CHƯƠNG IV

SỐ PHỨC

I LÝ THUYẾT.

1. ĐỊNH NGHĨA

- Một số phức là một biểu thức dạng $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$ và $i^2=-1$.
- i được gọi là đơn vị ảo, a được gọi là phần thực và b được gọi là phần ảo của số phức $z=a+bi$.
  Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.
  $\mathbb{C}=\left\{a+bi\,/\,a,b\in\mathbb{R};i^2=-1\right\}$.
- Chú ý: - Khi phần ảo $b=0\Leftrightarrow z=a$ là số thực.
  - Khi phần thực $a=0\Leftrightarrow z=bi\Leftrightarrow z$ là số thuần ảo.
  - Số $0=0+0i$ vừa là số thực, vừa là số ảo.
- Hai số phức bằng nhau: $a+bi=c+di\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\b=d\end{cases}$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.
- Hai số phức $z_1=a+bi;\ z_2=-a-bi$ được gọi là hai số phức đối nhau.

2. SỐ PHỨC LIÊN HỢP

Số phức liên hợp của $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$ là $a-bi$ và được kí hiệu bởi $\overline{z}$.
Một số tính chất của số phức liên hợp:

a) $\overline{\overline{z}}=z$ b) $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$ c) $\overline{z-z'}=\overline{z}-\overline{z'}$

c) $\overline{z.z'}=\overline{z}.\overline{z'}$ d) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

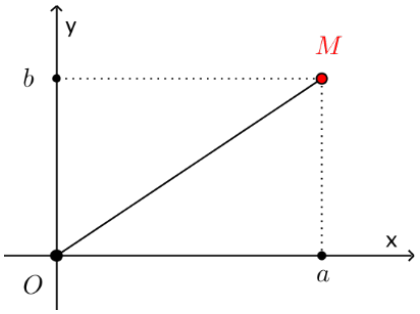
z là số thực $\Leftrightarrow z=\overline{z}$; z là số thuần ảo $\Leftrightarrow z=-\overline{z}$

3. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC

Trong mặt phẳng phức Oxy (Ox là trục thực, Oy là trục ảo), số phức $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$ được biểu diễn bằng điểm $M\left(a;b\right)$.

4. MODULE CỦA SỐ PHỨC

- Môđun của số phức $z = a + bi \ \left(a,b \in \mathbb{R}\right)$ là $\bar{z} = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Như vậy, môđun của số phức z là $\bar{z}$ chính là khoảng cách từ điểm M biểu diễn số phức $z = a + bi \ \left(a,b \in \mathbb{R}\right)$đến gốc tọa độ O của mặt phẳng phức là: $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$.
- Một số tính chất của môđun:
  - $\left|z\right| \geq 0; \left|z\right| = 0 \Leftrightarrow z = 0;$
  - $\left|z^2\right| = \left|z\right|^2, \ \left|-z\right| = \left|z\right|, \ \left|\bar{z}\right| = \left|z\right|$
  - $\left|z_1 + z_2\right| \leq \left|z_1\right| + \left|z_2\right|$
  - $\left|\left|z\right| - \left|z'\right|\right| \leq \left|z - z'\right| \leq \left|z\right| + \left|z'\right|$
  - $\left|z_1.z_2\right| = \left|z_1\right|.\left|z_2\right|$
  - $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|}$



5. CÁC PHÉP TOÁN VỚI SỐ PHỨC: CỘNG – TRỪ – NHÂN – CHIA SỐ PHỨC

Cho hai số phức $z = a + bi$; $z' = a' + b'i$ với $a,b,a',b' \in \mathbb{R}$ và số $k \in \mathbb{R}$.

- Tổng hai số phức: $z + z' = a + a' + (b + b')i$.
- Hiệu hai số phức: $z + z' = a - a' + (b - b')i$.
- Số đối của số phức $z = a + bi$ là $-z = -a - bi$.
- Nếu $\vec{u}, \vec{u'}$ theo thứ tự biểu diễn các số phức z, z' thì
  $\vec{u} + \vec{u'}$ biểu diễn số phức $z + z'$.
  $\vec{u} - \vec{u'}$ biểu diễn số phức $z - z'$.
- Nhân hai số phức:
  $z.z' = \left(a + bi\right)\left(a' + b'i\right) = \left(a.a' - b.b'\right) + \left(a.b' + a'.b\right)i$.
- Số phức nghịch đảo: $z^{-1} = \frac{1}{\left|z\right|^2}\bar{z}$.
- Chia hai số phức:

  Nếu $z \neq 0$ thì $\frac{z'}{z} = \frac{z'.\bar{z}}{\left|z\right|^2}$, nghĩa là nếu muốn chia số phức z' cho số phức $z \neq 0$ thì ta nhân cả tử và mẫu của thương $\frac{z'}{z}$ cho $\bar{z}$.

❖ ***Chú ý:***

$$i^{4k} = 1; \ i^{4k+1} = i; \ i^{4k+2} = -1; \ i^{4k+3} = -i \ \ (\mathrm{k} \in \mathbb{Z}).$$

6. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC

Cho số phức w. Mỗi số phức z thỏa mãn $z^2 = w$ được gọi là một căn thức bậc 2 của w.
Mỗi số phức $w \neq 0$ 0 có hai căn bậc hai là hai số phức đối nhau $(z \text{ và } -z)$.

- Trường hợp w là số thực ($w = a \in \mathbb{R}$)

  + Khi $a > 0$ thì w có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$.

  + Khi $a < 0$ nên $a = (-a)i^2$, do đó w có hai căn bậc hai là $\sqrt{-a}.i$ và $-\sqrt{-a}.i$.

  Ví dụ: Hai căn bậc 2 của -1 là i và $-i$.

  Hai căn bậc 2 của $-a^2$ $(a \neq 0)$ là ai, $-ai$.

- Trường hợp $w = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R}; b \neq 0)$.

  Cách 1:

  Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là căn bậc 2 của w khi và chỉ khi $z^2 = w$, tức là:

$$(x + yi)^2 = a + bi$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \rightarrow x = ...; y = ...$$

  Mỗi cặp số thực $(x; y)$ nghiệm đúng hệ phương trình đó cho ra một căn bậc hai $z = x + yi$ của số phức $w = a + bi$.

  Cách 2:

  Có thể biến đổi w thành bình phương của một tổng, nghĩa là $w = z^2$. Từ đó kết luận căn bậc hai của w là z và -z.

7. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRÊN TẬP SỐ PHỨC

Cho phương trình bậc 2: $Az^2 + Bz + C = 0$ (1) trong đó A, B, C là những số phức $A \neq 0$.

Xét biệt thức $\boxed{\Delta = B^2 - 4AC}$

- Nếu $\Delta \neq 0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt:

$$\boxed{z_1 = \frac{-B + \sigma}{2A}; \qquad z_2 = \frac{-B - \sigma}{2A}}$$

Trong đó σ là một căn bậc 2 của Δ.

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép: $\boxed{z_1 = z_2 = \frac{-B}{2A}}$

CHÚ Ý:

- Mọi phương trình bậc n: $A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + ... + A_{n-1} z + A_n = 0$ luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).
- Hệ thức Vi-ét đối với phương trình bậc 2 số phức hệ số thực:

  Cho phương trình bậc 2 : $Az^2 + Bz + C = 0$ $(A, B, C \in \mathbb{R}; A \neq 0)$ có 2 nghiệm phân biệt (thực hoặc phức). Ta có: $\begin{cases} S = z_1 + z_2 = \dfrac{-B}{A} \\ P = z_1 z_2 = \dfrac{C}{A} \end{cases}$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TỔNG QUÁT

- Bước 1: Gọi số phức z cần tìm là $z=a+bi\ \left(a,b\in\mathbb{R}\right)$.
- Bước 2: Biến đổi theo điều kiện cho trước của đề bài (thường liên quan đến môđun, biểu thức có chứa $z,\bar{z},\left|z\right|,...$) để đưa về phương trình hoặc hệ phương trình 2 ẩn theo a và b nhờ tính chất 2 số phức bằng nhau (phần thực bằng nhau và phần ảo bằng nhau), rồi từ đó suy ra a và b và suy ra được số phức z cần tìm.

Câu 1. Tìm phần thực, phần ảo, số phức liên hợp và tính môđun của số phức z:

$a)\ \ z=\left(2+4i\right)+2i\left(1-3i\right).$ $b)\ z=\left(2-4i\right)\left(5+2i\right)+\dfrac{4-5i}{2+i}.$

Câu 2. Cho số phức $z=3+2i$. Tìm môđun số phức $w=zi+\bar{z}\left(1+2i\right)$.

Câu 3. Tìm phần thực, phần ảo của số phức sau: $1+\left(1+i\right)+\left(1+i\right)^2+\left(1+i\right)^3+...+\left(1+i\right)^{20}$

Câu 4. Tính $S=1009+i+2i^2+3i^3+...+2017i^{2017}$.

Câu 5. Cho số phức $z=-\dfrac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$. Tính $w=\left(1+z\right)\left(1+z^2\right)\left(1+z^3\right)...\left(1+z^{2017}\right)$.

Câu 6. Tìm số z sao cho: $z+(2+i)\bar{z}=3+5i$.

Câu 7. Tìm số phức z khi nó thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau: $\left|z-(2+i)\right|=\sqrt{10}$ và $z.\bar{z}=25$.

Câu 8. Cho z và $\bar{z}$ là số phức liên hợp của z. Biết $\dfrac{z}{\left(\bar{z}\right)^2}\in\mathbb{R}$ và $\left|z-\bar{z}\right|=2\sqrt{3}$ .Tìm $\left|z\right|$

Câu 9. Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện: $\left|z+1-2i\right|=\left|\bar{z}+3+4i\right|$ và $\dfrac{z-2i}{z+i}$ là một số thuần ảo.

Câu 10. Cho số phức z có môđun bằng 2018 và w là số phức thỏa mãn biểu thức $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{w}=\dfrac{1}{z+w}$.

Môđun của số phức w bằng?

Câu 11. Cho số phức z,w khác 0 sao cho $\left|z-w\right|=2\left|z\right|=\left|w\right|$. Phần thực của số phức $u=\dfrac{z}{w}$ là ?

Câu 12. Tính môđun của số phức z biết $z\neq\left|z\right|$ và $\dfrac{1}{\left|z\right|-z}$ có phần thực bằng 4.

SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO 570 VN-PLUS ĐỂ GIẢI VỀ SỐ PHỨC

Để thực hiện các phép toán trên tập số phức, ta chuyển qua chế độ CMPLX bằng cách bấm w2.

- Bấm đơn vị ảo i bằng cách bấm phím b.
- Tính môđun của số phức bấm qc.
- Để bấm số phức liên hợp của z bấm q22để hiện Conjg (liên hợp).

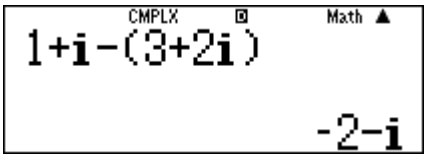
1. PHÉP CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA

Câu 1. Tính $z = 1 + i - (3 + 2i)$.

Hướng dẫn:

Ta lần lượt bấm các phím như sau: 1+bp(3+2b)

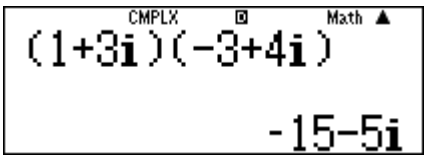
Và ta được kết quả là:



Câu 2. Tính $z = (1 + 3i)(-3 + 4i)$.

Hướng dẫn:

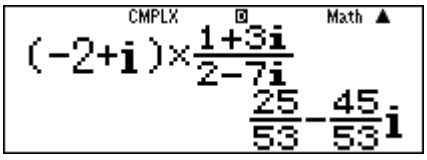
Ta lần lượt bấm các phím tương tự như trên và ta thu được kết quả như sau:



Câu 3. Tính $z = (-2 + \mathrm{i})\dfrac{1 + 3i}{2 - 7i}$

Hướng dẫn:

Ta lần lượt nhập biểu thức $z = (-2 + \mathrm{i})\dfrac{1 + 3i}{2 - 7i}$ vào máy ta thu được kết quả:



Câu 4. Cho số phức $z = a + bi$. Số phức z^2 có phần ảo là :

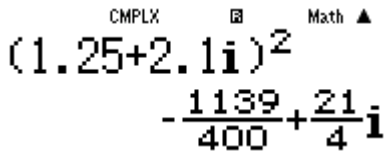
A. a^2b^2 **B.** $2a^2b^2$ **C.** $2ab$ **D.** ab

Hướng dẫn:

- Vì đề bài cho ở dạng tổng quát nên ta tiến hành "cá biệt hóa" bài toán bằng cách chọn giá trị cho a, b (lưu ý nên chọn các giá trị lẻ để tránh xảy ra trường hợp đặc biệt).

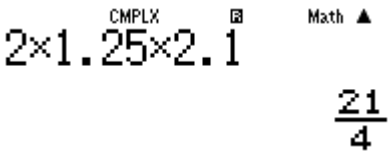
  Chọn $a = 1.25$ và $b = 2.1$ ta có $z = 1.25 + 2.1i$
- Sử dụng máy tính Casio tính z^2

1 . 2 5 + 2 . 1 b) d =



Vậy phần ảo là $\dfrac{21}{4}$

- Xem đáp số nào có giá trị là $\frac{21}{4}$ thì đáp án đó chính xác. Ta có :



Vậy $2ab = \frac{21}{4} \Rightarrow$ Đáp án **C** là chính xác.

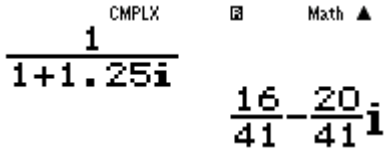
Câu 5. Cho số phức $z = a + bi$. Số phức z^{-1} có phần thực là :

A. $a + b$ **B.** $\frac{a}{a^2 + b^2}$ **C.** $\frac{-b}{a^2 + b^2}$ **D.** $a - b$

Hướng dẫn:

- Vì đề bài mang tính chất tổng quát nên ta phải cá biệt hóa, ta chọn $a = 1; b = 1.25$.
- Với $z^{-1} = \frac{1}{z}$ Sử dụng máy tính Casio

a 1 R 1 + 1 . 2 5 b =



Ta thấy phần thực số phức z^{-1} là : $\frac{16}{41}$ đây là 1 giá trị dương. Vì ta chọn $b > a > 0$ nên ta thấy ngay đáp số **C** và **D** sai.

Thử đáp số **A** có $a + b = 1 + 1.25 = \frac{9}{4} \neq \frac{16}{41}$ vậy đáp số A cũng sai $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**

Câu 6. Cho số phức $z = \left(1+i\right)^2 + \left(1+i\right)^3 + ... + \left(1+i\right)^{22}$. Phần thực của số phức z là :

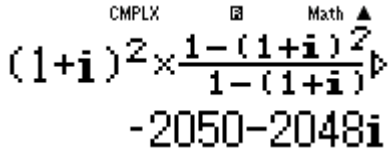
A. -2^{11} **B.** $-2^{11} + 2$ **C.** $-2^{11} - 2$ **D.** 2^{11}

Hướng dẫn:

Dãy số trên là một cấp số nhân với $U_1 = \left(1+i\right)^2$, số số hạng là 21 và công bội là $1 + i$. Thu gọn z ta được : $z = U_1 . \frac{1 - q^n}{1 - q} = \left(1+i\right)^2 . \frac{1 - \left(1+i\right)^{21}}{1 - \left(1+i\right)}$

- Sử dụng máy tính Casio tính z

(1+b)dOa1p(1+b)^21R1p(1+b)=



Vậy $z = -2050 - 2048i$

$\Rightarrow$ Phần ảo số phức z là $-2050 = -2^{11} - 2 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

2. TÍNH MÔĐUN

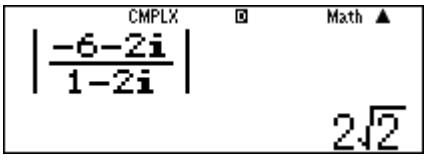
Câu 1. Tìm môđun của số phức $(1 - 2i)\bar{z} + 2i = -6$.

Hướng dẫn:

$(1-2i)\bar{z}+2i=-6 \Rightarrow |z|=|\bar{z}|=\left|\frac{-6-2i}{1-2i}\right|$ .Nên ta thực hiện bấm như sau:

qcap6p2bR1p2b=

Ta thu được kết quả:

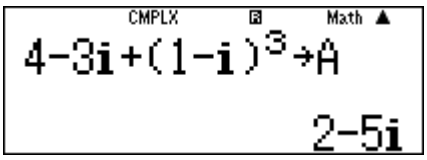


Câu 2. Tìm số phức $\omega=2.\overline{z_1}.z_2$. Biết $z_1=4-3i+(1-i)^3$, $z_2=\frac{2+4i-2(1-i)^3}{1+i}$.

Hướng dẫn:

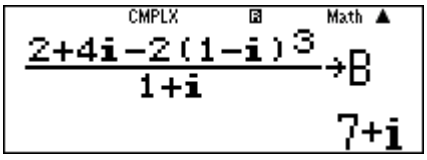
- Tính $z_1=4-3i+(1-i)^3$ và lưu vào biến A:

4p3b+(1pb)^3qJz



- Tính $z_2=\frac{2+4i-2(1-i)^3}{1+i}$ và lưu vào biến B

a2+4bp2(1pb)^3R1+bqJx



- Tính $\omega=2.\overline{z_1}.z_2$:

2q22q22Qz)OQx)=



3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

Câu 1. Tìm môđun của số phức z thỏa mãn: $\left(1-3i\right)z+3i=7i-2$.

$A.\left|z\right|=1$ $B.\left|z\right|=4$ $C.\left|z\right|=\sqrt{2}$ $D.\left|z\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

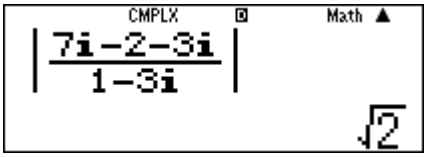
Hướng dẫn:

Ta chuyển z về dạng: $z=\dfrac{7i-2-3i}{1-3i}$ và tìm môđun.

Quy trình bấm máy:

Qca7bp2p3bR1p3b=

Màn hình hiển thị:



>>> **Chọn C**.

Câu 2. Cho số phức z thỏa mãn $(3-i)(z+1)+(2-i)(\bar{z}+3i)=1-i.$ Tìm môđun của số phức $w=\dfrac{i-z}{1+z}$.

$A.\dfrac{\sqrt{82}}{4}$ $B.\dfrac{\sqrt{82}}{8}$ $C.\dfrac{2\sqrt{82}}{9}$ $D.\dfrac{3\sqrt{82}}{5}$

Hướng dẫn:

Ở đây là sẽ cho phím X sẽ là đại diện cho số phức z.

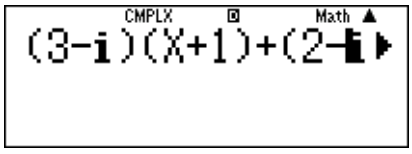
Đây là phương trình bậc nhất của số phức.

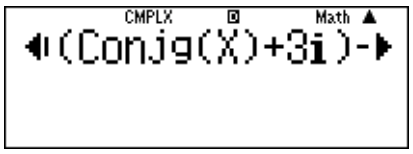
Bước 1: Các em nhập lại phương trình này với máy tính lần lượt như sau:

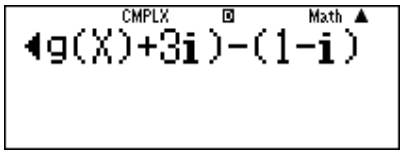
$(3-i)(\mathrm{X}+1)+(2-i)(\mathrm{Conj}g(X)+3i)-(1-i)$

(3pb)(Q)+1)+(2pb)(q22Q))+3b)p(1pb)

Màn hình hiển thị:







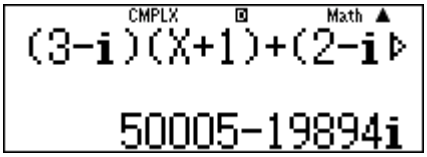
Bước 2:

Tìm số phức $z=a+bi$ nghĩa là đi tìm a và b.

Ta sẽ cho trước a=10000 và b=100 rồi từ đó suy ngược lại mối quan hệ của a và b bằng 1 hệ phương trình 2 ẩn theo a và b, lúc đó tìm được a và b.

Cho $z=10000+100i$ bằng cách nhập r10000+100b=

Màn hình sẽ cho kết quả:



Nghĩa là:

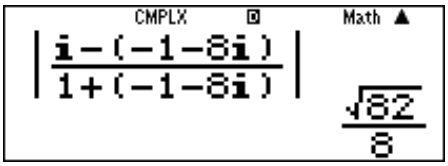
$(3-i)(z+1)+(2-i)(\bar{z}+3i)-(1-i)=50005+19894i=5a+5+(2a-b+6)i$.

Cho nên:

$$(3-i)(z+1)+(2-i)(\bar{z}+3i)-(1-i)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5a+5=0\\2a-b-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5a+5=0\\2a-b=6\end{cases}\Rightarrow a=-1,b=8\rightarrow z=-1-8i$$

Từ đó tính môđun của ω:



>>> **Chọn B.**

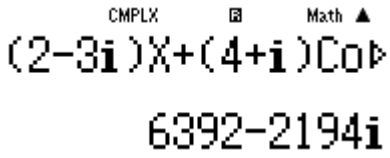
Câu 3. Cho số phức $z = a + bi$ thỏa mãn điều kiện $(2-3i)z+(4+i)\bar{z}=-(1+3i)^2$ .Tìm $P = 2a + b$

A.3 **B**.-1 **C**.1 **D**. Đáp án khác

Giải:

- Phương trình $\Leftrightarrow (2-3i)z+(4+i)\bar{z}+(1+3i)^2=0$
- Nhập vế trái vào máy tính Casio và CALC với $X = 1000 + 100i$

(2 p 3 b) Q) + (4 + b) q 2 2 Q))
+ (1 + 3 b) d r 1 0 0 0 + 1 0 0 b =



Vậy vế trái $= 6392 - 2194i$ với

$$\begin{cases}6392 = 6.1000 + 4.100 - 8 = 6a + 4b - 8\\2194 = 2.1000 + 2.100 - 6 = 2a + 2b - 6\end{cases}$$

- Để vế trái $= 0$ thì $\begin{cases}6a + 4b - 8 = 0\\2a + 2b - 6 = 0\end{cases} \Leftrightarrow a = -2; b = 5$

Vậy $z = -2 + 5i \Rightarrow P = 2a + b = 1 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C.**

4. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC

Câu 1. Các điểm M,N,P lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $z_1=\dfrac{4i}{i-1}$; $z_2=\left(1-i\right)\left(1+2i\right)$; $z_3=-1+2i$

A. Tam giác vuông **B**.Tam giác cân **C**.Tam giác vuông cân **D**.Tam giác

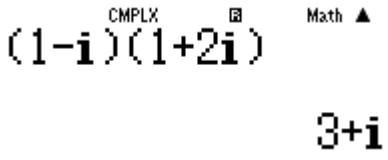
Hướng dẫn:

- Rút gọn z_1 bằng Casio a 4 b R b p 1 =



Ta được $z_1=2-2i$ vậy điểm $M\left(2;-2\right)$

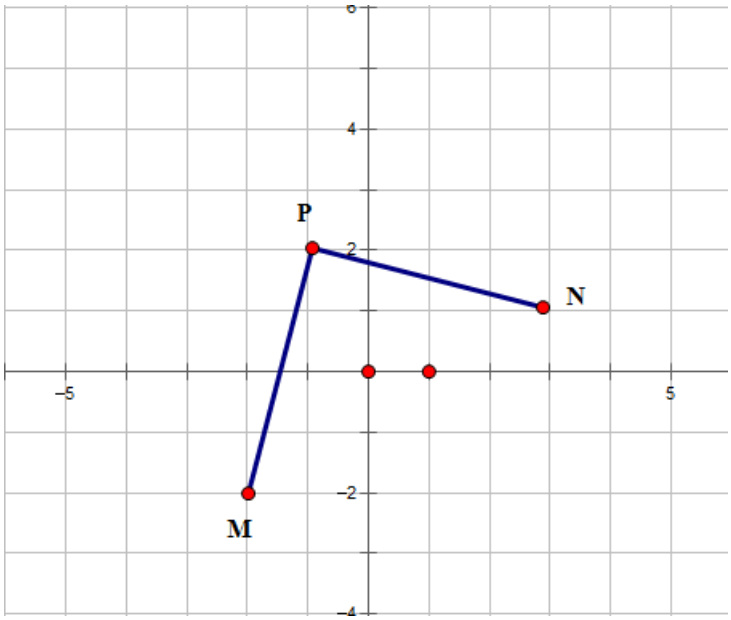
- Rút gọn z_2 bằng Casio (1 p b) (1 + 2 b) =



Ta được $z_2=3+i$ vậy điểm $N\left(3;1\right)$

Tương tự $z_2=-1+2i$ và điểm $P\left(-1;2\right)$

- Để phát hiện tính chất của tam giác MNP ta nên biểu diễn 3 điểm M,N,P trên hệ trục tọa độ



Dễ thấy tam giác MNP vuông cân tại P $\Rightarrow$ đáp án **C** chính xác

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi M là điểm biểu diễn số phức $z=3-4i$, điểm M' là điểm biểu diễn số phức $z'=\dfrac{1+i}{2}z$. Tính diện tích $\Delta OMM'$

A. $S_{\Delta OMM'}=\dfrac{25}{4}$ **B.** $S_{\Delta OMM'}=\dfrac{25}{2}$ **C.** $S_{\Delta OMM'}=\dfrac{15}{4}$ **D.** $S_{\Delta OMM'}=\dfrac{15}{2}$

Hướng dẫn:

- Điểm M biểu diễn số phức $z_1=3-4i\Rightarrow$ tọa độ $M\left(3;-4\right)$

  Điểm M' biểu diễn số phức $z'=\dfrac{1+i}{2}z\Rightarrow$ tọa độ $N\left(\dfrac{7}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$

  a 1 + b R 2 $ O (3 p 4 b) =

  CMPLX Math

  $\frac{1+i}{2}\times(3-4i)$

  $\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i$

  Gốc tọa độ $O\left(0;0\right)$

- Để tính diện tích tam giác OMM' ta ứng dụng tích có hướng của 2 vecto trong không gian. Ta thêm cao độ 0 cho tọa độ mỗi điểm O,M,M' là xong

  $\overrightarrow{OM}\left(3;-4;0\right)$, $\overrightarrow{OM'}\left(\dfrac{7}{2};-\dfrac{1}{2};0\right)\Rightarrow S=\dfrac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right]\right\|$

  Tính $\left\|\left[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right]\right\|$

  w 8 1 1 3 = p 4 = 0 = q 5 1 2 1 7 P 2 =
  p 1 P 2 = 0 = C q 5 3 q 5 7 q 5 4 =

  VCT

  VctA·VctB

  12.5

  Vậy $\left\|\left[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right]\right\|=12.5=\dfrac{25}{2}\Rightarrow S_{OMM'}=\dfrac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right]\right\|=\dfrac{25}{4}$

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRÊN TẬP SỐ PHỨC

Câu 1. Giải phương trình bậc hai sau: $z^2+2z+3=0$.

Câu 2. Giải phương trình bậc hai sau: $z^2+2z+4i-2=0$.

ĐƯA PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO VỀ NHỮNG PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI.

- **Bước 1:**
  Để đưa phương trình thành nhân tử thì ta phải nhẩm nghiệm của phương trình. Có các cách nhẩm nghiệm như sau:
  - Tổng các hệ số của phương trình bằng 0 thì nghiệm của phương trình là $x=1$.
  - Tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng hệ số bậc lẻ thì nghiệm của phương trình $x=-1$.
  - Định lý Bézout:
    Phần dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho $x-a$ bằng giá trị của đa thức $f(x)$ tại $x-a$. Tức là $f(x)=(x-a)g(x)-f(a)$
    Hệ quả: Nếu $f(a)=0$ thì $f(x)\vdots(x-a)$.
    Nếu $f(x)\vdots(x-a)$ thì $f(a)=0$.
  - Sử dụng máy tính Casio để nhẩm nghiệm:
    - Nhập phương trình vào máy tính.
    - Bấm phím r rồi nhập 1 giá trị X bất kỳ, máy tính sẽ cho ra nghiệm của phương trình. Sau đó dùng sơ đồ hoocne để phân tích thành nhân tử.
  - Sơ đồ Hoocne:

  Với đa thức f(x) = $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_1x+a_0$ chia cho x - a thương là g(x) = $b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+b_{n-3}x^{n-3}+...+b_1x+b_0$ dư r.

  Nếu $r=0$ thì $f(x)\vdots g(x)$, nghĩa là: $f(x)=(x-a)g(x)$.

  Ta đi tìm các hệ số $b_{n-1},b_{n-2},b_{n-3}...b_1,b_0$ bằng bảng sau đây.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_1	a_0
a	$b_{n-1}=a_n$	$b_{n-2}=ab_{n-1}+a_{n-1}$	$b_{n-3}=ab_{n-2}+a_{n-2}$		$b_1=ab_2+a_2$	$b_0=ab_1+a_1$	$r=ab_0+a_0$ ..

- **Bước 2:** Giải phương trình bậc nhất hoặc phương trình hai số phức, kết luận nghiệm.

Câu 1. Giải các phương trình: $z^3-27=0$.

Câu 2. Giải phương trình sau: $z^3-3(1+2i)z^2+(-3+8i)z+5-2i=0.$

Câu 3. Cho phương trình sau: $z^3+(2-2i)z^2+(5-4i)z-10i=0(1)$ biết rằng phương trình có nghiệm thuần ảo.

Câu 4. Giải $z^3-(3-i)z^2-(2-i)z+16-2i=0$ biết rằng phương trình có 1 nghiệm thực.

Câu 5. Giải phương trình $z^3-(2-3i)z^2+3(1-2i)z+9i=0$ biết rằng phương trình có một nghiệm thuần ảo.

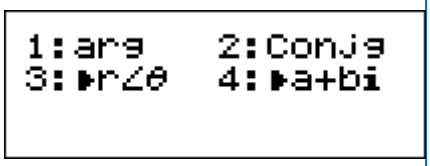
Câu 6. Gọi $z_1;z_2;z_3;z_4$ là 4 nghiệm phức của phương trình $z^4+(4+m)z^2+4m=0\ \ (1)$. Tìm tất cả các giá trị m để $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=6$.

Câu 7. Cho phương trình $4z^4+mz^2+4=0$ trong tập số phức và m là tham số thực. Gọi z_1,z_2,z_3,z_4 lần lượt là 4 nghiệm của phương trình đã cho. Tìm tất cả các giá trị của m để $(z_1^{\,2}+4)(z_2^{\,2}+4)(z_3^{\,2}+4)(z_4^{\,2}+4)=324$.

SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO 570VN-PLUS ĐỂ GIẢI

Để thực hiện các phép toán trên tập số phức, ta chuyển qua chế độ CMPLX bằng cách bấm w2.

- Bấm đơn vị ảo i bằng cách bấm phím b
- Bấm 2 và lựa chọn các chức năng:



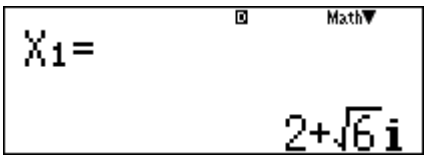
- Chọn 1 để bấm acgumen của z $(\arg(z))$.
- Chọn 2 để bấm số phức liên hợp của z $(Conjg(z))$.
- Chọn 3 để chuyển từ dạng đại số sang dạng lượng giác.
- Chọn 4 để chuyển từ dạng lượng giác sang dạng đại số.
- Bấm dấu $\angle$ bằng cách bấm: qz

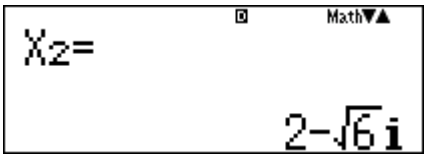
Câu 1. Giải phương trình bậc hai sau: $z^2-4z+10=0$.

Hướng dẫn:

Quy trình bấm: w531=p4=10==

Thu được kết quả:





Câu 2. Gọi z_1,z_2 là 2 nghiệm của phương trình : $z^2+z+1=0$. Tính $P=z_1^{\,2018}+z_2^{\,2018}$.

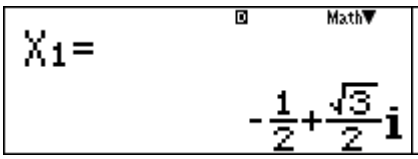
Hướng dẫn :

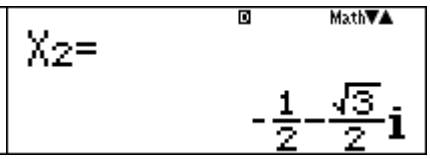
Quy trình bấm như sau:

- Tìm nghiệm z_1,z_2

w531=1=1==

Thu được kết quả:





- Lưu 2 nghiệm vào X và Y:

- Màn hình hiển thị là đã lưu biến X thành công, tương tự biến Y.



- Tính P .
- Sau đó vào w2 và nhập P và thu được kết quả:

Sau đây là <u>Bài toán 3</u> tương tự <u>Bài toán 2</u> nhưng giải theo dạng lượng giác của số phức. Cách này luôn giải được với số mũ lớn bất kỳ, cách giải theo <u>Bài toán 2</u> có thể không giải được với số mũ lớn nào đó.

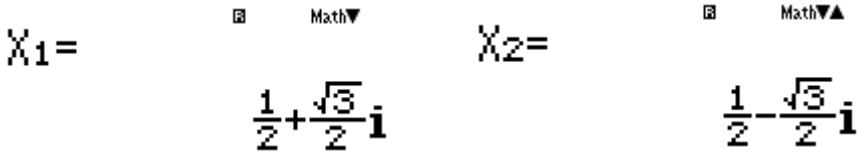
Câu 3. Biết z là nghiệm của phương trình $z+\frac{1}{z}=1$. Tính giá trị biểu thức $P=z^{2009}+\frac{1}{z^{2009}}$

A. $P=1$ **B.** $P=0$ **C.** $P=-\frac{5}{2}$ **D.** $P=\frac{7}{4}$

<u>Hướng dẫn:</u>

- Quy đồng phương trình $z+\frac{1}{z}=0$ ta được phương trình bậc hai $z^2-z+1=0$. Tính nghiệm phương trình này với chức năng MODE 5 3

  w 5 3 1 = p 1 = 1 = =



- Ta thu được hai nghiệm z nhưng hai nghiệm này có vai trò như nhau nên chỉ cần lấy một nghiệm z đại diện là được

  Với $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ta chuyển về dạng lượng giác $\Rightarrow z=1\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

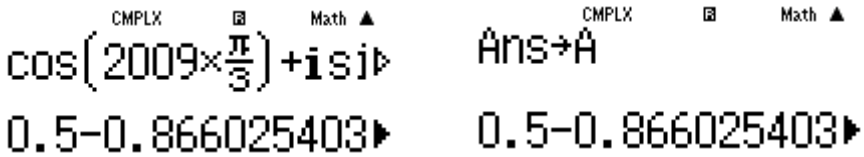
  a 1 R 2 $ + a s 3 R 2 $ b q 2 3 =



  Vậy $\Rightarrow z^{2009}=1^{2009}\left(\cos 2009.\frac{\pi}{3}+i\sin 2009.\frac{\pi}{3}\right)=\left(\cos 2009.\frac{\pi}{3}+i\sin 2009.\frac{\pi}{3}\right)$

  Tính z^{2009} và lưu và biến A

  W k 2 0 0 9 O a q K R 3 $) + b j 2 0 0 9 O a q K R 3 $) = q J z



Tổng kết $P = A + \frac{1}{A} = 1$

Q z + a 1 R Q z =



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

TẬP HỢP ĐIỂM CỦA SỐ PHỨC

Trong dạng này, ta gặp các bài toán biểu diễn hình học của số phức hay còn gọi là tìm tập hợp điểm biểu diễn một số phức z trong đó số phức z thỏa mãn một hệ thức nào đó. Khi đó ta giải bài toán này như sau:

1. Phương pháp tổng quát:

Đặt $z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó số phức z biểu diễn trên mặt phẳng phức bởi điểm $M(x;y)$. Biến đổi điều kiện của bài toán thành để tìm mối liên hệ giữa x và y từ đó suy ra tập hợp điểm M.

2. Giả sử các điểm M, A, B lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z, a, b

- $|z-a| = |z-b| \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow$ M thuộc đường trung trực của đoạn AB
- $|z-a| = |z-b| = k(k \in \mathbb{R}, k > 0, k > |a-b|) \Leftrightarrow MA + MB = k \Leftrightarrow M \in (E)$ nhận A, B là hai tiêu điểm và có độ dài trục lớn bằng *k*.

3. Giả sử M và M' lần lượt là điểm biểu diễn của số phức *z* và *w = f(z)*

Đặt $z = x + yi$ và $w = u + vi \ (x, y, u, v \in \mathbb{R})$.

Hệ thức $w = f(z)$ tương đương với hai hệ thức liên hệ giữa *x, y, u, v*

- Nếu biết một hệ thức giữa *x, y* ta tìm được một hệ thức giữa *u, v* và suy ra được tập hợp các điểm M'
- Nếu biết một hệ thức giữa *u, v* ta tìm được một hệ thức giữa *x, y* và suy ra được tập hợp điểm M'.

1. Các dạng phương trình đường thẳng

- Dạng tổng quát: $ax + by + c = 0$.
- Dạng đại số: $y = ax + b$.
- Dạng tham số: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$
- Dạng chính tắc: $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$.
- Phương trình đoạn chắn $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.
- Phương trình đường thẳng đi qua 1 điểm $M_0(x_0; y_0)$ biết hệ số góc *k*: $y = k(x - x_0) + y_0$

2. Phương trình đường tròn tâm I(a;b) bán kính R:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $c = a^2 + b^2 - R^2$

Lưu ý điều kiện để phương trình: $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ là phương trình đường tròn:

$a^2 + b^2 - c > 0$ có tâm $I(-a, -b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

3. Phương trình (Elip): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Với hai tiêu cự $F_1(-c;0), F_2(c;0), F_1F_2 = 2c$. Trục lớn *2a*, trục bé *2b* và $a^2 = b^2 + c^2$.

Câu 1. Giả sử M là điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn số phức z. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn một trong các điều kiện sau đây:

a) $|z - 1 + i| = 2$ b) $|z + 1 - 3i| \le 4$ c) $|2 + z| = |1 - i|$

Câu 2. Trong mặt phẳng Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z - i| = |(1+i)z|$.

Câu 3. Cho các số phức $z_1,\ z_2,\ z_3$ có biểu diễn trên mặt phẳng phức là ba đỉnh của tam giác đều có phương trình đường tròn ngoại tiếp là $\left(x+2017\right)^2+\left(y-2018\right)^2=1$. Tổng phần thực và phần ảo của số phức $w=z_1+z_2+z_3$ bằng?

Câu 4. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z sao cho $u=\dfrac{z+2+3i}{z-i}$ là một số thuần ảo.

Câu 5. Trên mặt phẳng toạ độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thoả mãn điều kiện sau:

a) $2\left|z-i\right|=\left|z-\overline{z}+2i\right|$ b) $\left|z-1\right|+\left|z+1\right|=4$

Câu 6. Trong tập số phức $\mathbb{C}$, gọi z_1 và z_2 các nghiệm của phương trình $z^2-2z+10=0$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 và số phức $k=x+iy$ trên mặt phẳng phức. Để tam giác MNP đều thì số phức k là?

Câu 7. Trong mặt phẳng phức, cho m và M theo thứ tự là điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi$ và $Z=\dfrac{z-1}{z+2i}$. Tìm tập hợp các điểm m sao cho: Z là một số thực.

Câu 8. Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|z-i\right|+\left|z+i\right|=4$ là?

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-1\right|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+2$ là một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

Câu 10. Cho các số phức z thỏa mãn $\left|z-1\right|=3$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức w với $\left(3-2i\right)w=iz+2$ là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm I và bán kính r của đường tròn đó

Câu 11. Cho hai số phức $z_1,\ z_2$ thỏa mãn $\left|z_1\right|=\sqrt{3}$, $\left|z_2\right|=2$ được biểu diễn trong mặt phẳng phức lần lượt là các điểm $M,\ N$. Biết góc tạo bởi giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON}$ bằng 30^0. Tính giá trị của biểu thức $A=\left|\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right|$.

SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO 570 VN- PLUS

Câu 1. Trên mặt phẳng Oxy tìm tập hợp biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|zi-\left(2+i\right)|=2$

A. $x+2y-1=0$ B. $\left(x+1\right)^2+\left(y-2\right)^2=9$

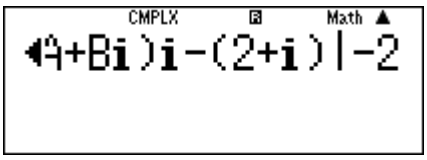
C. $\left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2=4$ D. $3x+4y-2=0$

Hướng dẫn:

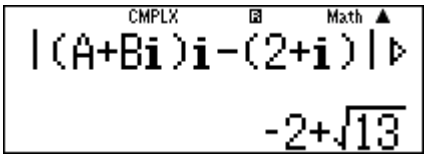
Ta giả sử: $z=A+Bi$.

Nên điều kiện của bài toán được viết lại là: $\left|\left(A+Bi\right)i-\left(2+i\right)\right|-2=0.$

- w2 và nhập điều kiện vào:



- Thử đáp án A. $x+2y-1=0x=1-2y$.
  Cho $y=1$ ta được $x=-1$.
  Nhập rp1=1=thu được kết quả khác 0.



>>> Loại đáp án A.

- Thử đáp án B. $\left(x+1\right)^2+\left(y-2\right)^2=9$.

  Cho $x=-1$ ta được $y=5$ hoặc $y=-1$.

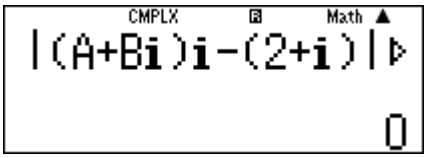
  rp1=5= ra kết quả khác 0.

  >>> Loại đáp án B

- Thử đáp án C. $\left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2=4$.

  Cho $x=1$ ta được $y=0$ và $y=-4$.

  r1=0= và r1=p4= đều được kết quả bằng 0.



Vậy đáp án đúng là **C.**

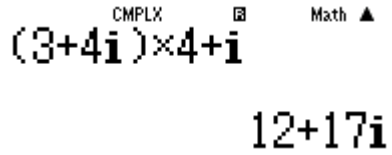
Câu 2. Cho các số phức z thỏa mãn $\left|z\right|=4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=\left(3+4i\right)z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=4$ **B.** $r=5$ **C.** $r=20$ **D.** $r=22$

Hướng dẫn:

- Để xây dựng 1 đường tròn ta cần 3 điểm biểu diễn của w , vì z sẽ sinh ra w nên đầu tiên ta sẽ chọn 3 giá trị đại diện của z thỏa mãn $\left|z\right|=4$
- Chọn $z=4+0i$ (thỏa mãn $\left|z\right|=4$). Tính $w_1=\left(3+4i\right)\left(4+0i\right)+i$

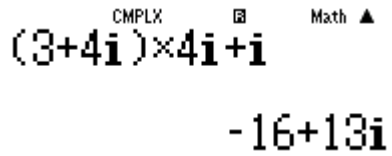
  (3 + 4 b) O 4 + b =



Ta có điểm biểu diễn của z_1 là $M\left(12;17\right)$

- Chọn $z=4i$ (thỏa mãn $\left|z\right|=4$). Tính $w_2=\left(3+4i\right)\left(4i\right)+i$

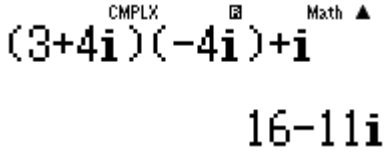
  (3 + 4 b) O 4 b + b =



Ta có điểm biểu diễn của z_2 là $N\left(-16;13\right)$

- Chọn $z=-4i$ (thỏa mãn $\left|z\right|=4$). Tính $w_3=\left(3+4i\right)\left(-4i\right)+i$

(3 + 4 b) (p 4 b) + b =



Ta có điểm biểu diễn của z_3 là $P(16;-11)$

Vậy ta có 3 điểm M,N,P thuộc đường tròn biểu diễn số phức w

- Đường tròn này sẽ có dạng tổng quát $x^2+y^2+ax+by+c=0$. Để tìm a,b,c ta sử dụng máy tính Casio với chức năng MODE 5 3

w 5 2 1 2 = 1 7 = 1 = p 1 2 d p 1 7 d = p 1 6 =
1 3 = 1 = p 1 6 d p 1 3 d = 1 6 = p 1 1 = 1 =
p 1 6 d p 1 1 d = =



Vậy phương trình đường tròn biểu diễn số phức w là:

$$x^2+y^2-2y-399=0 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=20^2.$$

Bán kính đường tròn tập hợp điểm biểu diễn số phức w là 20 $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C.**

Câu 3. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2|z-1|=|z-\bar{z}+2i|$ là một Parabol có dạng:

A. $y=3x^2-6x+2$ **B.** $y=\frac{x^2}{2}-x$ **C.** $y=\frac{x^2}{3}-4$ **D.** $y=x^2+2x+\frac{1}{3}$

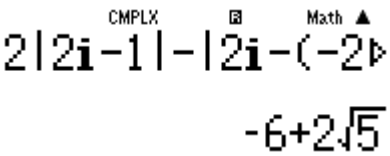
Hướng dẫn:

- Đặt số phức $z=x+yi$.
- Nếu đáp số A đúng thì đúng với mọi $z=x+yi$ thỏa mãn $y=3x^2-6x+2$.

  Chọn một cặp $(x;y)$ bất kì thỏa $y=3x^2-6x+2$ ví dụ $A(0;2)\Rightarrow z=2i$

  Xét hiệu $2|z-1|-|z-\bar{z}+2i|$

2 q c 2 b p 1 $ p q c 2 b p (p 2 b) + 2 b =

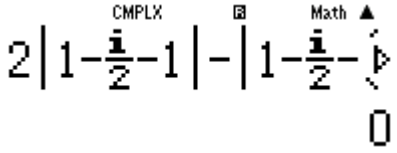


  Vậy $2|z-1|-|z-\bar{z}+2i|=-6+2\sqrt{5}\neq 0$

  $\Rightarrow 2|z-1|\neq|z-\bar{z}+2i|\Rightarrow$ Đáp số **A** sai

- Tương tự với đáp số B chọn $z=1-\frac{1}{2}i$. Xét hiệu $2|z-1|-|z-\bar{z}+2i|$

2 q c 1 p a b R 2 $ p 1 $ p q c 1 p a b R 2 $ p (1 + a b R 2 $) + 2 b =



Vậy $2\left|z-1\right|-\left|z-\bar{z}+2i\right|=0\Rightarrow 2\left|z-1\right|=\left|z-\bar{z}+2i\right|\Rightarrow$ Đáp số **B** chính xác.

D. BÀI TOÁN CỰC TRỊ CỦA SỐ PHỨC

I. PHƯƠNG PHÁP QUY VỀ TÌM MIN-MAX CỦA HÀM MỘT BIẾN KẾT HỢP SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA SỐ PHỨC.

Bài toán: Trong các số phức z thoả mãn điều kiện T. Tìm số phức z để biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất, lớn nhất.

Phương pháp tổng quát: Đặt $z=x+yi\ \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Từ điều kiện T, biến đổi để tìm cách rút ẩn rồi thế vào biểu thức P để được hàm một biến. Tìm giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) tuỳ theo yêu cầu bài toán của hàm số một biến vừa tìm được.

Sử dụngcác tính chất và các bất đẳng thức về môđun của số phức sau để giải quyết các bài toán min-max:

- $\overline{z}=z$
- $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
- $\overline{z-z'}=\overline{z}-\overline{z'}$
- $\overline{z.z'}=\overline{z}.\overline{z'}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

- $\left|z\right|\geq 0;\left|z\right|=0\Leftrightarrow z=0;$
- $\left|z^2\right|=\left|z\right|^2,\ \left|-z\right|=\left|z\right|,\ \left|\overline{z}\right|=\left|z\right|$
- $\left|z_1+z_2\right|\leq\left|z_1\right|+\left|z_2\right|$
- $\left|\left|z\right|-\left|z'\right|\right|\leq\left|z-z'\right|\leq\left|z\right|+\left|z'\right|$
- $\left|z_1.z_2\right|=\left|z_1\right|.\left|z_2\right|$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|}$

Kết hợp sử dụng các bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình nhân, BĐT Bunhia- Cốpxki.

- **Bất đẳng thức Bunhiacopxki** :Cho các số thực a,b,x,y ta luôn có

  $\left(ax+by\right)^2\leq\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)$. Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

- **Bất đẳng thức Vectơ** : Cho 2 vecto $\vec{u}\left(x;y\right)$ và $\vec{v}\left(x';y'\right)$ ta luôn có $\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\geq\left|\overrightarrow{u+v}\right|$

  $\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x'^2+y'^2}\geq\sqrt{\left(x-x'\right)^2+\left(y-y'\right)^2}$

  Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}<0$

Câu 1. Trong các số phức z thoả mãn điều kiện $\left|z+1-5i\right|=\left|\overline{z}+3-i\right|$, tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

Câu 2. Cho các số phức z thỏa mãn $\left|z\right|=m^2+2m+5$, với m là tham số thực. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=\left(3-4i\right)z-2i$ là một đường tròn. Bán kính nhỏ nhất của đường tròn đó bằng?

Câu 3. Trong các số phức z có phần thực, phần ảo không âm và thoả mãn: $\left|\dfrac{z-3}{z-1+2i}\right|=1$.Tìm số phức z sao cho biểu thức $P=\left|z^2-\overline{z}^2\right|-\left(z^2-\overline{z}^2\right).i.\left[z(1-i)+\overline{z}(1+i)\right]$ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Câu 4. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z-2-4i\right|=\left|z-2i\right|$.Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

Câu 5. Trong các số phức z thỏa mãn $\left|z\right|=1.$ Tìm số phức z để $\left|1+z\right|+3\left|1-z\right|$ đạt giá trị lớn nhất

Câu 6. Trong các số phức z thỏa: $\left|\overline{z}-3+4i\right|=\left|z\right|$, biết rằng số phức $z=a+bi,\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ có modul nhỏ nhất. Khi đó, giá trị của $P=a^2-b$ là ?

Câu 7. Cho số phức thỏa $\left|z\right|=1$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\left|z+1\right|+\left|z^2-z+1\right|$.

Câu 8. Số phức $z\neq 0$ thỏa mãn $\left|z\right|\geq 2.$ Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|\dfrac{z+i}{z}\right|$.

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-2-3i\right|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=\left|\overline{z}+1+i\right|$

Câu 10. Trong các số phức z thoả mãn $\left|z-3+4i\right|=4$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $\left|z\right|$ và xảy ra khi z bằng bao nhiêu?

Câu 11. Cho số phức z thỏa mãn $\left|\left(2+i\right)z+1\right|=1$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\left|z-1\right|$ bằng bao nhiêu ?

Câu 12. Cho số phức z thỏa mãn $\left|\overline{z}-1+2i\right|=\sqrt{10}$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\left|z+1-4i\right|$ bằng bao nhiêu ?

Câu 13. Trong các số phức z có môđun bằng $2\sqrt{2}$. Tìm số phức z sao cho biểu thức $P=\left|z+1\right|+\left|z+i\right|$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 14. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-3\right|+\left|z+3\right|=8$. Gọi M , m lần lượt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất $\left|z\right|$. Khi đó $M+m$ bằng ?

Câu 15. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-4\right|+\left|z+4\right|=10$. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $\left|z\right|$ bằng?

PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC GIẢI BÀI TOÁN MIN-MAX

Bài toán 1: Cho đường tròn (T) cố định có tâm I bán kính R và điểm A cố định. Điểm M di động trên đường tròn (T). Hãy xác định vị trí điểm M sao cho AM lớn nhất, nhỏ nhất.

Giải:

TH1: A thuộc đường tròn (T)

Ta có: AM đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi M trùng với A

AM đạt giá trị lớn nhất bằng 2R khi M là điểm đối xứng với A qua I

TH2: A không thuộc đường tròn (T)

Gọi B, C là giao điểm của đường thẳng qua A,I và đường tròn (T);

Giả sử $AB < AC$.

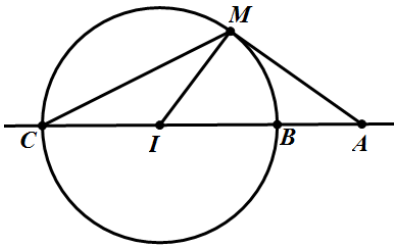
+) Nếu A nằm ngoài đường tròn (T) thì với điểm M bất kì trên (T), ta có:

$AM \geq AI - IM = AI - IB = AB$.

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv B$

$AM \leq AI + IM = AI + IC = AC$.

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv C$



+) Nếu A nằm trong đường tròn (T) thì với điểm M bất kì trên (T), ta có:

$AM \geq IM - IA = IB - IA = AB$.

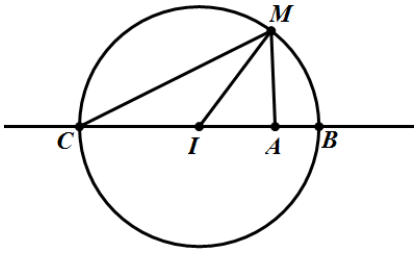
Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv B$

$AM \leq AI + IM = AI + IC = AC$.

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv C$

Vậy khi M trùng với B thì AM đạt gía trị nhỏ nhất.

Vậy khi M trùng với C thì AM đạt gía trị lớn nhất.



Bài toán 2: Cho hai đường tròn (T_1) có tâm I, bán kính R_1; đường tròn (T_2) có tâm J, bán kính R_2. Tìm vị trí của điểm M trên (T_1), điểm N trên (T_2) sao cho MN đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Giải:

Gọi d là đường thẳng đi qua I, J; d cắt đường tròn (T_1) tại hai điểm phân biệt A, B (giả sử JA > JB) ; d cắt (T_2) tại hai điểm phân biệt C, D (giả sử ID > IC).

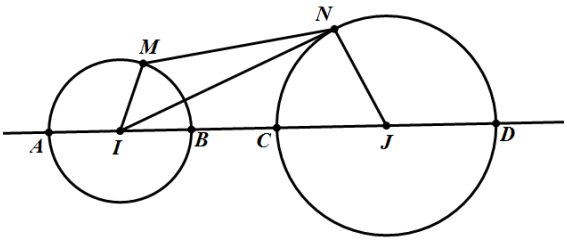
Với điểm M bất khì trên (T_1) và điểm N bất kì trên (T_2).

Ta có: $MN \leq IM + IN \leq IM + IJ + JN = R_1 + R_2 + IJ = AD$

Đẳng thức xảy ra khi M trùng với A và N trùng với D

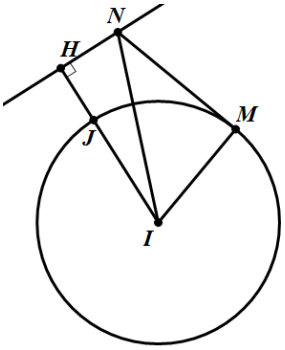
$MN \geq \left|IM - IN\right| \geq \left|IJ - IM - JN\right| = \left|IJ - R_1 + R_2\right| = BC$.

Đẳng thức xảy ra khi M trùng với B và N trùng với C.
Vậy khi M trùng với A và N trùng với D thì MN đạt giá trị lớn nhất.
khi M trùng với B và N trùng với C thì MN đạt giá trị nhỏ nhất.



Bài toán 3: Cho hai đường tròn (T) có tâm I, bán kính R; đường thẳng Δ không có điểm chung với (T). Tìm vị trí của điểm M trên (T), điểm N trên Δ sao cho MN đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải:



Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên d
Đoạn IH cắt đường tròn (T) tại J
Với M thuộc đường thẳng Δ, N thuộc đường tròn (T), ta có:
$MN \geq IN - IM \geq IH - IJ = JH = const$.
Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv H; N \equiv I$
Vậy khi M trùng với H; N trùng với J thì MN đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 1. Trong các số phức z thoả mãn $|z-3+4i|=4$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z|$

Câu 2. Trong các số phức z thoả mãn điều kiện $\overline{z}(z+2-4i)$ là một số ảo, tìm số phức z sao cho $\omega = z-1-i$ có môđun lớn nhất.

Câu 3. Trong các số phức z_1, z_2 thoả mãn: $|z_1-1-i|=1$; $|z_2-6-6i|=6$, tìm số phức z_1, z_2 sao cho $|z_1-z_2|$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 4. Cho các số phức $z_1; z_2$ thoả mãn: $|z_1|=1$; $\overline{z}_2\left[z_2-(1-i)\right]-6+2i$ là một số thực. Tìm số phức $z_1; z_2$ sao cho $P=|z_2|^2-\left(z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1 z_2\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5. Trong các số phức z có môđun bằng 2. Tìm số phức z sao cho biểu thức $P=|z-1|+|z-1+7i|$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 6. Cho số phức z thỏa mãn $|z-(3+4i)|=\sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Tính giá trị $A=M^2+m^2$.

Câu 7. Trong các số phức z thoả mãn điều kiện $|z-3|+|z+3|=10$. Tìm số phức z có môđun lớn nhất.

Câu 8. Biết rằng số phức z thỏa mãn $u=(z+3-i)(\overline{z}+1+3i)$ là một số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

Câu 9. Tìm số phức z có mô đun lớn nhất và thỏa mãn điều kiện $\left|\overline{z}(1+i)-3+2i\right|=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Câu 10. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+1+i|=|z+2i|$ và $P=|z-2-3i|+|z+1|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P=a+2b$.

Câu 11. Cho hai số phức $z_1,\ z_2$ thỏa mãn $|z_1-2i|=3$ và $|z_2+2+2i|=|z_2+2+4i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_1-z_2|$ bằng?

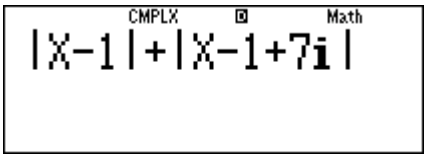
SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO 570 VN-PLUS ĐỂ GIẢI DẠNG MAX, MIN SỐ PHỨC

Câu 1. Trong các số phức z có môđun bằng 2. Tìm số phức z sao cho biểu thức $P=|z-1|+|z-1+7i|$ đạt giá trị lớn nhất.

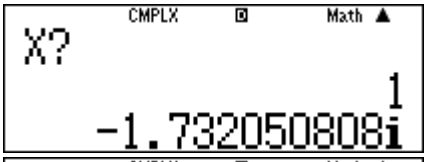
$A.1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ $\quad B.1+i\sqrt{3}$ $\quad C.\sqrt{3}+i$ $\quad D.-\sqrt{3}+i$

Hướng dẫn:

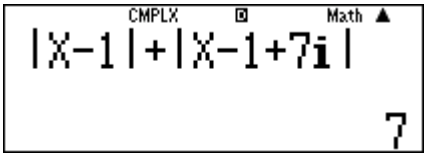
- Chuyển qua chế độ số phức: w2
- Nhập biểu thức P :
  qcQ)p1$+ qcQ)p1+7b
  Màn hình hiển thị:



- Gán X cho từng đáp án, dùng phím: r



- So sánh kết quả và ta tìm được giá trị lớn nhất là 7

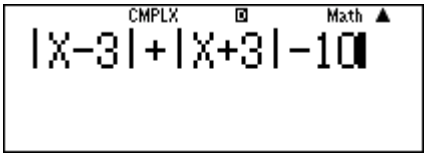


Câu 2. Trong các số phức z thoả mãn điều kiện $|z-3|+|z+3|=10$. Tìm số phức z có môđun lớn nhất.

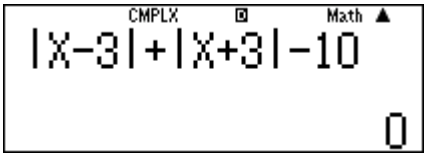
$A.4+\frac{9}{5}i$ $\quad B.5$ $\quad C.3+\frac{12}{5}i$ $\quad D.3+5\mathrm{i}$

Hướng dẫn:

- Chuyển qua chế độ số phức: w2
- Nhập biểu thức: $|z-3|+|z+3|-10$ vào máy tính:
  qcQ)p3$ qcQ)+3$p10.
  Màn hình hiển thị:



- Dùng phím r để nhập các đáp án, nếu đáp án nào cho kết quả bằng 0 thì thỏa mãn điều kiện $|z-3|+|z+3|=10$.
  Ta thấy 3 đáp án A,B,C thỏa mãn điều kiện đề bài nhưng đáp án B có môđun lớn nhất. Chọn B.



CHƯƠNG IV

SỐ PHỨC

I LÝ THUYẾT.

1. ĐỊNH NGHĨA

- Một số phức là một biểu thức dạng $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$ và $i^2=-1$.
- i được gọi là đơn vị ảo, a được gọi là phần thực và b được gọi là phần ảo của số phức $z=a+bi$.
  Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.
  $\mathbb{C}=\left\{a+bi\,/\,a,b\in\mathbb{R};i^2=-1\right\}$.
- Chú ý: - Khi phần ảo $b=0\Leftrightarrow z=a$ là số thực.
  - Khi phần thực $a=0\Leftrightarrow z=bi\Leftrightarrow z$ là số thuần ảo.
  - Số $0=0+0i$ vừa là số thực, vừa là số ảo.
- Hai số phức bằng nhau: $a+bi=c+di\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\b=d\end{cases}$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.
- Hai số phức $z_1=a+bi;\ z_2=-a-bi$ được gọi là hai số phức đối nhau.

2. SỐ PHỨC LIÊN HỢP

Số phức liên hợp của $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$ là $a-bi$ và được kí hiệu bởi $\overline{z}$.
Một số tính chất của số phức liên hợp:

a) $\overline{\overline{z}}=z$ b) $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$ c) $\overline{z-z'}=\overline{z}-\overline{z'}$

c) $\overline{z.z'}=\overline{z}.\overline{z'}$ d) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

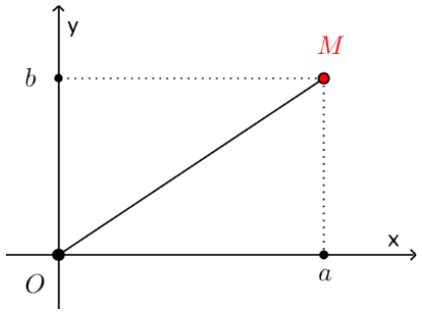
z là số thực $\Leftrightarrow z=\overline{z}$; z là số thuần ảo $\Leftrightarrow z=-\overline{z}$

3. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC

Trong mặt phẳng phức Oxy (Ox là trục thực, Oy là trục ảo), số phức $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$ được biểu diễn bằng điểm $M\left(a;b\right)$.

4. MODULE CỦA SỐ PHỨC

- Môđun của số phức $z = a + bi \ \left(a,b \in \mathbb{R}\right)$ là $\bar{z} = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Như vậy, môđun của số phức z là $\bar{z}$ chính là khoảng cách từ điểm M biểu diễn số phức $z = a + bi \ \left(a,b \in \mathbb{R}\right)$ đến gốc tọa độ O của mặt phẳng phức là: $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$.
- Một số tính chất của môđun:
  - $\left|z\right| \geq 0; \left|z\right| = 0 \Leftrightarrow z = 0;$
  - $\left|z^2\right| = \left|z\right|^2, \ \left|-z\right| = \left|z\right|, \ \left|\bar{z}\right| = \left|z\right|$
  - $\left|z_1 + z_2\right| \leq \left|z_1\right| + \left|z_2\right|$
  - $\left|\left|z\right| - \left|z'\right|\right| \leq \left|z - z'\right| \leq \left|z\right| + \left|z'\right|$
  - $\left|z_1.z_2\right| = \left|z_1\right|.\left|z_2\right|$
  - $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|}$



5. CÁC PHÉP TOÁN VỚI SỐ PHỨC: CỘNG – TRỪ – NHÂN – CHIA SỐ PHỨC

Cho hai số phức $z = a + bi$; $z' = a' + b'i$ với $a,b,a',b' \in \mathbb{R}$ và số $k \in \mathbb{R}$.

- Tổng hai số phức: $z + z' = a + a' + (b + b')i$.
- Hiệu hai số phức: $z + z' = a - a' + (b - b')i$.
- Số đối của số phức $z = a + bi$ là $-z = -a - bi$.
- Nếu $\vec{u}, \vec{u'}$ theo thứ tự biểu diễn các số phức z, z' thì
  $\vec{u} + \vec{u'}$ biểu diễn số phức $z + z'$.
  $\vec{u} - \vec{u'}$ biểu diễn số phức $z - z'$.
- Nhân hai số phức:
  $z.z' = \left(a + bi\right)\left(a' + b'i\right) = \left(a.a' - b.b'\right) + \left(a.b' + a'.b\right)i$.
- Số phức nghịch đảo: $z^{-1} = \frac{1}{\left|z\right|^2}\bar{z}$.
- Chia hai số phức:

  Nếu $z \neq 0$ thì $\frac{z'}{z} = \frac{z'.\bar{z}}{\left|z\right|^2}$, nghĩa là nếu muốn chia số phức z' cho số phức $z \neq 0$ thì ta nhân cả tử và mẫu của thương $\frac{z'}{z}$ cho $\bar{z}$.

❖ ***Chú ý:***

$$i^{4k} = 1; \ i^{4k+1} = i; \ i^{4k+2} = -1; \ i^{4k+3} = -i \ \ (\mathrm{k} \in \mathbb{Z}).$$

6. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC

Cho số phức w. Mỗi số phức z thỏa mãn $z^2 = w$ được gọi là một căn thức bậc 2 của w.
Mỗi số phức $w \neq 0$ 0 có hai căn bậc hai là hai số phức đối nhau $(z \text{ và } -z)$.

- Trường hợp w là số thực ($w = a \in \mathbb{R}$)

  + Khi $a > 0$ thì w có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$.

  + Khi $a < 0$ nên $a = (-a)i^2$, do đó w có hai căn bậc hai là $\sqrt{-a}.i$ và $-\sqrt{-a}.i$.

  Ví dụ: Hai căn bậc 2 của -1 là i và $-i$.

  Hai căn bậc 2 của $-a^2$ $(a \neq 0)$ là ai, $-ai$.

- Trường hợp $w = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R}; b \neq 0)$.

  Cách 1:

  Gọi $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là căn bậc 2 của w khi và chỉ khi $z^2 = w$, tức là:

$$(x + yi)^2 = a + bi$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \rightarrow x = ...; y = ...$$

  Mỗi cặp số thực $(x; y)$ nghiệm đúng hệ phương trình đó cho ra một căn bậc hai $z = x + yi$ của số phức $w = a + bi$.

  Cách 2:

  Có thể biến đổi w thành bình phương của một tổng, nghĩa là $w = z^2$. Từ đó kết luận căn bậc hai của w là z và -z.

7. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRÊN TẬP SỐ PHỨC

Cho phương trình bậc 2: $Az^2 + Bz + C = 0$ (1) trong đó A, B, C là những số phức $A \neq 0$.

Xét biệt thức $\boxed{\Delta = B^2 - 4AC}$

- Nếu $\Delta \neq 0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt:

$$\boxed{z_1 = \frac{-B + \sigma}{2A}; \qquad z_2 = \frac{-B - \sigma}{2A}}$$

Trong đó σ là một căn bậc 2 của Δ.

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm kép: $\boxed{z_1 = z_2 = \frac{-B}{2A}}$

CHÚ Ý:

- Mọi phương trình bậc n: $A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + ... + A_{n-1} z + A_n = 0$ luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).
- Hệ thức Vi-ét đối với phương trình bậc 2 số phức hệ số thực:

  Cho phương trình bậc 2 : $Az^2 + Bz + C = 0$ $(A, B, C \in \mathbb{R}; A \neq 0)$ có 2 nghiệm phân biệt (thực hoặc phức). Ta có: $\begin{cases} S = z_1 + z_2 = \dfrac{-B}{A} \\ P = z_1 z_2 = \dfrac{C}{A} \end{cases}$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TỔNG QUÁT

- Bước 1: Gọi số phức z cần tìm là $z=a+bi\ \left(a,b\in\mathbb{R}\right)$.
- Bước 2: Biến đổi theo điều kiện cho trước của đề bài (thường liên quan đến môđun, biểu thức có chứa $z,\bar{z},\left|z\right|,...$) để đưa về phương trình hoặc hệ phương trình 2 ẩn theo a và b nhờ tính chất 2 số phức bằng nhau (phần thực bằng nhau và phần ảo bằng nhau), rồi từ đó suy ra a và b và suy ra được số phức z cần tìm.

Câu 1. Tìm phần thực, phần ảo, số phức liên hợp và tính môđun của số phức z:

$a)\ \ z=\left(2+4i\right)+2i\left(1-3i\right).$ $\qquad b)\ z=\left(2-4i\right)\left(5+2i\right)+\dfrac{4-5i}{2+i}.$

Giải:

a) $z=\left(2+4i\right)+2i\left(1-3i\right)=2+4i+2i-6i^2=2+6i+6=8+6i.$

$\Rightarrow$ Phần thực: 8 ; Phần ảo: 6 ; Số phức liên hợp: $\bar{z}=8-6i.$

Môđun $\left|z\right|=\sqrt{8^2+6^2}=10.$

b) $z=\left(2-4i\right)\left(5+2i\right)+\dfrac{4-5i}{2+i}=10+4i-20i-8i^2+\dfrac{\left(4-5i\right)\left(2-i\right)}{2^2+1^2}$

$=18-16i+\dfrac{8-14i-5}{5}=\dfrac{93}{5}-\dfrac{94}{5}i.$

$\Rightarrow$ Phần thực: $\dfrac{93}{5}$; Phần ảo: $\dfrac{94}{5}$; Số phức liên hợp: $\bar{z}=\dfrac{93}{5}+\dfrac{94}{5}i.$

Môđun $\left|z\right|=\sqrt{\left(\dfrac{93}{5}\right)^2+\left(\dfrac{94}{5}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{17485}}{5}.$

Câu 2. Cho số phức $z=3+2i$. Tìm môđun số phức $w=zi+\bar{z}\left(1+2i\right).$

Giải:

$w=zi+\bar{z}\left(1+2i\right)=(3+2i)i+(3-2i)(1+2i)$

$=3i-2+3+6i-2i+4=5+7i$.

Vậy $\left|w\right|=\sqrt{5^2+7^2}=\sqrt{74}.$

Câu 3. Tìm phần thực, phần ảo của số phức sau: $1+\left(1+i\right)+\left(1+i\right)^2+\left(1+i\right)^3+...+\left(1+i\right)^{20}$

Giải:

$P=1+\left(1+i\right)+\left(1+i\right)^2+...+\left(1+i\right)^{20}=\dfrac{\left(1+i\right)^{21}-1}{i}$

$\left(1+i\right)^{21}=\left[\left(1+i\right)^2\right]^{20}\left(1+i\right)=\left(2i\right)^{10}\left(1+i\right)=-2^{10}\left(1+i\right)$

$\Rightarrow P=\dfrac{-2^{10}\left(1+i\right)-1}{i}=-2^{10}+\left(2^{10}+1\right)i$

Vậy phần thực là -2^{10} và phần ảo là $2^{10}+1$.

Câu 4. Tính $S=1009+i+2i^2+3i^3+...+2017i^{2017}.$

Giải:

Cách 1:

$$\begin{aligned}S &= 1009 + i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 + ... + 2017i^{2017}\\ &= 1009 + \left(4i^4 + 8i^8 + ... + 2016i^{2016}\right) + \left(i + 5i^5 + 9i^9 + ... + 2017i^{2017}\right) + ...\\ &\quad + \left(2i^2 + 6i^6 + 10i^{10} + ... + 2014i^{2014}\right) + \left(3i^3 + 7i^7 + 11i^{11} + ... + 2015i^{2015}\right)\\ &= 1009 + \sum_{n=1}^{504}\left(4n\right) + i\sum_{n=1}^{505}\left(4n-3\right) - \sum_{n=1}^{504}\left(4n-2\right) - i\sum_{n=1}^{504}\left(4n-1\right)\\ &= 1009 + 509040 + 509545i - 508032 - 508536i\\ &= 2017 + 1009i.\end{aligned}$$

Cách 2:

Đặt $f\left(x\right) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{2017} \Rightarrow f'\left(x\right) = 1 + 2x + 3x^2 + ... + 2017x^{2016}$

$$\Rightarrow xf'\left(x\right) = x + 2x^2 + 3x^3 + ... + 2017x^{2017}\ \left(1\right)$$

Mặt khác:

$$f\left(x\right) = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{2017} = \frac{x^{2018} - 1}{x - 1} \Rightarrow f'\left(x\right) = \frac{2018x^{2017}\left(x-1\right) - \left(x^{2018} - 1\right)}{\left(x-1\right)^2}$$

$$\Rightarrow xf'\left(x\right) = x.\frac{2018x^{2017}\left(x-1\right) - \left(x^{2018} - 1\right)}{\left(x-1\right)^2}\ \left(2\right)$$

Thay $x = i$ vào $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ ta được: $(1) \Leftrightarrow S - 1009;\ (1)=(2)$, nên:

$$S = 1009 + i.\frac{2018i^{2017}\left(i-1\right) - \left(i^{2018} - 1\right)}{\left(i-1\right)^2} = 1009 + i\frac{-2018 - 2018i + 2}{-2i} = 2017 + 1009i.$$

Câu 5. Cho số phức $z = -\frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$. Tính $w = \left(1+z\right)\left(1+z^2\right)\left(1+z^3\right)...\left(1+z^{2017}\right)$.

Giải :

Ta có $z = -\frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right) \longrightarrow \begin{cases} z^2 + z + 1 = 0 \\ z^3 = 1 \end{cases}$.

Do đó với mọi $k \in \mathbb{N}$, ta có $\begin{cases} z^{3k} = 1 & \longrightarrow 1 + z^{3k} = 2 \\ z^{3k+1} = z & \longrightarrow 1 + z^{3k+1} = 1 + z = -z^2 \\ z^{3k+2} = z^2 & \longrightarrow 1 + z^{3k+2} = 1 + z^2 = -z \end{cases}$.

Vì từ 1 đến 2017 có: 673 số chia 3 dư 1, 672 số chia 3 dư 2, 672 số chia hết cho 3 nên

$$w = \left(1+z\right)\left(1+z^2\right)\left(1+z^3\right)...\left(1+z^{2017}\right) = 2^{672}.\left(-z\right)^{672}.\left(-z^2\right)^{673} = -2^{672}.z^{2018} = -2^{672}.z^{3.672+2}$$

$$= -2^{672}.z^2 = 2^{672}\left(1+z\right) = 2^{672}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^{671}\left(1 - \sqrt{3}i\right).$$

Câu 6. Tìm số z sao cho: $z + (2+i)\bar{z} = 3 + 5i$.

Giải:

Gọi số phức z cần tìm là $z = a + bi\ \left(a,b \in \mathbb{R}\right)$.

Ta có: $z + (2+i)\bar{z} = 3 + 5i$

$$\Leftrightarrow a+bi+(2+i)(a-bi)=3+5i \Leftrightarrow a+bi+2a-2bi+ai-bi^2=3+5i$$
$$\Leftrightarrow 3a+b+(a-b)i=3+5i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}3a+b=3\\ a-b=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=-3\end{cases} \Rightarrow z=2-3i.$$

Câu 7. Tìm số phức z khi nó thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau: $\left|z-(2+i)\right|=\sqrt{10}$ và $z.\bar{z}=25$.

Giải:

Gọi số phức cần tìm là $z=a+bi\ \left(a,b\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có: $z.\bar{z}=\left|z\right|^2=a^2+b^2=25 \qquad (1)$.

Lại có: $\left|z-(2+i)\right|=\sqrt{10}\Leftrightarrow\left(a-2\right)^2+\left(b-1\right)^2=10\Leftrightarrow a^2+b^2-4a-2b-5=0 \quad (2)$

Thay (1) vào (2) ta được: $25-4a-2b+5=10\Leftrightarrow b=-2a+10$.

Nên $a^2+b^2=25\Leftrightarrow a^2+(-2a+10)^2=25\Leftrightarrow 5a^2-40a+75=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=5\\ a=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\ b=4\end{array}\right.$

Vậy $z=5$ hoặc $z=3+4i$.

Câu 8. Cho z và $\bar{z}$ là số phức liên hợp của z. Biết $\dfrac{z}{\left(\bar{z}\right)^2}\in\mathbb{R}$ và $\left|z-\bar{z}\right|=2\sqrt{3}$ .Tìm $\left|z\right|$

Giải :

Gọi $z=a+bi\ \left(a,b\in\mathbb{R}\right)\ \Rightarrow\bar{z}=a-bi$.

Ta có : $\left|z-\bar{z}\right|=\left|\left(a+bi\right)-\left(a-bi\right)\right|=\left|2bi\right|=2\sqrt{3}\Rightarrow b^2=3$.

$z.\bar{z}\in\mathbb{R}\Rightarrow\left(z.\bar{z}\right)^2\in\mathbb{R}$. Ta có: $\dfrac{z}{\left(\bar{z}\right)^2}=\dfrac{z}{\left(\bar{z}\right)^2}.1=\dfrac{z}{\left(\bar{z}\right)^2}.\dfrac{z^2}{z^2}=\dfrac{z^3}{\left(z.\bar{z}\right)^2}\in\mathbb{R}\ \Rightarrow z^3\in\mathbb{R}$.

Mà $z^3=a^3+3a^2bi+3a\left(bi\right)^2+\left(bi\right)^3=a^3-3ab^2+\left(3a^2b-b^3\right)i$

$$\Rightarrow\begin{cases}3a^2b-b^3=0\\ b^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3a^2-b^2=0\\ b^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=1\\ b^2=3\end{cases}\Rightarrow\left|z\right|=2.$$

Câu 9. Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện: $\left|z+1-2i\right|=\left|\bar{z}+3+4i\right|$ và $\dfrac{z-2i}{z+i}$ là một số thuần ảo.

Giải :

Đặt $z=x+yi\ \left(x,y\right)$. Theo bài ra ta có :

$$\left|x+1+\left(y-2\right)i\right|=\left|x+3+\left(4-y\right)i\right|\Leftrightarrow\left(x+1\right)^2+\left(y-2\right)^2=\left(x+3\right)^2+\left(y-4\right)^2\Leftrightarrow y=x+5$$

Số phức $w=\dfrac{z-2i}{z+i}=\dfrac{x+\left(y-2\right)i}{x+\left(1-y\right)i}=\dfrac{x^2-\left(y-2\right)\left(y-1\right)+x\left(2y-3\right)i}{x^2+\left(y-1\right)^2}$

w là một số ảo khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2-(y-2)(y-1)=0 \\ x^2+(y-1)^2>0 \\ y=x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{12}{7} \\ y=\dfrac{23}{7} \end{cases}$. Vậy $z=-\dfrac{12}{7}+\dfrac{23}{7}i$.

Câu 10. Cho số phức z có môđun bằng 2018 và w là số phức thỏa mãn biểu thức $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{w}=\dfrac{1}{z+w}$.

Môđun của số phức w bằng?

Giải:

Từ giả thiết $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{w}=\dfrac{1}{z+w} \Leftrightarrow \dfrac{z+w}{zw}-\dfrac{1}{z+w}=0 \Leftrightarrow \dfrac{(z+w)^2-zw}{zw(z+w)}=0$

$\Rightarrow z^2+w^2+zw=0 \Leftrightarrow z^2+zw+\dfrac{1}{4}w^2+\dfrac{3}{4}w^2=0 \Leftrightarrow \left(z+\dfrac{1}{2}w\right)^2=-\dfrac{3}{4}w^2 \Leftrightarrow \left(z+\dfrac{1}{2}w\right)^2=\left(\dfrac{i\sqrt{3}w}{2}\right)^2$

Từ $\left(z+\dfrac{1}{2}w\right)^2=\left(\dfrac{i\sqrt{3}w}{2}\right)^2 \Rightarrow z=\left(-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)w$.

Lấy môđun hai vế, ta được $|z|=\left|-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right|.|w|=1.|w|=|w| \Rightarrow |w|=2018.$

Câu 11. Cho số phức z,w khác 0 sao cho $|z-w|=2|z|=|w|$. Phần thực của số phức $u=\dfrac{z}{w}$ là ?

Giải :

Cách 1 **:** Gọi $u=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có : $|z-w|=2|z|=|w| \Leftrightarrow \begin{cases} |u|=\dfrac{|z|}{|w|}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{|z-w|}{|w|}=\left|\dfrac{z-w}{w}\right|=|u-1|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=\dfrac{1}{4} \\ (a-1)^2+b^2=1 \end{cases}$.

$\Rightarrow (a-1)^2-a^2=-2a+1=\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{8}$

Cách 2: Gọi $w=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$.

Chọn $z=1 \Rightarrow |z|=1 \Rightarrow |1-w|=2=|w| \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=4\ (*) \\ (a-1)^2+b^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$.

Thay $a=\dfrac{1}{2}$ vào $(*) \Rightarrow b=\dfrac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow u=\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{15}}{2}i}=\dfrac{1}{8}-\dfrac{\sqrt{15}}{8}i$.

Câu 12. Tính môđun của số phức z biết $z\neq|z|$ và $\dfrac{1}{|z|-z}$ có phần thực bằng 4.

Giải:

Cách 1: Giả sử $z=a+bi\ \left(a,\ b\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có $\dfrac{1}{\left|z\right|-z}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}-a-bi}$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a+bi}{\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^2+b^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^2+b^2}+\frac{b}{\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^2+b^2}i.$$

Theo giả thiết: $\dfrac{1}{\left|z\right|-z}$ có phần thực bằng 4 nên $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)^2+b^2}=4$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2\left(a^2+b^2\right)-2a\sqrt{a^2+b^2}}=4\Leftrightarrow\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2\sqrt{a^2+b^2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}=4$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}}=4\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}=\frac{1}{8}\Rightarrow\left|z\right|=\frac{1}{8}.$$

Cách 2: Nếu $z=a+bi$ thì $z+\overline{z}=2a$.

Áp dụng: $\dfrac{1}{\left|z\right|-z}$ có phần thực bằng $4\Rightarrow\dfrac{1}{\left|z\right|-z}+\overline{\dfrac{1}{\left|z\right|-z}}=8$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\left|z\right|-z}+\frac{1}{\left|z\right|-\overline{z}}=8\Leftrightarrow\frac{2\left|z\right|-z-\overline{z}}{\left|z\right|^2-\left|z\right|\left(z+\overline{z}\right)+z.\overline{z}}=8\Leftrightarrow\frac{2\left|z\right|-z-\overline{z}}{\left|z\right|^2-\left|z\right|\left(z+\overline{z}\right)+\left|z\right|^2}=8$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\left|z\right|-z-\overline{z}}{2\left|z\right|^2-\left|z\right|\left(z+\overline{z}\right)}=8\Leftrightarrow\frac{2\left|z\right|-z-\overline{z}}{\left|z\right|\left(2\left|z\right|-z-\overline{z}\right)}=8\Leftrightarrow\frac{1}{\left|z\right|}=8\Leftrightarrow\left|z\right|=\frac{1}{8}.$$

Nhận xét:

Trong bài toán tìm thuộc tính của số phức z thỏa mãn điều kiện K cho trước, nếu K là thuần z (tất cả đều z) hoặc thuần $\overline{z}$ thì đó là bài toán giải phương trình bậc nhất (phép cộng, trừ, nhân, chia số phức) với ẩn z hoặc $\overline{z}$. Còn nếu chứa hai loại trở lên (z , $\overline{z}$, $\left|z\right|$) thì ta sẽ gọi $z=a+bi\ \left(a,b\in\mathbb{R}\right)$. Từ đó sử dụng các phép toán trên số phức để đưa về hai số phức bằng nhau để giải.

SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO 570 VN-PLUS ĐỂ GIẢI VỀ SỐ PHỨC

Để thực hiện các phép toán trên tập số phức, ta chuyển qua chế độ CMPLX bằng cách bấm w2.

- Bấm đơn vị ảo i bằng cách bấm phím b.
- Tính môđun của số phức bấm qc.
- Để bấm số phức liên hợp của z bấm q22để hiện Conjg (liên hợp).

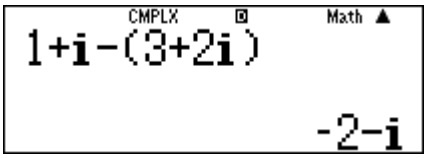
1. PHÉP CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA

Câu 1. Tính $z = 1 + i - (3 + 2i)$.

Hướng dẫn:

Ta lần lượt bấm các phím như sau: 1+bp(3+2b)

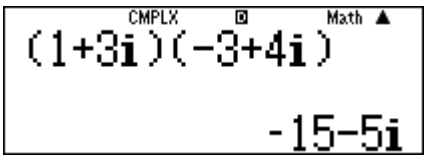
Và ta được kết quả là:



Câu 2. Tính $z = (1 + 3i)(-3 + 4i)$.

Hướng dẫn:

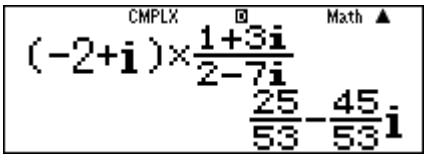
Ta lần lượt bấm các phím tương tự như trên và ta thu được kết quả như sau:



Câu 3. Tính $z = (-2 + \mathrm{i})\dfrac{1 + 3i}{2 - 7i}$

Hướng dẫn:

Ta lần lượt nhập biểu thức $z = (-2 + \mathrm{i})\dfrac{1 + 3i}{2 - 7i}$ vào máy ta thu được kết quả:



Câu 4. Cho số phức $z = a + bi$. Số phức z^2 có phần ảo là :

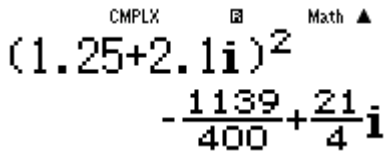
A. a^2b^2 **B.** $2a^2b^2$ **C.** $2ab$ **D.** ab

Hướng dẫn:

- Vì đề bài cho ở dạng tổng quát nên ta tiến hành "cá biệt hóa" bài toán bằng cách chọn giá trị cho a, b (lưu ý nên chọn các giá trị lẻ để tránh xảy ra trường hợp đặc biệt).

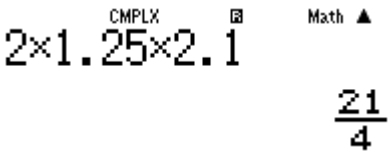
  Chọn $a = 1.25$ và $b = 2.1$ ta có $z = 1.25 + 2.1i$
- Sử dụng máy tính Casio tính z^2

1 . 2 5 + 2 . 1 b) d =



Vậy phần ảo là $\dfrac{21}{4}$

- Xem đáp số nào có giá trị là $\frac{21}{4}$ thì đáp án đó chính xác. Ta có :



Vậy $2ab = \frac{21}{4} \Rightarrow$ Đáp án **C** là chính xác.

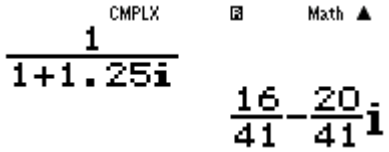
Câu 5. Cho số phức $z = a + bi$. Số phức z^{-1} có phần thực là :

A. $a + b$ **B.** $\frac{a}{a^2 + b^2}$ **C.** $\frac{-b}{a^2 + b^2}$ **D.** $a - b$

Hướng dẫn:

- Vì đề bài mang tính chất tổng quát nên ta phải cá biệt hóa, ta chọn $a = 1; b = 1.25$.
- Với $z^{-1} = \frac{1}{z}$ Sử dụng máy tính Casio

a 1 R 1 + 1 . 2 5 b =



Ta thấy phần thực số phức z^{-1} là : $\frac{16}{41}$ đây là 1 giá trị dương. Vì ta chọn $b > a > 0$ nên ta thấy ngay đáp số **C** và **D** sai.

