. D. $-1 < m < 1$.

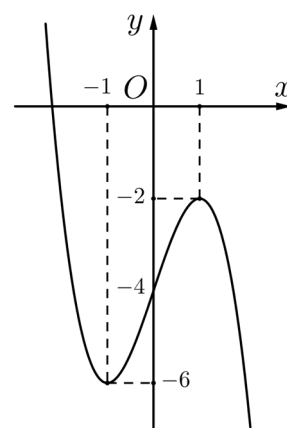
Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $f(x) = 2m$ có đúng 2 nghiệm phân biệt.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	0	-	
y			0				0		
		$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$			
		$-\infty$		-3			$-\infty$		

- A. $\begin{cases} m = 0 \\ m < -3 \end{cases}$. B. $m < -3$. C. $\begin{cases} m = 0 \\ m < -\frac{3}{2} \end{cases}$. D. $m < -\frac{3}{2}$.

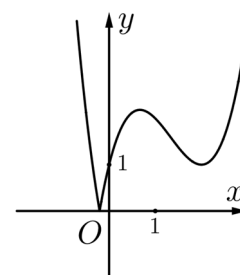
Câu 28: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 4$ có đồ thị biểu diễn là đường cong (C) như hình vẽ. Tìm tất cả giá trị của số thực m để phương trình $|x|^3 - 3|x| = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

- A. $-4 < m < -2$.
B. $2 < m < 4$.
C. $-2 < m < 0$.
D. $0 < m < 2$.

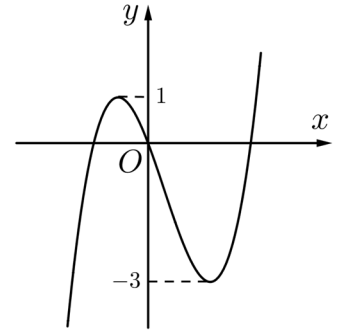


Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời hàm số $y = |f(x)|$ có đồ thị như hình vẽ bên. Xác định số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$.

- A. 1.
B. 4.
C. 5.
D. 3.



Câu 30: Hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có 3 điểm cực trị là:



- A. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$.
- B. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$.
- C. $m = -1$ hoặc $m = 3$.
- D. $1 \leq m \leq 3$.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C) .

- a) (C) cắt đường thẳng $\Delta: y = 2x + 3$ tại 2 điểm phân biệt.
- b) Khi $1 \leq m \leq 5$, đường thẳng $y = x + m$ không có điểm chung với (C) .
- c) Đường thẳng $d: y = x + m$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB = \sqrt{10}$ khi và chỉ khi $m = 0$ hoặc $m = 6$.
- d) Mọi đường thẳng $y = ax + b$ với hệ số góc $a < 0$ luôn cắt (C) tại 2 điểm phân biệt thuộc 2 nhánh của đồ thị.

Câu 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) .

- a) Đồ thị (C) cắt Ox tại 3 điểm phân biệt.
- b) Đồ thị $(C'): y = |x^3 - 3x|$ có 3 điểm cực trị.
- c) Đồ thị (C) cắt đường thẳng $y = 2$ tại 2 điểm phân biệt A, B . Khi đó diện tích tam giác OAB bằng 6.
- d) Phương trình $|x^3 - 3x| - 1 = 2m$ có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 2$.

Câu 3: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + m + 2$ có đồ thị (C) .

- a) Với $m = -1$, đồ thị (C) cắt trục hoành tại đúng 1 điểm.
- b) Khi $m = 0$, đồ thị (C) cắt đường thẳng $\Delta: y = 4x$ tại điểm có hoành độ $x = 1$.
- c) Có 2 giá trị nguyên của m để phương trình $-x^3 + 3x + m + 2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.
- d) Phương trình $x^3 - 3x - m + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt, trong đó có 2 nghiệm dương khi và chỉ khi $-1 < m < 1$.

Câu 4: Cho hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 + 2m - 1$ có đồ thị (C) .

- a) Khi $m = 1$, đồ thị (C) chỉ cắt trục hoành tại 1 điểm.

b) Khi $m < 0$ hoặc $m > \frac{1}{2}$, phương trình $-2x^3 + 3x^2 + 2m - 1 = 0$ có 1 nghiệm dương.

c) (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt khi $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$.

d) Với $m = 0$, đồ thị (C) cắt đường thẳng $\Delta: y = -3x + 1$ tại 2 điểm A, B với $AB = 3\sqrt{10}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$ có đồ thị (C) .

a) Đồ thị (C) cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt nằm về 2 phía so với trục Oy .

b) Đường thẳng $\Delta: y = -x + 3$ không cắt đồ thị (C) .

c) Đường thẳng $d: y = m$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi $m < -5$ hoặc $m > -1$.

d) Đồ thị (C) cắt đường thẳng $-5x + 4y + 7 = 0$ tại 2 điểm A, B với $AB = \frac{\sqrt{41}}{2}$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$ có đồ thị (C) .

a) Đồ thị (C) cắt 2 trục tọa độ tại 2 điểm A, B thỏa $OA = OB$.

b) Đồ thị $(C'): y = \frac{|x|+3}{|x|-1}$ không có cực trị.

c) Đường thẳng $y = x - 2$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ thỏa $x_A + x_B = -4$.

d) Phương trình $\frac{x+3}{x-1} = -x + m$ vô nghiệm khi và chỉ khi $m < -2$ hoặc $m > 6$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{2x+m}{x+1}$ có đồ thị (C) .

a) Khi $m = 0$, đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ O .

b) Đồ thị (C) cắt đường thẳng $y = 1 - x$ tại 2 điểm phân biệt khi $m > 2$.

c) Khi $m > 1$, đồ thị (C) cắt đường thẳng $\Delta: y = x + 1$ tại 2 điểm phân biệt thuộc cùng 1 nhánh của (C) .

d) Khi $m = 1$, khoảng cách ngắn nhất giữa 2 nhánh của đồ thị (C) bằng $2\sqrt{2}$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{4x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) .

a) Đồ thị (C) không có điểm chung với đường thẳng $y = 2x - 5$.

b) Đường thẳng $y = 3x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{4x+2}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt có tung độ là y_1 và y_2 . Khi đó $y_1 + y_2 = 11$.

c) Có 12 giá trị nguyên của m để đồ thị (C) không có điểm chung với đường thẳng $\Delta: y = -2x + m$.

d) Không có giá trị nào của m để đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt thuộc 2 nhánh của nó.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - x - 2}{x - 1}$ có đồ thị (C) .

a) Đồ thị (C) cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt.

b) Phương trình $\frac{2x^2 - x - 2}{x - 1} = x - m$ luôn có 2 nghiệm phân biệt.

c) Có 2 giá trị của m để đồ thị (C) cắt đường thẳng $y = m$ tại 2 điểm phân biệt cách nhau một khoảng bằng 1.

d) Biết đồ thị (C) cắt đường thẳng $y = x - m$ tại 2 điểm A và B sao cho $AB = \sqrt{26}$. Tổng bình phương các giá trị của m là 26.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x - 6}{x + 1}$ có đồ thị (C) .

a) Đồ thị (C) cắt đường thẳng $y = 3$ tại 2 điểm đối xứng nhau qua trục tung.

b) Đường thẳng $y = 3x + 1$ không cắt đồ thị (C) .

c) Có 3 giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-5; 5]$ để đường thẳng $d: y = 2x + m$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt.

d) Khi đường thẳng $y = -x + m$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt M, N sao cho diện tích tam giác OMN bằng 15 thì tổng bình phương các giá trị của m bằng 64.

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Biết tập tất cả các giá trị của m để đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $d: y = m$ tại 3 điểm phân biệt là khoảng $(a; b)$. Tính giá trị biểu thức $S = a^2 + b^2$.

ĐS:

Câu 2: Cho hàm số $y = (x - m)(2x^2 + x - 3m)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt?

ĐS:

Câu 3: Biết tập tất cả các giá trị m để phương trình $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - m = 0$ có 6 nghiệm phân biệt là khoảng $(a; b)$. Tính giá trị biểu thức $T = ab$.

ĐS:

Câu 4: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(1;5)$ và B là giao điểm thứ 2 của d với (C) . Khi đó, diện tích tam giác OAB bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-5;5]$ để đường thẳng $y = 2x + 1$ có 2 giao điểm với đồ thị hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$?

ĐS:

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Biết đường thẳng d đi qua điểm $M(0;-2)$ và cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho M là trung điểm của AB có phương trình dạng $d: y = ax + b$. Tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2$.

ĐS:

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ (C). Biết có 2 giá trị của m là m_1 và m_2 để đường thẳng $d: y = x - m$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 21$. Tích $m_1 m_2$ bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{-x^2 - 3x - 5}{x+1}$ có đồ thị (C) . Đường thẳng $d: y = x + 5$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B . Tính tổng khoảng cách từ 2 điểm A, B đến trục hoành.

ĐS:

Câu 9: Cho hàm số $y = x - \frac{1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Biết có 2 giá trị của m để đường thẳng $y = m$ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $OA \perp OB$. Giá trị dương của m bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-12;12]$ để đường thẳng $d: y = (2m+1)x + 2$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2 + x - 4}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt thuộc về cùng một nhánh của (C) ?