Thử đáp số **A** có $a + b = 1 + 1.25 = \frac{9}{4} \neq \frac{16}{41}$ vậy đáp số A cũng sai $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**

Câu 6. Cho số phức $z = \left(1+i\right)^2 + \left(1+i\right)^3 + ... + \left(1+i\right)^{22}$. Phần thực của số phức z là :

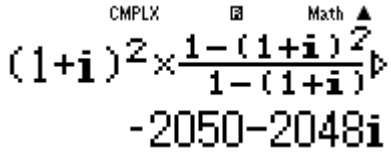
A. -2^{11} **B.** $-2^{11} + 2$ **C.** $-2^{11} - 2$ **D.** 2^{11}

Hướng dẫn:

Dãy số trên là một cấp số nhân với $U_1 = \left(1+i\right)^2$, số số hạng là 21 và công bội là $1 + i$. Thu gọn z ta được : $z = U_1 . \frac{1 - q^n}{1 - q} = \left(1+i\right)^2 . \frac{1 - \left(1+i\right)^{21}}{1 - \left(1+i\right)}$

- Sử dụng máy tính Casio tính z

(1+b)dOa1p(1+b)^21R1p(1+b)=



Vậy $z = -2050 - 2048i$

$\Rightarrow$ Phần ảo số phức z là $-2050 = -2^{11} - 2 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

2. TÍNH MÔĐUN

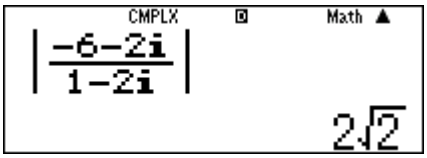
Câu 1. Tìm môđun của số phức $(1-2i)\bar{z}+2i=-6$.

Hướng dẫn:

$(1-2i)\bar{z}+2i=-6 \Rightarrow |z|=|\bar{z}|=\left|\dfrac{-6-2i}{1-2i}\right|$.Nên ta thực hiện bấm như sau:

qcap6p2bR1p2b=

Ta thu được kết quả:

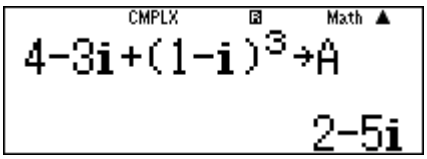


Câu 2. Tìm số phức $\omega=2.\overline{z_1.z_2}$. Biết $z_1=4-3i+(1-i)^3$, $z_2=\dfrac{2+4i-2(1-i)^3}{1+i}$.

Hướng dẫn:

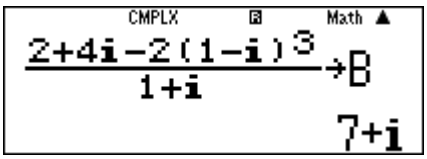
- Tính $z_1=4-3i+(1-i)^3$ và lưu vào biến A:

4p3b+(1pb)^3qJz



- Tính $z_2=\dfrac{2+4i-2(1-i)^3}{1+i}$ và lưu vào biến B

a2+4bp2(1pb)^3R1+bqJx



- Tính $\omega=2.\overline{z_1.z_2}$:

2q22q22Qz)OQx)=



3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

Câu 1. Tìm môđun của số phức z thỏa mãn: $\left(1-3i\right)z+3i=7i-2$.

$A.\left|z\right|=1$ $B.\left|z\right|=4$ $C.\left|z\right|=\sqrt{2}$ $D.\left|z\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

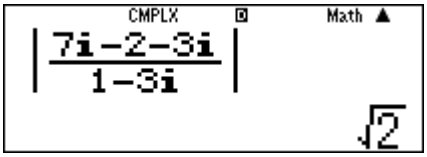
Hướng dẫn:

Ta chuyển z về dạng: $z=\dfrac{7i-2-3i}{1-3i}$ và tìm môđun.

Quy trình bấm máy:

Qca7bp2p3bR1p3b=

Màn hình hiển thị:



>>> **Chọn C**.

Câu 2. Cho số phức z thỏa mãn $(3-i)(z+1)+(2-i)(\bar{z}+3i)=1-i.$ Tìm môđun của số phức $w=\dfrac{i-z}{1+z}$.

$A.\dfrac{\sqrt{82}}{4}$ $B.\dfrac{\sqrt{82}}{8}$ $C.\dfrac{2\sqrt{82}}{9}$ $D.\dfrac{3\sqrt{82}}{5}$

Hướng dẫn:

Ở đây là sẽ cho phím X sẽ là đại diện cho số phức z.

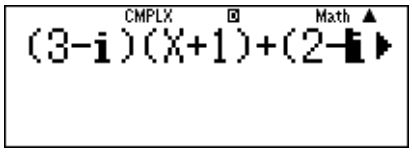
Đây là phương trình bậc nhất của số phức.

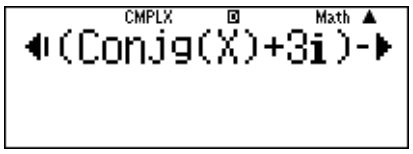
Bước 1: Các em nhập lại phương trình này với máy tính lần lượt như sau:

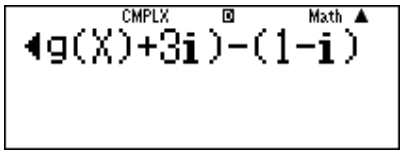
$(3-i)(\mathrm{X}+1)+(2-i)(\mathrm{Conj}g(X)+3i)-(1-i)$

(3pb)(Q)+1)+(2pb)(q22Q))+3b)p(1pb)

Màn hình hiển thị:







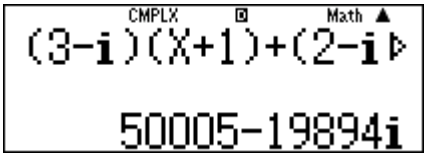
Bước 2:

Tìm số phức $z=a+bi$ nghĩa là đi tìm a và b.

Ta sẽ cho trước a=10000 và b=100 rồi từ đó suy ngược lại mối quan hệ của a và b bằng 1 hệ phương trình 2 ẩn theo a và b, lúc đó tìm được a và b.

Cho $z=10000+100i$ bằng cách nhập r10000+100b=

Màn hình sẽ cho kết quả:



Nghĩa là:

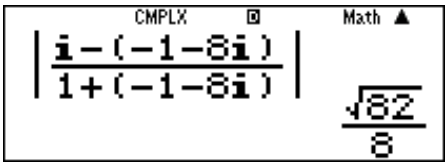
$(3-i)(z+1)+(2-i)(\bar{z}+3i)-(1-i)=50005+19894i=5a+5+(2a-b+6)i$.

Cho nên:

$$(3-i)(z+1)+(2-i)(\bar{z}+3i)-(1-i)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5a+5=0\\2a-b-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5a+5=0\\2a-b=6\end{cases}\Rightarrow a=-1,b=8\rightarrow z=-1-8i$$

Từ đó tính môđun của ω :



>>> **Chọn B.**

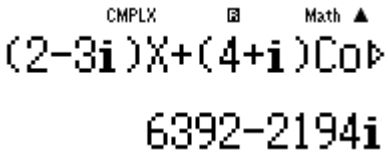
Câu 3. Cho số phức $z = a + bi$ thỏa mãn điều kiện $(2-3i)z+(4+i)\overline{z}=-(1+3i)^2$ .Tìm $P = 2a + b$

A.3 **B**.-1 **C**.1 **D**. Đáp án khác

Giải:

- Phương trình $\Leftrightarrow (2-3i)z+(4+i)\overline{z}+(1+3i)^2=0$
- Nhập vế trái vào máy tính Casio và CALC với $X = 1000 + 100i$

(2 p 3 b) Q) + (4 + b) q 2 2 Q))
+ (1 + 3 b) d r 1 0 0 0 + 1 0 0 b =



Vậy vế trái $= 6392 - 2194i$ với

$$\begin{cases}6392 = 6.1000 + 4.100 - 8 = 6a + 4b - 8\\2194 = 2.1000 + 2.100 - 6 = 2a + 2b - 6\end{cases}$$

- Để vế trái $= 0$ thì $\begin{cases}6a + 4b - 8 = 0\\2a + 2b - 6 = 0\end{cases} \Leftrightarrow a = -2; b = 5$

Vậy $z = -2 + 5i \Rightarrow P = 2a + b = 1 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C.**

4. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC

Câu 1. Các điểm M,N,P lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $z_1=\dfrac{4i}{i-1}$; $z_2=\left(1-i\right)\left(1+2i\right)$; $z_3=-1+2i$

A. Tam giác vuông **B**.Tam giác cân **C**.Tam giác vuông cân **D**.Tam giác

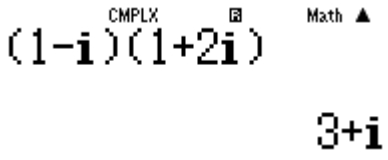
Hướng dẫn:

- Rút gọn z_1 bằng Casio a 4 b R b p 1 =



Ta được $z_1=2-2i$ vậy điểm $M\left(2;-2\right)$

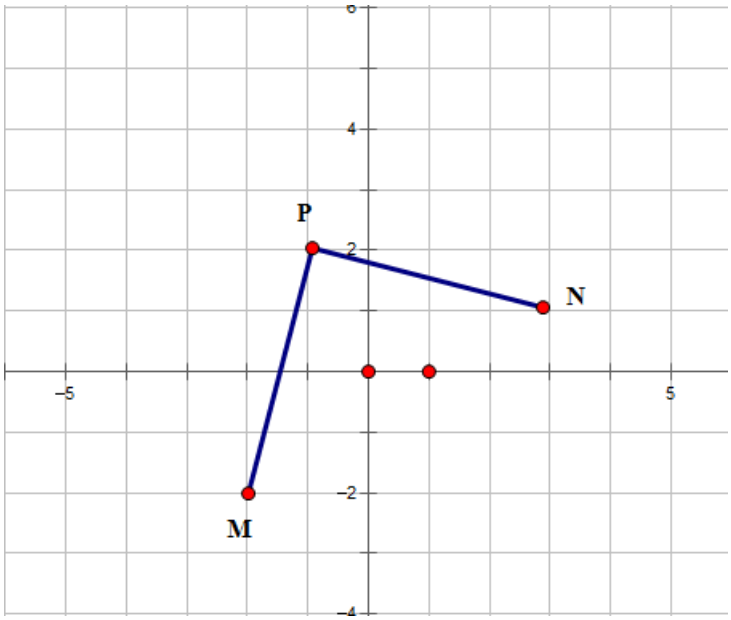
- Rút gọn z_2 bằng Casio (1 p b) (1 + 2 b) =



Ta được $z_2=3+i$ vậy điểm $N\left(3;1\right)$

Tương tự $z_2=-1+2i$ và điểm $P\left(-1;2\right)$

- Để phát hiện tính chất của tam giác MNP ta nên biểu diễn 3 điểm M,N,P trên hệ trục tọa độ



Dễ thấy tam giác MNP vuông cân tại P $\Rightarrow$ đáp án **C** chính xác

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi M là điểm biểu diễn số phức $z=3-4i$, điểm M' là điểm biểu diễn số phức $z'=\dfrac{1+i}{2}z$. Tính diện tích $\Delta OMM'$

A. $S_{\Delta OMM'}=\dfrac{25}{4}$ **B.** $S_{\Delta OMM'}=\dfrac{25}{2}$ **C.** $S_{\Delta OMM'}=\dfrac{15}{4}$ **D.** $S_{\Delta OMM'}=\dfrac{15}{2}$

Hướng dẫn:

- Điểm M biểu diễn số phức $z_1=3-4i\Rightarrow$ tọa độ $M\left(3;-4\right)$

  Điểm M' biểu diễn số phức $z'=\dfrac{1+i}{2}z\Rightarrow$ tọa độ $N\left(\dfrac{7}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$

  a 1 + b R 2 $ O (3 p 4 b) =

  CMPLX Math

  $\frac{1+i}{2}\times(3-4i)$

  $\frac{7}{2}-\frac{1}{2}i$

  Gốc tọa độ $O\left(0;0\right)$

- Để tính diện tích tam giác OMM' ta ứng dụng tích có hướng của 2 vecto trong không gian. Ta thêm cao độ 0 cho tọa độ mỗi điểm O,M,M' là xong

  $\overrightarrow{OM}\left(3;-4;0\right)$, $\overrightarrow{OM'}\left(\dfrac{7}{2};-\dfrac{1}{2};0\right)\Rightarrow S=\dfrac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right]\right\|$

  Tính $\left\|\left[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right]\right\|$

  w 8 1 1 3 = p 4 = 0 = q 5 1 2 1 7 P 2 =
  p 1 P 2 = 0 = C q 5 3 q 5 7 q 5 4 =

  VCT

  VctA·VctB

  12.5

  Vậy $\left\|\left[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right]\right\|=12.5=\dfrac{25}{2}\Rightarrow S_{OMM'}=\dfrac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}\right]\right\|=\dfrac{25}{4}$

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRÊN TẬP SỐ PHỨC

Câu 1. Giải phương trình bậc hai sau: $z^2+2z+3=0$.

Giải:

Biệt thức $\Delta = 2^2 - 4.1.3 = -8 = 8i^2$. Phương trình có 2 nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i; \qquad z_2 = \frac{-2-4i}{2} = -1-2i.$$

Câu 2. Giải phương trình bậc hai sau: $z^2+2z+4i-2=0$.

Giải:

Biệt thức: $\Delta = 2^2 - 4.1.(4\,\mathrm{i} - 2) = 4 - 16i + 8 = 12 - 16i = 16 - 2.4.2i + 4i^2 = (4-2i)^2$.

Chọn $\sigma = 4-2i$. Phương trình trên có hai nghiệm là :

$$z_1 = \frac{-B+\sigma}{2A} = \frac{-2+4-2i}{2} = 1-\mathrm{i}; \quad z_2 = \frac{-B-\sigma}{2A} = \frac{-2-4+2i}{2} = -3+i.$$

ĐƯA PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO VỀ NHỮNG PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI.

- **Bước 1:**
  Để đưa phương trình thành nhân tử thì ta phải nhẩm nghiệm của phương trình. Có các cách nhẩm nghiệm như sau:
  - Tổng các hệ số của phương trình bằng 0 thì nghiệm của phương trình là $x=1$.
  - Tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng hệ số bậc lẻ thì nghiệm của phương trình $x=-1$.
  - <u>Định lý Bézout:</u>

    Phần dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho $x-a$ bằng giá trị của đa thức $f(x)$ tại $x-a$. Tức là $f(x)=(x-a)g(x)-f(a)$

    Hệ quả: Nếu $f(a)=0$ thì $f(x)\vdots(x-a)$.

    Nếu $f(x)\vdots(x-a)$ thì $f(a)=0$.
  - <u>Sử dụng máy tính Casio để nhẩm nghiệm:</u>
    - Nhập phương trình vào máy tính.
    - Bấm phím r rồi nhập 1 giá trị X bất kỳ, máy tính sẽ cho ra nghiệm của phương trình. Sau đó dùng sơ đồ hoocne để phân tích thành nhân tử.
  - <u>Sơ đồ Hoocne:</u>

  Với đa thức f(x) = $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ chia cho x - a thương là g(x) = $b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-3}x^{n-3} + \ldots + b_1 x + b_0$ dư r.

  Nếu $r=0$ thì $f(x)\vdots g(x)$, nghĩa là: $f(x)=(x-a)g(x)$.

  Ta đi tìm các hệ số $b_{n-1}, b_{n-2}, b_{n-3} \ldots b_1, b_0$ bằng bảng sau đây.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	.. .	a_2	a_1	a_0
a	$b_{n-1}=a_n$	$b_{n-2}=ab_{n-1}+a_{n-1}$	$b_{n-3}=ab_{n-2}+a_{n-2}$		$b_1=ab_2+a_2$	$b_0=ab_1+a_1$	$r=ab_0+a_0$

- **Bước 2:** Giải phương trình bậc nhất hoặc phương trình hai số phức, kết luận nghiệm.

Câu 1. Giải các phương trình: $z^3-27=0$.

<u>Giải:</u>

$z^3-27=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+3z+9)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z_{2,3}=\dfrac{-3\pm 3\sqrt{3}i}{2} \end{array}\right.$. Vậy p/t đã cho có 3 nghiệm.

Câu 2. Giải phương trình sau: $z^3-3(1+2i)z^2+(-3+8i)z+5-2i=0.$

<u>Giải:</u>

Nhẩm nghiệm: Ta thấy tổng các hệ số của phương trình bằng 0 nên phương trình có nghiệm $z=1$.
Khi đó:

$z^3-3\left(1+2i\right)z^2+\left(-3+8i\right)z+5-2i=0\Leftrightarrow\left(z-1\right)\left[z^2-2\left(1+3i\right)z+2i-5\right]=0$

$\Leftrightarrow z=1\ \ v\ \ z=i\ \ \text{v}\ \ z=2+5i.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là : $z=1$; $z=i$; $z=2+5i.$

Câu 3. Cho phương trình sau: $z^3+\left(2-2i\right)z^2+\left(5-4i\right)z-10i=0\left(1\right)$ biết rằng phương trình có nghiệm thuần ảo.

Giải:

Đặt $z=yi$ với $y\in\mathbb{R}$. Phương trình (1) trở thành:

$\left(iy\right)^3+\left(2i-2\right)\left(yi\right)^2+\left(5-4i\right)\left(yi\right)-10i=0\Leftrightarrow -iy^3-2y^2+2iy^2+5iy+4y-10i=0=0+0i$

Đồng nhất hoá hai vế ta được: $\begin{cases}-2y^2+4y=0\\-y^3+2y^2+5y-10=0\end{cases}$

Giải hệ này ta được nghiệm duy nhất $y=2$.

Suy ra phương trình (1) có nghiệm thuần ảo $z=2i$.

* Vì phương trình (1) nhận nghiệm $2i$.

$\Rightarrow$ về trái của (1) có thể phân tích dưới dạng:

$z^3+\left(2-2i\right)z^2+\left(5-4i\right)z-10i=\left(z-2i\right)\left(z^2+az+b\right)\ \ (a,b\in\mathbb{R})$ đồng nhất hoá hai vế ta giải được $a=2$ và $b=5$.

$\Rightarrow\left(1\right)\Leftrightarrow\left(z-2i\right)\left(z^2+2z+5\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}z=2i\\z^2+2z+5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=2i\\z=-1-2i\\z=-1+2i\end{cases}$

Vậy phương trình (1) có 3 nghiệm.

Câu 4. Giải $z^3-\left(3-i\right)z^2-\left(2-i\right)z+16-2i=0$ biết rằng phương trình có 1 nghiệm thực.

Giải :

Gọi nghiệm thực là z_0 ta có:

$z_0^3-\left(3-i\right)z_0^2-\left(2-i\right)z_0+16-2i=0\Leftrightarrow\begin{cases}z_0^3-3z_0^2-2z_0+16=0\\z_o^2+z_0-2=0\end{cases}\Leftrightarrow z_0=-2$

Khi đó ta có phương trình $\left(z+2\right)\left(z^2-\left(5-i\right)z+8-i\right)=0$

Tìm được các nghiệm của phương trình là $z=-2$; $z=2+i$; $z=3-2i$.

Câu 5. Giải phương trình $z^3-\left(2-3i\right)z^2+3\left(1-2i\right)z+9i=0$ biết rằng phương trình có một nghiệm thuần ảo.

Giải:

Giả sử phương trình có nghiệm thuần ảo là $bi,\ \ b\in\mathbb{R}$.

Thay vào phương trình ta được:

$\left(bi\right)^3-\left(2-3i\right)\left(bi\right)^2+3\left(1-2i\right)\left(bi\right)+9i=0$

$\Leftrightarrow 2b^2+6b+\left(-b^3-3b^2+3b+9\right)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}2b^2+6b=0\\-b^3-3b^2+3b+9=0\end{cases}\Leftrightarrow b=-3\Rightarrow z=-3i$

Phương trình có thể phân tích thành $\left(z+3i\right)\left(z^2-2z+3\right)=0$

Các nghiệm của phương trình là $z=-3i$; $z=1\pm\sqrt{2}i$.

Câu 6. Gọi $z_1;z_2;z_3;z_4$ là 4 nghiệm phức của phương trình $z^4+\left(4+m\right)z^2+4m=0\ \ (1)$. Tìm tất cả các giá trị m để $\left|z_1\right|+\left|z_2\right|+\left|z_3\right|+\left|z_4\right|=6.$

Giải:

$z^4+\left(4+m\right)z^2+4m=0\Leftrightarrow\left(z^2+4\right)\left(z^2+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_{1,2}=\pm2i\\z_{3,4}=\pm\sqrt{-m}\end{array}\right.$

Nếu $m<0$ thì (1) có nghiệm là $\left[\begin{array}{l}z_{1,2}=\pm2i\\z_{3,4}=\pm\sqrt{-m}\end{array}\right.$.

Khi đó $\left\{\begin{array}{l}6=\left|z_1\right|+\left|z_2\right|+\left|z_3\right|+\left|z_4\right|=4+2\sqrt{-m}\\m<0\end{array}\right.\Leftrightarrow m=-1$.

Nếu $m\geq0$ thì (1) có nghiệm là $\left[\begin{array}{l}z_{1;2}=\pm2i\\z_{3;4}=\pm i\sqrt{m}\end{array}\right.$

Khi đó $\left\{\begin{array}{l}6=\left|z_1\right|+\left|z_2\right|+\left|z_3\right|+\left|z_4\right|=4+2\sqrt{m}\\m\geq0\end{array}\right.\Leftrightarrow m=1$. Kết hợp lại $m=\pm1$ thỏa mãn bài toán.

Câu 7. Cho phương trình $4z^4+mz^2+4=0$ trong tập số phức và m là tham số thực. Gọi z_1,z_2,z_3,z_4 lần lượt là 4 nghiệm của phương trình đã cho. Tìm tất cả các giá trị của m để $\left(z_1^{\ 2}+4\right)\left(z_2^{\ 2}+4\right)\left(z_3^{\ 2}+4\right)\left(z_4^{\ 2}+4\right)=324$.

Giải:

Cách 1:

Đặt $t=z^2$, phương trình trở thành: $4t^2+mt+4=0$ có 2 nghiệm t_1,t_2.

Ta có: $\left\{\begin{array}{l}t_1+t_2=-\dfrac{m}{4}\\t_1.t_2=1\end{array}\right.$. Do vai trò bình đẳng, giả sử ta có: $z_1^{\ 2}=z_2^{\ 2}=t_1,z_3^{\ 2}=z_4^{\ 2}=t_2$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\left(t_1+4\right)^2\left(t_2+4\right)^2=324\Leftrightarrow\left[t_1t_2+4\left(t_1+t_2\right)+16\right]^2=324$.

$\Leftrightarrow\left(-m+17\right)^2=18^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-m+17=18\\-m+17=-18\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=35\end{array}\right.$.

Cách 2:

Đặt $f\left(z\right)=4\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)\left(z-z_3\right)\left(z-z_4\right)$.

Do $z_1^{\ 2}+4=\left(z_1+2i\right)\left(z_1-2i\right)$ nên $\left(z_1^{\ 2}+4\right)\left(z_2^{\ 2}+4\right)\left(z_3^{\ 2}+4\right)\left(z_4^{\ 2}+4\right)=\dfrac{f\left(2i\right)}{4}.\dfrac{f\left(-2i\right)}{4}\ \ \left(*\right)$

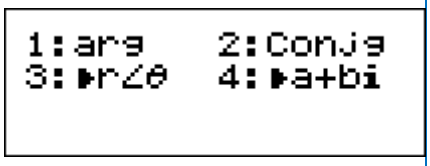
Mà $f\left(2i\right)=f\left(-2i\right)=4\left(2i\right)^4+m\left(2i\right)^2+4=68-4m.$

Vậy $\left(*\right)\Leftrightarrow324=\dfrac{\left(68-4m\right)^2}{4.4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=35\end{array}\right.$.

SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO 570VN-PLUS ĐỂ GIẢI

Để thực hiện các phép toán trên tập số phức, ta chuyển qua chế độ CMPLX bằng cách bấm w2.

- Bấm đơn vị ảo i bằng cách bấm phím b
- Bấm q2 và lựa chọn các chức năng:



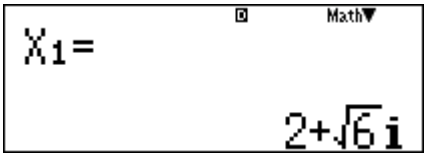
- Chọn 1 để bấm acgumen của z $\left(\arg\left(z\right)\right)$.
- Chọn 2 để bấm số phức liên hợp của z $\left(Conjg\left(z\right)\right)$.
- Chọn 3 để chuyển từ dạng đại số sang dạng lượng giác.
- Chọn 4 để chuyển từ dạng lượng giác sang dạng đại số.
- Bấm dấu $\angle$ bằng cách bấm: qz

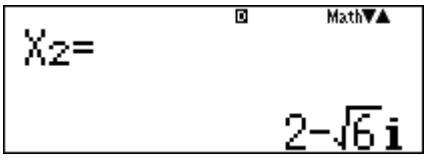
Câu 1. Giải phương trình bậc hai sau: $z^2-4z+10=0$.

Hướng dẫn:

Quy trình bấm: w531=p4=10==

Thu được kết quả:





Câu 2. Gọi z_1,z_2 là 2 nghiệm của phương trình : $z^2+z+1=0$. Tính $P=z_1^{2018}+z_2^{2018}$.

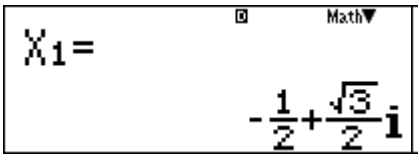
Hướng dẫn :

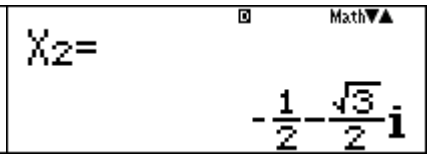
Quy trình bấm như sau:

- Tìm nghiệm z_1,z_2

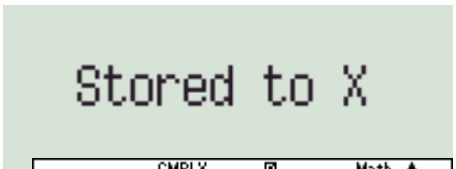
w531=1=1==

Thu được kết quả:





- Lưu 2 nghiệm vào X và Y:
- Màn hình hiển thị là đã lưu biến X thành công, tương tự biến Y.



- Tính P .
- Sau đó vào w2 và nhập P và thu được kết quả:



Sau đây là Bài toán 3 tương tự Bài toán 2 nhưng giải theo dạng lượng giác của số phức. Cách này luôn giải được với số mũ lớn bất kỳ, cách giải theo Bài toán 2 có thể không giải được với số mũ lớn nào đó.

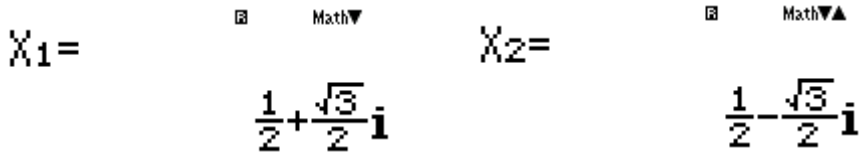
Câu 3. Biết z là nghiệm của phương trình $z+\frac{1}{z}=1$. Tính giá trị biểu thức $P=z^{2009}+\frac{1}{z^{2009}}$

A. $P=1$ **B.** $P=0$ **C.** $P=-\frac{5}{2}$ **D.** $P=\frac{7}{4}$

Hướng dẫn:

- Quy đồng phương trình $z+\frac{1}{z}=0$ ta được phương trình bậc hai $z^2-z+1=0$. Tính nghiệm phương trình này với chức năng MODE 5 3

  w 5 3 1 = p 1 = 1 = =



- Ta thu được hai nghiệm z nhưng hai nghiệm này có vai trò như nhau nên chỉ cần lấy một nghiệm z đại diện là được

  Với $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ta chuyển về dạng lượng giác $\Rightarrow z=1\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

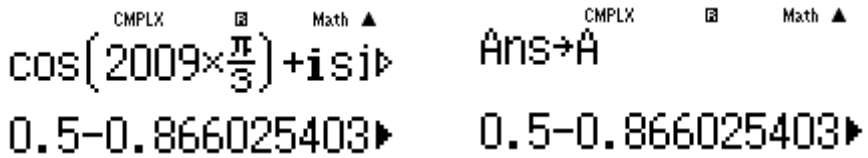
  a 1 R 2 $ + a s 3 R 2 $ b q 2 3 =



  Vậy $\Rightarrow z^{2009}=1^{2009}\left(\cos 2009.\frac{\pi}{3}+i\sin 2009.\frac{\pi}{3}\right)=\left(\cos 2009.\frac{\pi}{3}+i\sin 2009.\frac{\pi}{3}\right)$

  Tính z^{2009} và lưu và biến A

  W k 2 0 0 9 O a q K R 3 $) + b j 2 0 0 9 O a q K R 3 $) = q J z



  Tổng kết $P=A+\frac{1}{A}=1$

  Q z + a 1 R Q z =



  $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

TẬP HỢP ĐIỂM CỦA SỐ PHỨC

Trong dạng này, ta gặp các bài toán biểu diễn hình học của số phức hay còn gọi là tìm tập hợp điểm biểu diễn một số phức z trong đó số phức z thỏa mãn một hệ thức nào đó. Khi đó ta giải bài toán này như sau:

1. Phương pháp tổng quát:

Đặt $z = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó số phức z biểu diễn trên mặt phẳng phức bởi điểm $M(x;y)$. Biến đổi điều kiện của bài toán thành để tìm mối liên hệ giữa x và y từ đó suy ra tập hợp điểm M.

2. Giả sử các điểm M, A, B lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z, a, b

- $|z-a| = |z-b| \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow$ M thuộc đường trung trực của đoạn AB
- $|z-a| = |z-b| = k(k \in \mathbb{R}, k > 0, k > |a-b|) \Leftrightarrow MA + MB = k \Leftrightarrow M \in (E)$ nhận A, B là hai tiêu điểm và có độ dài trục lớn bằng *k*.

3. Giả sử M và M' lần lượt là điểm biểu diễn của số phức *z* và *w = f(z)*

Đặt $z = x + yi$ và $w = u + vi \ (x, y, u, v \in \mathbb{R})$.

Hệ thức $w = f(z)$ tương đương với hai hệ thức liên hệ giữa *x, y, u, v*

- Nếu biết một hệ thức giữa *x, y* ta tìm được một hệ thức giữa *u, v* và suy ra được tập hợp các điểm M'
- Nếu biết một hệ thức giữa *u, v* ta tìm được một hệ thức giữa *x, y* và suy ra được tập hợp điểm M'.

1. Các dạng phương trình đường thẳng

- Dạng tổng quát: $ax + by + c = 0$.
- Dạng đại số: $y = ax + b$.
- Dạng tham số: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$
- Dạng chính tắc: $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$.
- Phương trình đoạn chắn $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.
- Phương trình đường thẳng đi qua 1 điểm $M_0(x_0;y_0)$ biết hệ số góc *k*: $y = k(x - x_0) + y_0$

2. Phương trình đường tròn tâm I(a;b) bán kính R:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $c = a^2 + b^2 - R^2$

Lưu ý điều kiện để phương trình: $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ là phương trình đường tròn: $a^2 + b^2 - c > 0$ có tâm $I(-a,-b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

3. Phương trình (Elip): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Với hai tiêu cự $F_1(-c;0), F_2(c;0), F_1F_2 = 2c$. Trục lớn *2a*, trục bé *2b* và $a^2 = b^2 + c^2$.

Câu 1. Giả sử M là điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn số phức z. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn một trong các điều kiện sau đây:

a) $|z-1+i| = 2$ b) $|z+1-3i| \le 4$ c) $|2+z| = |1-i|$

Giải:

Đặt $z = x + yi\ (x, y \in \mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M\left(x; y\right)$

a) Xét hệ thức: $\left|z - 1 + i\right| = 2$.

$\Leftrightarrow \left|\left(x - 1\right) + \left(y + 1\right)i\right| = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x-1\right)^2 + \left(y+1\right)^2} = 2.$

$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2 + \left(y+1\right)^2 = 4.$

$\Rightarrow$ Tập hợp các điểm $M\left(z\right)$ trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z thỏa mãn (1) là đường tròn có tâm tại $I\left(1;-1\right)$ và bán kính $R = 2$.

b) Xét hệ thức : $\left|z + 1 - 3i\right| \le 4 \Leftrightarrow \left|\left(x+1\right) + \left(y-3\right)i\right| \le 4$

$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x+1\right)^2 + \left(y-1\right)^2} \le 4$

$\Leftrightarrow \left(x+1\right)^2 + \left(y-1\right)^2 \le 16.$

Vậy tập hợp các điểm M trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z là hình tròn có tâm là $\left(-1;1\right)$; bán kính $r = 4$.

Nhận xét: Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện: $\left|z + 1 - 3i\right| \ge 4$ là tập hình các điểm nằm trên và nằm ngoài đường tròn có tâm là $\left(-1;1\right)$; bán kính $r = 4$.

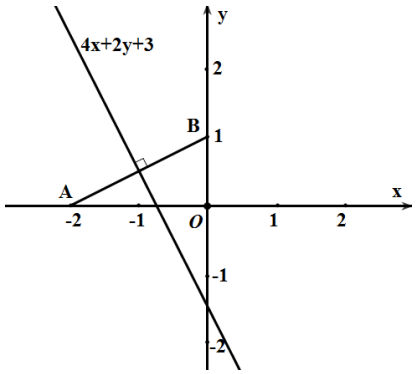
c) Xét hệ thức: $\left|2 + z\right| = \left|z - i\right|$

$\Leftrightarrow \left|\left(x+2\right) + yi\right| = \left|x + \left(y-1\right)i\right|$

$\Leftrightarrow \left(x+2\right)^2 + y^2 = x^2 + \left(y-1\right)^2$

$\Leftrightarrow 4x + 2y + 3 = 0.$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng $4x + 2y + 3 = 0.$



Nhận xét: Đường thẳng $4x + 2y + 3 = 0$ chính là đường trung trực của đoạn AB.

Câu 2. Trong mặt phẳng Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\left|z - i\right| = \left|\left(1+i\right)z\right|$.

Giải:

Đặt $z = x + yi\ (x, y) \in \mathbb{R}.$

Ta có:

$\left|z - i\right| = \left|\left(1+i\right)z\right| \Leftrightarrow \left|x + \left(y-1\right)i\right| = \left|\left(x-y\right) + \left(x+y\right)i\right|$

$\Leftrightarrow x^2 + \left(y-1\right)^2 = \left(x-y\right)^2 + \left(x+y\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y+1\right)^2 = 2$

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn các số phức z là đường tròn có phương trình $x^2 + \left(y+1\right)^2 = 2$.

Câu 3. Cho các số phức $z_1,\ z_2,\ z_3$ có biểu diễn trên mặt phẳng phức là ba đỉnh của tam giác đều có phương trình đường tròn ngoại tiếp là $\left(x+2017\right)^2+\left(y-2018\right)^2=1.$ Tổng phần thực và phần ảo của số phức $w=z_1+z_2+z_3$ bằng?

Giải:

Đường tròn đã cho có tâm I biểu diễn số phức $z=-2017+2018i$.

Gọi $A,\ B,\ C$ lần lượt là điểm biểu diễn các số phức $z_1,\ z_2,\ z_3$.

Ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}=3\overrightarrow{OI}$ (do tam giác ABC đều nên $G\equiv I$).

Suy ra $z_1+z_2+z_3=3\left(-2017+2018i\right)=-6051+6054i$.

Nên tổng phần thực và phần ảo của số phức w bằng 3.

Câu 4. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z sao cho $u=\dfrac{z+2+3i}{z-i}$ là một số thuần ảo.

Giải :

Đặt $z=x+yi\ (x,y)\in\mathbb{R}$, khi đó:

$$u=\frac{\left(x+2\right)+\left(y+3\right)i}{x+\left(y-1\right)i}=\frac{\left[\left(x+2\right)+\left(y+3\right)i\right]\left[x-\left(y-1\right)i\right]}{x^2+\left(y-1\right)^2}$$

$$=\frac{\left(x^2+y^2+2x+2y-3\right)+2\left(2x-y+1\right)i}{x^2+\left(y-1\right)^2}$$

u là số thuần ảo $\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+2x+2y-3=0\\x^2+\left(y-1\right)^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x+1\right)^2+\left(y+1\right)^2=5\\\left(x;y\right)\neq\left(0;1\right)\end{cases}$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của z là đường tròn tâm $I(-1;-1)$, bán kính $\sqrt{5}$ trừ điểm $(0;1)$.

Câu 5. Trên mặt phẳng toạ độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thoả mãn điều kiện sau:

a) $2\left|z-i\right|=\left|z-\overline{z}+2i\right|$ b) $\left|z-1\right|+\left|z+1\right|=4$

Giải:

Đặt: $z=x+yi\ (x,y\in R)\ \Rightarrow$ z có điểm biểu diễn trên mặt phẳng phức là $\mathrm{M}\left(\mathrm{x};\mathrm{y}\right)$.

a) $2\left|z-i\right|=\left|z-\overline{z}+2i\right|\Leftrightarrow2\left|x+(y-1)i\right|=\left|(1+y)i\right|\Leftrightarrow y=\dfrac{x^2}{4}$

Vậy tập hợp điểm M là đường parabol (P) có phương trình $y=\dfrac{x^2}{4}$.

b) $\left|z-1\right|+\left|z+1\right|=4\Leftrightarrow\sqrt{\left(x-1\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(x+1\right)^2+y^2}=4\quad(*)$.

Đặt $F_1(-1;0)\ ;F_2(1;0)$

$(*)\Leftrightarrow MF_1+MF_2=4$ và $F_1F_2=2$.

Suy ra tập hợp M là elíp (E) có 2 tiêu điểm là F_1,F_2.

Gọi (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad(0<b<a;\ b^2=a^2-c^2)$

Ta có $\begin{cases}MF_1+MF_2=2a\\F_1F_2=2c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\c=1\end{cases}\Rightarrow b^2=a^2-c^2=3$

Vậy (E) có phương trình $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

Câu 6. Trong tập số phức $\mathbb{C}$, gọi z_1 và z_2 các nghiệm của phương trình $z^2-2z+10=0$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 và số phức $k=x+iy$ trên mặt phẳng phức. Để tam giác MNP đều thì số phức k là?

Giải:

Ta có $z^2-2z+10=0 \Leftrightarrow z_{1,2}=1\pm 3i$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2 và số phức $k=x+iy$ trên mặt phẳng phức. Khi đó $M\left(1;3\right)$, $N\left(1;-3\right)$, $P\left(x;y\right)$

Để ΔMNP đều $\Leftrightarrow \begin{cases} MN=MP \\ MN=NP \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} MN^2=MP^2 \\ MN^2=NP^2 \end{cases}$ (1)

Ta có $\overrightarrow{MN}=\left(0;-6\right)$, $\overrightarrow{MP}=\left(x-1;y-3\right)$, $\overrightarrow{NP}=\left(x-1;y+3\right)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} \left(x-1\right)^2+\left(y-3\right)^2=36 \\ \left(x-1\right)^2+\left(y+3\right)^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1\pm\sqrt{27} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow k=1\pm\sqrt{27}$.

Câu 7. Trong mặt phẳng phức, cho m và M theo thứ tự là điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi$ và $Z=\frac{z-1}{z+2i}$. Tìm tập hợp các điểm m sao cho: Z là một số thực.

Giải:

Ta có: $Z=\frac{z-1}{z+2i}=\frac{\left(x+yi\right)-1}{\left(x+yi\right)+2i}=\frac{x-1+yi}{x+\left(y+2\right)i}=\frac{\left(x-1+yi\right)\left(x-\left(y+2\right)i\right)}{\left(x+\left(y+2\right)i\right)\left(x-\left(y+2\right)i\right)}$

$\Rightarrow Z=\frac{x\left(x-1\right)+y\left(y+2\right)+\left(y-2x+2\right)i}{x^2+\left(y+2\right)^2}$

Z là một số thực khi và chỉ khi $y-2x+2=0$.

Tập hợp các điểm m biểu diễn số phức $z=x+yi$ là đường thẳng $y-2x+2=0 \Leftrightarrow y=2x-2$

Câu 8. Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|z-i\right|+\left|z+i\right|=4$ là?

Giải:

Ta có $\left|z-i\right|+\left|z+i\right|=4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+\left(y-1\right)^2}+\sqrt{x^2+\left(y+1\right)^2}=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+\left(y-1\right)^2}=4-\sqrt{x^2+\left(y+1\right)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+\left(y+1\right)^2}\le 4 \\ x^2+\left(y-1\right)^2=16+x^2+\left(y+1\right)^2-8\sqrt{x^2+\left(y+1\right)^2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\left(y+1\right)^2\le 16 \\ 2\sqrt{x^2+\left(y+1\right)^2}=y+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\left(y+1\right)^2\le 16 \\ y\ge -4 \\ 4x^2+3y^2=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\left(y+1\right)^2\le 16 & (1) \\ y\ge -4 & (2) \\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1 & (3) \end{cases}$.

Tập hợp các điểm thỏa mãn (3) đều thỏa mãn (1) và (2).

Vậy tập hợp những điểm M là elip $(E):\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1.$

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+2$ là một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

Giải:

Cách 1:

Ta có: $w=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+2\Rightarrow z=\dfrac{w-2}{1+\sqrt{3}i}\Rightarrow z-1=\dfrac{w-3-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$

Suy ra $|z-1|=\left|\dfrac{w-3-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\right|=\dfrac{\left|w-3-\sqrt{3}i\right|}{\left|1+\sqrt{3}i\right|}\Leftrightarrow 2=\dfrac{\left|w-3-\sqrt{3}i\right|}{2}\Leftrightarrow \left|w-3-\sqrt{3}i\right|=4$

Như vậy bán kính của đường tròn là 4.

Cách 2:

Ta có: $w=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+2\Leftrightarrow w=\left(1+\sqrt{3}i\right)\left(z-1\right)+3+\sqrt{3}i\Leftrightarrow w-\left(3+\sqrt{3}i\right)=\left(1+\sqrt{3}i\right)\left(z-1\right).$

Lấy môđun hai vế ta được: $\left|w-\left(3+\sqrt{3}i\right)\right|=\left|1+\sqrt{3}i\right|.\left|z-1\right|=2.2=4$.

Câu 10. Cho các số phức z thỏa mãn $|z-1|=3.$ Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức w với $\left(3-2i\right)w=iz+2$ là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm I và bán kính r của đường tròn đó

Giải:

Ta có $\left(3-2i\right)w=iz+2\Leftrightarrow w=\dfrac{i}{3-2i}z+\dfrac{2}{3-2i}\Leftrightarrow w=\left(-\dfrac{2}{13}+\dfrac{3}{13}i\right)z+\dfrac{6}{13}+\dfrac{4}{13}i$

$\Leftrightarrow w=\left(-\dfrac{2}{13}+\dfrac{3}{13}i\right)\left(z-1\right)+\dfrac{4}{13}+\dfrac{7}{13}i\Leftrightarrow w-\left(\dfrac{4}{13}+\dfrac{7}{13}i\right)=\left(-\dfrac{2}{13}+\dfrac{3}{13}i\right)\left(z-1\right).$

Lấy môđun, hai vế ta được $\left|w-\left(\dfrac{4}{13}+\dfrac{7}{13}i\right)\right|=\underbrace{\left|-\dfrac{2}{13}+\dfrac{3}{13}i\right|}_{\frac{1}{\sqrt{13}}}.\underbrace{\left|z-1\right|}_{3}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}.$

Vậy tập hợp các số phức w thuộc đường tròn tâm $I\left(\dfrac{4}{13};\dfrac{7}{13}\right)$, bán kính $r=\dfrac{3}{\sqrt{13}}.$

<u>Nhận xét:</u> Bài này có rất nhiều cách giải tự luận nhưng cách này là tối ưu nhất. Quý thầy cô nên nghiên cứu kỹ phương pháp giải này để truyền đạt cho học sinh.

Câu 11. Cho hai số phức $z_1,\ z_2$ thỏa mãn $\left|z_1\right|=\sqrt{3}$, $\left|z_2\right|=2$ được biểu diễn trong mặt phẳng phức lần lượt là các điểm $M,\ N$. Biết góc tạo bởi giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON}$ bằng 30^0. Tính giá trị của biểu thức $A=\left|\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right|.$

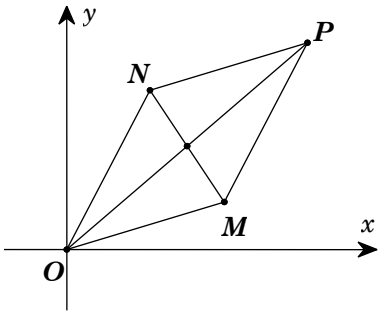
Giải:

Cách 1:

Dựng hình bình hành $OMPN$ trong mặt phẳng phức, khi đó $\begin{cases}\left|z_1+z_2\right|=OP\\ \left|z_1-z_2\right|=MN\end{cases}.$

Ta có $\begin{cases} |z_1+z_2| = \sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|\cos 30^0} = \sqrt{13} \\ |z_1-z_2| = \sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|\cos 150^0} = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \left|\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right| = \dfrac{|z_1+z_2|}{|z_1-z_2|} = \sqrt{13}$.



Nhận xét: *Thầy cô nên giải thích rõ cho học sinh hiểu tại tại lại là góc* 30^0 *và góc* 150^0.

Cách 2:

Giả sử $\begin{cases} z_1 = a_1+b_1 i \\ z_2 = a_2+b_2 i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(a_1;b_1) \\ N(a_2,b_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OM} = (a_1;b_1) \\ \overrightarrow{ON} = (a_2;b_2) \end{cases}$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} a_1^2+b_1^2 = 3 \\ a_2^2+b_2^2 = 4 \end{cases}$ và

$\cos\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right) = \cos 30^0 = \dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2 = 3.$

Ta có $A = \left|\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right| = \dfrac{|(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i|}{|(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i|} = \dfrac{\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2}}{\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}}$

$= \dfrac{\sqrt{(a_1^2+b_1^2)+(a_2^2+b_2^2)+2(a_1a_2+b_1b_2)}}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2)+(a_2^2+b_2^2)-2(a_1a_2+b_1b_2)}} = \dfrac{\sqrt{3+4+2.3}}{\sqrt{3+4-2.3}} = \sqrt{13}.$

SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO 570 VN- PLUS

Câu 1. Trên mặt phẳng Oxy tìm tập hợp biểu diễn các số phức thỏa mãn điều kiện $|zi-(2+i)|=2$

A. $x+2y-1=0$ B. $(x+1)^2+(y-2)^2=9$

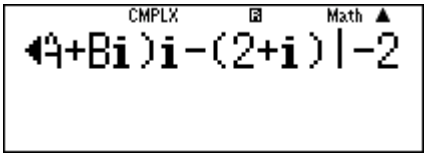
C. $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ D. $3x+4y-2=0$

Hướng dẫn:

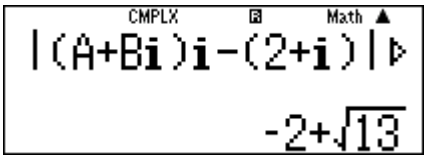
Ta giả sử: $z = A+Bi$.

Nên điều kiện của bài toán được viết lại là: $|(A+Bi)i-(2+i)|-2=0.$

- w2 và nhập điều kiện vào:



- Thử đáp án A. $x+2y-1=0x=1-2y$.
  Cho $y=1$ ta được $x=-1$.
  Nhập rp1=1=thu được kết quả khác 0.



>>> Loại đáp án A.

- Thử đáp án B. $\left(x+1\right)^2+\left(y-2\right)^2=9$.

  Cho $x=-1$ ta được $y=5$ hoặc $y=-1$.

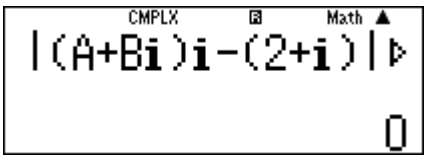
  rp1=5= ra kết quả khác 0.

  >>> Loại đáp án B

- Thử đáp án C. $\left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2=4$.

  Cho $x=1$ ta được $y=0$ và $y=-4$.

  r1=0= và r1=p4= đều được kết quả bằng 0.



Vậy đáp án đúng là **C.**

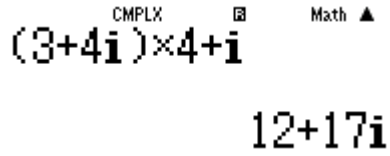
Câu 2. Cho các số phức z thỏa mãn $\left|z\right|=4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=\left(3+4i\right)z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=4$ **B.** $r=5$ **C.** $r=20$ **D.** $r=22$

Hướng dẫn:

- Để xây dựng 1 đường tròn ta cần 3 điểm biểu diễn của w , vì z sẽ sinh ra w nên đầu tiên ta sẽ chọn 3 giá trị đại diện của z thỏa mãn $\left|z\right|=4$
- Chọn $z=4+0i$ (thỏa mãn $\left|z\right|=4$). Tính $w_1=\left(3+4i\right)\left(4+0i\right)+i$

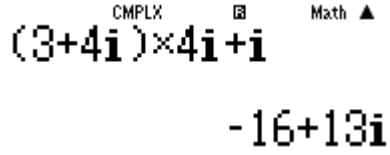
  (3 + 4 b) O 4 + b =



  Ta có điểm biểu diễn của z_1 là $M\left(12;17\right)$

- Chọn $z=4i$ (thỏa mãn $\left|z\right|=4$). Tính $w_2=\left(3+4i\right)\left(4i\right)+i$

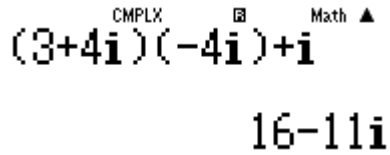
  (3 + 4 b) O 4 b + b =



  Ta có điểm biểu diễn của z_2 là $N\left(-16;13\right)$

- Chọn $z=-4i$ (thỏa mãn $\left|z\right|=4$). Tính $w_3=\left(3+4i\right)\left(-4i\right)+i$

  (3 + 4 b) (p 4 b) + b =



  Ta có điểm biểu diễn của z_3 là $P\left(16;-11\right)$

  Vậy ta có 3 điểm M,N,P thuộc đường tròn biểu diễn số phức w

- Đường tròn này sẽ có dạng tổng quát $x^2+y^2+ax+by+c=0$. Để tìm a,b,c ta sử dụng máy tính Casio với chức năng MODE 5 3

  w 5 2 1 2 = 1 7 = 1 = p 1 2 d p 1 7 d = p 1 6 = 1 3 = 1 = p 1 6 d p 1 3 d = 1 6 = p 1 1 = 1 = p 1 6 d p 1 1 d = =

  Vậy phương trình đường tròn biểu diễn số phức w là:

  $$x^2+y^2-2y-399=0 \Leftrightarrow x^2+\left(y-1\right)^2=20^2.$$

  Bán kính đường tròn tập hợp điểm biểu diễn số phức w là $20 \Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C.**

Câu 3. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $2\left|z-1\right|=\left|z-\bar{z}+2i\right|$ là một Parabol có dạng:

A. $y=3x^2-6x+2$ **B.** $y=\dfrac{x^2}{2}-x$ **C.** $y=\dfrac{x^2}{3}-4$ **D.** $y=x^2+2x+\dfrac{1}{3}$

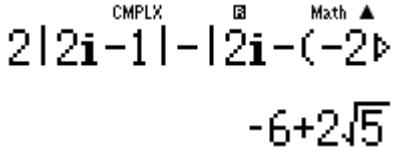
Hướng dẫn:

- Đặt số phức $z=x+yi$.
- Nếu đáp số A đúng thì đúng với mọi $z=x+yi$ thỏa mãn $y=3x^2-6x+2$.

  Chọn một cặp $\left(x;y\right)$ bất kì thỏa $y=3x^2-6x+2$ ví dụ $A\left(0;2\right) \Rightarrow z=2i$

  Xét hiệu $2\left|z-1\right|-\left|z-\bar{z}+2i\right|$

  2 q c 2 b p 1 $ p q c 2 b p (p 2 b) + 2 b =

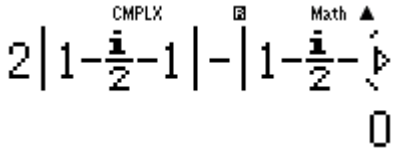
  

  Vậy $2\left|z-1\right|-\left|z-\bar{z}+2i\right|=-6+2\sqrt{5}\neq 0$

  $\Rightarrow 2\left|z-1\right|\neq\left|z-\bar{z}+2i\right| \Rightarrow$ Đáp số **A** sai

- Tương tự với đáp số B chọn $z=1-\dfrac{1}{2}i$. Xét hiệu $2\left|z-1\right|-\left|z-\bar{z}+2i\right|$

  2 q c 1 p a b R 2 $ p 1 $ p q c 1 p a b R 2 $ p (1 + a b R 2 $) + 2 b =

  Vậy $2\left|z-1\right|-\left|z-\bar{z}+2i\right|=0 \Rightarrow 2\left|z-1\right|=\left|z-\bar{z}+2i\right| \Rightarrow$ Đáp số **B** chính xác.

D. BÀI TOÁN CỰC TRỊ CỦA SỐ PHỨC

I. PHƯƠNG PHÁP QUY VỀ TÌM MIN-MAX CỦA HÀM MỘT BIẾN KẾT HỢP SỬ DỤNG TÍNH CHẤT CỦA SỐ PHỨC.

Bài toán: Trong các số phức z thoả mãn điều kiện T. Tìm số phức z để biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất, lớn nhất.

Phương pháp tổng quát: Đặt $z = x + yi \ \left(x;y \in \mathbb{R}\right)$.

Từ điều kiện T, biến đổi để tìm cách rút ẩn rồi thế vào biểu thức P để được hàm một biến. Tìm giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) tuỳ theo yêu cầu bài toán của hàm số một biến vừa tìm được.

Sử dụngcác tính chất và các bất đẳng thức về môđun của số phức sau để giải quyết các bài toán min-max:

- $\overline{z} = z$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$
- $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

- $\left|z\right| \geq 0; \left|z\right| = 0 \Leftrightarrow z = 0;$
- $\left|z^2\right| = \left|z\right|^2, \ \left|-z\right| = \left|z\right|, \ \left|\overline{z}\right| = \left|z\right|$
- $\left|z_1 + z_2\right| \leq \left|z_1\right| + \left|z_2\right|$
- $\left|\left|z\right| - \left|z'\right|\right| \leq \left|z - z'\right| \leq \left|z\right| + \left|z'\right|$
- $\left|z_1.z_2\right| = \left|z_1\right|.\left|z_2\right|$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|}$

Kết hợp sử dụng các bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình nhân, BĐT Bunhia- Cốpxki.

- **Bất đẳng thức Bunhiacopxki** :Cho các số thực a,b,x,y ta luôn có

  $\left(ax + by\right)^2 \leq \left(a^2 + b^2\right)\left(x^2 + y^2\right)$. Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

- **Bất đẳng thức Vectơ** : Cho 2 vecto $\vec{u}\left(x;y\right)$ và $\vec{v}\left(x';y'\right)$ ta luôn có $\left|\vec{u}\right| + \left|\vec{v}\right| \geq \left|\overrightarrow{u + v}\right|$

  $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2} \geq \sqrt{\left(x - x'\right)^2 + \left(y - y'\right)^2}$

  Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} < 0$

Câu 1. Trong các số phức z thoả mãn điều kiện $\left|z + 1 - 5i\right| = \left|\overline{z} + 3 - i\right|$, tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

Giải:

Gọi $z = x + yi \quad \left(x;y \in \mathbb{R}\right)$.

$\left|z + 1 - 5i\right| = \left|\overline{z} + 3 - i\right| \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y+1)^2}$

$\Leftrightarrow x + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4 - 3y$.

$\left|z\right| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(4-3y)^2 + y^2} = \sqrt{10y^2 - 24y + 16} = \sqrt{10\left(y - \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{8}{5}} \geq \frac{2\sqrt{10}}{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi $y=\frac{6}{5}\Rightarrow x=\frac{2}{5}$.

Vậy $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ khi $z=\frac{2}{5}+\frac{6}{5}i$. Vậy $z=\frac{2}{5}+\frac{6}{5}i$ là số phức cần tìm.

Câu 2. Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=m^2+2m+5$, với m là tham số thực. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(3-4i)z-2i$ là một đường tròn. Bán kính nhỏ nhất của đường tròn đó bằng?

Giải :

Cách 1 : Gọi $w=x+yi$.

Từ giả thiết, ta có $x+yi=(3-4i)z-2i\Rightarrow z=\frac{x+(y+2)i}{3-4i}=\frac{3x-4y-8}{25}+\frac{4x+3y+6}{25}.i$

$\Rightarrow |z|=\frac{\sqrt{(3x-4y-8)^2+(4x+3y+6)^2}}{25}$.

Mà $|z|=m^2+2m+5\Leftrightarrow (3x-4y-8)^2+(4x+3y+6)^2=25^2(m^2+2m+25)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+4y+4=25\left[(m+1)^2+4\right]^2\Leftrightarrow x^2+(y+2)^2=25\left[(m+1)^2+4\right]^2\geq 400=20^2.$

Vậy bán kính nhỏ nhất của đường tròn đó là 20. Dấu " = " xảy ra khi $m=-1$.

Cách 2: Từ giả thiết, ta có $w+2i=(3-4i)z$.

Lấy môđun hai vế, ta được $|w+2i|=|3-4i|.|z|=5.(m^2+2m+5)=5\left[(m+1)^2+4\right]\geq 20.$

Câu 3. Trong các số phức z có phần thực, phần ảo không âm và thoả mãn: $\left|\frac{z-3}{z-1+2i}\right|=1$.Tìm số phức z sao cho biểu thức $P=|z^2-\overline{z}^2|-(z^2-\overline{z}^2).i.[z(1-i)+\overline{z}(1+i)]$ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Giải:

Điều kiện: $z\neq 1-2i$. Gọi $z=x+yi\quad (x;y\in\mathbb{R}_+^*)$.

$\left|\frac{z-3}{z-1+2i}\right|=1\Leftrightarrow\frac{|z-3|}{|z-1+2i|}=1\Leftrightarrow|z-3|=|z-1+2i|\Leftrightarrow\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}$

$\Leftrightarrow x+y=1$

(luôn thoả mãn điều kiện vì $x=1;y=-2$ không thoả mãn phương trình)

$\overline{z}=x-yi\Rightarrow z^2-\overline{z}^2=4xy.i\Rightarrow|z^2-\overline{z}^2|=4xy$ (vì $x;y$ không âm).

$z(1-i)+\overline{z}(1+i)=2x+2y$

Do đó $P=16x^2y^2+4xy.(2x+2y)=16x^2y^2+8xy$.

Đặt $t=xy\Rightarrow 0\leq t\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, ta có $P=16t^2+8t;t\in\left[0;\frac{1}{4}\right]$.

+ Xét hàm số $f(t)=16t^2+8t$ liên tục trên $\left[0;\frac{1}{4}\right]$.

$f'(t)=32t+8t; f'(t)=0\Leftrightarrow t=0\vee t=-\frac{1}{4}$(loại)

$f(0)=0; f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{33}{16}\Rightarrow \max\limits_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} f(t)=\frac{33}{16}\Leftrightarrow t=\frac{1}{4}; \min\limits_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} f(t)=0\Leftrightarrow t=0$

Khi $t=\frac{1}{2}\Rightarrow x=y=\frac{1}{2}$; Khi $t=0\Rightarrow \begin{bmatrix} x=0;y=1 \\ x=1;y=0 \end{bmatrix}$

Vậy P đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{33}{16}$ khi $z=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi $z=1\vee z=0$.

Nhận xét: Bài tập này cũng có thể giải được bằng cách rút $y=1-x$ và thế vào biểu thức P ta được hàm số $g(x)=16x^2(1-x)^2+8x(1-x)$ rồi đi tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên $\left[0;1\right]$.

Câu 4. Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z-2-4i\right|=\left|z-2i\right|$.Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

Giải:

Giả sử số phức z cần tìm có dạng $z=x+yi\ \ (x,y\in\mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm M(x;y).

Ta có $\left|x-2+(y-4)i\right|=\left|x+(y-2)i\right|$ (1)

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$

$\Leftrightarrow y=-x+4$.

Mặt khác $\left|z\right|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x^2-8x+16}=\sqrt{2x^2-8x+16}$

Hay $\left|z\right|=\sqrt{2\left(x-2\right)^2+8}\ge 2\sqrt{2}$. Do đó $\left|z\right|_{\min}\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=2$. Vậy $z=2+2i$.

Câu 5. Trong các số phức z thỏa mãn $\left|z\right|=1$. Tìm số phức z để $\left|1+z\right|+3\left|1-z\right|$ đạt giá trị lớn nhất

Giải:

Giả sử $z=x+yi,\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$.

Vì $\left|z\right|=1\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$

Khi đó:

$$\left|1+z\right|+3\left|1-z\right|=\sqrt{\left(x+1\right)^2+y^2}+3\sqrt{\left(x-1\right)^2+y^2}$$
$$=\sqrt{\left(x+1\right)^2+1-x^2}+3\sqrt{\left(x+1\right)^2+1-x^2}=\sqrt{2}\left(\sqrt{1+x}+3\sqrt{1-x}\right)$$

Xét hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{2}\left(\sqrt{1+x}+3\sqrt{1-x}\right)$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$ ta có:

$f'(x)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{3}{2\sqrt{1-x}}\right); f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{5}$

Ta có: $f(-1)=6; f\left(-\frac{4}{5}\right)=2\sqrt{10}$.

Vậy $f_{\max}=f\left(-\frac{4}{5}\right)=2\sqrt{10} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{4}{5} \\ y^2=1-x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{4}{5}; y=-\frac{3}{5} \\ x=-\frac{4}{5}; y=\frac{3}{5} \end{array}\right.$

Vậy $z=-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i, z=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i.$

Câu 6. Trong các số phức z thỏa: $\left|\overline{z}-3+4i\right|=\left|z\right|$, biết rằng số phức $z=a+bi, (a,b\in\mathbb{R})$ có modul nhỏ nhất. Khi đó, giá trị của $P=a^2-b$ là ?

Giải:

Ta có $\left|\overline{z}-3+4i\right|=\left|z\right| \Leftrightarrow \left|a-bi-3+4i\right|=\left|a+bi\right|$

$\Rightarrow (a-3)^2+(b-4)^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow 25-6a-8b=0 \Leftrightarrow b=\frac{25-6a}{8}$

$\Rightarrow \left|z\right|^2=a^2+\left(\frac{25-6a}{8}\right)^2=\frac{25}{16}a^2-\frac{75}{16}a+\frac{625}{64}=\left(\frac{5}{4}a-\frac{15}{8}\right)^2+\frac{25}{4}\geq\frac{25}{4}$

Dấu " = " xảy ra khi $a=\frac{3}{2}\Rightarrow b=2$.

Khi đó $P=a^2-b=\frac{1}{4}.$

Câu 7. Cho số phức thỏa $\left|z\right|=1$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\left|z+1\right|+\left|z^2-z+1\right|$.

Giải:

Đặt $z=a+bi\ (a;b\in\mathbb{R}) \Rightarrow a^2+b^2=1$.

+ $\left|z+1\right|=\sqrt{(a+1)^2+b^2}=\sqrt{2(a+1)}$

+ $\left|z^2-z+1\right|=\left|\left(a^2+2abi-b^2\right)-(a+bi)+a^2+b^2\right|=\left|(2a^2-a)+(2a-1)bi\right|$

$=\sqrt{(2a^2-a)^2+(2a-1)^2b^2}$

$=\sqrt{(2a-1)^2(a^2+b^2)}=\left|2a-1\right|$

Vậy $P=\sqrt{2(a+1)}+\left|2a-1\right|$.

Xét $a\in\left[\frac{1}{2};1\right] \Rightarrow \begin{cases} \max P=P(1)=3 \\ \min P=P\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3} \end{cases}$. Xét $a\in\left[-1;\frac{1}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} \max P=P\left(\frac{-7}{8}\right)=\frac{13}{4} \\ \min P=P\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3} \end{cases}$

Kết luận $\begin{cases} Max\ P_{|z|=1} = \dfrac{13}{4} \Rightarrow z = -\dfrac{7}{8} \pm \dfrac{\sqrt{15}}{8} i \\ Min\ P_{|z|=1} = \sqrt{3} \Rightarrow z = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i \end{cases}$

Câu 8. Số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $|z| \geq 2$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left| \dfrac{z+i}{z} \right|$.

Giải:

Ta có $1 - \left|\dfrac{i}{z}\right| \leq \left|1 + \dfrac{i}{z}\right| \leq 1 + \left|\dfrac{i}{z}\right| \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{|z|} \leq \left|1 + \dfrac{i}{z}\right| \leq 1 + \dfrac{1}{|z|}$.

Mặt khác $|z| \geq 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{|z|} \leq \dfrac{1}{2}$ suy ra $\dfrac{1}{2} \leq P \leq \dfrac{3}{2}$.

Suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}$. Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 2.

Câu 9. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |\bar{z} + 1 + i|$

Giải:

Ta có: $|z - 2 - 3i| = |\overline{z - 2 - 3i}| = |\bar{z} - \overline{2 + 3i}| = |\bar{z} - 2 + 3i| = 1$

$P = |\bar{z} + 1 + i| = |\bar{z} - 2 + 3i + 3 - 2i| \leq |\bar{z} - 2 + 3i| + |3 - 2i| = 1 + \sqrt{13}$. Vậy $P_{\max} = 1 + \sqrt{13}$.

Câu 10. Trong các số phức z thoả mãn $|z - 3 + 4i| = 4$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z|$ và xảy ra khi z bằng bao nhiêu?

Giải:

Ta có : $|z - 3 + 4i| = |z - (3 - 4i)| \geq \big||z| - |3 - 4i|\big| = \big||z| - 5\big|$

$\Rightarrow 4 \geq \big||z| - 5\big| \Leftrightarrow -4 \leq |z| - 5 \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq |z| \leq 9 \Rightarrow \max_{|z|} = 9$ và $\min_{|z|} = 1$

Đặt $z = x + yi \quad (x; y \in \mathbb{R})$

- TH $\max_{|z|} = 9$

$$\begin{cases} |z| = 9 \\ |z - 3 + 4i| = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 81 \\ (x-3)^2 + (y+4)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 81 \\ 3x - 4y = 45 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta thu được $x = \dfrac{27}{5}; y = -\dfrac{36}{5} \Rightarrow z = \dfrac{27}{5} - \dfrac{36}{5} i$.

Vậy $\max_{|z|} = 9 \Leftrightarrow z = \dfrac{27}{5} - \dfrac{36}{5} i$.

- TH $\min_{|z|} = 1$

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ |z-3+4i| = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ (x-3)^2+(y+4)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ 3x-4y = 45 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta thu được $x = \frac{3}{5}; y = -\frac{4}{5} \Rightarrow z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$.

Vậy $\min_{|z|} = 1 \Leftrightarrow z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$.

Câu 11. Cho số phức z thỏa mãn $|(2+i)z+1| = 1$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z-1|$ bằng bao nhiêu ?

Giải:

Ta có $|(2+i)z+1| = 1 \Leftrightarrow \frac{|(2+i)z+1|}{|2+i|} = \frac{1}{|2+i|} \Leftrightarrow \left|z+\frac{1}{2+i}\right| = \left|z+\frac{2}{5}-\frac{i}{5}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

$$\left|z+\frac{2}{5}-\frac{i}{5}\right| = \left|z-1-\left(-\frac{7}{5}+\frac{i}{5}\right)\right| \ge \left||z-1|-\left|-\frac{7}{5}+\frac{i}{5}\right|\right| = \left||z-1|-\sqrt{2}\right|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \ge \left||z-1|-\sqrt{2}\right| \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \ge |z-1|-\sqrt{2} \ge -\frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}+\sqrt{2} \ge |z-1| \ge \sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$|z-1|_{\max} + |z-1|_{\min} = 2\sqrt{2}.$$

Câu 12. Cho số phức z thỏa mãn $|\overline{z}-1+2i| = \sqrt{10}$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z+1-4i|$ bằng bao nhiêu ?

Giải:

Ta có $|\overline{z}-1+2i| = |\overline{z}-\overline{1+2i}| = |\overline{z-(1+2i)}| = |\overline{z-1-2i}| = |z-1-2i| = \sqrt{10}$

Lại có : $|z-1-2i| = |(z+1-4i)-(2-2i)| \ge ||z+1-4i|-|2-2i|| = ||z+1-4i|-2\sqrt{2}|$

$$\Rightarrow \sqrt{10} \ge ||z+1-4i|-2\sqrt{2}| \Leftrightarrow \sqrt{10} \ge |z+1-4i|-2\sqrt{2} \ge \sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{10}+2\sqrt{2} \ge |z+1-4i| \ge \sqrt{10}-2\sqrt{2}$$

Vậy $|z+1-4i|_{\max} = \sqrt{10}+2\sqrt{2}; \quad |z+1-4i|_{\min} = \sqrt{10}-2\sqrt{2}$.

Câu 13. Trong các số phức z có môđun bằng $2\sqrt{2}$. Tìm số phức z sao cho biểu thức $P = |z+1|+|z+i|$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

Gọi $z = x+yi \quad (x;y \in \mathbb{R})$

$$|z| = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2+y^2 = 8$$

$$P = |z+1|+|z+i| = \sqrt{(x+1)^2+y^2} + \sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhia-côpxki cho hai bộ số 1;1 và $\sqrt{(x+1)^2+y^2}; \sqrt{x^2+(y+1)^2}$, ta có:

$$P^2 \le 2\left[(x+1)^2+y^2+x^2+(y+1)^2\right] = 4(9+x+y)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhia-cốpxki cho hai bộ số $1;1$ và $x;y$, ta có:

$x+y\le\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}=4$

$\Rightarrow P^2\le 52\Rightarrow P\le 2\sqrt{13}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=2$

Vậy P đạt giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{13}$ khi $z=2+2i$.

Câu 14. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-3\right|+\left|z+3\right|=8$. Gọi M, m lần lượt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất $\left|z\right|$. Khi đó $M+m$ bằng ?

Giải:

Gọi $z=x+yi$ với $x;y\in\mathbb{R}$.

Ta có $8=\left|z-3\right|+\left|z+3\right|\ge\left|z-3+z+3\right|=\left|2z\right|\Leftrightarrow\left|z\right|\le 4$.

Do đó $M=max\left|z\right|=4$.

Mà $\left|z-3\right|+\left|z+3\right|=8\Leftrightarrow\left|x-3+yi\right|+\left|x+3+yi\right|=8\Leftrightarrow\sqrt{\left(x-3\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(x+3\right)^2+y^2}=8$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$8=1.\sqrt{\left(x-3\right)^2+y^2}+1.\sqrt{\left(x+3\right)^2+y^2}\le\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left[\left(x-3\right)^2+y^2+\left(x+3\right)^2+y^2\right]}$

$\Leftrightarrow 8\le\sqrt{2\left(2x^2+2y^2+18\right)}\Leftrightarrow 2\left(2x^2+2y^2+18\right)\ge 64$

$\Leftrightarrow x^2+y^2\ge 7\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}\ge\sqrt{7}\Leftrightarrow\left|z\right|\ge\sqrt{7}$.

Do đó $M=min\left|z\right|=\sqrt{7}$.

Vậy $M+m=4+\sqrt{7}$.

Câu 15. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-4\right|+\left|z+4\right|=10$. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $\left|z\right|$ bằng?

Giải:

Cách 1: Giả sử $z=x+yi\ \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có $10=\left|z-4\right|+\left|z+4\right|\ge\left|z-4+z+4\right|=\left|2z\right|\Rightarrow\left|z\right|\le 5$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có $100=\left(\left|z-4\right|.1+\left|z-4\right|.1\right)^2\le\left[\left(\left|z-4\right|\right)^2+\left(\left|z+4\right|\right)^2\right].2$

$\Leftrightarrow\left(a+4\right)^2+b^2+\left(a-4\right)^2+b^2\ge 50\Leftrightarrow\left(a^2+b^2\right)\ge 9\Rightarrow\left|z\right|\ge 3$.

Cách 2: Giả sử $z=x+yi\ \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

Từ giả thiết, ta có $\sqrt{\left(x-4\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(x+4\right)^2+y^2}=10$. $\left(*\right)$

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi $M\left(x;y\right)$ và $F_1\left(-4;0\right)$, $F_2\left(-4;0\right)$ thì $\left(*\right)$ có dạng $MF_1+MF_2=2.5$. Vậy tợp hợp điểm $M\left(x;y\right)$ biểu diễn số phức z là một Elip có độ dài trục lớn $a=5$, tiêu cự $F_1F_2=8\Rightarrow c=4$. Suy ra độ dài trục bé $b=\sqrt{a^2-c^2}=3$.

Khi đó ta luôn có $b\le OM\le a$ hay $3\le\left|z\right|\le 5$.

PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC GIẢI BÀI TOÁN MIN-MAX

Bài toán 1: Cho đường tròn (T) cố định có tâm I bán kính R và điểm A cố định. Điểm M di động trên đường tròn (T). Hãy xác định vị trí điểm M sao cho AM lớn nhất, nhỏ nhất.

Giải:

TH1: A thuộc đường tròn (T)

Ta có: AM đạt giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi M trùng với A

AM đạt giá trị lớn nhất bằng 2R khi M là điểm đối xứng với A qua I

TH2: A không thuộc đường tròn (T)

Gọi B, C là giao điểm của đường thẳng qua A,I và đường tròn (T);

Giả sử $AB < AC$.

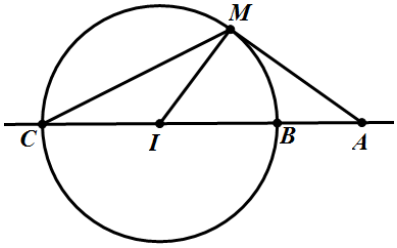
+) Nếu A nằm ngoài đường tròn (T) thì với điểm M bất kì trên (T), ta có:

$AM \geq AI - IM = AI - IB = AB$.

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv B$

$AM \leq AI + IM = AI + IC = AC$.

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv C$



+) Nếu A nằm trong đường tròn (T) thì với điểm M bất kì trên (T), ta có:

$AM \geq IM - IA = IB - IA = AB$.

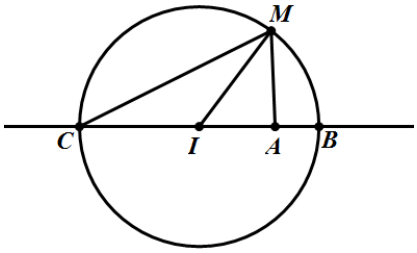
Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv B$

$AM \leq AI + IM = AI + IC = AC$.

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv C$

Vậy khi M trùng với B thì AM đạt gía trị nhỏ nhất.

Vậy khi M trùng với C thì AM đạt gía trị lớn nhất.



Bài toán 2: Cho hai đường tròn (T_1) có tâm I, bán kính R_1; đường tròn (T_2) có tâm J, bán kính R_2. Tìm vị trí của điểm M trên (T_1), điểm N trên (T_2) sao cho MN đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Giải:

Gọi d là đường thẳng đi qua I, J; d cắt đường tròn (T_1) tại hai điểm phân biệt A, B (giả sử JA > JB) ; d cắt (T_2) tại hai điểm phân biệt C, D (giả sử ID > IC).

Với điểm M bất khì trên (T_1) và điểm N bất kì trên (T_2).

Ta có: $MN \leq IM + IN \leq IM + IJ + JN = R_1 + R_2 + IJ = AD$

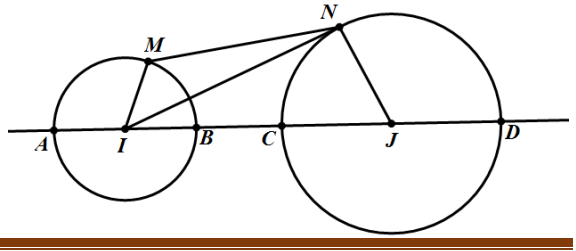
Đẳng thức xảy ra khi M trùng với A và N trùng với D

$MN \geq \left|IM - IN\right| \geq \left|IJ - IM - JN\right| = \left|IJ - R_1 + R_2\right| = BC$.

Đẳng thức xảy ra khi M trùng với B và N trùng với C.

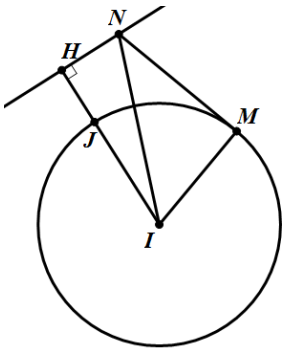
Vậy khi M trùng với A và N trùng với D thì MN đạt giá trị lớn nhất.

khi M trùng với B và N trùng với C thì MN đạt giá trị nhỏ nhất.



Bài toán 3: Cho hai đường tròn (T) có tâm I, bán kính R; đường thẳng Δ không có điểm chung với (T). Tìm vị trí của điểm M trên (T), điểm N trên Δ sao cho MN đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải:



Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên d
Đoạn IH cắt đường tròn (T) tại J
Với M thuộc đường thẳng Δ, N thuộc đường tròn (T), ta có:
$MN \geq IN - IM \geq IH - IJ = JH = const$.
Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv H; N \equiv I$
Vậy khi M trùng với H; N trùng với J thì MN đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 1. Trong các số phức z thoả mãn $|z-3+4i|=4$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $|z|$

Giải:

❖ **Cách 1**

Gọi $z = x + yi \ \ (x;y \in \mathbb{R}) \Rightarrow M(x;y)$ biểu diễn cho số phức z trong hệ toạ độ Oxy

$|z-3+4i|=4 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}=4 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=16$

Vậy điểm M biểu diễn cho số phức z thuộc đường tròn (T) có tâm $I(3;-4)$, bán kính R = 4.

$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = OM; OI = 5 > R$ nên O nằm ngoài đường tròn (T)

$|z|$ lớn nhất khi OM lớn nhất, nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất.

(Bài toán qui về Bài toán 1- Trường hợp 2)

Đường thẳng OI cắt đường tròn (T) tại hai điểm phân biệt

$A\left(\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right); B\left(\frac{27}{5};-\frac{36}{5}\right) \Rightarrow OA = 1; OB = 9$

Với M di động trên (T), ta có: $OA \leq OM \leq OB \Leftrightarrow 1 \leq OM \leq 9 \Rightarrow 1 \leq |z| \leq 9$

$\Rightarrow$ OM nhỏ nhất khi M trùng với A; OM lớn nhất khi M trùng với B

Vậy $|z|$ nhỏ nhất bằng 1 khi $z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$; $|z|$ lớn nhất bằng 9 khi $z = \frac{27}{5} - \frac{36}{5}i$.

❖ **Cách 2**

Gọi $z = x + yi \ \ (x;y \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow M(x;y)$ biểu diễn cho số phức z trong hệ toạ độ Oxy

$\omega = 3 - 4i \Rightarrow A(3;-4)$ biểu diễn cho số phức ω

$|z| = OM; \ |\omega| = OA = 5 \ \Rightarrow |z-\omega| = AM;$

Theo giả thiết $|z-3+4i|=4 \Leftrightarrow |z-\omega|=4 \Leftrightarrow AM = 4$.

Ta có:

$|OM - OA| \leq AM \Leftrightarrow -4 \leq OM - OA \leq 4 \Leftrightarrow -4 + OA \leq OM \leq 4 + OA \Leftrightarrow 1 \leq OM \leq 9$

$\Rightarrow 1 \leq |z| \leq 9; |z| = 1$ khi $z = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i; |z| = 9$ khi $z = \frac{27}{5} - \frac{36}{5}i$.

Vậy $|z|$ nhỏ nhất bằng 1 khi $z=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$; $|z|$ lớn nhất bằng 9 khi $z=\frac{27}{5}-\frac{36}{5}i$.

Nhận xét: Ngoài ra bài toán trên có thể giải bằng phương pháp sử dụng bất đẳng thức Bunhia-Cốpxki hoặc phương pháp lượng giác hoá.

Câu 2. Trong các số phức z thoả mãn điều kiện $\overline{z}(z+2-4i)$ là một số ảo, tìm số phức z sao cho $\omega=z-1-i$ có môđun lớn nhất.

Giải:

Gọi $z=x+yi\ \ (x;y\in\mathbb{R})$

$\Rightarrow M(x;y)$ biểu diễn cho số phức z trong hệ toạ độ Oxy

$\overline{z}(z+2-4i)=(x-yi)\big[(x+2)+(y-4)i\big]=x(x+2)+y(y-4)+\big[x(y+4)-y(x+2)\big]i$

$\overline{z}(z+2-4i)$ là một số ảo

$\Leftrightarrow x(x+2)+y(y-4)=0\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-4y=0\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=5$

$\Rightarrow$ M biểu diễn cho z thuộc đường tròn (T) có tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=\sqrt{5}$

$|\omega|=|z-1-i|=|(x-1)+(y-1)i|=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=AM$ với $A(1;1)$

$IA=\sqrt{5}\Rightarrow A\in(T)$ ***(Bài toán được qui về Bài toán 1 - trường hợp 1)***

Vì M là điểm di động trên (T) nên AM lớn nhất

$\Leftrightarrow AM$ là đường kính của (T)

$\Leftrightarrow M$ đối xứng với A qua I

$\Leftrightarrow I$ là trung diểm của $AM\ \Rightarrow M(-3;3)\Rightarrow z=-3+3i\Rightarrow\omega=-4+2i$

Vậy $|\omega|$ lớn nhất bằng $2\sqrt{5}$ khi $z=-3+3i$.

Câu 3. Trong các số phức z_1,z_2 thoả mãn: $|z_1-1-i|=1$; $|z_2-6-6i|=6$, tìm số phức z_1,z_2 sao cho $|z_1-z_2|$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

Gọi $z_1=a+b.i$; $z_2=c+d.i$; $(a,b,c,d$ là những số thực); z_1 được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$; z_2 được biểu diễn bởi điểm $N(c;d)$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy

$|z_1-1-i|=1\Leftrightarrow|z_1-1-i|^2=1\Leftrightarrow(a-1)^2+(b-1)^2=1$

$\Rightarrow$ M thuộc đường tròn tâm I(1; 1), bán kính R = 1.

$|z_2-6-6i|=6\Leftrightarrow|z_2-6-6i|^2=36\Leftrightarrow(c-6)^2+(d-6)^2=36$

$\Rightarrow$M thuộc đường tròn tâm $J(6;6)$, bán kính $R'=6$.

$|z_1-z_2|=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}=MN$.

(Bài toán được qui về Bài toán 2)

Đường thẳng IJ có phương trình $y=x$. Đường thẳng IJ cắt đường tròn tâm I tại hai điểm

$M_1\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2};\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right);M_2\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2};\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$

Đường thẳng IJ cắt đường tròn tâm J tại 2 điểm $N_1\left(6-3\sqrt{2};6-3\sqrt{2}\right);N_2\left(6+3\sqrt{2};6+3\sqrt{2}\right)$

$M_2N_1 \le MN \le M_1N_2 \Leftrightarrow 5\sqrt{2}-7 \le \left|z_1-z_2\right| \le 5\sqrt{2}+7$

$\max\left|z_1-z_2\right| = 5\sqrt{2}+7 \ khi \ M \equiv M_1, N \equiv N_2$.

Vậy $z_1 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}+\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}i$; $z_2 = 6+3\sqrt{2}+\left(6+3\sqrt{2}\right)i$ thì $\left|z_1-z_2\right|$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 4. Cho các số phức $z_1;z_2$ thoả mãn: $\left|z_1\right|=1$; $\overline{z}_2\left[z_2-(1-i)\right]-6+2i$ là một số thực. Tìm số phức $z_1;z_2$ sao cho $P=\left|z_2\right|^2-\left(z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải:

Gọi $z_1 = a+bi$; $z_2 = c+di$; $\left(a,b,c,d \in \mathbb{R}\right)$

$\Rightarrow M(a;b), N(c;d)$ lần lượt biểu diễn cho $z_1;z_2$ trong hệ toạ độ Oxy

$\left|z_1\right| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 1 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 1 \Rightarrow$ M thuộc đường tròn (T) có tâm O, bán kính R = 1

$\overline{z}_2 = c-di;$

$\omega = \overline{z}\left[z-\left(1-i\right)\right]-6+2i = \left(c-di\right)\left[(c-1)+(d+1)i\right]+2-6i$

$= c(c-1)+d(d+1)+2+\left[c(d+1)-d(c-1)-6\right]i$

ω là số thực $\Leftrightarrow c(d+1)-d(c-1)-6=0 \Leftrightarrow c+d-6=0$

$\Rightarrow$ N thuộc đường thẳng $\Delta : x+y-6=0$

Ta có $d(O;\Delta)>1$ nên Δ và (T) không có điểm chung

$z_1\overline{z}_2 = ac+bd+(bc-ad)i;$

$\overline{z}_1z_2 = ac+bd+(-bc+ad)i \Rightarrow z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2 = 2(ac+bd)$

$P = c^2+d^2-2(ac+bd) = (c-a)^2+(b-d)^2-1 = MN^2-1$ (vì $a^2+b^2=1$)

(Bài toán được qui về Bài toán 3)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên $\Delta : x+y-6=0 \Rightarrow H(3;3)$

Đoạn OH cắt đường tròn (T) tại $I\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Với N thuộc đường thẳng Δ, M thuộc đường tròn (T), ta có:

$MN \ge ON-OM \ge OH-OI = IH = 3\sqrt{2}-1$.

Đẳng thức xảy ra khi $M \equiv I; N \equiv H$

$\Rightarrow P \ge \left(3\sqrt{2}-1\right)^2-1 = 18-6\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i; z_2 = 3+3i$

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng $18-3\sqrt{2}$ khi $z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i; z_2 = 3+3i$.

Câu 5. Trong các số phức z có môđun bằng 2. Tìm số phức z sao cho biểu thức $P=\left|z-1\right|+\left|z-1+7i\right|$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

Gọi $z = x + yi \ \ (x;y \in \mathbb{R})$

$|z| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$

$P = |z-1| + |z-1+7i| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y+7)^2}$

Xét $\vec{u}(x-1;y), \vec{v}(1-x;-7-y) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (0;-7)$. Khi đó:

$P = |\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| = 7$. Đẳng thức xảy ra khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng

$\Rightarrow (x-1)(-7-y) = y(1-x) \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$

Với $x = 1; y = \sqrt{3}$ thì $\vec{u}, \vec{v}$ ngược hướng (không thoả mãn)

Với $x = 1; y = -\sqrt{3}$ thì $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng (thoả mãn)

Vậy $z = 1 - i\sqrt{3}$ thì P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 7.

Câu 6. Cho số phức z thỏa mãn $|z-(3+4i)| = \sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z+2|^2 - |z-i|^2$. Tính giá trị $A = M^2 + m^2$.

Giải :

Gọi $z = a + bi \ (a,b \in \mathbb{R})$. Ta có : $|z-(3+4i)| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a-3)^2 + (b-4)^2 = 5$.

$\Rightarrow z$ thuộc đường tròn (C) có tâm $I(3;4)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Mặt khác : $P = |z+2|^2 - |z-i|^2 = (a+2)^2 + b^2 - a^2 - (b-1)^2 \Rightarrow 4a + 2b + 3 - P = 0$.

Vậy z thuộc đường thẳng $(\Delta): 4a + 2b + 3 - P = 0$.

Ta có : $\begin{cases} z \in (C) \\ z \in (\Delta) \end{cases} \Rightarrow$ Để $\exists z$ thì $(C) \cap (\Delta) \neq \varnothing \Rightarrow d[I;(\Delta)] \leq R$.

$\Rightarrow \dfrac{|23 - P|}{2\sqrt{5}} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow 13 \leq P \leq 33 \Rightarrow A = 1258$.

Câu 7. Trong các số phức z thoả mãn điều kiện $|z-3| + |z+3| = 10$. Tìm số phức z có môđun lớn nhất.