ĐS:

ĐÁP ÁN

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

1. Tính đơn điệu của hàm số

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

1.D	2.B	3.C	4.D	5.A	6.D	7.C	8.C	9.C	10.A
11.C	12.D	13.A	14.A	15.B	16.C	17.C	18.D	19.B	20.A
21.B	22.D	23.D	24.A	25.A	26.A	27.C	28.C	29.A	30.C

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a) Đ	a) Đ	a) Đ	a) Đ	a) S	a) S	a) Đ	a) Đ	a) Đ	a) S
b) S	b) S	b) Đ	b) Đ	b) Đ	b) Đ	b) S	b) S	b) S	b) S
c) S	c) S	c) S	c) S	c) Đ	c) Đ	c) Đ	c) Đ	c) Đ	c) Đ
d) Đ	d) Đ	d) Đ	d) Đ	d) S	d) S	d) Đ	d) S	d) Đ	d) S

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	15	-4	3	10	-1,5	-1	-15	726	2015

3. HD: $a = 0, b = 2; S = -4$.

5. HD: $a = -3, b = 1; S = 10$.

6. HD: $a = 0, b = \frac{1}{2}; P = -\frac{3}{2}$.

7. HD: $a = -1, b = 1; S = -1$.

9. HD: $\frac{a}{b} = \frac{121}{6}; T = ab = 726$.

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ (tiếp theo)**2. Cực trị của hàm số****Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn**

1.A	2.D	3.C	4.B	5.B	6.D	7.D	8.A	9.A	10.A
11.B	12.C	13.C	14.A	15.C	16.A	17.B	18.C	19.A	20.D
21.B	22.D	23.B	24.D	25.A	26.C	27.C	28.C	29.A	30.A

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a) Đ	a) Đ	a) S	a) S	a) Đ	a) S	a) S	a) S	a) Đ	a) Đ
b) Đ	b) Đ	b) Đ	b) Đ	b) Đ	b) Đ	b) S	b) Đ	b) S	b) Đ
c) S	c) S	c) Đ	c) S	c) Đ	c) Đ	c) Đ	c) Đ	c) Đ	c) S
d) Đ	d) S	d) Đ	d) Đ	d) S	d) Đ	d) Đ	d) Đ	d) Đ	d) S

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	1	19	23	14	-8	2	9	5	63

4. HD: $x_N = -2$, $y_N = 21$; $S = 23$.

6. HD: $a = 2$, $b = 5$; $S = -8$.

8. HD: $a = 2$; $P = 9$.

9. HD: $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$; $T = 5$.

10. HD: $a = 8$, $b = 1$; $T = 63$.

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ (tiếp theo)

3. Dạng toán: Tìm m để hàm số đồng biến, nghịch biến trên từng khoảng xác định

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

1.A	2.D	3.A	4.C	5.C	6.A	7.C	8.B	9.C	10.D
11.D	12.A	13.A	14.A	15.D	16.C	17.A	18.D	19.C	20.A
21.A	22.B	23.C	24.B	25.A	26.C	27.D	28.B	29.A	30.C

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a) S	a) S	a) S	a) S	a) Đ	a) S	a) Đ	a) S	a) Đ	a) Đ
b) S	b) Đ	b) S	b) S	b) S	b) Đ	b) S	b) Đ	b) S	b) S
c) Đ	c) Đ	c) Đ	c) Đ	c) S	c) Đ	c) Đ	c) Đ	c) Đ	c) Đ
d) Đ	d) S	d) Đ	d) S	d) Đ	d) S	d) Đ	d) Đ	d) S	d) Đ

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
15	2	30	-54	1	5	89	290	3	26

1. HD: $a = -4, b = -1; S = 15$.

2. HD: $m \in \left[-\frac{3}{4}; 1\right]; 2$ số nguyên.

3. HD: $1 \leq m \leq 4$; Tổng bình phương là 30.

4. HD: $m \leq -2 \Rightarrow m \in \{-10; -9; -8; \dots; -2\}$; Tổng là -54.

5. HD: $m \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$; Số giá trị nguyên là 1.

6. HD: $m \in \{0; 1; 2\}$; Tổng bình phương là 5.

7. HD: $-44; -43; \dots; 0; \dots; 43; 44$. Có 89 số nguyên m .

8. HD: $m \in (-\infty; 0] \cup [7; +\infty)$; $a = 0, b = 7; T = 290$.

9. HD: $-\sqrt{3} \leq m \leq \sqrt{3}$; Có 3 giá trị nguyên của m .

10. HD: $a = 1, b = 5; T = 26$.

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ (tiếp theo)**4. Dạng toán: Tìm m để hàm số đồng biến, nghịch biến trên tập K** **Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn**

1.C	2.B	3.D	4.C	5.B	6.B	7.C	8.A	9.A	10.B
11.B	12.C	13.A	14.A	15.D	16.C	17.C	18.A	19.A	20.B
21.D	22.A	23.C	24.D	25.A	26.D	27.D	28.B	29.A	30.C

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a) Đ	a) Đ	a) S	a) Đ	a) S	a) S	a) Đ	a) S	a) S	a) S
b) S	b) Đ	b) S	b) Đ	b) S	b) Đ	b) S	b) Đ	b) Đ	b) Đ
c) Đ	c) S	c) Đ	c) S	c) Đ	c) S	c) Đ	c) S	c) Đ	c) Đ
d) Đ	d) S	d) Đ	d) Đ	d) S	d) Đ	d) Đ	d) S	d) Đ	d) S

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
233	2	2022	-3	-3	4	8	6	8	2025

1. HD: $a = 13, b = 8; S = 233$.

3. HD: $a = 3, b = 4; T = 2022$.

4. HD: $a = -1, b = \frac{1}{3}; P = -3$.

5. HD: $a = -2, b = -1; S = -3$.

7. HD: $m \in \{0; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$; Số phần tử là 8.

8. HD: $m \geq 20$; Có 6 giá trị của m thỏa mãn.

9. HD: $m \geq -8$; Có 8 giá trị nguyên âm của m .

10. HD: $m \geq 1$; Có 2025 giá trị nguyên của m .

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ (tiếp theo)**5. Cực trị của hàm số bậc ba có tham số****Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn**

1.A	2.C	3.A	4.B	5.C	6.B	7.C	8.C	9.A	10.C
11.A	12.A	13.B	14.B	15.D	16.C	17.A	18.B	19.D	20.D
21.A	22.A	23.C	24.A	25.C	26.A	27.C	28.D	29.A	30.C

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a) S	a) Đ	a) Đ	a) Đ	a) Đ	a) S	a) S	a) Đ	a) Đ	a) S
b) Đ	b) Đ	b) S	b) S	b) S	b) S	b) S	b) Đ	b) S	b) S
c) S	c) Đ	c) Đ	c) S	c) Đ	c) S	c) Đ	c) S	c) Đ	c) Đ
d) Đ	d) Đ	d) S	d) Đ	d) Đ	d) Đ	d) Đ	d) Đ	d) Đ	d) Đ

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
26	20	10	2	-2	-3	1	25	1,41	-2,8

3. HD: $a = -1, b = 3; T = 10$.

7. HD: $a = -1, b = 1; T = 1$.

8. HD: $a = 3, b = 4; S = 25$.

9. HD: $m = \sqrt{2}$.

10. HD: $-\frac{25}{9}$.

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ (tiếp theo)**6. Cực trị của hàm số trùng phương có tham số****Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn**

1.B	2.A	3.B	4.B	5.A	6.B	7.B	8.A	9.B	10.C
11.D	12.B	13.A	14.C	15.D	16.A	17.A	18.C	19.C	20.C
21.C	22.A	23.B	24.D	25.D	26.B	27.B	28.B	29.C	30.B

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a) Đ	a) S	a) Đ	a) S	a) S	a) S	a) Đ	a) S	a) Đ	a) Đ
b) S	b) Đ	b) Đ	b) Đ	b) Đ	b) S	b) S	b) S	b) Đ	b) S
c) Đ	c) Đ	c) S	c) S	c) S	c) Đ	c) S	c) Đ	c) Đ	c) Đ
d) S	d) S	d) S	d) Đ	d) Đ	d) Đ	d) Đ	d) S	d) Đ	d) S

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-5	-5	16	7	9	0	-0,7	4,83	20

2. HD: $a = 1, b = -6, c = 0; T = -5$.

4. HD: $a = 16$.

8. HD: $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \approx -0,7$.

9. HD: $m = 2 + 2\sqrt{2} \approx 4,83$.

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ (tiếp theo)**7. Cực trị của hàm số phân thức bậc hai trên bậc nhất có tham số****Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn**

1.B	2.D	3.D	4.C	5.B	6.A	7.A	8.A	9.C	10.D
11.D	12.D	13.C	14.A	15.B	16.A	17.D	18.C	19.A	20.A
21.B	22.A	23.B	24.B	25.C	26.A	27.D	28.C	29.D	30.A

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a) Đ	a) Đ	a) Đ	a) S	a) S	a) S	a) Đ	a) Đ	a) S	a) Đ
b) S	b) S	b) Đ	b) S	b) S	b) Đ	b) S	b) S	b) Đ	b) S
c) Đ	c) Đ	c) S	c) Đ	c) Đ	c) Đ	c) S	c) Đ	c) Đ	c) Đ
d) S	d) Đ	d) Đ	d) Đ	d) Đ	d) Đ	d) Đ	d) Đ	d) S	d) Đ