Giải:

Gọi $z = x + yi \ \ (x;y \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow M(x;y)$ biểu diễn cho số phức z trong hệ toạ độ Oxy

$|z-3| + |z+3| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 10$ (với $F_1(-3;0); \ \ F_2(3;0)$).

$\Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 10$

$\Leftrightarrow M \in (E)$ có tâm O, trục lớn bằng 10; tiêu cự bằng $6 \Leftrightarrow M \in (E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

$|z| = OM; OM$ lớn nhất $\Leftrightarrow OM = a = 5 \Leftrightarrow M(5;0) \vee M(-5;0)$

Vậy $|z|$ lớn nhất bằng 5 khi $z = 5 \vee z = -5$.

Câu 8. Biết rằng số phức z thỏa mãn $u=\left(z+3-i\right)\left(\overline{z}+1+3i\right)$ là một số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\left|z\right|$.

Giải:

Đặt $z=x+yi\ \ (x,y\in\mathbb{R})$ ta có

$u=\left[\left(x+3\right)+\left(y-1\right)i\right]\left[\left(x+1\right)-\left(y-3\right)i\right]=x^2+y^2+4x-4y+6+2\left(x--y-4\right)i$

Ta có: $u\in R\Leftrightarrow x-y-4=0$

Tập hợp các điểm biểu diễn của z là đường thẳng $d:x-y-4=0$.

$M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn của z , z có môđun nhỏ nhất khi và chỉ khi độ dài OM nhỏ nhất

$\Leftrightarrow OM\perp d$. Tìm được $M\left(-2;2\right)$ suy ra $z=-2+2i$.

Câu 9. Tìm số phức z có mô đun lớn nhất và thỏa mãn điều kiện $\left|\overline{z}\left(1+i\right)-3+2i\right|=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Giải:

Gọi $z=x+yi\ \ \ (x,y\in R)\Rightarrow\overline{z}=x-yi$.

$\left|\overline{z}\left(1+i\right)-3+2i\right|=\dfrac{\sqrt{13}}{2}\Leftrightarrow x^2+y^2-x-5y+\dfrac{39}{8}=0$.

Gọi $M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

$\Rightarrow M\in(C)$ là đường tròn có tâm $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ và bán kính $R=\dfrac{\sqrt{26}}{4}$.

Gọi d là đường thẳng đi qua O và I $\Rightarrow d:y=5x$.

Gọi M_1,M_2 là hai giao điểm của d và (C)$\Rightarrow M_1\left(\dfrac{3}{4};\dfrac{15}{4}\right)$ và $M_2\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{5}{4}\right)$.

Ta thấy $\begin{cases}OM_1>OM_2\\OM_1=OI+R\geq OM(M\in(C))\end{cases}$

$\Rightarrow$ Số phức cần tìm ứng với điểm biểu diễn M_1 hay $z=\dfrac{3}{4}+\dfrac{15}{4}i$.

Câu 10. Cho số phức $z=a+bi\ \ \left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $\left|z+1+i\right|=\left|z+2i\right|$ và $P=\left|z-2-3i\right|+\left|z+1\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất . Tính $P=a+2b$.

Giải :

Ta có : $\left|z+1+i\right|=\left|z+2i\right|\Leftrightarrow a-b=1$.

$P=\left|z-2-3i\right|+\left|z+1\right|=\sqrt{\left(a-2\right)^2+\left(b-3\right)^2}+\sqrt{\left(a+1\right)^2+b^2}$.

Xét trong mặt phẳng phức Oab, xét các điểm $M\left(a;b\right),\ A\left(2;3\right),\ B\left(-1;0\right)$ với M điểm biểu diễn số phức $z\Rightarrow M\in\left(d\right):a-b-1=0$.

Ta có : $MA+MB=\sqrt{\left(a-2\right)^2+\left(b-3\right)^2}+\sqrt{\left(a+1\right)^2+b^2}$.

Vậy ta tìm $M\in d$ sao cho $\left(MA+MB\right)_{\min}$.

Do $\left(x_A-y_A-1\right)\left(x_B-y_B-1\right)>0\Rightarrow A,B$ cùng thuộc một phía so với đường thẳng d .

$\Rightarrow$ Gọi A' là điểm đối xứng của A qua d . Ta có : $MA+MB=MA'+MB\geq A'B$.

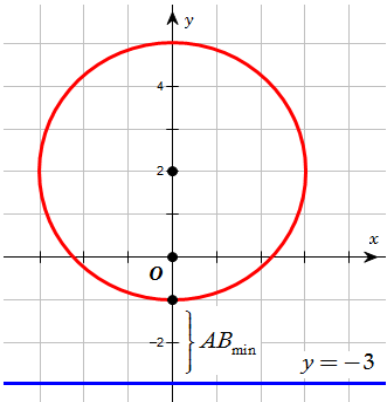
Dấu " = " xảy ra khi $M=A'B\cap d\Rightarrow M\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)\Rightarrow P=a+2b=\frac{5}{2}$.

Câu 11. Cho hai số phức $z_1,\ z_2$ thỏa mãn $\left|z_1-2i\right|=3$ và $\left|z_2+2+2i\right|=\left|z_2+2+4i\right|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z_1-z_2\right|$ bằng?

Giải:

Đặt $z_1=x_1+y_1i$ và $z_2=x_2+y_2i$ với $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2\in\mathbb{R}$.

- $\left|z_1-2i\right|=3\Leftrightarrow {x_1}^2+\left(y_1-2\right)^2=9\Rightarrow$ tập hợp các số phức z_1 là đường tròn $\left(C\right):x^2+\left(y-2\right)^2=9$.



- $\left|z_2+2+2i\right|=\left|z_2+2+4i\right|$

$\Leftrightarrow\left(x_2+2\right)^2+\left(y_2+2\right)^2=\left(x_2+2\right)^2+\left(y_2+4\right)^2\Leftrightarrow y_2+3=0$

$\Rightarrow$ tập hợp các số phức z_2 là đường thẳng $d:y=-3$.

Ta có $P=\left|z_1-z_2\right|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$ đây chính là khoảng cách từ điểm $B\left(x_2;y_2\right)\in d$ đến điểm $A\left(x_1;y_1\right)\in\left(C\right)$. Do đó $\left|z_2-z_1\right|_{\min}\Leftrightarrow AB_{\min}$. Dựa vào hình vẽ ta tìm được $AB_{\min}=2$ khi $A\left(0;-1\right),\ B\left(0;-3\right)$. Vậy $P=\left|z_1-z_2\right|$ khi $z_1=-i;\ z_2=-3i$.

<u>Nhận xét:</u> Ở bài này đường thẳng và đường tròn có vị trí đặc biệt nên vẽ hình sẽ nhận ra ngay được hai điểm A & B, nếu không thì viết phương trình đường thẳng qua tâm C và vuông góc với d, sau đó tìm giao điểm với C và d rồi loại điểm.

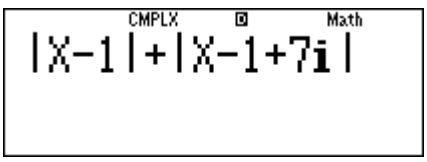
SỬ DỤNG MÁY TÍNH CASIO 570 VN-PLUS ĐỂ GIẢI DẠNG MAX, MIN SỐ PHỨC

Câu 1. Trong các số phức z có môđun bằng 2 . Tìm số phức z sao cho biểu thức $P=\left|z-1\right|+\left|z-1+7i\right|$ đạt giá trị lớn nhất.

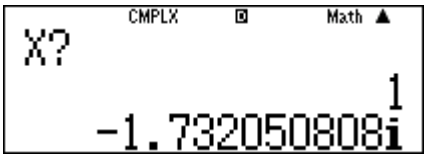
$A.1-\mathrm{i}\sqrt{3}$ $\quad$ $B.1+i\ \sqrt{3}$ $\quad$ $C.\sqrt{3}+i$ $\quad$ $D.-\sqrt{3}+i$

Hướng dẫn:

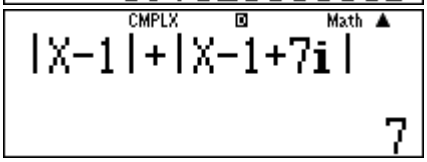
- Chuyển qua chế độ số phức: w2
- Nhập biểu thức P :
  qcQ)p1$+ qcQ)p1+7b
  Màn hình hiển thị:



- Gán X cho từng đáp án, dùng phím: r



- So sánh kết quả và ta tìm được giá trị lớn nhất là 7



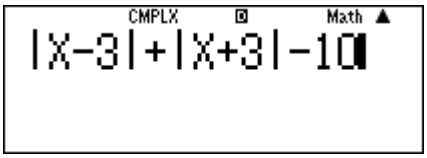
Câu 2. Trong các số phức z thoả mãn điều kiện $|z-3|+|z+3|=10$. Tìm số phức z có môđun lớn nhất.

$A.4+\frac{9}{5}i$ $B.5$ $C.3+\frac{12}{5}i$ $D.3+5\,\mathrm{i}$

Hướng dẫn:

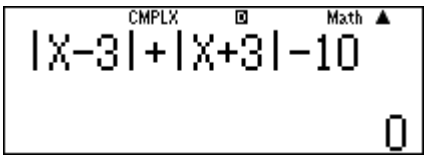
- Chuyển qua chế độ số phức: w2
- Nhập biểu thức: $|z-3|+|z+3|-10$ vào máy tính:

  qcQ)p3$ qcQ)+3$p10.
  Màn hình hiển thị:



- Dùng phím r để nhập các đáp án, nếu đáp án nào cho kết quả bằng 0 thì thỏa mãn điều kiện $|z-3|+|z+3|=10$.

  Ta thấy 3 đáp án A,B,C thỏa mãn điều kiện đề bài nhưng đáp án B có môđun lớn nhất. Chọn B.



CHƯƠNG IV

SỐ PHỨC

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

Câu 1: **(MĐ 103-2022)** Số phức nào dưới đây có phần ảo bằng phần ảo của số phức $w=1-4i$?

A. $z_2=3+4i$. **B.** $z_1=5-4i$. **C.** $z_3=1-5i$. **D.** $z_4=1+4i$.

Câu 2: **(MĐ 104-2022)** Số phức nào dưới đây có phần ảo bằng phần ảo của số phức $z=1-4i$?

A. $z_1=5-4i$. **B.** $z_4=1+4i$. **C.** $z_3=1-5i$. **D.** $z_2=3+4i$.

Câu 3: **(MĐ 101-2022)** Môđun của số phức $z=3+4i$ bằng

A. 25. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 4: **(MĐ 102-2022)** Môđun của số phức $z=3+4i$ bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 25.

Câu 5: **(MĐ 101-2022)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn cho số phức $z=2-7i$ có tọa độ là

A. $(2;7)$. **B.** $(-2;7)$. **C.** $(2;-7)$. **D.** $(-7;2)$.

Câu 6: **(MĐ 102-2022)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=2-7i$ có tọa độ là

A. $(2;-7)$. **B.** $(-7;2)$. **C.** $(2;7)$. **D.** $(-2;7)$.

Câu 7: **(MĐ 103-2022)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=2+7i$ có tọa độ là

A. $(2;-7)$. **B.** $(2;7)$. **C.** $(7;2)$. **D.** $(-2;-7)$

Câu 8: **(MĐ 104-2022)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=2+7i$ có tọa độ là

A. $(2;-7)$. **B.** $(-2;-7)$. **C.** $(7;2)$. **D.** $(2;7)$.

Câu 9: **(MĐ 101-2022)** Cho hai số phức $z_1=2+3i$ và $z_2=1-i$. Số phức z_1+z_2 bằng

A. $5+i$. **B.** $3+2i$. **C.** $1+4i$. **D.** $3+4i$.

Câu 10: **(MĐ 102-2022)** Cho hai số phức $z_1=2+3i$ và $z_2=1-i$. Số phức z_1+z_2 bằng

A. $3+4i$. **B.** $1+4i$. **C.** $5+i$. **D.** $3+2i$.

Câu 11: **(MĐ 103-2022)** Phần ảo của số phức $z=(2-i)(1+i)$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** -1. **D.** -3.

Câu 12: **(MĐ 104-2022)** Phần ảo của số phức $z=(2-i)(1+i)$ bằng

A. -3. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1.

Câu 13: **(MĐ 101-2022)** Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+z+6=0$. Khi đó $z_1+z_2+z_1z_2$ bằng

A. 7. **B.** 5. **C.** -7. **D.** -5.

Câu 14: **(MĐ 102-2022)** Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+z+6=0$. Khi đó $z_1+z_2+z_1z_2$ bằng:

A. -5. **B.** -7. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 15: **(MĐ 103-2022)** Gọi z_1,z_2 là nghiệm phức của phương trình $z^2-2z+5=0$. Giá trị của $z_1^2+z_2^2$ bằng

A. 6. **B.** $8i$. **C.** $-8i$. **D.** -6.

Câu 16: **(MĐ 104-2022)** Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-2z+5=0$. Khi đó $z_1^2+z_2^2$ bằng

A. 6. **B.** $-8i$. **C.** $8i$. **D.** -6.

Câu 17: **(MĐ 101-2022)** Cho các số phức z_1,z_2,z_3 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=2|z_3|=2$ và $8(z_1+z_2)z_3=3z_1z_2$. Gọi A,B,C lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1,z_2,z_3 trên mặt phẳng tọa độ. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $\frac{\sqrt{55}}{32}$ **B.** $\frac{\sqrt{55}}{16}$ **C.** $\frac{\sqrt{55}}{24}$ **D.** $\frac{\sqrt{55}}{8}$

Câu 18: **(MĐ 101-2022)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z^2|=2|z-\overline{z}|$ và $|(z-4)(\overline{z}-4i)|=|z+4i|^2$

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 19: **(MĐ 102-2022)** Cho các số phức z_1,z_2,z_3 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=2|z_3|=2$ và $3z_1z_2=4z_3(z_1+z_2)$. Gọi A,B,C lần lượt là điểm biểu diễn của z_1,z_2,z_3 trên mặt phẳng tọa độ. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $\frac{\sqrt{7}}{4}$. **B.** $\frac{3\sqrt{7}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{7}}{2}$.

Câu 20: **(MĐ 102-2022)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z^2|=|z-\overline{z}|$ và $|(z+2)(\overline{z}+2i)|=|z-2i|^2$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 21: **(MĐ 103-2022)** Cho các số phức z_1,z_2,z_3 thỏa mãn $2|z_1|=2|z_2|=|z_3|=2$ và $(z_1+z_2)z_3=3z_1z_2$. Gọi A,B,C lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1,z_2,z_3 trên mặt phẳng tọa độ. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $\frac{5\sqrt{7}}{8}$. **B.** $\frac{5\sqrt{7}}{16}$. **C.** $\frac{5\sqrt{7}}{24}$. **D.** $\frac{5\sqrt{7}}{32}$.

Câu 22: **(MĐ 103-2022)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z^2|=|z-\overline{z}|$ và $|(z-2)(\overline{z}-2i)|=|z+2i|^2$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 23: **(MĐ 104-2022)** Cho các số phức z_1,z_2,z_3 thỏa mãn $2|z_1|=2|z_2|=|z_3|=2$ và $(z_1+z_2)z_3=2z_1z_2$. Gọi A,B,C lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1,z_2,z_3 trên mặt phẳng tọa độ. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 24: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\left|z^2\right|=2\left|z-\bar{z}\right|$ và $\left|(z+4)(\bar{z}+4i)\right|=\left|z-4i\right|^2$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 25: **(TK 2020-2021)** Số phức liên hợp của số phức $z=3+2i$ là:

A. $\bar{z}=3-2i$. **B.** $\bar{z}=2+3i$. **C.** $\bar{z}=-3+2i$. **D.** $\bar{z}=-3-2i$.

Câu 26: **(2020-2021 – ĐỢT 1)** Phần thực của số phức $z=5-2i$ bằng

A. 5. **B.** 2. **C.** -5. **D.** -2.

Câu 27: **(2020-2021 – ĐỢT 1)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-3;4)$ là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

A. $z_2=3+4i$. **B.** $z_3=-3+4i$. **C.** $z_4=-3-4i$. **D.** $z_1=3-4i$.

Câu 28: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-3;2)$ là điểm biểu diễn số phức nào dưới đây?

A. $z_3=3-2i$. **B.** $z_4=3+2i$. **C.** $z_1=-3-2i$. **D.** $z_2=-3+2i$.

Câu 29: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Phần thực của số phức $z=6-2i$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 6. **D.** -6.

Câu 30: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-2;3)$ là điểm biểu diễn số phức nào dưới đây?

A. $z_3=2+3i$. **B.** $z_4=-2-3i$. **C.** $z_1=-2+3i$. **D.** $z_2=2-3i$.

Câu 31: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Phần thực của số phức $z=3-2i$ bằng

A. 2. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -2.

Câu 32: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Phần thực của số phức $z=4-2i$ bằng

A. 2. **B.** -4. **C.** 4. **D.** -2.

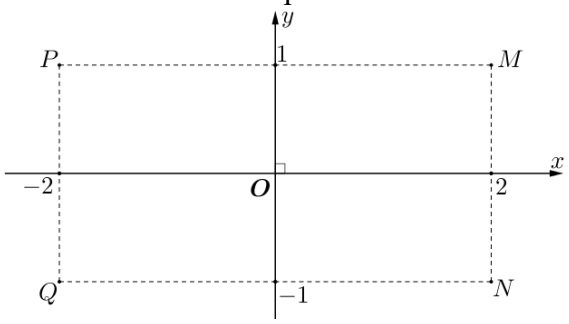
Câu 33: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Trên mặt phẳng toạ độ, điểm $M(-4;3)$ là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

A. $z_3=-4-3i$. **B.** $z_4=4+3i$. **C.** $z_2=4-3i$. **D.** $z_1=-4+3i$.

Câu 34: **(2020-2021 – ĐỢT 1)** Điểm nào trong hình bên là điểm biểu diễn của số phức $z=-2+i$?

A. Điểm P. **B.** Điểm Q.

C. Điểm M. **D.** Điểm N.



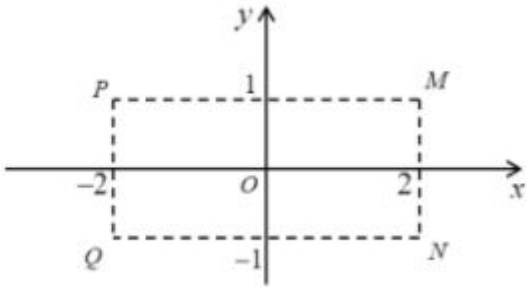
Câu 35: **(2020-2021 – ĐỢT 1)** Phần ảo của số phức $z=2-3i$ bằng

A. -2. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 36: **(2020-2021 – ĐỢT 1)** Phần ảo của số phức $z=3-4i$ bằng

A. 4. **B.** -3. **C.** -4. **D.** 3.

Câu 37: **(2020-2021 – ĐỢT 1)** Điểm nào trong hình bên là điểm biểu diễn của số phức $z=-2-i$.

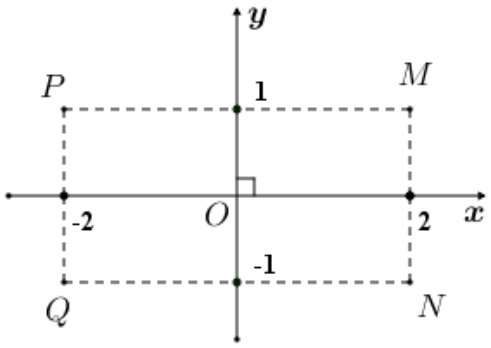


A. Điểm Q. **B.** Điểm P. **C.** Điểm N. **D.** Điểm M.

Câu 38: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Phần ảo của số phức $z=3-2i$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** -2. **D.** -3.

Câu 39: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Điểm nào trong hình bên là điểm biểu diễn của số phức $z=2-i$?



A. Điểm P. **B.** Điểm Q. **C.** Điểm M. **D.** Điểm N.

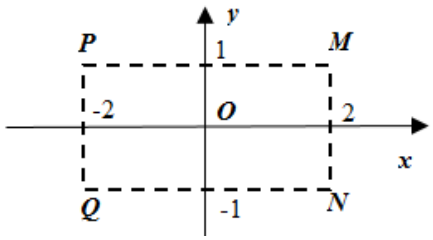
Câu 40: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Phần ảo của số phức $z=4-3i$ bằng

A. -3. **B.** -4. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 41: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho số phức z thỏa $iz=3+2i$. Số phức liên hợp của z là

A. $\overline{z}=2+3i$. **B.** $\overline{z}=-2-3i$. **C.** $\overline{z}=-2+3i$. **D.** $\overline{z}=2-3i$.

Câu 42: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Điểm nào trong hình bên là điểm biểu diễn của số phức $z=2+i$



A. Điểm N. **B.** Điểm M. **C.** Điểm P. **D.** Điểm Q.

Câu 43: **(TK 2020-2021)** Cho số phức $z=3+i$ và $w=2+3i$. Số phức $z-w$ bằng

A. $1+4i$. **B.** $1-2i$. **C.** $5+4i$. **D.** $5-2i$.

Câu 44: **(TK 2020-2021)** Trên mặt phẳng tọa đô, điểm biểu diễn số phức $3-2i$ có tọa độ là

A. $(2;3)$. **B.** $(-2;3)$. **C.** $(3;2)$. **D.** $(3;-2)$.

Câu 45: Cho hai số phức $z=4+2i$ và $w=3-4i$. Số phức $z+w$ bằng

A. $1+6i$. **B.** $7-2i$. **C.** $7+2i$. **D.** $-1-6i$.

Câu 46: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hai số phức $z=5+2i$ và $w=1-4i$. Số phức $z+w$ bằng

A. $6+2i$. **B.** $4+6i$. **C.** $6-2i$. **D.** $-4-6i$.

Câu 47: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hai số phức $z=1+2i$ và $\mathrm{w}=3-4i$. Số phức $z+\mathrm{w}$ bằng

A. $2-6i$. **B.** $4+2i$. **C.** $4-2i$. **D.** $-2+6i$.

Câu 48: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hai số phức $z=3+2i$ và $w=1-4i$. Số phức $z+w$ bằng

A. $4+2i$. **B.** $4-2i$. **C.** $-2-6i$. **D.** $2+6i$.

Câu 49: Cho hai số phức $z=3+4i$ và $w=1-i$. Số phức $z-w$ bằng

A. $7+i$. **B.** $-2-5i$. **C.** $4+3i$. **D.** $2+5i$.

Câu 50: Cho hai số phức $z=4+3i$ và $w=1-i$. Số phức $z-w$ bằng

A. $5+2i$. **B.** $7-i$. **C.** $3+4i$. **D.** $-3-4i$.

Câu 51: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hai số phức $z=2+3i$ và $w=1-i$. Số phức $z-w$ bằng

A. $z=1+4i$. **B.** $z=-1-4i$. **C.** $z=3+2i$. **D.** $z=5+i$.

Câu 52: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hai số phức $z=3+2i$ và $w=1-i$. Số phức $z-w$ bằng

A. $2+3i$. **B.** $4+i$. **C.** $-2-3i$. **D.** $5-i$.

Câu 53: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho số phức z thỏa mãn $iz=6+5i$. Số phức liên hợp của z là:

A. $\overline{z}=5-6i$. **B.** $\overline{z}=-5+6i$. **C.** $\overline{z}=5+6i$. **D.** $\overline{z}=-5-6i$.

Câu 54: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho số phức z thỏa mãn $iz=4+3i$. Số phức liên hợp của z là

A. $\overline{z}=3+4i$. **B.** $\overline{z}=-3-4i$. **C.** $\overline{z}=3-4i$. **D.** $\overline{z}=-3+4i$.

Câu 55: Cho số phức $z=4-i$, mô đun của số phức $(1+i)\overline{z}$ bằng

A. 34. **B.** 30. **C.** $\sqrt{34}$. **D.** $\sqrt{30}$.

Câu 56: **(TK 2020-2021)** Cho số phức $z=3+4i$. Môđun của số phức $(1+i)z$ bằng

A. 50. **B.** 10. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $5\sqrt{2}$.

Câu 57: Cho số phức $z=4-2i$. Môđun số phức $(1+i)\overline{z}$ bằng

A. $2\sqrt{10}$. **B.** 24. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** 40.

Câu 58: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho số phức $\mathrm{z}=2-\mathrm{i}$, môđun của số phức $(1+\mathrm{i})\overline{\mathrm{z}}$ bằng

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** 6. **D.** 10.

Câu 59: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho số phức $z=3-2i$, mô đun của số phức $(1+i)\overline{z}$ bằng

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** 26. **D.** 10.

Câu 60: **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Phần thực của số phức $z=3-4i$ bằng

A. 3 **B.** 4 **C.** -3 **D.** -4

Câu 61: **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Phần thực của số phức $z=-5-4i$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** -4. **D.** -5.

Câu 62: **(Mã 103 -2018)** Số phức $5+6i$ có phần thực bằng
A. -6. **B.** 6. **C.** -5. **D.** 5

Câu 63: **(Mã 104 2018)** Số phức có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 3 là
A. $1-3i$ **B.** $-1+3i$ **C.** $1+3i$ **D.** $-1-3i$

Câu 64: **(Mã 102 2018)** Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4 là
A. $3+4i$ **B.** $4-3i$ **C.** $3-4i$ **D.** $4+3i$

Câu 65: **(Đề Tham Khảo 2017)** Kí hiệu a,b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $3-2\sqrt{2}i$. Tìm a, b.
A. $a=3;b=\sqrt{2}$ **B.** $a=3;b=-2\sqrt{2}$ **C.** $a=3;b=2$ **D.** $a=3;b=2\sqrt{2}$

Câu 66: **(Mã 101 2018)** Số phức $-3+7i$ có phần ảo bằng:
A. 7 **B.** -7 **C.** -3 **D.** 3

Câu 67: **(Mã 123 2017)** Số phức nào dưới đây là số thuần ảo.
A. $z=\sqrt{3}+i$ **B.** $z=-2$ **C.** $z=-2+3i$ **D.** $z=3i$

Câu 68: **(Mã 105 2017)** Cho số phức $z=2-3i$. Tìm phần thực a của z?
A. $a=2$ **B.** $a=3$ **C.** $a=-2$ **D.** $a=-3$

Câu 69: **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Môđun của số phức $1+2i$ bằng
A. 5. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 3.

Câu 70: **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Số phức liên hợp của số phức $z=2+i$ là
A. $\overline{z}=-2+i$. **B.** $\overline{z}=-2-i$. **C.** $\overline{z}=2-i$. **D.** $\overline{z}=2+i$.

Câu 71: **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Số phức liên hợp của số phức $z=-3+5i$ là:
A. $\overline{z}=-3-5i$. **B.** $\overline{z}=3+5i$. **C.** $\overline{z}=-3+5i$. **D.** $\overline{z}=3-5i$.

Câu 72: **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Số phức liên hợp của số phức $z=-2+5i$ là
A. $\overline{z}=2-5i$. **B.** $\overline{z}=2+5i$. **C.** $\overline{z}=-2+5i$. **D.** $\overline{z}=-2-5i$.

Câu 73: **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Số phức liên hợp của số phức $z=2-5i$ là
A. $\overline{z}=2+5i$. **B.** $\overline{z}=-2+5i$. **C.** $\overline{z}=2-5i$. **D.** $\overline{z}=-2-5i$.

Câu 74: **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Số phức liên hợp của số phức $z=3-5i$ là
A. $\overline{z}=-3-5i$. **B.** $\overline{z}=3+5i$. **C.** $\overline{z}=-3+5i$. **D.** $\overline{z}=3-5i$.

Câu 75: **(Đề Minh Họa 2017)** Cho số phức $z=3-2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$:
A. Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng $2i$ **B.** Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng 2
C. Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng $-2i$ **D.** Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng -2

Câu 76: **(Mã 104 2019)** Số phức liên hợp của số phức $z=3-2i$ là.
A. $3+2i$. **B.** $-3-2i$. **C.** $-2+3i$. **D.** $-3+2i$.

Câu 77: **(Mã 103 - 2019)** Số phức liên hợp của số phức $1-2i$ là:
A. $-1-2i$. **B.** $1+2i$. **C.** $-2+i$. **D.** $-1+2i$.

Câu 78: **(Mã 104 2017)** Cho số phức $z=2+i$. Tính $|z|$.
A. $|z|=\sqrt{5}$ **B.** $|z|=5$ **C.** $|z|=2$ **D.** $|z|=3$

Câu 79: **(Mã 102 - 2019)** Số phức liên hợp của số phức $5-3i$ là
A. $-3+5i$. **B.** $-5-3i$. **C.** $5+3i$. **D.** $-5+3i$.

Câu 80: **(Mã 101 - 2019)** Số phức liên hợp của số phức $3-4i$ là

A. $3+4i$. **B.** $-4+3i$. **C.** $-3-4i$. **D.** $-3+4i$.

Câu 81: **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=(1+2i)^2$ là điểm nào dưới đây?

A. $P(-3;4)$. **B.** $Q(5;4)$. **C.** $N(4;-3)$. **D.** $M(4;5)$.

Câu 82: **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=-1+2i$ là điểm nào dưới đây?

A. $Q(1;2)$. **B.** $P(-1;2)$. **C.** $N(1;-2)$. **D.** $M(-1;-2)$.

Câu 83: **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Trên mặt phẳng tọa độ, biết $M(-3;1)$ là điểm biểu diễn số phức z. Phần thực của z bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 3.

Câu 84: **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Trên mặt phẳng tọa độ, biết $M(-1;3)$ là điểm biểu diễn số phức z. Phần thực của z bằng

A. 3. **B.** -1. **C.** -3. **D.** 1.

Câu 85: **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Trong mặt phẳng tọa độ, biết điểm $M(-2;1)$ là điểm biểu diễn số phức z. Phần thực của z bằng:

A. -2 **B.** 2 **C.** 1 **D.** -1

Câu 86: **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $z=1-2i$?

A. $Q(1;2)$. **B.** $M(2;1)$. **C.** $P(-2;1)$. **D.** $N(1;-2)$.

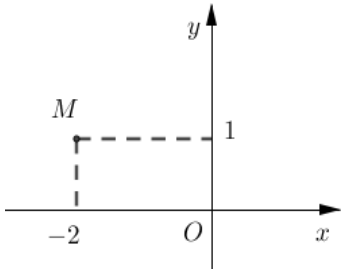
Câu 87: **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $z=3-2i$?

A. $P(-3;2)$. **B.** $Q(2;-3)$. **C.** $N(3;-2)$. **D.** $M(-2;3)$.

Câu 88: **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $z=-1+2i$?

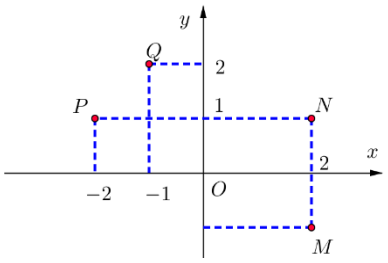
A. $N(-1;2)$. **B.** $P(2;-1)$. **C.** $Q(-2;1)$. **D.** $M(1;-2)$.

Câu 89: **(Đề Tham Khảo 2018)** Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức



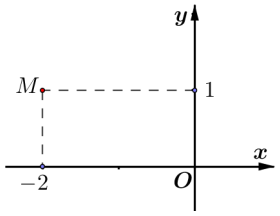
A. $z=1+2i$ **B.** $z=1-2i$ **C.** $z=2+i$ **D.** $z=-2+i$

Câu 90: **(Đề Tham Khảo 2019)** Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức $z=-1+2i$?



A. P **B.** M **C.** Q **D.** N

Câu 91: **(Mã 110 2017)** Số phức nào dưới đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm M như hình bên?



A. $z_1=1-2i$ **B.** $z_2=1+2i$ **C.** $z_3=-2+i$ **D.** $z_4=2+i$

Câu 92: **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z_1=-3+i$ và $z_2=1-i$. Phần ảo của số phức $z_1+\overline{z_2}$ bằng

A. -2. **B.** $2i$. **C.** 2. **D.** $-2i$.

Câu 93: **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hai số phức $z_1=2+i$ và $z_2=1+3i$. Phần thực của số phức z_1+z_2 bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** -2.

Câu 94: **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z_1=3-2i$ và $z_2=2+i$. Số phức z_1+z_2 bằng

A. $5+i$. **B.** $-5+i$. **C.** $5-i$. **D.** $-5-i$.

Câu 95: **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z_1=1-2i$ và $z_2=2+i$. Số phức z_1+z_2 bằng

A. $3+i$ **B.** $-3-i$ **C.** $3-i$ **D.** $-3+i$

Câu 96: **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z_1=1-3i$ và $z_2=3+i$. Số phức z_1+z_2 bằng.

A. $4-2i$. **B.** $-4+2i$. **C.** $4+2i$. **D.** $-4-2i$.

Câu 97: **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hai số phức $z_1=1+2i$ và $z_2=4-i$. Số phức z_1-z_2 bằng

A. $3+3i$. **B.** $-3-3i$. **C.** $-3+3i$. **D.** $3-3i$.

Câu 98: **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hai số phức $z_1=1-3i$ và $z_2=3+i$. Số phức z_1-z_2 bằng

A. $-2-4i$. **B.** $2-4i$. **C.** $-2+4i$. **D.** $2+4i$.

Câu 99: **(Mã 104 - 2019)** Cho hai số phức $z_1=2-i$ và $z_2=1+i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn của số phức $2z_1+z_2$ có tọa độ là

A. $(0;5)$. **B.** $(5;-1)$. **C.** $(-1;5)$. **D.** $(5;0)$.

Câu 100: **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hai số phức $z_1=3-2i$ và $z_2=2+i$. Số phức z_1-z_2 bằng

A. $-1+3i$. **B.** $-1-3i$. **C.** $1+3i$. **D.** $1-3i$.

Câu 101: **(Mã 103 - 2019)** Cho hai số phức $z_1=1+i$ và $z_2=2+i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức z_1+2z_2 có tọa độ là

A. $(3;5)$. **B.** $(5;2)$. **C.** $(5;3)$. **D.** $(2;5)$.

Câu 102: **(Mã 123 2017)** Cho 2 số phức $z_1=5-7i$ và $z_2=2+3i$. Tìm số phức $z=z_1+z_2$.

A. $z=3-10i$ **B.** 14 **C.** $z=7-4i$ **D.** $z=2+5i$

Câu 103: **(Đề Minh Họa 2017)** Cho hai số phức $z_1=1+i$ và $z_2=2-3i$. Tính môđun của số phức z_1+z_2.

A. $|z_1+z_2|=5$. **B.** $|z_1+z_2|=\sqrt{5}$. **C.** $|z_1+z_2|=1$. **D.** $|z_1+z_2|=\sqrt{13}$.

Câu 104: **(Mã 110 2017)** Cho hai số phức $z_1=4-3i$ và $z_2=7+3i$. Tìm số phức $z=z_1-z_2$.

A. $z=-3-6i$ **B.** $z=11$ **C.** $z=-1-10i$ **D.** $z=3+6i$

Câu 105: **(Mã 104 2017)** Cho số phức $z_1=1-2i$, $z_2=-3+i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $z=z_1+z_2$ trên mặt phẳng tọa độ.

A. $M(2;-5)$ **B.** $P(-2;-1)$ **C.** $Q(-1;7)$ **D.** $N(4;-3)$

Câu 106: **(Mã 104 2017)** Tìm số phức z thỏa mãn $z+2-3i=3-2i$.

A. $z=5-5i$ **B.** $z=1-i$ **C.** $z=1-5i$ **D.** $z=1+i$

Câu 107: **(Mã 105 2017)** Cho hai số phức $z_1=1-3i$ và $z_2=-2-5i$. Tìm phần ảo b của số phức $z=z_1-z_2$.

A. $b=-3$ **B.** $b=2$ **C.** $b=-2$ **D.** $b=3$

Câu 108: **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hai số phức $z_1=3-i$ và $z_2=-1+i$. Phần ảo của số phức z_1z_2 bằng

A. 4. **B.** $4i$. **C.** -1. **D.** $-i$.

Câu 109: **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z=1+2i$ và $w=3+i$. Môđun của số phức $z.\overline{w}$ bằng

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** 26. **D.** 50.

Câu 110: **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z=2+2i$ và $w=2+i$. Mô đun của số phức $z\overline{w}$

A. 40. **B.** 8. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{10}$.

Câu 111: **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z=4+2i$ và $w=1+i$. Môđun của số phức $z.\overline{w}$ bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 8. **C.** $2\sqrt{10}$. **D.** 40.

Câu 112: **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z=1+3i$ và $w=1+i$. Môđun của số phức $z.\overline{w}$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 20. **D.** 8.

Câu 113: **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho số phức $z=2-i$, số phức $(2-3i)\overline{z}$ bằng

A. $-1+8i$. **B.** $-7+4i$. **C.** $7-4i$. **D.** $1+8i$.

Câu 114: **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho số phức $z=-2+3i$, số phức $(1+i)\overline{z}$ bằng

A. $-5-i$. **B.** $-1+5i$. **C.** $1-5i$. **D.** $5-i$.

Câu 115: **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho số phức $z=-3+2i$, số phức $(1-i)\overline{z}$ bằng

A. $-1-5i$ **B.** $5-i$. **C.** $1-5i$. **D.** $-5+i$.

Câu 116: (Đề Minh Họa 2017) Cho số phức $z=2+5i$. Tìm số phức $w=iz+\overline{z}$

A. $w=-3-3i$. **B.** $w=3+7i$.. **C.** $w=-7-7i$ **D.** $w=7-3i$.

Câu 117: (Đề Tham Khảo 2017) Tính môđun của số phức z biết $\overline{z}=(4-3i)(1+i)$.

A. $|z|=5\sqrt{2}$ **B.** $|z|=\sqrt{2}$ **C.** $|z|=25\sqrt{2}$ **D.** $|z|=7\sqrt{2}$

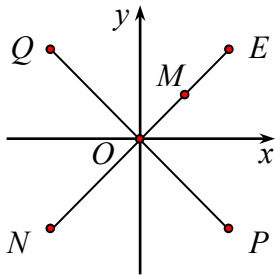
Câu 118: (Mã 110 2017) Cho số phức $z=1-i+i^3$. Tìm phần thực a và phần ảo b của z.

A. $a=1,b=0$ **B.** $a=0,b=1$ **C.** $a=1,b=-2$ **D.** $a=-2,b=1$

Câu 119: (Mã 123 2017) Cho số phước $z=1-2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w=iz$ trên mặt phẳng tọa độ

A. $Q(1;2)$ **B.** $N(2;1)$ **C.** $P(-2;1)$ **D.** $M(1;-2)$

Câu 120: (Đề Tham Khảo 2017) Trong mặt phẳng tọa độ, điểm M là điểm biểu diễn của số phức z. Điểm nào trong hình vẽ là điểm biểu diễn của số phức $2z$?



A. Điểm Q **B.** Điểm E **C.** Điểm P **D.** Điểm N

Câu 121: (Mã 101 - 2019) Cho hai số phức $z_1=1-i$ và $z_2=1+2i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $3z_1+z_2$ có tọa độ là:

A. $(1;4)$. **B.** $(-1;4)$. **C.** $(4;1)$. **D.** $(4;-1)$.

Câu 122: (Mã 102 - 2019) Cho hai số phức $z_1=-2+i$ và $z_2=1+i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $2z_1+z_2$ có tọa độ là

A. $(-3;3)$. **B.** $(-3;2)$. **C.** $(3;-3)$. **D.** $(2;-3)$.

Câu 123: (Mã 104 2018) Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(3-i)=5x-4i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=-1;y=-1$. **B.** $x=-1;y=1$. **C.** $x=1;y=-1$. **D.** $x=1;y=1$.

Câu 124: (Mã 105 2017) Tìm tất cả các số thực x,y sao cho $x^2-1+yi=-1+2i$.

A. $x=\sqrt{2},\ y=2$ **B.** $x=-\sqrt{2},\ y=2$ **C.** $x=0,\ y=2$ **D.** $x=\sqrt{2},\ y=-2$

Câu 125: (Mã 101 2018) Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(1-3i)=x+6i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=1;y=-1$ **B.** $x=1;y=-3$ **C.** $x=-1;y=-3$ **D.** $x=-1;y=-1$

Câu 126: (Mã 104 - 2019) Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z+3+16i=2(\overline{z}+i)$. Môđun của z bằng

A. $\sqrt{13}$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 13.

Câu 127: **(Mã 103 - 2019)** Cho số z thỏa mãn $(2+i)z-4(\overline{z}-i)=-8+19i$. Môđun của z bằng

A. 13. **B.** 5. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 128: **(Mã 102 2018)** Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x+2yi)+(2+i)=2x-3i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=2;y=-2$ **B.** $x=2;y=-1$ **C.** $x=-2;y=-2$ **D.** $x=-2;y=-1$

Câu 129: **(Đề Tham Khảo -2019)** Tìm các số thực a,b thỏa mãn $2a+(b+i)i=1+2i$ với i là đơn vị ảo.

A. $a=0,b=1.$ **B.** $a=1,b=2.$ **C.** $a=0,b=2.$ **D.** $a=\frac{1}{2},b=1.$

Câu 130: **(Mã 103 2018)** Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x+yi)+(4-2i)=5x+2i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=2\,;\ y=4$ **B.** $x=-2\,;\ y=0$ **C.** $x=2\,;\ y=0$ **D.** $x=-2\,;\ y=4$

Câu 131: **(Mã 102 - 2019)** Cho số phức z thoả mãn $3(\overline{z}-i)-(2+3i)z=7-16i.$ Môđun của z bằng

A. $3.$ **B.** $\sqrt{5}.$ **C.** $5.$ **D.** $\sqrt{3}.$

Câu 132: **(Mã 101 - 2019)** Cho số phức z thỏa mãn $3(\overline{z}+i)-(2-i)z=3+10i$. Môđun của z bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** 3. **C.** 5. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 133: **(Đề Tham Khảo 2017)** Hỏi có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z-i|=5$ và z^2 là số thuần ảo?

A. 4 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

Câu 134: **(Mã 110 2017)** Cho số phức $z=a+bi\ \ (a,\ b\in\mathbb{R})$ thoả mãn $z+2+i=|z|$. Tính $S=4a+b$.

A. $S=-4$ **B.** $S=2$ **C.** $S=-2$ **D.** $S=4$

Câu 135: **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A. $P=-1$ **B.** $P=-5$ **C.** $P=3$ **D.** $P=7$

Câu 136: **(ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2020-2021)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$ và $(z+2i)(\overline{z}-2)$ là số thuần ảo?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 137: **(Mã 110 2017)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2-i|=2\sqrt{2}$ và $(z-1)^2$ là số thuần ảo?

A. 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

Câu 138: **(Mã 104 2018)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-5-i)+2i=(6-i)z$?

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2

Câu 139: **(Mã 103 2018)** Có bao nhiêu số phức thỏa mãn $|z|(z-6-i)+2i=(7-i)z$?

A. 1 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 3

Câu 140: **(Mã 102 2018)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-3-i)+2i=(4-i)z$?

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

Câu 141: **(Mã 105 2017)** Cho số phức z thỏa mãn $|z+3|=5$ và $|z-2i|=|z-2-2i|$. Tính $|z|$.

A. $|z|=17$ **B.** $|z|=\sqrt{17}$ **C.** $|z|=\sqrt{10}$ **D.** $|z|=10$

Câu 142: **(Mã105 2017)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+3i|=\sqrt{13}$ và $\dfrac{z}{z+2}$ là số thuần ảo?

A. 0 **B.** 2 **C.** Vô số **D.** 1

Câu 143: **(Mã 102 2018)** Xét các số phức z thỏa mãn $(\overline{z}+3\mathrm{i})(z-3)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng:

A. $\dfrac{9}{2}$ **B.** $3\sqrt{2}$ **C.** 3 **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Câu 144: **(Mã 103 2018)** Xét các số phức z thỏa mãn $(\overline{z}+2i)(z-2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 4 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** 2

Câu 145: **(Mã 104 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=\dfrac{5+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. 44. **B.** 52. **C.** $2\sqrt{13}$. **D.** $2\sqrt{11}$.

Câu 146: **(Mã 104 2018)** Xét các số phức z thỏa mãn $(\overline{z}-2i)(z+2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng?

A. $\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** 4 **D.** $2\sqrt{2}$

Câu 147: **(Đề Minh Họa 2017)** Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(3+4i)z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó

A. $r=22$ **B.** $r=4$ **C.** $r=5$ **D.** $r=20$

Câu 148: **(Đề Tham Khảo 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $(z+2i)(\overline{z}+2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $(1;1)$ **B.** $(-1;1)$ **C.** $(-1;-1)$ **D.** $(1;-1)$

Câu 149: **(Mã 101 2018)** Xét các số phức z thỏa mãn $(\overline{z}+i)(z+2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** 1 **C.** $\dfrac{5}{4}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Câu 150: **(Mã 101 2019)** Xét số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w=\dfrac{4+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{26}$. **B.** $\sqrt{34}$. **C.** 26. **D.** 34.

Câu 151: **(Mã 102 - 2019)** Xét số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w=\dfrac{3+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** 20. **C.** 12. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 152: (Mã 103 - 2019) Xét các số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=\dfrac{2+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** 10.

Câu 153: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2+6z+13=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $1-z_0$ là

A. $N(-2;2)$. **B.** $M(4;2)$. **C.** $P(4;-2)$. **D.** $Q(2;-2)$.

Câu 154: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2-6z+13=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $1-z_0$ là

A. $M(-2;2)$. **B.** $Q(4;-2)$. **C.** $N(4;2)$. **D.** $P(-2;-2)$.

Câu 155: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Cho z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2+4z+13=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $1-z_0$ là

A. $P(-1;-3)$. **B.** $M(-1;3)$. **C.** $N(3;-3)$. **D.** $Q(3;3)$.

Câu 156: (Mã 104 - 2020 Lần 1) Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2-4z+13=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $1-z_0$ là

A. $M(3;-3)$. **B.** $P(-1;3)$. **C.** $Q(1;3)$ **D.** $N(-1;-3)$.

Câu 157: (Mã 102 - 2020 Lần 2) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+3=0$. Khi đó $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 158: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Gọi x_1 và x_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+2=0$. Khi đó $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 159: (Mã 104 - 2020 Lần 2) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+z+3=0$. Khi đó $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 3. **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 6.

Câu 160: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2-2z+5=0$. Môđun của số phức z_0+i bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** 10.

Câu 161: (Mã104 2017) Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+4=0$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Tính $T=OM+ON$ với O là gốc tọa độ.

A. $T=8$ **B.** 4 **C.** $T=\sqrt{2}$ **D.** $T=2$

Câu 162: (Mã 123 2017) Phương trình nào dưới đây nhận hai số phức $1+\sqrt{2}i$ và $1-\sqrt{2}i$ là nghiệm.

A. $z^2+2z+3=0$ **B.** $z^2-2z+3=0$ **C.** $z^2+2z-3=0$ **D.** $z^2-2z-3=0$

Câu 163: (Mã 110 2017) Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - z + 1 = 0$. Tính $P = |z_1| + |z_2|$.

A. $P = \frac{2}{3}$ **B.** $P = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $P = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $P = \frac{\sqrt{14}}{3}$

Câu 164: (Mã 102 - 2019) Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 14 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

A. 36. **B.** 8. **C.** 28. **D.** 18.

Câu 165: (Mã 104 - 2019) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 7 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. 2. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 10.

Câu 166: (Đề Tham Khảo 2017) Kí hiệu $z_1; z_2$ là hai nghiệm của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$. Tính $P = z_1^2 + z_2^2 + z_1 z_2$.

A. $P = 2$ **B.** $P = -1$ **C.** $P = 0$ **D.** $P = 1$

Câu 167: (Đề Tham Khảo 2019) Kí hiệu z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 3z + 5 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng:

A. 10 **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 3.

Câu 168: (Mã 105 2017) Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 6 = 0$. Tính $P = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$.

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $-\frac{1}{6}$ **C.** 6 **D.** $\frac{1}{12}$

Câu 169: (Đề Tham Khảo 2018) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2 - 4z + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1| + |z_2|$ bằng:

A. $3\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** 3 **D.** $\sqrt{3}$

Câu 170: (Mã 103 - 2019) Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

A. 16. **B.** 26. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 171: (Mã 101 - 2019) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 10 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng:

A. 16. **B.** 56. **C.** 20. **D.** 26.

Câu 172: (Đề Minh Họa 2017) Kí hiệu z_1, z_2, z_3 và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 - z^2 - 12 = 0$. Tính tổng $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$

A. $T = 2 + 2\sqrt{3}$ **B.** $T = 4$ **C.** $T = 2\sqrt{3}$ **D.** $T = 4 + 2\sqrt{3}$

Câu 173: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_o thỏa mãn $|z_o|=7$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 174: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Trên tập số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0|=5$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 175: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0|=6$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 176: (2020-2021 – ĐỢT 2) Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-4az+b^2+2=0$ (a, b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1+2iz_2=3+3i$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 177: (2020-2021 – ĐỢT 2) Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2+4az+b^2+2=0$ (a, b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ sao cho phương trình có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1+2iz_2=3+3i$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 178: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2+2az+b^2+2=0$ (a,b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1+2iz_2=3+3i$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 179: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2az+b^2+2=0$ (a, b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1+2iz_2=3+3i$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 180: (Đề Tham Khảo 2018) Xét số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-4-3i|=\sqrt{5}$. Tính $P=a+b$ khi $|z+1-3i|+|z-1+i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P=8$ **B.** $P=10$ **C.** $P=4$ **D.** $P=6$

Câu 181: (Đề Tham Khảo 2017) Xét số phức z thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z-1+i|$. Tính $P=m+M$.

A. $P=\dfrac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$ **B.** $P=5\sqrt{2}+\sqrt{73}$ **C.** $P=\dfrac{5\sqrt{2}+\sqrt{73}}{2}$ **D.** $P=\sqrt{13}+\sqrt{73}$

Câu 182: (TK NĂM 2020-2021) Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=1, |z_2|=2$ và $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$. Giá trị lớn nhất của $|3z_1+z_2-5i|$ bằng

A. $5-\sqrt{19}$. **B.** $5+\sqrt{19}$. **C.** $-5+2\sqrt{19}$. **D.** $5+2\sqrt{19}$.

Câu 183: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Xét các phức z, w thoả mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+i\overline{w}-6+8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng

A. 3. **B.** $\frac{\sqrt{29}}{5}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{221}}{5}$.

Câu 184: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Xét các số phức z; w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+i\overline{w}+6+8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{29}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{221}}{5}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 185: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Xét các số phức z và w thay đổi thỏa mãn $|z|=|w|=3$ và $|z-w|=3\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z+1+i|+|w-2+5i|$ bằng

A. $5-3\sqrt{2}$ **B.** $\sqrt{17}$ **C.** $\sqrt{29}-\sqrt{2}$ **D.** 5

Câu 186: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Xét các số phức z và w thay đổi thỏa mãn $|z|=|w|=4$ và $|z-w|=4\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z+1+i|+|w-3+4i|$ bằng

A. $5-\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{41}$. **D.** $5-2\sqrt{2}$.

Câu 187: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+i\overline{w}-6-8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng?

A. $\frac{\sqrt{221}}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 3. **D.** $\frac{\sqrt{29}}{5}$.

Câu 188: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+i\overline{w}+6-8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{221}}{5}$. **C.** 3. **D.** $\frac{\sqrt{29}}{5}$.

Câu 189: (2020-2021 – ĐỢT 2) Xét số phức z và w thay đổi thỏa mãn $|z|=|w|=3$ và $|z-w|=3\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z-1-i|+|w+2-5i|$ bằng

A. $5-3\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{29}-\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** 5.

Câu 190: (2020-2021 – ĐỢT 2) Xét các số phức z, w thay đổi thỏa mãn $|z|=|w|=4$, $|z-w|=4\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z-1-i|+|w+3-4i|$ bằng:

A. $\sqrt{41}$. **B.** $5-2\sqrt{2}$. **C.** $5-\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{13}$.

CHƯƠNG IV

SỐ PHỨC

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

Câu 1: **(MĐ 103-2022)** Số phức nào dưới đây có phần ảo bằng phần ảo của số phức $w=1-4i$?

A. $z_2=3+4i$. **B.** $z_1=5-4i$. **C.** $z_3=1-5i$. **D.** $z_4=1+4i$.

Lời giải

Chọn B

Số phức có phần ảo bằng phần ảo của số phức $w=1-4i$ là $z_1=5-4i$.

Câu 2: **(MĐ 104-2022)** Số phức nào dưới đây có phần ảo bằng phần ảo của số phức $z=1-4i$?

A. $z_1=5-4i$. **B.** $z_4=1+4i$. **C.** $z_3=1-5i$. **D.** $z_2=3+4i$.

Lời giải

Chọn A

Số phức $z_1=5-4i$ có phần ảo bằng phần ảo của số phức $z=1-4i$.

Câu 3: **(MĐ 101-2022)** Môđun của số phức $z=3+4i$ bằng

A. 25. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $|z|=|3+4i|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Câu 4: **(MĐ 102-2022)** Môđun của số phức $z=3+4i$ bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 25.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Câu 5: **(MĐ 101-2022)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn cho số phức $z=2-7i$ có tọa độ là

A. $(2;7)$. **B.** $(-2;7)$. **C.** $(2;-7)$. **D.** $(-7;2)$.

Lời giải

Chọn C

Câu 6: **(MĐ 102-2022)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=2-7i$ có tọa độ là

A. $(2;-7)$. **B.** $(-7;2)$. **C.** $(2;7)$. **D.** $(-2;7)$.

Lời giải

Chọn A

Điểm biểu diễn số phức $z=2-7i$ có tọa độ là $(2;-7)$.

Câu 7: **(MĐ 103-2022)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=2+7i$ có tọa độ là

A. $(2;-7)$. **B.** $(2;7)$. **C.** $(7;2)$. **D.** $(-2;-7)$

Lời giải

Chọn B

$z=2+7i$ nên điểm biểu diễn có tọa độ là $(2;7)$.

Câu 8: **(MĐ 104-2022)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=2+7i$ có tọa độ là

A. $(2;-7)$. **B.** $(-2;-7)$. **C.** $(7;2)$. **D.** $(2;7)$.

Lời giải

Chọn D

Điểm biểu diễn số phức $z=2+7i$ có tọa độ là $(2;7)$.

Câu 9: **(MĐ 101-2022)** Cho hai số phức $z_1=2+3i$ và $z_2=1-i$. Số phức z_1+z_2 bằng

A. $5+i$. **B.** $3+2i$. **C.** $1+4i$. **D.** $3+4i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z_1+z_2=3+2i$

Câu 10: **(MĐ 102-2022)** Cho hai số phức $z_1=2+3i$ và $z_2=1-i$. Số phức z_1+z_2 bằng

A. $3+4i$. **B.** $1+4i$. **C.** $5+i$. **D.** $3+2i$.

Lời giải

Chọn D

Số phức $z_1+z_2=(2+1)+(3-1)i=3+2i$.

Câu 11: **(MĐ 103-2022)** Phần ảo của số phức $z=(2-i)(1+i)$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** -1. **D.** -3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z=(2-i)(1+i)=3+i$.

Vậy phần ảo của số phức z bằng 1.

Câu 12: **(MĐ 104-2022)** Phần ảo của số phức $z=(2-i)(1+i)$ bằng

A. -3. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

$z=(2-i)(1+i)=3+i$.

Do đó phần ảo của số phức z là 1.

Câu 13: **(MĐ 101-2022)** Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+z+6=0$. Khi đó $z_1+z_2+z_1z_2$ bằng

A. 7. **B.** 5. **C.** −7. **D.** −5.

Lời giải

Chọn B

Ta có z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+z+6=0$ nên có:

$$\begin{cases} z_1+z_2=-1 \\ z_1z_2=6 \end{cases} \Rightarrow z_1+z_2+z_1z_2=-1+6=5.$$

Câu 14: **(MĐ 102-2022)** Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+z+6=0$. Khi đó $z_1+z_2+z_1z_2$ bằng:

A. −5. **B.** −7. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Vì z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+z+6=0$ nên $\begin{cases} z_1+z_2=-1 \\ z_1z_2=6 \end{cases}$.

Khi đó: $z_1+z_2+z_1z_2=-1+6=5$..

Câu 15: **(MĐ 103-2022)** Gọi z_1,z_2 là nghiệm phức của phương trình $z^2-2z+5=0$. Giá trị của $z_1^2+z_2^2$ bằng

A. 6. **B.** $8i$. **C.** $-8i$. **D.** −6.

Lời giải

Chọn D

Theo Vi-et ta có $\begin{cases} z_1+z_2=2 \\ z_1.z_2=5. \end{cases}$

Khi đó $z_1^2+z_2^2=(z_1+z_2)^2-2z_1.z_2=2^2-2.5=-6$.

Câu 16: **(MĐ 104-2022)** Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-2z+5=0$. Khi đó $z_1^2+z_2^2$ bằng

A. 6. **B.** $-8i$. **C.** $8i$. **D.** −6.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z_1^2+z_2^2=(z_1+z_2)^2-2z_1.z_2=(-2)^2-2.5=-6$.

Câu 17: **(MĐ 101-2022)** Cho các số phức z_1,z_2,z_3 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=2|z_3|=2$ và $8(z_1+z_2)z_3=3z_1z_2$. Gọi A,B,C lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1,z_2,z_3 trên mặt phẳng tọa độ. Diện tích tam giác

ABC bằng

A. $\frac{\sqrt{55}}{32}$ **B.** $\frac{\sqrt{55}}{16}$ **C.** $\frac{\sqrt{55}}{24}$ **D.** $\frac{\sqrt{55}}{8}$

Lời giải

Chọn B

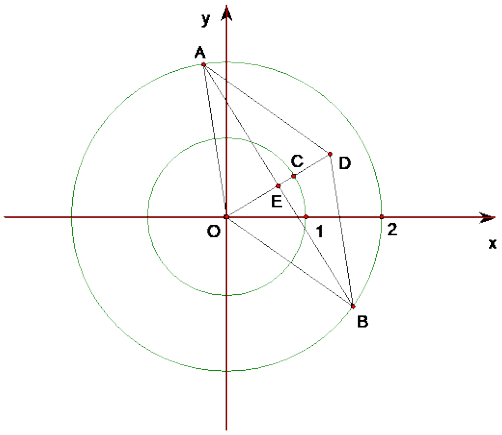
Ta có $|z_3|=1$. Từ $8(z_1+z_2)z_3=3z_1z_2 \Rightarrow 8|(z_1+z_2)z_3|=3|z_1z_2| \Rightarrow |z_1+z_2|=\frac{3|z_1z_2|}{8|z_3|}=\frac{3}{2}$

Mặt khác

$$z_3=\frac{3z_1z_2}{8(z_1+z_2)}=\frac{3z_1z_2.\overline{(z_1+z_2)}}{8(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}}=\frac{3z_1z_2.(\overline{z_1}+\overline{z_2})}{8.|z_1+z_2|^2}=\frac{3.z_2.|z_1|^2+3z_1.|z_2|^2}{8.|z_1+z_2|^2}=\frac{2}{3}(z_1+z_2)$$

(do $z_1.\overline{z_1}=z_2.\overline{z_2}=|z_1|^2=|z_2|^2=4;\ |z_1+z_2|=\frac{3}{2}$)

Gọi A,B,C lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1,z_2,z_3 trên mặt phẳng tọa độ. Ta thấy điểm A, B thuộc đường tròn tâm O bán kính bằng 2, điểm C thuộc đường tròn tâm O bán kính bằng 1.



Vẽ điểm D sao cho $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$. Tứ giác $OADB$ là hình thoi tâm E.

Ta có $|z_1+z_2|=\frac{3}{2} \Rightarrow OD=\frac{3}{2} \Rightarrow OE=\frac{1}{2}OD=\frac{3}{4}$. Xét tam giác vuông OAE có

$$AE=\sqrt{OA^2-OE^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{55}}{4} \Rightarrow AB=2AE=\frac{\sqrt{55}}{2}.$$

Mặt khác $z_3=\frac{2}{3}(z_1+z_2) \Rightarrow \overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}$ nên O,C,D thẳng hàng và $EC=OC-OE=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

Vậy $S_{ABC}=\frac{1}{2}.CE.AB=\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{55}}{2}=\frac{\sqrt{55}}{16}$ $(dvdt)$

Câu 18: **(MĐ 101-2022)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z^2|=2|z-\overline{z}|$ và $|(z-4)(\overline{z}-4i)|=|z+4i|^2$

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=a+bi \Rightarrow \overline{z}=a-bi,\ (a,b\in\mathbb{R})$

Ta có $|z^2|=2|z-\overline{z}| \Leftrightarrow a^2+b^2=4|bi| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2+b^2=4b,\ (b\geq 0) \\ a^2+b^2=-4b,\ (b<0) \end{array}\right.$ (1)

Ta lại có $\left|\overline{z}-4i\right|=\left|z+4i\right|$. Do đó suy ra

$$\left|(z-4)(\overline{z}-4i)\right|=\left|z+4i\right|^2 \Leftrightarrow \left|(z-4)\right|.\left|(\overline{z}-4i)\right|-\left|z+4i\right|^2=0 \Leftrightarrow \left|(z+4i)\right|\left(\left|(z-4)\right|-\left|z+4i\right|\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left|z+4i\right|=0\\ \left|z-4\right|=\left|z+4i\right|\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z+4i=0\\ \left|z-4\right|=\left|z+4i\right|\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a+(b+4)i=0\\ a=-b\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}a=0\\ b=-4\end{array}\right.\\ a=-b\end{array}\right.$$

Với $\left\{\begin{array}{l}a=0\\ b=-4\end{array}\right.$ thay vào (1) thỏa

Với $a=-b$ thay vào (1) ta được $\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}2b^2=4b\\ b\geq 0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}2b^2=-4b\\ b<0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}b=2\\ a=-2\end{array}\right.\\ a=b=0\\ \left\{\begin{array}{l}b=-2\\ a=2\end{array}\right.\end{array}\right.$

Vậy có 4 số phức thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 19: **(MĐ 102-2022)** Cho các số phức z_1,z_2,z_3 thỏa mãn $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=2\left|z_3\right|=2$ và $3z_1z_2=4z_3\left(z_1+z_2\right)$. Gọi A,B,C lần lượt là điểm biểu diễn của z_1,z_2,z_3 trên mặt phẳng tọa độ. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $\frac{\sqrt{7}}{4}$. **B.** $\frac{3\sqrt{7}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $3z_1z_2=4z_3\left(z_1+z_2\right)\Leftrightarrow\left|3z_1z_2\right|=\left|4z_3\left(z_1+z_2\right)\right|\Leftrightarrow\left|z_1+z_2\right|=\frac{3\left|z_1\right|.\left|z_2\right|}{4\left|z_3\right|}=\frac{3.2.2}{4.1}=3$

$\Rightarrow\left|z_1-z_2\right|^2=2\left|z_1\right|^2+2\left|z_2\right|^2-\left|z_1+z_2\right|^2=2.2^2+2.2^2-3^2=7\Leftrightarrow\left|z_1-z_2\right|=\sqrt{7}$

Đồng thời $\left|z_1+z_2\right|^2=\left(z_1+z_2\right)\left(\overline{z_1+z_2}\right)=\left(z_1+z_2\right)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)=z_1.\overline{z_1}+z_2.\overline{z_2}+\overline{z_1}.z_2+z_1.\overline{z_2}$

$\Rightarrow\overline{z_1}.z_2+z_1.\overline{z_2}=\left|z_1+z_2\right|^2-\left|z_1\right|^2-\left|z_2\right|^2=3^2-2^2-2^2=1$

Lại có:

$$3z_1z_2=4z_3\left(z_1+z_2\right)\Leftrightarrow 3z_1\left(z_2-z_3\right)=z_3\left(z_1+4z_2\right)\Leftrightarrow\left|z_2-z_3\right|=\frac{\left|z_3\right|.\left|z_1+4z_2\right|}{3\left|z_1\right|}=\frac{1}{6}.\left|z_1+4z_2\right|$$

$$3z_1z_2=4z_3\left(z_1+z_2\right)\Leftrightarrow 3z_2\left(z_1-z_3\right)=z_3\left(4z_1+z_2\right)\Leftrightarrow\left|z_1-z_3\right|=\frac{\left|z_3\right|.\left|4z_1+z_2\right|}{3\left|z_2\right|}=\frac{1}{6}.\left|4z_1+z_2\right|$$

Mà $\left\{\begin{array}{l}\left|z_1+4z_2\right|^2=\left(z_1+4z_2\right)\left(\overline{z_1+4z_2}\right)=\left(z_1+4z_2\right)\left(\overline{z_1}+4\overline{z_2}\right)=z_1.\overline{z_1}+16z_2.\overline{z_2}+4\overline{z_1}.z_2+4z_1.\overline{z_2}=72\\ \left|4z_1+z_2\right|^2=\left(4z_1+z_2\right)\left(\overline{4z_1+z_2}\right)=\left(4z_1+z_2\right)\left(\overline{4z_1}+\overline{z_2}\right)=16z_1.\overline{z_1}+z_2.\overline{z_2}+4\overline{z_1}.z_2+4z_1.\overline{z_2}=72\end{array}\right.$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z_2 - z_3| = \frac{1}{6}.|z_1 + 4z_2| = \frac{1}{6}.\sqrt{72} = \sqrt{2} \\ |z_1 - z_3| = \frac{1}{6}.|4z_1 + z_2| = \frac{1}{6}.\sqrt{72} = \sqrt{2} \end{cases}$$

Khi đó $AB = |z_1 - z_2| = \sqrt{7}, AC = |z_1 - z_3| = \sqrt{2}, BC = |z_2 - z_3| = \sqrt{2}$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Câu 20: **(MĐ 102-2022)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z^2| = |z - \bar{z}|$ và $|(z+2)(\bar{z}+2i)| = |z-2i|^2$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z = a + bi, \forall a; b \in \mathbb{R}$.

Ta có: $|z^2| = |z - \bar{z}| \Rightarrow |z^2| = |2bi| \Rightarrow a^2 + b^2 = 2|b| (*)$

$|(z+2)||(\bar{z}+2i)| = |z-2i|^2 (**)$

Vì $\overline{\bar{z}+2i} = z - 2i$ nên $|\bar{z}+2i| = |z-2i|$.

Nên từ (**) $|(z+2)||z-2i| = |z-2i|^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2i \\ |z+2| = |z-2i| \end{array}\right.$

Ta có: $|z+2| = |z-2i| \Rightarrow (a+2)^2 + b^2 = a^2 + (b-2)^2 \Leftrightarrow a = -b$ thay vào (*) ta được:

$$b^2 + b^2 = 2|b| \Rightarrow b^2 = |b| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = \pm 1 \end{array}\right.$$

Vậy có tất cả 4 số phức thỏa mãn là: $0,\ 2i,\ -1+i,\ 1-i$.

Câu 21: **(MĐ 103-2022)** Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $2|z_1| = 2|z_2| = |z_3| = 2$ và $(z_1 + z_2)z_3 = 3z_1z_2$. Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 trên mặt phẳng tọa độ. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $\frac{5\sqrt{7}}{8}$. **B.** $\frac{5\sqrt{7}}{16}$. **C.** $\frac{5\sqrt{7}}{24}$. **D.** $\frac{5\sqrt{7}}{32}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $|z_1|^2 = z_1\bar{z}_1 = 1, |z_2|^2 = z_2\bar{z}_2 = 1, |z_3|^2 = z_3\bar{z}_3 = 4$.

$$(z_1 + z_2)z_3 = 3z_1z_2 \Rightarrow |z_1 + z_2|.|z_3| = 3|z_1|.|z_2| \Rightarrow |z_1 + z_2| = \frac{3}{2}.$$

$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)=z_1\overline{z}_2+z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2+z_2\overline{z}_2\Rightarrow z_1\overline{z}_2+\overline{z}_1z_2=\frac{1}{4}$.

$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)=z_1\overline{z}_1-z_1\overline{z}_2-\overline{z}_1z_2+z_2\overline{z}_2=\frac{7}{4}\Rightarrow|z_1-z_2|=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Tương tự, ta tính được: $|z_1-z_3|=|z_2-z_3|=\sqrt{2}$.

Tam giác ABC có độ dài các cạnh là $\frac{\sqrt{7}}{2},\sqrt{2},\sqrt{2}$ nên có diện tích là $S_{ABC}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$.

Câu 22: **(MĐ 103-2022)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z^2|=|z-\overline{z}|$ và $|(z-2)(\overline{z}-2i)|=|z+2i|^2$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Số phức $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$.

Từ $|z^2|=|z-\overline{z}|$ ta có $\sqrt{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2}=2|b|\Leftrightarrow a^2+b^2=2|b|\Leftrightarrow a^2=-b^2+2|b|$. (1)

Từ $|(z-2)(\overline{z}-2i)|=|z+2i|^2$ ta suy ra $\sqrt{(a-2)^2+b^2}.\sqrt{a^2+(b+2)^2}=\sqrt{a^2+(b+2)^2}^2$

$\Leftrightarrow\sqrt{a^2+(b+2)^2}.\left[\sqrt{(a-2)^2+b^2}-\sqrt{a^2+(b+2)^2}\right]=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{a^2+(b+2)^2}=0\\\sqrt{(a-2)^2+b^2}-\sqrt{a^2+(b+2)^2}=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(a;b)=(0;-2)\quad(*)\\(a-2)^2+b^2=a^2+(b+2)^2\quad(**)\end{array}\right.$

Kết hợp với đk (1) ta thấy có các cặp giá trị $(a;b)$ thỏa mãn ycbt là

$(0;-2);(0;0);(1;-1);(-1;1)$.

Vậy có 4 số phức thỏa mãn ycbt.

Câu 23: **(MĐ 104-2022)** Cho các số phức z_1,z_2,z_3 thỏa mãn $2|z_1|=2|z_2|=|z_3|=2$ và $(z_1+z_2)z_3=2z_1z_2$. Gọi A,B,C lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1,z_2,z_3 trên mặt phẳng tọa độ. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2|z_1| = 2|z_2| = |z_3| = 2$ suy ra $\begin{cases} |z_1| = 1 \\ |z_2| = 1 \\ |z_3| = 2 \end{cases}$

A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 trên mặt phẳng tọa độ nên A, B thuộc đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $R = 1$; Điểm C đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $r = 2$.

Lại có $(z_1 + z_2)z_3 = 2z_1z_2$ nên $|(z_1 + z_2)z_3| = |2z_1z_2| \Leftrightarrow |z_1 + z_2||z_3| = 2|z_1||z_2| \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = 1$

Áp dụng công thức: $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$

Ta có $|z_1 - z_2| = \sqrt{3} \Leftrightarrow AB = \sqrt{3}$.

Gọi H là trung điểm của AB, ta có $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}; OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \frac{1}{2}$.

Mặt khác:

$$(z_1 + z_2)z_3 = 2z_1z_2 \Leftrightarrow z_3 = \frac{2z_1z_2}{(z_1 + z_2)} = \frac{2z_1z_2(\overline{z_1} + \overline{z_2})}{|z_1 + z_2|^2} = \frac{2(|z_1|^2 z_2 + |z_2|^2 z_1)}{1} = 2(z_1 + z_2)$$

Suy ra $\overrightarrow{OC} = 2\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) = 4\overrightarrow{OH} \Rightarrow \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{OH} \Rightarrow CH = 3.OH = \frac{3}{2}$

Diện tích tam giác ABC bằng $S = \frac{1}{2}CH.AB = \frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Vậy **Chọn A**

Câu 24: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z^2| = 2|z - \overline{z}|$ và $|(z+4)(\overline{z} + 4i)| = |z - 4i|^2$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $|(z+4)(\overline{z} + 4i)| = |z - 4i|^2 \Leftrightarrow |z + 4||z - 4i| = |z - 4i|^2 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4i \\ |z + 4| = |z - 4i|. (1) \end{cases}$

Với $z = 4i$ thay vào $|z^2| = 2|z - \overline{z}|$ luôn đúng.

Đặt $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Khi đó

$(1) \Leftrightarrow (a+4)^2 + b^2 = a^2 + (b-4)^2 \Leftrightarrow a = -b$.

Thay $z = a - ai$ vào $|z^2| = 2|z - \overline{z}| \Leftrightarrow 2a^2 = 2|2a| \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ |a| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \\ a = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = 2 + 2i \\ z = -2 - 2i. \end{cases}$

Vậy có 4 số phức thỏa mãn.

Câu 25: **(TK 2020-2021)** Số phức liên hợp của số phức $z = 3 + 2i$ là:

A. $\overline{z}=3-2i.$ **B.** $\overline{z}=2+3i.$ **C.** $\overline{z}=-3+2i.$ **D.** $\overline{z}=-3-2i.$

Lời giải

Ta có $\overline{(a+bi)}=a-bi$ nên $\overline{z}=3-2i.$

Câu 26: **(2020-2021 – ĐỢT 1)** Phần thực của số phức $z=5-2i$ bằng

A. 5. **B.** 2. **C.** -5. **D.** -2.

Lời giải

Phần thực của số phức $z=5-2i$ bằng 5.

Câu 27: **(2020-2021 – ĐỢT 1)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-3;4)$ là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

A. $z_2=3+4i$. **B.** $z_3=-3+4i$. **C.** $z_4=-3-4i$. **D.** $z_1=3-4i$.

Lời giải

Điểm $M(a;b)$ trong mặt phẳng tọa độ được gọi là điểm biểu diễn số phức $z=a+bi$.

Do đó điểm $M(-3;4)$ điểm là điểm biểu diễn số phức $z=-3+4i.$

Câu 28: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-3;2)$ là điểm biểu diễn số phức nào dưới đây?

A. $z_3=3-2i$. **B.** $z_4=3+2i$. **C.** $z_1=-3-2i$. **D.** $z_2=-3+2i$.

Lời giải

Điểm $M(-3;2)$ biểu diễn số phức $z=-3+2i$.

Câu 29: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Phần thực của số phức $z=6-2i$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 6. **D.** -6.

Lời giải

Chọn C

Số phức $z=6-2i$ có phần thực là 6.

Câu 30: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-2;3)$ là điểm biểu diễn số phức nào dưới đây?

A. $z_3=2+3i$. **B.** $z_4=-2-3i$. **C.** $z_1=-2+3i$. **D.** $z_2=2-3i$.

Lời giải

Điểm $M(-2;3)$ biểu diễn số phức $z_1=-2+3i.$

Câu 31: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Phần thực của số phức $z=3-2i$ bằng

A. 2. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -2.

Lời giải

Phần thực của số phức $z=3-2i$ bằng 3.

Câu 32: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Phần thực của số phức $z=4-2i$ bằng

A. 2. **B.** -4. **C.** 4. **D.** -2.

Lời giải

Phần thực của số phức $z=4-2i$ là 4

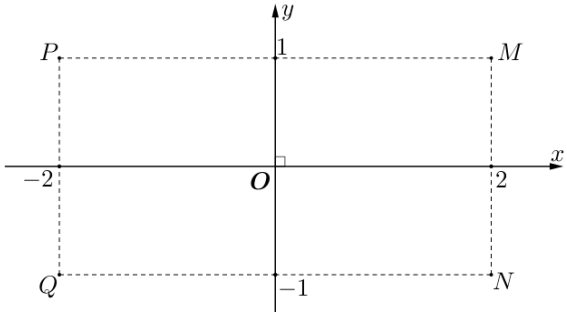
Câu 33: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Trên mặt phẳng toạ độ, điểm $M(-4;3)$ là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

A. $z_3=-4-3i$. **B.** $z_4=4+3i$. **C.** $z_2=4-3i$. **D.** $z_1=-4+3i$.

Lời giải

Điểm $M(-4;3)$ là điểm biểu diễn số phức $z_1=-4+3i$.

Câu 34: **(2020-2021 – ĐỢT 1)** Điểm nào trong hình bên là điểm biểu diễn của số phức $z=-2+i$?



A. Điểm P. **B.** Điểm Q. **C.** Điểm M. **D.** Điểm N.

Lời giải

Từ hình vẽ trên ta thấy điểm biểu diễn số phức $z=-2+i$ là điểm $P(-2;1)$.

Câu 35: **(2020-2021 – ĐỢT 1)** Phần ảo của số phức $z=2-3i$ bằng

A. -2. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Phần ảo của số phức $z=2-3i$ bằng -3.

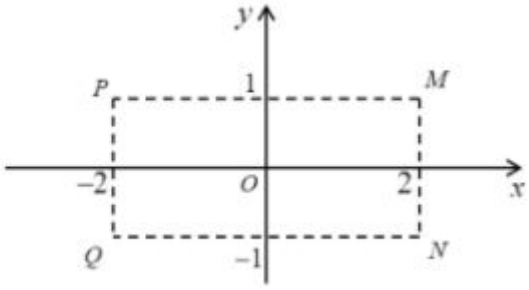
Câu 36: **(2020-2021 – ĐỢT 1)** Phần ảo của số phức $z=3-4i$ bằng

A. 4. **B.** -3. **C.** -4. **D.** 3.

Lời giải

Theo định nghĩa, phần ảo của số phức $z=3-4i$ bằng -4.

Câu 37: **(2020-2021 – ĐỢT 1)** Điểm nào trong hình bên là điểm biểu diễn của số phức $z=-2-i$.



A. Điểm Q. **B.** Điểm P. **C.** Điểm N. **D.** Điểm M.

Lời giải

Điểm biểu diễn của số phức $z=-2-i$ là điểm có tọa độ $(-2;-1)\Rightarrow$ chọn đáp án A

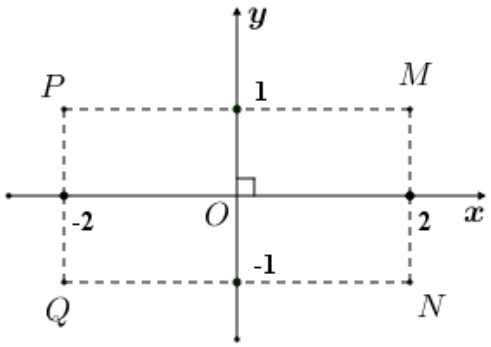
Câu 38: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Phần ảo của số phức $z=3-2i$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** -2. **D.** -3.

Lời giải

Số phức $z=3-2i$ có phần ảo bằng -2.

Câu 39: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Điểm nào trong hình bên là điểm biểu diễn của số phức $z=2-i$?



A. Điểm P. **B.** Điểm Q. **C.** Điểm M. **D.** Điểm N.

Lời giải

Điểm biểu diễn số phức $z=2-i$ là điểm $N(2;-1)$.

Câu 40: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Phần ảo của số phức $z=4-3i$ bằng

A. -3. **B.** -4. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Phần ảo của số phức $z=4-3i$ bằng -3.

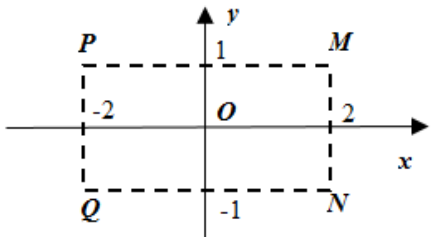
Câu 41: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho số phức z thỏa $iz=3+2i$. Số phức liên hợp của z là

A. $\overline{z}=2+3i$. **B.** $\overline{z}=-2-3i$. **C.** $\overline{z}=-2+3i$. **D.** $\overline{z}=2-3i$.

Lời giải

Ta có: $z=\dfrac{3+2i}{i}=2-3i\Rightarrow\overline{z}=2+3i$

Câu 42: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Điểm nào trong hình bên là điểm biểu diễn của số phức $z=2+i$



A. Điểm N. **B.** Điểm M. **C.** Điểm P. **D.** Điểm Q.

Lời giải

Ta có điểm biểu diễn số phức $z=2+i$ là điểm $M(2;1)$.

Câu 43: **(TK 2020-2021)** Cho số phức $z=3+i$ và $w=2+3i$. Số phức $z-w$ bằng

A. $1+4i$. **B.** $1-2i$. **C.** $5+4i$. **D.** $5-2i$.

Lời giải

Ta có $z-w=(3+i)-(2+3i)=1-2i.$

Câu 44: **(TK 2020-2021)** Trên mặt phẳng tọa đô, điểm biểu diễn số phức $3-2i$ có tọa độ là

A. $(2;3)$. **B.** $(-2;3)$. **C.** $(3;2)$. **D.** $(3;-2)$.

Lời giải

Điểm biểu diễn của $z=a+bi$ có tọa độ là $(a;b)$ nên $3-2i$ biểu diễn bởi $(3;-2)$.

Câu 45: Cho hai số phức $z=4+2i$ và $w=3-4i$. Số phức $z+w$ bằng

A. $1+6i$. **B.** $7-2i$. **C.** $7+2i$. **D.** $-1-6i$.

Lời giải

Ta có $z+w=4+2i+3-4i=7-2i$.

Câu 46: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hai số phức $z=5+2i$ và $w=1-4i$. Số phức $z+w$ bằng

A. $6+2i$. **B.** $4+6i$. **C.** $6-2i$. **D.** $-4-6i$.

Lời giải

Ta có: $z+w=(5+2i)+(1-4i)=6-2i$

Câu 47: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hai số phức $z=1+2i$ và $\mathrm{w}=3-4i$. Số phức $z+\mathrm{w}$ bằng

A. $2-6i$. **B.** $4+2i$. **C.** $4-2i$. **D.** $-2+6i$.

Lời giải

Ta có: $z+\mathrm{w}=(1+2i)+(3-4i)=(1+3)+(2-4)i=4-2i$.

Câu 48: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hai số phức $z=3+2i$ và $w=1-4i$. Số phức $z+w$ bằng

A. $4+2i$. **B.** $4-2i$. **C.** $-2-6i$. **D.** $2+6i$.

Lời giải

Ta có $z+w=(3+2i)+(1-4i)=4-2i$

Câu 49: Cho hai số phức $z=3+4i$ và $w=1-i$. Số phức $z-w$ bằng

A. $7+i$. **B.** $-2-5i$. **C.** $4+3i$. **D.** $2+5i$.

Lời giải

Ta có: $z-w=3+4i-(1-i)=2+5i$.

Câu 50: Cho hai số phức $z=4+3i$ và $w=1-i$. Số phức $z-w$ bằng

A. $5+2i$. **B.** $7-i$. **C.** $3+4i$. **D.** $-3-4i$.

Lời giải

Ta có $z-w=4+3i-(1-i)=3+4i$.

Câu 51: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hai số phức $z=2+3i$ và $w=1-i$. Số phức $z-w$ bằng

A. $z=1+4i$. **B.** $z=-1-4i$. **C.** $z=3+2i$. **D.** $z=5+i$.

Lời giải

Ta có $z-w=(2+3i)-(1-i)=(2-1)+[3-(-1)]i=1+4i$.

Câu 52: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hai số phức $z=3+2i$ và $w=1-i$. Số phức $z-w$ bằng

A. $2+3i$. **B.** $4+i$. **C.** $-2-3i$. **D.** $5-i$.

Lời giải

Ta có: $z-w=2+3i$.

Câu 53: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho số phức z thỏa mãn $iz=6+5i$. Số phức liên hợp của z là:

A. $\bar{z}=5-6i$. **B.** $\bar{z}=-5+6i$. **C.** $\bar{z}=5+6i$. **D.** $\bar{z}=-5-6i$.

Lời giải

Ta có: $iz=6+5i\Leftrightarrow z=\dfrac{6}{i}+5\Leftrightarrow z=\dfrac{6i}{i^2}+5\Leftrightarrow z=5-6i\Leftrightarrow \bar{z}=5+6i$.

Câu 54: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho số phức z thỏa mãn $iz=4+3i$. Số phức liên hợp của z là

A. $\bar{z}=3+4i$. **B.** $\bar{z}=-3-4i$. **C.** $\bar{z}=3-4i$. **D.** $\bar{z}=-3+4i$.

Lời giải

Ta có: $z=\dfrac{4+3i}{i}=\dfrac{(4+3i).(-i)}{-i^2}=\dfrac{-4i-3i^2}{1}=3-4i$. Suy ra $\bar{z}=3+4i.$

Câu 55: Cho số phức $z=4-i$, mô đun của số phức $(1+i)\bar{z}$ bằng

A. 34. **B.** 30. **C.** $\sqrt{34}$. **D.** $\sqrt{30}$.

Lời giải

Ta có $z=4-i$ suy ra $\bar{z}=4+i$.

$(1+i)\bar{z}=(1+i)(4+i)=4+i+4i+i^2=3+5i$.

$\left|(1+i)\bar{z}\right|=\left|3+5i\right|=\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$.

Câu 56: **(TK 2020-2021)** Cho số phức $z=3+4i$. Môđun của số phức $(1+i)z$ bằng

A. 50. **B.** 10. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $5\sqrt{2}$.

Lời giải

Dùng tính chất modun của tích: $\left|(1+i)z\right|=\left|1+i\right|\left|3+4i\right|=\sqrt{2}\cdot 5=5\sqrt{2}$.

Câu 57: Cho số phức $z=4-2i$. Môđun số phức $(1+i)\bar{z}$ bằng

A. $2\sqrt{10}$. **B.** 24. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** 40.

Lời giải

Ta có $(1+i)\bar{z}=(1+i)(4+2i)=4+6i+2i^2=4+6i-2=2+6i$.

Vậy môđun số phức $(1+i)\bar{z}$ bằng $\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$.

Câu 58: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho số phức $z=2-\mathrm{i}$, môđun của số phức $(1+\mathrm{i})\bar{z}$ bằng

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** 6. **D.** 10.

Lời giải

Ta có: $(1+\mathrm{i})\bar{z}=(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=1+3\mathrm{i}\Rightarrow\left|(1+\mathrm{i})\bar{z}\right|=\left|1+3\mathrm{i}\right|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.

Câu 59: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho số phức $z=3-2i$, mô đun của số phức $(1+i)\bar{z}$ bằng

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** 26. **D.** 10.

Lời giải

Ta có $(1+i)\overline{z}=(1+i)(3+2i)=1+5i$.

Vậy $\left|(1+i)\overline{z}\right|=\left|1+5i\right|=\sqrt{26}$.

Câu 60: **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Phần thực của số phức $z=3-4i$ bằng

A. 3 **B.** 4 **C.** -3 **D.** -4

Lời giải

Ta có phần thực của số phức $z=3-4i$ bằng 3

Câu 61: **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Phần thực của số phức $z=-5-4i$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** -4. **D.** -5.

Lời giải

Chọn D

Số phức $z=-5-4i$ có phần thực là -5.

Câu 62: **(Mã 103 -2018)** Số phức $5+6i$ có phần thực bằng

A. -6. **B.** 6. **C.** -5. **D.** 5

Lời giải

Chọn D

Số phức $5+6i$ có phần thực bằng 5, phần ảo bằng 6.

Câu 63: **(Mã 104 2018)** Số phức có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 3 là

A. $1-3i$ **B.** $-1+3i$ **C.** $1+3i$ **D.** $-1-3i$

Lời giải

Chọn C

Câu 64: **(Mã 102 2018)** Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4 là

A. $3+4i$ **B.** $4-3i$ **C.** $3-4i$ **D.** $4+3i$

Lời giải

Chọn A

Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4 là: $z=3+4i$.

Câu 65: **(Đề Tham Khảo 2017)** Kí hiệu a,b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $3-2\sqrt{2}i$. Tìm a, b.

A. $a=3;b=\sqrt{2}$ **B.** $a=3;b=-2\sqrt{2}$ **C.** $a=3;b=2$ **D.** $a=3;b=2\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn B

Số phức $3-2\sqrt{2}i$ có phần thực là $a=3$ và phần ảo là $b=-2\sqrt{2}$.

Câu 66: **(Mã 101 2018)** Số phức $-3+7i$ có phần ảo bằng:

A. 7 **B.** -7 **C.** -3 **D.** 3

Lời giải

Chọn A

Câu 67: **(Mã 123 2017)** Số phức nào dưới đây là số thuần ảo.

A. $z=\sqrt{3}+i$ **B.** $z=-2$ **C.** $z=-2+3i$ **D.** $z=3i$

Lời giải

Chọn D

Số phức z được gọi là số thuần ảo nếu phần thực của nó bằng 0.

Câu 68: **(Mã 105 2017)** Cho số phức $z=2-3i$. Tìm phần thực a của z?

A. $a=2$ **B.** $a=3$ **C.** $a=-2$ **D.** $a=-3$

Lời giải

Chọn A

Số phức $z=2-3i$ có phần thực $a=2$.