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-1	3	10	4	8	4	40	15	-0,3	74

2. HD: $m = 1, n = 1; S = 3$.

3. HD: $a = 2, b = 5; T = 10$.

5. HD: $m \in \{1; 2; 3; \dots; 8\}$; Có 8 giá trị nguyên của m .

7. HD: $\frac{1}{2} < m < 1; m > 5; S = \{6; 7; 8; 9; 10\}$; Tổng bằng 40.

8. HD: $a = 5, b = 3; P = 15$.

9. HD: $a = -\frac{1}{4}, b = 1, c = -1; S = -\frac{1}{4}$.

10. HD: $a = 7, b = 5; T = 74$.

BÀI 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

1. Dạng toán: Tìm GTLN, GTNN của hàm số

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 1

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

1.B	2.A	3.A	4.B	5.B	6.C	7.D	8.C	9.C	10.D
11.B	12.C	13.C	14.A	15.D	16.A	17.B	18.C	19.B	20.C
21.D	22.B	23.A	24.C	25.B	26.C	27.A	28.D	29.C	30.B

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a) Đ	a) S	a) S	a) S	a) S	a) S	a) Đ	a) S	a) Đ	a) S
b) Đ	b) Đ	b) Đ	b) Đ	b) S	b) S	b) S	b) S	b) S	b) Đ
c) S	c) Đ	c) Đ	c) S	c) Đ	c) Đ	c) S	c) Đ	c) S	c) Đ
d) S	d) Đ	d) S	d) Đ	d) Đ	d) S	d) Đ	d) S	d) Đ	d) S

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,54	16	2585	513	6,24	-4	2026	9	-9	4

1. HD: $\frac{4}{e^2} \approx 0,54$.

2. HD: $M + m = 16$.

3. HD: $a = 51, b = 4; S = 2585$.

4. HD: $a = 19, b = 27; P = 513$.

5. HD: $3\sqrt[3]{9} \approx 6,24$.

6. HD: $a = -3, b = 1; T = -4$.

7. HD: $a = 0, b = 1; T = 2026$.

8. HD: $S = \{-3\}$; Tổng bình phương bằng 9.

9. HD: $S = \{-3; 3\}$; Tích bằng -9.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 2

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

1.D	2.A	3.A	4.C	5.B	6.C	7.B	8.B	9.B	10.C
11.C	12.B	13.B	14.D	15.C	16.C	17.B	18.B	19.B	20.C
21.C	22.B	23.A	24.C	25.C	26.D	27.D	28.B	29.A	30.C

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a) S	a) S	a) Đ	a) S	a) Đ	a) Đ	a) Đ	a) Đ	a) Đ	a) Đ
b) Đ	b) Đ	b) Đ	b) Đ	b) Đ	b) S	b) Đ	b) S	b) Đ	b) Đ
c) Đ	c) Đ	c) Đ	c) S	c) Đ	c) Đ	c) Đ	c) Đ	c) S	c) S
d) S	d) S	d) Đ	d) Đ	d) S	d) Đ	d) S	d) S	d) S	d) Đ

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-20	4,83	0,37	1	2,60	5	29	2,83	1	-4

2. HD: $M - m = 2\sqrt{2} + 2 \approx 4,83$.

3. HD: $\frac{\pi}{4} + 1 - \sqrt{2} \approx 0,37$.

5. HD: $\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,60$.

6. HD: $S = \{1; -2\}$; Tổng bình phương bằng 5.

7. HD: $m = 5, m = -2$; Tổng bình phương là 29.

8. HD: $m = 2\sqrt{2} \approx 2,83$.

10. HD: $S = \{-2; 2\}$; Tích bằng -4.

BÀI 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ (tiếp theo)

2. Dạng toán: Vận dụng tìm GTLN, GTNN của hàm số để giải quyết một số bài toán thực tiễn

LÝ THUYẾT

Ví dụ 1. ĐS: $\frac{-13}{2}, \frac{13}{2}$.

Ví dụ 2. ĐS: 12 con cá.

Ví dụ 3. ĐS: 20 mg.

Ví dụ 4. ĐS: 29 m/s.

Ví dụ 5. ĐS: $\frac{a}{6}$ cm.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

1. ĐS: $R = \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$ (dm) $\approx 6,83$ (cm).

2. HD: Gọi x là chiều rộng, lập hàm số tính diện tích: $f(x) = -2x^2 + 100x$;

ĐS: Chiều rộng 25 (m), chiều dài 50 (m).

3. HD: Gọi x cm ($0 < x < 12$) là cạnh của các hình vuông bị cắt. Lập hàm số tính thể tích: $V(x) = x(45 - 2x)(24 - 2x) = 4x^3 - 138x^2 + 1080x$.

ĐS: $x = 5$ cm.

4. HD: Gọi x (mét) là khoảng cách từ E đến B .

Lập hàm số tính độ dài sợi dây: $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 8x + 32}$ ($x > 0$). Tìm được $x = \frac{4}{5}$.

ĐS: $x = \frac{4}{5}$ (mét); Độ dài sợi dây là $\sqrt{41}$ (mét).

5. HD: Đặt $BM = x$, lập hàm số $f(x)$ tính thời gian người canh hải đăng phải đi, ta được:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4} + \frac{7 - x}{6} = \frac{3\sqrt{x^2 + 25} - 2x + 14}{12} \quad \text{với } x \in [0; 7].$$

ĐS: $x = BM = 2\sqrt{5} \approx 4,47$ km.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

1.C	2.B	3.D	4.C	5.C	6.A	7.C	8.A	9.A	10.A
11.B	12.A	13.C	14.C	15.A	16.A	17.A	18.C	19.C	20.C
21.C	22.B	23.C	24.B	25.D	26.B	27.C	28.A	29.A	30.C

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a) S	a) S	a) Đ	a) Đ	a) Đ	a) Đ	a) S	a) Đ	a) S	a) Đ
b) Đ	b) Đ	b) S	b) S	b) S	b) Đ	b) S	b) Đ	b) Đ	b) S
c) Đ	c) S	c) Đ	c) Đ	c) Đ	c) S	c) Đ	c) Đ	c) Đ	c) S
d) S	d) Đ	d) Đ	d) Đ	d) S	d) Đ	d) Đ	d) Đ	d) S	d) Đ

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1,54	6712	15,2	2,4	1,12	1241	1300	83,2	512	2,24

1. HD: Gọi x (dm) là độ dài cạnh đáy, h (dm) là chiều cao hộp sữa. Lập hàm thể tích: $V(x) = -\frac{x^3}{2} + 2x$.

Tìm được $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (dm). Khi đó thể tích hộp sữa là: $\frac{8\sqrt{3}}{9} \approx 1,54$ (lít).

2. HD: Gọi x (dm) là độ dài cạnh đáy. Lập hàm số tính diện tích toàn phần: $f(x) = 2x^2 + \frac{3,6}{x}$. Tìm được $x = \sqrt[3]{0,9}$ (dm). Khi đó chi phí tối ưu là: 6712 đồng.

3. HD: Gọi x (km/h) là vận tốc của tàu. Lập hàm số tính tổng chi phí nhiên liệu trên 1 km đường: $f(x) = \frac{480}{x} + 0,003x^3$. Tìm được $x \approx 15,2$ (km/h).

4. HD: Đặt $OA = x$ (m). Góc nhìn $\widehat{BOC}$ lớn nhất khi và chỉ khi $\tan \widehat{BOC}$ lớn nhất. Lập hàm số tính $\tan \widehat{BOC}$, ta được: $f(x) = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}$. Tìm được $x = 2,4$ (m).

5. HD: Đặt $AD = x$, $IA = R$. Theo đề bài ta có $\pi R + 2(R + x) = 4 \Rightarrow x = \frac{4 - (\pi + 2)R}{2}$. Lập hàm số tính diện tích của cửa sổ: $S(R) = 4R - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)R^2$. Tìm được diện tích lớn nhất là $\frac{8}{4 + \pi} \text{ m}^2$.

6. HD: Gọi x là khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng đáy khối nón. Trường hợp $h = 10 + x$, lập hàm số tính thể tích khối nón: $V(x) = \frac{1}{3}\pi(100 - x^2)(10 + x)$. Tìm được $x = \frac{10}{3}$.

7. HD: Gọi x là giá vé tăng thêm (nghìn đồng). Lập hàm số tính lợi nhuận: $f(x) = (1000 + x)(8000 - 5x)$. Tìm được $x = 300$. Vậy giá vé thích hợp là 1300 (nghìn đồng).

8. HD: Gọi chiều dài cạnh đáy của bể cá là x (mét), ($x > 0$). Lập hàm số tính chi phí:

$$f(x) = 0,16 \times 100.000 + 2,0,6x \cdot 70.000 + 2,0,6 \cdot \frac{0,16}{x} \cdot 70.000 = 16.000 + 84.000x + \frac{13440}{x}.$$

Tìm được $x = \frac{2}{5}$. Chi phí là: 83200 đồng.

9. HD: Gọi số cá giống cần thả ít đi trong vụ này là: x con cá, ($x > 0$). Lập hàm số tính tổng số kilogram cá thu được ở vụ này: $f(x) = (1000 - x)(1,5 + 0,0625x) = -0,0625x^2 + 61x + 1500$. Tìm được $x = 488$. Suy ra cần thả $1000 - 488 = 512$ con cá.

10. HD: Gọi $M(x; x^2)$ thuộc (P) . Lập hàm số tính khoảng cách AM : $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 6x + 9}$. Tính được $x = -1$. Khi đó điểm $M(-1; 1)$ và $AM = \sqrt{5}$.