Câu 69: **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Môđun của số phức $1+2i$ bằng

A. 5. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|1+2i|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

Câu 70: **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Số phức liên hợp của số phức $z=2+i$ là

A. $\overline{z}=-2+i$. **B.** $\overline{z}=-2-i$. **C.** $\overline{z}=2-i$. **D.** $\overline{z}=2+i$.

Lời giải

Chọn C

Số phức liên hợp của số phức $z=2+i$ là $\overline{z}=2-i$.

Câu 71: **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Số phức liên hợp của số phức $z=-3+5i$ là:

A. $\overline{z}=-3-5i$. **B.** $\overline{z}=3+5i$. **C.** $\overline{z}=-3+5i$. **D.** $\overline{z}=3-5i$.

Lời giải

Chọn A

Câu 72: **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Số phức liên hợp của số phức $z=-2+5i$ là

A. $\overline{z}=2-5i$. **B.** $\overline{z}=2+5i$. **C.** $\overline{z}=-2+5i$. **D.** $\overline{z}=-2-5i$.

Lời giải

Chọn D

Số phức liên hợp của số phức $z=-2+5i$ là $\overline{z}=-2-5i$.

Câu 73: **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Số phức liên hợp của số phức $z=2-5i$ là

A. $\overline{z}=2+5i$. **B.** $\overline{z}=-2+5i$. **C.** $\overline{z}=2-5i$. **D.** $\overline{z}=-2-5i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có số phức liên hợp của số phức $z=2-5i$ là $\overline{z}=2+5i$.

Câu 74: **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Số phức liên hợp của số phức $z=3-5i$ là

A. $\bar{z}=-3-5i$. **B.** $\bar{z}=3+5i$. **C.** $\bar{z}=-3+5i$. **D.** $\bar{z}=3-5i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z=3-5i\Rightarrow\bar{z}=3+5i$.

Câu 75: **(Đề Minh Họa 2017)** Cho số phức $z=3-2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$:

A. Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng $2i$ **B.** Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng 2

C. Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng $-2i$ **D.** Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng -2

Lời giải

Chọn B

$z=3-2i\Rightarrow\bar{z}=3+2i$. Vậy phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng 2.

Câu 76: **(Mã 104 2019)** Số phức liên hợp của số phức $z=3-2i$ là.

A. $3+2i$. **B.** $-3-2i$. **C.** $-2+3i$. **D.** $-3+2i$.

Lời giải

Chọn A

Số phức liên hợp của số phức $z=a+bi$ là số phức $\bar{z}=a-bi$ từ đó suy ra chọn đáp án **B.**

Câu 77: **(Mã 103 - 2019)** Số phức liên hợp của số phức $1-2i$ là:

A. $-1-2i$. **B.** $1+2i$. **C.** $-2+i$. **D.** $-1+2i$.

Lời giải

Chọn B

Theo định nghĩa số phức liên hợp của số phức $z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$ là số phức $z=a-bi,\ a,b\in\mathbb{R}$.

Câu 78: **(Mã 104 2017)** Cho số phức $z=2+i$. Tính $|z|$.

A. $|z|=\sqrt{5}$ **B.** $|z|=5$ **C.** $|z|=2$ **D.** $|z|=3$

Lời giải

Chọn A

Ta có $|z|=\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}$.

Câu 79: **(Mã 102 - 2019)** Số phức liên hợp của số phức $5-3i$ là

A. $-3+5i$. **B.** $-5-3i$. **C.** $5+3i$. **D.** $-5+3i$.

Lời giải

Chọn C

Số phức liên hợp của số phức $5-3i$ là $5+3i$

Câu 80: **(Mã 101 - 2019)** Số phức liên hợp của số phức $3-4i$ là

A. $3+4i$. **B.** $-4+3i$. **C.** $-3-4i$. **D.** $-3+4i$.

Lời giải

Chọn A

Số phức liên hợp của số phức $a+bi$ là số phức $a-bi$.

Vậy số phức liên hợp của số phức $3-4i$ là số phức $3+4i$.

Câu 81: **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=(1+2i)^2$ là điểm nào dưới đây?

A. $P(-3;4)$. **B.** $Q(5;4)$. **C.** $N(4;-3)$. **D.** $M(4;5)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z=(1+2i)^2=1^2+2.1.2i+(2i)^2=-3+4i$.

Vậy trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=(1+2i)^2$ là điểm $P(-3;4)$.

Câu 82: **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=-1+2i$ là điểm nào dưới đây?

A. $Q(1;2)$. **B.** $P(-1;2)$. **C.** $N(1;-2)$. **D.** $M(-1;-2)$.

Lời giải

Chọn B

Điểm biểu diễn số phức $z=-1+2i$ là điểm $P(-1;2)$.

Câu 83: **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Trên mặt phẳng tọa độ, biết $M(-3;1)$ là điểm biểu diễn số phức z. Phần thực của z bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Điểm $M(-3;1)$ là điểm biểu diễn số phức z, suy ra $z=-3+i$.

Vậy phần thực của z bằng -3.

Câu 84: **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Trên mặt phẳng tọa độ, biết $M(-1;3)$ là điểm biểu diễn số phức z. Phần thực của z bằng

A. 3. **B.** -1. **C.** -3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $M(-1;3)$ là điểm biểu diễn số phức $z \Rightarrow z=-1+3i$.

Vậy phần thực của z bằng -1.

Câu 85: **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Trong mặt phẳng tọa độ, biết điểm $M(-2;1)$ là điểm biểu diễn số phức z. Phần thực của z bằng:

A. -2 **B.** 2 **C.** 1 **D.** -1

Lời giải

Chọn A

Điểm $M(-2;1)$ là điểm biểu diễn số phức $z \Rightarrow z=-2+i$

Vậy phần thực của z là -2

Câu 86: **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $z=1-2i$?

A. $Q(1;2)$. **B.** $M(2;1)$. **C.** $P(-2;1)$. **D.** $N(1;-2)$.

Lời giải

Chọn D

Điểm biểu diễn số phức $z=1-2i$ là điểm $N(1;-2)$.

Câu 87: **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $z=3-2i$?

A. $P(-3;2)$. **B.** $Q(2;-3)$. **C.** $N(3;-2)$. **D.** $M(-2;3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z=a+bi \Rightarrow N(a;b)$ là điểm biểu diễn của số phức z

$z=3-2i \Rightarrow N(3;-2)$

Câu 88: **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $z=-1+2i$?

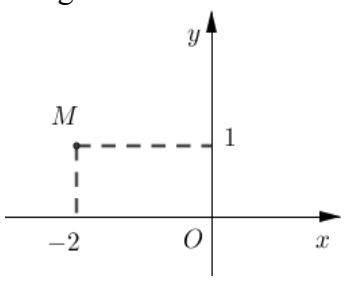
A. $N(-1;2)$. **B.** $P(2;-1)$. **C.** $Q(-2;1)$. **D.** $M(1;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Điểm biểu diễn số phức $z=-1+2i$ là điểm $N(-1;2)$.

Câu 89: **(Đề Tham Khảo 2018)** Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức



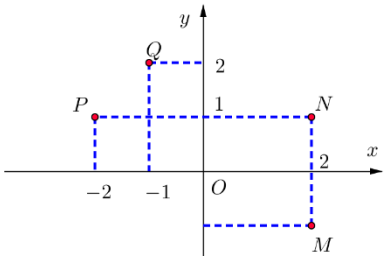
A. $z=1+2i$ **B.** $z=1-2i$ **C.** $z=2+i$ **D.** $z=-2+i$

Lời giải

Chọn D

Theo hình vẽ $M(-2;1) \Rightarrow z=-2+i$

Câu 90: **(Đề Tham Khảo 2019)** Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức $z=-1+2i$?



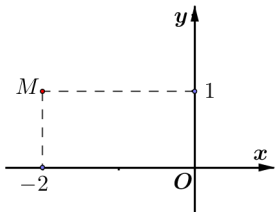
A. P **B.** M **C.** Q **D.** N

Lời giải

Chọn C

Ta có điểm biểu diễn của số phức $z=-1+2i$ trên hệ trục tọa độ Oxy là điểm $Q(-1;2)$

Câu 91: **(Mã 110 2017)** Số phức nào dưới đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm M như hình bên?



A. $z_1=1-2i$ **B.** $z_2=1+2i$ **C.** $z_3=-2+i$ **D.** $z_4=2+i$

Lời giải

Chọn C

Điểm $M(-2;1)$ là điểm biểu diễn số phức $z_1=-2+i$

Câu 92: **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z_1=-3+i$ và $z_2=1-i$. Phần ảo của số phức $z_1+\overline{z_2}$ bằng

A. -2. **B.** $2i$. **C.** 2. **D.** $-2i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overline{z_2}=1+i$. Do đó $z_1+\overline{z_2}=(-3+i)+(1+i)=-2+2i$.

Vậy phần ảo của số phức $z_1+\overline{z_2}$ bằng 2.

Câu 93: **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hai số phức $z_1=2+i$ và $z_2=1+3i$. Phần thực của số phức z_1+z_2 bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** -2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z_1+z_2=3+4i$.

Phần thực của số phức z_1+z_2 bằng 3.

Câu 94: **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z_1=3-2i$ và $z_2=2+i$. Số phức z_1+z_2 bằng

A. $5+i$. **B.** $-5+i$. **C.** $5-i$. **D.** $-5-i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z_1+z_2=3-2i+2+i=5-i$.

Câu 95: **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z_1=1-2i$ và $z_2=2+i$. Số phức z_1+z_2 bằng

A. $3+i$ **B.** $-3-i$ **C.** $3-i$ **D.** $-3+i$

Lời giải

Chọn C

Tacó: $z_1+z_2=1-2i+2+i=3-i$.

Câu 96: **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hai số phức $z_1=1-3i$ và $z_2=3+i$. Số phức z_1+z_2 bằng.

A. $4-2i$. **B.** $-4+2i$. **C.** $4+2i$. **D.** $-4-2i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $z_1+z_2=1-3i+3+i=4-2i$.

Câu 97: **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho hai số phức $z_1=1+2i$ và $z_2=4-i$. Số phức z_1-z_2 bằng

A. $3+3i$. **B.** $-3-3i$. **C.** $-3+3i$. **D.** $3-3i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z_1-z_2=(1+2i)-(4-i)=-3+3i$.

Câu 98: **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Cho hai số phức $z_1=1-3i$ và $z_2=3+i$. Số phức z_1-z_2 bằng

A. $-2-4i$. **B.** $2-4i$. **C.** $-2+4i$. **D.** $2+4i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z_1-z_2=(1-3i)-(3+i)=1-3i-3-i=-2-4i$.

Câu 99: **(Mã 104 - 2019)** Cho hai số phức $z_1=2-i$ và $z_2=1+i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn của số phức $2z_1+z_2$ có tọa độ là

A. $(0;5)$. **B.** $(5;-1)$. **C.** $(-1;5)$. **D.** $(5;0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2z_1+z_2=5-i$.

Câu 100: **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Cho hai số phức $z_1=3-2i$ và $z_2=2+i$. Số phức z_1-z_2 bằng

A. $-1+3i$. **B.** $-1-3i$. **C.** $1+3i$. **D.** $1-3i$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $z_1-z_2=3-2i-(2+i)=1-3i$

Câu 101: **(Mã 103 - 2019)** Cho hai số phức $z_1=1+i$ và $z_2=2+i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức z_1+2z_2 có tọa độ là

A. $(3;5)$. **B.** $(5;2)$. **C.** $(5;3)$. **D.** $(2;5)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z_1+2z_2=(1+i)+2(2+i)=5+3i$.

Do đó điểm biểu diễn số phức z_1+2z_2 có tọa độ là $(5;3)$.

Câu 102: **(Mã 123 2017)** Cho 2 số phức $z_1=5-7i$ và $z_2=2+3i$. Tìm số phức $z=z_1+z_2$.

A. $z=3-10i$ **B.** 14 **C.** $z=7-4i$ **D.** $z=2+5i$

Lời giải

Chọn C

$z=5-7i+2+3i=7-4i$.

Câu 103: **(Đề Minh Họa 2017)** Cho hai số phức $z_1=1+i$ và $z_2=2-3i$. Tính môđun của số phức z_1+z_2.

A. $|z_1+z_2|=5$. **B.** $|z_1+z_2|=\sqrt{5}$. **C.** $|z_1+z_2|=1$. **D.** $|z_1+z_2|=\sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn D

$z_1+z_2=1+i+(2-3i)=3-2i$ nên ta có: $|z_1+z_2|=|3-2i|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$.

Câu 104: **(Mã 110 2017)** Cho hai số phức $z_1=4-3i$ và $z_2=7+3i$. Tìm số phức $z=z_1-z_2$.

A. $z=-3-6i$ **B.** $z=11$ **C.** $z=-1-10i$ **D.** $z=3+6i$

Lời giải

Chọn A

Ta có $z=z_1-z_2=(4-3i)-(7+3i)=-3-6i$.

Câu 105: **(Mã 104 2017)** Cho số phức $z_1=1-2i$, $z_2=-3+i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $z=z_1+z_2$ trên mặt phẳng tọa độ.

A. $M(2;-5)$ **B.** $P(-2;-1)$ **C.** $Q(-1;7)$ **D.** $N(4;-3)$

Lời giải

Chọn B

$z=z_1+z_2=-2-i$.

Câu 106: **(Mã 104 2017)** Tìm số phức z thỏa mãn $z+2-3i=3-2i$.

A. $z=5-5i$ **B.** $z=1-i$ **C.** $z=1-5i$ **D.** $z=1+i$

Lời giải

Chọn D

$z+2-3i=3-2i \Leftrightarrow z=3-2i-2+3i=1+i$.

Câu 107: (Mã 105 2017) Cho hai số phức $z_1=1-3i$ và $z_2=-2-5i$. Tìm phần ảo b của số phức $z=z_1-z_2$.

A. $b=-3$ **B.** $b=2$ **C.** $b=-2$ **D.** $b=3$

Lời giải

Chọn B

Ta có $z=z_1-z_2=3+2i \Rightarrow b=2$

Câu 108: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Cho hai số phức $z_1=3-i$ và $z_2=-1+i$. Phần ảo của số phức z_1z_2 bằng

A. 4. **B.** $4i$. **C.** -1. **D.** $-i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $z_1z_2=(3-i)(-1+i)=-2+4i$.

Suy ra phần ảo của z_1z_2 bằng 4.

Câu 109: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Cho hai số phức $z=1+2i$ và $w=3+i$. Môđun của số phức $z.\overline{w}$ bằng

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** 26. **D.** 50.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left|z.\overline{w}\right|=|z|.\left|\overline{w}\right|=|z|.|w|=\sqrt{1+2^2}.\sqrt{3^2+1}=5\sqrt{2}$.

Câu 110: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Cho hai số phức $z=2+2i$ và $w=2+i$. Mô đun của số phức $z\overline{w}$

A. 40. **B.** 8. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn D

$\left|z\overline{w}\right|=\left|(2+2i)(2-i)\right|=\left|6+2i\right|=2\sqrt{10}$

Câu 111: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Cho hai số phức $z=4+2i$ và $w=1+i$. Môđun của số phức $z.\overline{w}$ bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 8. **C.** $2\sqrt{10}$. **D.** 40.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z.\overline{w}=(4+2i)(1-i)=6-2i$. Suy ra $\left|z.\overline{w}\right|=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$.

Câu 112: (Mã 104 - 2020 Lần 1) Cho hai số phức $z=1+3i$ và $w=1+i$. Môđun của số phức $z.\overline{w}$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 20. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $w=1+i\Rightarrow \overline{w}=1-i$

$z.\overline{w}=(1+3i)(1-i)=4+2i$

Từ đây ta suy ra: $|z.\overline{w}|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

Câu 113: (Mã 102 - 2020 Lần 2) Cho số phức $z=2-i$, số phức $(2-3i)\overline{z}$ bằng

A. $-1+8i$. **B.** $-7+4i$. **C.** $7-4i$. **D.** $1+8i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $(2-3i)\overline{z}=(2-3i)(2+i)=7-4i$.

Câu 114: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Cho số phức $z=-2+3i$, số phức $(1+i)\overline{z}$ bằng

A. $-5-i$. **B.** $-1+5i$. **C.** $1-5i$. **D.** $5-i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z=-2+3i\Rightarrow \overline{z}=-2-3i$. Do đó $(1+i)\overline{z}=(1+i).(-2-3i)=1-5i$.

Câu 115: (Mã 104 - 2020 Lần 2) Cho số phức $z=-3+2i$, số phức $(1-i)\overline{z}$ bằng

A. $-1-5i$ **B.** $5-i$. **C.** $1-5i$. **D.** $-5+i$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\overline{z}=-3-2i$ nên ta có $(1-i)\overline{z}=(1-i)(-3-2i)=-5+i$

Câu 116: (Đề Minh Họa 2017) Cho số phức $z=2+5i$. Tìm số phức $w=iz+\overline{z}$

A. $w=-3-3i$. **B.** $w=3+7i$.. **C.** $w=-7-7i$ **D.** $w=7-3i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $w=iz+\overline{z}=i(2+5i)+(2-5i)=2i-5+2-5i=-3-3i$

Câu 117: (Đề Tham Khảo 2017) Tính môđun của số phức z biết $\overline{z}=(4-3i)(1+i)$.

A. $|z|=5\sqrt{2}$ **B.** $|z|=\sqrt{2}$ **C.** $|z|=25\sqrt{2}$ **D.** $|z|=7\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn A

$\overline{z}=(4-3i)(1+i)=7+i\Rightarrow z=7-i\Rightarrow |z|=5\sqrt{2}$

Câu 118: (Mã 110 2017) Cho số phức $z=1-i+i^3$. Tìm phần thực a và phần ảo b của z.

A. $a=1,b=0$ **B.** $a=0,b=1$ **C.** $a=1,b=-2$ **D.** $a=-2,b=1$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z=1-i+i^3=1-i+i^2.i=1-i-i=1-2i$ (vì $i^2=-1$)
Suy ra phần thực của z là $a=1$, phần ảo của z là $b=-2$.

Câu 119: **(Mã 123 2017)** Cho số phước $z=1-2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w=iz$ trên mặt phẳng tọa độ

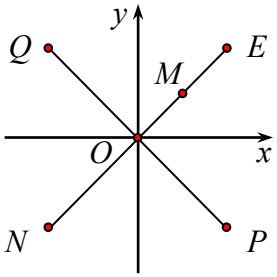
A. $Q(1;2)$ **B.** $N(2;1)$ **C.** $P(-2;1)$ **D.** $M(1;-2)$

Lời giải

Chọn B

$w=iz=i(1-2i)=2+i$

Câu 120: **(Đề Tham Khảo 2017)** Trong mặt phẳng tọa độ, điểm M là điểm biểu diễn của số phức z. Điểm nào trong hình vẽ là điểm biểu diễn của số phức $2z$?



A. Điểm Q **B.** Điểm E **C.** Điểm P **D.** Điểm N

Lời giải

Chọn B

Gọi $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$. Điểm biểu diễn của z là điểm $M(a;b)$

$\Rightarrow 2z=2a+2bi$ có điểm biểu diễn trên mặt phẳng Oxy là $M_1(2a;2b)$.

Ta có $\overrightarrow{OM_1}=2\overrightarrow{OM}$ suy ra $M_1\equiv E$.

Câu 121: **(Mã 101 - 2019)** Cho hai số phức $z_1=1-i$ và $z_2=1+2i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $3z_1+z_2$ có tọa độ là:

A. $(1;4)$. **B.** $(-1;4)$. **C.** $(4;1)$. **D.** $(4;-1)$.

Lời giải

Chọn D

$3z_1+z_2=3(1-i)+(1+2i)=4-i$. Suy ra: Tọa độ điểm biểu diễn là: $(4;-1)$.

Câu 122: **(Mã 102 - 2019)** Cho hai số phức $z_1=-2+i$ và $z_2=1+i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $2z_1+z_2$ có tọa độ là

A. $(-3;3)$. **B.** $(-3;2)$. **C.** $(3;-3)$. **D.** $(2;-3)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $2z_1+z_2=-4+2i+1+i=-3+3i.$

Vậy điểm biểu diễn số phức $2z_1+z_2$ có tọa độ là $(-3;3)$.

Câu 123: (Mã 104 2018) Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(3-i)=5x-4i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=-1;y=-1$. **B.** $x=-1;y=1$. **C.** $x=1;y=-1$. **D.** $x=1;y=1$.

Lời giải

Chọn D

$$(2x-3yi)+(3-i)=5x-4i\Leftrightarrow(2x+3)-(3y+1)i=5x-4i\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3=5x\\3y+1=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$$

Câu 124: (Mã 105 2017) Tìm tất cả các số thực x,y sao cho $x^2-1+yi=-1+2i$.

A. $x=\sqrt{2},\ y=2$ **B.** $x=-\sqrt{2},\ y=2$ **C.** $x=0,\ y=2$ **D.** $x=\sqrt{2},\ y=-2$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Từ } x^2-1+yi=-1+2i\Rightarrow\begin{cases}x^2-1=-1\\y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=2\end{cases}$$

Câu 125: (Mã 101 2018) Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(1-3i)=x+6i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=1;y=-1$ **B.** $x=1;y=-3$ **C.** $x=-1;y=-3$ **D.** $x=-1;y=-1$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } (2x-3yi)+(1-3i)=x+6i\Leftrightarrow x+1+(-3y-9)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=0\\-3y-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-3\end{cases}.$$

Câu 126: (Mã 104 - 2019) Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z+3+16i=2(\overline{z}+i)$. Môđun của z bằng

A. $\sqrt{13}$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 13.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z=x+yi$.

$(2-i)z+3+16i=2(\overline{z}+i)$

$\Leftrightarrow(2-i)(x+yi)+3+16i=2(x-yi+i)$

$\Leftrightarrow 2x+2yi-xi+y+3+16i=2x-2yi+2i$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y+3=2x\\2y-x+16=-2y+2\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y+3=0 \\ -x+4y=-14 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$

Suy ra $z=2-3i$. Vậy $|z|=\sqrt{13}$.

Câu 127: **(Mã 103 - 2019)** Cho số z thỏa mãn $(2+i)z-4(\overline{z}-i)=-8+19i$. Môđun của z bằng

A. 13. **B.** 5. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=a+bi$; $\overline{z}=a-bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có:

$(2+i)z-4(\overline{z}-i)=-8+19i$

$\Leftrightarrow (2+i)(a+bi)-4(a-bi-i)=-8+19i$

$\Leftrightarrow -2a-b+(a+6b+4)=-8+19i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a-b=-8 \\ a+6b+4=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$

Vậy $z=3+2i \Rightarrow |z|=\sqrt{13}$.

Câu 128: **(Mã 102 2018)** Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x+2yi)+(2+i)=2x-3i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=2;y=-2$ **B.** $x=2;y=-1$ **C.** $x=-2;y=-2$ **D.** $x=-2;y=-1$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $(3x+2yi)+(2+i)=2x-3i$

$\Leftrightarrow 3x+2+(2y+1)=2x-3i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2=2x \\ 2y+1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$.

Câu 129: **(Đề Tham Khảo -2019)** Tìm các số thực a,b thỏa mãn $2a+(b+i)i=1+2i$ với i là đơn vị ảo.

A. $a=0,b=1$. **B.** $a=1,b=2$. **C.** $a=0,b=2$. **D.** $a=\frac{1}{2},b=1$.

Lời giải

Chọn B

$2a+(b+i)i=1+2i \Leftrightarrow 2a+bi+i^2=1+2i$

$\Leftrightarrow (2a-1)+bi=1+2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-1=1 \\ b=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$

Câu 130: (Mã 103 2018) Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x+yi)+(4-2i)=5x+2i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=2;\ y=4$ **B.** $x=-2;\ y=0$ **C.** $x=2;\ y=0$ **D.** $x=-2;\ y=4$

Lời giải

Chọn A

$(3x+yi)+(4-2i)=5x+2i \Leftrightarrow 2x-4+(4-y)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4=0 \\ 4-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}.$

Câu 131: (Mã 102 - 2019) Cho số phức z thoả mãn $3(\overline{z}-i)-(2+3i)z=7-16i$. Môđun của z bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 5. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z=a+bi\ (a;b\in\mathbb{R})$.

Theo đề ta có

$3(a-bi-i)-(2+3i)(a+bi)=7-16i \Leftrightarrow 3a-3bi-3i-2a-2bi-3ai+3b=7-16i$

$\Leftrightarrow (a+3b)+(-3a-5b-3)=7-16i \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b=7 \\ -3a-5b-3=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b=7 \\ -3a-5b=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}.$

Vậy $|z|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

Câu 132: (Mã 101 - 2019) Cho số phức z thỏa mãn $3(\overline{z}+i)-(2-i)z=3+10i$. Môđun của z bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** 3. **C.** 5. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$

$3\left(\overline{z}+i\right)-\left(2-i\right)z=3+10i$

$\Leftrightarrow 3\left(x-yi+i\right)-\left(2-i\right)\left(x+yi\right)=3+10i$

$\Leftrightarrow x-y+\left(x-5y+3\right)i=3+10i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=3 \\ x-5y+3=10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

$z=2-i$

Vậy $\left|z\right|=\sqrt{5}$

Câu 133: **(Đề Tham Khảo 2017)** Hỏi có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\left|z-i\right|=5$ và z^2 là số thuần ảo?

A. 4 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn A

Giả sử $z=a+bi\Rightarrow z^2=a^2-b^2+2abi$

Vì $\left|z-i\right|=5$ và z^2 là số thuần ảo ta có hệ phương trình

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+(b-1)^2=25 \\ a^2-b^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ b^2+(b-1)^2=25 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-b \\ b^2+(b-1)^2=25 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=4 \\ a=b=-3 \\ b=-a=4 \\ b=-a=-3 \end{array}\right. .$$

Câu 134: **(Mã 110 2017)** Cho số phức $z=a+bi\ \left(a,\ b\in\mathbb{R}\right)$ thoả mãn $z+2+i=\left|z\right|$. Tính $S=4a+b$.

A. $S=-4$ **B.** $S=2$ **C.** $S=-2$ **D.** $S=4$

Lời giải

Chọn A

Ta có $z+2+i=\left|z\right|\Leftrightarrow\left(a+2\right)+\left(b+1\right)i=\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow \begin{cases} a+2=\sqrt{a^2+b^2} & (1) \\ b+1=0 & (2) \end{cases}$

Từ (2) ta có: $b=-1$. Thay vào (1): $\sqrt{a^2+1}=a+2\Leftrightarrow \begin{cases} a+2\geq 0 \\ a^2+1=(a+2)^2 \end{cases}\Leftrightarrow a=\dfrac{-3}{4}$

Vậy $S=4a+b=-4$

Câu 135: (Đề Tham Khảo 2018) Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A. $P=-1$ **B.** $P=-5$ **C.** $P=3$ **D.** $P=7$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z+2+i-|z|(1+i)=0\Leftrightarrow a+bi+2+i-\sqrt{a^2+b^2}\,(1+i)=0$

$$\Leftrightarrow a+2-\sqrt{a^2+b^2}+\left(b+1-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}a+2-\sqrt{a^2+b^2}=0\ (1)\\ b+1-\sqrt{a^2+b^2}=0\ (2)\end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được: $a-b+1=0\Leftrightarrow b=a+1$. Thế vào (1) ta được:

$$a+2-\sqrt{a^2+(a+1)^2}=0\Leftrightarrow a+2=\sqrt{2a^2+2a+1}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge-2\\ a^2+4a+4=2a^2+2a+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge-2\\ a^2-2a-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge-2\\ \left[\begin{array}{l}a=3\quad(tm)\\ a=-1\quad(tm)\end{array}\right.\end{cases}$$

Với $a=3\Rightarrow b=4$; $a=-1\Rightarrow b=0$.

Vì $|z|>1\Rightarrow z=3+4i\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=4\end{cases}\Rightarrow P=a+b=3+4=7$.

Câu 136: (ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2020-2021) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$ và $(z+2i)(\bar{z}-2)$ là số thuần ảo?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Đặt $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$ thì

$$(z+2i)(\bar{z}-2)=(a+(b+2)i)(a-2-bi)=a(a-2)+b(b+2).$$

Do đó, ta có hệ $\begin{cases}a^2+b^2=2\\ a(a-2)+b(b+2)=0\end{cases}$ hay

$$\begin{cases}a^2+b^2=2\\ a-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(b+1)^2+b^2=2\\ a=b+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\\ a=b+1\end{cases}.$$

Vậy có hai số phức sao thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 137: (Mã 110 2017) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2-i|=2\sqrt{2}$ và $(z-1)^2$ là số thuần ảo?

A. 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Gọi số phức $z=x+yi\ \ (x,y\in\mathbb{R})$, vì $(z-1)^2=\left[(x-1)^2-y^2\right]+2(x-1)yi$ là số thuần ảo nên theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases}(x+2)^2+(y-1)^2=8 & (1)\\ (x-1)^2=y^2 & (2)\end{cases}$

Từ (2) suy ra: $y=\pm(x-1)$

• Với $y=x-1$, thay vào (1), ta được: $(x+2)^2+(x-2)^2=8\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0.$

Suy ra: $z=-i$.

• Với $y=-(x-1)$, thay vào (1), ta được:

$(x+2)^2+(-x)^2=8\Leftrightarrow 2x^2+4x-4=0\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{3}.$

Suy ra: $z=\left(-1+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right)i$; $z=\left(-1-\sqrt{3}\right)+\left(2+\sqrt{3}\right)i$

Vậy có 3 số phức thỏa mãn.

Câu 138: **(Mã 104 2018)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-5-i)+2i=(6-i)z$?

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 2

Lời giải

Chọn B

Ta có $|z|(z-5-i)+2i=(6-i)z\Leftrightarrow(|z|-6+i)z=5|z|+(|z|-2)i\ \ (1)$

Lấy môđun hai vế của (1) ta có:

$\sqrt{(|z|-6)^2+1}.|z|=\sqrt{25|z|^2+(|z|-2)^2}$

Bình phương và rút gọn ta được:

$|z|^4-12|z|^3+11|z|^2+4|z|-4=0\Leftrightarrow(|z|-1)\left(|z|^3-11|z|^2+4\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|z|=1\\ |z|^3-11|z|^2+4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|z|=1\\ |z|=10,9667...\\ |z|=0,62...\\ |z|=-0,587...\end{array}\right.$

Do $|z|\geq 0$, nên ta có $|z|=1$, $|z|=10,9667...$, $|z|=0,62...$. Thay vào (1) ta có 3 số phức thỏa mãn đề bài.

Câu 139: **(Mã 103 2018)** Có bao nhiêu số phức thỏa mãn $|z|(z-6-i)+2i=(7-i)z$?

A. 1 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Đặt $|z|=a\ge 0, a\in\mathbb{R}$, khi đó ta có

$|z|(z-6-i)+2i=(7-i)z \Leftrightarrow a(z-6-i)+2i=(7-i)z \Leftrightarrow (a-7+i)z=6a+ai-2i$

$\Leftrightarrow (a-7+i)z=6a+(a-2)i \Leftrightarrow |(a-7+i)||z|=|6a+(a-2)i|$

$\Leftrightarrow \left[(a-7)^2+1\right]a^2=36a^2+(a-2)^2 \Leftrightarrow a^4-14a^3+13a^2+4a-4=0$

$\Leftrightarrow (a-1)(a^3-13a^2+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a^3-12a^2+4=0 \end{array}\right.$

Xét hàm số $f(a)=a^3-13a^2\,(a\ge 0)$, có bảng biến thiên là

a	0		$\frac{26}{3}$		$+\infty$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{8788}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

Đường thẳng $y=-4$ cắt đồ thị hàm số $f(a)$ tại hai điểm nên phương trình $a^3-12a^2+4=0$ có hai nghiệm khác 1 (do $f(1)\ne 0$). Mỗi giá trị của a cho ta một số phức z.

Vậy có 3 số phức thỏa mãn điều kiện.

Câu 140: (Mã 102 2018) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-3-i)+2i=(4-i)z$?

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

Lời giải

Chọn B

$|z|(z-3-i)+2i=(4-i)z \Leftrightarrow (|z|-4+i)z=3|z|+(|z|-2)i$ (*)

$\Rightarrow \sqrt{(|z|-4)^2+1}.|z|=\sqrt{9|z|^2+(|z|-2)^2}$ (1).

Đặt $m=|z|\ge 0$ ta có $(1)\Leftrightarrow \left((m-4)^2+1\right).m^2=9m^2+(m-2)^2 \Leftrightarrow m^4-8m^3+7m^2+4m-4=0$

$\Leftrightarrow (m-1)(m^3-7m^2+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m^3-7m^2+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m=1 & \\ m\approx 6,91638 & \\ m\approx 0.80344 & \\ m\approx -0.71982 & (\mathrm{L}) \end{array}\right.$.

Từ (*) ta suy ra ứng với mỗi $|z|=m$ sẽ có một số phức $z=\dfrac{3m+(m-2)i}{m-4+i}$ thỏa mãn đề bài.

Vậy có 3 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 141: (Mã 105 2017) Cho số phức z thỏa mãn $|z+3|=5$ và $|z-2i|=|z-2-2i|$. Tính $|z|$.

A. $|z|=17$ **B.** $|z|=\sqrt{17}$ **C.** $|z|=\sqrt{10}$ **D.** $|z|=10$

Lời giải

Chọn C

Đặt $z=x+yi;x,y\in\mathbb{R}$

Theo bài ra ta có $\begin{cases}(x+3)^2+y^2=25\\ x^2+(y-2)^2=(x-2)^2+(y-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+3)^2+y^2=25\\ -4x+4=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=9\\ x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\pm3\\ x=1\end{cases}$. Vậy $|z|=\sqrt{10}$

Câu 142: **(Mã105 2017)** Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+3i|=\sqrt{13}$ và $\frac{z}{z+2}$ là số thuần ảo?

A. 0 **B.** 2 **C.** Vô số **D.** 1

Lời giải

Chọn B

Gọi số phức $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$

Ta có $|z+3i|=\sqrt{13}\Leftrightarrow|a+bi+3i|=\sqrt{13}\Leftrightarrow a^2+(b+3)^2=13$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+6b-4=0\Leftrightarrow a^2+b^2=4-6b(1)$

$\frac{z}{z+2}=1-\frac{2}{z+2}=1-\frac{2}{a+2+bi}=1-\frac{2(a+2-bi)}{(a+2)^2+b^2}.$

$=\frac{(a+2)^2+b^2-2a-4}{(a+2)^2+b^2}+\frac{2b}{(a+2)^2+b^2}i=\frac{a^2+b^2+2a}{(a+2)^2+b^2}+\frac{2b}{(a+2)^2+b^2}i$

Do $\frac{z}{z+2}$ là số thuần ảo nên $\frac{a^2+b^2+2a}{(a+2)^2+b^2}=0\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2+2a=0(2)\\ a\neq-2\\ b\neq0\end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta có $4-6b+2a=0\Leftrightarrow a=3b-2$ thay vào (1) ta có

$(3b-2)^2+b^2-4+6b=0\Leftrightarrow10b^2-6b=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0(L)\\ b=\frac{3}{5}\Rightarrow a=\frac{-1}{5}\end{array}\right.$

Vậy có một số phức cần tìm.

Câu 143: **(Mã 102 2018)** Xét các số phức z thỏa mãn $(\overline{z}+3i)(z-3)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng:

A. $\frac{9}{2}$ **B.** $3\sqrt{2}$ **C.** 3 **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Chọn D

Gọi $z=x+y\text{i}$, với $x,y\in\mathbb{R}$.

Theo giả thiết, ta có $(\overline{z}+3\text{i})(z-3)=|z|^2-3\overline{z}+3\text{i}z-9\text{i}$ là số thuần ảo khi

$x^2+y^2-3x-3y=0$. Đây là phương trình đường tròn tâm $I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$, bán kính $R=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 144: **(Mã 103 2018)** Xét các số phức z thỏa mãn $(\overline{z}+2i)(z-2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. $2\sqrt{2}$ **B.** 4 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** 2

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

Vì $(\overline{z}+2i)(z-2)=\left[x+(2-y)i\right]\left[(x-2)+yi\right]=\left[x(x-2)-y(2-y)\right]+\left[xy+(x-2)(2-y)\right]i$

là số thuần ảo nên có phần thực bằng không do đó $x(x-2)-y(2-y)=0$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-1)^2=2$. Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Câu 145: **(Mã 104 2019)** Xét các số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=\frac{5+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. 44. **B.** 52. **C.** $2\sqrt{13}$. **D.** $2\sqrt{11}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $w=x+yi$ với x,y là các số thực.

Ta có $w=\frac{5+iz}{1+z}\Leftrightarrow z=\frac{w-5}{i-w}$.

Lại có $|z|=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left|\frac{w-5}{i-w}\right|=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow|w-5|=\sqrt{2}|w-i|\Leftrightarrow(x-5)^2+y^2=2\left[x^2+(y-1)^2\right]$

$\Leftrightarrow(x+5)^2+(y-4)^2=52$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức w là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{52}=2\sqrt{13}$.

Câu 146: **(Mã 104 2018)** Xét các số phức z thỏa mãn $(\overline{z}-2i)(z+2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng?

A. $\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** 4 **D.** $2\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn A

Gọi $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$

Ta có: $\left(\overline{z}-2i\right)\left(z+2\right)=\left(a-bi-2i\right)\left(a+bi+2\right)=a^2+2a+b^2+2b-2\left(a+b+2\right)i$

Vì $\left(\overline{z}-2i\right)\left(z+2\right)$ là số thuần ảo nên ta có $a^2+2a+b^2+2b=0\Leftrightarrow\left(a+1\right)^2+\left(b+1\right)^2=2$.

Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Câu 147: (Đề Minh Họa 2017) Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(3+4i)z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó

A. $r=22$ **B.** $r=4$ **C.** $r=5$ **D.** $r=20$

Lời giải

Chọn D

Giả sử $z=a+bi;w=x+yi;\left(a,b,x,y\in\mathbb{R}\right)$

Theo đề $w=\left(3+4i\right)z+i\Rightarrow x+yi=\left(3+4i\right)\left(a+bi\right)+i$

$\Leftrightarrow x+yi=\left(3a-4b\right)+\left(3b+4a+1\right)i\Leftrightarrow\begin{cases}x=3a-4b\\y=3b+4a+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3a-4b\\y-1=3b+4a\end{cases}$ Ta có

$x^2+\left(y-1\right)^2=\left(3a-4b\right)^2+\left(4a+3b\right)^2=25a^2+25b^2=25\left(a^2+b^2\right)$

Mà $|z|=4\Leftrightarrow a^2+b^2=16$. Vậy $x^2+\left(y-1\right)^2=25.16=400$

Bán kính đường tròn là $r=\sqrt{400}=20$.

Câu 148: (Đề Tham Khảo 2019) Xét các số phức z thỏa mãn $\left(z+2i\right)\left(\overline{z}+2\right)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $(1;1)$ **B.** $(-1;1)$ **C.** $(-1;-1)$ **D.** $(1;-1)$

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi\Rightarrow\overline{z}=x-yi$

$\left(z+2i\right)\left(\overline{z}+2\right)$

$=z.\overline{z}+2z+2i\overline{z}+4i$

$=x^2+y^2+2\left(x+yi\right)+2i\left(x-yi\right)+4i$

$=x^2+y^2+2x+2y+\left(2x+2y+4\right)i$

$\left(z+2i\right)\left(\overline{z}+2\right)$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow x^2+y^2+2x+2y=0$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của z là một đường tròn có tâm là $I(-1;-1)$.

Câu 149: (Mã 101 2018) Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z}+i)(z+2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** 1 **C.** $\frac{5}{4}$ **D.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$.

$(\bar{z}+i)(z+2)=[x+(1-y)i][(x+2)+yi]$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow x(x+2)+y(y-1)=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-y=0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm $I\left(-1;\frac{1}{2}\right), R=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 150: (Mã 101 2019) Xét số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w=\frac{4+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{26}$. **B.** $\sqrt{34}$. **C.** 26. **D.** 34.

Lời giải

Chọn B

$w=\frac{4+iz}{1+z}\Leftrightarrow(1+z)w=4+iz\Leftrightarrow z(w-i)=4-w$

$\Leftrightarrow|z|.|w-i|=|4-w|\Leftrightarrow\sqrt{2}.|w-i|=|4-w|$ (*)

Gọi $w=x+yi,\ (x,y\in\mathbb{R})$ khi đó thay vào (*) ta có:

$\sqrt{2}.|x+yi-i|=|4-x-yi|\Leftrightarrow 2\left[x^2+(y-1)^2\right]=(x-4)^2+y^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+8x-4y-14=0\Leftrightarrow(x+4)^2+(y-2)^2=34$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w=\frac{4+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{34}$.

Câu 151: (Mã 102 - 2019) Xét số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w=\frac{3+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** 20. **C.** 12. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $w=\frac{3+iz}{1+z}\Leftrightarrow w+wz=3+iz\Leftrightarrow w-3=(i-w)z$.

$\Rightarrow |w-3| = |(i-w)z| \Leftrightarrow |w-3| = |(i-w)||z|$.

Gọi $w = x + yi,\ (x, y \in \mathbb{R})$.

Do đó, $|w-3| = |(i-w)||z| \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (1-y)^2}.\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 2x^2 + 2(1-y)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x - 4y - 7 = 0$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$ là đường tròn có tâm $I(-3;2)$ và bán kính bằng $2\sqrt{5}$.

Câu 152: (Mã 103 - 2019) Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = \dfrac{2+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Gọi số phức $w = x + yi; x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó:

$$w = \frac{2+iz}{1+z} \Leftrightarrow w(1+z) = 2 + iz \Leftrightarrow w - 2 = z(i-w) \Rightarrow |w-2| = |z(i-w)| \Leftrightarrow |w-2| = |z| \cdot |z(i-w)|$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 2\left(x^2 + (1-y)^2\right) \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-2)^2 = 10 (*)$$

Từ $(*)$ suy ra điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{10}$.

Câu 153: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 + 6z + 13 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $1 - z_0$ là

A. $N(-2;2)$. **B.** $M(4;2)$. **C.** $P(4;-2)$. **D.** $Q(2;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z^2 + 6z + 13 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -3 + 2i \\ z = -3 - 2i \end{array}\right.$.

Do z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình đã cho nên $z_0 = -3 + 2i$.

Từ đó suy ra điểm biểu diễn số phức $1 - z_0 = 4 - 2i$ là điểm $P(4;-2)$.

Câu 154: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 - 6z + 13 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $1 - z_0$ là

A. $M(-2;2)$. **B.** $Q(4;-2)$. **C.** $N(4;2)$. **D.** $P(-2;-2)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $z^2-6z+13=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=3+2i\,(TM)\\z=3-2i\,(L)\end{array}\right.$.

Suy ra $1-z_0=1-(3+2i)=-2-2i$. Điểm biểu diễn số phức $1-z_0$ là $P(-2;-2)$.

Câu 155: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Cho z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2+4z+13=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $1-z_0$ là

A. $P(-1;-3)$. **B.** $M(-1;3)$. **C.** $N(3;-3)$. **D.** $Q(3;3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z^2+4z+13=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-2+3i\\z=-2-3i\end{array}\right.$. Do z_0 có phần ảo dương nên suy ra $z_0=-2+3i$

Khi đó $1-z_0=1-(-2+3i)=3-3i$. Vậy điểm biểu diễn số phức $1-z_0$ là $N(3;-3)$

Câu 156: (Mã 104 - 2020 Lần 1) Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2-4z+13=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $1-z_0$ là

A. $M(3;-3)$. **B.** $P(-1;3)$. **C.** $Q(1;3)$ **D.** $N(-1;-3)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $z^2-4z+13=0\Leftrightarrow z=2\pm 3i$. Vậy $z_0=2+3i\Rightarrow 1-z_0=-1-3i$.

Điểm biểu diễn của $1-z_0$ trên mặt phẳng tọa độ là: $N(-1;-3)$.

Câu 157: (Mã 102 - 2020 Lần 2) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+3=0$. Khi đó $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Giải phương trình $z^2-z+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{11}}{2}i\\z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{11}}{2}i\end{array}\right.$.

Khi đó: $|z_1|+|z_2|=\left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{11}}{2}i\right|+\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{11}}{2}i\right|=2\sqrt{3}$.

Câu 158: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Gọi x_1 và x_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+2=0$. Khi đó $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z^2-z+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}\\z=\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}\end{array}\right.$

Không mất tính tổng quát giả sử $z_1=\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$ và $z_2=\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$

Khi đó $|z_1|+|z_2|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{-\sqrt{7}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

Câu 159: **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+z+3=0$. Khi đó $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 3. **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z^2+z+3=0\Leftrightarrow z=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{11}}{2}i$. Suy ra $|z_1|+|z_2|=2\sqrt{3}$

Câu 160: **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2-2z+5=0$. Môđun của số phức z_0+i bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z^2-2z+5=0\Leftrightarrow z^2-2z+1=-4\Leftrightarrow(z-1)^2=4i^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z-1=-2i\\z-1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=1-2i\\z=1+2i\end{array}\right.$.

Vì z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm nên $z_0=1-2i\Rightarrow z_0+i=1-2i+i=1-i$.

Suy ra: $|z_0+i|=|1-i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

Câu 161: **(Mã104 2017)** Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+4=0$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Tính $T=OM+ON$ với O là gốc tọa độ.

A. $T=8$ **B.** 4 **C.** $T=\sqrt{2}$ **D.** $T=2$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z^2+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=-2i\\z_2=2i\end{array}\right.$.

Suy ra $M(0;-2);N(0;2)$ nên $T=OM+ON=\sqrt{(-2)^2}+\sqrt{2^2}=4$.

Câu 162: **(Mã 123 2017)** Phương trình nào dưới đây nhận hai số phức $1+\sqrt{2}i$ và $1-\sqrt{2}i$ là nghiệm.

A. $z^2+2z+3=0$ **B.** $z^2-2z+3=0$ **C.** $z^2+2z-3=0$ **D.** $z^2-2z-3=0$

Lời giải

Chọn B

Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} z_1+z_2=2 \\ z_1.z_2=3 \end{cases}$, do đó z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-2z+3=0$

Câu 163: (Mã 110 2017) Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2-z+1=0$. Tính $P=|z_1|+|z_2|$.

A. $P=\frac{2}{3}$ **B.** $P=\frac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $P=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $P=\frac{\sqrt{14}}{3}$

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $3z^2-z+1=0$ có $\Delta=(-1)^2-4.3.1=-11<0$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phức phân biệt

$$z_1=\frac{1+i\sqrt{11}}{6}=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{11}}{6}i;\quad z_2=\frac{1-i\sqrt{11}}{6}=\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{11}}{6}i$$

Suy ra

$$P=|z_1|+|z_2|=\left|\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{11}}{6}i\right|+\left|\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{11}}{6}i\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Câu 164: (Mã 102 - 2019) Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-6z+14=0$. Giá trị của $z_1^2+z_2^2$ bằng

A. 36. **B.** 8. **C.** 28. **D.** 18.

Ta có : $z^2-6z+14=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z=3+\sqrt{5}i \\ z=3-\sqrt{5}i \end{array}\right.\Rightarrow z_1^2+z_2^2=\left(3+\sqrt{5}i\right)^2+\left(3-\sqrt{5}i\right)^2=8.$

Câu 165: (Mã 104 - 2019) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+7=0$. Giá trị của $z_1^2+z_2^2$ bằng

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. 2. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\Delta'=4-7=-3=\left(\sqrt{3}i\right)^2$.

Do đó phương trình có hai nghiệm phức là $z_1=2+\sqrt{3}i$, $z_2=2-\sqrt{3}i$.

Suy ra $z_1^2+z_2^2=\left(2+\sqrt{3}i\right)^2+\left(2-\sqrt{3}i\right)^2=4+4\sqrt{3}i-3+4-4\sqrt{3}i-3=2.$

Câu 166: (Đề Tham Khảo 2017) Kí hiệu $z_1;z_2$ là hai nghiệm của phương trình $z^2+z+1=0$. Tính $P=z_1^2+z_2^2+z_1z_2$.

A. $P=2$ **B.** $P=-1$ **C.** $P=0$ **D.** $P=1$

Lời giải

Chọn C

Cách 1

$$z^2+z+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\\z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{array}\right.$$

$$P=z_1^2+z_2^2+z_1z_2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=0$$

Cách 2: Theo định lí Vi-et: $z_1+z_2=-1;\ z_1.z_2=1$.

Khi đó $P=z_1^2+z_2^2+z_1z_2=(z_1+z_2)^2-2z_1z_2+z_1z_2=1^2-1=0$.

Câu 167: (Đề Tham Khảo 2019) Kí hiệu z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-3z+5=0$. Giá trị của $|z_1|+|z_2|$ bằng:

A. 10 **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $z^2-3z+5=0$ ta có hai nghiệm là: $\left[\begin{array}{l}z_1=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{11}}{2}i\\z_2=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{11}}{2}i\end{array}\right.$

$\Rightarrow|z_1|=|z_2|=\sqrt{5}\ \Rightarrow\ |z_1|+|z_2|=2\sqrt{5}$.

Câu 168: (Mã 105 2017) Kí hiệu z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+6=0$. Tính $P=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$.

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $-\frac{1}{6}$ **C.** 6 **D.** $\frac{1}{12}$

Lời giải

Chọn A

Theo định lí Vi-et, ta có $\begin{cases}z_1+z_2=1\\z_1z_2=6\end{cases}$ nên $P=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{z_1+z_2}{z_1.z_2}=\frac{1}{6}$

Câu 169: (Đề Tham Khảo 2018) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2-4z+3=0$. Giá trị của biểu thức $|z_1|+|z_2|$ bằng:

A. $3\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** 3 **D.** $\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $4z^2-4z+3=0$ ta có hai nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i \\ z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{array}\right.$

$\Rightarrow |z_1|=|z_2|=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |z_1|+|z_2|=\sqrt{3}$

Câu 170: (Mã 103 - 2019) Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$. Giá trị của $z_1^2+z_2^2$ bằng

A. 16. **B.** 26. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

$\triangle' = b'^2-ac=4-5=-1$

Phương trình có 2 nghiệm phức $z_1=-2+i, z_2=-2-i$

nên $z_1^2+z_2^2=(-2+i)^2+(-2-i)^2=4-4i+i^2+4+4i+i^2=8+2i^2=8-2=6$

Câu 171: (Mã 101 - 2019) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-6z+10=0$. Giá trị của $z_1^2+z_2^2$ bằng:

A. 16. **B.** 56. **C.** 20. **D.** 26.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng định lý Viet áp dụng cho phương trình trên ta được: $\begin{cases} z_1+z_2=6 \\ z_1z_2=10 \end{cases}$.

Khi đó ta có $z_1^2+z_2^2=(z_1+z_2)^2-2z_1z_2=36-20=16$.

Câu 172: (Đề Minh Họa 2017) Kí hiệu z_1, z_2, z_3 và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4-z^2-12=0$. Tính tổng $T=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$

A. $T=2+2\sqrt{3}$ **B.** $T=4$ **C.** $T=2\sqrt{3}$ **D.** $T=4+2\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn D

$$z^4 - z^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = -3 \\ z^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm i\sqrt{3} \\ z = \pm 2 \end{array}\right.$$

$$T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = |i\sqrt{3}| + |i\sqrt{3}| + |-2| + |2| = 2\sqrt{3} + 4$$

Câu 173: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_o thỏa mãn $|z_o| = 7$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (1) có $\Delta' = 2m + 1$.

+Trường hợp 1: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}$.

Phương trình (1) có nghiệm z_o thỏa mãn $|z_o| = 7$ suy ra $z_o = 7$ hoặc $z_o = -7$.

Nếu $z_o = 7$ suy ra $49 - 14(m+1) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 14m + 35 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 7 + \sqrt{14} \\ m = 7 - \sqrt{14} \end{array}\right.$, (chọn).

Nếu $z_o = -7$ suy ra $49 + 14(m+1) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 14m + 63 = 0$ vô nghiệm.

+ Trường hợp 2: $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$. Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm phức $z_1; z_2$ thỏa mãn $z_o = z_1 = \overline{z_2}$.

Suy ra $|z_o| = 7 \Leftrightarrow z_o.\overline{z_o} = 49 \Leftrightarrow z_1.z_2 = 49 \Leftrightarrow m^2 = 49 \Leftrightarrow m = \pm 7$.

Kết hợp điều kiện $m < -\frac{1}{2}$ suy ra $m = -7$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 174: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Trên tập số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0| = 5$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $\Delta' = 2m + 1$.

TH1: $\Delta' = 2m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}$, khi đó phương trình có nghiệm $z_0 \in \mathbb{R}$.

$|z_0| = 5 \Leftrightarrow z_0 = \pm 5$.

+) $z_0 = 5 \Leftrightarrow m^2 - 10m + 15 = 0 \Leftrightarrow m = 5 \pm \sqrt{10}$ (TM).

+) $z_0 = -5 \Leftrightarrow m^2 + 10m + 35 = 0 \Leftrightarrow m \in \varnothing$.

TH2: $m < -\dfrac{1}{2}$, khi đó phương trình đã cho có 2 nghiệm phức z_0 và $\overline{z_0}$;

$$|z_0| = 5 \Leftrightarrow z_0.\overline{z_0} = 25 \Leftrightarrow m^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 5\,(KTM) \\ m = -5\,(TM) \end{array}\right.$$

Câu 175: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0| = 6$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $\Delta' = (m+1)^2 - m^2 = 2m + 1$.

- Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{1}{2}$: Phương trình có hai nghiệm phức $z = m + 1 \pm \sqrt{-2m-1}.i$.

Ta có: $|z_0| = 6 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 2m - 1 = 36 \Leftrightarrow m^2 = 36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 6 \quad (l) \\ m = -6\,(n) \end{array}\right.$

- Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$: Phương trình có kép $z = \dfrac{1}{2}$.

Khi đó $|z| = \dfrac{1}{2}$ nên $m = -\dfrac{1}{2}$ không thỏa mãn.

- Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{1}{2}$: Phương trình có hai nghiệm thực phân biệt $z = m + 1 \pm \sqrt{2m+1}$.

Ta có: $|z_0| = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0 = 6 \\ z_0 = -6 \end{array}\right.$

+ Với $z_0 = 6$: Thay vào phương trình ta được:

$$6^2 - 2(m+1).6 + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 12m + 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 6 - 2\sqrt{3} \ (n) \\ m = 6 + 2\sqrt{3} \ (n) \end{array}\right.$$

+ Với $z_0 = -6$: Thay vào phương trình ta được:

$(-6)^2 - 2(m+1).(-6) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 12m + 48 = 0$ (PTVN).

Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2: Đặt $f(z) = z^2 - 2(m+1)z + m^2$

$$\text{Ycbt} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(6)=0 \\ f(-6)=0 \\ \begin{cases}\Delta'=2m+1<0 \\ |z_0|=6\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-12m+24=0 \\ m^2+12m+48=0 \\ \begin{cases}m<\dfrac{-1}{2} \\ 36=|z_0|^2=z_0.z_1=m^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=6+\sqrt{12} \\ m=6-\sqrt{12} \\ m=-6\end{array}\right.$$

Câu 176: (2020-2021 – ĐỢT 2) Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-4az+b^2+2=0$ (a, b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1+2iz_2=3+3i$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Phương trình $z^2-4az+b^2+2=0$ $(*)$ là phương trình bậc hai có $\Delta'=4a^2-b^2-2$.

+ Trường hợp $\Delta'<0 \Leftrightarrow 4a^2-b^2-2<0$ (1)

Khi đó phương trình $(*)$ có hai nghiệm phức là z_1, z_2 là hai số phức liên hợp.

Giả sử $z_1=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$, suy ra $z_2=x-yi$.

Ta có $z_1+2iz_2=3+3i \Leftrightarrow x+yi+2i(x-yi)=3+3i$

$$\Leftrightarrow x+2y+(2x+y)i=3+3i \Leftrightarrow \begin{cases}x+2y=3\\2x+y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$$

Suy ra $z_1=1+i$ và $z_2=1-i$ là hai nghiệm của $(*)$.

Áp dụng định lý Vi-ét, ta có

$$\begin{cases}z_1+z_2=4a\\z_1.z_2=b^2+2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(1+i)+(1-i)=4a\\(1+i)(1-i)=b^2+2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2=4a\\2=b^2+2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=0\end{cases}$$ (thỏa mãn (1)).

+ Trường hợp $\Delta'\geq 0 \Leftrightarrow 4a^2-b^2-2\geq 0$ (2)

Khi đó phương trình $(*)$ có hai nghiệm thực là z_1, z_2.

Ta có $z_1+2iz_2=3+3i \Leftrightarrow \begin{cases}z_1=3\\z_2=\dfrac{3}{2}\end{cases}$.

Áp dụng định lý Vi-ét, ta có

$$\begin{cases}z_1+z_2=4a\\z_1.z_2=b^2+2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{9}{2}=4a\\\dfrac{9}{2}=b^2+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{9}{2}=4a\\\dfrac{5}{2}=b^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\dfrac{9}{8}\\b=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}\end{cases}$$ (thỏa mãn (2)).

Vậy có ba cặp số thực $(a;b)$ thỏa mãn bài toán là $\left(\frac{1}{2};0\right)$, $\left(\frac{9}{8};-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ và $\left(\frac{9}{8};\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

Câu 177: (2020-2021 – ĐỢT 2) Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2+4az+b^2+2=0$ (a, b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a;\ b)$ sao cho phương trình có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1+2iz_2=3+3i$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Vì $z_1,\ z_2$ là các nghiệm của phương trình $z^2+4az+b^2+2=0$ nên

$$\begin{cases} z_1+z_2=-4a \\ z_1.z_2=b^2+2 \end{cases}.$$

Khi đó $\begin{cases} z_1+z_2=-4a \\ z_1+2iz_2=3+3i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=\dfrac{3+(3+8a)i}{1-2i} \\ z_2=\dfrac{-(3+4a)-3i}{1-2i} \end{cases}.$

Do đó $z_1.z_2=b^2+2 \Leftrightarrow \dfrac{3+(3+8a)i}{1-2i}.\dfrac{-(3+4a)-3i}{1-2i}=b^2+2$

$\Leftrightarrow \left[3+(3+8a)i\right]\left[(3+4a)+3i\right]=\left(b^2+2\right)(3+4i)$

$\Leftrightarrow 3(3+4a)-3(3+8a)+\left[9+(3+8a)(3+4a)\right]i=\left(b^2+2\right)(3+4i)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -12a=3\left(b^2+2\right) \\ 9+(3+8a)(3+4a)=4\left(b^2+2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2=-4a-2 \\ \left[\begin{array}{l} a=-\dfrac{1}{2} \\ a=-\dfrac{9}{8} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-\dfrac{9}{8} \\ b=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy có 3 cặp số $(a;\ b)$ là $\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$, $\left(-\frac{9}{8};\ \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ và $\left(-\frac{9}{8};-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

Cách 2.

Xét phương trình $z^2+4az+b^2+2=0$ có $\Delta'=4a^2-b^2-2$, khi đó $\begin{cases} z_1+z_2=-4a \\ z_1.z_2=b^2+2 \end{cases}.$

TH1: $\Delta\geq 0$ nên các nghiệm $z_1,\ z_2$ là nghiệm thực. Khi đó $z_1+2iz_2=3+3i \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=3 \\ z_2=\dfrac{3}{2} \end{cases}.$

Do đó $\begin{cases} a=-\dfrac{9}{8} \\ b=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$ (thỏa mãn)

TH2: $\Delta<0$, khi đó z_1, z_2 là hai nghiệm phức và $z_1=\overline{z}_2$.

Đặt $z_1=x+yi,\left(x,\ y\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow z_2=x-yi$. Khi đó

$$z_1+2iz_2=3+3i \Leftrightarrow x+yi+2i\left(x-yi\right)=3+3i\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=3\\2x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}.$$

Do đó $z_1=1+i,\ z_2=1-i$ suy ra $\begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=0 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy có ba cặp số $\left(a;\ b\right)$ là $\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$, $\left(-\frac{9}{8};\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ và $\left(-\frac{9}{8};-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

Câu 178: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2+2az+b^2+2=0$ (a,b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $\left(a;b\right)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1+2iz_2=3+3i$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} z_1+z_2=-2a \\ z_1z_2=b^2+2 \end{cases}\left(1\right)$.

TH1: z_1,z_2 là các số thực. Khi đó $z_1+2iz_2=3+3i\Leftrightarrow\begin{cases}z_1=3\\z_2=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z_1+z_2=\dfrac{9}{2}\\z_1z_2=\dfrac{9}{2}\end{cases}\left(2\right)$.

Từ và suy ra: $\begin{cases}-2a=\dfrac{9}{2}\\b^2+2=\dfrac{9}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{9}{4}\\b^2=\dfrac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{9}{4}\\b=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}\end{cases}$.

Suy ra trường hợp này có 2 cặp $\left(a,b\right)$ thỏa mãn đề bài.

TH2: z_1,z_2 là các số phức. Khi đó $z_2=\overline{z}_1$. Gọi $z_1=x+yi,\left(x,y\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow z_2=x-yi$.

Ta có $z_1+2iz_2=3+3i\Leftrightarrow\left(x+yi\right)+2i\left(x-yi\right)=3+3i\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=3\\2x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$.

Khi đó $z_1=1+i,z_2=1-i$ $\left(3\right)$.

Từ và suy ra: $\begin{cases} -2a=2 \\ b^2+2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases}$.

Suy ra trường hợp này có 1 cặp (a,b) thỏa mãn đề bài.

Vậy có tất cả 3 cặp (a,b) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 179: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2az+b^2+2=0$ (a, b là các tham số thực). Có bao nhiêu cặp số thực $(a;b)$ sao cho phương trình đó có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_1+2iz_2=3+3i$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Ta có z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình, khi đó $\begin{cases} z_1+z_2=2a \\ z_1.z_2=b^2+2 \end{cases}$

Khi đó $\begin{cases} z_1+2iz_2=3+3i \\ z_1+z_2=2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-2i)z_2=2a-3-31 \\ z_1+z_2=2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2=\dfrac{2a-3-3i}{1-2i} \\ z_1=\dfrac{3+(3-4a)i}{1-21} \end{cases}$

Thay vào $z_1.z_2=b^2+2$ ta có

$$\frac{2a-3-3i}{1-2i}.\frac{3+(3-4a)i}{1-2i}=b^2+2$$

$$\Leftrightarrow -6a+(18a-8a^2-18)i=(b^2+2)(-3-4i)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6a=-3(b^2+2) \\ 18a-8a^2-18=-4(b^2+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=b^2+2 \\ 4a^2-9a+9=4a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b^2=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\dfrac{9}{4} \\ b^2=\dfrac{5}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\dfrac{9}{4} \\ b=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy có 3 cặp số thực $(a;b)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 180: **(Đề Tham Khảo 2018)** Xét số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-4-3i|=\sqrt{5}$. Tính $P=a+b$ khi $|z+1-3i|+|z-1+i|$ đạt giá trị lớn nhất.

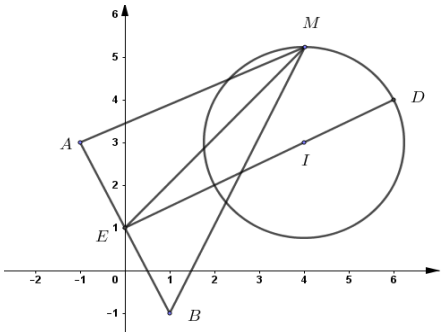
A. $P=8$ **B.** $P=10$ **C.** $P=4$ **D.** $P=6$

Lời giải

Chọn B

Goi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Theo giả thiết ta có: $|z-4-3i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow (a-4)^2+(b-3)^2=5\Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(4;3)$ bán kính $R=\sqrt{5}$



Gọi: $\begin{cases} A(-1;3) \\ B(1;-1) \end{cases} \Rightarrow Q=|z+1-3i|+|z-1+i|=MA+MB$

Gọi E là trung điểm của AB, kéo dài EI cắt đường tròn tại D

Ta có: $Q^2=MA^2+MB^2+2MA.MB$

$\Leftrightarrow Q^2\le MA^2+MB^2+MA^2+MB^2=2\left(MA^2+MB^2\right)$

Vì ME là trung tuyến trong ΔMAB

$\Rightarrow ME^2=\dfrac{MA^2+MB^2}{2}-\dfrac{AB^2}{4}\Rightarrow MA^2+MB^2=2ME^2+\dfrac{AB^2}{2}$

$\Rightarrow Q^2\le 2\left(2ME^2+\dfrac{AB^2}{2}\right)=4ME^2+AB^2$. Mặt khác $ME\le DE=EI+ID=2\sqrt{5}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

$\Rightarrow Q^2\le 4.\left(3\sqrt{5}\right)^2+20=200$

$\Rightarrow Q\le 10\sqrt{2}\Rightarrow Q_{max}=10\sqrt{2}\Leftrightarrow \begin{cases} MA=MB \\ M\equiv D \end{cases}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EI}=2\overrightarrow{ID}\Leftrightarrow \begin{cases} 4=2(x_D-4) \\ 2=2(y_D-3) \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x_D=6 \\ y_D=4 \end{cases}\Leftrightarrow\Rightarrow M(6;4)\Rightarrow P=a+b=10$

Cách 2: Đặt $z=a+bi$. Theo giả thiết ta có: $(a-4)^2+(b-5)^2=5.$

Đặt $\begin{cases} a-4=\sqrt{5}\sin t \\ b-3=\sqrt{5}\cos t \end{cases}$. Khi đó:

$Q=|z+1-3i|+|z-1+i|=\sqrt{(a+1)^2+(b-3)^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{5}\sin t+5\right)^2+5\cos^2 t}+\sqrt{\left(\sqrt{5}\sin t+3\right)^2+\left(\sqrt{5}\cos t+4\right)^2}$

$=\sqrt{30+10\sqrt{5}\sin t}+\sqrt{30+2\sqrt{5}\left(3\sin t+4\cos t\right)}$

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có:

$$Q \le \sqrt{2\left(60+8\sqrt{5}\left(2\sin t+\cos t\right)\right)} \le \sqrt{2\left(60+8\sqrt{5}.\sqrt{5}\right)} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow Q \le 10\sqrt{2} \Rightarrow Q_{max} = 10\sqrt{2}$$

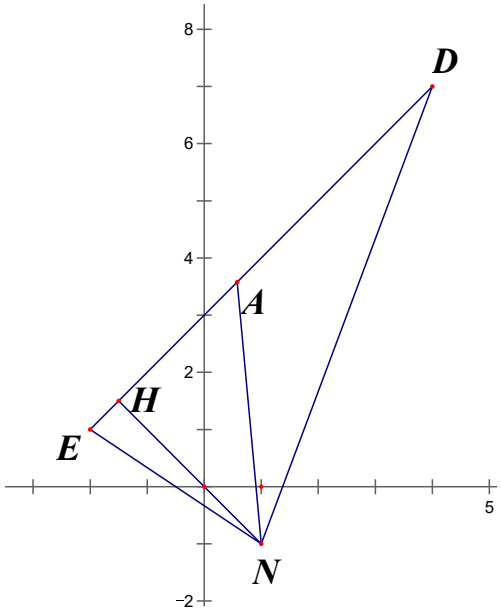
Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \sin t = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos t = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow P = a + b = 10.$

Câu 181: **(Đề Tham Khảo 2017)** Xét số phức z thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z-1+i|$. Tính $P = m + M$.

A. $P = \dfrac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$ **B.** $P = 5\sqrt{2}+\sqrt{73}$ **C.** $P = \dfrac{5\sqrt{2}+\sqrt{73}}{2}$ **D.** $P = \sqrt{13}+\sqrt{73}$

Lời giải

Chọn A



Gọi A là điểm biểu diễn số phức z, $E(-2;1)$, $F(4;7)$ và $N(1;-1)$.

Từ $AE + AF = |z+2-i|+|z-4-7i| = 6\sqrt{2}$ và $EF = 6\sqrt{2}$ nên ta có A thuộc đoạn thẳng EF.

Gọi H là hình chiếu của N lên EF, ta có $H\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. Suy ra $P = NH + NF = \dfrac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$.

Câu 182: **(TK NĂM 2020-2021)** Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 1, |z_2| = 2$ và $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$. Giá trị lớn nhất của $|3z_1 + z_2 - 5i|$ bằng

A. $5-\sqrt{19}$. **B.** $5+\sqrt{19}$. **C.** $-5+2\sqrt{19}$. **D.** $5+2\sqrt{19}$.

Lời giải

Đặt $z_1 = a+bi, z_2 = c+di$ với $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Theo giả thiết thì

$$a^2+b^2 = 1,\ c^2+d^2 = 4,\ (a-c)^2+(b-d)^2 = 3.$$

Do đó $a^2-2ac+c^2+b^2-2bd+d^2=3\Rightarrow ac+bd=1.$

Ta có $3z_1+z_2=3(a+c)+(3b+d)i$ nên

$$|3z_1+z_2|=(3a+c)^2+(3b+d)^2=9(a^2+b^2)+(c^2+d^2)+6(ac+bd)=19.$$

Áp dụng bất đẳng thức $|z+z'|\le|z|+|z'|$, ta có ngay

$$|3z_1+z_2-5i|\le|3z_1+z_2|+|-5i|=\sqrt{19}+5.$$

Câu 183: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Xét các phức z,w thoả mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+i\overline{w}-6+8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng

A. 3. **B.** $\frac{\sqrt{29}}{5}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{221}}{5}$.

Lời giải

Do $|z|=1$ nên điểm biểu diễn số phức z sẽ thuộc đường tròn $(O;1)$.

Do $|i\overline{w}|=|iw|=2$ nên điểm biểu diễn số phức $i.\overline{w}$ sẽ thuộc đường tròn $(O;2)$.

Điểm $A(-6;8)$ là điểm biểu diễn số phức $-6i+8$.

Ta có $|z+i\overline{w}-6+8i|\ge|6-8i|-|z+i\overline{w}|=10-|z+i\overline{w}|\ge10-(|z|+|i\overline{w}|)=7$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng OA cắt đường tròn $(O;1)$ tại B và cắt đường tròn $(O;2)$ tại C mà O nằm giữa A, B và O nằm giữa A,C.

Phương trình đường thẳng AO là: $4x+3y=0$

Giải ra $B\left(\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right)$ và $C\left(\frac{6}{5};-\frac{8}{5}\right)$ suy ra $z=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$ và $i\overline{w}=\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i$ nên $w=-\frac{8}{5}+\frac{6}{5}i$

Suy ra $z-w=\frac{11}{5}-2i$, suy ra $|z-w|=\left|\frac{3-4i}{5}-\left(-\frac{8}{5}+\frac{6}{5}i\right)\right|=\frac{\sqrt{221}}{5}$

Câu 184: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Xét các số phức z; w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+i\overline{w}+6+8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{29}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{221}}{5}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Đặt $z_1=z+6+8i$, $z_2=-i\overline{w}$. Gọi $M(z_1)$, $N(z_2)$, $I(6;8)$, $O(0;0)$

+) Ta có: $|z_1-6-8i|=1, |z_2|=2, |z+i\overline{w}+6+8i|=|z_1-z_2|=MN$

+) Ta có $MN\ge|OI-1-2|=7$

+) $MN_{\min}=7 \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{OM}=\dfrac{9}{10}\overrightarrow{OI}\\ \overrightarrow{ON}=\dfrac{2}{10}\overrightarrow{OI}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z_1=\dfrac{27}{5}+\dfrac{36}{5}i\\ z_2=\dfrac{6}{5}+\dfrac{8}{5}i\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}z=\dfrac{-3}{5}+\dfrac{-4}{5}i\\ \mathrm{w}=\dfrac{-8}{5}+\dfrac{-6}{5}i\end{cases}$. Suy ra: $|z-\mathrm{w}|=\dfrac{\sqrt{29}}{5}$

Câu 185: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Xét các số phức z và w thay đổi thỏa mãn $|z|=|w|=3$ và $|z-w|=3\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z+1+i|+|w-2+5i|$ bằng

A. $5-3\sqrt{2}$ **B.** $\sqrt{17}$ **C.** $\sqrt{29}-\sqrt{2}$ **D.** 5

Lời giải

Gọi M và N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z và w trong mặt phẳng Oxy

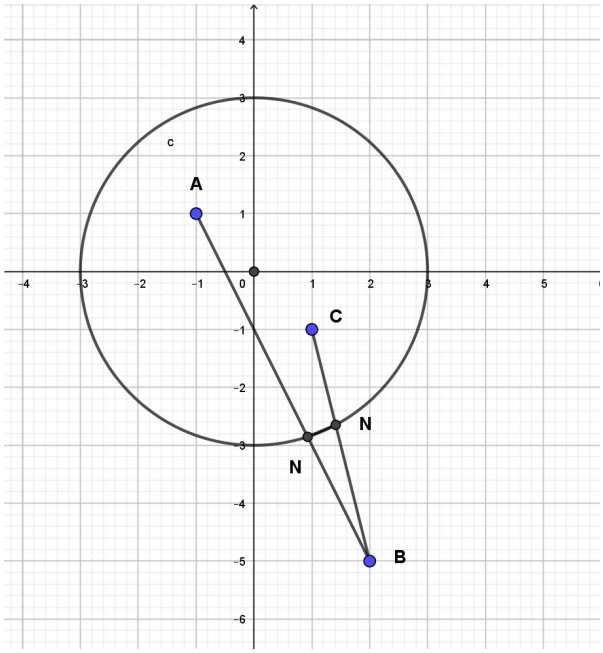
Do $\begin{cases}|z|=|w|=3\\ |z-w|=3\sqrt{2}\end{cases}$ nên $\begin{cases}OM=ON=3\\ MN=3\sqrt{2}\end{cases}$.

Vậy M và N thuộc đường tròn $C(O;3)$ và ΔOMN vuông cân tại O.

Lại có: $\begin{cases}\left|\dfrac{z}{w}\right|=1\\ \left|\dfrac{z}{w}-1\right|=\sqrt{2}\end{cases}$. Đặt $t=\dfrac{z}{w}=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$

Khi đó ta có: $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ (x-1)^2+y^2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ \left[\begin{array}{l}y=1\\ y=-1\end{array}\right.\end{cases}$.

Vậy $z=iw$ hoặc $z=-iw$



□ Trường hợp 1: $z = iw$

$P = |iw+1+i| + |w-2+5i| = |w+1-i| + |w-2+5i| = NA + NB \geq AB$.

Vậy $P_{\min} = AB = 3\sqrt{5}$ khi N là giao điểm của AB với đường tròn $C(O;3)$ và N thuộc đoạn thẳng AB

□ Trường hợp 2: $z = iw$

$P = |-iw+1+i| + |w-2+5i| = |w-1+i| + |w-2+5i| = NC + NB \geq CB$.

Vậy $P_{\min} = CB = \sqrt{17}$ khi N là giao điểm của CB với đường tròn $C(O;3)$ và N thuộc đoạn thẳng CB. Vậy $P_{\min} = \sqrt{17}$.

Câu 186: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Xét các số phức z và w thay đổi thỏa mãn $|z| = |w| = 4$ và $|z-w| = 4\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z+1+i| + |w-3+4i|$ bằng

A. $5-\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{41}$. **D.** $5-2\sqrt{2}$.

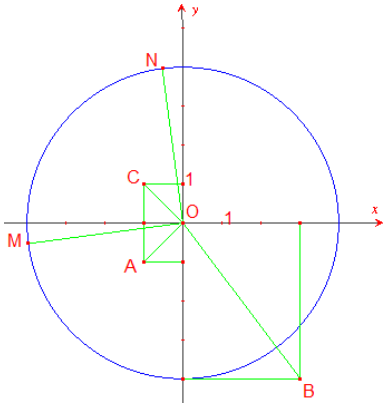
Lời giải

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z, N là điểm biểu diễn số phức w.

Từ giả thiết $|z| = |w| = 4$ và $|z-w| = 4\sqrt{2}$ ta có M, N thuộc đường tròn (C) tâm $O(0;0)$, bán kính bằng 4 và ΔOMN vuông cân tại O.

Gọi $A(-1;-1), B(3;-4)$. Ta có: $P = MA + NB$.

+ Trường hợp 1: $Q\left(O;-\frac{\pi}{2}\right)(M) = N$.



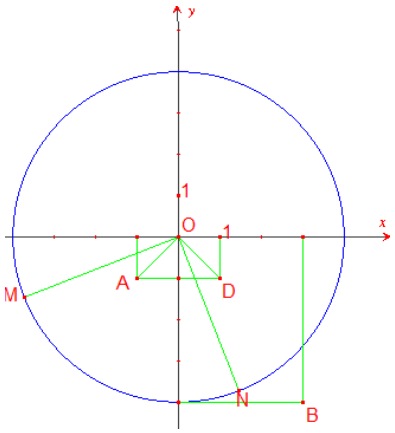
Gọi $C=Q\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)(A)\Rightarrow C(-1;1)$, ta có $MA=NC$.

Suy ra: $P=NC+NB\geq BC=\sqrt{41}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi N là giao điểm của đoạn thẳng CB và đường tròn (C)

.

+ Trường hợp 2: $Q\left(O;\frac{\pi}{2}\right)(M)=N$.



Gọi $D=Q\left(O,\frac{\pi}{2}\right)(A)\Rightarrow D(1;-1)$, ta có $MA=ND$.

Suy ra: $P=ND+NB\geq DB=\sqrt{13}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi N là giao điểm của đoạn thẳng DB và đường tròn (C)

.

Vậygiá trị nhỏ nhất của P bằng $\sqrt{13}$.

Câu 187: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+i\overline{w}-6-8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng?

A. $\frac{\sqrt{221}}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 3. **D.** $\frac{\sqrt{29}}{5}$.

Lời giải

Gọi M,N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức $z-6-8i$ và $-i\overline{w}$.

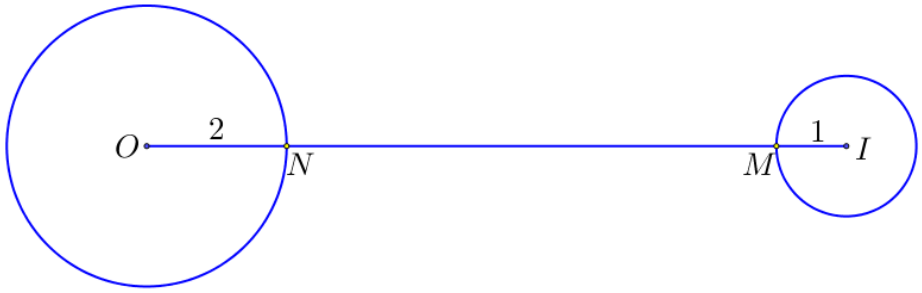
Ta có $|z|=1\Leftrightarrow|(z-6-8i)+(6+8i)|=1\Leftrightarrow MI=1$, với $I(-6;-8)$.

Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn (T_1) tâm $I(-6;-8)$ và bán kính $R_1=1$.

Ta có $|-i\overline{w}|=|-i|.|\overline{w}|=2$. Suy ra tập hợp điểm N là đường tròn (T_2) tâm O và bán kính $R_2=2$.

Ta có $P=|z+i\overline{w}-6-8i|=MN$.

$\Rightarrow \min P=OI-R_1-R_2=10-1-2=7$ (do (T_1) và (T_2) rời nhau).



, đạt được khi $\begin{cases}\overrightarrow{OM}=\dfrac{9}{10}\overrightarrow{OI}\\ \overrightarrow{ON}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{OI}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M\left(-\dfrac{27}{5};-\dfrac{36}{5}\right)\\ N\left(-\dfrac{6}{5};-\dfrac{8}{5}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z-6-8i=-\dfrac{27}{5}-\dfrac{36}{5}i\\ -i\overline{w}=-\dfrac{6}{5}-\dfrac{8}{5}i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i\\ w=\dfrac{8}{5}+\dfrac{6}{5}i\end{cases}$

Vậy $|z-w|=\left|-1-\dfrac{2}{5}i\right|=\dfrac{\sqrt{29}}{5}$.

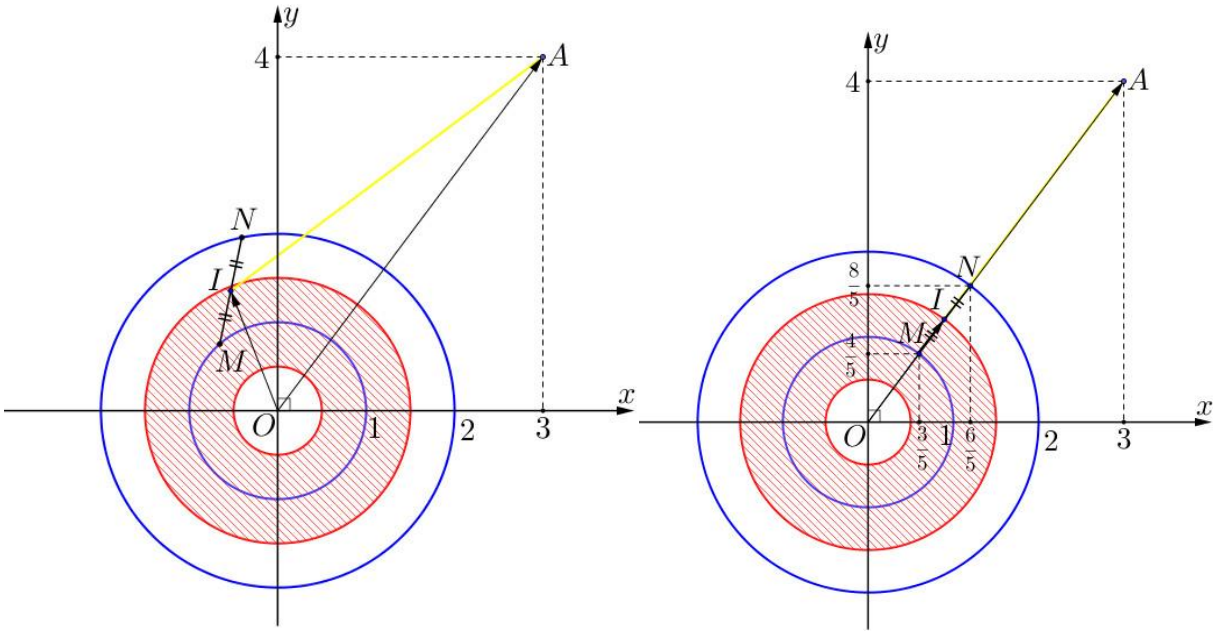
Cách 2: Đoàn Trí Dũng

Ta có $|w|=2\Rightarrow|i\overline{w}|=2$.

Gọi M,N là điểm biểu diễn của các số phức $z,i\overline{w}$ và $A(3;4)$.

Khi đó $|z+i\overline{w}-6-8i|=|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}-2\overrightarrow{OA}|=2|\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OA}|=2AI$, với I là trung điểm MN.

Do M,N thuộc hai đường tròn tâm O, bán kính 1 và 2 nên I thuộc hình vành tròn được giới hạn bởi hai đường tròn bán kính $\dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{3}{2}$.



Suy ra AI nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ O,M,N,A thẳng hàng.

Khi đó $M\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right),N\left(\frac{6}{5};\frac{8}{5}\right)\Rightarrow\begin{cases}z=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\\ i\overline{w}=\frac{6}{5}+\frac{8}{5}i\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\\ w=\frac{8}{5}+\frac{6}{5}i\end{cases}$

Vậy $|z-w|=\left|-1-\frac{2}{5}i\right|=\frac{\sqrt{29}}{5}$.

Câu 188: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $\left|z+i\overline{w}+6-8i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{221}}{5}$. **C.** 3. **D.** $\frac{\sqrt{29}}{5}$.

Lời giải

Cách 1:

Ta có $\left|z+i\overline{w}+6-8i\right|\ge|6-8i|-|z|-\left|i\overline{w}\right|=10-1-2=7$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}z=t(6-8i)\\ i\overline{w}=t'(6-8i);t,t'<0\\ |z|=1;|w|=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=-\frac{1}{10}(6-8i)\\ i\overline{w}=-\frac{2}{10}(6-8i)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\\ w=\frac{8}{5}-\frac{6}{5}i\end{cases}$

Do đó $|z-w|=\left|-\frac{11}{5}+2i\right|=\frac{\sqrt{221}}{5}$.

Cách 2:

Đặt $z=a+bi,w=c+di,(a,b;c,d\in\mathbb{R})$, khi đó $\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=1\\ \sqrt{c^2+d^2}=2\end{cases}$.

Ta có $\left|z+i\overline{w}+6-8i\right|=\sqrt{\left(a+d+6\right)^2+\left(b+c-8\right)^2}=\sqrt{\left(-a-d-6\right)^2+\left(-b-c+8\right)^2}$

Mặt khác $\sqrt{\left(-a-d-6\right)^2+\left(-b-c+8\right)^2}+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{36+64}=10$

Suy ra $\left|z+i\overline{w}+6-8i\right|\ge 7$, dấu đẳng thức xảy ra khi $z=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i;w=\frac{8}{5}-\frac{6}{5}i$.

Do đó $\left|z-w\right|=\left|-\frac{11}{5}+2i\right|=\frac{\sqrt{221}}{5}$.

Câu 189: (2020-2021 – ĐỢT 2) Xét số phức z và w thay đổi thỏa mãn $\left|z\right|=\left|w\right|=3$ và $\left|z-w\right|=3\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $P=\left|z-1-i\right|+\left|w+2-5i\right|$ bằng

A. $5-3\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{29}-\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** 5.

Lời giải

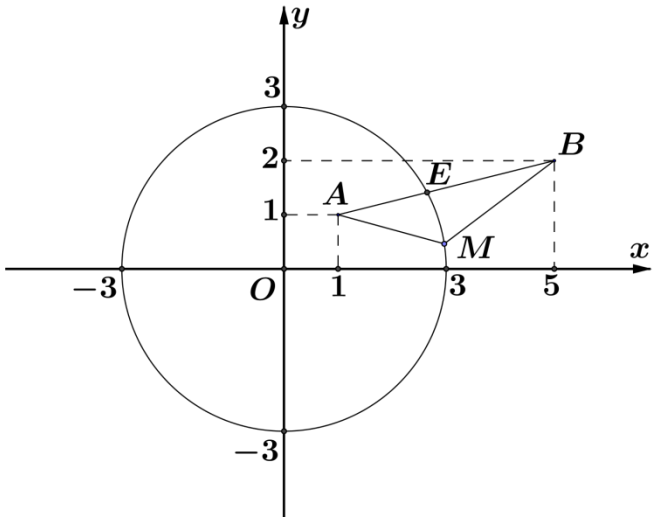
Gọi M,N lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z và w.

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases}OM=ON=3\\MN=3\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\Delta OMN$ vuông tại $O\Rightarrow\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{ON}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}w=iz\\w=-iz\end{array}\right.$.

+) Trường hợp $w=iz$.

Ta có $P=\left|z-1-i\right|+\left|iz+2-5i\right|=\left|z-\left(1+i\right)\right|+\left|z-\left(5+2i\right)\right|=MA+MB$ với $A\left(1;1\right),B\left(5;2\right)$.

Gọi E là giao điểm của đoạn AB với đường tròn $\left(O;3\right)$ như hình vẽ.



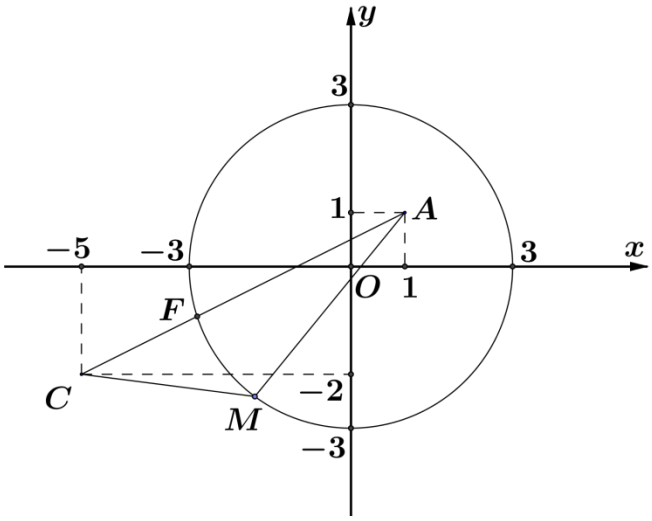
Có $P=MA+MB\ge AB$, $AB=\sqrt{17}$.