BÀI 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

1.C	2.C	3.A	4.B	5.B	6.A	7.C	8.C	9.D	10.A
11.B	12.D	13.C	14.B	15.B	16.C	17.A	18.C	19.C	20.D
21.C	22.C	23.C	24.C	25.D	26.C	27.A	28.C	29.B	30.D

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a) S	a) Đ	a) S	a) Đ	a) S	a) Đ	a) S	a) S	a) Đ	a) Đ
b) Đ	b) S	b) Đ	b) Đ	b) Đ	b) S	b) Đ	b) Đ	b) Đ	b) Đ
c) S	c) Đ	c) S	c) Đ	c) Đ	c) S	c) S	c) S	c) Đ	c) S
d) S	d) S	d) S	d) S	d) Đ	d) Đ	d) Đ	d) Đ	d) Đ	d) Đ

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	3	1,2	10	-2	7	44	64	52	4

3. HD: $m.n = \frac{6}{5} = 1,2$.

6. HD: $m < 9$ và $m \neq 5$; Có 7 giá trị nguyên dương.

8. HD: $m = 0$, $m = 8$; Tổng bình phương là 64.

9. HD: $m > 2$; Tổng là 52.

10. HD: $y = (\sqrt{m} - 1)x + \frac{1}{\sqrt{m}} \ (m > 1)$. Tìm được $m = 4$.

BÀI 4. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ MỘT SỐ HÀM SỐ CƠ BẢN

2. Khảo sát hàm số bậc ba

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

1.B	2.D	3.B	4.B	5.B	6.A	7.D	8.A	9.A	10.D
11.B	12.D	13.D	14.D	15.A	16.C	17.A	18.A	19.C	20.D
21.B	22.A	23.D	24.D	25.A	26.A	27.A	28.B	29.B	30.C

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a) S	a) Đ	a) Đ	a) Đ	a) Đ	a) Đ	a) Đ	a) Đ	a) Đ	a) Đ
b) S	b) Đ	b) Đ	b) S	b) S	b) Đ	b) S	b) S	b) Đ	b) S
c) Đ	c) S	c) Đ	c) Đ	c) S	c) S	c) Đ	c) S	c) S	c) S
d) Đ	d) Đ	d) S	d) Đ	d) S	d) S	d) Đ	d) S	d) Đ	d) Đ

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	2157	76	-12	7,93	-9,2	0,53	-135	12	35,8

1. HD: $a = 1, b = -3, c = 0, d = 4; T = 11.$

2. HD: $y = x^3 - 3x - 1; y(13) = 2157.$

3. HD: $y = x^3 + x; y'(5) = 76.$

4. HD: $a = 2, b = -6, c = 6, d = -3; T = -12.$

5. HD: $y = \frac{2}{27}x^3 - \frac{4}{9}x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{254}{27}; S = \frac{214}{27} \approx 7,93.$

6. HD: $a = -\frac{1}{8}, b = \frac{3}{2}, c = -\frac{9}{2}, d = 2; P = -\frac{147}{16} \approx -9,2.$

7. HD: $a = \frac{3}{16}, b = -\frac{27}{16}, c = \frac{45}{16}, d = \frac{27}{16}; T = \frac{135}{256} \approx 0,53.$

8. HD: $a = -\frac{1}{8}, b = -\frac{3}{8}, c = \frac{9}{8}, d = -\frac{5}{8}; T = -135.$

9. HD: $a = -3, b = -9, c = 24; \text{Tổng là } 12.$

10. HD: $a = -\frac{1}{18}, b = -\frac{1}{3}, c = \frac{5}{6}, d = \frac{32}{9}; S = \frac{215}{6} \approx 35,8.$

BÀI 4. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ MỘT SỐ HÀM SỐ CƠ BẢN (tiếp theo)

3. Khảo sát hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

1.A	2.C	3.A	4.A	5.B	6.A	7.D	8.B	9.C	10.A
11.D	12.B	13.A	14.D	15.D	16.C	17.A	18.D	19.D	20.D
21.D	22.D	23.C	24.C	25.C	26.B	27.B	28.D	29.A	30.D

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a) Đ	a) S	a) Đ	a) Đ	a) S	a) S	a) Đ	a) Đ	a) Đ	a) Đ
b) Đ	b) Đ	b) S	b) Đ	b) S	b) S	b) S	b) S	b) Đ	b) S
c) S	c) S	c) Đ	c) S	c) Đ	c) Đ	c) Đ	c) S	c) S	c) S
d) S	d) S	d) S	d) S	d) Đ	d) Đ	d) Đ	d) Đ	d) S	d) Đ