Suy ra $\min P=\sqrt{17}$ khi $M\equiv E$, N là ảnh của M qua phép quay $Q_{\left(O,90^0\right)}$.

+) Trường hợp $w=-iz$.

Ta có $P=\left|z-1-i\right|+\left|-iz+2-5i\right|=\left|z-\left(1+i\right)\right|+\left|z-\left(-5-2i\right)\right|=MA+MC$ với $A\left(1;1\right),C\left(-5;-2\right)$.

Gọi F là giao điểm của đoạn AC với đường tròn $\left(O;3\right)$ như hình vẽ.



Có $P = MA + MC \geq AC$, $AC = 3\sqrt{5}$.

Suy ra $\min P = 3\sqrt{5}$ khi $M \equiv F$, N là ảnh của M qua phép quay $Q_{(O,-90^0)}$.

Kết hợp hai trường hợp, ta được $\min P = \sqrt{17}$.

Câu 190: **(2020-2021 – ĐỢT 2)** Xét các số phức z, w thay đổi thỏa mãn $|z| = |w| = 4$, $|z - w| = 4\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z - 1 - i| + |w + 3 - 4i|$ bằng:

A. $\sqrt{41}$. **B.** $5 - 2\sqrt{2}$. **C.** $5 - \sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{13}$.

Lời giải

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z, w. Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} OM = ON = 4 \\ MN = 4\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \widehat{MON} = 90^0 \text{ hay } \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ON} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = iw \\ z = -iw \end{array}\right.$$

TH1: $z = iw \Rightarrow P = |iw - 1 - i| + |w - 3 + 4i| = |w - 1 + i| + |w + 3 - 4i| = NA + NB \geq AB = \sqrt{41}$

(với $A(1;-1), B(-3;4)$.

TH2: $z = -iw \Rightarrow P = |-iw - 1 - i| + |w + 3 - 4i| = |w + 1 - i| + |w + 3 - 4i| = NC + NB \geq CB = \sqrt{13}$

(với $C(-1;1)$). Đẳng thức xảy ra khi $w = \dfrac{-3 - 6\sqrt{23}}{13} + \dfrac{-2 + 9\sqrt{23}}{13} i$.

Vậy $\min P = \sqrt{13}$.

CHƯƠNG IV

SỐ PHỨC

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

PHẦN THỰC – PHẦN ẢO – SỐ PHỨC LIÊN HỢP – CÁC PHÉP TOÁN VỀ SỐ PHỨC

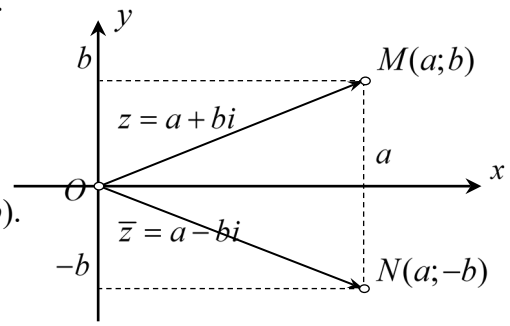
① *Số phức* $z=a+bi$ *có phần thực là* a, *phần ảo là* b.

② *Số phức liên hợp* $\overline{z}=a-bi$ *và cần nhớ* $i^2=-1$.

③ *Số phức* $z=a+bi$ *có điểm biểu diễn là* $M(a;b)$.

Số phức liên hợp $\overline{z}=a-bi$ *có điểm biểu diễn* $N(a;-b)$.

Hai điểm M *và* N *đối xứng nhau qua trục hoành* Ox.



- $\overline{\overline{z}}=z;\ \overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'};\ \overline{z-z'}=\overline{z}-\overline{z'};$

$\overline{z}.\overline{z'}=\overline{z.z'};\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}};\ z.\overline{z}=a^2+b^2$

④ *Hai số phức bằng nhau khi thực bằng thực và ảo bằng ảo.*

⑤ **Mô đun của số phức** z là: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

- $|z.z'|=|z||z'|$ • $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$

- $\big||z|-|z'|\big|\le|z+z'|\le|z|+|z'|$ • $\big||z|-|z'|\big|\le|z-z'|\le|z|+|z'|$

◆ **Phép cộng hai số phức** Cho số phức $z_1=a+b.i$ và $z_2=c+d.i$. Khi đó

$z_1+z_2=(a+b.i)+(c+d.i)=(a+c)+(b+d).i.$

◆ **Phép trừ hai số phức** $z_1-z_2=(a+b.i)-(c+d.i)=(a-c)+(b-d).i.$

◆ **Phép nhân hai số phức** $z_1.z_2=(a+b.i).(c+d.i)=(ac-bd)+(ad+bc).i.$

$k.z=k.(a+bi)=ka+kbi$

◆ **Phép chia hai số phức**

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1.\overline{z}_2}{z_2.\overline{z}_2}=\frac{z_1.\overline{z}_2}{|z_2|^2}=\frac{(a+b.i).(c-d.i)}{c^2+d^2}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Câu 1: Cho số phức $z=3-4i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.

A. Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.
B. Phần thực là 3 và phần ảo là -4.
C. Phần thực là -4 và phần ảo là 3.
D. Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.

Câu 2: Cho số phức $z=3+2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$.

A. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -2.
B. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng -2.
C. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $-2i$.
D. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2.

Câu 3: Số phức đối của $z=5+7i$ là?

A. $\overline{z}=5+7i$. **B.** $-z=-5-7i$. **C.** $-z=-5+7i$. **D.** $-z=5-7i$.

Câu 4: Số phức liên hợp của số phức $z=1-2i$ là

A. $\overline{z}=1+2i$. **B.** $\overline{z}=2-i$. **C.** $\overline{z}=-1+2i$. **D.** $\overline{z}=-1-2i$.

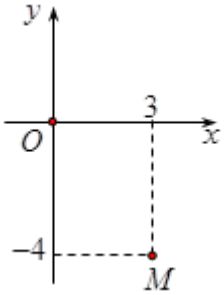
Câu 5: Số phức liên hợp của số phức $z=5+6i$ là

A. $\overline{z}=-5+6i$. **B.** $\overline{z}=-5-6i$. **C.** $\overline{z}=6-5i$. **D.** $\overline{z}=5-6i$.

Câu 6: Cho số phức $z=2-3i$. Số phức liên hợp của số phức z là:

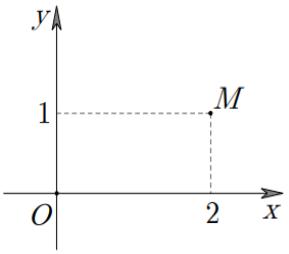
A. $\overline{z}=3-2i$. **B.** $\overline{z}=3+2i$. **C.** $\overline{z}=-2-3i$. **D.** $\overline{z}=2+3i$.

Câu 7: Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.



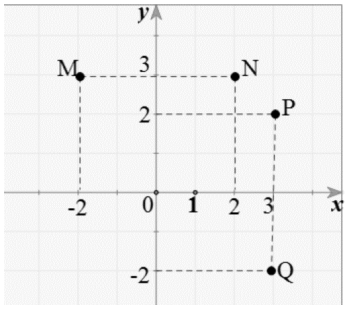
A. Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$
B. Phần thực là 3 và phần ảo là -4
C. Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$
D. Phần thực là -4 và phần ảo là 3

Câu 8: Trong hình vẽ bên, điểm M biểu diễn số phức z. Số phức $\overline{z}$ là:



A. $1-2i$. **B.** $2+i$.
C. $1+2i$. **D.** $2-i$.

Câu 9: Điểm nào ở hình vẽ bên biểu diễn số phức $z=3-2i$?

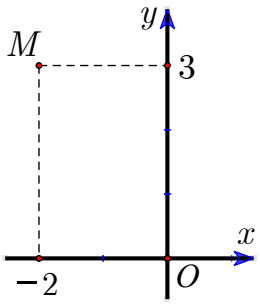


A. M. **B.** N. **C.** P. **D.** Q.

Câu 10: Điểm biểu diễn hình học của số phức $z=2-3i$ là điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $M(-2;3)$. **B.** $Q(-2;-3)$. **C.** $N(2;-3)$. **D.** $P(2;3)$.

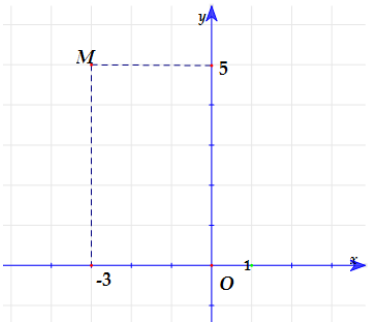
Câu 11: Điểm M trong hình vẽ bên dưới biểu thị cho số phức



A. $3+2i$. **B.** $2-3i$.

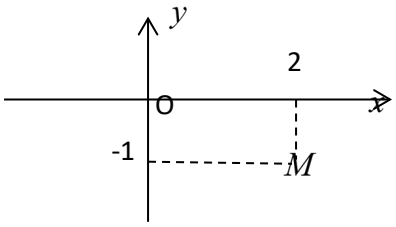
C. $-2+3i$. **D.** $3-2i$.

Câu 12: Điểm M trong hình vẽ bên biểu diễn số phức z. Chọn kết luận đúng về số phức $\overline{z}$.



A. $\overline{z}=3+5i$. **B.** $\overline{z}=-3+5i$. **C.** $\overline{z}=3-5i$. **D.** $\overline{z}=-3-5i$.

Câu 13: Điểm M trong hình vẽ là biểu diễn hình học của số phức nào dưới đây?



A. $z=2-i$. **B.** $z=2+i$. **C.** $z=-1+2i$. **D.** $z=-1-2i$.

Câu 14: Số phức nào sau đây có điểm biểu diễn là $M(1;-2)$?

A. $-1-2i$ **B.** $1+2i$ **C.** $1-2i$ **D.** $-2+i$

Câu 15: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn của hai số phức đối nhau là

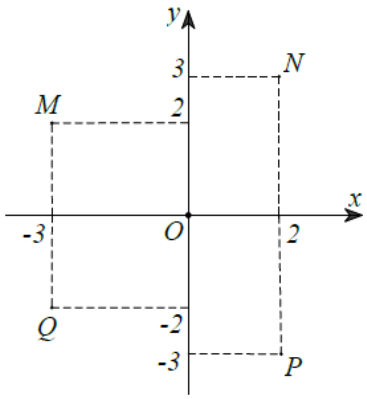
A. hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ O.

B. hai điểm đối xứng nhau qua trục hoành.

C. hai điểm đối xứng nhau qua trục tung.

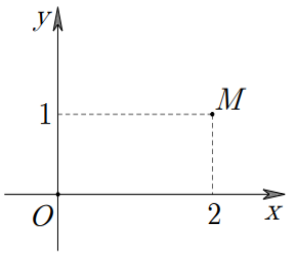
D. hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$.

Câu 16: Điểm nào trong hình vẽ dưới đây là điểm biểu diễn số phức liên hợp của số phức $z=-3i+2$?



A. M. **B.** N. **C.** Q. **D.** P.

Câu 17: Trong hình vẽ bên, điểm M biểu diễn số phức z. Số phức $\overline{z}$ là:



A. $1-2i$. **B.** $2+i$. **C.** $1+2i$. **D.** $2-i$.

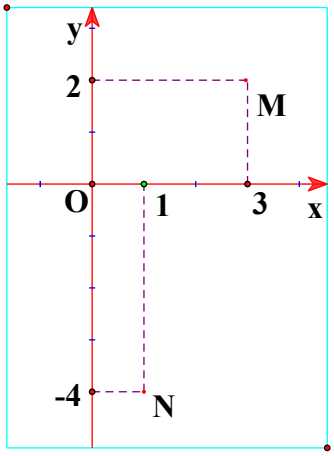
Câu 18: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, 3 điểm A,B,C lần lượt là điểm biểu diễn của ba số phức $z_1=3-7i, z_2=9-5i$ và $z_3=-5+9i$. Khi đó, trọng tâm G là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây?

A. $z=1-9i$. **B.** $z=3+3i$. **C.** $z=\frac{7}{3}-i$. **D.** $z=2+2i$.

Câu 19: Cho hai số phức $z_1=1+i$ và $z_2=2-3i$. Tính môđun của số phức z_1+z_2.

A. $|z_1+z_2|=1$. **B.** $|z_1+z_2|=\sqrt{5}$. **C.** $|z_1+z_2|=\sqrt{13}$. **D.** $|z_1+z_2|=5$.

Câu 20: Gọi z_1, z_2 lần lượt có điểm biểu diễn là M và N trên mặt phẳng phức ở hình bên. Tính $|z_1+z_2|$.



A. $2\sqrt{29}$. **B.** 20.
C. $2\sqrt{5}$. **D.** 116.

Câu 21: Tìm số phức liên hợp của số phức $z=i(3i+1)$.

A. $\overline{z}=3+i$. **B.** $\overline{z}=-3-i$.
C. $\overline{z}=3-i$. **D.** $\overline{z}=-3+i$.

Câu 22: Cho số phức z thỏa mãn $z(1+2i)=4-3i$. Tìm số phức liên hợp $\overline{z}$ của z.

A. $\overline{z}=\frac{-2}{5}-\frac{11}{5}i$. **B.** $\overline{z}=\frac{2}{5}-\frac{11}{5}i$. **C.** $\overline{z}=\frac{-2}{5}+\frac{11}{5}i$. **D.** $\overline{z}=\frac{2}{5}+\frac{11}{5}i$.

Câu 23: Cho số phức z thỏa mãn $z(1+i)=3-5i$. Tính môđun của z

A. $|z|=\sqrt{17}$. **B.** $|z|=16$. **C.** $|z|=17$. **D.** $|z|=4$.

Câu 24: Cho số phức $z=(1-2i)^2$. Tính mô đun của số phức $\frac{1}{z}$.

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\frac{1}{25}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 25: Cho số phức $z=(1-i)^2(1+2i)$. Số phức z có phần ảo là:

A. 2. **B.** -2. **C.** 4. **D.** $-2i$.

Câu 26: Cho số phức $z=1-\frac{1}{3}i$. Tìm số phức $w=i\overline{z}+3z$.

A. $\mathrm{w}=\frac{8}{3}$. **B.** $\mathrm{w}=\frac{8}{3}+i$. **C.** $\mathrm{w}=\frac{10}{3}$. **D.** $\mathrm{w}=\frac{10}{3}+i$.

Câu 27: Cho số phức $z=-2+i$. Điểm nào dưới đây là biểu diễn của số phức $w=iz$ trên mặt phẳng toạ độ?

A. $M(-1;-2)$. **B.** $P(-2;1)$. **C.** $N(2;1)$. **D.** $Q(1;2)$.

Câu 28: Cho số phức $z=1+2i$. Tìm tổng phần thực và phần ảo của số phức $w=2z+\overline{z}$.

A. 3 **B.** 5 **C.** 1 **D.** 2

Câu 29: Cho số phức z khác 0. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\frac{z}{\overline{z}}$ là số thuần ảo. **B.** $z.\overline{z}$ là số thực. **C.** $z+\overline{z}$ là số thực. **D.** $z-\overline{z}$ là số ảo.

Câu 30: Cho hai số phức $z_1=1+2i$ và $z_2=3-4i$. Số phức $2z_1+3z_2-z_1z_2$ là số phức nào sau đây?

A. $10i$. **B.** $-10i$. **C.** $11+8i$. **D.** $11-10i$.

Câu 31: Tìm tọa độ điểm M là điểm biểu diễn số phức z biết z thỏa mãn phương trình $(1+i)\overline{z}=3-5i$.

A. $M(-1;4)$. **B.** $M(-1;-4)$. **C.** $M(1;4)$. **D.** $M(1;-4)$.

Câu 32: Cho số phức z thỏa mãn $(1+3i)z-5=7i.$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overline{z}=\frac{13}{5}-\frac{4}{5}i$. **B.** $\overline{z}=-\frac{13}{5}+\frac{4}{5}i$. **C.** $\overline{z}=-\frac{13}{5}-\frac{4}{5}i$. **D.** $\overline{z}=\frac{13}{5}+\frac{4}{5}i$.

Câu 33: Cho số phức $z=\frac{(2-3i)(4-i)}{3+2i}$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng Oxy.

A. $(1;4)$. **B.** $(-1;4)$. **C.** $(-1;-4)$. **D.** $(1;-4)$.

Câu 34: Cho $z_1=2+4i,\ z_2=3-5i$. Xác định phần thực của $w=z_1.\overline{z_2}^2$

A. -120. **B.** -32. **C.** 88. **D.** -152.

Câu 35: Cho số phức z thỏa mãn phương trình $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i$. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức z.

A. $M(-1;1)$ **B.** $M(-1;-1)$ **C.** $M(1;1)$ **D.** $M(1;-1)$

Câu 36: Cho số phức z thỏa mãn $\left(1-\sqrt{3}i\right)^2 z=4-3i$. Môđun của z bằng

A. $\frac{5}{4}$ **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** $\frac{2}{5}$ **D.** $\frac{4}{5}$

Câu 37: Cho $z=\frac{3+i}{x+i}$. Tổng phần thực và phần ảo của z là

A. $\frac{2x-4}{2}$. **B.** $\frac{4x+2}{2}$. **C.** $\frac{4x-2}{x^2+1}$. **D.** $\frac{2x+6}{x^2+1}$.

Câu 38: Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(1-3i)=-1+6i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=1;\ y=-3$. **B.** $x=-1;\ y=-3$. **C.** $x=-1;\ y=-1$. **D.** $x=1;\ y=-1$.

Câu 39: Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(3-i)=5x-4i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=-1, y=-1$ **B.** $x=1, y=1$ **C.** $x=-1, y=1$ **D.** $x=1, y=-1$

Câu 40: Tìm các số thực x và y thỏa mãn $(3x-2)+(2y+1)i=(x+1)-(y-5)i$, với i là đơn vị ảo.

A. $x=\frac{3}{2}, y=-2$. **B.** $x=-\frac{3}{2}, y=-\frac{4}{3}$. **C.** $x=1, y=\frac{4}{3}$. **D.** $x=\frac{3}{2}, y=\frac{4}{3}$.

Câu 41: Cho số phức $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(1+i)z+2\bar{z}=3+2i$. Tính $P=a+b$

A. $P=1$ **B.** $P=-\frac{1}{2}$ **C.** $P=\frac{1}{2}$ **D.** $P=-1$

Câu 42: Cho số phức z thỏa mãn $(2+3i)z+4-3i=13+4i$. Môđun của z bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Câu 43: Cho số phức $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(1+2i)\bar{z}+z=3-4i$. Tính giá trị của biểu thức $S=3x-2y$.

A. $S=-12$ **B.** $S=-11$ **C.** $S=-13$ **D.** $S=-10$

Câu 44: Tổng phần thực và phần ảo của số phức z thoả mãn $iz+(1-i)\bar{z}=-2i$ bằng

A. 6 **B.** –2 **C.** 2 **D.** –6

Câu 45: Cho $a,b\in\mathbb{R}$ và thỏa mãn $(a+bi)i-2a=1+3i$, với i là đơn vị ảo. Giá trị $a-b$ bằng

A. 4 **B.** –10 **C.** –4 **D.** 10

Câu 46: Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thoả mãn $(1+i)z+2\bar{z}=3+2i$. Tính $P=a+b$

A. $P=1$. **B.** $P=-\frac{1}{2}$. **C.** $P=\frac{1}{2}$. **D.** $P=-1$

Câu 47: Tìm số phức z biết $4z+5\bar{z}=27-7i$.

A. $z=-3+7i$. **B.** $z=-3-7i$. **C.** $z=3-7i$. **D.** $z=3+7i$.

Câu 48: Cho số phức z thỏa mãn $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i$. Mô đun của số phức $w=(z+1)\bar{z}$ bằng.

A. 2. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 4.

Câu 49: Tìm các số thực a,b thỏa mãn $(a-2b)+(a+b+4)i=(2a+b)+2bi$ với i là đơn vị ảo.

A. $a=-3, b=1$. **B.** $a=3, b=-1$. **C.** $a=-3, b=-1$. **D.** $a=3, b=1$.

Câu 50: Cho hai số phức $z_1=m+1-2i$ và $z_1=2-(m+1)i$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để $z_1.z_2-8+8i$ là một số thực.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 51: Tìm mô đun của số phức z biết $(2z-1)(1+i)+(\bar{z}+1)(1-i)=2-2i$.

A. $\frac{1}{9}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{2}{9}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Câu 52: Tính mô đun của số phức z thỏa mãn $z(1+2i)+\bar{z}(1-i)+4-i=0$ với i là đơn vị ảo.

A. $\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 53: Tìm số phức z thỏa mãn $z-(2+3i)\bar{z}=1-9i$.

A. $z=-2+i$. **B.** $z=-2-i$. **C.** $z=2-i$. **D.** $2+i$.

Câu 54: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z.\bar{z}+z\right|=2$ và $\left|z\right|=2$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 55: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z+i\sqrt{5}\right|+\left|z-i\sqrt{5}\right|=6$, biết z có môđun bằng $\sqrt{5}$?

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 0

Câu 56: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=2$ và $\left|z_1+2z_2\right|=4$. Giá trị của $\left|2z_1-z_2\right|$ bằng

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $3\sqrt{6}$. **D.** 8.

Câu 57: Cho số phức z có phần thực là số nguyên và z thỏa mãn $\left|z\right|-2\bar{z}=-7+3i+z$. Môđun của số phức $w=1-z+z^2$ bằng

A. $\left|w\right|=\sqrt{445}$. **B.** $\left|w\right|=\sqrt{425}$. **C.** $\left|w\right|=\sqrt{37}$. **D.** $\left|w\right|=\sqrt{457}$

Câu 58: Cho số phức $z=a+bi$ $\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ thoả mãn $\left|z-4\right|i+\left|z-2i\right|=\sqrt{5}\left(1+i\right)$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b$.

A. $T=2$. **B.** $T=3$. **C.** $T=1$. **D.** $T=-1$.

Câu 59: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^3+2i\left|z\right|^2=0$.

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 6

Câu 60: Có bao nhiêu số phức z thỏa $\left|z+1-2i\right|=\left|\bar{z}+3+4i\right|$ và $\dfrac{z-2i}{\overline{z+i}}$ là một số thuần ảo

A. 0. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 61: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\left|z-(2+i)\right|=\sqrt{10}$ và $z.\bar{z}=25$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 62: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\left|z-1\right|^2+\left|z-\bar{z}\right|i+\left(z+\bar{z}\right)i^{2019}=1$?

A. 4 **B.** **C.** 1 **D.** 3

Câu 63: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\left|z\right|^2=\left|z+\bar{z}\right|+\left|z-\bar{z}\right|$ và z^2 là số thuần ảo

A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 5

Câu 64: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^3+2i\left|z\right|^2=0$.

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 6

Câu 65: Cho số phức $z=a+bi$ $\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $\left|z-3\right|=\left|z-1\right|$ và $\left(z+2\right)\left(\bar{z}-i\right)$ là số thực. Tính $a+b$.

A. -2. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 66: Cho số phức $z=a+bi$ $\left(a,\ b\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $z+1+3i-\left|z\right|i=0$. Tính $S=2a+3b$.

A. $S=-6$. **B.** $S=6$. **C.** $S=-5$. **D.** $S=5$.

Câu 67: Cho ba số phức $z_1;\ z_2;\ z_3$ thỏa mãn $\begin{cases}z_1+z_2+z_3=0\\ \left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\left|z_3\right|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\end{cases}$. Tính

$A=|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2$

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

Câu 68: Cho số phức $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{Z}\right)$ thỏa mãn $|z+2+5i|=5$ và $z.\overline{z}=82$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

A. 10. **B.** -8. **C.** -35. **D.** -7.

Câu 69: Cho M là tập hợp các số phức z thỏa $|2z-i|=|2+iz|$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc tập hợp M sao cho $|z_1-z_2|=1$. Tính giá trị của biểu thức $P=|z_1+z_2|$.

A. $P=\sqrt{3}$. **B.** $P=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $P=\sqrt{2}$. **D.** $P=2$.

Câu 70: Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m\in S$ có đúng một số phức thỏa mãn $|z-m|=6$ và $\frac{z}{z-4}$ là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập S.

A. 10. **B.** 0. **C.** 16. **D.** 8.

Câu 71: Cho số phức z thỏa mãn $z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i$. Môđun của số phức z bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 16. **D.** 4.

Câu 72: Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R},a>0)$ thỏa $z.\overline{z}-12|z|+(z-\overline{z})=13-10i$. Tính $S=a+b$.

A. $S=-17$. **B.** $S=5$. **C.** $S=7$. **D.** $S=17$.

Câu 73: Cho số phức $z\neq 0$ thỏa mãn $\frac{iz-(3i+1)\overline{z}}{1+i}=|z|^2$. Số phức $w=\frac{13}{3}iz$ có môđun bằng

A. 26. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** $\frac{3\sqrt{26}}{2}$. **D.** 13.

Câu 74: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=1$, $|z_2|=2$ và $|z_1+z_2|=3$. Giá trị của $|z_1-z_2|$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** một giá trị khác.

Câu 75: Cho số phức $z=a+bi\left(a,b\in R\right)$ thỏa mãn $z+7+i-|z|(2+i)=0$ và $|z|<3$. Tính $P=a+b$.

A. 5. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** 7. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 76: Cho hai số phức z_1, z_2 thoả mãn: $|z_1|=2\sqrt{3}$, $|z_2|=3\sqrt{2}$. Hãy tính giá trị biểu thức $P=|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2$.

A. $P=60$. **B.** $P=20\sqrt{3}$. **C.** $P=30\sqrt{2}$. **D.** $P=50$.

Câu 77: Cho số phức $w=x+yi$, $\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn điều kiện $|w^2+4|=2|w|$. Đặt $P=8\left(x^2-y^2\right)+12$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $P=-\left(|\overline{w}|^2-2\right)^2$. **B.** $P=-\left(|w|^2-2\right)^2$. **C.** $P=-\left(|w|-4\right)^2$. **D.** $P=-\left(|w|^2-4\right)^2$.

Câu 78: Số phức $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $|z-8|i+|z-6i|=5(1+i)$. Tính giá trị biểu thức $P=a+b$.

A. $P=1$. **B.** $P=14$. **C.** $P=2$. **D.** $P=7$.

Câu 79: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-1|^2+|z-\bar{z}|i+(z+\bar{z})i^{2019}=1$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 80: Cho số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A. $P=3$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=-5$. **D.** $P=7$.

Câu 81: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-2+3i|=|z+1-i|$ và $|z|^2+2(z+\bar{z})=5$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 82: Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R},a>0)$ thỏa mãn $z.\bar{z}-12|z|+(z-\bar{z})=13-10i$. Tính $S=a+b$.

A. $S=-17$. **B.** $S=5$. **C.** $S=7$. **D.** $S=17$.

Câu 83: Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(z+1+i)(\bar{z}-i)+3i=9$ và $|\bar{z}|>2$. Tính $P=a+b$.

A. 2. **B.** 1. **C.** -3. **D.** -1.

Câu 84: Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=3$, $|z_1-z_2|=3\sqrt{2}$ và $|z_1-iz_2|=6$. Biết $|z_2|>|z_1|$, tính $|z_2|$.

A. $3\sqrt{7}$. **B.** $3\sqrt{5}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Câu 85: Tính tổng phần thực của tất cả các số phức $z\neq 0$ thỏa mãn $\left(z+\frac{5}{|z|}\right)i=7-z$.

A. 3. **B.** -2. **C.** -3. **D.** 2.

Câu 86: Cho số phức $z=(1+i)^{2019}$. Phần thực của z bằng

A. -2^{1009}. **B.** 2^{2019}. **C.** -2^{2019}. **D.** 2^{1009}.

Câu 87: Số phức $z=(1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^{2018}$ có phần ảo bằng

A. $2^{1009}+1$. **B.** $1-2^{1009}$. **C.** $2^{1009}-1$. **D.** $-(2^{1009}+1)$.

Câu 88: Gọi T là tổng phần thực, phần ảo của số phức $w=i+2i^2+3i^3+...+2018i^{2018}$. Tính giá trị của T.

A. $T=0$. **B.** $T=-1$. **C.** $T=2$. **D.** $T=-2$.

Câu 89: Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn hệ $\begin{cases}|z_1|=|z_2|=|z_3|=1\\ z_1+z_2+z_3=1\end{cases}$. Tính giá trị biểu thức $S=z_1^{2019}+z_2^{2019}+z_3^{2019}$.

A. $S=-1$. **B.** $S=2^{2019}$. **C.** $S=1$. **D.** $S=2^{-2019}$.

Câu 90: Tính $S=i+2i^2+3i^3+...+2019i^{2019}$

A. $S=-1010-1010i$. **B.** $S=1010-1010i$. **C.** $S=2019i$. **D.** $S=1010+1010i$.

Câu 91: Cho số phức z thỏa mãn $z^2+z+1=0$. Tính giá trị biểu thức $P=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2+...+\left(z^{2019}+\frac{1}{z^{2019}}\right)^2$.

A. $P=4038$. **B.** $P=2019$. **C.** $P=673$. **D.** $P=6073$.

Câu 92: Khai triển của biểu thức $\left(x^2+x+1\right)^{2018}$ được viết thành $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{4036}x^{4036}$. Tổng $S=a_0-a_2+a_4-a_6+...-a_{4034}+a_{4036}$ bằng

A. 2^{1009}. **B.** -2^{1009}. **C.** 0. **D.** -1.

Câu 93: Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn điều kiện $z^4=|z|$. Số phần tử của S là

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 94: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z.\bar{z}=1$ và $\left|z-\sqrt{3}+i\right|=m$. Tìm số phần tử của S.

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 95: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để số phức $z=\dfrac{m+2i}{m-2i}$ có phần thực dương

A. $m>2$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $m<-2$.

Câu 96: Cho hai số phức $z=3-4i$ và $z'=(2+m)+mi\,(m\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z'|=|iz|$. Tổng tất cả các giá trị của m bằng

A. -1. **B.** $\dfrac{\sqrt{46}}{2}$. **C.** 0. **D.** -2.

Câu 97: Biết rằng $z=m^2-3m+3+(m-2)i$, với $m\in\mathbb{R}$, là một số thực. Giá trị của biểu thức $P=1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2019}$ bằng

A. 1. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 0.

Câu 98: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của m để tồn tại 4 số phức z thỏa mãn $\left|z+\bar{z}\right|+\left|z-\bar{z}\right|=2$ và $z\left(\bar{z}+2\right)-\left(z+\bar{z}\right)-m$ là số thuần ảo. Tổng các phần tử của S là

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

CHƯƠNG IV

SỐ PHỨC

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

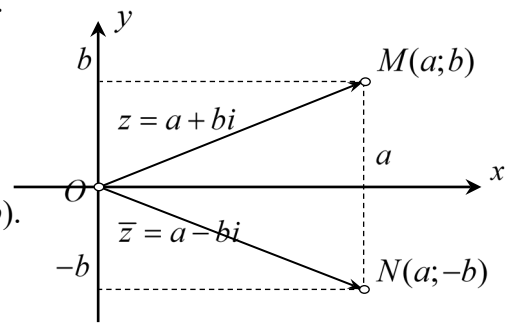
① *Số phức* $z=a+bi$ *có phần thực là* a, *phần ảo là* b.

② *Số phức liên hợp* $\overline{z}=a-bi$ *và cần nhớ* $i^2=-1$.

③ *Số phức* $z=a+bi$ *có điểm biểu diễn là* $M(a;b)$.

Số phức liên hợp $\overline{z}=a-bi$ *có điểm biểu diễn* $N(a;-b)$.

Hai điểm M *và* N *đối xứng nhau qua trục hoành* Ox.



- $\overline{\overline{z}}=z;\ \overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'};\ \overline{z-z'}=\overline{z}-\overline{z'};$

$\overline{z}.\overline{z'}=\overline{z.z'};\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}};\ z.\overline{z}=a^2+b^2$

④ *Hai số phức bằng nhau khi thực bằng thực và ảo bằng ảo.*

⑤ **Mô đun của số phức** z là: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

- $|z.z'|=|z||z'|$ • $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$

- $\big||z|-|z'|\big|\le|z+z'|\le|z|+|z'|$ • $\big||z|-|z'|\big|\le|z-z'|\le|z|+|z'|$

◆ **Phép cộng hai số phức** Cho số phức $z_1=a+b.i$ và $z_2=c+d.i$. Khi đó

$z_1+z_2=(a+b.i)+(c+d.i)=(a+c)+(b+d).i.$

◆ **Phép trừ hai số phức** $z_1-z_2=(a+b.i)-(c+d.i)=(a-c)+(b-d).i.$

◆ **Phép nhân hai số phức** $z_1.z_2=(a+b.i).(c+d.i)=(ac-bd)+(ad+bc).i.$

$k.z=k.(a+bi)=ka+kbi$

◆ **Phép chia hai số phức**

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1.\overline{z}_2}{z_2.\overline{z}_2}=\frac{z_1.\overline{z}_2}{|z_2|^2}=\frac{(a+b.i).(c-d.i)}{c^2+d^2}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Câu 1: Cho số phức $z=3-4i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.

A. Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.
B. Phần thực là 3 và phần ảo là -4.
C. Phần thực là -4 và phần ảo là 3.
D. Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.

Lời giải

Số phức $z=3-4i$ có phần thực là 3 và phần ảo là -4.

Câu 2: Cho số phức $z=3+2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$.
A. Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -2.
B. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng -2.
C. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $-2i$.
D. Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2.

Lời giải

$z=3+2i \Leftrightarrow \overline{z}=3-2i$. Nên số phức $\overline{z}$ có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng -2.

Câu 3: Số phức đối của $z=5+7i$ là?
A. $\overline{z}=5+7i$. **B.** $-z=-5-7i$. **C.** $-z=-5+7i$. **D.** $-z=5-7i$.

Lời giải

Số phức đối của z là $-z$. Suy ra $-z=-5-7i$.

Câu 4: Số phức liên hợp của số phức $z=1-2i$ là
A. $\overline{z}=1+2i$. **B.** $\overline{z}=2-i$. **C.** $\overline{z}=-1+2i$. **D.** $\overline{z}=-1-2i$.

Lời giải

Số phức liên hợp của số phức $z=a+bi$ là số phức $\overline{z}=a-bi$.

Câu 5: Số phức liên hợp của số phức $z=5+6i$ là
A. $\overline{z}=-5+6i$. **B.** $\overline{z}=-5-6i$. **C.** $\overline{z}=6-5i$. **D.** $\overline{z}=5-6i$.

Lời giải

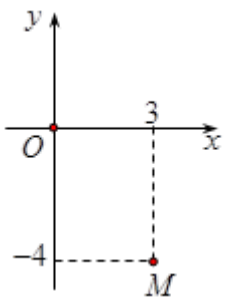
Số phức liên hợp của số phức $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$ là số phức $\overline{z}=x-yi$. Do đó số phức liên hợp của số phức $z=5+6i$ là $\overline{z}=5-6i$.

Câu 6: Cho số phức $z=2-3i$. Số phức liên hợp của số phức z là:
A. $\overline{z}=3-2i$. **B.** $\overline{z}=3+2i$. **C.** $\overline{z}=-2-3i$. **D.** $\overline{z}=2+3i$.

Lời giải

Số phức liên hợp của số phức $z=2-3i$ là $\overline{z}=2+3i$.

Câu 7: Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.



A. Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$ **B.** Phần thực là 3 và phần ảo là -4

C. Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$ **D.** Phần thực là -4 và phần ảo là 3

Lời giải

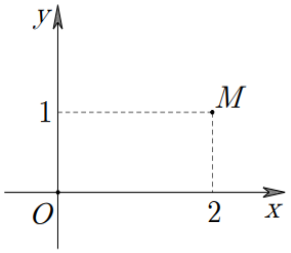
Chọn B

Nhắc lại: *Trên mặt phẳng phức, số phức* $z=x+yi$ *được biểu diễn bởi điểm* $M(x;y)$.

Điểm M trong hệ trục Oxy có hoành độ $x=3$ và tung độ $y=-4$.

Vậy số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là -4.

Câu 8: Trong hình vẽ bên, điểm M biểu diễn số phức z. Số phức $\bar{z}$ là:

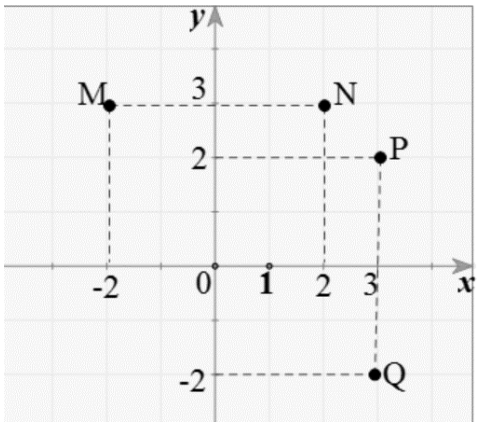


A. $1-2i$. **B.** $2+i$. **C.** $1+2i$. **D.** $2-i$.

Lời giải

Điểm $M(2;1)$ trong hệ tọa độ vuông góc cuả mặt phẳng được gọi là điểm biểu diễn số phức $z=2+i$ suy ra $\bar{z}=2-i$.

Câu 9: Điểm nào ở hình vẽ bên biểu diễn số phức $z=3-2i$?



A. M. **B.** N. **C.** P. **D.** Q.

Lời giải

Chọn D

Câu 10: Điểm biểu diễn hình học của số phức $z=2-3i$ là điểm nào trong các điểm sau đây?

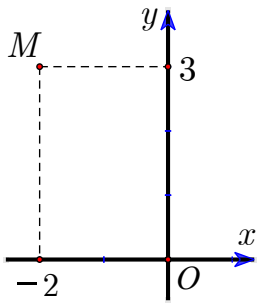
A. $M(-2;3)$. **B.** $Q(-2;-3)$. **C.** $N(2;-3)$. **D.** $P(2;3)$.

Lời giải

Điểm biểu diễn hình học của số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ là $(a;b)$.

Với $z=2-3i$ ta có $a=2$ và $b=-3$. Do đó điểm biểu diễn tương ứng là $N(2;-3)$.

Câu 11: Điểm M trong hình vẽ bên dưới biểu thị cho số phức

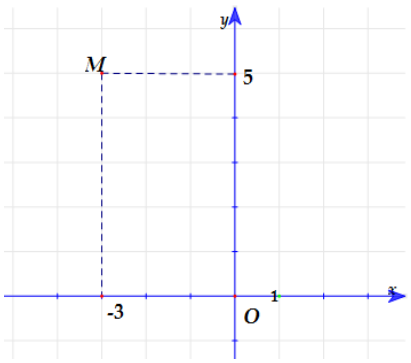


A. $3+2i.$ **B.** $2-3i.$ **C.** $-2+3i.$ **D.** $3-2i.$

Lời giải

Điểm $M(-2;3)$ biểu thị cho số phức $z=-2+3i.$

Câu 12: Điểm M trong hình vẽ bên biểu diễn số phức z. Chọn kết luận đúng về số phức $\overline{z}$.

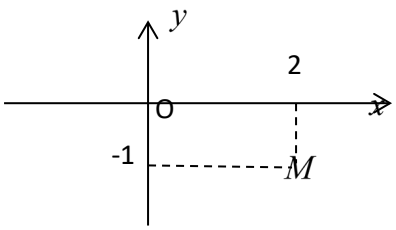


A. $\overline{z}=3+5i$. **B.** $\overline{z}=-3+5i$. **C.** $\overline{z}=3-5i$. **D.** $\overline{z}=-3-5i$.

Lời giải

Tọa độ điểm $M(-3;5)\Rightarrow z=-3+5i\Rightarrow \overline{z}=-3-5i$.

Câu 13: Điểm M trong hình vẽ là biểu diễn hình học của số phức nào dưới đây?



A. $z=2-i$. **B.** $z=2+i$. **C.** $z=-1+2i$. **D.** $z=-1-2i$.

Lời giải

Điểm $M(2;-1)$ nên nó biểu diễn cho số phức $z=2-i$.

Câu 14: Số phức nào sau đây có điểm biểu diễn là $M(1;-2)$?

A. $-1-2i$ **B.** $1+2i$ **C.** $1-2i$ **D.** $-2+i$

Lời giải

Chọn C

$M(1;-2)$ là điểm biểu diễn cho số phức có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng -2, tức là $1-2i$.

Câu 15: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn của hai số phức đối nhau là

A. hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ O.

B. hai điểm đối xứng nhau qua trục hoành.

C. hai điểm đối xứng nhau qua trục tung.

D. hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$.

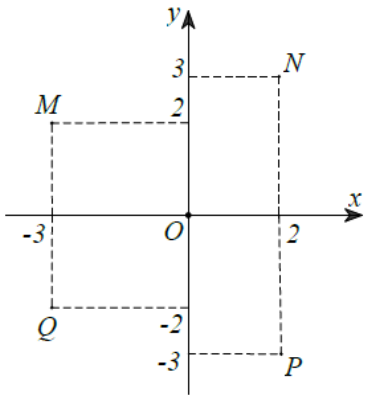
Lời giải

Điểm biểu diễn của số phức $z=a+bi$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là điểm $M(a;b)$

Điểm biểu diễn của số phức $-z=-a-bi$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là điểm $N(-a;-b)$

Do đó: điểm biểu diễn của hai số phức đối nhau là hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ

Câu 16: Điểm nào trong hình vẽ dưới đây là điểm biểu diễn số phức liên hợp của số phức $z=-3i+2$?



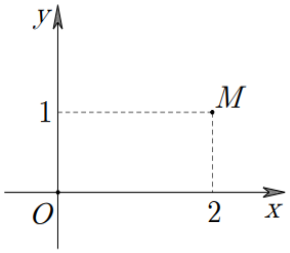
A. M. **B.** N. **C.** Q. **D.** P.

Lời giải

Số phức liên hợp của số phức $z=-3i+2$ là $\overline{z}=2+3i$. Điểm biểu diễn số phức $\overline{z}$ là $N(2\ ;\ 3)$.

Vậy điểm biểu diễn số phức liên hợp của số phức $z=-3i+2$ là N.

Câu 17: Trong hình vẽ bên, điểm M biểu diễn số phức z. Số phức $\overline{z}$ là:



A. $1-2i$. **B.** $2+i$. **C.** $1+2i$. **D.** $2-i$.

Lời giải

Điểm $M(2;1)$ trong hệ tọa độ vuông góc cuả mặt phẳng được gọi là điểm biểu diễn số phức $z=2+i$ suy ra $\overline{z}=2-i$.

Câu 18: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, 3 điểm A,B,C lần lượt là điểm biểu diễn của ba số phức $z_1=3-7i, z_2=9-5i$ và $z_3=-5+9i$. Khi đó, trọng tâm G là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây?

A. $z=1-9i$. **B.** $z=3+3i$. **C.** $z=\frac{7}{3}-i$. **D.** $z=2+2i$.

Lời giải

Ta có: $A(3;-7), B(9;-5), C(-5;9)$

Trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{7}{3};-1\right)$

Vậy trọng tâm G là điểm biểu diễn của số phức $z=\frac{7}{3}-i$.

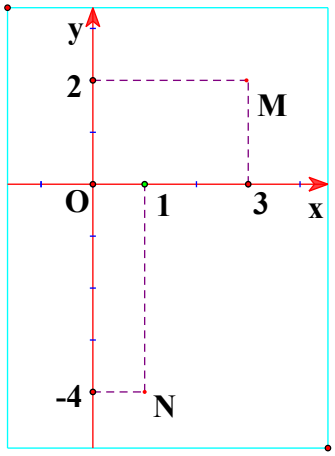
Câu 19: Cho hai số phức $z_1=1+i$ và $z_2=2-3i$. Tính môđun của số phức z_1+z_2.

A. $|z_1+z_2|=1$. **B.** $|z_1+z_2|=\sqrt{5}$. **C.** $|z_1+z_2|=\sqrt{13}$. **D.** $|z_1+z_2|=5$.

Lời giải

Ta có $z_1+z_2=1+i+2-3i=3-2i \Rightarrow |z_1+z_2|=|3-2i|=\sqrt{13}$.

Câu 20: Gọi z_1, z_2 lần lượt có điểm biểu diễn là M và N trên mặt phẳng phức ở hình bên. Tính $|z_1+z_2|$.



A. $2\sqrt{29}$. **B.** 20. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** 116.

Lời giải

Từ hình bên ta có tọa độ $M(3;2)$ biểu diễn số phức $z_1=3+2i$.

Tọa độ $N(1;-4)$ biểu diễn $z_2=1-4i$.

Ta có $z_1+z_2=4-2i \Rightarrow |z_1+z_2|=\sqrt{(4)^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$.

Câu 21: Tìm số phức liên hợp của số phức $z=i(3i+1)$.

A. $\overline{z}=3+i$. **B.** $\overline{z}=-3-i$. **C.** $\overline{z}=3-i$. **D.** $\overline{z}=-3+i$.

Lời giải

Chọn B

$z=i(3i+1)=-3+i$ nên suy ra $\overline{z}=-3-i$.

Câu 22: Cho số phức z thỏa mãn $z(1+2i)=4-3i$. Tìm số phức liên hợp $\overline{z}$ của z.

A. $\overline{z}=\frac{-2}{5}-\frac{11}{5}i$. **B.** $\overline{z}=\frac{2}{5}-\frac{11}{5}i$. **C.** $\overline{z}=\frac{-2}{5}+\frac{11}{5}i$. **D.** $\overline{z}=\frac{2}{5}+\frac{11}{5}i$.

Lời giải

Vì $z(1+2i)=4-3i$ nên $z=\frac{4-3i}{1+2i}=\frac{(4-3i)(1-2i)}{1^2+2^2}=\frac{-2-11i}{5}=\frac{-2}{5}-\frac{11}{5}i$.

Vậy nên $\overline{z}=\frac{-2}{5}+\frac{11}{5}i$.

Câu 23: Cho số phức z thỏa mãn $z(1+i)=3-5i$. Tính môđun của z

A. $|z|=\sqrt{17}$. **B.** $|z|=16$. **C.** $|z|=17$. **D.** $|z|=4$.

Lời giải

$$z(1+i)=3-5i\Leftrightarrow z=\frac{3-5i}{1+i}=-1-4i\Rightarrow|z|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2}=\sqrt{17}.$$

Câu 24: Cho số phức $z=(1-2i)^2$. Tính mô đun của số phức $\frac{1}{z}$.

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\frac{1}{25}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Ta có $z=(1-2i)^2=1-4i+4i^2=-3-4i\Rightarrow\frac{1}{z}=\frac{1}{-3-4i}=-\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i$.

Do đó $\left|\frac{1}{z}\right|=\sqrt{\left(-\frac{3}{25}\right)^2+\left(\frac{4}{25}\right)^2}=\frac{1}{5}$.

Câu 25: Cho số phức $z=(1-i)^2(1+2i)$. Số phức z có phần ảo là:

A. 2. **B.** -2. **C.** 4. **D.** $-2i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z=(1-i)^2(1+2i)=(1-2i+i^2)(1+2i)=-2i(1+2i)=-2i-4i^2=4-2i$.

Suy ra số phức z có phần ảo là: -2.

Câu 26: Cho số phức $z=1-\frac{1}{3}i$. Tìm số phức $w=i\overline{z}+3z$.

A. $w=\frac{8}{3}$. **B.** $w=\frac{8}{3}+i$. **C.** $w=\frac{10}{3}$. **D.** $w=\frac{10}{3}+i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z=1-\frac{1}{3}i\Rightarrow\overline{z}=1+\frac{1}{3}i$

Khi đó: $\mathrm{w} = i\bar{z} + 3z = i(1+\frac{1}{3}i) + 3(1-\frac{1}{3}i) = \frac{8}{3}$

Câu 27: Cho số phức $z = -2+i$. Điểm nào dưới đây là biểu diễn của số phức $w = iz$ trên mặt phẳng toạ độ?

A. $M(-1;-2)$. **B.** $P(-2;1)$. **C.** $N(2;1)$. **D.** $Q(1;2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $w = iz = i(-2+i) = -1-2i$.

Vậy điểm biểu diễn số phức $w = iz$ là điểm $M(-1;-2)$.

Câu 28: Cho số phức $z = 1+2i$. Tìm tổng phần thực và phần ảo của số phức $w = 2z + \bar{z}$.

A. 3 **B.** 5 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn B

Ta có $z = 1+2i \Rightarrow \bar{z} = 1-2i$

$w = 2z + \bar{z} = 2(1+2i) + 1 - 2i = 3 + 2i$

Vậy tổng phần thực và phần ảo của số phức w là 5

Câu 29: Cho số phức z khác 0. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\frac{z}{\bar{z}}$ là số thuần ảo. **B.** $z.\bar{z}$ là số thực. **C.** $z+\bar{z}$ là số thực. **D.** $z-\bar{z}$ là số ảo.

Lời giải

Đặt $z = a+bi,\ (a_1, b_1 \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = a-bi$.

$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{a+bi}{a-bi} = \frac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{(a^2-b^2)+2ab.i}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2}.i$ chỉ là số thuần ảo

$\Leftrightarrow a = \pm b$.

Câu 30: Cho hai số phức $z_1 = 1+2i$ và $z_2 = 3-4i$. Số phức $2z_1 + 3z_2 - z_1 z_2$ là số phức nào sau đây?

A. $10i$. **B.** $-10i$. **C.** $11+8i$. **D.** $11-10i$.

Lời giải

Ta có $2z_1 + 3z_2 - z_1 z_2 = 2(1+2i) + 3(3-4i) - (1+2i)(3-4i) = 11 - 8i - (11+2i) = -10i$.

Câu 31: Tìm tọa độ điểm M là điểm biểu diễn số phức z biết z thỏa mãn phương trình $(1+i)\bar{z} = 3-5i$.

A. $M(-1;4)$. **B.** $M(-1;-4)$. **C.** $M(1;4)$. **D.** $M(1;-4)$.

Lời giải

Ta có $(1+i)\bar{z} = 3-5i \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{3-5i}{1+i} \Leftrightarrow \bar{z} = -1-4i$.

Suy ra $z=-1+4i$. Vậy $M(-1;4)$.

Câu 32: Cho số phức z thỏa mãn $(1+3i)z-5=7i.$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\bar{z}=\frac{13}{5}-\frac{4}{5}i$. **B.** $\bar{z}=-\frac{13}{5}+\frac{4}{5}i$. **C.** $\bar{z}=-\frac{13}{5}-\frac{4}{5}i$. **D.** $\bar{z}=\frac{13}{5}+\frac{4}{5}i$.

Lời giải

$(1+3i)z-5=7i\Leftrightarrow z=\frac{5+7i}{1+3i}\Leftrightarrow z=\frac{13}{5}-\frac{4}{5}i\Rightarrow \bar{z}=\frac{13}{5}+\frac{4}{5}i.$

Câu 33: Cho số phức $z=\frac{(2-3i)(4-i)}{3+2i}$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng Oxy.

A. $(1;4)$. **B.** $(-1;4)$. **C.** $(-1;-4)$. **D.** $(1;-4)$.

Lời giải

Ta có $z=\frac{(2-3i)(4-i)}{3+2i}=\frac{(8-3)-(2+12)i}{3+2i}=\frac{5-14i}{3+2i}=\frac{(5-14i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$

$=\frac{(15-28)-(10+42)i}{9+4}=\frac{-13-52i}{13}=-1-4i$.

Vậy điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng Oxy là $M(-1;-4)$.

Câu 34: Cho $z_1=2+4i,\ z_2=3-5i$. Xác định phần thực của $w=z_1.\bar{z_2}^2$

A. -120. **B.** -32. **C.** 88. **D.** -152.

Lời giải

Ta có $\bar{z_2}=3+5i\Rightarrow \bar{z_2}^2=-16+30i\ \Rightarrow w=z_1.\bar{z_2}^2=(2+4i)(-16+30i)=-152-4i$.

Vậy phần thực của w là -152.

Câu 35: Cho số phức z thỏa mãn phương trình $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i$. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức z.

A. $M(-1;1)$ **B.** $M(-1;-1)$ **C.** $M(1;1)$ **D.** $M(1;-1)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $z=\frac{4+i-(2-i)^2}{3+2i}=1+i$ nên $M(1;1)$.

Câu 36: Cho số phức z thỏa mãn $\left(1-\sqrt{3}i\right)^2 z=4-3i$. Môđun của z bằng

A. $\frac{5}{4}$ **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** $\frac{2}{5}$ **D.** $\frac{4}{5}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $z=\dfrac{4-3i}{\left(1-\sqrt{3}i\right)^2}\Rightarrow |z|=\dfrac{|4-3i|}{|1-\sqrt{3}i|^2}=\dfrac{5}{4}$.

Câu 37: Cho $z=\dfrac{3+i}{x+i}$. Tổng phần thực và phần ảo của z là

A. $\dfrac{2x-4}{2}$. **B.** $\dfrac{4x+2}{2}$. **C.** $\dfrac{4x-2}{x^2+1}$. **D.** $\dfrac{2x+6}{x^2+1}$.

Lời giải

Ta có: $z=\dfrac{3+i}{x+i}=\dfrac{(3+i)(x-i)}{(x+i)(x-i)}=\dfrac{3x-3i+xi+1}{x^2+1}=\dfrac{3x+1}{x^2+1}+\dfrac{(x-3)i}{x^2+1}$.

Suy ra tổng phần thực và phần ảo của số phức z là: $\dfrac{3x+1}{x^2+1}+\dfrac{x-3}{x^2+1}=\dfrac{4x-2}{x^2+1}$.

Câu 38: Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(1-3i)=-1+6i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=1;\ y=-3$. **B.** $x=-1;\ y=-3$. **C.** $x=-1;\ y=-1$. **D.** $x=1;\ y=-1$.

Lời giải

Ta có: $(2x-3yi)+(1-3i)=-1+6i\Leftrightarrow 2x+1-(3y+3)i=-1+6i$.

Suy ra $\begin{cases}2x+1=-1\\-3y-3=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-3\end{cases}$.

Câu 39: Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(3-i)=5x-4i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=-1, y=-1$ **B.** $x=1, y=1$ **C.** $x=-1, y=1$ **D.** $x=1, y=-1$

Lời giải

Chọn B

Từ $(2x-3yi)+(3-i)=5x-4i\Leftrightarrow(2x+3)-(3y+1)i=5x-4i$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3=5\\3y+1=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ Vậy $x=1, y=1$.

Câu 40: Tìm các số thực x và y thỏa mãn $(3x-2)+(2y+1)i=(x+1)-(y-5)i$, với i là đơn vị ảo.

A. $x=\dfrac{3}{2}, y=-2$. **B.** $x=-\dfrac{3}{2}, y=-\dfrac{4}{3}$. **C.** $x=1, y=\dfrac{4}{3}$. **D.** $x=\dfrac{3}{2}, y=\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Ta có $(3x-2)+(2y+1)i=(x+1)-(y-5)i\Leftrightarrow(3x-2)+(2y+1)i=(x+1)+(5-y)i$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2=x+1\\2y+1=5-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}\\y=\dfrac{4}{3}\end{cases}$.

Câu 41: Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(1+i)z+2\bar{z}=3+2i$. Tính $P=a+b$

A. $P=1$ **B.** $P=-\frac{1}{2}$ **C.** $P=\frac{1}{2}$ **D.** $P=-1$

Lời giải

Ta có

$(1+i)z+2\overline{z}=3+2i \Leftrightarrow (1+i)(a+bi)+2(a-bi)=3+2i$

$\Leftrightarrow 3a-b+(a+b)i=3+2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases}3a-b=3\\a-b=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=-\frac{3}{2}\end{cases}$

Vậy $P=a+b=-1$.

Câu 42: Cho số phức z thỏa mãn $(2+3i)z+4-3i=13+4i$. Môđun của z bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Lời giải

$(2+3i)z+4-3i=13+4i \Leftrightarrow (2+3i)z=9+7i \Leftrightarrow z=\frac{9+7i}{2+3i}$

$\Leftrightarrow z=\frac{(9+7i)(2-3i)}{4+9} \Leftrightarrow z=\frac{39-13i}{13} \Leftrightarrow z=3-i$.

Vậy $|z|=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$.

Câu 43: Cho số phức $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(1+2i)\overline{z}+z=3-4i$. Tính giá trị của biểu thức $S=3x-2y$.

A. $S=-12$ **B.** $S=-11$ **C.** $S=-13$ **D.** $S=-10$

Lời giải

Có $(1+2i)\overline{z}+z=3-4i \Leftrightarrow \begin{cases}2x+2y=3\\2x=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\y=-\frac{7}{3}\end{cases} \Rightarrow S=-13$.

Câu 44: Tổng phần thực và phần ảo của số phức z thoả mãn $iz+(1-i)\overline{z}=-2i$ bằng

A. 6 **B.** -2 **C.** 2 **D.** -6

Lời giải

Chọn A

Giả sử số phức z có dạng: $z=x+yi, x, y\in\mathbb{R}$.

Ta có: $iz+(1-i)\overline{z}=-2i \Leftrightarrow i(x+yi)+(1-i)(x-yi)=-2i \Leftrightarrow x-2y-yi=-2i$.

$\Leftrightarrow \begin{cases}x-2y=0\\-y=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\y=2\end{cases} \Rightarrow x+y=6$.

Tổng phần thực và phần ảo của số phức z bằng 6.

Câu 45: Cho $a,b\in\mathbb{R}$ và thỏa mãn $(a+bi)i-2a=1+3i$, với i là đơn vị ảo. Giá trị $a-b$ bằng

A. 4 **B.** -10 **C.** -4 **D.** 10

Lời giải

Chọn D

Ta có $(a+bi)i-2a=1+3i\Leftrightarrow -b-2a+ai=1+3i\Leftrightarrow \begin{cases}-b-2a=1\\ a=3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\ b=-7\end{cases}$

Vậy $a-b=10$.

Câu 46: Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thoả mãn $(1+i)z+2\overline{z}=3+2i$. Tính $P=a+b$

A. $P=1$. **B.** $P=-\frac{1}{2}$. **C.** $P=\frac{1}{2}$. **D.** $P=-1$

Lời giải

$(1+i)z+2\overline{z}=3+2i\Leftrightarrow (1+i)(a+bi)+2(a-bi)=3+2i\Leftrightarrow (3a-b)+(a-b)i=3+2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases}3a-b=3\\ a-b=2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=-\frac{3}{2}\end{cases}$. Suy ra: $P=a+b=-1$.

Câu 47: Tìm số phức z biết $4z+5\overline{z}=27-7i$.

A. $z=-3+7i$. **B.** $z=-3-7i$. **C.** $z=3-7i$. **D.** $z=3+7i$.

Lời giải

Giả sử $z=a+bi\ (a,b\in R)$, khi đó $4(a+bi)+5(a-bi)=27-7i\Leftrightarrow 9a-bi=27-7i$

$\Leftrightarrow \begin{cases}9a=27\\ -b=-7\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\ b=7\end{cases}\Rightarrow z=3+7i$.

Câu 48: Cho số phức z thỏa mãn $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i$. Mô đun của số phức $w=(z+1)\overline{z}$ bằng.

A. 2. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $(3+2i)z+(2-i)^2=4+i\Leftrightarrow (3+2i)z=1+5i\Leftrightarrow z=1+i$.

Do đó: $w=(z+1)\overline{z}=z\overline{z}+\overline{z}=(1+i)(1-i)+1-i=2+1-i=3-i$.

$\Rightarrow |w|=\sqrt{3^2+1}=\sqrt{10}$.

Câu 49: Tìm các số thực a,b thỏa mãn $(a-2b)+(a+b+4)i=(2a+b)+2bi$ với i là đơn vị ảo.

A. $a=-3,b=1$. **B.** $a=3,b=-1$. **C.** $a=-3,b=-1$. **D.** $a=3,b=1$.

Lời giải

Ta có: $(a-2b)+(a+b+4)i=(2a+b)+2bi$.

$\Leftrightarrow \begin{cases}a-2b=2a+b\\ a+b+4=2b\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a+3b=0\\ a-b=-4\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=-3\\ b=1\end{cases}$.

Câu 50: Cho hai số phức $z_1 = m+1-2i$ và $z_1 = 2-(m+1)i$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để $z_1.z_2 - 8 + 8i$ là một số thực.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $z_1.z_2 - 8 + 8i = (m+1-2i)\left[2-(m+1)i\right] - 8 + 8i = -8 + \left(-m^2 - 2m + 3\right)i$.

Để $z_1.z_2 - 8 + i$ là một số thực thì $-m^2 - 2m + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -3 \end{array}\right.$.

Vậy có hai giá trị của tham số m để $z_1.z_2 - 8 + i$ là một số thực.

Câu 51: Tìm mô đun của số phức z biết $(2z-1)(1+i) + \left(\overline{z}+1\right)(1-i) = 2-2i$.

A. $\frac{1}{9}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{2}{9}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Lời giải

Chọn B

Giả sử $z = a+bi \Rightarrow \overline{z} = a-bi$

Do đó $(2z-1)(1+i) + \left(\overline{z}+1\right)(1-i) = 2-2i$

$\Leftrightarrow (2a+2bi-1)(1+i) + (a-bi+1)(1-i) = 2-2i$

$\Leftrightarrow (2a-2b-1) + (2a+2b-1)i + (a-b+1) - (a+b+1)i = 2-2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (2a-2b-1) + (a-b+1) = 2 \\ (2a+2b-1) - (a+b+1) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-3b = 2 \\ a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$

Khi đó $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 52: Tính mô đun của số phức z thỏa mãn $z(1+2i) + \overline{z}(1-i) + 4 - i = 0$ với i là đơn vị ảo.

A. $\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Giả sử: $z = x+yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $z(1+2i) + \overline{z}(1-i) + 4 - i = 0 \Leftrightarrow (x+yi)(1+2i) + (x-yi)(1-i) + 4 - i = 0$

$\Leftrightarrow (2x-3y+4) + (x-1)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y+4 = 0 \\ x-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow z = 1+2i \Rightarrow |z| = \sqrt{5}$.

Câu 53: Tìm số phức z thỏa mãn $z-(2+3i)\overline{z}=1-9i$.

A. $z=-2+i$. **B.** $z=-2-i$. **C.** $z=2-i$. **D.** $2+i$.

Lời giải

Giả sử $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$. Ta có:

$$z-(2+3i)\overline{z}=1-9i\Leftrightarrow a+bi-(2+3i)(a-bi)=1-9i\Leftrightarrow -a-3b+(-3a+3b)i=1-9i$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-a-3b=1\\-3a+3b=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}.$$

Vậy $z=2-i$.

Câu 54: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z.\overline{z}+z\right|=2$ và $|z|=2$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Đặt $z=x+yi\ (x;\ y\in\mathbb{R};\ i^2=-1)$.

Theo bài ra ta có: $\begin{cases}\left|x^2+y^2+x+yi\right|=2\\\sqrt{x^2+y^2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|4+x+yi|=2\\x^2+y^2=4\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(4+x)^2+y^2=4\\x^2+y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=0\end{cases}$$

Vậy có 1 số phức thỏa yêu cầu bài toán là $z=-2$.

Câu 55: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z+i\sqrt{5}\right|+\left|z-i\sqrt{5}\right|=6$, biết z có môđun bằng $\sqrt{5}$?

A. 3 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 0

Lời giải

Chọn B

Gọi $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R},i^2=-1\right)$

Ta có

$$\begin{cases}\left|z+i\sqrt{5}\right|+\left|z-i\sqrt{5}\right|=6\\|z|=\sqrt{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{a^2+\left(b+\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{a^2+\left(b-\sqrt{5}\right)^2}=6\\\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}36a^2+16b^2=144\\a^2+b^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=\dfrac{16}{5}\\b^2=\dfrac{9}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\pm\dfrac{4}{\sqrt{5}}\\b=\pm\dfrac{3}{\sqrt{5}}\end{cases}$$

Vậy có 4 số phức thỏa mãn.

Câu 56: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1|=|z_2|=2$ và $|z_1+2z_2|=4$. Giá trị của $|2z_1-z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $3\sqrt{6}$. **D.** 8.

Lời giải

Giả sử $z_1 = a+bi$, $(a,\ b\in\mathbb{R})$; $z_2 = c+di$, $(c,\ d\in\mathbb{R})$.

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases}|z_1|=2\\|z_2|=2\\|z_1+2z_2|=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=4\\c^2+d^2=4\\(a+2c)^2+(b+2d)^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=4 & (1)\\c^2+d^2=4 & (2)\\a^2+b^2+4(c^2+d^2)+4(ac+bd)=16 & (3)\end{cases}$$

Thay $(1),(2)$ vào (3) ta được $ac+bd=-1$ (4).

Ta có $|2z_1-z_2|=\sqrt{(2a-c)^2+(2b-d)^2}=\sqrt{4(a^2+b^2)+(c^2+d^2)-4(ac+bd)}$ (5).

Thay $(1),(2),(4)$ vào (5) ta có $|2z_1-z_2|=2\sqrt{6}$.

Câu 57: Cho số phức z có phần thực là số nguyên và z thỏa mãn $|z|-2\bar{z}=-7+3i+z$. Môđun của số phức $w=1-z+z^2$ bằng

A. $|w|=\sqrt{445}$. **B.** $|w|=\sqrt{425}$. **C.** $|w|=\sqrt{37}$. **D.** $|w|=\sqrt{457}$

Lời giải

Đặt $z=a+bi\ (a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{R})$.

Khi đó: $|z|-2\bar{z}=-7+3i+z\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}-2a+2bi=-7+3i+a+bi$

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}-3a+7\right)+(b-3)i=0\Leftrightarrow\left[\begin{cases}b=3\\a=\dfrac{5}{4}\end{cases}\ (a\ge\frac{7}{3}).\right.$$
$$\left.\begin{cases}b=3\\a=4\end{cases}\right.$$

Do $a\in\mathbb{Z}$ nên $a=4\Rightarrow z=4+3i\Rightarrow w=4+21i\Rightarrow|w|=\sqrt{457}$

Câu 58: Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thoả mãn $|z-4|i+|z-2i|=\sqrt{5}(1+i)$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b$.

A. $T=2$. **B.** $T=3$. **C.** $T=1$. **D.** $T=-1$.

Lời giải

$$|z-4|i+|z-2i|=\sqrt{5}(1+i)\Leftrightarrow|a+bi-4|i+|a+bi-2i|=\sqrt{5}(1+i)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|a-4+bi|=\sqrt{5} & (1)\\|a+(b-2)i|=\sqrt{5} & (2)\end{cases}$$

Từ (1) và (2), ta có $|a-4+bi|=|a+(b-2)i|\Leftrightarrow(a-4)^2+b^2=a^2+(b-2)^2\Rightarrow b=2a-3$.

Kết hợp với (1), ta được: $\begin{cases}(a-4)^2+b^2=5\\ b=2a-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$

Vậy $T=a+b=3$.

Câu 59: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^3+2i|z|^2=0$.

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 6

Lời giải

Chọn A

$$z^3+2i|z|^2=0\Leftrightarrow z^3+2iz\overline{z}=0\Leftrightarrow z\left(z^2+2i\overline{z}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=0\\ z^2+2i\overline{z}=0\end{array}\right.\quad(2)$$

Gọi $z=x+yi\Rightarrow\overline{z}=x-yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$ thay vào (2) có:

$$x^2-y^2+2y+2x(y+1)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2+2y=0\\ 2x(y+1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-y^2+2y=0\\ x=0\\ y=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ -y^2+2y=0\end{cases}\\ \begin{cases}y=-1\\ x^2-3=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=0\\ \begin{cases}x=0\\ y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\sqrt{3}\\ y=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x=\sqrt{3}\\ y=-1\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}z=0\\ z=2i\\ z=-\sqrt{3}-i\\ z=\sqrt{3}-i\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm

Câu 60: Có bao nhiêu số phức z thỏa $|z+1-2i|=|\overline{z}+3+4i|$ và $\frac{z-2i}{\overline{z+i}}$ là một số thuần ảo

A. 0. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$

Theo bài ra ta có

$|x+1+(y-2)i|=|x+3+(4-y)i|$

$\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-2)^2=(x+3)^2+(y-4)^2\Leftrightarrow y=x+5$

Số phức $w=\frac{z-2i}{\overline{z}+i}=\frac{x+(y-2)i}{x+(1-y)i}=\frac{x^2-(y-2)(y-1)+x(2y-3)i}{x^2+(y-1)^2}$

w là một số ảo khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2-(y-2)(y-1)=0 \\ x^2+(y-1)^2>0 \\ y=x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{12}{7} \\ y=\dfrac{23}{7} \end{cases}$

Vậy $z=-\dfrac{12}{7}+\dfrac{23}{7}i$ .Vậy chỉ có 1 số phức z thỏa mãn.

Câu 61: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-(2+i)|=\sqrt{10}$ và $z.\bar{z}=25$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Gọi số phức cần tìm là $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có: $z.\bar{z}=|z|^2=a^2+b^2=25 \quad (1)$.

Lại có: $|z-(2+i)|=\sqrt{10} \Leftrightarrow |a-2+(b-1)i|=\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2}=\sqrt{10}$

$\Leftrightarrow (a-2)^2+(b-1)^2=10$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-4a-2b+5=10 \quad (2)$

Thay vào ta được: $25-4a-2b+5=10 \Leftrightarrow b=-2a+10$.

Nên $a^2+b^2=25 \Leftrightarrow a^2+(-2a+10)^2=25$

$\Leftrightarrow 5a^2-40a+75=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5 \\ a=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=4 \end{array}\right.$

Vậy Vậy có 2 số phức z thoả mãn là $z=5$ và $z=3+4i$.

Câu 62: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-1|^2+|z-\bar{z}|i+(z+\bar{z})i^{2019}=1$?

A. 4 **B.** **C.** 1 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Gọi $z=a+bi$; $(a,b\in\mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z}=a-bi$.

Ta có: $|z-1|^2=|a+bi-1|^2=(a-1)^2+b^2$, $|z-\bar{z}|i=|a+bi-a+bi|i=\sqrt{(2b)^2}i=2|b|i$,

$i^{2019}=-i$, $(z+\bar{z})i^{2019}=-i(a+bi+a-bi)=-2ai$.

Suy ra phương trình đã cho tương đương với: $(a-1)^2+b^2+2|b|i-2ai=1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+b^2=1 \\ 2|b|-2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2a+b^2=0 \\ a=|b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|b|^2-2|b|=0 \\ a=|b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} |b|=0 \\ |b|=1 \end{array}\right. \\ a=|b| \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy có 3 số phức z thỏa mãn.

Câu 63: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2=|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|$ và z^2 là số thuần ảo

A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 5

Lời giải

Gọi số phức $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Ta có $|z|^2=|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|\Leftrightarrow a^2+b^2=|2a|+|2bi|$

$\Leftrightarrow a^2+b^2=2|a|+2|b|\ (1)$.

Lại có $z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$ là số thuần ảo, suy ra $a^2-b^2=0\Leftrightarrow a=\pm b$

Trường hợp 1: $a=b$ thay vào (1) ta được:

$$\Leftrightarrow 2a^2=4|a|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|a|=0\\|a|=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=\pm2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=b=0\\a=b=\pm2\end{array}\right.$$

Trường hợp 2: $a=-b$ thay vào (1) ta được:

$$\Leftrightarrow 2a^2=4|a|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|a|=0\\|a|=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=\pm2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\b=\mp2\end{array}\right.$$

Vậy có 5 số phức thỏa mãn bài toán là $z=0$, $z=2\pm2i$, $z=-2\pm2i$.

Câu 64: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z^3+2i|z|^2=0$.

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 6

Lời giải

Chọn A

$$z^3+2i|z|^2=0\Leftrightarrow z^3+2iz\overline{z}=0\Leftrightarrow z\left(z^2+2i\overline{z}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=0\\z^2+2i\overline{z}=0\end{array}\right.\quad(2)$$

Gọi $z=x+yi\Rightarrow\overline{z}=x-yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$ thay vào (2) có:

$$x^2-y^2+2y+2x(y+1)i=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2+2y=0\\2x(y+1)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2+2y=0\\\left[\begin{array}{l}x=0\\y=-1\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x=0\\-y^2+2y=0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}y=-1\\x^2-3=0\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=0 \\ \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=2i \\ z=-\sqrt{3}-i \\ z=\sqrt{3}-i \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm

Câu 65: Cho số phức $z=a+bi\ \left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $\left|z-3\right|=\left|z-1\right|$ và $\left(z+2\right)\left(\overline{z}-i\right)$ là số thực. Tính $a+b$.

A. -2. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $z=a+bi\ \left(a,b\in\mathbb{R}\right)$.

+) $\left|z-3\right|=\left|z-1\right| \Leftrightarrow \left|a-3+bi\right|=\left|a-1+bi\right| \Leftrightarrow \sqrt{\left(a-3\right)^2+b^2}=\sqrt{\left(a-1\right)^2+b^2}$

$\Leftrightarrow \left(a-3\right)^2+b^2=\left(a-1\right)^2+b^2 \Leftrightarrow -4a+8=0 \Leftrightarrow a=2$.

+) $\left(z+2\right)\left(\overline{z}-i\right)=\left(a+bi+2\right)\left(a-bi-i\right)=\left[\left(a+2\right)+bi\right]\left[a-\left(b+1\right)i\right]$

$=a\left(a+2\right)+b\left(b+1\right)-\left(a+2b+2\right)i$.

$\left(z+2\right)\left(\overline{z}-i\right)$ là số thực $\Leftrightarrow a+2b+2=0$.

Thay $a=2$ tìm được $b=-2$. Vậy $a+b=0$.

Câu 66: Cho số phức $z=a+bi\ \left(a,\ b\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $z+1+3i-\left|z\right|i=0$. Tính $S=2a+3b$.

A. $S=-6$. **B.** $S=6$. **C.** $S=-5$. **D.** $S=5$.

Lời giải

Ta có $z+1+3i-\left|z\right|i=0 \Leftrightarrow \left(a+1\right)+\left(b+3-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+1=0 \\ b+3-\sqrt{a^2+b^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ \sqrt{1+b^2}=b+3 \end{cases} \quad (*).$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} b\geq -3 \\ 1+b^2=\left(b+3\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\geq -3 \\ b=-\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow b=-\frac{4}{3}.$$

Vậy $\begin{cases} a=-1 \\ b=-\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow S=2a+3b=-6$.

Câu 67: Cho ba số phức $z_1; z_2; z_3$ thỏa mãn $\begin{cases} z_1+z_2+z_3=0 \\ |z_1|=|z_2|=|z_3|=\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$. Tính

$A=|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2$

A. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{8}$.

Lời giải

$z_1+z_2+z_3=0 \Rightarrow \begin{cases} z_1+z_2=-z_3 \\ z_1+z_3=-z_2 \\ z_3+z_2=-z_1 \end{cases}$.

$A=|z_1+z_2|^2+|z_2+z_3|^2+|z_3+z_1|^2=|-z_1|^2+|-z_2|^2+|-z_3|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2=3.\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2=\dfrac{8}{3}$.

Câu 68: Cho số phức $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{Z}\right)$ thỏa mãn $|z+2+5i|=5$ và $z.\overline{z}=82$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b$.

A. 10. **B.** -8. **C.** -35. **D.** -7.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} \sqrt{(a+2)^2+(b+5)^2}=5 \\ a^2+b^2=82 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{-5b-43}{2} \quad (1) \\ a^2+b^2=82 \quad (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được $29b^2+430b+1521=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-9 \\ b=\dfrac{-169}{29} \end{array}\right.$

Vì $b\in\mathbb{Z}$ nên $b=-9\Rightarrow a=1$. Do đó $P=a+b=-8$.

Câu 69: Cho M là tập hợp các số phức z thỏa $|2z-i|=|2+iz|$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc tập hợp M sao cho $|z_1-z_2|=1$. Tính giá trị của biểu thức $P=|z_1+z_2|$.

A. $P=\sqrt{3}$. **B.** $P=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $P=\sqrt{2}$. **D.** $P=2$.

Lời giải

Đặt $z=x+yi$ với x, $y\in\mathbb{R}$.

Ta có: $|2z-i|=|2+iz|\Leftrightarrow|2x+(2y-1)i|=|2-y+xi|\Leftrightarrow x^2+y^2=1$.

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức là đường tròn $(O;1)$

$\Rightarrow |z_1|=|z_2|=1$.

Ta có: $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)\Rightarrow P^2=3\Rightarrow P=\sqrt{3}$.

Câu 70: Gọi S là tập hợp các số thực m sao cho với mỗi $m\in S$ có đúng một số phức thỏa mãn $|z-m|=6$ và $\dfrac{z}{z-4}$ là số thuần ảo. Tính tổng của các phần tử của tập S.

A. 10. **B.** 0. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải

Cách 1:

Gọi $z=x+iy$ với $x,y\in\mathbb{R}$ ta có $\dfrac{z}{z-4}=\dfrac{x+iy}{x-4+iy}=\dfrac{(x+iy)(x-4-iy)}{(x-4)^2+y^2}=\dfrac{x(x-4)+y^2-4iy}{(x-4)^2+y^2}$

là số thuần ảo khi $x(x-4)+y^2=0\Leftrightarrow(x-2)^2+y^2=4$

Mà $|z-m|=6\Leftrightarrow(x-m)^2+y^2=36$

Ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}(x-m)^2+y^2=36\\(x-2)^2+y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(4-2m)x=36-m^2\\y^2=4-(x-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{36-m^2}{4-2m}\\y^2=4-\left(\dfrac{36-m^2}{4-2m}-2\right)^2\end{cases}$$

Ycbt $\Leftrightarrow 4-\left(\dfrac{36-m^2}{4-2m}-2\right)^2=0\Leftrightarrow 2=\dfrac{36-m^2}{4-2m}-2$ hoặc $-2=\dfrac{36-m^2}{4-2m}-2$

$\Leftrightarrow m=10$ hoặc $m=-2$ hoặc $m=\pm 6$

Vậy tổng là $10-2+6-6=8$.

Câu 71: Cho số phức z thỏa mãn $z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i$. Môđun của số phức z bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 16. **D.** 4.

Lời giải

Giả sử $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có: $z-4=(1+i)|z|-(4+3z)i\Leftrightarrow z(1+3i)-4+4i=(1+i)|z|$

$\Leftrightarrow(a+bi)(1+3i)-4+4i=(1+i)\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow a-3b-4+(3a+b+4)i=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2}i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-3b-4=\sqrt{a^2+b^2} \\ 3a+b+4=\sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3b-4=\sqrt{a^2+b^2} \\ a=-2b-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5b-8=\sqrt{5b^2+16b+16} \\ a=-2b-4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5b-8\ge 0 \\ 20b^2+64b+48=0 \\ a=-2b-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\le -\dfrac{8}{5} \\ \left[\begin{array}{l} b=-2\,(N) \\ b=-\dfrac{6}{5}\,(L) \end{array}\right. \\ a=-2b-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ a=0 \end{cases}.$$

Vậy $|z|=2$.

Câu 72: Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R},a>0)$ thỏa $z.\overline{z}-12|z|+(z-\overline{z})=13-10i$. Tính $S=a+b$.

A. $S=-17$. **B.** $S=5$. **C.** $S=7$. **D.** $S=17$.

Lời giải

Ta có:

$z.\overline{z}-12|z|+(z-\overline{z})=13-10i \Leftrightarrow a^2+b^2-12\sqrt{a^2+b^2}+2bi=13-10i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2-12\sqrt{a^2+b^2}=13 \\ 2b=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+25-12\sqrt{a^2+25}=13 \\ b=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{a^2+25}=13 \\ \sqrt{a^2+25}=-1\,(VN) \end{array}\right. \\ b=-5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\pm 12 \\ b=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=12 \\ b=-5 \end{cases}, \text{ vì } a>0.$$

Vậy $S=a+b=7$.

Câu 73: Cho số phức $z\neq 0$ thỏa mãn $\dfrac{iz-(3i+1)\overline{z}}{1+i}=|z|^2$. Số phức $w=\dfrac{13}{3}iz$ có môđun bằng

A. 26. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{26}}{2}$. **D.** 13.

Lời giải

Gọi $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$. Suy ra $\overline{z}=a-bi$.

Ta có $\dfrac{iz-(3i+1)\overline{z}}{1+i}=|z|^2 \Leftrightarrow \dfrac{i(a+bi)-(3i+1)(a-bi)}{1+i}=a^2+b^2$

$\Leftrightarrow ai-b-3ai-3b-a+bi=a^2+b^2+a^2i+b^2i$

$\Leftrightarrow (a^2+b^2+2a-b)i+(a^2+b^2+4b+a)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+2a-b=0 \\ a^2+b^2+a+4b=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 26b^2+9b=0 \\ a=5b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0, a=0 \\ b=\dfrac{-9}{26}, a=\dfrac{-45}{26} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ z=\dfrac{-45}{26}i-\dfrac{9}{26} \end{cases} \Rightarrow z=\dfrac{-45}{26}i-\dfrac{9}{26}.$$

Với $z=\dfrac{-45}{26}i-\dfrac{9}{26} \Rightarrow \mathrm{w}=\dfrac{15}{2}-\dfrac{3}{2}i \Rightarrow |\mathrm{w}|=\dfrac{3\sqrt{26}}{2}$.

Câu 74: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=1$, $|z_2|=2$ và $|z_1+z_2|=3$. Giá trị của $|z_1-z_2|$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** một giá trị khác.

Lời giải

Giả sử $z_1=a_1+b_1i,\ (a_1, b_1\in\mathbb{R}),\ z_2=a_2+b_2i,\ (a_2, b_2\in\mathbb{R})$.

Theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} |z_1|=1 \\ |z_2|=2 \\ |z_1+z_2|=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+b_1^2=1 \\ a_2^2+b_2^2=4 \\ (a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+b_1^2=1 \\ a_2^2+b_2^2=4 \\ 2a_1a_2+2b_1b_2=4 \end{cases}.$$

Khi đó, ta có:

$$|z_1-z_2|=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}=\sqrt{(a_1^2+b_1^2)+(a_2^2+b_2^2)-(2a_1a_2+2b_1b_2)}=1.$$

Vậy $|z_1-z_2|=1$.

Câu 75: Cho số phức $z=a+bi(a,b\in R)$ thỏa mãn $z+7+i-|z|(2+i)=0$ và $|z|<3$. Tính $P=a+b$.

A. 5. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** 7. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

$$a+7+(b+1)i-2\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+b^2}i=0$$

$$\begin{cases} a+7=2\sqrt{a^2+b^2} \quad (1) \\ \sqrt{a^2+b^2}=b+1 \quad (2) \end{cases}$$

$\Rightarrow a+7=2(b+1) \Rightarrow a=2b-5$ thế vào.

$$\sqrt{(2b-5)^2+b^2}=b+1 \Leftrightarrow \begin{cases} b\ge -1 \\ 4b^2-22b+24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} b=4 \\ b=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

TH1: $b=4 \Rightarrow a=3 \Rightarrow |z|=5>3$.

TH2: $b=\dfrac{3}{2} \Rightarrow a=-2 \Rightarrow |z|=\dfrac{5}{2}<3$..

$P=a+b=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 76: Cho hai số phức z_1, z_2 thoả mãn: $|z_1|=2\sqrt{3}$, $|z_2|=3\sqrt{2}$. Hãy tính giá trị biểu thức $P=|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2$.

A. $P=60.$ **B.** $P=20\sqrt{3}$. **C.** $P=30\sqrt{2}$. **D.** $P=50$.

Lời giải

Đặt $z_1=a+bi$, $z_2=c+di\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$

Theo đề: $\begin{cases}|z_1|=2\sqrt{3}\\|z_2|=3\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=12\\c^2+d^2=18\end{cases}$

Vậy

$$P=|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2$$
$$=(a-c)^2+(b-d)^2+(a+c)^2+(b+d)^2=2\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)=60$$

Câu 77: Cho số phức $w=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $|w^2+4|=2|w|$. Đặt $P=8\left(x^2-y^2\right)+12$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $P=-\left(|\overline{w}|^2-2\right)^2$. **B.** $P=-\left(|w|^2-2\right)^2$. **C.** $P=-\left(|w|-4\right)^2$. **D.** $P=-\left(|w|^2-4\right)^2$.

Lời giải

Ta có $w^2+4=(x+yi)^2+4=x^2-y^2+2xyi+4\Rightarrow|w^2+4|=\sqrt{\left(x^2-y^2+4\right)^2+4x^2y^2}$.

Do đó $|w^2+4|=2|w|\Leftrightarrow\sqrt{\left(x^2-y^2+4\right)^2+4x^2y^2}=2\sqrt{x^2+y^2}$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-y^2+4\right)^2+4x^2y^2=4\left(x^2+y^2\right)$$
$$\Leftrightarrow x^4+y^4-2x^2y^2+8\left(x^2-y^2\right)+16+4x^2y^2=4\left(x^2+y^2\right)$$
$$\Leftrightarrow x^4+y^4+2x^2y^2-4\left(x^2+y^2\right)+4+8\left(x^2-y^2\right)+12=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x^2+y^2\right)^2-4\left(x^2+y^2\right)+4+8\left(x^2-y^2\right)+12=0\Leftrightarrow\left(x^2+y^2-2\right)^2+8\left(x^2-y^2\right)+12=0$$
$$\Leftrightarrow 8\left(x^2-y^2\right)+12=-\left(x^2+y^2-2\right)^2\Leftrightarrow P=-\left(|w|^2-2\right)^2.$$

Câu 78: Số phức $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-8|i+|z-6i|=5(1+i)$. Tính giá trị biểu thức $P=a+b$.

A. $P=1$. **B.** $P=14$. **C.** $P=2$. **D.** $P=7$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $|z-8|i+|z-6i|=5(1+i)\Leftrightarrow|a+bi-8|i+|a+bi-6i|=5(1+i)$.

$$\Leftrightarrow|a-8+bi|i+|a+(b-6)i|=5(1+i)$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{(a-8)^2+b^2}.i+\sqrt{a^2+(b-6)^2}=5.i+5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(a-8)^2+b^2}=5 \\ \sqrt{a^2+(b-6)^2}=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-16a+64+b^2=25 \\ a^2+b^2-12b+36=25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2-16a=-39\ (1) \\ a^2+b^2-12b=-11\ (2) \end{cases}.$$

Lấy $(1)-(2)$ ta được: $-16a+12b+28=0 \Leftrightarrow a=\dfrac{3b+7}{4}\ (3)$.

Thế (3) vào (2) ta được:

$$\left(\frac{3b+7}{4}\right)^2+b^2-12b=-11 \Leftrightarrow 25b^2-150b+225=0 \Leftrightarrow b=3 \Rightarrow a=4.$$

Vậy $P=a+b=7$.

Câu 79: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-1|^2+|z-\bar{z}|\mathrm{i}+(z+\bar{z})\mathrm{i}^{2019}=1$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=a+b\mathrm{i}$ ta được

$|z-1|^2+|z-\bar{z}|\mathrm{i}+(z+\bar{z})\mathrm{i}^{2019}=1$

$\Leftrightarrow |a+b\mathrm{i}-1|^2+|a+b\mathrm{i}-a+b\mathrm{i}|\mathrm{i}+(a+b\mathrm{i}+a-b\mathrm{i})\mathrm{i}^{2019}=1.$

$\Leftrightarrow (a-1)^2+b^2+2|b|\mathrm{i}-2a\mathrm{i}=1$

$\Leftrightarrow a^2-2a+b^2+2|b|\mathrm{i}-2a\mathrm{i}=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2a+b^2=0 \\ 2|b|-2a=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2a+b^2=0 \\ a\ge 0 \\ b^2=a^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-2a+a^2=0 \\ a\ge 0 \\ b^2=a^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0,\ b=0 \\ a=1,\ \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=-1 \end{array}\right. \end{cases}$$

Suy ra có ba số phức thỏa mãn phương trình $z_1=0,\ z_2=1+\mathrm{i},\ z_3=1-\mathrm{i}$.

Câu 80: Cho số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A. $P=3$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=-5$. **D.** $P=7$.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết $z+2+i-|z|(1+i)=0\Leftrightarrow a+bi+2+i-\sqrt{a^2+b^2}\,(1+i)=0$.

$$\Leftrightarrow\left(a+2-\sqrt{a^2+b^2}\right)+\left(b+1-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}a+2-\sqrt{a^2+b^2}=0 & (1)\\ b+1-\sqrt{a^2+b^2}=0 & (2)\end{cases}.$$

Lấy $(1)-(2)$ ta được $a-b+1=0\Leftrightarrow b=a+1$. Thay vào phương trình (1) ta được

$$a+2-\sqrt{a^2+(a+1)^2}=0\Leftrightarrow\sqrt{2a^2+2a+1}=a+2\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge-2\\ 2a^2+2a+1=(a+2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge-2\\ a^2-2a-3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge-2\\ \left[\begin{array}{l}a=-1\\ a=3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\ a=3\end{array}\right..$$

+ Với $a=-1\Rightarrow b=0\Rightarrow z=-1\Rightarrow|z|=1$

+ Với $a=3\Rightarrow b=4\Rightarrow z=3+4i\Rightarrow|z|=5$.

Vậy $P=a+b=7$.

Câu 81: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-2+3i|=|z+1-i|$ và $|z|^2+2\left(z+\overline{z}\right)=5$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z=a+bi$ $(a,b\in R)$. Ta có

$|z-2+3i|=|z+1-i|\Leftrightarrow(a-2)^2+(b+3)^2=(a+1)^2+(b-1)^2$

$$\Leftrightarrow 6a-8b-11=0\Leftrightarrow b=\frac{6a-11}{8};\ |z|^2+2\left(z+\overline{z}\right)=5\Leftrightarrow a^2+b^2+4a=5$$

Thế vào ta có: $a^2+\frac{(6a-11)^2}{64}+4a=5\Leftrightarrow 100a^2+124a-199=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\frac{-31+4\sqrt{371}}{50}\\ a=\frac{-31-4\sqrt{371}}{50}\end{array}\right.$

Suy ra có hai số phức z thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 82: Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R},a>0)$ thỏa mãn $z.\overline{z}-12|z|+\left(z-\overline{z}\right)=13-10i$. Tính $S=a+b$.

A. $S=-17$. **B.** $S=5$. **C.** $S=7$. **D.** $S=17$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết $z.\bar{z}-12|z|+\left(z-\bar{z}\right)=13-10i\Leftrightarrow a^2+b^2-12\sqrt{a^2+b^2}+\left(a+bi-a+bi\right)=13-10i$

$\Leftrightarrow\left(a^2+b^2-12\sqrt{a^2+b^2}\right)+2bi=13-10i\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2-12\sqrt{a^2+b^2}=13 & (1)\\ 2b=-10 & (2)\end{cases}$.

Từ suy ra $b=-5$ thay vào ta được $a^2+25-12\sqrt{a^2+25}=13$.

Đặt $t=\sqrt{a^2+25}>0$ khi đó ta có phương trình $t^2-12t-13=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\ \left(\text{loại}\right)\\ t=13\ \left(\text{thỏa mãn}\right)\end{array}\right.$.

Với $t=13\Rightarrow\sqrt{a^2+25}=13\Leftrightarrow a^2=144\Leftrightarrow a=12$. Vậy $S=a+b=12-5=7$.

Câu 83: Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $\left(z+1+i\right)\left(\bar{z}-i\right)+3i=9$ và $|\bar{z}|>2$. Tính $P=a+b$.

A. 2. **B.** 1. **C.** -3. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

$z=a+bi\Rightarrow\bar{z}=a-bi$; $|\bar{z}|=a^2+b^2$.

Theo bài ra ta có: $|\bar{z}|>2\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}>2$.

$\left(z+1+i\right)\left(\bar{z}-i\right)+3i=9\Leftrightarrow\left[a+1+\left(b+1\right)i\right]\left[a-\left(b+1\right)i\right]+3i=9$

$\Leftrightarrow a\left(a+1\right)+\left(b+1\right)^2-\left(b+1\right)i=9-3i$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a\left(a+1\right)+\left(b+1\right)^2=9\\ -\left(b+1\right)=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\ a^2+a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\ \left[\begin{array}{l}a=0\\ a=-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0;b=2.\\ a=-1;b=2.\end{array}\right.$

TH $a=0$; $b=2$ loại do không thỏa mãn.

TH $a=-1$; $b=2$ thỏa mãn nên $P=a+b=1$.

Câu 84: Cho số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=3$, $|z_1-z_2|=3\sqrt{2}$ và $|z_1-iz_2|=6$. Biết $|z_2|>|z_1|$, tính $|z_2|$.

A. $3\sqrt{7}$. **B.** $3\sqrt{5}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $|z_1-z_2|=3\sqrt{2}\Leftrightarrow\dfrac{|z_1-z_2|}{|z_1|}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left|1-\dfrac{z_2}{z_1}\right|=\sqrt{2}$.

Ta lại có: $|z_1-iz_2|=6\Leftrightarrow\left|1-i\dfrac{z_2}{z_1}\right|=2$. Ta gọi $\dfrac{z_2}{z_1}=x+yi;\ x,\ y\in\mathbb{R}$.

Từ, suy ra: $\left|1-\dfrac{z_2}{z_1}\right|=2\Leftrightarrow\left(1-x\right)^2+y^2=2$.

$\left|1-i\dfrac{z_2}{z_1}\right|=2\Leftrightarrow (1+y)^2+x^2=4$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}(1-x)^2+y^2=2\\(1+y)^2+x^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=1\\x=0\end{cases}$ hay $\begin{cases}y=-1\\x=2\end{cases}$.

Vậy: $\dfrac{z_2}{z_1}=0+i\Rightarrow |z_2|=|z_1|$.

$\dfrac{z_2}{z_1}=2-i\Rightarrow |z_2|=|z_1|.\sqrt{5}=3\sqrt{5}$.

Câu 85: Tính tổng phần thực của tất cả các số phức $z\neq 0$ thỏa mãn $\left(z+\dfrac{5}{|z|}\right)i=7-z$.

A. 3. **B.** –2. **C.** –3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$.

Theo giả thiết $\left(z+\dfrac{5}{|z|}\right)i=7-z\Leftrightarrow |z|(a+bi)i+5i-7|z|+(a+bi)|z|=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}\left(a-b-7\right)+\left((a+b)\sqrt{a^2+b^2}+5\right)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}a-b-7=0\\(a+b)\sqrt{a^2+b^2}+5=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+7\\(2b+7)\sqrt{2b^2+14b+49}=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+7\\(2b+7)^2\left(2b^2+14b+49\right)=25\\2b+7\leq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+7\\2b+7\leq 0\\\left(4b^2+28b+98-49\right)\left(2b^2+14b+49\right)-25=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=b+7\\b\leq -\dfrac{7}{2}\\2b^2+14b+49=25\\2b^2+14b+49=-\dfrac{1}{2}(\text{loai})\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-4\\a=3\end{cases}$.

Vậy có một số phức thỏa mãn điều kiện là $z=3-4i$ có phần thực là 3.

Vậy tổng phần thực của tất cả các số phức z là 3.

Câu 86: Cho số phức $z=(1+i)^{2019}$. Phần thực của z bằng

A. -2^{1009}. **B.** 2^{2019}. **C.** -2^{2019}. **D.** 2^{1009}.

Lời giải

Cách 1: Phương pháp lượng giác

Xét số phức $z_1=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

Ta có số phức $z={z_1}^{2019}=(1+i)^{2019}=\sqrt{2}^{2019}\left(cos\frac{2019\pi}{4}+i\sin\frac{2019\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}^{2019}\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}^{2019}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-2^{1009}+2^{1009}i$

Phần thực của z bằng -2^{1009}.

Cách 2:

Ta có $z=(1+i)^{2019}=\frac{(1+i)^{2020}}{1+i}=\frac{(-4)^{505}}{(1+i)}=(-4)^{505}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i)=-2^{1009}+2^{1009}i$

Phần thực của z bằng -2^{1009}.

Câu 87: Số phức $z=(1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^{2018}$ có phần ảo bằng

A. $2^{1009}+1$. **B.** $1-2^{1009}$. **C.** $2^{1009}-1$. **D.** $-\left(2^{1009}+1\right)$.

Lời giải

$z=(1+i)+(1+i)^2+...+(1+i)^{2018}$

$=(1+i)\frac{(1+i)^{2018}-1}{(1+i)-1}=(1+i)\frac{2^{1009}i-1}{i}$

$=(1+i)\left(2^{1009}+i\right)=2^{1009}-1+\left(2^{1009}+1\right)i$.

$\Rightarrow z$ có phần ảo bằng $2^{1009}+1$.

Câu 88: Gọi T là tổng phần thực, phần ảo của số phức $w=i+2i^2+3i^3+...+2018i^{2018}$. Tính giá trị của T.

A. $T=0$. **B.** $T=-1$. **C.** $T=2$. **D.** $T=-2$.

Lời giải

$w=i\left(1+2i+3i^2+...+2018i^{2017}\right)$

Xét $f(x)=x+x^2+x^3+...+x^{2018}=x\frac{x^{2018}-1}{x-1}=\frac{x^{2019}-x}{x-1}$

$f'(x)=1+2x+3x^2+...+2018x^{2017}=\frac{\left(2019x^{2018}-1\right)(x-1)-\left(x^{2019}-x\right)}{(x-1)^2}$

$w = i\left(1+2i+3i^2+...+2018i^{2017}\right) = i.f(i) = i\dfrac{\left(2019i^{2018}-1\right)(i-1)-\left(i^{2019}-i\right)}{(i-1)^2}$

$= i\dfrac{-2020(i-1)+2i}{-2i} = -1010+1009i$

$T = -1010+1009 = -1$.

Câu 89: Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn hệ $\begin{cases}|z_1|=|z_2|=|z_3|=1\\ z_1+z_2+z_3=1\end{cases}$. Tính giá trị biểu thức $S = z_1^{2019}+z_2^{2019}+z_3^{2019}$.

A. $S=-1$. **B.** $S=2^{2019}$. **C.** $S=1$. **D.** $S=2^{-2019}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $(1):|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, $(2):z_1+z_2+z_3=1$.

Gọi A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2, z_3.

Từ $(1)\Rightarrow OA=OB=OC=1\Rightarrow$ Đường tròn (C) tâm O, bán kính $R=1$ ngoại tiếp ΔABC.

Gọi G, H lần lượt là trọng tâm, trực tâm ΔABC.

Vì G là điểm biểu diễn số phức $\dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}$ mà $\overrightarrow{OH}=3.\overrightarrow{OG}$ nên từ $(2)\Rightarrow H(1;0)$.

Dễ thấy $H\in(C)$ nên ΔABC vuông.

Giả sử ΔABC vuông tại $C\Rightarrow C(1;0)\Rightarrow z_3=1$.

$\Rightarrow z_1+z_2=0\Rightarrow z_1=-z_2\Rightarrow z_1^{2019}=-z_2^{2019}\Rightarrow z_1^{2019}+z_2^{2019}=0$.

Vậy $S=1$.

Câu 90: Tính $S = i+2i^2+3i^3+...+2019i^{2019}$

A. $S=-1010-1010i$. **B.** $S=1010-1010i$. **C.** $S=2019i$. **D.** $S=1010+1010i$.

Lời giải

Chọn A

$S = i+2i^2+3i^3+...+2019i^{2019}$

$= i-2-3i+4+...+2016+2017i-2018-2019i$

$= (4+8+...+2016)+(-2-6-...-2018)+(i+5i+...+2017i)+(-3i-7i-...-2019i)$

$=\left(4+8+...+2016\right)+\left(-2-6-...-2018\right)+\left(i+5i+...+2017i\right)+\left(-3i-7i-...-2019i\right)$

$=\frac{4+2016}{2}\left(\frac{2016-4}{4}+1\right)-\frac{2+2018}{2}\left(\frac{2018-2}{4}+1\right)$

$+\frac{1+2017}{2}\left(\frac{2017-1}{4}+1\right)i-\frac{3+2019}{2}\left(\frac{2019-3}{4}+1\right)i$

$=-1010-1010i.$

Câu 91: Cho số phức z thỏa mãn $z^2+z+1=0$. Tính giá trị biểu thức $P=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2+...+\left(z^{2019}+\frac{1}{z^{2019}}\right)^2$.

A. $P=4038$. **B.** $P=2019$. **C.** $P=673$. **D.** $P=6073$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z^2+z+1=0\Rightarrow\left(z-1\right)\left(z^2+z+1\right)=0\Rightarrow z^3=1\Rightarrow\begin{cases}z^{3n}=1\\z^{3n+1}=z\\z^{3n+2}=z^2\end{cases}$.

Mà $P=\sum_{k=1}^{2019}\left(z^k+\frac{1}{z^k}\right)^2=\sum_{k=1}^{2019}\left(z^{2k}+\frac{1}{z^{2k}}+2\right)=\sum_{k=1}^{2019}\left(z^{2k}+\frac{1}{z^{2k}}\right)+2.2019$

Ta có $z^2+z+1=z^2+z^4+z^6=...=z^{4034}+z^{4036}+z^{4038}=0$,

$\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^6}=\frac{z^2+z^4+z^6}{z^6}=\frac{z^2+z+1}{z^6}=0$

Tương tự $\frac{1}{z^8}+\frac{1}{z^{10}}+\frac{1}{z^{12}}=...=\frac{1}{z^{4034}}+\frac{1}{z^{4036}}+\frac{1}{z^{4038}}=0$

Vậy $P=4038$.

Câu 92: Khai triển của biểu thức $\left(x^2+x+1\right)^{2018}$ được viết thành $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{4036}x^{4036}$. Tổng $S=a_0-a_2+a_4-a_6+...-a_{4034}+a_{4036}$ bằng

A. 2^{1009}. **B.** -2^{1009}. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải

$\left(x^2+x+1\right)^{2018}=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{4036}x^{4036}$.

Thay $x=i$ với $i^2=-1$ ta được:

$\left(-1\right)^{1009}=a_0+a_1i+a_2i^2+a_3i^3+...+a_{4034}i^{4034}+a_{4035}i^{4035}+a_{4036}i^{4036}$.

Đối chiếu phần thực ở hai vế ta được: $-1=a_0-a_2+a_4-a_6+...-a_{4034}+a_{4036}$.

Nhận xét: Ngoài cách trên ta có thể thay 2018 bằng 2, 4 để tính trực tiếp S.

Câu 93: Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn điều kiện $z^4=|z|$. Số phần tử của S là

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$ thì $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ và

$z^4=(a+bi)^4=\left(a^2-b^2+2abi\right)^2=\left(a^2-b^2\right)^2-4a^2b^2+4ab\left(a^2-b^2\right)i$.

Ta có $z^4=|z|\Leftrightarrow\left(a^2-b^2\right)^2-4a^2b^2+4ab\left(a^2-b^2\right)i=\sqrt{a^2+b^2}$.

Suy ra $\begin{cases}4ab\left(a^2-b^2\right)=0,(1)\\ \left(a^2-b^2\right)^2-4a^2b^2=\sqrt{a^2+b^2},(2)\end{cases}$

Xét $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\ b=0\\ a^2=b^2\end{array}\right.$.

Với $a=0$ thì từ $(2)\Rightarrow b^4=|b|\Rightarrow b=0,b=1,b=-1$ ta được $z=0;z=i;z=-i$.

Với $b=0$ thì từ $(2)\Rightarrow a^4=|a|\Rightarrow a=0,a=1,a=-1$ ta được $z=0;z=1;z=-1$.

Với $a^2=b^2$ thì từ $(2)\Rightarrow -4a^4=\sqrt{2a^2}=|a|\sqrt{2}\Rightarrow a=0,b=0$ $z=0$ ta được $z=0$.

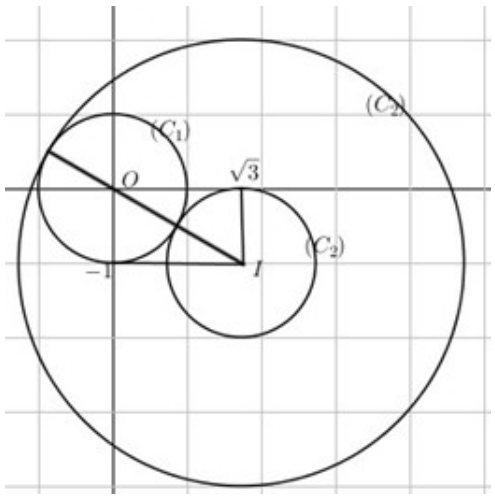
Vậy $S=\{0;1;-1;i;-i\}$.

Câu 94: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z.\bar{z}=1$ và $|z-\sqrt{3}+i|=m$. Tìm số phần tử của S.

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A



Gọi $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$, ta có hệ $\begin{cases}x^2+y^2=1\ (1)\\ \left(x-\sqrt{3}\right)^2+\left(y+1\right)^2=m^2\ \ (m\ge 0)\end{cases}$

Ta thấy $m=0\Rightarrow z=\sqrt{3}-i$ không thỏa mãn $z.\bar{z}=1$ suy ra $m>0$.

Xét trong hệ tọa độ Oxy tập hợp các điểm thỏa mãn (1) là đường tròn (C_1) có $O(0;0),R_1=1$, tập hợp các điểm thỏa mãn (2) là đường tròn (C_2) tâm $I\left(\sqrt{3};-1\right),R_2=m$, ta thấy $OI=2>R_1$ suy ra I nằm ngoài (C_1).

Để có duy nhất số phức z thì hệ có nghiệm duy nhất khi đó tương đương với $(C_1),(C_2)$ tiếp xúc ngoài và tiếp xúc trong, điều này xảy ra khi $OI=R_1+R_2\Leftrightarrow m+1=2\Leftrightarrow m=1$ hoặc $R_2=R_1+OI\Leftrightarrow m=1+2=3$

Câu 95: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để số phức $z=\dfrac{m+2i}{m-2i}$ có phần thực dương

A. $m>2$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m<-2\\ m>2\end{array}\right.$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $m<-2$.

Lời giải

$z=\dfrac{m+2i}{m-2i}=\dfrac{(m+2i)(m+2i)}{m^2+4}=\dfrac{m^2-4}{m^2+4}+\dfrac{4m}{m^2+4}i$.

Vì z có phần thực dương $\Rightarrow m^2-4>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<-2\end{array}\right.$.

Câu 96: Cho hai số phức $z=3-4i$ và $z'=(2+m)+mi(m\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z'|=|iz|$. Tổng tất cả các giá trị của m bằng

A. -1. **B.** $\dfrac{\sqrt{46}}{2}$. **C.** 0. **D.** -2.

lời giải:

Chọn D

Ta có $|z'|=\sqrt{(2+m)^2+m^2}$ và $|iz|=\sqrt{4^2+3^2}=5$

vậy ta có phương trình $(2+m)^2+m^2=25\Leftrightarrow 2m^2+4m-21=0\Rightarrow m_1+m_2=-\dfrac{4}{2}=-2$

Câu 97: Biết rằng $z=m^2-3m+3+(m-2)i$, với $m\in\mathbb{R}$, là một số thực. Giá trị của biểu thức $P=1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2019}$ bằng

A. 1. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z=m^2-3m+3+(m-2)i$ là một số thực khi $m-2=0\Leftrightarrow m=2$.

Với $m=2\Rightarrow z=1$, thay vào biểu thức P, ta được: $P=1+1+1^2+1^3+\cdots+1^{2019}=2020$.

Câu 98: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của m để tồn tại 4 số phức z thỏa mãn $\left|z+\overline{z}\right|+\left|z-\overline{z}\right|=2$ và $z\left(\overline{z}+2\right)-\left(z+\overline{z}\right)-m$ là số thuần ảo. Tổng các phần tử của S là

A. 1. **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn C

*) $z=x+yi$, $\forall x,y\in\mathbb{R}\Rightarrow\left|z+\overline{z}\right|+\left|z-\overline{z}\right|=2\Leftrightarrow\left|2x\right|+\left|2yi\right|=2\Leftrightarrow\left|x\right|+\left|y\right|=1$.

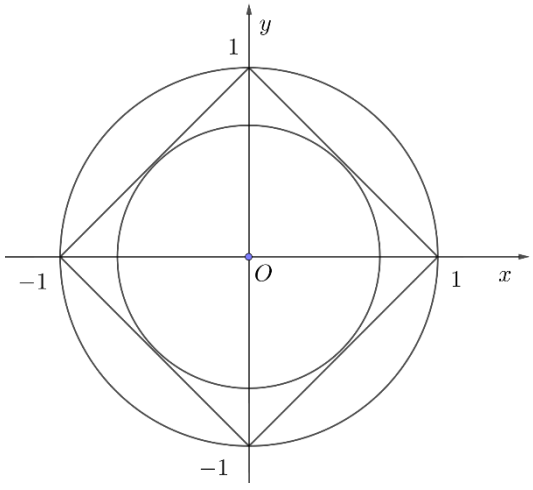
*) $z\left(\overline{z}+2\right)-\left(z+\overline{z}\right)-m=x^2+y^2+2yi-m$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow x^2+y^2=m\ (m>0)$.

Để tồn tại 4 số phức z thì hệ phương trình $\begin{cases}\left|x\right|+\left|y\right|=1\\ x^2+y^2=m\end{cases}$ có 4 nghiệm phân biệt.

Hệ có 4 nghiệm thì đường tròn tâm O bán kính $\sqrt{m}$ phải cắt các đường thẳng $\left|x\right|+\left|y\right|=1$ tại 4 điểm phân biệt.

Các đường thẳng $\left|x\right|+\left|y\right|=1$ đôi một cắt nhau tạo thành 1 hình vuông như trên đồ thị.

Để đường tròn (C): $x^2+y^2=m$ cắt các đường thẳng $\left|x\right|+\left|y\right|=1$ tại 4 điểm thì đường tròn sẽ là đường tròn nội tiếp hoặc ngoại tiếp hình vuông với các bán kính tương ứng $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$ và bán kính $R=1$. Hay $\left[\begin{array}{l}m=\frac{1}{2}\\ m=1\end{array}\right.$. Suy ra tổng các giá trị m cần tìm là $\frac{3}{2}$.



CHƯƠNG IV

SỐ PHỨC

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Dạng toán. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức $z=x+yi$ thỏa mãn điều kiện K cho trước?

- Bước 1. Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$.
- Bước 2. Biến đổi điều kiện K để tìm mối liên hệ giữa x,y và kết luận.

Mối liên hệ giữa x và y	Kết luận tập hợp điểm $M(x;y)$
$Ax+By+C=0.$	Là đường thẳng $d: Ax+By+C=0$.
$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ hoặc $x^2+y^2-2ax-2by+c=0.$	Là đường tròn tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.
$(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2$ hoặc $x^2+y^2-2ax-2by+c\le 0.$	Là hình tròn tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.
$R_1^2\le(x-a)^2+(y-b)^2\le R_2^2.$	Là những điểm thuộc miền có hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm $I(a;b)$ và bán kính lần lượt R_1 và R_2.
$y=ax^2+bx+c,\ (a\ne 0).$	Là một parabol có đỉnh $S\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right).$
$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ với $MF_1+MF_2=2a$ và $F_1F_2=2c<2a$.	Là một elíp có trục lớn $2a$, trục bé $2b$ và tiêu cự $2c=2\sqrt{a^2-b^2},(a>b>0)$.
$\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=1$ với $\lvert MF_1-MF_2\rvert=2a$ và $F_1F_2=2c>2a$.	Là một hyperbol có trục thực là $2a$, trục ảo là $2b$ và tiêu cự $2c=2\sqrt{a^2+b^2}$ với $a,b>0$.
$MA=MB$.	Là đường trung trực đoạng thẳng AB.

Lưu ý

Đối với bài toán dạng này, người ra đề thường cho thông qua hai cách:

Trực tiếp, nghĩa là tìm tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z=x+yi$ thỏa mãn tính chất K.

Gián tiếp, nghĩa là tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=f(z)$ mà số phức z thỏa mãn tính chất K nào đó, chẳng hạn: $f\left(z,\bar{z},|z|\right)=0,...$

Câu 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=3-2i+(2-i)z$ là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn đó?

A. $I(3;-2)$. **B.** $I(-3;2)$. **C.** $I(3;2)$. **D.** $I(-3;-2)$.

Câu 2: Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thoả mãn $z.\bar{z}=1$ là

A. một đường thẳng. **B.** một đường tròn. **C.** một elip. **D.** một điểm.

Câu 3: Cho số phức z thỏa $|z-1+2i|=3$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w=2z+i$ trên mặt phẳng (Oxy) là một đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó.

A. $I(2;-3)$. **B.** $I(1;1)$. **C.** $I(0;1)$. **D.** $I(1;0)$.

Câu 4: Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-i|=|(1+i)z|$ là một đường tròn, tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $(1;1)$. **B.** $(0;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 5: Cho số phức z thỏa mãn $\left|\frac{z}{i+2}\right|=1$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn (C). Tính bán kính r của đường tròn (C).

A. $r=1$. **B.** $r=\sqrt{5}$. **C.** $r=2$.. **D.** $r=\sqrt{3}$..

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-1-2i|=3$ là

A. đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính $R=9$. **B.** đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính $R=3$.

C. đường tròn tâm $I(-1;-2)$, bán kính $R=3$. **D.** đường thẳng có phương trình $x+2y-3=0$.

Câu 7: Xét các số phức z thỏa mãn $(2-z)(\bar{z}+i)$ là số thuần ảo. Tập hợp các điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ là:

A. Đường tròn tâm $I\left(1;\frac{1}{2}\right)$,bán kính $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

B. Đường tròn tâm $I\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$,bán kính $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

C. Đường tròn tâm $I(2;1)$,bán kính $R=\sqrt{5}$.

D. Đường tròn tâm $I\left(1;\frac{1}{2}\right)$,bán kính $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$ nhưng bỏ điểm $A(2;0);B(0;1)$.

Câu 8: Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-i|=|(1+i)z|$.

A. Đường tròn tâm I, bán kính $R=\sqrt{2}$. **B.** Đường tròn tâm I, bán kính $R=\sqrt{2}$.

C. Đường tròn tâm I, bán kính $R=\sqrt{2}$. **D.** Đường tròn tâm I, bán kính $R=\sqrt{2}$.

Câu 9: Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $\left|z-i\right|=4$ là đường cong có phương trình

A. $\left(x-1\right)^2+y^2=4$ **B.** $x^2+\left(y-1\right)^2=4$ **C.** $\left(x-1\right)^2+y^2=16$ **D.** $x^2+\left(y-1\right)^2=16$

Câu 10: Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\left|\overline{z}+2-i\right|=4$ là đường tròn có tâm và bán kính lần lượt là

A. $I\left(2;-1\right);\ R=4.$ **B.** $I\left(2;-1\right);\ R=2.$ **C.** $I\left(-2;-1\right);\ R=4.$ **D.** $I\left(-2;-1\right);\ R=2.$

Câu 11: Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|z-1+i\right|=2$ là đường tròn có tâm và bán kính lần lượt là:

A. $I\left(-1;1\right),R=4.$ **B.** $I\left(-1;1\right),R=2.$ **C.** $I\left(1;-1\right),R=2.$ **D.** $I\left(1;-1\right),R=4.$

Câu 12: Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\left|\left(1+i\right)z-5+i\right|=2$ là một đường tròn tâm I và bán kính R lần lượt là

A. $I\left(2;-3\right),R=\sqrt{2}.$ **B.** $I\left(2;-3\right),R=2.$ **C.** $I\left(-2;3\right),R=\sqrt{2}.$ **D.** $I\left(-2;3\right),R=2.$

Câu 13: Xét các số phức z thỏa mãn $\dfrac{z+2}{z-2i}$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

A. $1.$ **B.** $\sqrt{2}.$ **C.** $2\sqrt{2}.$ **D.** $2.$

Câu 14: Tính tổng của tất cả các giá trị của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thoả mãn đồng thời $\left|z\right|=m$ và $\left|z-4m+3mi\right|=m^2.$

A. $4.$ **B.** $6.$ **C.** $9.$ **D.** $10.$

Câu 15: Cho số phức z thỏa mãn: $\left|z+2-i\right|=3.$ Tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ $\left(Oxy\right)$ biểu diễn số phức $w=1+\overline{z}$ là

A. Đường tròn tâm $I\left(-2;1\right)$ bán kính $R=3.$ **B.** Đường tròn tâm $I\left(2;-1\right)$ bán kính $R=3.$

C. Đường tròn tâm $I\left(-1;-1\right)$ bán kính $R=9.$ **D.** Đường tròn tâm $I\left(-1;-1\right)$ bán kính $R=3.$

Câu 16: Cho các số phức z thỏa mãn $\left|z\right|=2\sqrt{5}.$ Biết rằng trong mặt phẳng tọa độ các điểm biểu diễn của số phức $w=i+\left(2-i\right)z$ cùng thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó?

A. $r=\sqrt{5}.$ **B.** $r=10.$ **C.** $r=20.$ **D.** $r=2\sqrt{5}.$

Câu 17: Xét các số phức z thỏa mãn $\left(\overline{z}-2i\right)\left(z+3\right)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{13}$ **B.** $\sqrt{11}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

Câu 18: Cho các số phức z thỏa mãn $\left|z+1\right|=2.$ Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=\left(1+i\sqrt{8}\right)z+i$ là một đường tròn. Bán kính r của đường tròn đó là

A. $9.$ **B.** $36.$ **C.** $6.$ **D.** $3.$

Câu 19: Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn điều kiện $|z-5-3i|=5$ đồng thời $|z_1-z_2|=8$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=z_1+z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình

A. $(x-10)^2+(y-6)^2=36$. **B.** $(x-10)^2+(y-6)^2=16$.

C. $(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=9$. **D.** $(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}$.

Câu 20: Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn: $\left|\overline{z}+2-i\right|=4$ là đường tròn có tâm I và bán kính R lần lượt là:

A. $I(-2;-1); R=4$. **B.** $I(-2;-1); R=2$. **C.** $I(2;-1); R=4$. **D.** $I(2;-1); I(2;-1)$.

Câu 21: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=2$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=(1-i)\overline{z}+2i$ là

A. Một đường tròn. **B.** Một đường thẳng.

C. Một Elip. **D.** Một parabol hoặc hyperbol.

Câu 22: Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $|z+1|=|1-i-2z|$ là đường tròn (C). Tính bán kính R của đường tròn (C)

A. $R=\frac{10}{9}$. **B.** $R=2\sqrt{3}$. **C.** $R=\frac{7}{3}$. **D.** $R=\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Câu 23: Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|2z-i|=6$ là một đường tròn có bán kính bằng:

A. 3. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** 6. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 24: Cho số phức z thỏa mãn $|z+1-3i|=2$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=(2-i)z-3i+5$ là một đường tròn. Xác định tâm I và bán kính của đường tròn trên.

A. $I(-6;-4), R=2\sqrt{5}$. **B.** $I(6;4), R=10$.

C. $I(6;4), R=2\sqrt{5}$. **D.** $I(-6;4), R=2\sqrt{5}$.

Câu 25: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=3-2i+(2-i)z$ là một đường tròn. Bán kính R của đường tròn đó bằng?

A. 7. **B.** 20. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{7}$.

Câu 26: Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-5-3i|=5$, đồng thời $|z_1-z_2|=8$. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w=z_1+z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình nào dưới đây?

A. $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$. **B.** $(x-10)^2+(y-6)^2=36$.

C. $(x-10)^2+(y-6)^2=16$. **D.** $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=9$.

Câu 27: Xét số phức z thỏa mãn $|z-3i+4|=3$, biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(12-5i)\overline{z}+4i$ là một đường tròn. Tìm bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=13$. **B.** $r=39$. **C.** $r=17$ **D.** $r=3$.

Câu 28: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3|=1$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=\left(1-\sqrt{3}i\right)z+1-2i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=2$. **B.** $r=1$. **C.** $r=4$. **D.** $r=\sqrt{2}$.

Câu 29: Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $\left|z+m-1+\sqrt{3}i\right|=4$. Tìm tất cả các số thực m sao cho tập hợp các điểm M là đường tròn tiếp xúc với trục Oy.

A. $m=-5;\ m=3$. **B.** $m=5;\ m=-3$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=5$.

Câu 30: Cho số phức z thỏa mãn $\left(z-2+i\right)\left(\overline{z}-2-i\right)=25$. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $w=2\overline{z}-2+3i$ là đường tròn tâm $I\left(a;b\right)$ và bán kính c. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 18. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 17.

Câu 31: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $\left|z-\left(2-3i\right)\right|\le 2$.

A. Một đường thẳng. **B.** Một hình tròn. **C.** Một đường tròn. **D.** Một đường elip.

Câu 32: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z+i+1\right|=\left|\overline{z}-2i\right|$ và $\left|z\right|=1$

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 33: Xét các số phức z thỏa mãn $\left(z-4i\right)\left(\overline{z}+2\right)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm của đường tròn đó.

A. $\left(-1;-2\right)$. **B.** $\left(-1;2\right)$. **C.** $\left(1;2\right)$. **D.** $\left(1;-2\right)$.

Câu 34: Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|\overline{z}+1+2i\right|=1$ là

A. đường tròn $I\left(1;2\right)$, bán kính $R=1$. **B.** đường tròn $I\left(-1;-2\right)$, bán kính $R=1$.

C. đường tròn $I\left(-1;2\right)$, bán kính $R=1$. **D.** đường tròn $I\left(1;-2\right)$, bán kính $R=1$.

Câu 35: Cho số phức z thảo mãn $\left(z+1-3i\right)\left(\overline{z}+1+3i\right)=25$. Biết tập hợp biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm $I\left(a;b\right)$ và bán kính c. Tổng $a+b+c$ bằng

A. 9. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 7.

Câu 36: Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $\left|z-1\right|=2$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w=\left(1+\sqrt{3}\,i\right)z+2$ là đường tròn có bán kính bằng R. Tính R.

A. $R=8$. **B.** $R=2$. **C.** $R=16$. **D.** $R=4$.

Câu 37: Cho số phức z thoả mãn $\left|z-1\right|=5$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức w xác định bởi $w=\left(2+3i\right)\overline{z}+3+4i$ là một đường tròn bán kính R. Tính R.

A. $5\sqrt{13}$. **B.** $5\sqrt{17}$. **C.** $5\sqrt{10}$. **D.** $5\sqrt{5}$.

Câu 38: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z\right|=\sqrt{5}$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(1+2i)z+i$ là một đường tròn. Tìm bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=\sqrt{5}$. **B.** $r=10$. **C.** $r=5$. **D.** $r=2\sqrt{5}$.

Câu 39: Cho số phức z có môđun bằng $2\sqrt{2}$. Biết rằng tập hợp điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức $w=(1-i)(z+1)-i$ là đường tròn có tâm $I(a;b)$, bán kính R. Tổng $a+b+R$ bằng

A. 5. **B.** 7. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 40: Cho số phức z thoả mãn $|z|=3$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w=\overline{z}+i$ là một đường tròn. Tìm tâm I của đường tròn đó.

A. $I(0;1)$. **B.** $I(0;-1)$. **C.** $I(-1;0)$. **D.** $I(1;0)$.

Câu 41: Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z+2|=|z-i|$ là một đường thẳng có phương trình

A. $4x+2y+3=0$. **B.** $2x+4y+13=0$. **C.** $4x-2y+3=0$. **D.** $2x-4y+13=0$.

Câu 42: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+i|=|z+2|$. Trong mặt phẳng phức, quỹ tích điểm biểu diễn các số phức z.

A. là đường thẳng $3x+y+1=0$. **B.** là đường thẳng $3x-y+1=0$.

C. là đường thẳng $3x+y-1=0$. **D.** là đường thẳng $3x-y-1=0$.

Câu 43: Trên mặt phẳng phức, tập hợp các số phức $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+2+i|=|\overline{z}-3i|$ là đường thẳng có phương trình

A. $y=x+1$. **B.** $y=-x+1$. **C.** $y=-x-1$. **D.** $y=x-1$.

Câu 44: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu biễn các số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=|\overline{z}+1+2i|$ là đường thẳng có phương trình

A. $x-2y+1=0$. **B.** $x+2y=0$. **C.** $x-2y=0$. **D.** $x+2y+1=0$.

Câu 45: Xét các số phức z thỏa mãn $z(\overline{z}-2+i)+4i-1$ là số thực. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là đường thẳng d. Diện tích tam giác giới hạn bởi đường thẳng d và hai trục tọa độ bằng

A. 8. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 10.

Câu 46: Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z+2|=|z-i|$ là một đường thẳng có phương trình

A. $4x+2y+3=0$. **B.** $2x+4y+13=0$. **C.** $4x-2y+3=0$. **D.** $2x-4y+13=0$.

Câu 47: Cho số phức z thỏa mãn: $|z-1|=|z-2+3i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là

A. Đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính $R=1$.

B. Đường thẳng có phương trình $2x-6y+12=0$.

C. Đường thẳng có phương trình $x-3y-6=0$.

D. Đường thẳng có phương trình $x-5y-6=0$.

Câu 48: Tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa $\left|\dfrac{(12-5i)z+17+7i}{z-2-i}\right|=13$.

A. $d:6x+4y-3=0$. **B.** $d:x+2y-1=0$.

C. $(C):x^2+y^2-2x+2y+1=0$. **D.** $(C):x^2+y^2-4x+2y+4=0$.

Câu 49: Cho số phức $z=x+yi\ \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $z+2-i-|z|(1-i)=0$. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm M là điểm biểu diễn của số phức z. Hỏi M thuộc đường thẳng nào sau đây?

A. $x-y+5=0$. **B.** $x-y+2=0$. **C.** $x+y-2=0$. **D.** $x+y+1=0$.

Câu 50: Trong mặt phẳng phức Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức Z thỏa mãn $\left|z^2+\left(\overline{z}\right)^2+2|z|^2\right|=16$ là hai đường thẳng d_1,d_2. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng d_1,d_2 là bao nhiêu?

A. $d\left(d_1,d_2\right)=1$. **B.** $d\left(d_1,d_2\right)=6$. **C.** $d\left(d_1,d_2\right)=2$. **D.** $d\left(d_1,d_2\right)=4$.

Câu 51: Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z|=|\overline{z}-3+4i|$ là?

A. Parabol $y^2=4x$. **B.** Đường thẳng $6x+8y-25=0$.

C. Đường tròn $x^2+y^2-4=0$. **D.** Elip $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

Câu 52: Cho số phức z thỏa: $2|z-2+3i|=|2i-1-2\overline{z}|$. Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z là.

A. Một đường thẳng có phương trình: $-20x+32y+47=0$.

B. Một đường có phương trình: $3y^2+20x+2y-20=0$.

C. Một đường thẳng có phương trình: $20x+16y+47=0$.

D. Một đường thẳng có phương trình: $20x-16y-47=0$.

Câu 53: Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z sao cho z^2 là số thuần ảo.

A. Hai đường thẳng $y=x$ và $y=-x$.

B. Trục Ox.

C. Trục Oy.

D. Hai đường thẳng $y=x$ và $y=-x$, bỏ đi điểm $O(0;0)$.

Câu 54: Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z-2-i|=|\overline{z}+2i|$ là đường thẳng có phương trình

A. $4x-2y-1=0$. **B.** $4x-6y-1=0$. **C.** $4x+2y-1=0$. **D.** $4x-2y+1=0$.

Câu 55: Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|2+z|=|z-i|$.

A. Đường thẳng $4x+2y+3=0$. **B.** Điểm $M\left(-1;1/2\right)$.

C. Đường thẳng $2x+y+3=0$. **D.** Đường thẳng $4x+2y-3=0$.

Câu 56: Cho số phức z thỏa mãn $2|z-2+3i|=|2i-1-2\overline{z}|$. Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z là đường thẳng có phương trình:

A. $20x-16y-47=0$. **B.** $20x+6y-47=0$. **C.** $20x+16y+47=0$. **D.** $20x+16y-47=0$.

Câu 57: Cho số phức thỏa mãn $|z-i|=|z-1+2i|$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $\omega=(2-i)z+1$ trên mặt phẳng phức là một đường thẳng. Phương trình đường thẳng đó là

A. $x+7y+9=0$. **B.** $x+7y-9=0$. **C.** $x-7y-9=0$. **D.** $x-7y+9=0$.

Câu 58: Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $2|z-i|=|z-\overline{z}+2i|$ là

A. Một điểm **B.** Một đường tròn **C.** Một đường thẳng **D.** Một Parabol

Câu 59: Cho số phức z thỏa mãn $|z+2|+|z-2|=4$. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ là

A. Một đường elip. **B.** Một đường parabol. **C.** Một đoạn thẳng. **D.** Một đường tròn.

Câu 60: Xét các số phức z thoả mãn $\dfrac{z-1+i}{\left(z+\bar{z}\right)i+1}$ là số thực. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $\dfrac{z}{2}$ là parabol có toạ độ đỉnh

A. $I\left(\dfrac{1}{4};-\dfrac{3}{4}\right)$. **B.** $I\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$. **C.** $I\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 61: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-i|=10$.

A. 15π. **B.** 12π. **C.** 20π. **D.** Đáp án khác.

Câu 62: Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $3|z+i|=|2\bar{z}+-z+3i|$. Tìm tập hợp tất cả những điểm M như vậy.

A. Một đường thẳng. **B.** Một parabol. **C.** Một elip. **D.** Một đường tròn.

Câu 63: Cho số phức z thỏa mãn $|z+2|+|z-2|=8$. Trong mặt phẳng phức tập hợp những điểm M biểu diễn cho số phức z là?

A. $(C):(x+2)^2+(y-2)^2=64$. **B.** $(E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$.

C. $(E):\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{16}=1$. **D.** $(C):(x+2)^2+(y-2)^2=8$.

Câu 64: Tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $2|z-i|=|z-\bar{z}+2i|$ là hình gì?

A. Một đường tròn. **B.** Một đường Parabol. **C.** Một đường Elip. **D.** Một đường thẳng.

Câu 65: Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z trong mặt phẳng phức, biết số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z+4|+|z-4|=10$..

A. Tập hợp các điểm cần tìm là đường elip có phương trình $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$.

B. Tập hợp các điểm cần tìm là những điểm $M\left(x;y\right)$ trong mặt phẳng Oxy thỏa mãn phương trình $\sqrt{\left(x+4\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(x-4\right)^2+y^2}=12$.

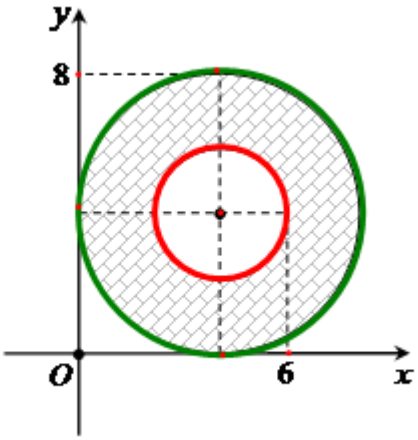
C. Tập hợp các điểm cần tìm là đường tròn có tâm $O\left(0;0\right)$ và có bán kính $R=4$.

D. Tập hợp các điểm cần tìm là đường elip có phương trình $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Câu 66: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z+4|+|z-4|=10$. Tập hợp các điểm M biểu diễn cho số phức z là đường có phương trình.

A. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$. **B.** $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$. **C.** $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{25}=1$. **D.** $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

Câu 67: Phần gạch trong hình vẽ dưới là hình biểu diễn của tập các số phức thỏa mãn điều kiện nào sau đây?



A. $6 \le |z| \le 8$. **B.** $2 \le |z+4+4i| \le 4$. **C.** $2 \le |z-4-4i| \le 4$. **D.** $4 \le |z-4-4i| \le 16$.

Câu 68: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z biết $|z-(2-3i)| \le 2$.

A. Một đường thẳng. **B.** Một hình tròn. **C.** Một đường tròn. **D.** Một đường Elip.

Câu 69: Trong mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z thỏa $|z+4-4i| \le 2$ là

A. Hình tròn tâm $I(4;-4)$, bán kính $R=4$. **B.** Hình tròn tâm $I(4;-4)$, bán kính $R=2$.

C. Hình tròn tâm $I(-4;4)$, bán kính $R=2$. **D.** Hình tròn tâm $I(-4;4)$, bán kính $R=4$.

Câu 70: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $3 \le |z-3i+1| \le 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành một hình phẳng. Tính diện tích của hình phẳng đó.

A. $S=25\pi$. **B.** $S=8\pi$. **C.** $S=4\pi$. **D.** $S=16\pi$.

Câu 71: Trong mặt phẳng Oxy cho số phức z có điểm biểu diễn nằm trong cung phần tư thứ (I). Hỏi điểm biểu diễn số phức $w=\dfrac{1}{iz}$ nằm trong cung phần tư thứ mấy?

A. Cung (IV). **B.** Cung (II). **C.** Cung (III). **D.** Cung (I).

Câu 72: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (H) là phần mặt phẳng chứa các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\dfrac{z}{16}$ và $\dfrac{16}{\overline{z}}$ có phần thực và phần ảo đều thuộc đoạn $[0;1]$. Tính diện tích S của (H)

A. $S=32(6-\pi)$. **B.** $S=16(4-\pi)$. **C.** $S=256$.. **D.** $S=64\pi$..

Câu 73: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $3 \le |z-3i+1| \le 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành một hình phẳng. Tính diện tích S của hình phẳng đó.

A. $S=4\pi$. **B.** $S=25\pi$. **C.** $S=8\pi$. **D.** $S=16\pi$.

Câu 74: Biết số phức z thỏa mãn $|z-1| \le 1$ và $z-\overline{z}$ có phần ảo không âm. Phần mặt phẳng biểu diễn số phức z có diện tích là:

A. 2π. **B.** π^2. **C.** $\dfrac{\pi}{2}$. **D.** π.

Câu 75: Gọi H là hình biểu diễn tập hợp các số phức z trong mặt phẳng tọa độ $0xy$ sao cho $|2z-\overline{z}| \le 3$, và số phức z có phần ảo không âm. Tính diện tích hình H.

A. $\frac{3\pi}{2}$. **B.** $\frac{3\pi}{4}$. **C.** 6π. **D.** 3π.

Câu 76: Tập hợp các số phức $w=(1+i)z+1$ với z là số phức thỏa mãn $|z-1|\le 1$ là hình tròn. Tính diện tích hình tròn đó.

A. 2π. **B.** π. **C.** 3π. **D.** 4π.

Câu 77: Gọi M là điểm biểu diễn số phức $\varpi=\frac{z+2\bar{z}-3i}{z^2+2}$, trong đó z là số phức thỏa mãn $(2+i)(z+i)=3-i+z$. Gọi N là điểm trong mặt phẳng sao cho $(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{ON})=2\varphi$, trong đó $\varphi=(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM})$ là góc lượng giác tạo thành khi quay tia Ox tới vị trí tia OM. Điểm N nằm trong góc phần tư nào?

A. Góc phần tư thứ. **B.** Góc phần tư thứ. **C.** Góc phần tư thứ. **D.** Góc phần tư thứ.

Câu 78: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-3+4i|\le 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=2z+1-i$ là hình tròn có diện tích

A. $S=9\pi$. **B.** $S=12\pi$. **C.** $S=16\pi$. **D.** $S=25\pi$.

Câu 79: Biết số phức z thỏa điều kiện $3\le|z-3i+1|\le 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành 1 hình phẳng. Diện tích của hình phẳng đó bằng:

A. 9π. **B.** 16π. **C.** 25. **D.** 4π.

Câu 80: Cho số phức z thỏa mãn $|z+2|+|z-2|=4$. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ là

A. Một đường Parabol. **B.** Một đường Elip. **C.** Một đoạn thẳng. **D.** Một đường tròn.

Câu 81: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-3+4i|\le 2$. trong mặt phẳng Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=2z+1-i$ là hình tròn có diện tích

A. $S=25\pi$ **B.** $S=9\pi$ **C.** $S=12\pi$ **D.** $S=16\pi$

Câu 82: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (H) là tập hợp các điểm biểu diễn hình học của số phức z thỏa mãn $\begin{cases}|z+\bar{z}|\ge 12\\ |z-4-3i|\le 2\sqrt{2}\end{cases}$. Diện tích của hình phẳng (H) là:

A. $4\pi-4$. **B.** $8\pi-8$. **C.** $2\pi-4$. **D.** $8\pi-4$.

Câu 83: Các điểm A,B tương ứng là điểm biểu diễn số phức z_1,z_2 trên hệ trục tọa độ Oxy, G là trọng tâm tam giác OAB, biết $|z_1|=|z_2|=|z_1-z_2|=12$. Độ dài đoạn OG bằng

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $5\sqrt{3}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Câu 84: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-i|=10$.

A. 15π. **B.** 12π. **C.** 20π. **D.** Đáp án khác.

Câu 85: Cho hai điểm *A, B* là hai điểm biểu diễn hình học số phức theo thứ tự z_1, z_2 khác 0 và thỏa mãn đẳng thức $z_1^2+z_2^2=z_1z_2$. Hỏi ba điểm *O, A, B* tạo thành tam giác gì? Chọn phương án đúng và đầy đủ nhất.

A. Vuông cân tại *O*. **B.** Vuông tại *O*. **C.** Đều. **D.** Cân tại *O*.

Câu 86: Cho các số phức $z_1=3-2i, z_2=1+4i, z_3=-1+i$ có điểm biểu diễn hình học trong mặt phẳng Oxy lần lượt là các điểm A,B,C. Tính diện tích tam giác ABC.

A. $2\sqrt{17}$. **B.** 12. **C.** $4\sqrt{13}$. **D.** 9.

Câu 87: Gọi M,N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1,z_2 trong mặt phẳng tọa độ, I là trung điểm MN, O là gốc tọa độ,. Mệnh đề nào sau đây luôn **đúng**?

A. $|z_1-z_2|=2(OM+ON)$. **B.** $|z_1+z_2|=OI$.

C. $|z_1-z_2|=OM+ON$. **D.** $|z_1+z_2|=2OI$.

Câu 88: Cho số phức $z=m-2+(m^2-1)i$ với $m\in\mathbb{R}$. Gọi (C) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành bằng:

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** 1. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 89: Gọi A, B, C, D lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $1+2i$; $1+\sqrt{3}+i$; $1+\sqrt{3}-i$; $1-2i$ trên mặt phẳng tọa độ. Biết tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn, tâm của đường tròn đó biểu diện số phức có phần thực là

A. $\sqrt{3}$ **B.** 2 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** 1

Câu 90: Xét hai điểm A,B lần lượt là các điểm trong mặt phẳng toạ độ Oxy biểu diễn các số phức z và $(1+3i)z$. Biết rằng diện tích của tam giác OAB bằng 6, môđun của số phức z bằng

A. 2. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 4.

Câu 91: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để có đúng 4 số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=|z^2|$ và $|z|=m$?

A. $\{2;2\sqrt{2}\}$. **B.** $[2;2\sqrt{2}]$. **C.** $\{2\}$. **D.** $(2;2\sqrt{2})$.

Câu 92: Có bao nhiêu số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{Z})$ thỏa mãn $|z+i|+|z-3i|=|z+4i|+|z-6i|$ và $|z|\le 10$.

A. 12. **B.** 2. **C.** 10. **D.** 5.

Câu 93: Cho hai số phức $z_1;z_2$ thoả mãn: $|z_1|=6,|z_2|=2$. Gọi M,N lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1,iz_2. Biết $\widehat{MON}=60^0$, khi đó giá trị của biểu thức $|z_1^2+9z_2^2|$ bằng

A. 18. **B.** $36\sqrt{3}$. **C.** $24\sqrt{3}$. **D.** $36\sqrt{2}$.

Câu 94: Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|=3,|z_2|=4,|z_1-z_2|=\sqrt{37}$. Xét số phức $z=\frac{z_1}{z_2}=a+bi$. Tìm $|b|$

A. $|b|=\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $|b|=\frac{\sqrt{39}}{8}$. **C.** $|b|=\frac{3}{8}$. **D.** $|b|=\frac{\sqrt{3}}{8}$.

CHƯƠNG IV

SỐ PHỨC

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Dạng toán. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức $z=x+yi$ thỏa mãn điều kiện K cho trước?

- Bước 1. Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$.
- Bước 2. Biến đổi điều kiện K để tìm mối liên hệ giữa x,y và kết luận.

Mối liên hệ giữa x và y	Kết luận tập hợp điểm $M(x;y)$
$Ax+By+C=0.$	Là đường thẳng $d: Ax+By+C=0$.
$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ hoặc $x^2+y^2-2ax-2by+c=0.$	Là đường tròn tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.
$(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2$ hoặc $x^2+y^2-2ax-2by+c\le 0.$	Là hình tròn tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.
$R_1^2\le(x-a)^2+(y-b)^2\le R_2^2.$	Là những điểm thuộc miền có hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm $I(a;b)$ và bán kính lần lượt R_1 và R_2.
$y=ax^2+bx+c,\ (a\ne 0).$	Là một parabol có đỉnh $S\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right).$
$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$ với $MF_1+MF_2=2a$ và $F_1F_2=2c<2a$.	Là một elíp có trục lớn $2a$, trục bé $2b$ và tiêu cự $2c=2\sqrt{a^2-b^2},(a>b>0)$.
$\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=1$ với $\lvert MF_1-MF_2\rvert=2a$ và $F_1F_2=2c>2a$.	Là một hyperbol có trục thực là $2a$, trục ảo là $2b$ và tiêu cự $2c=2\sqrt{a^2+b^2}$ với $a,b>0$.
$MA=MB$.	Là đường trung trực đoạng thẳng AB.

Lưu ý

Đối với bài toán dạng này, người ra đề thường cho thông qua hai cách:

Trực tiếp, nghĩa là tìm tập hợp điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z=x+yi$ thỏa mãn tính chất K.

Gián tiếp, nghĩa là tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=f(z)$ mà số phức z thỏa mãn tính chất K nào đó, chẳng hạn: $f\left(z,\overline{z},|z|\right)=0,...$

Câu 1: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=3-2i+(2-i)z$ là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn đó?

A. $I(3;-2)$. **B.** $I(-3;2)$. **C.** $I(3;2)$. **D.** $I(-3;-2)$.

Lời giải

Cách 1.

Đặt $w=x+yi$. Ta có $w=3-2i+(2-i)z$.

$\Leftrightarrow x+yi=3-2i+(2-i)z$.

$\Leftrightarrow (2-i)z=(x-3)+(y+2)i$.

$\Leftrightarrow (4-i^2)z=\left[(x-3)+(y+2)i\right].(2+i)$.

$\Leftrightarrow z=\frac{2x-y-8}{5}+\frac{x+2y+1}{5}i$.

Vì $|z|=2$ nên $\left(\frac{2x-y-8}{5}\right)^2+\left(\frac{x+2y+1}{5}\right)^2=4$.

$\Leftrightarrow x^2+y^2-6x+4y+13=20$.

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=20$.

Vậy tập hợp biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(3;-2)$.

Cách 2.

Đặt $z=a+bi; w=x+yi$.

Vì $|z|=2$ nên $a^2+b^2=4$.

Ta có $w=3-2i+(2-i)z$.

$\Leftrightarrow x+yi+2i-3=(2-i)(a+bi)$.

$\Leftrightarrow (x-3)+(y+2)i=(2a+b)+(2b-a)i$.

$\Rightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=(2a+b)^2+(2b-a)^2$.

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=5(a^2+b^2)$.

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=20$.

Vây tập hợp biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(3;-2)$.

Câu 2: Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thoả mãn $z.\overline{z}=1$ là

A. một đường thẳng. **B.** một đường tròn. **C.** một elip. **D.** một điểm.

Lời giải

Đặt $z=x+yi$; $x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó $\overline{z}=x-yi$.

Vì $z.\overline{z}=1\Leftrightarrow(x+yi)(x-yi)=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z cần tìm là đường tròn đơn vị.

Câu 3: Cho số phức z thỏa $|z-1+2i|=3$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w=2z+i$ trên mặt phẳng (Oxy) là một đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó.

A. $I(2;-3)$. **B.** $I(1;1)$. **C.** $I(0;1)$. **D.** $I(1;0)$.

Lời giải

Gọi M là điểm biểu diễn số phức w.

Ta có $w=2z+i\Leftrightarrow z=\dfrac{w-i}{2}$.

Do đó $|z-1+2i|=3\Leftrightarrow\left|\dfrac{w-i}{2}-1+2i\right|=3\Leftrightarrow|w-2+3i|=6\Leftrightarrow MI=6$, với $I(2;-3)$.

Do đó tập hợp điểm M là đường tròn tâm $I(2;-3)$ và bán kính $R=6$.

Câu 4: Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-i|=|(1+i)z|$ là một đường tròn, tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $(1;1)$. **B.** $(0;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Đặt $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có $|z-i|=|(1+i)z|$.

$\Leftrightarrow|x+(y-1)i|=|(1+i)(x+yi)|\Leftrightarrow|x+(y-1)i|=|(x-y)+(x+y)i|$

$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=(x-y)^2+(x+y)^2\Leftrightarrow x^2+y^2+2y-1=0\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=2$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $(0;-1)$.

Câu 5: Cho số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{z}{i+2}\right|=1$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn (C). Tính bán kính r của đường tròn (C).

A. $r=1$. **B.** $r=\sqrt{5}$. **C.** $r=2$.. **D.** $r=\sqrt{3}$..

Lời giải

Ta có: $\left|\dfrac{z}{i+2}\right|=1\Leftrightarrow|z|=|i+2|=\sqrt{5}$.

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính $r=\sqrt{5}$.

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-1-2i|=3$ là

A. đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính $R=9$.
B. đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính $R=3$.
C. đường tròn tâm $I(-1;-2)$, bán kính $R=3$.
D. đường thẳng có phương trình $x+2y-3=0$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử điểm $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z. Ta có:

$|z-1-2i|=3\Leftrightarrow|(x-1)+(y-2)i|=3\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-2)^2=9$

Vậy điểm $M(x;y)$ thuộc đường tròn $(x-1)^2+(y-2)^2=9$ có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=3$.

Câu 7: Xét các số phức z thỏa mãn $(2-z)(\bar{z}+i)$ là số thuần ảo. Tập hợp các điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ là:

A. Đường tròn tâm $I\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$,bán kính $R=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

B. Đường tròn tâm $I\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$,bán kính $R=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

C. Đường tròn tâm $I(2;1)$,bán kính $R=\sqrt{5}$.

D. Đường tròn tâm $I\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$,bán kính $R=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ nhưng bỏ điểm $A(2;0);B(0;1)$.

Lời giải

Gọi số phức $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow\bar{z}=x-yi.$

Thay vào điều kiện ta được:

$(2-z)(\bar{z}+i).$

$=(2-x-yi)(x-yi+i).$

$=\left[(2-x)-yi\right]\left[x+(1-y)i\right].$

$=(2-x)x+y(1-y)+\left[(2-x)(1-y)-xy\right]i.$

$(2-z)(\bar{z}+i)$ là số thuần ảo khi và chỉ khi:

$(2-x)x+y(1-y)=0$.

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-y=0$.

Vậy số phức $z=x+yi$ thuộc đường tròn tâm $I\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$,bán kính $R=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 8: Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-i|=|(1+i)z|$.

A. Đường tròn tâm I, bán kính $R=\sqrt{2}$.
B. Đường tròn tâm I, bán kính $R=\sqrt{2}$.
C. Đường tròn tâm I, bán kính $R=\sqrt{2}$.
D. Đường tròn tâm I, bán kính $R=\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

$|z-i|=|(1+i)z| \Leftrightarrow a^2+(b+1)^2=2$ nên tập điểm M là Đường tròn tâm I, bán kính $R=\sqrt{2}$.

Câu 9: Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $|z-i|=4$ là đường cong có phương trình

A. $(x-1)^2+y^2=4$ **B.** $x^2+(y-1)^2=4$ **C.** $(x-1)^2+y^2=16$ **D.** $x^2+(y-1)^2=16$

lời giải:

Ta có $|z-i|=4\Rightarrow\sqrt{x^2+(y-1)^2}=4\Rightarrow x^2+(y-1)^2=16$

Câu 10: Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\left|\overline{z}+2-i\right|=4$ là đường tròn có tâm và bán kính lần lượt là

A. $I(2;-1);\ R=4$. **B.** $I(2;-1);\ R=2$. **C.** $I(-2;-1);\ R=4$. **D.** $I(-2;-1);\ R=2$.

Lời giải

Giả sử số phức thỏa mãn bài toán có dạng $z=x+yi\ (x,\ y\in\mathbb{R})$.

Suy ra $\overline{z}+2-i=x-yi+2-i=x+2-(y+1)i$.

Do đó: $\left|\overline{z}+2-i\right|=4\Leftrightarrow|x+2-(y+1)i|=4\Leftrightarrow(x+2)^2+(y+1)^2=16$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(-2;-1)$, bán kính $R=4$.

Câu 11: Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-1+i|=2$ là đường tròn có tâm và bán kính lần lượt là:

A. $I(-1;1),R=4$. **B.** $I(-1;1),R=2$. **C.** $I(1;-1),R=2$. **D.** $I(1;-1),R=4$.

Lời giải

Gọi $z=a+bi$, với $x,y\in\mathbb{R}$, ta có:

$|z-1+i|=2\ \Leftrightarrow|x+yi-1+i|=2\Leftrightarrow|(x-1)+(y+1)i|=2\ \Leftrightarrow(x-1)^2+(y+1)^2=4$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(1;-1)$, bán kính $R=2$.

Câu 12: Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|(1+i)z-5+i|=2$ là một đường tròn tâm I và bán kính R lần lượt là

A. $I(2;-3),R=\sqrt{2}$. **B.** $I(2;-3),R=2$. **C.** $I(-2;3),R=\sqrt{2}$. **D.** $I(-2;3),R=2$.

Lời giải

Gọi $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$. Ta có:

$|(1+i)z-5+i|=2\Rightarrow|(1+i)(x+yi)-5+i|=2\Leftrightarrow|(x-y-5)+(x+y+1)i|=2$

$\Leftrightarrow (x-y-5)^2+(x+y+1)^2=4 \Leftrightarrow 2x^2+2y^2-8x+12y+22=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x+6y+11=0$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là đường tròn tâm $I(2;-3)$ và $R=\sqrt{2}$.

Câu 13: Xét các số phức z thỏa mãn $\dfrac{z+2}{z-2i}$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $z=a+bi, a,b\in\mathbb{R}$. Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn cho số phức z.

Có $\text{w}=\dfrac{z+2}{z-2i}=\dfrac{a+2+bi}{a+(b-2)i}=\dfrac{(a+2+bi)\left[a-(b-2)i\right]}{a^2+(b-2)^2}$

$=\dfrac{a(a+2)+b(b-2)+\left[-(a+2)(b-2)+ab\right]i}{a^2+(b-2)^2}$

w là số thuần ảo $\Leftrightarrow \begin{cases} a(a+2)+b(b-2)=0 \ (1) \\ a^2+(b-2)^2\neq 0 \end{cases}$

Có $(1)\Leftrightarrow a^2+b^2+2a-2b=0$.

Suy ra M thuộc đường tròn tâm $I(-1;1)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

Câu 14: Tính tổng của tất cả các giá trị của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thoả mãn đồng thời $|z|=m$ và $|z-4m+3mi|=m^2$.

A. 4. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Đặt $z=x+yi \ (x,y\in\mathbb{R})$. Ta có điểm biểu diễn z là $M(x;y)$.

Với $m=0$, ta có $z=0$, thoả mãn yêu cầu bài toán.

Với $m>0$, ta có:

+ $|z|=m\Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn (C_1) tâm $I(0;0)$, bán kính $R=m$

+ $|z-4m+3mi|=m^2\Leftrightarrow (x-4m)^2+(y+3m)^2=m^4$

$\Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn (C_2) tâm $I'(4m;-3m)$, bán kính $R'=m^2$.

+) Có duy nhất một số phức z thoả mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} II'=R+R' \\ II'=|R-R'| \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 5m=m^2+m \\ 5m=|m^2-m| \end{array}\right. \\ m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=6 \end{array}\right.$.

Kết hợp với $m=0$, suy ra $m\in\{0;4;6\}$. Vậy tổng tất cả các giá trị của m là 10.

Câu 15: Cho số phức z thỏa mãn: $|z+2-i|=3$. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) biểu diễn số phức $w=1+\bar{z}$ là

A. Đường tròn tâm $I(-2;1)$ bán kính $R=3$.

B. Đường tròn tâm $I(2;-1)$ bán kính $R=3$.

C. Đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R=9$.

D. Đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R=3$.

Lời giải

Gọi $w=x+yi$, x, $y\in\mathbb{R}$. Số phức w được biểu diễn bởi điểm $M(x;y)$.

Từ $w=1+\bar{z}$ suy ra $x+yi=1+\bar{z}\Leftrightarrow\bar{z}=(x-1)+yi\Rightarrow z=(x-1)-yi$.

Mà $|z+2-i|=3$ nên ta có:

$$|(x-1)-yi+2-i|=3\Leftrightarrow|(x+1)-(y+1)i|=3\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=3$$
$$\Leftrightarrow(x+1)^2+(y+1)^2=3^2.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R=3$.

Câu 16: Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=2\sqrt{5}$. Biết rằng trong mặt phẳng tọa độ các điểm biểu diễn của số phức $w=i+(2-i)z$ cùng thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó?

A. $r=\sqrt{5}$. **B.** $r=10$. **C.** $r=20$. **D.** $r=2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $w=i+(2-i)z\Leftrightarrow w-i=(2-i)z$. Suy ra $|w-i|=|(2-i)z|=|2-i|.|z|=10$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn của số phức w trên mặt phẳng tọa độ nằm trên đường tròn có bán kính $r=10$.

Câu 17: Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z}-2i)(z+3)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{13}$ **B.** $\sqrt{11}$ **C.** $\frac{\sqrt{11}}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$

Lời giải

Chọn D

Gọi $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$**.**

Khi đó: $w=(\overline{z}-2i)(z+3)=[x+(-y-2)i][(x+3)+yi]$

$=x(x+3)+y(y+2)+[xy+(x+3)(-y-2)]\,i$

Do w **là số thuần ảo** $\Leftrightarrow x(x+3)+y(y+2)=0\Leftrightarrow x^2+y^2+3x+2y=0$

$\Leftrightarrow\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{13}{4}$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z **là đường tròn tâm** $I\left(-\frac{3}{2};-1\right)$**, bán kính** $R=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Câu 18: Cho các số phức z thỏa mãn $|z+1|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=\left(1+i\sqrt{8}\right)z+i$ là một đường tròn. Bán kính r của đường tròn đó là

A. 9. **B.** 36. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Gọi $w=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$

Theo đề bài ta có:

$w=\left(1+i\sqrt{8}\right)z+i\Leftrightarrow w-i=\left(1+i\sqrt{8}\right)z\Leftrightarrow w-i=\left(1+i\sqrt{8}\right)(z+1)-\left(1+i\sqrt{8}\right)$

$\Leftrightarrow w-i+1+i\sqrt{8}=\left(1+i\sqrt{8}\right)(z+1)\Leftrightarrow(x+1)+\left(y-1+\sqrt{8}\right)i=\left(1+i\sqrt{8}\right)(z+1)$

$\Rightarrow\sqrt{(x+1)^2+\left(y-1+\sqrt{8}\right)^2}=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{8}\right)^2}.2\Leftrightarrow(x+1)^2+\left(y-1+\sqrt{8}\right)^2=36$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=\left(1+i\sqrt{8}\right)z+i$ là một đường tròn có bán kính $r=6$.

Câu 19: Cho z_1,z_2 là hai số phức thỏa mãn điều kiện $|z-5-3i|=5$ đồng thời $|z_1-z_2|=8$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=z_1+z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình

A. $(x-10)^2+(y-6)^2=36$. **B.** $(x-10)^2+(y-6)^2=16$.

C. $(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=9$. **D.** $(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}$.

Lời giải

+)Đặt $z=x+yi$

Khi đó $|z-5-3i|=5\Leftrightarrow|x-5+(y-3)i|=5\Leftrightarrow(x-5)^2+(y-3)^2=25\ (C)$

Gọi A, B lần lượt là 2 điểm biểu diễn số phức z_1,z_2

$\Rightarrow$A, B thuộc đường tròn (C) có tâm I, bán kính R = 5 và $|z_1-z_2|=8\Rightarrow AB=8$

+) Gọi H là điểm biểu diễn số phức $w'=\frac{z_1+z_2}{2}$

$\Rightarrow$H là trung điểm AB $\Rightarrow AH=\frac{AB}{2}=4$

Xét tam giác AIH vuông tại H có AH = 4, AI = 5 nên $IH=\sqrt{IA^2-AH^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

$\Rightarrow$ H thuộc đường tròn (C') có tâm I, bán kính $R'=3$

+) Gọi M là điểm biểu diễn số phức w=z_1+z_2

$\Rightarrow \overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OH}$

$\Rightarrow$M là ảnh của H qua phép vị tự tâm O, tỉ số k = 2 với O là gốc tọa độ

Từ và $\Rightarrow$tập hợp M là đường tròn (C'') là ảnh của (C') phép vị tự tâm O, tỉ số k = 2

+) Giả sử đường tròn (C'') có tâm J và bán kính R''

$$\Rightarrow \begin{cases} a=2.5=10 \\ b=2.3=6 \\ R''=2.\mathrm{R}'=6 \end{cases}$$

$\Rightarrow$Phương trình đường tròn (C'') là $(x-10)^2+(y-6)^2=36$

Câu 20: Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn: $\left|\overline{z}+2-i\right|=4$ là đường tròn có tâm I và bán kính R lần lượt là:

A. $I(-2;-1);R=4$. **B.** $I(-2;-1);R=2$. **C.** $I(2;-1);R=4$. **D.** $I(2;-1);I(2;-1)$.

Lời giải

Gọi số phức $z=x+iy(x,y\in\mathbb{R})$

Ta có:

$$\left|\overline{z}+2-i\right|=4\Leftrightarrow\left|(x+2)+(-y-1)i\right|=4\Leftrightarrow(x+2)^2+(y+1)^2=16$$

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn: $\left|\overline{z}+2-i\right|=4$ là đường tròn có tâm $I(-2;-1)$ và có bán kính $R=4$.

Câu 21: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=2$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=(1-i)\overline{z}+2i$ là

A. Một đường tròn. **B.** Một đường thẳng.
C. Một Elip. **D.** Một parabol hoặc hyperbol.

Lời giải

Ta có: $w=(1-i)\overline{z}+2i\Leftrightarrow w-2i=(1-i)\overline{z}\Leftrightarrow|w-2i|=|(1-i)||\overline{z}|\Leftrightarrow|w-2i|=2\sqrt{2}$.

Do đó, tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(0;2)$ và bán kính $2\sqrt{2}$.

Câu 22: Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $|z+1|=|1-i-2z|$ là đường tròn (C). Tính bán kính R của đường tròn (C)

A. $R=\frac{10}{9}$. **B.** $R=2\sqrt{3}$. **C.** $R=\frac{7}{3}$. **D.** $R=\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải

Gọi số phức $z=a+bi$, $(a,b\in\mathbb{R})$

$$|a+bi+1|=|1-i-2(a+bi)|\Leftrightarrow\sqrt{(a+1)^2+b^2}=\sqrt{(1-2a)^2+(-1-2b)^2}$$

$\Leftrightarrow a^2+2a+1+b^2=1-4a+4a^2+1+4b+4b^2 \Leftrightarrow a^2+b^2-2a+\frac{4}{3}b+\frac{1}{3}=0$

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm $I\left(1;-\frac{2}{3}\right)$,

Bán kính $R=\sqrt{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Câu 23: Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|2z-i|=6$ là một đường tròn có bán kính bằng:

A. 3. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** 6. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Cách 1: Đặt $z=a+bi$ ta có $|2z-i|=6 \Leftrightarrow |2a+2bi-i|=6 \Leftrightarrow \sqrt{4a^2+(2b-1)^2}=6$.

$4a^2+4b^2-4b-35=0 \Leftrightarrow a^2+b^2-b-\frac{35}{4}=0 \Leftrightarrow a^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2=9$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I\left(0;\frac{1}{2}\right)$ bán kính $R=3$.

Cách 2: $|2z-i|=6 \Leftrightarrow \left|z-\left(0+\frac{1}{2}i\right)\right|=3$. Gọi I là điểm biểu diễn số phức $0+\frac{1}{2}i$, M là điểm biểu diễn số phức z. Ta có $MI=3$. Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I\left(0;\frac{1}{2}\right)$ bán kính $R=3$.

Câu 24: Cho số phức z thỏa mãn $|z+1-3i|=2$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=(2-i)z-3i+5$ là một đường tròn. Xác định tâm I và bán kính của đường tròn trên.

A. $I(-6;-4), R=2\sqrt{5}$. **B.** $I(6;4), R=10$.

C. $I(6;4), R=2\sqrt{5}$. **D.** $I(-6;4), R=2\sqrt{5}$.

Lời giải

Ta có: $w=(2-i)z-3i+5 \Leftrightarrow w=(2-i)(z+1-3i)+6+4i$

$\Leftrightarrow w-6-4i=(2-i)(z+1-3i)$

$\Rightarrow |w-6-4i|=|(2-i)(z+1-3i)|=2\sqrt{5}$

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $w=x+yi\ (x;y\in\mathbb{R})$

$|w-6-4i|=2\sqrt{5} \Leftrightarrow |(x-6)+(y-4)i|=2\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow (x-6)^2+(y-4)^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số w là đường tròn tâm $I(6;4)$, bán kính $R=2\sqrt{5}$.

Câu 25: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=3-2i+(2-i)z$ là một đường tròn. Bán kính R của đường tròn đó bằng?

A. 7. **B.** 20. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{7}$.

Lời giải

Ta có $w=3-2i+(2-i)z \Leftrightarrow z=\dfrac{w-3+2i}{2-i}$. Đặt $w=x+yi\ \ (x,y\in\mathbb{R})$.

Khi đó $z=\dfrac{x+yi-3+2i}{2-i}$.

Ta có $|z|=2 \Rightarrow \left|\dfrac{x+yi-3+2i}{2-i}\right|=2 \Leftrightarrow \dfrac{|x-3+(y+2)i|}{|2-i|}=2 \Leftrightarrow \dfrac{|x-3+(y+2)i|}{|2-i|}=2$

$\Leftrightarrow |x-3+(y+2)i|=2|2-i| \Leftrightarrow |x-3+(y+2)i|=2\sqrt{5} \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2$.

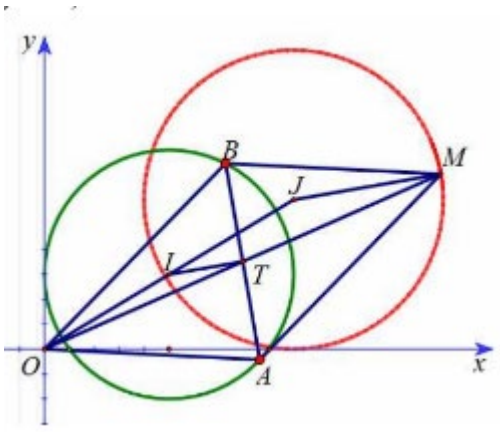
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=3-2i+(2-i)z$ là một đường tròn có bán kính $R=2\sqrt{5}$.

Câu 26: Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-5-3i|=5$, đồng thời $|z_1-z_2|=8$. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w=z_1+z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình nào dưới đây?

A. $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}$. **B.** $(x-10)^2+(y-6)^2=36$.

C. $(x-10)^2+(y-6)^2=16$. **D.** $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=9$.

Lời giải



Gọi A, B, M là các điểm biểu diễn của z_1, z_2, w. Khi đó A, B thuộc đường tròn $(C):(x-5)^2+(y-3)^2=25$ và $AB=|z_1-z_2|=8$.

(C) có tâm $I(5;3)$ và bán kính $R=5$, gọi T là trung điểm của AB khi đó T là trung điểm của OM và $IT=\sqrt{IA^2-TA^2}=3$.

Gọi J là điểm đối xứng của O qua I suy ra $J(10;6)$ và IT là đường trung bình của tam giác OJM, do đó $JM = 2IT = 6$.

Vậy M thuộc đường tròn tâm J bán kính bằng 6 và có phương trình $(x-10)^2+(y-6)^2=36$.

Câu 27: Xét số phức z thỏa mãn $|z-3i+4|=3$, biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(12-5i)\bar{z}+4i$ là một đường tròn. Tìm bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=13$. **B.** $r=39$. **C.** $r=17$ **D.** $r=3$.

Lời giải

Gọi số phức $w=x+yi$, với $x,y\in R$, biểu diễn bởi $M(x;y)$

$$w=(12-5i)\bar{z}+4i \Leftrightarrow x+yi=(12-5i)\bar{z}+4i \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{x+(y-4)i}{12-5i}$$

$$\Rightarrow z=\frac{x-(y-4)i}{12+5i}$$

Ta có : $|z-3i+4|=3 \Leftrightarrow \left|\frac{x-(y-4)i}{12+5i}-3i+4\right|=3$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{x+63-(y+12)i}{12+5i}\right|=3 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x+63)^2+(y+12)^2}}{\sqrt{12^2+5^2}}=3 \Leftrightarrow (x+63)^2+(y+12)^2=39^2$$

Vậy $r=39$.

Câu 28: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3|=1$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=\left(1-\sqrt{3}i\right)z+1-2i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=2$. **B.** $r=1$. **C.** $r=4$. **D.** $r=\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi $w=x+yi$.

$$w=\left(1-\sqrt{3}i\right)z+1-2i \Leftrightarrow x+yi=\left(1-\sqrt{3}i\right)z+1-2i \Leftrightarrow z=\frac{x-1+(y+2)i}{1-\sqrt{3}i}$$

$$\Leftrightarrow z=\left[x-1+(y+2)i\right]\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)=\frac{(x-1)-\sqrt{3}(y+2)}{4}+\frac{(y+2)+(x-1)\sqrt{3}}{4}i$$

$$\Rightarrow z-3=\frac{(x-13)-\sqrt{3}(y+2)}{4}+\frac{(y+2)+(x-1)\sqrt{3}}{4}i$$

$$|z-3|=1 \Leftrightarrow \left(\frac{(x-13)-\sqrt{3}(y+2)}{4}\right)^2+\left(\frac{(y+2)+(x-1)\sqrt{3}}{4}\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow (x-13)^2-2\sqrt{3}(x-13)(y+2)+3(y+2)^2+(y+2)^2+2(y+2)(x-1)\sqrt{3}+3(x-1)^2=16$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-8x+\left(4+6\sqrt{3}\right)y+12\sqrt{3}+43=0$$

Bán kính $r=\sqrt{4^2+\left(-2-3\sqrt{3}\right)^2-12\sqrt{3}-43}=2$.

Câu 29: Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $\left|z+m-1+\sqrt{3}i\right|=4$. Tìm tất cả các số thực m sao cho tập hợp các điểm M là đường tròn tiếp xúc với trục Oy.

A. $m=-5;m=3$. **B.** $m=5;m=-3$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=5$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z=x+yi\ ,\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$. Khi đó.

$\left|z+m-1+\sqrt{3}i\right|=4\Leftrightarrow\left|x+yi+m-1+\sqrt{3}i\right|=4$.

$\Leftrightarrow\left|\left(x+m-1\right)+\left(y+\sqrt{3}\right)i\right|=4\Leftrightarrow\sqrt{\left(x+m-1\right)^2+\left(y+\sqrt{3}\right)^2}=4$.

$\Leftrightarrow\left(x+m-1\right)^2+\left(y+\sqrt{3}\right)^2=16$.

Do đó tập hợp các điểm M biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm $I\left(1-m;-\sqrt{3}\right)$ và bán kính $R=4$. Để đường tròn này tiếp xúc với trục Oy thì $\left|1-m\right|=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-m=4\\1-m=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=5\end{array}\right.$.

Vậy $m=5;m=-3$.

Câu 30: Cho số phức z thỏa mãn $\left(z-2+i\right)\left(\overline{z}-2-i\right)=25$. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $w=2\overline{z}-2+3i$ là đường tròn tâm $I\left(a;b\right)$ và bán kính c. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 18. **B.** 20. **C.** 10. **D.** 17.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $z=a+bi\ \left(a;b\in\mathbb{R}\right)$ và $w=x+yi\ \left(x;y\in\mathbb{R}\right)$.

$\left(z-2+i\right)\left(\overline{z}-2-i\right)=25\Leftrightarrow\left[a-2+\left(b+1\right)i\right]\left[a-2-\left(b+1\right)i\right]=25$

$\Leftrightarrow\left(a-2\right)^2+\left(b+1\right)^2=25\ (1)$

Theo giả thiết: $w=2\overline{z}-2+3i\Leftrightarrow x+yi=2\left(a-bi\right)-2+3i\Leftrightarrow x+yi=2a-2+\left(3-2b\right)i$.

$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=2a-2\\y=3-2b\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=\dfrac{x+2}{2}\\b=\dfrac{3-y}{2}\end{array}\right.\ (2)$.

Thay (2) vào (1) ta được: $\left(\dfrac{x+2}{2}-2\right)^2+\left(\dfrac{3-y}{2}+1\right)^2=25\Leftrightarrow\left(x-2\right)^2+\left(y-5\right)^2=100$.

Suy ra, tập hợp điểm biểu diễn của số phức w là đường tròn tâm $I(2;5)$ và bán kính $R=10$.

Vậy $a+b+c=17$.

Câu 31: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z-(2-3i)|\le 2$.

A. Một đường thẳng. **B.** Một hình tròn. **C.** Một đường tròn. **D.** Một đường elip.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z=x+yi;\ x,y\in\mathbb{R}$. Từ giả thiết $|z-(2-3i)|\le 2\Leftrightarrow|x+yi-(2-3i)|\le 2$.

$\Leftrightarrow|(x-2)+(y+3)i|\le 2\Leftrightarrow(x-2)^2+(y+3)^2\le 4$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một hình tròn.

Câu 32: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+i+1|=|\overline{z}-2i|$ và $|z|=1$

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z=x+yi;x,y\in\mathbb{R}$ và $M(z)=M(x;y)$

$$\begin{cases}|z+i+1|=|\overline{z}-2i|\\|z|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)^2+(y+1)^2=x^2+(y+2)^2\\x^2+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+y+1=0\\x^2+y^2=1\end{cases}$$

Suy ra tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng $\Delta:-x+y+1=0$ và đường tròn $x^2+y^2=1$ có tâm $O(0;0),R=1$

Ta có $d(O,\Delta)=\dfrac{|-0+0+1|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1=R$

Suy ra đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm hay có hai số phức z thỏa mãn.

Câu 33: Xét các số phức z thỏa mãn $(z-4i)(\overline{z}+2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm của đường tròn đó.

A. $(-1;-2)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(1;-2)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$ và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Ta có $(z-4i)(\overline{z}+2)=x^2+y^2+2x-4y+(2y-4x-8)i$.

$(z-4i)(\overline{z}+2)$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-4y=0$

$\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-2)^2=5$.

Tập hợp các điểm biễn diễn của số phức z là mộ đường tròn có tâm $I(-1;2)$,bán kính $R=\sqrt{5}$.

Câu 34: Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|\overline{z}+1+2i\right|=1$ là

A. đường tròn $I(1;2)$, bán kính $R=1$. **B.** đường tròn $I(-1;-2)$, bán kính $R=1$.

C. đường tròn $I(-1;2)$, bán kính $R=1$. **D.** đường tròn $I(1;-2)$, bán kính $R=1$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z=x+yi;(x,y\in R)$

Khi đó: $\left|\overline{z}+1+2i\right|=1\Leftrightarrow\left|(x+1)+(-y+2)i\right|=1\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2+(-y+2)^2}=1$

$\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-2)^2=1$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn $I(-1;2)$, bán kính $R=1$.

Câu 35: Cho số phức z thảo mãn $(z+1-3i)(\overline{z}+1+3i)=25$. Biết tập hợp biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính c. Tổng $a+b+c$ bằng

A. 9. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(z+1-3i)(\overline{z}+1+3i)=25\Leftrightarrow z.\overline{z}+(z+\overline{z})+(z-\overline{z})3i=15\ (*)$.

Đặt $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$ khi đó $\begin{cases}z.\overline{z}=x^2+y^2\\z+\overline{z}=2x\\z-\overline{z}=2yi\end{cases}$.

Thay vào $(*)$ ta được $x^2+y^2+2x-6y-15=0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn z thuộc đường tròn (C) có tâm $I(-1;3)$ và bán kính $R=5$.

Suy ra $\begin{cases}a=-1\\b=3\\c=5\end{cases}$. Vậy $a+b+c=7$.

Cách 2:

Đặt $z_0=-1+3i$ và $R=5$.

Ta có $\left|z-z_0\right|\left|\overline{z}-\overline{z}_0\right|=\left|z-z_0\right|\left|\overline{z-z_0}\right|=\left|z-z_0\right|^2$.

Suy ra $\left|z-z_0\right|\left|\overline{z}-\overline{z}_0\right|=R^2\Leftrightarrow\left|z-z_0\right|^2=R^2\Leftrightarrow\left|z-z_0\right|=R$, với $R>0$.

Vậy tập hợp biểu diễn số phức z thuộc đường tròn tâm $I(-1;3)$, bán kính $R=5$.

Suy ra $\begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ c=5 \end{cases}$. Vậy $a+b+c=7$.

Câu 36: Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-1|=2$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+2$ là đường tròn có bán kính bằng R. Tính R.

A. $R=8$. **B.** $R=2$. **C.** $R=16$. **D.** $R=4$.

Lời giải

Gọi $w=x+yi, x, y\in\mathbb{R}$.

$w=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+2$

$\Rightarrow x+yi=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+2 \Leftrightarrow x+yi=\left(1+\sqrt{3}i\right)(z-1)+1+\sqrt{3}i+2$

$\Leftrightarrow x-3+\left(y-\sqrt{3}\right)i=\left(1+\sqrt{3}i\right)(z-1)$

$\Rightarrow \left|x-3+\left(y-\sqrt{3}\right)i\right|=\left|\left(1+\sqrt{3}i\right)(z-1)\right|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2}=\left|1+\sqrt{3}i\right||z-1|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2}=4$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=16.$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+2$ là đường tròn tâm $I\left(3;\sqrt{3}\right)$, bán kính bằng $R=4.$.

Câu 37: Cho số phức z thoả mãn $|z-1|=5$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức w xác định bởi $w=(2+3i)\overline{z}+3+4i$ là một đường tròn bán kính R. Tính R.

A. $5\sqrt{13}$. **B.** $5\sqrt{17}$. **C.** $5\sqrt{10}$. **D.** $5\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $|z-1|=\left|\overline{z-1}\right|=|\overline{z}-1|=5$.

Khi đó: $w=(2+3i)\overline{z}+3+4i \Leftrightarrow w=(2+3i)(\overline{z}-1)+3+4i-2-3i \Leftrightarrow w-1-i=(2+3i)(\overline{z}-1)$

$\Leftrightarrow |w-1-i|=|2+3i|.|\overline{z}-1|=5\sqrt{13}$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn bán kính $R=5\sqrt{13}$.

Câu 38: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z|=\sqrt{5}$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=(1+2i)z+i$ là một đường tròn. Tìm bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=\sqrt{5}$. **B.** $r=10$. **C.** $r=5$. **D.** $r=2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$w=(1+2i)z+i \Leftrightarrow w-i=(1+2i)z \Rightarrow |w-i|=|(1+2i)z|$

$\Rightarrow |w-i|=|(1+2i)|.|z| \Rightarrow |w-i|=5$. Gọi $w=x+yi;\ x,y\in\mathbb{R}$.

Khi đó

$|w-i|=5 \Leftrightarrow |x+yi-i|=5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=5 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=25.$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn có bán kính $r=5$.

Câu 39: Cho số phức z có môđun bằng $2\sqrt{2}$. Biết rằng tập hợp điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức $w=(1-i)(z+1)-i$ là đường tròn có tâm $I(a;b)$, bán kính R. Tổng $a+b+R$ bằng

A. 5. **B.** 7. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Đặt $w=a+bi$ với điều kiện $a,b\in\mathbb{R}$.

Ta có $w=(1-i)(z+1)-i \Leftrightarrow a+bi=(1-i)(z+1)-i \Leftrightarrow a+(b+1)i=(1-i)z+1-i$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{a-1+(b+2)i}{1-i}=\dfrac{\left[(a-1)+(b+2)i\right](1+i)}{2} \Leftrightarrow z=\dfrac{a-b-3+(a+b+1)i}{2}.$

Vì $|z|=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{(a-b-3)^2}{4}+\dfrac{(a+b+1)^2}{4}}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow (a-b-3)^2+(a+b+1)^2=32$

$\Leftrightarrow a^2+b^2-2a+4b-11=0$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=4$.