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-4,2	-5,5	3	-261	143	3	16	1,33	-1,7	0,2

1. HD: $a = -\frac{5}{3}, b = \frac{5}{2}; T = -\frac{25}{6} \approx -4,2.$

2. HD: $a = -2, b = 1; T = y(-2) + y(1) = -\frac{11}{2} = -5,5.$

3. HD: $a = 2, b = 2, d = -1; T = 3.$

4. HD: $m = 10, n = 19; A = -261.$

5. HD: $a = 13, b = 11; T = 143.$

6. HD: $b = 2, c = 1, d = -1; S = 3.$

7. HD: $b = 0, c = 2, d = 2; S = 16.$

8. HD: $a = 1, b = 2, c = 1, d = 1; \max_{[2;3]} y = y(2) = \frac{4}{3} \approx 1,33.$

9. HD: $a = 2, b = -3, c = -2, d = 1; P = -\frac{5}{3} \approx -1,7.$

10. HD: $a = 3, b = 2, c = 2, d = 3; y'(-4) = \frac{1}{5} = 0,2.$

BÀI 4. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ MỘT SỐ HÀM SỐ CƠ BẢN (tiếp theo)

4. Khảo sát hàm số phân thức bậc hai trên bậc nhất

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

1.B	2.C	3.A	4.D	5.A	6.B	7.B	8.D	9.C	10.A
11.D	12.D	13.A	14.B	15.C	16.D	17.D	18.B	19.B	20.A
21.A	22.C	23.C	24.B	25.A	26.A	27.C	28.B	29.A	30.B

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a) S	a) Đ	a) Đ	a) S	a) Đ	a) Đ	a) Đ	a) Đ	a) Đ	a) S
b) Đ	b) S	b) Đ	b) Đ	b) S	b) Đ	b) Đ	b) Đ	b) S	b) Đ
c) S	c) Đ	c) Đ	c) S	c) S	c) S	c) S	c) Đ	c) Đ	c) S
d) Đ	d) S	d) S	d) Đ	d) S	d) S	d) Đ	d) S	d) Đ	d) Đ

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4,25	-28	3,5	0,89	123	36	-45	8102	87	-13

1. HD: $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$; $S = \frac{17}{4} = 4,25$.

2. HD: $A(4; -8)$, $B(8; -32)$; $S = -28$.

3. HD: $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $m = 1$, $n = 0$; $T = \frac{7}{2} = 3,5$.

4. HD: $\frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0,89$.

5. HD: $a = -1$, $b = -1$, $c = 11$; $S = 123$.

6. HD: $b = 2$, $c = 8$, $n = -2$; $T = 36$.

7. HD: $a = 2$, $c = -19$, $m = 1$, $n = 7$; $A = -45$.

8. HD: $y = \frac{x^2 - 5x - 2}{2x + 2}$; $A = 2$, $B = -2$; $P = 8102$.

9. HD: $y = \frac{-2x^2 + 9x - 2}{4x - 2}$; $b = 9$, $c = -2$, $n = -2$; $T = 87$.

10. HD: $y = \frac{-x^2 + 12x - 24}{2x - 4}$; $a = -1$, $b = 12$, $c = -24$; $S = -13$.

BÀI 4. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ MỘT SỐ HÀM SỐ CƠ BẢN (tiếp theo)

6. Phép biến đổi đồ thị

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

1.C	2.A	3.B	4.A	5.A	6.D	7.C	8.A	9.C	10.B
11.D	12.A	13.B	14.D	15.A	16.B	17.A	18.B	19.B	20.D
21.D	22.C	23.A	24.B	25.B	26.D	27.C	28.C	29.C	30.A

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a) S	a) Đ	a) S	a) Đ	a) Đ	a) Đ	a) Đ	a) S	a) Đ	a) Đ
b) S	b) S	b) Đ	b) S	b) S	b) S	b) S	b) Đ	b) Đ	b) Đ
c) Đ	c) S	c) Đ	c) S	c) Đ	c) S	c) S	c) S	c) S	c) Đ
d) Đ	d) S	d) Đ	d) Đ	d) S	d) S	d) Đ	d) Đ	d) Đ	d) S

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
8	9	20	12	6	20	-15	5,5	1,62	8

1. HD: $a = -2, b = 2; S = 8$.

2. HD: $m \neq 0, m \neq 1, m > -\frac{1}{24}$; Có 9 giá trị nguyên.

3. HD: $a = 4, b = 5; T = 20$.

5. HD: $-\frac{3}{2} < m \neq -1$; Có 6 giá trị nguyên.

6. HD: $a = -4, b = -2$.

8. HD: $\frac{11}{2} = 5,5$.

9. HD: $m = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,62$.

10. HD: $m \in \{5; 6; 7; \dots; 12\}$; Có 8 giá trị nguyên.