Từ đó suy ra $a=1,b=-2,R=4 \Rightarrow a+b+R=1+(-2)+4=3$.

Cách 2: Đặt $w=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có $w=(1-i)(z+1)-i \Leftrightarrow w+i=(1-i)(z+1) \Leftrightarrow w+i=(1-i)z+1-i$

$\Leftrightarrow w-1+2i=(1-i)z$.

Lấy môđun hai vế ta được $|w-1+2i|=|(1-i)z| \Leftrightarrow |x+yi-1+2i|=|1-i||z|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=4 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=16$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=4$.

Từ đó suy ra $a=1,b=-2,R=4 \Rightarrow a+b+R=1+(-2)+4=3$.

Câu 40: Cho số phức z thoả mãn $|z|=3$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w=\overline{z}+i$ là một đường tròn. Tìm tâm I của đường tròn đó.

A. $I(0;1)$. **B.** $I(0;-1)$. **C.** $I(-1;0)$. **D.** $I(1;0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $|\overline{z}|=|z|=3$.

Từ $w=\overline{z}+i\Rightarrow w-i=\overline{z}\Rightarrow|w-i|=|\overline{z}|\Rightarrow|w-i|=3$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn của số phức w là đường tròn tâm $I(0;1)$.

Câu 41: Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z+2|=|z-i|$ là một đường thẳng có phương trình

A. $4x+2y+3=0$. **B.** $2x+4y+13=0$. **C.** $4x-2y+3=0$. **D.** $2x-4y+13=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z.

Ta có $|z+2|=|z-i|\Leftrightarrow(x+2)^2+y^2=x^2+(y-1)^2\Leftrightarrow 4x+4=-2y+1\Leftrightarrow 4x+2y+3=0$

Do đó ta chọn đáp án **A.**

Câu 42: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+i|=|z+2|$. Trong mặt phẳng phức, quỹ tích điểm biểu diễn các số phức z.

A. là đường thẳng $3x+y+1=0$. **B.** là đường thẳng $3x-y+1=0$.

C. là đường thẳng $3x+y-1=0$. **D.** là đường thẳng $3x-y-1=0$.

Lời giải

Giả sử số phức z có dạng: $z=x+yi\quad(x,y\in\mathbb{R})$

Ta có: $|z-1+i|=|z+2|\Leftrightarrow|x+yi-1+i|=|x+yi+2|\Leftrightarrow|(x-1)+(y+1)i|=|(x+2)+yi|$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+1)^2=(x+2)^2+y^2$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+2y+1=x^2+4x+4+y^2$

$\Leftrightarrow 6x-2y+2=0\Leftrightarrow 3x-y+1=0$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $3x-y+1=0$.

Câu 43: Trên mặt phẳng phức, tập hợp các số phức $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+2+i|=|\overline{z}-3i|$ là đường thẳng có phương trình

A. $y=x+1$. **B.** $y=-x+1$. **C.** $y=-x-1$. **D.** $y=x-1$.

Lời giải

$|z+2+i|=|\overline{z}-3i|\Leftrightarrow(x+2)^2+(y+1)^2=x^2+(y+3)^2\Leftrightarrow 4x-4y-4=0\Leftrightarrow y=x-1$.

Câu 44: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu biễn các số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=|\overline{z}+1+2i|$ là đường thẳng có phương trình

A. $x-2y+1=0$. **B.** $x+2y=0$. **C.** $x-2y=0$. **D.** $x+2y+1=0$.

Lời giải

Đặt $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=x-yi$ và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Ta có: $|z-1+2i|=|\overline{z}+1+2i|\Leftrightarrow|x+yi-1+2i|=|x-yi+1+2i|$

$\Leftrightarrow|(x-1)+(y+2)i|=|(x+1)+(2-y)i|$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(2-y)^2}$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4=x^2+2x+1+y^2-4y+4\Leftrightarrow 4x-8y=0\Leftrightarrow x-2y=0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu biễn các số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường thẳng có phương trình là $x-2y=0$.

Câu 45: Xét các số phức z thỏa mãn $z(\overline{z}-2+i)+4i-1$ là số thực. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là đường thẳng d. Diện tích tam giác giới hạn bởi đường thẳng d và hai trục tọa độ bằng

A. 8. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 10.

Lời giải

Giả sử $z=a+bi\ \ (a,b\in R)$.

Khi đó $z(\overline{z}-2+i)+4i-1=(a+bi)(a-bi-2+i)+4i-1=(a+bi).[(a-2)+(1-b)i]+4i-1$

$=a(a-2)-b(1-b)+[a(1-b)+b(a-2)]i+4i-1$

$=a(a-2)-b(1-b)-1+(a-2b+4)i$.

+ $z(\overline{z}-2+i)+4i-1$ là số thực suy ra $a-2b+4=0$.

+ Số phức z có điểm biểu diễn $M(a;b)\to M\in d:x-2y+4=0$.

+ Đường thẳng d cắt trục Ox, Oy lần lượt tại $A(-4;0)$ và $B(0;2)\Rightarrow S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}.OA.OB=4$.

Câu 46: Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z+2|=|z-i|$ là một đường thẳng có phương trình

A. $4x+2y+3=0$. **B.** $2x+4y+13=0$. **C.** $4x-2y+3=0$. **D.** $2x-4y+13=0$.

Lời giải

Gọi số phức $z=a+bi$, với a,b thuộc $\mathbb{R}$. Khi đó, $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức z.

Ta có: $|z+2|=|z-i|\Leftrightarrow|a+2+bi|=|a+(b-1)i|\Leftrightarrow\sqrt{(a+2)^2+b^2}=\sqrt{a^2+(b-1)^2}$

$\Leftrightarrow (a+2)^2+b^2=a^2+(b-1)^2 \Leftrightarrow 4a+2b+3=0 \Leftrightarrow$ điểm $M(a;b)$ thuộc đường thẳng $4x+2y+3=0$

Vậy, tập hợp các điểm M thỏa mãn bài ra là đường thẳng $4x+2y+3=0$.

Câu 47: Cho số phức z thỏa mãn: $|z-1|=|z-2+3i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là

A. Đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính $R=1$.

B. Đường thẳng có phương trình $2x-6y+12=0$.

C. Đường thẳng có phương trình $x-3y-6=0$.

D. Đường thẳng có phương trình $x-5y-6=0$.

Lời giải

Gọi $z=x+yi$; (x, $y\in\mathbb{R}$).

Ta có: $|z-1|=|z-2+3i| \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=(x-2)^2+(y+3)^2 \Leftrightarrow x-3y-6=0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng có phương trình $x-3y-6=0$.

Câu 48: Tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa $\left|\dfrac{(12-5i)z+17+7i}{z-2-i}\right|=13$.

A. $d:6x+4y-3=0$. **B.** $d:x+2y-1=0$.

C. $(C):x^2+y^2-2x+2y+1=0$. **D.** $(C):x^2+y^2-4x+2y+4=0$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} z=x+yi(x,y\in\mathbb{R}) \\ z\neq 2+i \end{cases}$, ta có: $\left|\dfrac{(12-5i)z+17+7i}{z-2-i}\right|=13 \Leftrightarrow |(12-5i)z+17+7i|=13|z-2-i|$

$\Leftrightarrow |(12-5i)(z+1+i)|=13|z-2-i| \Leftrightarrow |12-5i||z+1+i|=13|z-2-i|$

$\Leftrightarrow 13|z+1+i|=13|z-2-i| \Leftrightarrow |z+1+i|=|z-2-i| \Leftrightarrow |x+yi+1+i|=|x+yi-2-i|$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=(x-2)^2+(y-1)^2 \Leftrightarrow 6x+4y-3=0$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $6x+4y-3=0$.

Câu 49: Cho số phức $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2-i-|z|(1-i)=0$. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm M là điểm biểu diễn của số phức z. Hỏi M thuộc đường thẳng nào sau đây?

A. $x-y+5=0$. **B.** $x-y+2=0$. **C.** $x+y-2=0$. **D.** $x+y+1=0$.

Lời giải

Ta có $z+2-i-|z|(1-i)=0 \Leftrightarrow x+yi+2-i-(1-i)\sqrt{x^2+y^2}=0$

$\Leftrightarrow x+2-\sqrt{x^2+y^2}+\left(y-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)i=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2-\sqrt{x^2+y^2}=0 \\ y-1+\sqrt{x^2+y^2}=0 \end{cases} \Rightarrow x+2-\sqrt{x^2+y^2}+y-1+\sqrt{x^2+y^2}=0 \Leftrightarrow x+y+1=0$.

Do đó M thuộc đường thẳng $x+y+1=0$.

Câu 50: Trong mặt phẳng phức Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức Z thỏa mãn $\left|z^2+\left(\overline{z}\right)^2+2|z|^2\right|=16$ là hai đường thẳng d_1,d_2. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng d_1,d_2 là bao nhiêu?

A. $d\left(d_1,d_2\right)=1$. **B.** $d\left(d_1,d_2\right)=6$. **C.** $d\left(d_1,d_2\right)=2$. **D.** $d\left(d_1,d_2\right)=4$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M\left(x,y\right)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi\left(x,y\in R\right)$

Ta có: $\left|z^2+\left(\overline{z}\right)^2+2|z|^2\right|=16\Leftrightarrow\left|x^2+2xyi-y^2+x^2-2xyi-y^2+2x^2+2y^2\right|=16$

$\Leftrightarrow\left|4x^2\right|=16\Leftrightarrow x=\pm2\Rightarrow d\left(d_1,d_2\right)=4$

Ở đây lưu ý hai đường thẳng x = 2 và x = -2 song song với nhau.

Câu 51: Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z|=|\overline{z}-3+4i|$ là?

A. Parabol $y^2=4x$. **B.** Đường thẳng $6x+8y-25=0$.

C. Đường tròn $x^2+y^2-4=0$. **D.** Elip $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$ và $M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn của z.

Ta có $\begin{cases}|z|=\sqrt{x^2+y^2}\\ \overline{z}-3+4i=x-iy-3+4i=\left(x-3\right)\left(-y+4\right)i\end{cases}$.

$\Rightarrow|\overline{z}-3+4i|=\sqrt{\left(x-3\right)^2+\left(-y+4\right)^2}$.

Vậy $|z|=|\overline{z}-3+4i|\Leftrightarrow x^2+y^2=\left(x-3\right)^2+\left(-y+4\right)^2\Leftrightarrow6x+8y-25=0$.

Câu 52: Cho số phức z thỏa: $2|z-2+3i|=|2i-1-2\overline{z}|$. Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z là.

A. Một đường thẳng có phương trình: $-20x+32y+47=0$.

B. Một đường có phương trình: $3y^2+20x+2y-20=0$.

C. Một đường thẳng có phương trình: $20x+16y+47=0$.

D. Một đường thẳng có phương trình: $20x-16y-47=0$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M\left(x;y\right)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$.

Ta có.

$2|z-2+3i|=|2i-1-2\bar{z}|$

$\Leftrightarrow 2|(x-2)+(y+3)i|=|(-1-2x)+(2y+2)i|$.

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}=\sqrt{(-1-2x)^2+(2y+2)^2}$

$\Leftrightarrow 4(x^2+y^2-4x+6y+13)=4x^2+4y^2+4x+8y+5$.

$\Leftrightarrow 20x-16y-47=0$

Vậy tập hợp điểm $M(x;y)$ là đường thẳng $20x-16y-47=0$.

Câu 53: Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z sao cho z^2 là số thuần ảo.

A. Hai đường thẳng $y=x$ và $y=-x$.

B. Trục Ox.

C. Trục Oy.

D. Hai đường thẳng $y=x$ và $y=-x$, bỏ đi điểm $O(0;0)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z=x+yi$, x, $y\in\mathbb{R}$. Số phức z được biểu diễn bởi $M(x;y)$.

Ta có: $z^2=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$.

Vì z^2 là số thuần ảo nên có phần thực bằng 0, tức là $x^2-y^2=0\Leftrightarrow y^2=x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=x\\y=-x\end{array}\right.$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là hai đường thẳng $y=x$ và $y=-x$.

Câu 54: Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z-2-i|=|\bar{z}+2i|$ là đường thẳng có phương trình

A. $4x-2y-1=0$. **B.** $4x-6y-1=0$. **C.** $4x+2y-1=0$. **D.** $4x-2y+1=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi số phức $z=x+yi$ $(x;y\in\mathbb{R})$ có điểm biểu diễn là $M(x;y)$.

$\Rightarrow\bar{z}=x-yi$.

$|z-2-i|=|\bar{z}+2i|\Rightarrow|x+yi-2-i|=|x-yi+2i|$

$\Leftrightarrow|x-2+(y-1)i|=|x+(2-y)i|\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{x^2+(2-y)^2}$

$\Leftrightarrow -4x+4-2y+1=-4y+4\Leftrightarrow 4x-2y-1=0$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là đường thẳng $4x-2y-1=0$.

Câu 55: Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|2+z|=|z-i|$.

A. Đường thẳng $4x+2y+3=0$. **B.** Điểm $M(-1;1/2)$.

C. Đường thẳng $2x+y+3=0$. **D.** Đường thẳng $4x+2y-3=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x;y)$, $x,y\in\mathbb{R}$ là điểm biểu diễn số phức z. Suy ra $z=x+iy$.

$|2+z|=|z-i| \Leftrightarrow (x+2)^2+y^2=x^2+(y-1)^2 \Leftrightarrow 4x+2y+3=0$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng có phương trình $4x+2y+3=0$.

Câu 56: Cho số phức z thỏa mãn $2|z-2+3i|=|2i-1-2\bar{z}|$. Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z là đường thẳng có phương trình:

A. $20x-16y-47=0$. **B.** $20x+6y-47=0$. **C.** $20x+16y+47=0$. **D.** $20x+16y-47=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow \bar{z}=x-yi$.

$2|z-2+3i|=|2i-1-2\bar{z}| \Rightarrow 2|x+yi-2+3i|=|2i-1-2(x-yi)|$

$\Leftrightarrow 2|x-2+(y+3)i|=|-2x-1+(2y+2)i|$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}=\sqrt{(-2x-1)^2+(2y+2)^2}$

$\Leftrightarrow 4\left[(x-2)^2+(y+3)^2\right]=(-2x-1)^2+(2y+2)^2$

$\Leftrightarrow -16x+24y+16+36=4x+8y+1+4$

$\Leftrightarrow 20x-16y-47=0$.

Câu 57: Cho số phức thỏa mãn $|z-i|=|z-1+2i|$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $\omega=(2-i)z+1$ trên mặt phẳng phức là một đường thẳng. Phương trình đường thẳng đó là

A. $x+7y+9=0$. **B.** $x+7y-9=0$. **C.** $x-7y-9=0$. **D.** $x-7y+9=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\omega=(2-i)z+1 \Leftrightarrow z=\dfrac{\omega-1}{2-i}$.

Gọi $\omega=x+yi, (x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|z-i|=|z-1+2i| \Leftrightarrow \left|\dfrac{\omega-1}{2-i}-i\right|=\left|\dfrac{\omega-1}{2-i}-1+2i\right| \Leftrightarrow \left|\dfrac{(x-2)+(y-2)i}{2-i}\right|=\left|\dfrac{(x-1)+(y+5)i}{2-i}\right|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+5)^2} \Leftrightarrow x+7y+9=0.$

Kết luận: Tập hợp điểm biểu diễn số phức ω trên mặt phẳng phức là một đường thẳng có phương trình $x+7y+9=0.$

Câu 58: Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $2|z-i|=|z-\bar{z}+2i|$ là

A. Một điểm **B.** Một đường tròn **C.** Một đường thẳng **D.** Một Parabol

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=x+yi\ (x,\ y\in\mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z}=x-yi$.

Khi đó $2|z-i|=|z-\bar{z}+2i| \Leftrightarrow 2|x+(y-1)i|=|(2y+2)i|$

$\Leftrightarrow 4\left[x^2+(y-1)^2\right]=(2y+2)^2$

$\Leftrightarrow 4x^2+4y^2-8y+4=4y^2+8y+4$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{x^2}{4}$ là một Parabol.

Câu 59: Cho số phức z thỏa mãn $|z+2|+|z-2|=4$. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ là

A. Một đường elip. **B.** Một đường parabol.
C. Một đoạn thẳng. **D.** Một đường tròn.

Lời giải

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$.

Xét hai điểm $F_1(-2;0)$, $F_2(2;0)$, khi đó theo giả thiết:

$|z+2|+|z-2|=4 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=4 \Leftrightarrow MF_1+MF_2=4.$

Mà $F_1F_2=4$, nên $MF_1+MF_2=F_1F_2$.

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn của z chính là đoạn thẳng F_1F_2.

Câu 60: Xét các số phức z thoả mãn $\dfrac{z-1+i}{(z+\bar{z})i+1}$ là số thực. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $\dfrac{z}{2}$ là

parabol có toạ độ đỉnh

A. $I\left(\dfrac{1}{4};-\dfrac{3}{4}\right)$. **B.** $I\left(-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right)$. **C.** $I\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Giả sử $z=a+bi\ \ (a,b\in R)$.

Khi đó $\dfrac{z-1+i}{\left(z+\bar{z}\right)i+1}=\dfrac{a-1+(b+1)i}{1+2ai}=\dfrac{\left[a-1+(b+1)i\right](1-2ai)}{1+4a^2}$

$=\dfrac{a-1+2a(b+1)+\left[-2a(a-1)+b+1\right]i}{1+4a^2}$.

$\dfrac{z-1+i}{\left(z+\bar{z}\right)i+1}$ là số thực suy ra $-2a(a-1)+b+1=0\Leftrightarrow b=2a^2-2a-1\Leftrightarrow\dfrac{b}{2}=4.\left(\dfrac{a}{2}\right)^2-2.\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2}$.

Số phức $\dfrac{z}{2}$ có điểm biểu diễn $M\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{b}{2}\right)\Rightarrow$ quỹ tích M là parabol có phương trình

$y=4x^2-2x-\dfrac{1}{2}$

Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $\dfrac{z}{2}$ là parabol có toạ độ đỉnh $I\left(\dfrac{1}{4};-\dfrac{3}{4}\right)$.

Câu 61: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-i|=10$.

A. 15π. **B.** 12π. **C.** 20π. **D.** Đáp án khác.

Lời giải

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|z+2-i|+|z-4-i|=10\Leftrightarrow|x+2+(y-1)i|+|x-4+(y-1)i|=10.$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}=10$

Đặt $A(-2;1),B(4;1)\Rightarrow AB=\sqrt{(4+2)^2+0^2}=6.$

Khi đó phương trình trở thành: $MA+MB=10.$

Khi đó tập hợp những điểm M thỏa mãn phương trình là một elip với.

+ Độ dài trục lớn $2a=10\Rightarrow a=\dfrac{10}{2}=5.$

+ Tiêu cự $2c=AB=6\Rightarrow c=\dfrac{6}{2}=3.$

+ Độ dài trục bé $2b$ với $b^2=a^2-c^2=5^2-3^2=16\Rightarrow b=4.$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-i|=10$ là diện tích Elip trên: $S=\pi ab=\pi 4.5=20\pi$.

Câu 62: Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $3|z+i|=|2\bar{z}+-z+3i|$. Tìm tập hợp tất cả những điểm M như vậy.

A. Một đường thẳng. **B.** Một parabol. **C.** Một elip. **D.** Một đường tròn.

Lời giải

Chọn B

Gọi số phức $z=x+yi$ có điểm biểu diễn là $M(x,y)$ trên mặt phẳng tọa độ:

Theo đề bài ta có: $3|z+i|=|2\bar{z}-z+3i| \Leftrightarrow |3(x+yi)+3i|=|2(x-yi)-(x+yi)+3i| \Leftrightarrow$.

$|3x+(3y+3)i|=|x+(3-3y)| \Leftrightarrow \sqrt{9x^2+(3y+3)^2}=\sqrt{x^2+(3-3y)^2} \Leftrightarrow$.

$9x^2+(3y+3)^2=x^2+(3-3y)^2 \Leftrightarrow 8x^2+36y=0 \Rightarrow y=-\frac{2}{9}x^2$.

Vậy tập hợp các điểm $M(x,y)$ biểu diễn số phức z theo yêu cầu của đề bài là Một parabol $y=-\frac{2}{9}x^2$.

Câu 63: Cho số phức z thỏa mãn $|z+2|+|z-2|=8$. Trong mặt phẳng phức tập hợp những điểm M biểu diễn cho số phức z là?

A. $(C):(x+2)^2+(y-2)^2=64$. **B.** $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

C. $(E):\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1$. **D.** $(C):(x+2)^2+(y-2)^2=8$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x;y)$, $F_1(-2;0)$, $F_2(2;0)$.

Ta có $|z+2|+|z-2|=8 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+2)^2}+\sqrt{x^2+(y-2)^2}=8 \Leftrightarrow MF_1+MF_2=8$.

Do đó điểm $M(x;y)$ nằm trên elip (E) có $2a=8 \Leftrightarrow a=4$, ta có $F_1F_2=2c \Leftrightarrow 4=2c \Leftrightarrow c=2$.

Ta có $b^2=a^2-c^2=16-4=12$. Vậy tập hợp các điểm M là elip $(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

Câu 64: Tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $2|z-i|=|z-\bar{z}+2i|$ là hình gì?

A. Một đường tròn. **B.** Một đường Parabol.

C. Một đường Elip. **D.** Một đường thẳng.

Lời giải

Chọn B

☑ Đặt $z=x+yi \Rightarrow \bar{z}=x-yi$ điểm biểu diễn của z là $M(x;y)$. Ta có:

$2|z-i|=|z-\bar{z}+2i| \Leftrightarrow 2|x+yi-i|=|(x+yi)-(x-yi)+2i|$

$\Leftrightarrow 2|x+(y-1)i|=|2(y+1)i| \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2|y+1| \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x^2$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường Parabol.

Câu 65: Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z trong mặt phẳng phức, biết số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z+4|+|z-4|=10$..

A. Tập hợp các điểm cần tìm là đường elip có phương trình $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$.

B. Tập hợp các điểm cần tìm là những điểm $M(x;y)$ trong mặt phẳng Oxy thỏa mãn phương trình $\sqrt{(x+4)^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+y^2}=12$.

C. Tập hợp các điểm cần tìm là đường tròn có tâm $O(0;0)$ và có bán kính $R=4$.

D. Tập hợp các điểm cần tìm là đường elip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi$..

Gọi $A(4;0)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=4$..

Gọi $B(-4;0)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=-4$..

Khi đó: $|z+4|+|z-4|=10 \Leftrightarrow MA+MB=10$..

Hệ thức trên chứng tỏ tập hợp các điểm M là elip nhận A,B là các tiêu điểm.

Gọi phương trình của elip là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0,a^2=b^2+c^2)$.

Từ ta có: $2a=10 \Leftrightarrow a=5$..

$AB=2c \Leftrightarrow 8=2c \Leftrightarrow c=4 \Rightarrow b^2=a^2-c^2=9$.

Vậy quỹ tích các điểm M là elip: $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Câu 66: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z+4|+|z-4|=10$. Tập hợp các điểm M biểu diễn cho số phức z là đường có phương trình.

A. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$. **B.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **C.** $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$. **D.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$.

Lời giải

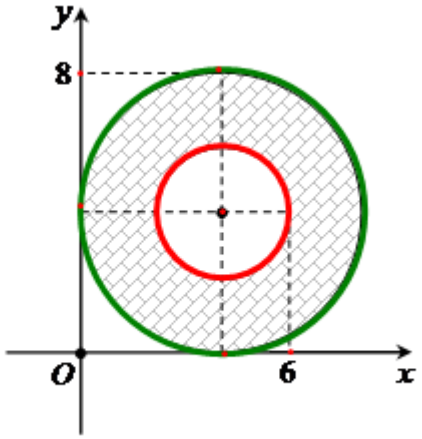
Chọn B

Gọi $M(x;y)$ biểu diễn số phức $z=x+yi\ (x,y\in R)$.

Từ giả thiết ta có $\sqrt{(x+4)^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+y^2}=10\Leftrightarrow MF_1+MF_2=10$ với $F_1(-4;0),\ F_2(4;0)$.

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn cho số phức z là đường Elip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Câu 67: Phần gạch trong hình vẽ dưới là hình biểu diễn của tập các số phức thỏa mãn điều kiện nào sau đây?



A. $6\le|z|\le 8$. **B.** $2\le|z+4+4i|\le 4$. **C.** $2\le|z-4-4i|\le 4$. **D.** $4\le|z-4-4i|\le 16$.

Lời giải

Dễ thấy điểm $I(4;4)$ là tâm của hai đường tròn.

Đường tròn nhỏ có phương trình là: $(x-4)^2+(y-4)^2=4$.

Đường tròn to có phương trình là: $(x-4)^2+(y-4)^2=16$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức thỏa mãn đề bài là $2\le|z-4-4i|\le 4$.

Câu 68: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z biết $|z-(2-3i)|\le 2$.

A. Một đường thẳng. **B.** Một hình tròn. **C.** Một đường tròn. **D.** Một đường Elip.

Lời giải

Cách 1:

Đặt $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

Theo bài ra: $|z-(2-3i)|\le 2\Leftrightarrow|x+yi-(2-3i)|\le 2\Leftrightarrow|x-2+(y+3)i|\le 2$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}\le 2\Leftrightarrow(x-2)^2+(y+3)^2\le 4$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy là hình tròn tâm $I(2;-3)$, bán kính $R=2$.

Câu 69: Trong mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z thỏa $|z+4-4i|\le 2$ là

A. Hình tròn tâm $I(4;-4)$, bán kính $R=4$. **B.** Hình tròn tâm $I(4;-4)$, bán kính $R=2$.

C. Hình tròn tâm $I(-4;4)$, bán kính $R=2$. **D.** Hình tròn tâm $I(-4;4)$, bán kính $R=4$.

Lời giải

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z=x+yi;\ (x;y\in\mathbb{R})$.

$|z+4-4i|\le 2$.

$\Rightarrow |x+yi+4-4i|\le 2$

$\Leftrightarrow |x+4+(y-4)i|\le 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+4)^2+(y-4)^2}\le 2$

$\Leftrightarrow (x+4)^2+(y-4)^2\le 4$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z thỏa $|z+4-4i|\le 2$ là hình tròn tâm $I(-4;4)$, bán kính $R=2$.

Câu 70: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $3\le|z-3i+1|\le 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành một hình phẳng. Tính diện tích của hình phẳng đó.

A. $S=25\pi$. **B.** $S=8\pi$. **C.** $S=4\pi$. **D.** $S=16\pi$.

Lời giải

Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn của số phức z;

$A(-1;3)$ là điểm biểu diễn số phức $-1+3i$.

Khi đó, $AM=|z-3i+1|=\sqrt{(a+1)^2+(b-3)^2}$

$\Rightarrow 3^2\le(a+1)^2+(b-3)^2\le 25$, tập hợp các điểm biểu diễn của z là hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn $(A;3)$ và $(A;5)$, kể cả các điểm nằm trên hai đường tròn này.

$S=25\pi-9\pi=16\pi(dvdt)$.

Câu 71: Trong mặt phẳng Oxy cho số phức z có điểm biểu diễn nằm trong cung phần tư thứ (I). Hỏi điểm biểu diễn số phức $w=\dfrac{1}{iz}$ nằm trong cung phần tư thứ mấy?

A. Cung (IV). **B.** Cung (II). **C.** Cung (III). **D.** Cung (I).

Lời giải

Vì số phức z có điểm biểu diễn nằm trong cung phần tư thứ (I) nên gọi

$z=a+bi,(a>0,b>0)$.

$$\Rightarrow w=\frac{1}{iz}=\frac{1}{i\left(a+bi\right)}=\frac{1}{-b+ai}=\frac{-b-ai}{a^2+b^2}=\frac{-b}{a^2+b^2}-\frac{a}{a^2+b^2}i$$

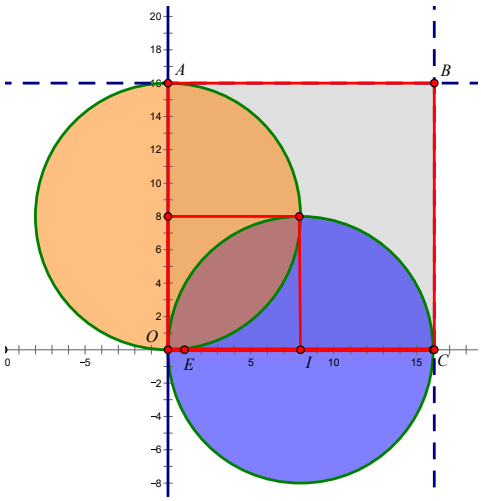
Do $a>0,b>0\Rightarrow \frac{-b}{a^2+b^2}<0,-\frac{a}{a^2+b^2}<0$.

Vậy điểm biểu diễn w nằm trong cung phần tư thứ $\left(III\right)$.

Câu 72: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy,gọi $\left(H\right)$ là phần mặt phẳng chứa các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\frac{z}{16}$ và $\frac{16}{\overline{z}}$ có phần thực và phần ảo đều thuộc đoạn $\left[0;1\right]$.Tính diện tích S của $\left(H\right)$

A. $S=32\left(6-\pi\right)$. **B.** $S=16\left(4-\pi\right)$. **C.** $S=256$.. **D.** $S=64\pi$..

Lời giải.



Gọi $z=x+yi,\ x,y\in R$ khi đó điểm biểu diễn của z là $M\left(x;y\right)$.

$\frac{z}{16}=\frac{x+yi}{16}=\frac{x}{16}+\frac{y}{16}i$ theo giả thiết $\begin{cases}0\le\frac{x}{16}\le1\\0\le\frac{y}{16}\le1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le16\\0\le y\le16\end{cases}$

$\frac{16}{\overline{z}}=\frac{16}{x-yi}=\frac{16\left(x+yi\right)}{x^2+y^2}=\frac{16x}{x^2+y^2}+\frac{16y}{x^2+y^2}i$

Theo giả thiết $\begin{cases}0\le\frac{16x}{x^2+y^2}\le1\\0\le\frac{16y}{x^2+y^2}\le1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\le16x\le x^2+y^2\\0\le16y\le x^2+y^2\end{cases}$ S_3

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge0,y\ge0\\x^2+y^2-16x\ge0\\x^2+y^2-16y\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge0,y\le0\\\left(x-8\right)^2+y^2\ge64\\x^2+\left(y-8\right)^2\ge64\end{cases}$

Gọi S_1 là diện tích hình vuông OABC có cạnh bằng 16, $S_1=16^2=256$.

S_2 là diện tích hình tròn có bán kính bằng 8.

S_3 là diện tích phần giao của hai nửa đường tròn như hình vẽ.

$S = S_1 - S_2 + S_3 = 256 - 64\pi + 2\left(\frac{1}{4}\pi 8^2 - \frac{1}{2}8^2\right)$

Vậy $S = 256 - 64\pi + 32\pi - 64 = 32(6 - \pi)$.

Câu 73: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $3 \le |z - 3i + 1| \le 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành một hình phẳng. Tính diện tích S của hình phẳng đó.

A. $S = 4\pi$. **B.** $S = 25\pi$. **C.** $S = 8\pi$. **D.** $S = 16\pi$.

Lời giải

Gọi $z = a + bi\ (a; b \in \mathbb{R})$.

Ta có $3 \le |z - 3i + 1| \le 5 \Leftrightarrow 3 \le |a + bi - 3i + 1| \le 5 \Leftrightarrow 9 \le (a-3)^2 + (b+1)^2 \le 25$.

Do đó tập hợp các điểm biểu diễn của z là hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn có tâm $I(3; -1)$ bán kính lần lượt là 3 và 5.

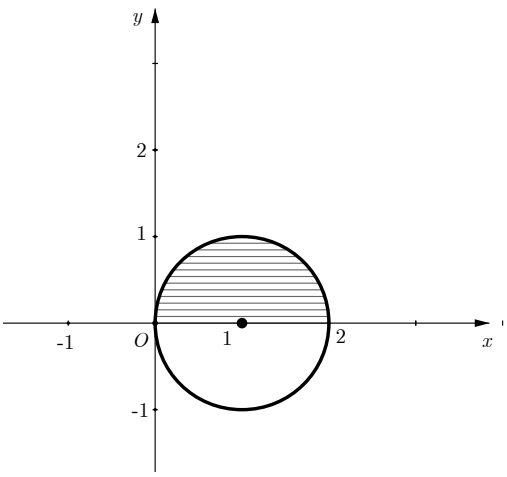
Vì vậy $S = \pi\left(5^2 - 3^2\right) = 16\pi$.

Câu 74: Biết số phức z thỏa mãn $|z - 1| \le 1$ và $z - \bar{z}$ có phần ảo không âm. Phần mặt phẳng biểu diễn số phức z có diện tích là:

A. 2π. **B.** π^2. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** π.

Lời giải

Chọn C



Đặt $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x + yi$ khi đó ta có:

$|z - 1| \le 1 \Leftrightarrow |(x + yi) - 1| \le 1$.

$\Leftrightarrow \left|(x-1)+yi\right| \le 1 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 \le 1 \ (1)$.

$z-\overline{z}=(x+yi)-(x-yi)=2yi$ có phần ảo không âm suy ra $y \ge 0 \ (2)$.

Từ và ta suy ra phần mặt phẳng biểu diễn số phức z là nửa hình tròn tâm $I(1;0)$ bán kính $r=1$, diện tích của nó bằng $\frac{1}{2}\cdot r^2\pi=\frac{\pi}{2}$.

Câu 75: Gọi H là hình biểu diễn tập hợp các số phức z trong mặt phẳng tọa độ $0xy$ sao cho $\left|2z-\overline{z}\right| \le 3$, và số phức z có phần ảo không âm. Tính diện tích hình H.

A. $\frac{3\pi}{2}$. **B.** $\frac{3\pi}{4}$. **C.** 6π. **D.** 3π.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z=x+yi, (x,y \in \mathbb{R})$.

Ta có $\left|2(x+yi)-(x-yi)\right| \le 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9y^2} \le 3 \Leftrightarrow x^2+9y^2 \le 9 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1} \le 1$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z là miền trong của Elip $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1} \le 1$.

Ta có $a=3, b=1$, nên diện tích hình H cần tìm bằng $\frac{1}{4}$ diện tích Elip.

Vậy $S=\frac{1}{4}.\pi.a.b=\frac{3\pi}{4}$.

Câu 76: Tập hợp các số phức $w=(1+i)z+1$ với z là số phức thỏa mãn $\left|z-1\right| \le 1$ là hình tròn. Tính diện tích hình tròn đó.

A. 2π. **B.** π. **C.** 3π. **D.** 4π.

Lời giải

Chọn A

Gọi $w=x+yi; x; y \in \mathbb{R}$.

Ta có $w=(1+i)z+1 \Leftrightarrow z=\frac{w-1}{1+i}$.

Do đó $\left|z-1\right| \le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{w-1}{1+i}-1\right| \le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{w-2-i}{1+i}\right| \le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{(x-2)+(y-1)i}{1+i}\right| \le 1$.

$\Leftrightarrow \left|\frac{(x-2)+(y-1)i}{1+i}\right| \le 1 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2 \le 2$.

Vậy diện tích hình tròn đó là $S=2\pi$.

Câu 77: Gọi M là điểm biểu diễn số phức $\varpi = \dfrac{z+2\overline{z}-3i}{z^2+2}$, trong đó z là số phức thỏa mãn $(2+i)(z+i)=3-i+z$. Gọi N là điểm trong mặt phẳng sao cho $\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{ON}\right)=2\varphi$, trong đó $\varphi=\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM}\right)$ là góc lượng giác tạo thành khi quay tia Ox tới vị trí tia OM. Điểm N nằm trong góc phần tư nào?

A. Góc phần tư thứ. **B.** Góc phần tư thứ.

C. Góc phần tư thứ. **D.** Góc phần tư thứ.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(2+i)(z+i)=3-i+z \Rightarrow z=1-i \Rightarrow w=\dfrac{5}{4}+\dfrac{1}{4}i \Rightarrow M\left(\dfrac{5}{4};\dfrac{1}{4}\right) \Rightarrow \tan\varphi=\dfrac{1}{5}.$

Lúc đó: $\sin 2\varphi=\dfrac{2\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi}=\dfrac{5}{13}>0;\ \cos 2\varphi=\dfrac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi}=\dfrac{12}{13}>0.$

Câu 78: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-3+4i|\le 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=2z+1-i$ là hình tròn có diện tích

A. $S=9\pi$. **B.** $S=12\pi$. **C.** $S=16\pi$. **D.** $S=25\pi$.

Lời giải

Chọn C

$w=2z+1-i \Rightarrow z=\dfrac{w-1+i}{2}$

$|z-3+4i|\le 2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{w-1+i}{2}-3+4i\right|\le 2 \Leftrightarrow |w-1+i-6+8i|\le 4 \Leftrightarrow |w-7+9i|\le 4\ (1)$

Giả sử $w=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$, khi đó $(1)\Leftrightarrow (x-7)^2+(y+9)^2\le 16$

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn tâm $I(7;-9)$, bán kính $r=4$.

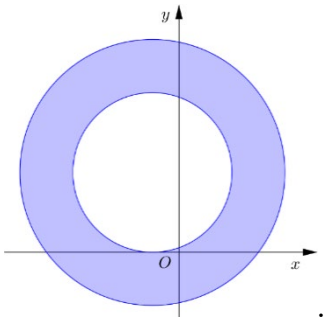
Vậy diện tích cần tìm là $S=\pi.4^2=16\pi$.

Câu 79: Biết số phức z thỏa điều kiện $3\le|z-3i+1|\le 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành 1 hình phẳng. Diện tích của hình phẳng đó bằng:

A. 9π. **B.** 16π. **C.** 25. **D.** 4π.

Lời giải

Chọn B



Gọi $z=x+yi$.

$\Rightarrow 3\le|z-3i+1|\le 5\Leftrightarrow 9\le(x+1)^2+(y-3)^2\le 25$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức là hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn bán kính $R=5$ và $r=3$. Diện tích $S=\pi\left(R^2-r^2\right)=16\pi$.

Câu 80: Cho số phức z thỏa mãn $|z+2|+|z-2|=4$. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ là

A. Một đường Parabol. **B.** Một đường Elip. **C.** Một đoạn thẳng. **D.** Một đường tròn.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có $|z+2|+|z-2|=4\Leftrightarrow|(x+2)+yi|+|(x-2)+yi|=4$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=4$

Xét $F_1(-2;0),F_2(2;0)\Rightarrow F_1F_2=4$.

$MF_1+MF_2=\sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}$.

Suy ra $MF_1+MF_2=F_1F_2\Rightarrow M$ thuộc đoạn thẳng F_1F_2

Vậy tập hợp các điểm $M(x;y)$ biểu diễn cho số phức z là một đoạn thẳng F_1F_2.

Câu 81: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-3+4i|\le 2$. trong mặt phẳng Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=2z+1-i$ là hình tròn có diện tích

A. $S=25\pi$ **B.** $S=9\pi$ **C.** $S=12\pi$ **D.** $S=16\pi$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $w=2z+1-i\Leftrightarrow 2z=w-1+i$.

Ta có: $|z-3+4i|\le 2\Leftrightarrow|2z-6+8i|\le 4\Leftrightarrow|w-1+i-6+8i|\le 4\Leftrightarrow|w-7+9i|\le 4$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình tròn tâm $I(7;-9)$, bán kính $R=4$.

Do đó diện tích hình tròn tâm $I(7;-9)$, bán kính là $S=16\pi$.

Câu 82: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi (H) là tập hợp các điểm biểu diễn hình học của số phức z thỏa mãn $\begin{cases} |z+\overline{z}| \ge 12 \\ |z-4-3i| \le 2\sqrt{2} \end{cases}$. Diện tích của hình phẳng (H) là:

A. $4\pi - 4$. **B.** $8\pi - 8$. **C.** $2\pi - 4$. **D.** $8\pi - 4$.

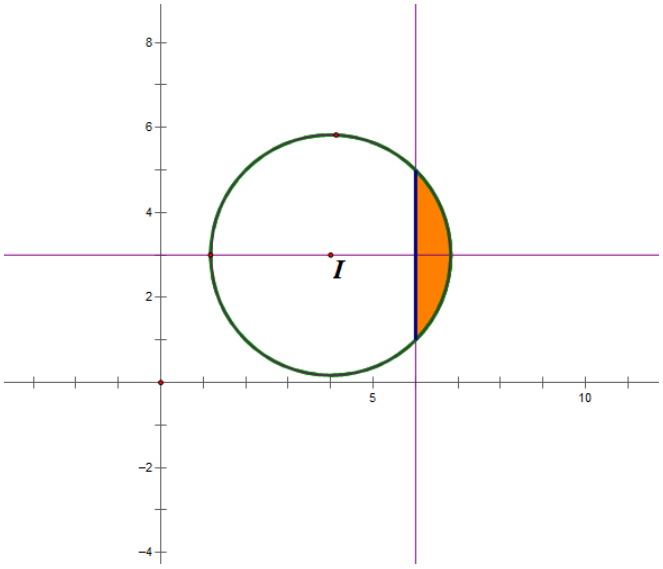
Lời giải

Chọn C

Gọi $z = x + yi$; $(x, y \in \mathbb{R})$; $\Rightarrow \overline{z} = x - yi$.

Ta có $\begin{cases} |z+\overline{z}| \ge 12 \\ |z-4-3i| \le 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|x| \ge 12 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \ge 6 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 \le 8 \end{cases} (H)$.

(H) là phần tô đậm trong hình vẽ.



Giải hệ : $\begin{cases} y = 3 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 4 \pm 2\sqrt{2} \end{cases}$.

Suy ra đồ thị hàm số $y = 3$ cắt đường tròn (C) tại $E\left(4-2\sqrt{2};3\right)$ và $F\left(4+2\sqrt{2};3\right)$.

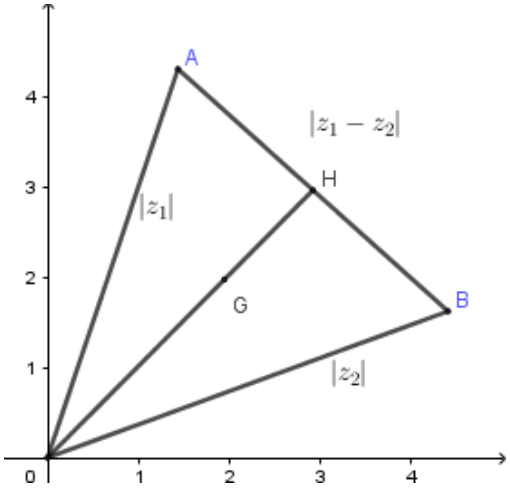
Vậy diện tích của hình phẳng (H) là: $2.\int_{6}^{4+2\sqrt{2}} \left(3+\sqrt{8-(x-4)^2}-3\right)dx = 2\pi - 4$.

Câu 83: Các điểm A, B tương ứng là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trên hệ trục tọa độ Oxy, G là trọng tâm tam giác OAB, biết $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 12$. Độ dài đoạn OG bằng

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $5\sqrt{3}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $OA = OB = AB = 12 \Rightarrow \Delta OAB$ đều.

$\Rightarrow OG = \frac{2}{3} AH = 4\sqrt{3}$ (do $AH = 6\sqrt{3}$ đường cao trong tam giác đều).

Kết luận: $OG = 4\sqrt{3}$.

Câu 84: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-i|=10$.

A. 15π. **B.** 12π. **C.** 20π. **D.** Đáp án khác.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z = x + yi (x; y \in \mathbb{R})$.

Ta có: $|z+2-i|+|z-4-i|=10 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2} + \sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2} = 10$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2-2y+1+4x+4} + \sqrt{x^2+y^2-2y+1+16-8x} = 10$.

Đặt $\begin{cases} c = x^2+y^2-2y+1 \\ d = 4x+4 \Rightarrow 16-8x = 24-2d \end{cases}$.

Thay vào ta có: $\sqrt{c+d} + \sqrt{c+24-2d} = 10 \Leftrightarrow 9d^2 - 400c + 56d + 5776 = 0$.

$\Rightarrow 9(4x+4)^2 - 400(x^2+y^2-2y+1) + 56(4x+4) + 5776 = 0 \Leftrightarrow 256(x-1)^2 + 400(y-1)^2 = 6400$.

Đặt $\begin{cases} X = x-1 \\ Y = y-1 \end{cases}$ ta thu được tập hợp số phức z là một Elip có phương trình: $\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{16} = 1$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức chính là diện tích của Elip trên. Áp dụng công thức tính diện tích Elip với $a = 5, b = 4$ ta được: $S = \pi.a.b = 20\pi$.

Câu 85: Cho hai điểm *A, B* là hai điểm biểu diễn hình học số phức theo thứ tự z_1, z_2 khác 0 và thỏa mãn đẳng thức $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$. Hỏi ba điểm *O, A, B* tạo thành tam giác gì? Chọn phương án đúng và đầy đủ nhất.

A. Vuông cân tại O. **B.** Vuông tại O. **C.** Đều. **D.** Cân tại O.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z_1^2+z_2^2=z_1z_2$

$\Leftrightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2-\left(\frac{z_1}{z_2}\right)+1=0$.

$\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i \Leftrightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=1 \Leftrightarrow |z_1|=|z_2| \Rightarrow OA=OB$.

$\Leftrightarrow (z_1-z_2)^2=-z_1z_2$.

Lấy modul 2 vế: $|z_1-z_2|^2=|-z_1z_2|=|z_1|^2$.

$\Rightarrow AB^2=OA^2 \Rightarrow OA=OB=AB$.

Vậy tam giác OAB là tam giác đều.

Câu 86: Cho các số phức $z_1=3-2i, z_2=1+4i, z_3=-1+i$ có điểm biểu diễn hình học trong mặt phẳng Oxy lần lượt là các điểm A,B,C. Tính diện tích tam giác ABC.

A. $2\sqrt{17}$. **B.** 12. **C.** $4\sqrt{13}$. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

$z_1=3-2i, z_2=1+4i, z_3=-1+i$ có điểm biểu diễn hình học trong mặt phẳng Oxy lần lượt là các điểm $A,B,C \Rightarrow A(3;-2), B(1;4), C(-1;1)$.

$\overrightarrow{AB}=(x_1;y_1), \overrightarrow{AC}=(x_2;y_2) \Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$.

$\overrightarrow{AB}=(-2;6), \overrightarrow{AC}=(-4;3)$

Diện tích tam giác ABC là: $S=\frac{1}{2}|(-2).3-(-4).6|=9$.

Câu 87: Gọi M,N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1,z_2 trong mặt phẳng tọa độ, I là trung điểm MN, O là gốc tọa độ,. Mệnh đề nào sau đây luôn **đúng**?

A. $|z_1-z_2|=2(OM+ON)$. **B.** $|z_1+z_2|=OI$.

C. $|z_1-z_2|=OM+ON$. **D.** $|z_1+z_2|=2OI$.

Lời giải

Chọn D

Vì M,N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1,z_2 trong mặt phẳng tọa độ và 3 điểm O,M,N không thẳng hàng.

Nên ta có $|z_1 - z_2| = |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}| = |\overrightarrow{NM}| = NM$ loại đáp án $|z_1 - z_2| = 2(OM + ON)$ và $|z_1 - z_2| = OM + ON$

Mặt khác $|z_1 + z_2| = |\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}| = |2\overrightarrow{OI}| = 2|\overrightarrow{OI}| = 2OI$ loại đáp án $|z_1 + z_2| = OI$.

Câu 88: Cho số phức $z = m - 2 + (m^2 - 1)i$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi (C) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành bằng:

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** 1. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Theo giả thiết, $z = m - 2 + (m^2 - 1)i$ nên: $\begin{cases} x = m - 2 \\ y = m^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x + 2 \\ y = (x+2)^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow y = x^2 + 4x + 3$.

$\Rightarrow (C): y = x^2 + 4x + 3$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox: $x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

$\Rightarrow$ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành:

$$S = \int_{-3}^{-1} |x^2 + 4x + 3| \, dx = \left| \int_{-3}^{-1} (x^2 + 4x + 3) \, dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x \right) \Big|_{-3}^{-1} \right| = \left| -\frac{4}{3} - 0 \right| = \frac{4}{3}.$$

Vậy $S = \frac{4}{3}$.

Câu 89: Gọi A, B, C, D lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $1 + 2i$; $1 + \sqrt{3} + i$; $1 + \sqrt{3} - i$; $1 - 2i$ trên mặt phẳng tọa độ. Biết tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn, tâm của đường tròn đó biểu diện số phức có phần thực là

A. $\sqrt{3}$ **B.** 2 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** 1

Lời giải

Chọn D

Ta có $A(1;2); B(1+\sqrt{3};1); C(1+\sqrt{3};-1); D(1;-2)$

Có $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}; AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD$ nên tứ giác $ABCD$ là nửa lục giác đều

Vậy tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác là trung điểm của AD và $I(1;0)$ nên biểu diễn số phức là $z = 1 + 0i \Leftrightarrow z = 1$, có phần thực là 1

Câu 90: Xét hai điểm A,B lần lượt là các điểm trong mặt phẳng toạ độ Oxy biểu diễn các số phức z và $(1+3i)z$. Biết rằng diện tích của tam giác OAB bằng 6, môđun của số phức z bằng

A. 2. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $OA=|z|$, $OB=|(1+3i)z|=\sqrt{10}|z|$, $AB=|z(1+3i-1)|=|3iz|=3|z|$.

Ta thấy $OB^2=AB^2+OA^2=10|z|^2\Rightarrow \Delta OAB$ vuông tại A.

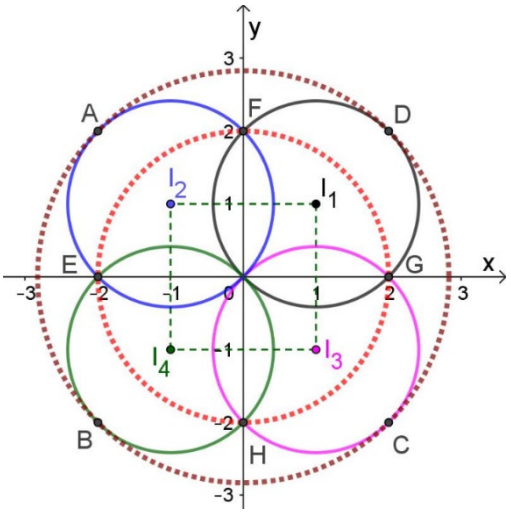
Do đó $S_{OAB}=6\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.OA=\frac{1}{2}3|z|.|z|=6\Rightarrow |z|=2.$

Câu 91: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để có đúng 4 số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=|z^2|$ và $|z|=m$?

A. $\{2;2\sqrt{2}\}$. **B.** $[2;2\sqrt{2}]$. **C.** $\{2\}$. **D.** $(2;2\sqrt{2})$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $z=x+yi(x,y\in R)$

$$\begin{cases}|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=|z^2|\\ |z|=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{4x^2}+\sqrt{4y^2}=x^2+y^2\\ \sqrt{x^2+y^2}=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2|x|-2|y|=0(1)\\ x^2+y^2-m^2=0(2)\end{cases}$$

Điều kiện (1) cho ta bốn đường tròn:

+ (C_1) có tâm $I_1(1;1)$ và bán kính $R_1=\sqrt{2}$.

+ (C_2) có tâm $I_2(-1;1)$ và bán kính $R_2=\sqrt{2}$.

+ (C_3) có tâm $I_3(1;-1)$ và bán kính $R_3=\sqrt{2}$.

+ (C_4) có tâm $I_4(-1;-1)$ và bán kính $R_4=\sqrt{2}$.

Điều kiện (2) là đường tròn (C) tâm O và bán kính $R=|m|$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy điều kiện để có đúng 4 số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường tròn (C) tiếp xúc với 4 đường tròn (C_1), (C_2), (C_3), (C_4) tại D, A, B, C **hoặc** đi qua các giao điểm E, F, G, H của bốn đường tròn đó.

Suy ra $m = 2\sqrt{2}$ hoặc $m = 2$.

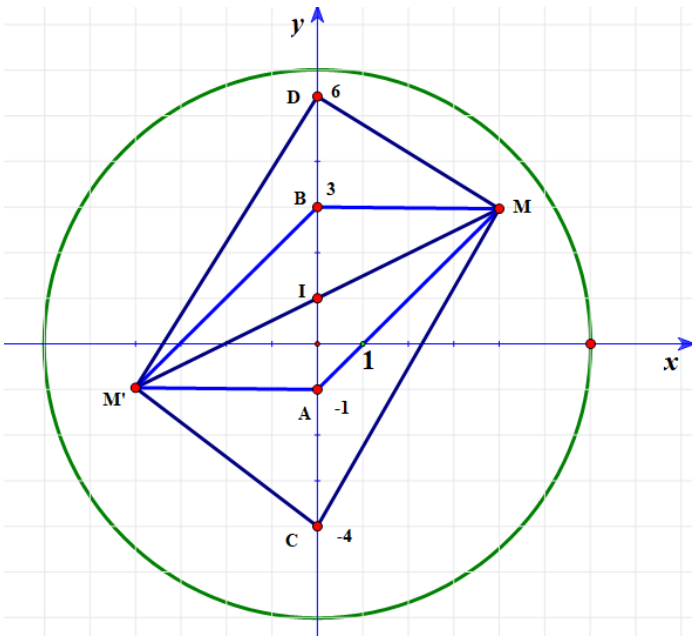
Cách 2: dùng điều kiện trên rồi thử các đáp án.

Câu 92: Có bao nhiêu số phức $z = a + bi$, $(a, b \in \mathbb{Z})$ thỏa mãn $|z+i| + |z-3i| = |z+4i| + |z-6i|$ và $|z| \le 10$.

A. 12. **B.** 2. **C.** 10. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A



Gọi $M(a;b)$, $A(0;-1)$, $B(0;3)$, $C(0;-4)$, $D(0;6)$ lần lượt là các điểm biểu diễn cho số phức $z = a + bi$, $-i$, $3i$, $-4i$, $6i$.

Trường hợp 1: Xét trường hợp M không thuộc Oy. Gọi I là trung điểm AB khi đó I cũng là trung điểm CD. Do (M, A, B), (M, C, D) không thẳng hàng. Gọi M' là điểm đối xứng của M qua I.

Theo tính chất hình bình hành ta có $MA + MB = MB + M'B$; $MC + MD = MD + M'D$.

Dễ thấy $MD + M'D > MB + M'B$ vậy trường hợp này không có điểm M thỏa mãn.

Trường hợp 2: Xét trường hợp M thuộc $Oy \Rightarrow M(0;m)$, $(|m| \le 10)$.

$$MA + MB = MC + MD \Leftrightarrow |m+1| + |m-3| = |m+4| + |m-6| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 6 \\ m \le -4 \end{array}\right.$$

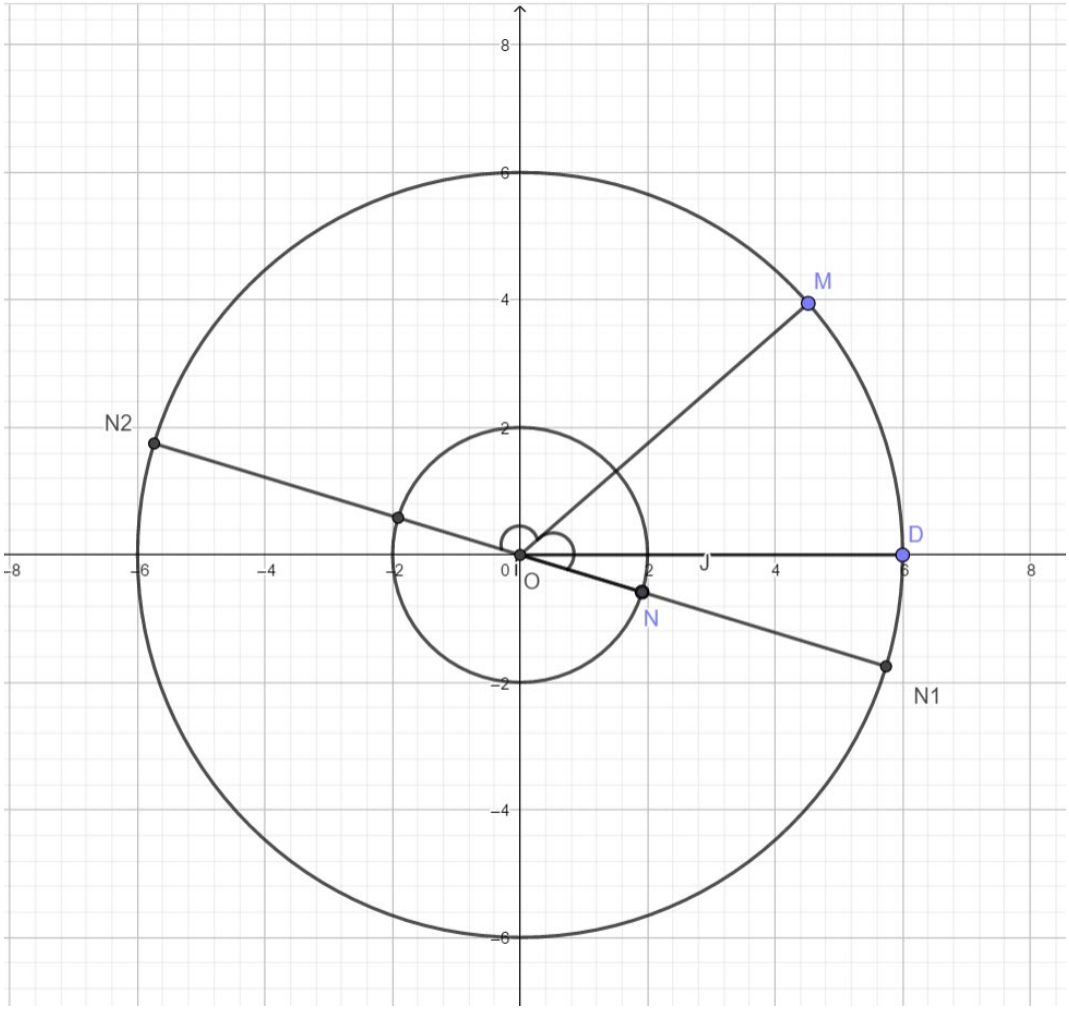
Kết hợp điều kiện $\Rightarrow m \in [-10;-4] \cup [6;10]$. Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 12 giá trị.

Câu 93: Cho hai số phức $z_1; z_2$ thoả mãn: $|z_1| = 6, |z_2| = 2$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1, iz_2. Biết $\widehat{MON} = 60^0$, khi đó giá trị của biểu thức $|z_1^2 + 9z_2^2|$ bằng

A. 18. **B.** $36\sqrt{3}$. **C.** $24\sqrt{3}$. **D.** $36\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có:

$|z_1|=6$ nên điểm biểu diễn của số phức z_1 là điểm M nằm trên đường tròn (C) tâm O, bán kính bằng 6.

$|3iz_2|=|3||iz_2|=6$ nên điểm biểu diễn của số phức $3iz_2$ là điểm N_1 (N_1 là giao điểm của tia ON với đường tròn (C), N là điểm biểu diễn của số phức iz_2), điểm biểu diễn của số phức $-3iz_2$ là điểm N_2 đối xứng với điểm N_1 qua O.

Theo giả thiết: $\widehat{MON}=60^0 \Rightarrow \widehat{MON_1}=60^0; \widehat{MON_2}=120^0$

Ta có:

$$\left|z_1^2+9z_2^2\right|=\left|z_1^2-(3iz_2)^2\right|=|z_1-3iz_2||z_1+3iz_2|=|z_1-3iz_2||z_1-(-3iz_2)|$$
$$=MN_1.MN_2=6.6\sqrt{3}=36\sqrt{3}$$

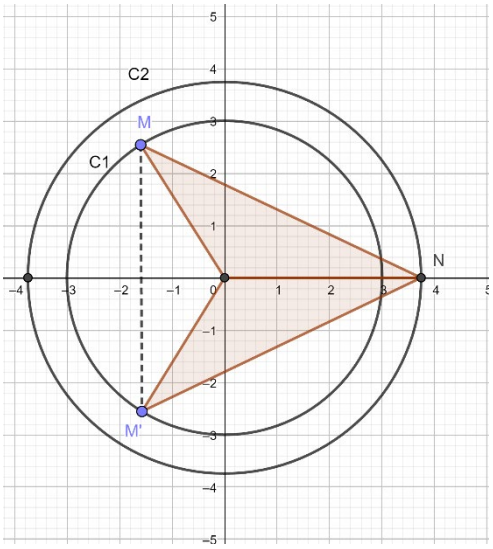
Câu 94: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=3, |z_2|=4, |z_1-z_2|=\sqrt{37}$. Xét số phức $z=\dfrac{z_1}{z_2}=a+bi$. Tìm $|b|$

A. $|b|=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $|b|=\dfrac{\sqrt{39}}{8}$. **C.** $|b|=\dfrac{3}{8}$. **D.** $|b|=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1



Giả sử $z_1 = x_1 + y_1 i \leftrightarrow M\left(x_1; y_1\right)$ và $z_2 = x_2 + y_2 i \leftrightarrow N\left(x_2; y_2\right)$

Theo giả thiết ta có: $OM = 3, ON = 4, MN = \sqrt{37}$

Suy ra: tập hợp các điểm biểu diễn z_1 là đường tròn $\left(C_1\right)$ có tâm $O, R_1 = 3$

tập hợp các điểm biểu diễn z_2 là đường tròn $\left(C_2\right)$ có tâm $O, R_2 = 4$

Xét tam giác OMN có $\cos\left(\widehat{MON}\right) = \dfrac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2.OM.ON} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MON} = 120^0$

Suy ra M là ảnh của N qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự $V_{\left(O,\frac{3}{4}\right)}$ và phép quay $Q_{\left(O,120^0\right)}$ hoặc phép quay $Q_{\left(O,-120^0\right)}$

Như vậy ứng với mỗi điểm N ta có 2 điểm M đối xứng nhau qua ON thỏa yêu cầu bài toán

Không mất tính tổng quát của bài toán ta chọn $N\left(4;0\right)$ khi đó M, M' đối xứng qua Ox

Vì $\begin{cases} \widehat{MON} = 120^0 \\ \widehat{NOy} = 90^0 \end{cases}$ suy ra $\widehat{yOM} = 30^0 \Rightarrow \begin{cases} x_M = -OM.\sin 30^0 = -\dfrac{3}{2} \\ y_M = OM.\cos 30^0 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow M\left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ và $M'\left(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Khi đó $z_1 = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2} i, z_2 = 4$ suy ra $z = \dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{3}{8} + \dfrac{3\sqrt{3}}{8} i$

Và $z_1 = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2} i, z_2 = 4$ suy ra $z = \dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{3}{8} - \dfrac{3\sqrt{3}}{8} i$

Vậy $|b| = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

Cách 2

$$|z_1| = 3 \ (1)$$

Ta có: $|z_2| = 4 \ (2)$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{37} \ (3)$$

Mặt khác $z = \dfrac{z_1}{z_2} = a + bi \Rightarrow z_1 = z.z_2$ (4)

Thay vào và ta được: $\begin{cases} |z|.|z_2| = 3 \\ |z-1|.|z_2| = \sqrt{37} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \dfrac{3}{4} \\ |z-1| = \dfrac{\sqrt{37}}{4} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \dfrac{9}{16} \\ (a-1)^2 + b^2 = \dfrac{37}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + 1 = \dfrac{28}{16} \\ b^2 = \dfrac{9}{16} - a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{3}{8} \\ b^2 = \dfrac{27}{64} \end{cases} \Rightarrow |b| = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$$

CHƯƠNG IV

SỐ PHỨC

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI - BẬC CAO SỐ PHỨC

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Xét phương trình bậc hai $az^2+bz+c=0,\ (*)$ với $a\neq 0$ có: $\Delta=b^2-4ac$.

Nếu $\Delta=0$ thì $(*)$ có nghiệm kép: $z_1=z_2=-\dfrac{b}{2a}$.

Nếu $\Delta\neq 0$ và gọi δ là căn bậc hai Δ thì $(*)$ có hai nghiệm phân biệt:

$$z_1=\frac{-b+\delta}{2a}\ \vee\ z_2=\frac{-b-\delta}{2a}.$$

Lưu ý

Hệ thức Viét vẫn đúng trong trường phức $\mathbb{C}$: $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}$ và $z_1z_2=\dfrac{c}{a}$.

Căn bậc hai của số phức $z=x+yi$ là một số phức w và tìm như sau:

+ Đặt $w=\sqrt{z}=\sqrt{x+yi}=a+bi$ với $x,y,a,b\in\mathbb{R}$.

+ $w^2=x+yi=(a+bi)^2\Leftrightarrow(a^2-b^2)+2abi=x+yi\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=x\\2ab=y\end{cases}$.

+ Giải hệ này với $a,b\in\mathbb{R}$ sẽ tìm được a và b $\Rightarrow w=\sqrt{z}=a+bi$.

Câu 1: Gọi z_1; z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+2z+10=0$. Tính giá trị biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$.

A. $10\sqrt{3}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{10}$. **D.** 20.

Câu 2: Nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2-2z+5=0$ là:

A. $1+2i$. **B.** $-1+2i$. **C.** $-1-2i$. **D.** $1-2i$.

Câu 3: Gọi z_1; z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+2z+10=0$. Tính giá trị biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$.

A. $10\sqrt{3}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{10}$. **D.** 20.

Câu 4: Ký hiệu z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2+2z+10=0$. Giá trị của $|z_1|.|z_2|$ bằng

A. 5. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** 10. **D.** 20.

Câu 5: Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2=-3$. Giá trị của $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 6: Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2-8z+25=0$. Giá trị $|z_1-z_2|$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 6.

Câu 7: Biết z là số phức có phần ảo âm và là nghiệm của phương trình $z^2-6z+10=0$. Tính tổng phần thực và phần ảo của số phức $\mathrm{w}=\frac{z}{z}$.

A. $\frac{7}{5}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Câu 8: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$. Tính $w=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+i\left(z_1^{\,2}z_2+z_2^{\,2}z_1\right)$.

A. $w=-\frac{4}{5}+20i$. **B.** $w=\frac{4}{5}+20i$. **C.** $w=4+20i$. **D.** $w=20+\frac{4}{5}i$.

Câu 9: Với các số thực a,b biết phương trình $z^2+8az+64b=0$ có nghiệm phức $z_0=8+16i$. Tính môđun của số phức $\mathrm{w}=a+bi$

A. $|\mathrm{w}|=\sqrt{19}$ **B.** $|\mathrm{w}|=\sqrt{3}$ **C.** $|\mathrm{w}|=\sqrt{7}$ **D.** $|\mathrm{w}|=\sqrt{29}$

Câu 10: Phương trình $z^2+a.z+b=0$, với a,b là các số thực nhận số phức $1+i$ là một nghiệm.

Tính $a-b$?.

A. -2. **B.** -4. **C.** 4. **D.** 0.

Câu 11: Gọi z_1,z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2+4z+7=0$. Số phức $z_1.\overline{z_2}+\overline{z_2}.z_1$ bằng

A. 2 **B.** 10 **C.** $2i$ **D.** $10i$

Câu 12: Gọi $z_1;z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2-2z+27=0$. Giá trị của $z_1|z_2|+z_{\,2}|z_1|$ bằng:

A. 2 **B.** 6 **C.** $3\sqrt{6}$ **D.** $\sqrt{6}$

Câu 13: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+4z+29=0$.Tính giá trị của biểu thức $|z_1|^4+|z_2|^4$.

A. 841. **B.** 1682. **C.** 1282. **D.** 58.

Câu 14: Kí hiệu z_1; z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2-z+1=0$. Tính $P=|z_1|+|z_2|$.

A. $P=\frac{\sqrt{14}}{3}$. **B.** $P=\frac{2}{3}$. **C.** $P=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $P=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 15: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2-z+2=0$. Tính giá trị biểu thức $T=|z_1|^2+|z_2|^2$.

A. $T=\frac{2}{3}$. **B.** $T=\frac{8}{3}$. **C.** $T=\frac{4}{3}$. **D.** $T=-\frac{11}{9}$.

Câu 16: Tính modun của số phức $w=b+ci$, $b,c\in\mathbb{R}$ biết số phức $\dfrac{i^8-1-2i}{1-i^7}$ là nghiệm của phương trình $z^2+bz+c=0$.

A. 2. **B.** 3. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 17: Gọi A, B là hai điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn cho các số phức z_1, z_2 khác 0 thỏa mãn đẳng thức $z_1^2+z_2^2-z_1z_2=0,$ khi đó tam giác OAB (O là gốc tọa độ):

A. Là tam giác đều. **B.** Là tam giác vuông.

C. Là tam giác cân, không đều. **D.** Là tam giác tù.

Câu 18: Cho phương trình $az^2+bz+c=0$, với $a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0$ có các nghiệm z_1,z_2 đều không là số thực. Tính $P=|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2$ theo $a,b,c.$

A. $P=\dfrac{b^2-2ac}{a^2}$. **B.** $P=\dfrac{2c}{a}$. **C.** $P=\dfrac{4c}{a}$. **D.** $P=\dfrac{2b^2-4ac}{a^2}$.

Câu 19: Gọi S là tổng các số thực m để phương trình $z^2-2z+1-m=0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z|=2.$ Tính S.

A. $S=6.$ **B.** $S=10.$ **C.** $S=-3.$ **D.** $S=7.$

Câu 20: Cho số phức $z=a+bi$ $(a,\ b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+1+3i-|z|i=0$. Tính $S=2a+3b$.

A. $S=-6$. **B.** $S=6$. **C.** $S=-5$. **D.** $S=5$.

Câu 21: Gọi S là tổng các giá trị thực của m để phương trình $9z^2+6z+1-m=0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z|=1$. Tính S.

A. 20. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 8.

Câu 22: Gọi z là một nghiệm của phương trình $z^2-z+1=0$. Giá trị của biểu thức $M=z^{2019}+z^{2018}+\dfrac{1}{z^{2019}}+\dfrac{1}{z^{2018}}+5$ bằng

A. $5.$ **B.** $2.$ **C.** $7.$ **D.** $-1.$

Câu 23: Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$. Giá trị của biểu thức $(z_1-1)^{2019}+(z_2-1)^{2019}$ bằng?

A. 2^{1009}. **B.** 2^{1010}. **C.** 0. **D.** -2^{1010}.

Câu 24: Cho phương trình $z^2+bz+c=0$, có hai nghiệm z_1,z_2 thỏa mãn $z_2-z_1=4+2i$. Gọi A,B là các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $z^2-2bz+4c=0$. Tính độ dài đoạn AB.

A. $8\sqrt{5}.$ **B.** $2\sqrt{5}.$ **C.** $4\sqrt{5}.$ **D.** $\sqrt{5}.$

Câu 25: Cho số phức w và hai số thực a, b. Biết rằng $w+i$ và $2w-1$ là hai nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$. Tổng $S=a+b$ bằng

A. $\dfrac{5}{9}$. **B.** $-\dfrac{5}{9}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Câu 26: Số phức $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$ là nghiệm của phương trình $\dfrac{\left(|z|-1\right)\left(1+iz\right)}{z-\dfrac{1}{z}}=i$. Tổng $T=a^2+b^2$ bằng

A. 4. **B.** $4-2\sqrt{3}$. **C.** $3+2\sqrt{2}$. **D.** 3.

Câu 27: Cho các số phức z, w khác 0 thỏa mãn $z+w\neq 0$ và $\dfrac{1}{z}+\dfrac{3}{w}=\dfrac{6}{z+w}$. Khi đó $\left|\dfrac{z}{w}\right|$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 28: Cho phương trình $x^2-4x+\dfrac{c}{d}=0$ có hai nghiệm phức. Gọi A, B là hai điểm biểu diễn của hai nghiệm đó trên mặt phẳng Oxy. Biết tam giác OAB đều, tính $P=c+2d$.

A. $P=18$. **B.** $P=-10$. **C.** $P=-14$. **D.** $P=22$.

Câu 29: Xét số phức z thỏa mãn $\left(1+2i\right)|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{z}-2+i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\dfrac{3}{2}<|z|<2$. **B.** $|z|>2$. **C.** $|z|<\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}$.

Câu 30: Có bao nhiêu giá trị dương của số thực a sao cho phương trình $z^2+\sqrt{3}z+a^2-2a=0$ có nghiệm phức z_0 với phần ảo khác 0 thỏa mãn $|z_0|=\sqrt{3}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

CHƯƠNG IV

SỐ PHỨC

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI - BẬC CAO SỐ PHỨC

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Xét phương trình bậc hai $az^2+bz+c=0,\ (*)$ với $a\neq 0$ có: $\Delta=b^2-4ac$.

□ Nếu $\Delta=0$ thì $(*)$ có nghiệm kép: $z_1=z_2=-\dfrac{b}{2a}$.

□ Nếu $\Delta\neq 0$ và gọi δ là căn bậc hai Δ thì $(*)$ có hai nghiệm phân biệt:

$z_1=\dfrac{-b+\delta}{2a}\ \vee\ z_2=\dfrac{-b-\delta}{2a}$.

Lưu ý

□ Hệ thức Viét vẫn đúng trong trường phức $\mathbb{C}$: $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}$ và $z_1z_2=\dfrac{c}{a}$.

□ Căn bậc hai của số phức $z=x+yi$ là một số phức w và tìm như sau:

+ Đặt $w=\sqrt{z}=\sqrt{x+yi}=a+bi$ với $x,y,a,b\in\mathbb{R}$.

+ $w^2=x+yi=(a+bi)^2\Leftrightarrow(a^2-b^2)+2abi=x+yi\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=x\\2ab=y\end{cases}$.

+ Giải hệ này với $a,b\in\mathbb{R}$ sẽ tìm được a và b $\Rightarrow w=\sqrt{z}=a+bi$.

Câu 1: Gọi z_1; z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+2z+10=0$. Tính giá trị biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$.

A. $10\sqrt{3}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{10}$. **D.** 20.

Lời giải

Chọn D

$z^2+2z+10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=-1+3i\\z_2=-1-3i\end{array}\right.$.

Do đó: $A=|z_1|^2+|z_2|^2=|-1+3i|^2+|-1-3i|^2=20$.

Suy ra $|z_1|=|z_2|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Vậy $P=\dfrac{4}{3}$.

Câu 2: Nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2-2z+5=0$ là:

A. $1+2i$. **B.** $-1+2i$. **C.** $-1-2i$. **D.** $1-2i$.

Lời giải

Chọn A

$z^2-2z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1+2i \\ z=1-2i \end{array}\right.$. Vậy nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình là $z=1+2i$

.

Câu 3: Gọi z_1; z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+2z+10=0$. Tính giá trị biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$

.

A. $10\sqrt{3}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{10}$. **D.** 20.

Lời giải

$z^2+2z+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=-1+3i \\ z_2=-1-3i \end{array}\right.$.

Do đó: $A=|z_1|^2+|z_2|^2=|-1+3i|^2+|-1-3i|^2=20$.

Câu 4: Ký hiệu z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2+2z+10=0$. Giá trị của $|z_1|.|z_2|$ bằng

A. 5. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 10. **D.** 20.

Lời giải

Phương trình $z^2+2z+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1+3i \\ z=-1-3i \end{array}\right.$. Vậy $z_1=-1+3i$, $z_2=-1-3i$.

Suy ra $|z_1|.|z_2|=\sqrt{10}.\sqrt{10}=10$.

Câu 5: Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2=-3$. Giá trị của $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có: $z^2=-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=i\sqrt{3} \\ z=-i\sqrt{3} \end{array}\right. \Rightarrow |z_1|+|z_2|=|i\sqrt{3}|+|-i\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$.

Câu 6: Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2-8z+25=0$. Giá trị $|z_1-z_2|$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Phương trình $z^2-8z+25=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=4-3i \\ z_2=4+3i \end{array}\right.$.

Suy ra: $|z_1-z_2|=|-6i|=6$.

Câu 7: Biết z là số phức có phần ảo âm và là nghiệm của phương trình $z^2-6z+10=0$. Tính tổng phần thực và phần ảo của số phức $w=\frac{z}{\bar{z}}$.

A. $\frac{7}{5}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Ta có: $z^2-6z+10=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=3-i \\ z=3+i \end{array}\right.$. Vì z là số phức có phần ảo âm nên $\Leftrightarrow z=3-i$

Suy ra $\mathrm{w}=\frac{z}{=}=\frac{3-i}{3+i}=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$

Tổng phần thực và phần ảo: $\frac{4}{5}+\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{1}{5}$.

Câu 8: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$. Tính $w=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+i\left(z_1{}^2z_2+z_2{}^2z_1\right)$.

A. $w=-\frac{4}{5}+20i$. **B.** $w=\frac{4}{5}+20i$. **C.** $w=4+20i$. **D.** $w=20+\frac{4}{5}i$.

Lời giải

Theo hệ thức Vi-et, ta có $\left\{\begin{array}{l} z_1+z_2=4 \\ z_1z_2=5 \end{array}\right.$.

Suy ra $w=\frac{z_2+z_1}{z_1z_2}+i\left(z_1+z_2\right)z_1z_2=\frac{4}{5}+20i$.

Câu 9: Với các số thực a,b biết phương trình $z^2+8az+64b=0$ có nghiệm phức $z_0=8+16i$. Tính môđun của số phức $\mathrm{w}=a+bi$

A. $|\mathrm{w}|=\sqrt{19}$ **B.** $|\mathrm{w}|=\sqrt{3}$ **C.** $|\mathrm{w}|=\sqrt{7}$ **D.** $|\mathrm{w}|=\sqrt{29}$

Lời giải

Chọn D

Theo Viet ta có $\left\{\begin{array}{l} z_1+z_2=-8a=16 \\ z_1.z_2=64b=64.5 \end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} a=-2 \\ b=5 \end{array}\right.$. Vậy $|\mathrm{w}|=\sqrt{29}$.

Câu 10: Phương trình $z^2+a.z+b=0$, với a,b là các số thực nhận số phức $1+i$ là một nghiệm.

Tính $a-b$?.

A. -2. **B.** -4. **C.** 4. **D.** 0.

Lời giải

Do số phức $1+i$ là một nghiệm của phương trình $z^2+a.z+b=0$.

Nên ta có: $\left(1+i\right)^2+a\left(1+i\right)+b=0\Leftrightarrow a+b+\left(a+2\right)i=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} a+b=0 \\ a+2=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} a=-2 \\ b=2 \end{array}\right.$.

Vậy: $a-b=-4$.

Câu 11: Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2+4z+7=0$. Số phức $z_1.\overline{z_2}+\overline{z_2}.z_1$ bằng

A. 2 **B.** 10 **C.** $2i$ **D.** $10i$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{bmatrix} z_1=-2+\sqrt{3}i \\ z_2=-2-\sqrt{3}i \end{bmatrix} \Rightarrow z_1.\overline{z_2}+\overline{z_2}.z_1=\left(-2+\sqrt{3}i\right)^2+\left(-2-\sqrt{3}i\right)^2=2$

Câu 12: Gọi $z_1; z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2-2z+27=0$. Giá trị của $z_1|z_2|+z_2|z_1|$ bằng:

A. 2 **B.** 6 **C.** $3\sqrt{6}$ **D.** $\sqrt{6}$

Lờigiải

Chọn A

$3z^2-2z+27=0$

$z_1=\dfrac{1+\sqrt{80}i}{3}; z_2=\dfrac{1-\sqrt{80}i}{3}$ vậy $z_1|z_2|+z_2|z_1|=2$

Câu 13: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+4z+29=0$.Tính giá trị của biểu thức $|z_1|^4+|z_2|^4$.

A. 841. **B.** 1682. **C.** 1282. **D.** 58.

Lời giải

Phương trình $z^2+4z+29=0 \Leftrightarrow (z+2)^2=-25 \Leftrightarrow (z+2)^2=(5i)^2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} z_1=-2-5i \\ z_2=-2+5i \end{bmatrix}$.

Suy ra $|z_1|=|z_2|=\sqrt{(-2)^2+5^2}=\sqrt{29}$.

Vậy $|z_1|^4+|z_2|^4=\left(\sqrt{29}\right)^4+\left(\sqrt{29}\right)^4=1682$.

Câu 14: Kí hiệu z_1; z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2-z+1=0$. Tính $P=|z_1|+|z_2|$.

A. $P=\dfrac{\sqrt{14}}{3}$. **B.** $P=\dfrac{2}{3}$. **C.** $P=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $P=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Cách 1:

Ta có $3z^2-z+1=0 \Leftrightarrow z^2-\dfrac{1}{3}z+\dfrac{1}{3}=0 \Leftrightarrow \left(z-\dfrac{1}{6}\right)^2=-\dfrac{11}{36}$

$$\Leftrightarrow \left(z-\frac{1}{6}\right)^2=\frac{11}{36}i^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{11}}{6}i \\ z=\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{11}}{6}i \end{array}\right.$$

Khi đó $P=\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Cách 2:

Theo tính chất phương trình bậc 2 với hệ số thực, ta có z_1; z_2 là hai số phức liên hợp nên $z_1.z_2=\left|z_1^2\right|=\left|z_2^2\right|$. Mà $z_1.z_2=\frac{1}{3}$ suy ra $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $P=\left|z_1\right|+\left|z_2\right|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 15: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2-z+2=0$. Tính giá trị biểu thức $T=\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2$.

A. $T=\frac{2}{3}$. **B.** $T=\frac{8}{3}$. **C.** $T=\frac{4}{3}$. **D.** $T=-\frac{11}{9}$.

Lời giải

Phương trình $3z^2-z+2=0$ có $\Delta=(-1)^2-4.3.2=-23 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=\frac{1-\sqrt{23}i}{6} \\ z_2=\frac{1+\sqrt{23}i}{6} \end{array}\right.$.

$$\left|z_2\right|^2=\left|z_1\right|^2=\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{23}}{6}\right)^2=\frac{2}{3} \Rightarrow T=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}.$$

Câu 16: Tính modun của số phức $w=b+ci$, $b,c\in\mathbb{R}$ biết số phức $\frac{i^8-1-2i}{1-i^7}$ là nghiệm của phương trình $z^2+bz+c=0$.

A. 2. **B.** 3. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

+) Đặt $z_o=\frac{i^8-1-2i}{1-i^7}$, ta có $\begin{cases} i^8=\left(i^2\right)^4=(-1)^4=1 \\ i^7=\left(i^2\right)^3.i=-i \end{cases}$

$$\Rightarrow z_o=\frac{1-1-2i}{1+i}=\frac{-2i}{1+i}=\frac{-2i(1-i)}{1-i^2}=-1-i.$$

+) z_o là nghiệm của đa thức $P(z)=z^2+bz+c \Rightarrow \overline{z}_o$ là nghiệm còn lại của $P(z)$.

+) Ta có: $z_o+\overline{z}_o=-\dfrac{b}{a}=-b=-2\Rightarrow b=2$.

$z_o.\overline{z}_o=\dfrac{c}{a}\Rightarrow(-1-i)(-1+i)=c\Rightarrow c=2$

$\Rightarrow w=2+2i\Rightarrow|w|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

Câu 17: Gọi A, B là hai điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn cho các số phức z_1, z_2 khác 0 thỏa mãn đẳng thức $z_1^2+z_2^2-z_1z_2=0$, khi đó tam giác OAB (O là gốc tọa độ):

A. Là tam giác đều. **B.** Là tam giác vuông.

C. Là tam giác cân, không đều. **D.** Là tam giác tù.

Lời giải

Cách 1:

+ Gọi $z_1=a+bi\quad(a,b\in\mathbb{R}:a^2+b^2\neq 0)$. $A(a;b)$.

Khi đó z_2 là nghiệm phương trình: $z_2^2-(a+bi)z_2+(a+bi)^2=0$

+ Ta có: $\Delta=(a+bi)^2-4(a+bi)^2=-3(a+bi)^2=\left[\sqrt{3}(a+bi)i\right]^2=\left[\sqrt{3}(-b+ai)\right]^2$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$z_2=\dfrac{a-\sqrt{3}b}{2}+\dfrac{\sqrt{3}a+b}{2}i$ nên $B\left(\dfrac{a-\sqrt{3}b}{2};\dfrac{\sqrt{3}a+b}{2}\right)$.

Hoặc $z_2=\dfrac{a+\sqrt{3}b}{2}+\dfrac{-\sqrt{3}a+b}{2}i$ nên $B\left(\dfrac{a+\sqrt{3}b}{2};\dfrac{-\sqrt{3}a+b}{2}\right)$.

+ Tính $OA^2=a^2+b^2$, $OB^2=a^2+b^2$, $AB^2=a^2+b^2$. Vậy tam giác OAB đều.

Cách 2:

Theo giả thiết: $z_1^2+z_2^2-z_1z_2=0\Rightarrow(z_1+z_2)(z_1^2+z_2^2-z_1z_2)=0$

$\Leftrightarrow z_1^3+z^3{}_2=0\Leftrightarrow z_1^3=-z_2^3\Rightarrow|z_1|=|z_2|\rightarrow OA=OB$.

Mặt khác: $z_2^1+z_2^2-z_1z_2=0\Leftrightarrow(z_1-z_2)^2=-z_1z_2$

$\Rightarrow\left|(z_1-z_2)^2\right|=|-z_1z_2|\Rightarrow|z_1-z_2|^2=|z_1||z_2|\Rightarrow AB^2=OA.OB$.

Mà $OA=OB$ nên $AB=OA=OB$.

Vậy tam giác OAB đều.

Cách 3:

$+\ z_1^2+z_2^2-z_1z_2=0\Leftrightarrow\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2-\frac{z_1}{z_2}+1=0$

$\Leftrightarrow\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2-\frac{z_1}{z_2}+1=0\Leftrightarrow\frac{z_1}{z_2}=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\Rightarrow\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=1\Rightarrow|z_1|=|z_2|$

Vậy $OA=OB$.

Mặt khác: $|z_1-z_2|=\left|\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}z_2-z_2\right|=|z_2|\Rightarrow AB=OB$

Vậy tam giác OAB đều.

Câu 18: Cho phương trình $az^2+bz+c=0$, với $a,b,c\in\mathbb{R},a\neq0$ có các nghiệm z_1,z_2 đều không là số thực. Tính $P=|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2$ theo a,b,c.

A. $P=\frac{b^2-2ac}{a^2}$. **B.** $P=\frac{2c}{a}$. **C.** $P=\frac{4c}{a}$. **D.** $P=\frac{2b^2-4ac}{a^2}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Tự luận.

Ta có phương trình $az^2+bz+c=0$ có các nghiệm z_1,z_2 đều không là số thực, do đó $\Delta=b^2-4ac<0$. Ta có $\Delta=i^2\left(4ac-b^2\right)$.

$$*\begin{cases}z_1=\frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\\ z_2=\frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\end{cases}$$

Khi đó: $\begin{cases}|z_1+z_2|^2=\frac{b^2}{a^2}\\ |z_1-z_2|^2=\frac{4ac-b^2}{a^2}\end{cases}\Rightarrow P=|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=\frac{4c}{a}$. Vậy $P=\frac{4c}{a}$.

Cách 2: Trắc nghệm.

Cho $a=1,b=0,c=1$, ta có phương trình $z^2+1=0$ có 2 nghệm phức là $z_1=i,z_2=-i$. Khi đó $P=|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=4$.

Thế $a=1,b=0,c=1$ lên các đáp án, ta thấy chỉ có đáp án C cho kết quả giống.

Câu 19: Gọi S là tổng các số thực m để phương trình $z^2-2z+1-m=0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z|=2$. Tính S.

A. $S=6$. **B.** $S=10$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=7$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z^2-2z+1-m=0\Leftrightarrow(z-1)^2=m\ \ (1)$

+) Với $m\ge 0$ thì $(1)\Leftrightarrow z=1\pm\sqrt{m}$. Do $|z|=2\Leftrightarrow|1\pm\sqrt{m}|=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=9\end{array}\right.$.

+) Với $m<0$ thì $(1)\Leftrightarrow z=1\pm i\sqrt{-m}$.

Do $|z|=2\Leftrightarrow|1\pm i\sqrt{-m}|=2\Leftrightarrow 1-m=4\Leftrightarrow m=-3$.

Vậy $S=1+9-3=7$.

Câu 20: Cho số phức $z=a+bi\ \ (a,\ b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+1+3i-|z|i=0$. Tính $S=2a+3b$.

A. $S=-6$. **B.** $S=6$. **C.** $S=-5$. **D.** $S=5$.

Lời giải

Ta có $z+1+3i-|z|i=0\Leftrightarrow(a+1)+\left(b+3-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}a+1=0\\b+3-\sqrt{a^2+b^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\\sqrt{1+b^2}=b+3\end{cases}\ \ (*)$.

$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}b\ge -3\\1+b^2=(b+3)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b\ge -3\\b=-\dfrac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow b=-\dfrac{4}{3}$.

Vậy $\begin{cases}a=-1\\b=-\dfrac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow S=2a+3b=-6$.

Câu 21: Gọi S là tổng các giá trị thực của m để phương trình $9z^2+6z+1-m=0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z|=1$. Tính S.

A. 20. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 8.

Lời giải

$9z^2+6z+1-m=0\ \ (*)$.

Trường hợp 1: $(*)$ có nghiệm thực $\Leftrightarrow\Delta'\ge 0\Leftrightarrow 9-9(1-m)\ge 0\Leftrightarrow m\ge 1$.

$|z|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=1\\z=-1\end{array}\right.$.

- $z=1\Rightarrow m=16$.
- $z=-1\Rightarrow m=4$.

Trường hợp 2: $(*)$ có nghiệm phức $z=a+bi(b\ne 0)\ \Leftrightarrow\Delta'<0\Leftrightarrow 9-9(1-m)<0\Leftrightarrow m<1$.

Nếu z là một nghiệm của phương trình $9z^2+6z+1-m=0$ thì $\overline{z}$ cũng là một nghiệm của phương trình $9z^2+6z+1-m=0$.

Ta có $|z|=1\Leftrightarrow|z|^2=1\Leftrightarrow z.\overline{z}=1\Leftrightarrow\frac{c}{a}=1\Leftrightarrow\frac{1-m}{9}=1\Leftrightarrow m=-8$.

Vậy tổng các giá trị thực của m bằng 12.

Câu 22: Gọi z là một nghiệm của phương trình $z^2-z+1=0$. Giá trị của biểu thức $M=z^{2019}+z^{2018}+\frac{1}{z^{2019}}+\frac{1}{z^{2018}}+5$ bằng

A. 5. **B.** 2. **C.** 7. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $z^2-z+1=0$ có hai nghiệm $z=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Chọn $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$.

Áp dụng công thức *Moivre*: $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)\ \ \forall n\in\mathbb{N}$, ta được:

$z^{2019}=\cos\frac{2019\pi}{3}+i\sin\frac{2019\pi}{3}=-1\Rightarrow\frac{1}{z^{2019}}=-1$.

$z^{2018}=\cos\frac{2018\pi}{3}+i\sin\frac{2018\pi}{3}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow\frac{1}{z^{2018}}=\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}$.

Do đó, $M=-1-1+\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}+5=2$.

Vậy $M=2$.

Câu 23: Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$. Giá trị của biểu thức $(z_1-1)^{2019}+(z_2-1)^{2019}$ bằng?

A. 2^{1009}. **B.** 2^{1010}. **C.** 0. **D.** -2^{1010}.

Lời giải

Chọn D

Ta có $z^2-4z+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=2+i\\z=2-i\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z-1=1+i\\z-1=1-i\end{array}\right.$.

Mà $i^2=-1;i^4=1;(1+i)^2=2i;(1+i)^4=-4;(1-i)^2=-2i;(1-i)^4=-4;$

Suy ra $(z_1-1)^{2019}+(z_2-1)^{2019}=\left((1-i)^4\right)^{504}.(1-i)^2(1-i)+\left((1+i)^2\right)^{504}.(1+i)^2.(1+i)$

$=(-4)^{504}.(-2i).(1-i)+(-4)^{504}.(2i).(1+i)=4^{504}.2i.(-1+i+1+i)=4^{504}.2i.2i=-2^{1010}$.

Câu 24: Cho phương trình $z^2+bz+c=0$, có hai nghiệm z_1,z_2 thỏa mãn $z_2-z_1=4+2i$. Gọi A,B là các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $z^2-2bz+4c=0$. Tính độ dài đoạn AB.

A. $8\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải:

Chọn C

$z^2+bz+c=0$ có hai nghiệm z_1,z_2 thỏa mãn $z_2-z_1=4+2i$

Xét $z_2-z_1=4+2i\Rightarrow(z_2+z_1)^2-4z_1z_2=(4+2i)^2\Rightarrow b^2-4c=(4+2i)^2$

Khi đó phương trình $z^2-2bz+4c=0$

có $\Delta'=b^2-4c=(4+2i)^2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}z_A=b-4-2i\Rightarrow A(b-4;-2)\\ z_B=b+4+2i\Rightarrow B(b+4;2)\end{array}\right.(b=m+ni,m,n\in\mathbb{R})$

Vậy $AB=\sqrt{(b+4-b+4)^2+(2+2)^2}=4\sqrt{5}$.

Câu 25: Cho số phức w và hai số thực a, b. Biết rằng $w+i$ và $2w-1$ là hai nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$. Tổng $S=a+b$ bằng

A. $\frac{5}{9}$. **B.** $-\frac{5}{9}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $w=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$. Vì $a,b\in\mathbb{R}$ và phương trình $z^2+az+b=0$ có hai nghiệm là $z_1=w+i$, $z_2=2w-1$ nên $z_1=\overline{z_2}\Leftrightarrow w+i=\overline{2w-1}\Leftrightarrow x+yi+i=\overline{2(x+yi)-1}$

$\Leftrightarrow x+(y+1)i=(2x-1)-2yi\Leftrightarrow\begin{cases}x=2x-1\\ y+1=-2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-\frac{1}{3}\end{cases}$.

$\Rightarrow w=1-\frac{1}{3}i\Rightarrow\begin{cases}z_1=w+i=1+\frac{2}{3}i\\ z_2=2w-1=1-\frac{2}{3}i\end{cases}$.

Theo định lý Viet: $\begin{cases}z_1+z_2=-a\\ z_2.z_2=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2=-a\\ 1+\frac{4}{9}=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=\frac{13}{9}\end{cases}$.

Vậy $S=a+b=-\frac{5}{9}$.

Câu 26: Số phức $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$ là nghiệm của phương trình $\frac{(|z|-1)(1+iz)}{z-\frac{1}{z}}=i$. Tổng $T=a^2+b^2$ bằng

A. 4. **B.** $4-2\sqrt{3}$. **C.** $3+2\sqrt{2}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $z\neq 0; z\neq 1$.

Ta có $\dfrac{(|z|-1)(1+iz)}{z-\dfrac{1}{\bar{z}}}=i \Leftrightarrow (|z|-1)\left(\bar{z}+i|z|^2\right)=\left(|z|^2-1\right)i$

$\Leftrightarrow \bar{z}+i|z|^2=(|z|+1)i \Leftrightarrow \bar{z}=\left(-|z|^2+|z|+1\right)i$

$\Leftrightarrow |\bar{z}|=\pm\left(-|z|^2+|z|+1\right) \Leftrightarrow |z|^2=1$ hoặc $|z|^2-2|z|-1=0 \Leftrightarrow |z|=1+\sqrt{2} \Leftrightarrow |z|^2=3+2\sqrt{2}$.

Vậy $T=a^2+b^2=3+2\sqrt{2}$.

Câu 27: Cho các số phức z, w khác 0 thỏa mãn $z+w\neq 0$ và $\dfrac{1}{z}+\dfrac{3}{w}=\dfrac{6}{z+w}$. Khi đó $\left|\dfrac{z}{w}\right|$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\dfrac{1}{z}+\dfrac{3}{w}=\dfrac{6}{z+w} \Leftrightarrow \dfrac{w+3z}{zw}=\dfrac{6}{z+w} \Leftrightarrow (w+3z)(z+w)=6zw \Leftrightarrow 3z^2-2zw+w^2=0$

$\Leftrightarrow 3\left(\dfrac{z}{w}\right)^2-2\dfrac{z}{w}+1=0 \Leftrightarrow \dfrac{z}{w}=\dfrac{1}{3}\pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}i \Rightarrow \left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 28: Cho phương trình $x^2-4x+\dfrac{c}{d}=0$ có hai nghiệm phức. Gọi A, B là hai điểm biểu diễn của hai nghiệm đó trên mặt phẳng Oxy. Biết tam giác OAB đều, tính $P=c+2d$.

A. $P=18$. **B.** $P=-10$. **C.** $P=-14$. **D.** $P=22$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $x^2-4x+\dfrac{c}{d}=0$ có hai nghiệm phức $\Leftrightarrow \Delta'=4-\dfrac{c}{d}<0$.

Khi đó, phương trình có hai nghiệm phức $x_1=2+\sqrt{|\Delta'|}\,i$; $x_2=2-\sqrt{|\Delta'|}\,i$.

Gọi A, B lần lượt là hai điểm biểu diễn của x_1; x_2 trên mặt phẳng Oxy ta có:

$A\left(2;\sqrt{|\Delta'|}\right)$; $B\left(2;-\sqrt{|\Delta'|}\right)$.

Ta có: $AB=2\sqrt{|\Delta'|}$; $OA=OB=\sqrt{4+|\Delta'|}$.

Tam giác OAB đều khi và chỉ khi $AB=OA=OB \Leftrightarrow 2\sqrt{|\Delta'|}=\sqrt{4+|\Delta'|} \Leftrightarrow 4|\Delta'|=4+|\Delta'|$

$\Leftrightarrow |\Delta'|=\dfrac{4}{3}$. Vì $\Delta'<0$ nên $\Delta'=-\dfrac{4}{3}$ hay $4-\dfrac{c}{d}=-\dfrac{4}{3} \Leftrightarrow \dfrac{c}{d}=\dfrac{16}{3}$.

Từ đó ta có $c=16$; $d=3$.

Vậy: $P = c + 2d = 22$.

Câu 29: Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z| = \dfrac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\dfrac{3}{2} < |z| < 2$. **B.** $|z| > 2$. **C.** $|z| < \dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2} < |z| < \dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chon D

Ta có $z^{-1} = \dfrac{1}{|z|^2}\overline{z}$.

Vậy $(1+2i)|z| = \dfrac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$

$\Leftrightarrow (|z|+2) + (2|z|-1)i = \left(\dfrac{\sqrt{10}}{|z|^2}\right).\overline{z} \Rightarrow \left|(|z|+2) + (2|z|-1)i\right| = \left|\left(\dfrac{\sqrt{10}}{|z|^2}\right).\overline{z}\right|$

$\Rightarrow (|z|+2)^2 + (2|z|-1)^2 = \left(\dfrac{10}{|z|^4}\right).|z|^2 = \dfrac{10}{|z|^2}$. Đặt $|z| = a > 0$.

$\Rightarrow (a+2)^2 + (2a-1)^2 = \left(\dfrac{10}{a^2}\right) \Leftrightarrow a^4 + a^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 = 1 \\ a^2 = -2 \end{array}\right. \Rightarrow a = 1 \Rightarrow |z| = 1.$

Câu 30: Có bao nhiêu giá trị dương của số thực a sao cho phương trình $z^2 + \sqrt{3}z + a^2 - 2a = 0$ có nghiệm phức z_0 với phần ảo khác 0 thỏa mãn $|z_0| = \sqrt{3}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\Delta = 3 - 4(a^2 - 2a) = 3 - 4a^2 + 8a$.

Phương trình $z^2 + \sqrt{3}z + a^2 - 2a = 0$ có nghiệm phức khi và chỉ khi

$\Delta < 0 \Leftrightarrow 3 - 4a^2 + 8a < 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 8a - 3 > 0 \quad (*)$.

Khi đó phương trình có hai nghiệm z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau và $|z_1| = |z_2|$.

Ta có

$z_1.z_2 = a^2 - 2a \Rightarrow |z_1.z_2| = |a^2 - 2a| \Leftrightarrow |z_1|.|z_2| = |a^2 - 2a| \Rightarrow |z_0|^2 = |a^2 - 2a|$.

Theo giả thiết có $\left(\sqrt{3}\right)^2 = |a^2 - 2a| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 - 2a = 3 \\ a^2 - 2a = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 3 \end{array}\right.$).

Các giá trị của a thỏa mãn điều kiện $(*)$. Vậy có 1 giá trị dương a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

CHƯƠNG IV

SỐ PHỨC

CỰC TRỊ SỐ PHỨC – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

1. Môđun của số phức:

□ Số phức $z=a+bi$ được biểu diễn bởi điểm M trên mặt phẳng Oxy. Độ dài của véctơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là môđun của số phức z. Kí hiệu $|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$

□ Tính chất

• $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\bar{z}}=|\overrightarrow{OM}|$ • $|z|\geq 0, \forall z\in\mathbb{C}, |z|=0\Leftrightarrow z=0$

• $|z.z'|=|z|.|z'|$ • $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|},(z'\neq 0)$ • $||z|-|z'||\leq|z\pm z'|\leq|z|+|z'|$

□ $|kz|=|k|.|z|, k\in\mathbb{R}$

□ Chú ý: $|z^2|=|a^2-b^2+2abi|=\sqrt{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2}=a^2+b^2=|z|^2=|\bar{z}|^2=z.\bar{z}$.

Lưu ý:

□ $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1=kz_2\,(k\geq 0)$

□ $|z_1-z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1=kz_2\,(k\leq 0)$.

□ $|z_1+z_2|\geq||z_1|-|z_2||$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1=kz_2\,(k\leq 0)$

□ $|z_1-z_2|\geq||z_1|-|z_2||$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1=kz_2\,(k\geq 0)$

□ $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$

□ $|z|^2=|\bar{z}||z|=|\bar{z}|^2 \quad \forall z\in\mathbb{C}$

2.Một số quỹ tích nên nhớ

Biểu thức liên hệ x,y	**Quỹ tích điểm M**
$ax+by+c=0$ $\|z-a-bi\|=\|z-c-di\|$	Đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$ Đường trung trực đoạn AB với $(A(a,b),B(c,d))$
$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ hoặc $\|z-a-bi\|=R$	Đường tròn tâm $I(a;b)$, bán kính R
$(x-a)^2+(y-b)^2\leq R^2$ hoặc	Hình tròn tâm $I(a;b)$, bán kính R

$\left\|z-a-bi\right\|\le R$	
$r^2\le\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2\le R^2$ hoặc $r\le\left\|z-a-bi\right\|\le R$	Hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn đồn tâm $I\left(a;b\right)$, bán kính lần lượt là r,R
$\left[\begin{array}{l}y=ax^2+bx+c\\x=ay^2+by+c\end{array}\right.\left(c\ne0\right)$	Parabol
$\frac{\left(x+a\right)^2}{b^2}+\frac{\left(y+c\right)^2}{d^2}=1\left(1\right)$ hoặc $\left\|z-a_1-b_1i\right\|+\left\|z-a_2-b_2i\right\|=2a$	$\left(1\right)$ Elip $\left(2\right)$ Elip nếu $2a>AB$, $A\left(a_1,b_1\right),B\left(a_2,b_2\right)$ Đoạn AB nếu $2a=AB$
$\frac{\left(x+a\right)^2}{b^2}-\frac{\left(y+c\right)^2}{d^2}=1$	Hypebol

MỘT SỐ DẠNG ĐẶC BIỆT CẦN LƯU Ý:

DẠNG 1: Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là đường thẳng.

TQ1: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-a-bi\right|=\left|z\right|$, tìm $\left|z\right|_{Min}$. Khi đó ta có

+ Quỹ tích điểm $M\left(x;y\right)$ biểu diễn số phức z là đường trung trực đoạn OA với $A\left(a;b\right)$

+ $\begin{cases}\left|z\right|_{Min}=\frac{1}{2}\left|z_0\right|=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\\z=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}i\end{cases}$

TQ2: Cho số phức thỏa mãn điều kiện $\left|z-a-bi\right|=\left|z-c-di\right|$. Tìm $\left|z\right|_{\min}$. Ta có

+ Quỹ tích điểm $M\left(x;y\right)$ biểu diễn số phức z là đường trung trực đoạn AB với $A\left(a;b\right),B\left(c;d\right)$

+ $\left|z\right|_{Min}=d\left(O,AB\right)=\frac{\left|a^2+b^2-c^2-d^2\right|}{2\sqrt{\left(a-c\right)^2+\left(b-d\right)^2}}$

Lưu ý: Đề bài có thể suy biến bài toán thành 1 số dạng, khi đó ta cần thực hiện biến đổi để đưa về dạng cơ bản.

Ví dụ 1:

+ Cho số phức thỏa mãn điều kiện $\left|\overline{z}-a-bi\right|=\left|z-c-di\right|$. Khi đó ta biến đổi

$\left|\overline{z}-a-bi\right|=\left|z-c-di\right|\Leftrightarrow\left|z-a+bi\right|=\left|z-c-di\right|$.

+ Cho số phức thỏa mãn điều kiện $\left|iz-a-bi\right|=\left|z-c-di\right|$. Khi đó ta biến đổi

$\left|iz-a-bi\right|=\left|iz-c-di\right|\Leftrightarrow\left|z+\frac{-a-bi}{i}\right|=\left|z+\frac{-c-di}{i}\right|\Leftrightarrow\left|z+b+ai\right|=\left|z+d+ci\right|$.

DẠNG 2: Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là đường tròn.

TQ: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z-a-bi\right|=R>0\left(\left|z-z_0\right|=R\right)$. Tìm $\left|z\right|_{Max},\left|z\right|_{Min}$. Ta có

+ Quỹ tích điểm $M\left(x;y\right)$ biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I\left(a;b\right)$ bán kính R

+ $\begin{cases}\left|z\right|_{Max}=OI+R=\sqrt{a^2+b^2}+R=\left|z_0\right|+R\\ \left|z\right|_{Min}=\left|OI-R\right|=\left|\sqrt{a^2+b^2}-R\right|=\left|\left|z_0\right|-R\right|\end{cases}$

Lưu ý: Đề bài có thể cho ở dạng khác, ta cần thực hiện các phép biến đổi để đưa về dạng cơ bản.

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|iz-a-bi\right|=R\Leftrightarrow\left|z+\dfrac{-a-bi}{i}\right|=\dfrac{R}{\left|i\right|}$

$\Leftrightarrow\left|z+b+ai\right|=R$

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|\overline{z}-a-bi\right|=R\Leftrightarrow\left|z-a+bi\right|=R$

Ví dụ 3: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện

$\left|\left(c+di\right)z-a-bi\right|=R\Leftrightarrow\left|z+\dfrac{-a-bi}{c+di}\right|=\dfrac{R}{\left|c+di\right|}=\dfrac{R}{\sqrt{c^2+d^2}}$

Hay viết gọn $\left|z_0z-z_1\right|=R\Leftrightarrow\left|z-\dfrac{z_1}{z_0}\right|=\dfrac{R}{\left|z_0\right|}$

DẠNG 3: Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là Elip.

TQ1: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z-c\right|+\left|z+c\right|=2a,\left(a>c\right)$ Khi đó ta có

+ Quỹ tích điểm $M\left(x;y\right)$ biểu diễn số phức z là Elip: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-c^2}=1$

+ $\begin{cases}\left|z\right|_{Max}=a\\ \left|z\right|_{Min}=\sqrt{a^2-c^2}\end{cases}$

TQ2:. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$

Thỏa mãn $2a>|z_1-z_2|$.

Khi đó ta thực hiện phép biến đổi để đưa Elip về dạng chính tắc

Ta có

Khi đề cho Elip dạng không chính tắc $\|z-z_1\|+\|z-z_2\|=2a,\left(\|z_1-z_2\|<2a\right)$ và $z_1,z_2\neq\pm c,\pm ci$). Tìm Max, Min của $P=\|z-z_0\|$. Đặt $\begin{cases}\|z_1-z_2\|=2c\\ b^2=a^2-c^2\end{cases}$	
Nếu $\left\|z_0-\dfrac{z_1+z_2}{2}\right\|=0$	$\begin{cases}P_{Max}=a\\ P_{Min}=b\end{cases}$
Nếu $\begin{cases}\left\|z_0-\dfrac{z_1+z_2}{2}\right\|>a\\ z_0-z_1=k\left(z_0-z_2\right)\end{cases}$	$\begin{cases}P_{Max}=\left\|z_0-\dfrac{z_1+z_2}{2}\right\|+a\\ P_{Min}=\left\|z_0-\dfrac{z_1+z_2}{2}\right\|-a\end{cases}$
Nếu $\begin{cases}\left\|z_0-\dfrac{z_1+z_2}{2}\right\|<a\\ z_0-z_1=k\left(z_0-z_2\right)\end{cases}$	$P_{Max}=\left\|z_0-\dfrac{z_1+z_2}{2}\right\|+a$
Nếu $\|z_0-z_1\|=\|z_0-z_2\|$	$P_{Min}=\left\|\left\|z_0-\dfrac{z_1+z_2}{2}\right\|-b\right\|$

Câu 1: Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau $|z-1|=\sqrt{34},|z+1+mi|=|z+m+2i|$ và sao cho $|z_1-z_2|$ là lớn nhất. Khi đó giá trị $|z_1+z_2|$ bằng

A. $\sqrt{2}$ **B.** 10 **C.** 2 **D.** $\sqrt{130}$

Câu 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-2i|=1$. Số phức $z-i$ có môđun nhỏ nhất là:

A. $\sqrt{5}-2$. **B.** $\sqrt{5}-1$. **C.** $\sqrt{5}+1$. **D.** $\sqrt{5}+2$.

Câu 3: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\left|\dfrac{2z+i}{z}\right|$ với z là số phức khác 0 và thỏa mãn $|z|\geq 2$. Tính tỉ số $\dfrac{M}{m}$.

A. $\dfrac{M}{m}=3$. **B.** $\dfrac{M}{m}=\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{M}{m}=\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{M}{m}=2$.

Câu 4: Cho số phức z thoả mãn $|z-2-3i|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|\overline{z}+1+i|$.

A. $\sqrt{13}+3$. **B.** $\sqrt{13}+5$. **C.** $\sqrt{13}+1$. **D.** $\sqrt{13}+6$.

Câu 5: Xét tất cả các số phức z thỏa mãn $|z-3i+4|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z^2+7-24i|$ nằm trong khoảng nào?

A. $(0;1009)$. **B.** $(1009;2018)$. **C.** $(2018;4036)$. **D.** $(4036;+\infty)$.

Câu 6: Cho số phức z thỏa mãn $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z-2-2i|$. Đặt $A=M+m$. Mệnh đề nào sau đây là ***đúng***?

A. $A\in\left(\sqrt{34};6\right)$. **B.** $A\in\left(6;\sqrt{42}\right)$. **C.** $A\in\left(2\sqrt{7};\sqrt{33}\right)$. **D.** $A\in\left(4;3\sqrt{3}\right)$.

Câu 7: Cho số phức z thỏa mãn $|z-6|+|z+6|=20$. Gọi M, n lần lượt là môđun lớn nhất và nhỏ nhất của z. Tính $M-n$

A. $M-n=2$. **B.** $M-n=4$. **C.** $M-n=7$. **D.** $M-n=14$.

Câu 8: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3+4i|=2$ và $w=2z+1-i$. Khi đó $|w|$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $4+\sqrt{74}$. **B.** $2+\sqrt{130}$. **C.** $4+\sqrt{130}$. **D.** $16+\sqrt{74}$.

Câu 9: Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M và M'. Số phức $z(4+3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là N và N'. Biết rằng M, M', N, N' là bốn đỉnh của hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z+4i-5|$.

A. $\frac{5}{\sqrt{34}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{4}{\sqrt{13}}$.

Câu 10: Biết số phức z thỏa mãn $|iz-3|=|z-2-i|$ và $|z|$ có giá trị nhỏ nhất. Phần thực của số phức z bằng:

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $-\frac{2}{5}$. **D.** $-\frac{1}{5}$.

Câu 11: Xét các số phức z thỏa mãn $|z-1-3i|=2$. Số phức z mà $|z-1|$ nhỏ nhất là

A. $z=1+5i$. **B.** $z=1+i$. **C.** $z=1+3i$. **D.** $z=1-i$.

Câu 12: Cho số phức z thỏa mãn $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=4$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z-2-2i|$. Đặt $A=M+m$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. $A\in\left(\sqrt{34};6\right)$. **B.** $A\in\left(6;\sqrt{42}\right)$. **C.** $A\in\left(2\sqrt{7};\sqrt{33}\right)$. **D.** $A\in\left[4;3\sqrt{3}\right)$.

Câu 13: Trong các số phức z thỏa mãn $|z-1+i|=|\bar{z}+1-2i|$, số phức z có mô đun nhỏ nhất có phần ảo là

A. $\frac{3}{10}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $-\frac{3}{5}$. **D.** $-\frac{3}{10}$.

Câu 14: Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $\left|\frac{z_1-i}{z_1+2-3i}\right|=1;\left|\frac{z_2+i}{z_2-1+i}\right|=\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$ là

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}-1$.

Câu 15: Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn $|z-1|=\sqrt{34}$ và $|z+1+mi|=|z+m+2i|$,. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc S sao cho $|z_1-z_2|$ lớn nhất, khi đó giá trị của $|z_1+z_2|$ bằng

A. 2 **B.** 10 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{130}$

Câu 16: Cho hai số phức z,w thỏa mãn $|z-3\sqrt{2}|=\sqrt{2}$, $|w-4\sqrt{2}i|=2\sqrt{2}$. Biết rằng $|z-w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z=z_0$, $w=w_0$. Tính $|3z_0-w_0|$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $6\sqrt{2}$.

Câu 17: Cho hai số phức z và w thỏa mãn $z+2w=8-6i$ và $|z-w|=4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|z|+|w|$ bằng

A. $4\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{26}$. **C.** $\sqrt{66}$. **D.** $3\sqrt{6}$.

Câu 18: Cho số phức z thoả mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z^2-z+1|$. Tính $M.m$

A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{39}{4}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

Câu 19: Cho hai số phức z và $\omega=a+bi$ thỏa mãn $|z+\sqrt{5}|+|z-\sqrt{5}|=6$; $5a-4b-20=0$. Giá trị nhỏ nhất của $|z-\omega|$ là

A. $\frac{3}{\sqrt{41}}$. **B.** $\frac{5}{\sqrt{41}}$. **C.** $\frac{4}{\sqrt{41}}$. **D.** $\frac{3}{41}$.

Câu 20: Gọi $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn điều kiện $|z-1-2i|+|z+2-3i|=\sqrt{10}$ và có mô đun nhỏ nhất. Tính $S=7a+b$?

A. 7. **B.** 0. **C.** 5. **D.** -12.

Câu 21: Cho số phức z thỏa mãn $|z+\bar{z}|+2|z-\bar{z}|=8$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-3-3i|$. Tính $M+m$.

A. $\sqrt{10}+\sqrt{34}$. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{10}+\sqrt{58}$. **D.** $\sqrt{5}+\sqrt{58}$.

Câu 22: Cho số phức z có $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z^2-z|+|z^2+z+1|$.

A. $\frac{13}{4}$ **B.** 3 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $\frac{11}{4}$

Câu 23: Giả sử z_1,z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z-6)(8+\overline{zi})$ là số thực. Biết rằng $|z_1-z_2|=4$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1+3z_2|$ bằng

A. $5-\sqrt{21}$ **B.** $20-4\sqrt{21}$ **C.** $20-4\sqrt{22}$ **D.** $5-\sqrt{22}$

Câu 24: Trong các số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=2$ có hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-z_2|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1|^2-|z_2|^2$ bằng

A. -10 **B.** $-4-3\sqrt{5}$ **C.** -5 **D.** $-6-2\sqrt{5}$

Câu 25: Cho hai số phức z_1, z_2 thoả mãn $|z_1+2-i|+|z_1-4-7i|=6\sqrt{2}$ và $|iz_2-1+2i|=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=|z_1+z_2|$.

A. $\sqrt{2}-1$. **B.** $\sqrt{2}+1$. **C.** $2\sqrt{2}+1$. **D.** $2\sqrt{2}-1$.

Câu 26: Cho z là số phức thỏa mãn $|\overline{z}|=|z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z-1+2i|+|z+1+3i|$ là

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 27: Cho các số phức $z_1=-2+i$, $z_2=2+i$ và số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=16$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị biểu thức M^2-m^2 bằng

A. 15. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 8.

Câu 28: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2i|\le|z-4i|$ và $|z-3-3i|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-2|$ là:

A. $\sqrt{13}+1$. **B.** $\sqrt{10}+1$. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Câu 29: Xét số phức z thỏa mãn $|z-2-2i|=2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-1-i|+|z-5-2i|$ bằng

A. $1+\sqrt{10}$. **B.** 4. **C.** $\sqrt{17}$ **D.** 5.

Câu 30: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Môđun của số phức $w=M+mi$ là

A. $|w|=3\sqrt{137}$. **B.** $|w|=\sqrt{1258}$. **C.** $|w|=2\sqrt{309}$. **D.** $|w|=2\sqrt{314}$.

Câu 31: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+1-i|=2$ và $z_2=iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z_1-z_2|$?

A. $m=\sqrt{2}-1$. **B.** $m=2\sqrt{2}$. **C.** $m=2$. **D.** $m=2\sqrt{2}-2$.

Câu 32: Cho hai số phức z, w thỏa mãn $\begin{cases}|z-3-2i|\le 1\\ |\mathrm{w}+1+2i|\le|\mathrm{w}-2-i|\end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=|z-\mathrm{w}|$.

A. $P_{\min}=\dfrac{3\sqrt{2}-2}{2}$. **B.** $P_{\min}=\sqrt{2}+1$. **C.** $P_{\min}=\dfrac{5\sqrt{2}-2}{2}$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{3\sqrt{2}-2}{2}$.

Câu 33: Cho các số phức w, z thỏa mãn $|\mathrm{w}+\mathrm{i}|=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5\mathrm{w}=(2+\mathrm{i})(z-4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-1-2\mathrm{i}|+|z-5-2\mathrm{i}|$ bằng

A. $6\sqrt{7}$. **B.** $4+2\sqrt{13}$. **C.** $2\sqrt{53}$. **D.** $4\sqrt{13}$.

Câu 34: Xét các số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-3-2i|=2$. Tính $a+b$ khi $|z+1-2i|+2|z-2-5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $4-\sqrt{3}$. **B.** $2+\sqrt{3}$. **C.** 3. **D.** $4+\sqrt{3}$.

Câu 35: Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-3-4i|=1$ và $|z_2-3-4i|=\frac{1}{2}$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $3a-2b=12$. Giá trị nhỏ nhất của $P=|z-z_1|+|z-2z_2|+2$ bằng:

A. $P_{\min}=\frac{\sqrt{9945}}{11}$. **B.** $P_{\min}=5-2\sqrt{3}$. **C.** $P_{\min}=\frac{\sqrt{9945}}{13}$. **D.** $P_{\min}=5+2\sqrt{5}$.

Câu 36: Trong các số phức thỏa mãn: $|z-1+i|=|\overline{z}+1-2i|$, số phức z có mô đun nhỏ nhất có phần ảo là

A. $\frac{3}{10}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $-\frac{3}{5}$. **D.** $-\frac{3}{10}$.

Câu 37: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị lớn nhất của $P=|z^5+\overline{z}^3+6z|-2|z^4+1|$. Tính $M-m$.

A. $M-m=1$. **B.** $M-m=7$. **C.** $M-m=6$. **D.** $M-m=3$.

Câu 38: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+2|1-z|$ bằng

A. $6\sqrt{5}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 39: Cho số phức z thoả mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z^2-z+1|$. Tính $M.m$

A. $\frac{13\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{39}{4}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

Câu 40: Cho số phức z thỏa mãn : $|\overline{z}|=|z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-i|+|z-4|$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** 6.

Câu 41: Cho các số phức $z_1=1+3i$, $z_2=-5-3i$. Tìm điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z_3, biết rằng trong mặt phẳng phức điểm M nằm trên đường thẳng $x-2y+1=0$ và mô đun số phức $w=3z_3-z_2-2z_1$ đạt gí trị nhỏ nhất.

A. $M\left(-\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$. **B.** $M\left(\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$. **C.** $M\left(-\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right)$. **D.** $M\left(\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right)$.

Câu 42: Cho số phức z thoả mãn $|z-1+2i|=\sqrt{5}$. Giá trị lớn nhất của $|z+1+i|$ bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** 20. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 43: Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z-(2+i)\overline{z}=2i$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** 2. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 44: Số phức z có môđun nhỏ nhất thoả mãn $|-2-3i+\overline{z}|=|z-i|$ là

A. $\frac{6}{5}-\frac{3}{5}i$. **B.** $\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i$. **C.** $\frac{3}{5}-\frac{6}{5}i$. **D.** $\frac{6}{5}+\frac{3}{5}i$.

Câu 45: Trong các số phức z thỏa mãn $\left|\frac{(12-5i)z+17+7i}{z-2-i}\right|=13$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. $\frac{3\sqrt{13}}{26}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 46: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z^2-2z+5\right|=\left|(z-1+2i)(z+3i-1)\right|$. Tính $\min|w|$, với $w=z-2+2i$.

A. $\min|w|=\frac{1}{2}$. **B.** $\min|w|=1$. **C.** $\min|w|=\frac{3}{2}$. **D.** $\min|w|=2$.

Câu 47: Xét các số phức z thỏa mãn $|z+3-2i|+|z-3+i|=3\sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|+|z-1-3i|$. Tìm M, m.

A. $M=\sqrt{17}+\sqrt{5}$; $m=3\sqrt{2}$. **B.** $M=\sqrt{26}+2\sqrt{5}$; $m=\sqrt{2}$.
C. $M=\sqrt{26}+2\sqrt{5}$; $m=3\sqrt{2}$. **D.** $M=\sqrt{17}+\sqrt{5}$; $m=\sqrt{3}$.

Câu 48: Xét các số phức z thỏa mãn $|z-1-3i|=2$. Số phức z mà $|z-1|$ nhỏ nhất là

A. $z=1+5i$. **B.** $z=1+i$. **C.** $z=1+3i$. **D.** $z=1-i$.

Câu 49: Cho các số phức z, z_1, z_2 thay đổi thỏa mãn các điều kiện sau: $|iz+2i+4|=3$, phần thực của z_1 bằng 2, phần ảo của z_2 bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=|z-z_1|^2+|z-z_2|^2$.

A. 9. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 50: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z+i|$.

A. $5\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** $\sqrt{61}$. **D.** $3\sqrt{5}$.

Câu 51: Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-1-i|=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|a+b-5|$ là

A. $3-\sqrt{2}$. **B.** $2-\sqrt{2}$. **C.** $3-2\sqrt{2}$. **D.** $2+\sqrt{2}$.

Câu 52: Cho số phức $z=a+bi$ (a, $b\in\mathbb{R}$) thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=|z+2|+2|z-2|$.

A. 10. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $10\sqrt{2}$. **D.** 7.

Câu 53: Cho số thực a thay đổi và số phức z thỏa mãn $\frac{z}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{i-a}{1-a(a-2i)}$. Trên mặt phẳng tọa độ, gọi M là điểm biểu diễn số phức z. Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai điểm M và $I(-3;4)$ là

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 54: Xét số phức z thỏa mãn $|z-2-4i|=\sqrt{5}$. Gọi a và b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị biểu thức a^2-b^2 bằng

A. 40. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** 20. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 55: Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $\left|z-3+\sqrt{3}i\right|=2$ và $\left|z_1-z_2\right|=4$. Giá trị lớn nhất của $\left|z_1\right|+\left|z_2\right|$ bằng

A. 8. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** 4. **D.** $2+2\sqrt{3}$.

Câu 56: Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z-6)(8+\overline{zi})$ là số thực. Biết rằng $\left|z_1-z_2\right|=4$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|z_1+3z_2\right|$ bằng

A. $5-\sqrt{21}$. **B.** $20-4\sqrt{21}$. **C.** $20-4\sqrt{22}$. **D.** $5-\sqrt{22}$.

Câu 57: Trong các số phức z thỏa mãn $\left|z^2+1\right|=2\left|z\right|$ gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Giá trị của biểu thức $\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2$ bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 2.

Câu 58: Gọi z là số phức có môđun nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện $\left|z-2-8i\right|=\sqrt{17}$. Biết $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$, tính $m=2a^2-3b$

A. $m=-18$. **B.** $m=54$. **C.** $m=-10$. **D.** $m=14$.

Câu 59: Xét các số phức $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ thỏa mãn $\left|z+2-3i\right|=2\sqrt{2}$. Tính $P=2a+b$ khi $\left|z+1+6i\right|+\left|z-7-2i\right|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P=3$. **B.** $P=-3$. **C.** $P=1$. **D.** $P=7$.

Câu 60: Cho số phức z thỏa mãn $\left|(1+i)z+1-3i\right|=3\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|z+2+i\right|+\sqrt{6}\left|z-2-3i\right|$ bằng

A. $5\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{15}\left(1+\sqrt{6}\right)$. **C.** $6\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{10}+3\sqrt{15}$.

Câu 61: Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $\left|z+1-i\right|=3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=2\left|z-4+5i\right|+\left|z+1-7i\right|$ bằng $a\sqrt{b}$. Tính $S=a+b$?

A. 20. **B.** 18. **C.** 24. **D.** 17.

Câu 62: Cho z_1, z_2 là nghiệm phương trình $\left|6-3i+iz\right|=\left|2z-6-9i\right|$ và thỏa mãn $\left|z_1-z_2\right|=\dfrac{8}{5}$. Giá trị lớn nhất của $\left|z_1+z_2\right|$ bằng

A. $\dfrac{56}{5}$. **B.** $\dfrac{28}{5}$. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 63: Cho các số phức z và w thỏa mãn $(3-i)\left|z\right|=\dfrac{z}{w-1}+1-i$. Tìm giá trị lớn nhất $T=\left|w+i\right|$

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 64: Cho các số phức z thỏa mãn $\left|z-\sqrt{2}\right|+\left|z+\sqrt{2}\right|=2\sqrt{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z+2\sqrt{3}+i\right|+\left|z-3\sqrt{3}+2i\right|+\left|z-3i\right|$.

A. 12. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 65: Cho số phức $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $|z|^2+3y^2=16$. Biểu thức $P=\big||z-i|-|z-2|\big|$ đạt giá trị lớn nhất tại $(x_0;y_0)$ với $x_0<0, y_0>0$. Khi đó: $x_0^2+y_0^2$ bằng

A. $\dfrac{20-3\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{20+3\sqrt{7}}{2}$. **C.** $\dfrac{20+3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{20-3\sqrt{7}}{2}$.

Câu 66: Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+4|+|z-4|=10$ và $|z-6|$ lớn nhất. Tính $S=a+b$.

A. $S=11$. **B.** $S=-5$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=5$.

Câu 67: Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa $|z+4|+|z-4|=10$ và $|z-6|$ lớn nhất. Tính $S=a+b$?

A. $S=-3$. **B.** $S=5$. **C.** $S=-5$. **D.** $S=11$.

Câu 68: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$, M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=|1+z|+2|1-z|$. Giá trị của biểu thức $M+m$ bằng

A. $2\sqrt{5}+2$. **B.** 6. **C.** $2\sqrt{5}+4$. **D.** 7.

Câu 69: Xét tập hợp S các số phức $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $\left|3z-\overline{z}\right|=\left|(1+i)(2+2i)\right|$. Biểu thức $Q=\left|z-\overline{z}\right|(2-x)$ đạt giá trị lớn nhất là M và đạt được tại $z_0=x_0+y_0i$. Tính giá trị $T=M.x_0y_0^2$.

A. $T=-\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **B.** $T=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$. **C.** $T=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **D.** $T=-\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

Câu 70: Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $\left|z-3+\sqrt{3}i\right|=2$ và $|z_1-z_2|=4$. Giá trị lớn nhất của $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. 8. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** 4. **D.** $2+2\sqrt{3}$.

Câu 71: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+2-i|+|z_1-4-7i|=6\sqrt{2}$ và $|iz_2-1+2i|=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=|z_1+z_2|$.

A. $2\sqrt{2}+1$. **B.** $\sqrt{2}-1$. **C.** $2\sqrt{2}-1$. **D.** $\sqrt{2}+1$.

Câu 72: Cho số phức z,z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1-4-5i|=|z_2-1|=1$ và $\left|\overline{z}+4i\right|=|z-8+4i|$. Tính $|z_1-z_2|$ khi $P=|z-z_1|+|z-z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. 8 **B.** 6. **C.** $\sqrt{41}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 73: Cho các số phức z và ω thỏa mãn $(2+i)|z|=\dfrac{z}{\omega}+1-i$. Tìm giá trị lớn nhất của $T=|\omega+1-i|$

A. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\sqrt{2}$

Câu 74: Cho số phức z và gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+8i=0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-z_1|+|z_2-z|+\left|\overline{z}+2z_1+\frac{z_2}{2}\right|$ được viết dưới dạng $m\sqrt{n}+p\sqrt{q}$. Tổng $m+n-p-q$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 75: Trong các số phức z thỏa mãn $|z^2+1|=2|z|$ gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2+|z_2|^2$ bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 2.

Câu 76: Xét các số phức w, z thỏa mãn $|\mathrm{w}+i|=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w=(2+i)(z-4)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-2i|+|z-6-2i|$.

A. 7. **B.** $2\sqrt{53}$. **C.** $2\sqrt{58}$. **D.** $4\sqrt{13}$.

Câu 77: Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z_1-z_2|^2+|z_2-z_3|^2+|z_3-z_1|^2$.

A. $P=9$. **B.** $P=10$. **C.** $P=8$. **D.** $P=12$.

Câu 78: Cho số phức z thỏa mãn $3|z+\overline{z}|+2|z-\overline{z}|\le 12$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $|z-4+3i|$. Giá trị của $M.m$ bằng:

A. 28. **B.** 24. **C.** 26. **D.** 20.

CHƯƠNG IV

SỐ PHỨC

CỰC TRỊ SỐ PHỨC – MỨC ĐỘ VẬN DỤNG – VẬN DỤNG CAO

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

1. Môđun của số phức:

□ Số phức $z=a+bi$ được biểu diễn bởi điểm M trên mặt phẳng Oxy. Độ dài của vécto $\overrightarrow{OM}$ được gọi là môđun của số phức z. Kí hiệu $|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$

□ Tính chất

• $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\bar{z}}=|\overrightarrow{OM}|$ • $|z|\geq 0, \forall z\in\mathbb{C}, |z|=0\Leftrightarrow z=0$

• $|z.z'|=|z|.|z'|$ • $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|},(z'\neq 0)$ • $||z|-|z'||\leq|z\pm z'|\leq|z|+|z'|$

□ $|kz|=|k|.|z|, k\in\mathbb{R}$

□ Chú ý: $|z^2|=|a^2-b^2+2abi|=\sqrt{(a^2-b^2)^2+4a^2b^2}=a^2+b^2=|z|^2=|\bar{z}|^2=z.\bar{z}$.

Lưu ý:

□ $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1=kz_2\,(k\geq 0)$

□ $|z_1-z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1=kz_2\,(k\leq 0)$.

□ $|z_1+z_2|\geq||z_1|-|z_2||$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1=kz_2\,(k\leq 0)$

□ $|z_1-z_2|\geq||z_1|-|z_2||$ dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow z_1=kz_2\,(k\geq 0)$

□ $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$

□ $|z|^2=|\bar{z}||z|=|\bar{z}|^2 \quad \forall z\in\mathbb{C}$

2.Một số quỹ tích nên nhớ

Biểu thức liên hệ x,y	**Quỹ tích điểm M**
$ax+by+c=0$ $\|z-a-bi\|=\|z-c-di\|$	Đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$ Đường trung trực đoạn AB với $(A(a,b),B(c,d))$
$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ hoặc $\|z-a-bi\|=R$	Đường tròn tâm $I(a;b)$, bán kính R
$(x-a)^2+(y-b)^2\leq R^2$ hoặc $\|z-a-bi\|\leq R$	Hình tròn tâm $I(a;b)$, bán kính R

$r^2 \le (x-a)^2 + (y-b)^2 \le R^2$ hoặc $r \le \lvert z-a-bi \rvert \le R$	Hình vành khăn giới hạn bởi hai đường tròn đồn tâm $I(a;b)$, bán kính lần lượt là r, R
$\begin{bmatrix} y = ax^2 + bx + c \\ x = ay^2 + by + c \end{bmatrix} (c \ne 0)$	Parabol
$\frac{(x+a)^2}{b^2} + \frac{(y+c)^2}{d^2} = 1 (1)$ hoặc $\lvert z-a_1-b_1 i \rvert + \lvert z-a_2-b_2 i \rvert = 2a$	(1) Elip (2) Elip nếu $2a > AB$, $A(a_1,b_1), B(a_2,b_2)$ Đoạn AB nếu $2a = AB$
$\frac{(x+a)^2}{b^2} - \frac{(y+c)^2}{d^2} = 1$	Hypebol

MỘT SỐ DẠNG ĐẶC BIỆT CẦN LƯU Ý:

DẠNG 1: Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là đường thẳng.

TQ1: Cho số phức z thỏa mãn $\lvert z-a-bi \rvert = \lvert z \rvert$, tìm $\lvert z \rvert_{Min}$. Khi đó ta có

+ Quỹ tích điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là đường trung trực đoạn OA với $A(a;b)$

+ $\begin{cases} \lvert z \rvert_{Min} = \frac{1}{2}\lvert z_0 \rvert = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} \\ z = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}i \end{cases}$

TQ2: Cho số phức thỏa mãn điều kiện $\lvert z-a-bi \rvert = \lvert z-c-di \rvert$. Tìm $\lvert z \rvert_{\min}$. Ta có

+ Quỹ tích điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là đường trung trực đoạn AB với $A(a;b), B(c;d)$

+ $\lvert z \rvert_{Min} = d(O, AB) = \frac{\lvert a^2+b^2-c^2-d^2 \rvert}{2\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}}$

Lưu ý: Đề bài có thể suy biến bài toán thành 1 số dạng, khi đó ta cần thực hiện biến đổi để đưa về dạng cơ bản.

Ví dụ 1:

+ Cho số phức thỏa mãn điều kiện $\lvert \overline{z}-a-bi \rvert = \lvert z-c-di \rvert$. Khi đó ta biến đổi

$\lvert \overline{z}-a-bi \rvert = \lvert z-c-di \rvert \Leftrightarrow \lvert z-a+bi \rvert = \lvert z-c-di \rvert$.

+ Cho số phức thỏa mãn điều kiện $\lvert iz-a-bi \rvert = \lvert z-c-di \rvert$. Khi đó ta biến đổi

$\lvert iz-a-bi \rvert = \lvert iz-c-di \rvert \Leftrightarrow \left\lvert z + \frac{-a-bi}{i} \right\rvert = \left\lvert z + \frac{-c-di}{i} \right\rvert \Leftrightarrow \lvert z+b+ai \rvert = \lvert z+d+ci \rvert$.

DẠNG 2: Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là đường tròn.

TQ: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-a-bi|=R>0\left(|z-z_0|=R\right)$. Tìm $|z|_{Max}, |z|_{Min}$. Ta có

+ Quỹ tích điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính R

+ $\begin{cases} |z|_{Max} = OI + R = \sqrt{a^2+b^2} + R = |z_0| + R \\ |z|_{Min} = |OI - R| = \left|\sqrt{a^2+b^2} - R\right| = \left||z_0| - R\right| \end{cases}$

Lưu ý: Đề bài có thể cho ở dạng khác, ta cần thực hiện các phép biến đổi để đưa về dạng cơ bản.

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|iz-a-bi|=R \Leftrightarrow \left|z+\dfrac{-a-bi}{i}\right| = \dfrac{R}{|i|}$

$\Leftrightarrow |z+b+ai|=R$

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|\overline{z}-a-bi\right|=R \Leftrightarrow |z-a+bi|=R$

Ví dụ 3: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện

$\left|(c+di)z-a-bi\right|=R \Leftrightarrow \left|z+\dfrac{-a-bi}{c+di}\right| = \dfrac{R}{|c+di|} = \dfrac{R}{\sqrt{c^2+d^2}}$

Hay viết gọn $|z_0 z - z_1| = R \Leftrightarrow \left|z - \dfrac{z_1}{z_0}\right| = \dfrac{R}{|z_0|}$

DẠNG 3: Quỹ tích điểm biểu diễn số phức là Elip.

TQ1: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-c|+|z+c|=2a, (a>c)$ Khi đó ta có

+ Quỹ tích điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z là Elip: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2-c^2} = 1$

+ $\begin{cases} |z|_{Max} = a \\ |z|_{Min} = \sqrt{a^2-c^2} \end{cases}$

TQ2:. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$

Thỏa mãn $2a>|z_1-z_2|$.

Khi đó ta thực hiện phép biến đổi để đưa Elip về dạng chính tắc

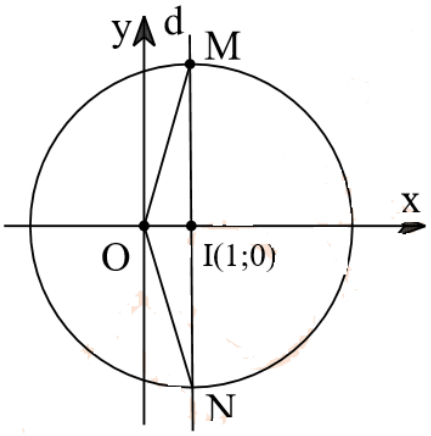
Ta có

Khi đề cho Elip dạng không chính tắc $\|z-z_1\|+\|z-z_2\|=2a,\left(\|z_1-z_2\|<2a\right)$ và $z_1,z_2\neq\pm c,\pm ci$). Tìm Max, Min của $P=\|z-z_0\|$. Đặt $\begin{cases}\|z_1-z_2\|=2c\\ b^2=a^2-c^2\end{cases}$	
Nếu $\left\|z_0-\dfrac{z_1+z_2}{2}\right\|=0$	$\begin{cases}P_{Max}=a\\ P_{Min}=b\end{cases}$
Nếu $\begin{cases}\left\|z_0-\dfrac{z_1+z_2}{2}\right\|>a\\ z_0-z_1=k\left(z_0-z_2\right)\end{cases}$	$\begin{cases}P_{Max}=\left\|z_0-\dfrac{z_1+z_2}{2}\right\|+a\\ P_{Min}=\left\|z_0-\dfrac{z_1+z_2}{2}\right\|-a\end{cases}$
Nếu $\begin{cases}\left\|z_0-\dfrac{z_1+z_2}{2}\right\|<a\\ z_0-z_1=k\left(z_0-z_2\right)\end{cases}$	$P_{Max}=\left\|z_0-\dfrac{z_1+z_2}{2}\right\|+a$
Nếu $\|z_0-z_1\|=\|z_0-z_2\|$	$P_{Min}=\left\|\left\|z_0-\dfrac{z_1+z_2}{2}\right\|-b\right\|$

Câu 1: Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau $|z-1|=\sqrt{34},|z+1+mi|=|z+m+2i|$ và sao cho $|z_1-z_2|$ là lớn nhất. Khi đó giá trị $|z_1+z_2|$ bằng

A. $\sqrt{2}$ **B.** 10 **C.** 2 **D.** $\sqrt{130}$

Lời giải



Gọi M,N lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z_1,z_2

Gọi $z=x+iy,\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

Ta có $|z-1|=\sqrt{34}\Rightarrow M,N$ thuộc đường tròn (C) có tâm $I(1;0)$, bán kính $R=\sqrt{34}$

Mà $|z+1+mi|=|z+m+2i|\Leftrightarrow|x+yi+1+mi|=|x+yi+m+2i|$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x+1)^2+(y+m)^2}=\sqrt{(x+m)^2+(y+2)^2}$

$\Leftrightarrow 2(m-1)x+2(m-2)y-3=0$

Suy ra M,N thuộc đường thẳng $d:2(m-1)x+2(m-2)y-3=0$

Do đó M,N là giao điểm của đường thẳng d và đường tròn (C)

Ta có $|z_1-z_2|=MN$ nên $|z_1-z_2|$ lớn nhất khi và chỉ khi MN lớn nhất

$\Leftrightarrow MN$ đường kính của (C). Khi đó $|z_1+z_2|=2OI=2$

Câu 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-2i|=1$. Số phức $z-i$ có môđun nhỏ nhất là:

A. $\sqrt{5}-2$. **B.** $\sqrt{5}-1$. **C.** $\sqrt{5}+1$. **D.** $\sqrt{5}+2$.

Lời giải

Cách 1:

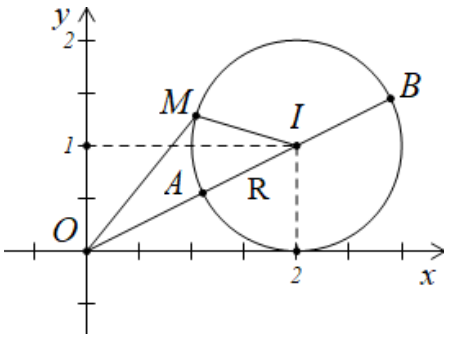
Đặt $w=z-i\Rightarrow z=w+i$.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn hình học của số phức w.

Từ giả thiết $|z-2-2i|=1$ ta được:

$|w+i-2-2i|=1\Leftrightarrow|w-2-i|=1\Leftrightarrow|(x-2)+(y-1)i|=1\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-1)^2=1$.

Suy ra tập hợp những điểm $M(x;y)$ biểu diễn cho số phức w là đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$ bán kính $R=1$.



Giả sử OI cắt đường tròn (C) tại hai điểm A,B với A nằm trong đoạn thẳng OI.

Ta có $|w|=OM$

Mà $OM+MI\geq OI\Leftrightarrow OM+MI\geq OA+AI\Leftrightarrow OM\geq OA$

Nên $|w|$ nhỏ nhất bằng $OA=OI-IA=\sqrt{5}-1$ khi $M\equiv A$.

Cách 2:

Từ $|z-2-2i|=1 \Rightarrow (a-2)^2+(b-2)^2=1$ với $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$

$a-2=\sin x;\ b-2=\cos x \Rightarrow a=2+\sin x,\ b=2+\cos x$

Khi đó: $|z-i|=|2+\sin x+(2+\cos x)i-i| =\sqrt{(2+\sin x)^2+(1+\cos x)^2}$

$=\sqrt{6+(4\sin x+2\cos x)}$

$\geq \sqrt{6-\sqrt{(4^2+2^2)(\sin^2 x+\cos^2 x)}} =\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=\sqrt{5}-1$

Nên $|z-i|$ nhỏ nhất bằng $\sqrt{5}-1$ khi $\begin{cases}4\cos x=2\sin x\\ 4\sin x+2\cos x=-2\sqrt{5}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sin x=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\\ \cos x=\dfrac{-\sqrt{5}}{5}\end{cases}$

Ta được $z=\left(2-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)+\left(2-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)i$

Cách 3:

Sử dụng bất đẳng thức $\big||z_1|-|z_2|\big|\leq|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

$|z-i|=|(z-2-2i)+(2+i)|\geq\big||z-2-2i|-|2+i|\big|=\sqrt{5}-1$

Câu 3: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\left|\dfrac{2z+i}{z}\right|$ với z là số phức khác 0 và thỏa mãn $|z|\geq 2$. Tính tỉ số $\dfrac{M}{m}$.

A. $\dfrac{M}{m}=3$. **B.** $\dfrac{M}{m}=\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{M}{m}=\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{M}{m}=2$.

Lời giải

Ta có $P=\left|\dfrac{2z+i}{z}\right|=\dfrac{|2z+i|}{|z|}\Rightarrow\dfrac{|2z|-|i|}{|z|}\leq P\leq\dfrac{|2z|+|i|}{|z|}\Leftrightarrow 2-\dfrac{1}{|z|}\leq P\leq 2+\dfrac{1}{|z|}\Leftrightarrow\dfrac{3}{2}\leq P\leq\dfrac{5}{2}$.

Vậy $\dfrac{M}{m}=\dfrac{5}{3}$.

Câu 4: Cho số phức z thoả mãn $|z-2-3i|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $|\overline{z}+1+i|$.

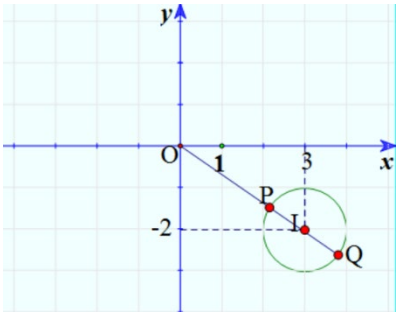
A. $\sqrt{13}+3$. **B.** $\sqrt{13}+5$. **C.** $\sqrt{13}+1$. **D.** $\sqrt{13}+6$.

Lời giải

Ta có $1=|z-2-3i|^2=(z-2-3i).\overline{(z-2-3i)}=(z-2-3i)(\overline{z}-2+3i)$

$\Leftrightarrow 1=|(z-2-3i)(\overline{z}-2+3i)|\Leftrightarrow|\overline{z}-2+3i|=1\Leftrightarrow|\overline{z}+1+i-3+2i|=1(*)$.

+Đặt $w=\overline{z}+1+i$, khi đó $\Leftrightarrow |w-3+2i|=1$.



Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w=\overline{z}+1+i$ là đường tròn $(I;1)$ và $|w|$ là khoảng cách từ gốc tọa độ đến 1 điểm trên đường tròn. Do đó giá trị lớn nhất của $|w|$ chính là đoạn OQ.

$\Rightarrow |w|_{max}=1+\sqrt{3^2+2^2}=1+\sqrt{13}$.

Câu 5: Xét tất cả các số phức z thỏa mãn $|z-3i+4|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z^2+7-24i|$ nằm trong khoảng nào?

A. $(0;1009)$. **B.** $(1009;2018)$. **C.** $(2018;4036)$. **D.** $(4036;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $1=|z-3i+4|\geq \big||z|-|3i-4|\big|=\big||z|-5\big|\Rightarrow -1\leq |z|-5\leq 1\Rightarrow 4\leq |z|\leq 6$.

Đặt $z_0=4-3i\Rightarrow |z_0|=5, {z_0}^2=7-24i$.

Ta có $A=|z^2+7-24i|^2=|z^2+{z_o}^2|^2=\left(z^2+{z_o}^2\right)\left(\overline{z}^2+\overline{z_o}^2\right)=|z|^4+|z_o|^4+\left(z.\overline{z_o}+z_o.\overline{z}\right)^2-2|z.z_o|^2$

Mà $(z+z_o)\left(\overline{z}+\overline{z_o}\right)=1\Rightarrow z.\overline{z_o}+z_o.\overline{z}=1-|z|^2-|z_o|^2$

Suy ra $A=|z|^4+|z_o|^4+\left(1-|z|^2-\left|\overline{z_o}\right|^2\right)^2-2|z.z_o|^2=2|z|^4-2|z|^2+1201$.

Hàm số $y=2t^4-2t^2+1201$ đồng biến trên $[4;6]$ nên $A\geq 2.4^4-2.4^2+1201=1681$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}|z|=4\\|z+4-3i|=1\end{cases}$.

Do đó $|z^2+7-24i|$ nằm trong khoảng $(1009;2018)$.

Câu 6: Cho số phức z thỏa mãn $|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|=4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z-2-2i|$. Đặt $A=M+m$. Mệnh đề nào sau đây là ***đúng***?

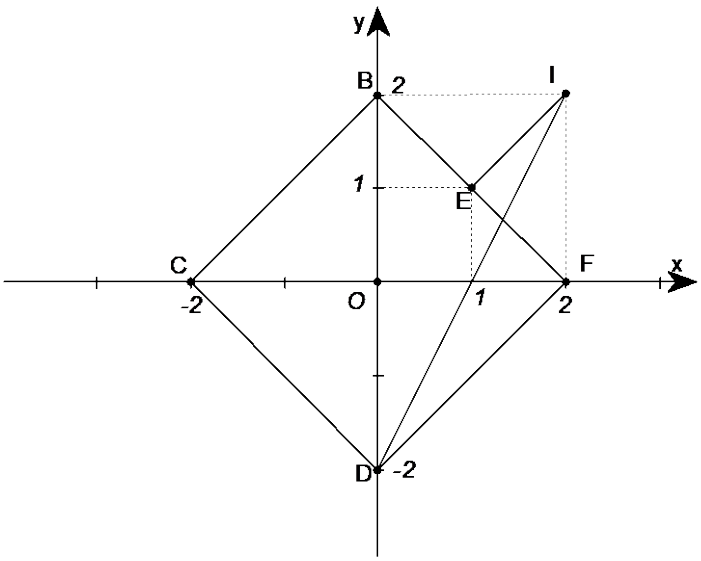
A. $A\in\left(\sqrt{34};6\right)$. **B.** $A\in\left(6;\sqrt{42}\right)$. **C.** $A\in\left(2\sqrt{7};\sqrt{33}\right)$. **D.** $A\in\left(4;3\sqrt{3}\right)$.

Lời giải

Giả sử: $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow N(x;y)$: điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

Ta có:

• $|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|=4\Leftrightarrow |x|+|y|=2\Rightarrow N$ thuộc các cạnh của hình vuông $BCDF$.



• $P=|z-2-2i| \Rightarrow P=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2} \Rightarrow P=d(I;N)$ với $I(2;2)$

Từ hình ta có: $E(1;1)$

$M=P_{\max}=ID=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$ và $m=P_{\min}=IE=\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$

Vậy, $A=M+m=2+2\sqrt{5}\in\left(\sqrt{34};6\right)$.

Câu 7: Cho số phức z thỏa mãn $|z-6|+|z+6|=20$. Gọi M, n lần lượt là môđun lớn nhất và nhỏ nhất của z. Tính $M-n$

A. $M-n=2$. **B.** $M-n=4$. **C.** $M-n=7$. **D.** $M-n=14$.

Lời giải

Gọi $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$. Theo giả thiết, ta có $|z-6|+|z+6|=20$.

$\Leftrightarrow |x-6+yi|+|x+6+yi|=20 \Leftrightarrow \sqrt{(x-6)^2+y^2}+\sqrt{(x+6)^2+y^2}=20 \quad (*)$.

Gọi $M(x;y)$, $F_1(6;0)$ và $F_2(-6;0)$.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow MF_1+MF_2=20>F_1F_2=12$ nên tập hợp các điểm E là đường elip (E) có hai tiêu điểm F_1 và F_2. Và độ dài trục lớn bằng 20.

Ta có $c=6$; $2a=20\Leftrightarrow a=10$ và $b^2=a^2-c^2=64\Rightarrow b=8$.

Do đó, phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$.

Suy ra $\max|z|=OA=OA'=10$ khi $z=\pm 10$ và $\min|z|=OB=OB'=8$ khi $z=\pm 8i$.

Vậy $M-n=2$.

Câu 8: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3+4i|=2$ và $w=2z+1-i$. Khi đó $|w|$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $4+\sqrt{74}$. **B.** $2+\sqrt{130}$. **C.** $4+\sqrt{130}$. **D.** $16+\sqrt{74}$.

Lời giải

Theo bất đẳng thức tam giác ta có

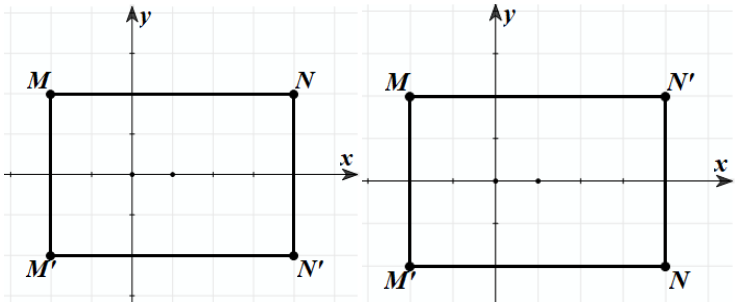
$|\mathrm{w}| = |2z+1-i| = |(2z-6+8i)+(7-9i)| \le |2z-6+8i|+|7-9i| = 4+\sqrt{130}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $|\mathrm{w}|$ là $4+\sqrt{130}$.

Câu 9: Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M và M'. Số phức $z(4+3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là N và N'. Biết rằng M, M', N, N' là bốn đỉnh của hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z+4i-5|$.

A. $\frac{5}{\sqrt{34}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{4}{\sqrt{13}}$.

Lời giải



Gọi $z = x+yi$, trong đó $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó $\bar{z} = x-yi$, $M(x;y)$, $M'(x;-y)$.

Ta đặt $w = z(4+3i) = (x+yi)(4+3i) = (4x-3y)+(3x+4y)i \Rightarrow N(4x-3y;3x+4y)$. Khi đó $\overline{w} = \overline{z(4+3i)} = (4x-3y)-(3x+4y)i \Rightarrow N'(4x-3y;-3x-4y)$.

Ta có M và M'; N và N' từng cặp đối xứng nhau qua trục Ox. Do đó, để chúng tạo thành một hình chữ nhật thì $y_M = y_N$ hoặc $y_M = y_{N'}$. Suy ra $y = 3x+4y$ hoặc $y = -3x-4y$. Vậy tập hợp các điểm M là hai đường thẳng: $d_1 : x+y=0$ và $d_2 : 3x+5y=0$.

Đặt $P = |z+4i-5| = \sqrt{(x-5)^2+(y+4)^2}$. Ta có $P = MA$ với $A(5;-4)$.

$P_{\min} \Leftrightarrow MA_{\min} \Leftrightarrow MA = d(A;d_1)$ hoặc $MA = d(A;d_2)$. Mà $d(A;d_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $d(A;d_2) = \frac{5}{\sqrt{34}}$,

vậy $P_{\min} = d(A;d_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 10: Biết số phức z thỏa mãn $|iz-3| = |z-2-i|$ và $|z|$ có giá trị nhỏ nhất. Phần thực của số phức z bằng:

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $-\frac{2}{5}$. **D.** $-\frac{1}{5}$.

Lời giải

Đặt $z = x+yi$ $(x,\ y \in \mathbb{R})$.

Khi đó

$|iz-3|=|z-2-i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(-y-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} \Leftrightarrow x+2y+1=0 \Leftrightarrow x=-2y-1\,(1)$.

Lại có $|z|=\sqrt{x^2+y^2}\ (2)$.

Thay (1) vào (2) ta được:

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-2y-1)^2+y^2}=\sqrt{5y^2+4y+1}=\sqrt{5\left(y+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}}\geq\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $y+\frac{2}{5}=0 \Leftrightarrow y=-\frac{2}{5}$.

Thay $y=-\frac{2}{5}$ vào (1) suy ra $x=-\frac{1}{5}$.

Vậy phần thực của số phức z là $-\frac{1}{5}$.

Câu 11: Xét các số phức z thỏa mãn $|z-1-3i|=2$. Số phức z mà $|z-1|$ nhỏ nhất là

A. $z=1+5i$. **B.** $z=1+i$. **C.** $z=1+3i$. **D.** $z=1-i$.

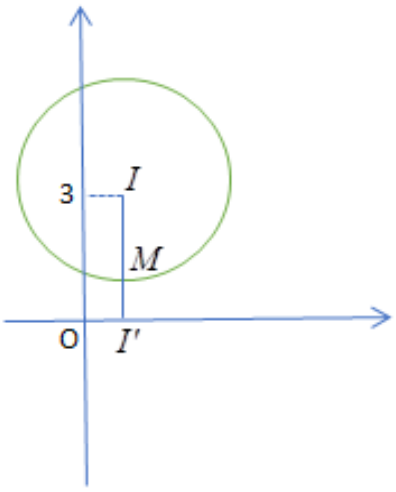
Lời giải

Gọi $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Theo bài ra ta có $|z-1-3i|=2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=4$.

Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn tâm $I(1;3)$ bán kính $R=2$.

Khi đó $|z-1|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}=I'M$ với $I'(1;0)$.



$|z-1|$ nhỏ nhất khi $I'M$ ngắn nhất hay I, M, I' thẳng hàng, M nằm giữa I và I'.

Phương trình đường thẳng II' là $x=1$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng II' với đường tròn tâm I bán kính $R=2$ là $M_1(1;1)$ và $M_1(1;5)$.

Thử lại ta thấy $M_1(1;1)$ thỏa mãn. Vậy $z=1+i$.

Câu 12: Cho số phức z thỏa mãn $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=4$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=|z-2-2i|$. Đặt $A=M+m$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

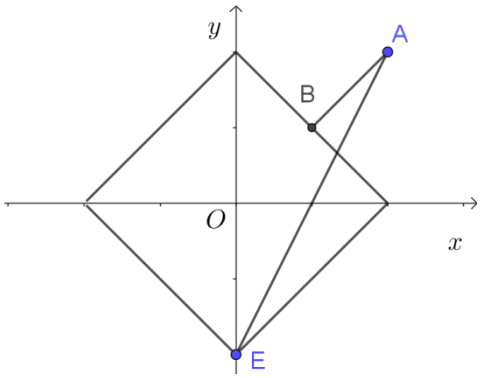
A. $A\in(\sqrt{34};6)$. **B.** $A\in(6;\sqrt{42})$. **C.** $A\in(2\sqrt{7};\sqrt{33})$. **D.** $A\in[4;3\sqrt{3})$.

Lời giải

Đặt $z=x+iy$ và gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của $z=x+iy$

ta có: $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=4\Leftrightarrow|x|+|y|=2$

Gọi $A(2;2)$ và $P=MA$



* Theo hình vẽ, $\min P=d(A,\Delta)$, với $\Delta: x+y=2$

và $\min P=\dfrac{|2+2-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\max P=AE=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$, với $E(0;-2)$

Vậy $M+m=\sqrt{2}+2\sqrt{5}\simeq 5,88$

Câu 13: Trong các số phức z thỏa mãn $|z-1+i|=|\bar{z}+1-2i|$, số phức z có mô đun nhỏ nhất có phần ảo là

A. $\dfrac{3}{10}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $-\dfrac{3}{5}$. **D.** $-\dfrac{3}{10}$.

Lời giải

Gọi $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm $M(x;y)$.

$|z-1+i|=|\bar{z}+1-2i|\Leftrightarrow|(x-1)+(y+1)i|=|(x+1)-(y+2)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2} \Leftrightarrow 4x+2y+3=0 \Leftrightarrow y=-2x-\frac{3}{2}$.

Cách 1:

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\left(-2x-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{5x^2+6x+\frac{9}{4}}=\sqrt{5\left(x+\frac{3}{5}\right)^2+\frac{9}{20}}\geq\frac{3\sqrt{5}}{10},\forall x$.

Suy ra $min|z|=\frac{3\sqrt{5}}{10}$ khi $x=-\frac{3}{5};y=-\frac{3}{10}$.

Vậy phần ảo của số phức z có mô đun nhỏ nhất là $-\frac{3}{10}$.

Cách 2:

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $d: 4x+2y+3=0$.

Ta có $|z|=OM$. $|z|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của O trên d.

Phương trình đường thẳng OM đi qua O và vuông góc với d là: $x-2y=0$.

Tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}4x+2y+3=0\\x-2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{3}{5}\\y=-\frac{3}{10}\end{cases}$

$\Rightarrow M\left(-\frac{3}{5};-\frac{3}{10}\right)$. Hay $z=-\frac{3}{5}-\frac{3}{10}i$.

Vậy phần ảo của số phức z có mô đun nhỏ nhất là $-\frac{3}{10}$.

Nhận xét: Ta có thể tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z như sau:

$|z-1+i|=|\overline{z}+1-2i|\Leftrightarrow|z-(1-i)|=|z-(-1-2i)|$ $(*)$

Gọi M biểu diễn số phức z, điểm $A(1;-1)$ biểu diễn số phức $1-i$, điểm $B(-1;-2)$ biểu diễn số phức $-1-2i$.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow MA=MB$. Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình $d: 4x+2y+3=0$.

Câu 14: Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $\left|\frac{z_1-i}{z_1+2-3i}\right|=1;\left|\frac{z_2+i}{z_2-1+i}\right|=\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$ là

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}-1$.

Lời giải

Giả sử $z_1=x_1+y_1i$ với $x_1;y_1\in\mathbb{R}$. Khi đó:

$\left|\dfrac{z_1-i}{z_1+2-3i}\right|=1\Leftrightarrow|z_1-i|=|z_1+2-3i|\Leftrightarrow|x_1+(y_1-1)i|=|(x_1+2)+(y_1-3)i|$

$\Leftrightarrow\sqrt{x_1^2+(y_1-1)^2}=\sqrt{(x_1+2)^2+(y_1-3)^2}\Leftrightarrow x_1-y_2+3=0$.

$\Rightarrow$ Quỹ tích điểm M biểu diễn số phức z_1 là đường thẳng $\Delta: x-y+3=0$.

Giả sử $z_2=x_2+y_2i$ với $x_2;y_2\in\mathbb{R}$. Ta có:

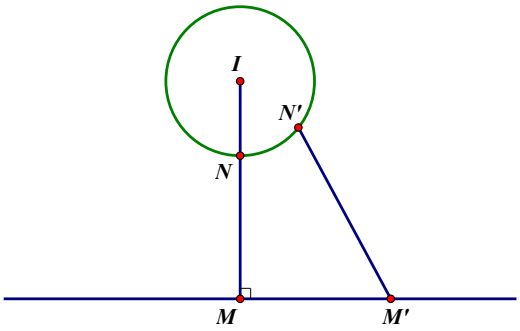
$\left|\dfrac{z_2+i}{z_2-1+i}\right|=\sqrt{2}\Leftrightarrow|z_2+i|=\sqrt{2}|z_2-1+i|\Leftrightarrow|x_2+(y_2+1)i|=\sqrt{2}|(x_2-1)+(y_2+1)i|$

$\Leftrightarrow\sqrt{x_2^2+(y_2+1)^2}=\sqrt{2}\sqrt{(x_2-1)^2+(y_2+1)^2}\Leftrightarrow x_2^2+y_2^2-4x_2+2y_2+3=0$.

$\Rightarrow$ Quỹ tích điểm N biểu diễn số phức z_2 là đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+2y+3=0$ có tâm $I(2;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{2^2+(-1)^2-3}=\sqrt{2}$.

Khoảng cách từ I đến Δ là: $d(I;\Delta)=\dfrac{|2-(-1)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}>R$ $\Rightarrow$ đường thẳng Δ và đường tròn C không có điểm chung.

Quỹ tích các điểm biểu diễn số phức z_1-z_2 là đoạn thẳng MN. $\Rightarrow|z_1-z_2|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MN nhỏ nhất.



Dễ thấy $MN_{\min}=3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

Câu 15: Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn $|z-1|=\sqrt{34}$ và $|z+1+mi|=|z+m+2i|$,. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc S sao cho $|z_1-z_2|$ lớn nhất, khi đó giá trị của $|z_1+z_2|$ bằng

A. 2 **B.** 10 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{130}$

Lời giải

Đặt $z=x+yi$, $(x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó

$|z-1|=\sqrt{34}\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2=34$; $|z+1+mi|=|z+m+2i|\Leftrightarrow 2(m-1)x+2(2-m)y+3=0$.

Do đó tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là giao điểm của đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=34$ và đường thẳng $d: 2(m-1)x+2(2-m)y+3=0$.

Gọi A, B là hai điểm biểu diễn z_1 và z_2. Suy ra $(C)\cap d=\{A,B\}$.

Mặt khác $|z_1-z_2|=AB\le 2R=2\sqrt{34}$ do đó $\max|z_1-z_2|=2\sqrt{34}\Leftrightarrow AB=2R\Leftrightarrow I(1;0)\in d$.

Từ đó ta có $m=-\dfrac{1}{2}$ nên $d:3x-5y-3=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=6+3i \\ z_2=-4-3i \end{array}\right.$.

Vậy $|z_1+z_2|=2$.

Câu 16: Cho hai số phức z,w thỏa mãn $|z-3\sqrt{2}|=\sqrt{2}$, $|w-4\sqrt{2}i|=2\sqrt{2}$. Biết rằng $|z-w|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $z=z_0$, $w=w_0$. Tính $|3z_0-w_0|$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $6\sqrt{2}$.

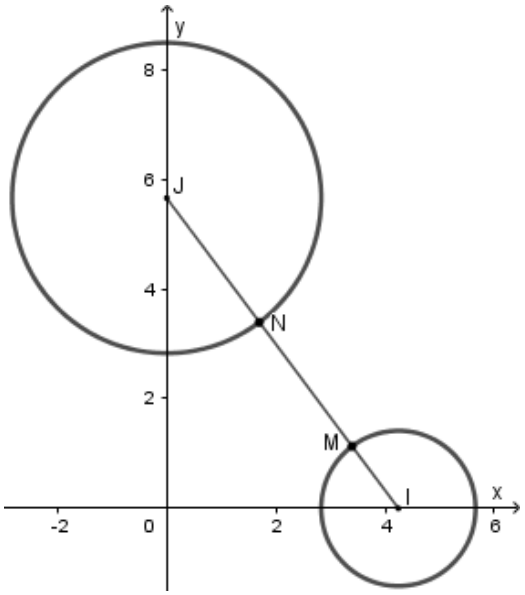
Lời giải

Ta có: + $|z-3\sqrt{2}|=\sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn M biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm $I\left(3\sqrt{2};0\right)$, bán kính $r=\sqrt{2}$.

+ $|w-4\sqrt{2}i|=2\sqrt{2}$, suy ra tập hợp điểm biểu diễn N biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm $J\left(0;4\sqrt{2}\right)$, bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Ta có $\min|z-w|=\min MN$.

+ $IJ=5\sqrt{2}; IM=r=\sqrt{2}; NJ=R=2\sqrt{2}$.



Mặt khác $IM+MN+NJ\ge IJ \Rightarrow MN\ge IJ-IM-NJ$ hay $MN\ge 5\sqrt{2}-\sqrt{2}-2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

Suy ra $\min MN=2\sqrt{2}$ khi I,M,N,J thẳng hàng và M,N nằm giữa I,J.

Cách 1:

Khi đó ta có: $|3z_0-w_0|=\left|3\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}\right|$ và $IN=3\sqrt{2} \Rightarrow \overrightarrow{IM}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{IJ}; \overrightarrow{IN}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Mặt khác $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{OI}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$; $3\overrightarrow{OM}=3\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IM}\right)=3\left(\overrightarrow{OI}+\dfrac{1}{5}\overrightarrow{IJ}\right)=3\overrightarrow{OI}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{IJ}$.

Suy ra $|3z_0-w_0|=\left|3\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}\right|=\left|3\overrightarrow{OI}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{IJ}-\left(\overrightarrow{OI}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{IJ}\right)\right|=\left|2\overrightarrow{OI}\right|=6\sqrt{2}$.

Cách 2:

Ta có $\overrightarrow{IN}=3\overrightarrow{IM}\Rightarrow 3\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IN}=\vec{0}$.

Do đó $\left|3z_0-w_0\right|=\left|3\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}\right|=\left|3\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IM}\right)-\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IN}\right)\right|=\left|2\overrightarrow{OI}\right|=2.OI=2.3\sqrt{2}=6\sqrt{2}.$

Cách 3:

+) $\overrightarrow{IM}=\dfrac{IM}{IJ}\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=\dfrac{12\sqrt{2}}{5}\\ y_M=\dfrac{4\sqrt{2}}{5}\end{cases}\Rightarrow z_0=\dfrac{12\sqrt{2}}{5}+\dfrac{4\sqrt{2}}{5}i$.

+) $\overrightarrow{IN}=\dfrac{IN}{IJ}\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow\overrightarrow{IN}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow\begin{cases}x_N=\dfrac{6\sqrt{2}}{5}\\ y_N=\dfrac{12\sqrt{2}}{5}\end{cases}\Rightarrow w_0=\dfrac{6\sqrt{2}}{5}+\dfrac{12\sqrt{2}}{5}i$.

Suy ra $\left|3z_0-w_0\right|=\left|6\sqrt{2}\right|=6\sqrt{2}$.

Câu 17: Cho hai số phức z và w thỏa mãn $z+2w=8-6i$ và $\left|z-w\right|=4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $\left|z\right|+\left|w\right|$ bằng

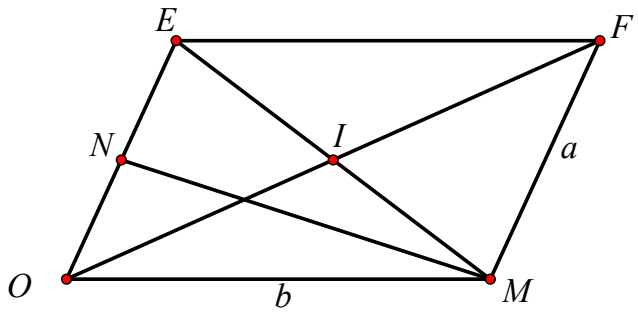
A. $4\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{26}$. **C.** $\sqrt{66}$. **D.** $3\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử M,N lần lượt là các điểm biểu diễn cho z và w. Suy ra $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OF}=2\overrightarrow{OI}$, $\left|z-w\right|=MN=4$ và $OF=2OI=10$.

Đặt $\left|z\right|=ON=\dfrac{a}{2};\left|w\right|=OM=b$. Dựng hình bình hành $OMFE$



Ta có $\begin{cases}\dfrac{a^2+b^2}{2}-\dfrac{ME^2}{4}=25\\ \dfrac{b^2+ME^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}=16\end{cases}\Rightarrow a^2+2b^2=\dfrac{264}{3}$

$\left(\left|z\right|+\left|w\right|\right)^2=\left(\dfrac{a}{2}+b\right)^2\le\left(a^2+2b^2\right)\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\right)=66$

Suy ra $a+b\le\sqrt{66}$, dấu "=" xảy ra khi $a=b=\dfrac{2\sqrt{66}}{3}$.

Vậy $(a+b)_{\max}=\sqrt{66}$.

Câu 18: Cho số phức z thoả mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z^2-z+1|$. Tính $M.m$

A. $\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{39}{4}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{13}{4}$.

Lời giải

Thay $|z|^2=1$ vào P ta có

$$P=|z+1|+|z^2-z+1|=|z+1|+|z^2-z+|z|^2|=|z+1|+|z^2-z+z.\bar{z}|=|z+1|+|z||z+\bar{z}-1|$$

$$=|z+1|+|z+\bar{z}-1|.$$

Mặt khác $|z+1|^2=(z+1)(\bar{z}+1)=2+z+\bar{z}$.

Đặt $t=z+\bar{z}$ do $|z|=1$ nên điều kiện $t\in[-2;2]$.

Suy ra $P=\sqrt{t+2}+|t-1|$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t+2}+|t-1|$ với $t\in[-2;2]$.

$f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t+2}}+1$ với $t>1$. Suy ra $f'(t)>0$ với $t>1$.

$f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t+2}}-1$ với $t<1$. Suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-7}{4}$.

Ta có bảng biến thiên

t	-2		$-\frac{7}{4}$		1		2
$f'(t)$	|	$+$	0	$-$	||	$+$	|
$f(t)$	3	↗	$\frac{13}{4}$	↘	$\sqrt{3}$	↗	3

Từ bảng biến thiên suy ra $M=\dfrac{13}{4}$ tại $t=\dfrac{-7}{4}$ và $m=\sqrt{3}$ tại $t=2$.

Vậy $M.m=\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$.

Câu 19: Cho hai số phức z và $\omega = a+bi$ thỏa mãn $\left|z+\sqrt{5}\right|+\left|z-\sqrt{5}\right|=6$; $5a-4b-20=0$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|z-\omega\right|$ là

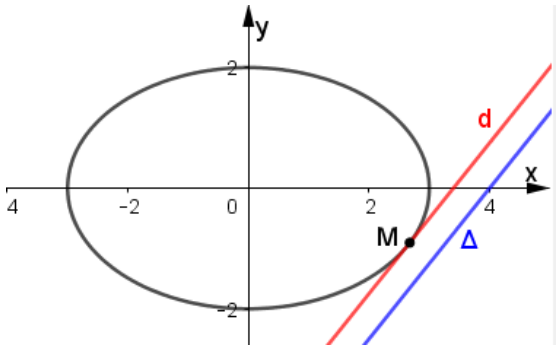
A. $\dfrac{3}{\sqrt{41}}$. **B.** $\dfrac{5}{\sqrt{41}}$. **C.** $\dfrac{4}{\sqrt{41}}$. **D.** $\dfrac{3}{41}$.

Lời giải

Đặt $F_1\left(-\sqrt{5};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{5};0\right)$, vì $\sqrt{5}<3$ nên tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thuộc elip có $\begin{cases}a=3\\c=\sqrt{5}\end{cases}\Rightarrow b^2=a^2-c^2=4$ suy ra $(E):\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

Tập hợp các điểm N biểu diễn số phức ω thuộc đường thẳng $\Delta: 5x-4y-20=0$.

Yêu cầu bài toán trở thành tìm điểm $M\in(E)$ và $N\in\Delta$ sao cho MN nhỏ nhất.



Đường thẳng d song song với Δ có dạng $d: 5x-4y+c=0$, $(c\neq -20)$.

d tiếp xúc với (E) khi và chỉ khi $c^2=5^2.9+(-4)^2.4=289\Rightarrow\left[\begin{array}{l}c=17\\c=-17\end{array}\right.$.

Với $c=17\Rightarrow d(d,\Delta)=\dfrac{\left|-20-17\right|}{\sqrt{5^2+(-4)^2}}=\dfrac{37}{\sqrt{41}}$.

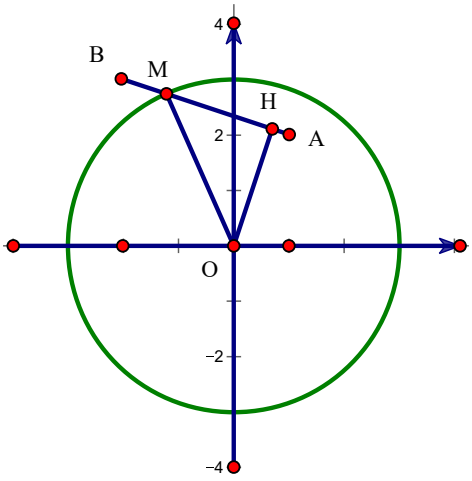
Với $c=-17\Rightarrow d(d,\Delta)=\dfrac{\left|-20+17\right|}{\sqrt{5^2+(-4)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{41}}$.

Vậy $\min(MN)=\dfrac{3}{\sqrt{41}}$.

Câu 20: Gọi $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ là số phức thỏa mãn điều kiện $\left|z-1-2i\right|+\left|z+2-3i\right|=\sqrt{10}$ và có mô đun nhỏ nhất. Tính $S=7a+b$?

A. 7. **B.** 0. **C.** 5. **D.** -12.

Lời giải



Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức $z=a+bi$

$A(1;2)$ là điểm biểu diễn số phức $(1+2i)$

$B(-2;3)$ là điểm biểu diễn số phức $(-2+3i)$, $AB=\sqrt{10}$

$|z-1-2i|+|z+2-3i|=\sqrt{10}$ trở thành $MA+MB=AB$

$\Leftrightarrow M,A,B$ thẳng hàng và M ở giữa A và B

Gọi H là điểm chiếu của O lên AB, phương trình $(AB): x+3y-7=0$, $(OH): 3x-y=0$

Tọa độ điểm $H\left(\frac{7}{10};\frac{21}{10}\right)$, Có $\overrightarrow{AH}=\left(-\frac{3}{10};\frac{1}{10}\right)$, $\overrightarrow{BH}=\left(\frac{27}{10};-\frac{9}{10}\right)$ và $\overrightarrow{BH}=-9\overrightarrow{AH}$

Nên H thuộc đoạn AB

$|z|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM$ nhỏ nhất, mà M thuộc đoạn AB

$\Leftrightarrow M\equiv H\left(\frac{7}{10};\frac{21}{10}\right)$

Lúc đó $S=7a+b=\frac{49}{10}+\frac{21}{10}=7$.

Câu 21: Cho số phức z thỏa mãn $|z+\bar{z}|+2|z-\bar{z}|=8$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-3-3i|$. Tính $M+m$.

A. $\sqrt{10}+\sqrt{34}$. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{10}+\sqrt{58}$. **D.** $\sqrt{5}+\sqrt{58}$.

Lời giải:

Gọi $z=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$, ta có $|z+\bar{z}|+2|z-\bar{z}|=8\Leftrightarrow |x|+2|y|=4\Rightarrow \begin{cases}|x|\le 4\\ |y|\le 2\end{cases}$, tập hợp

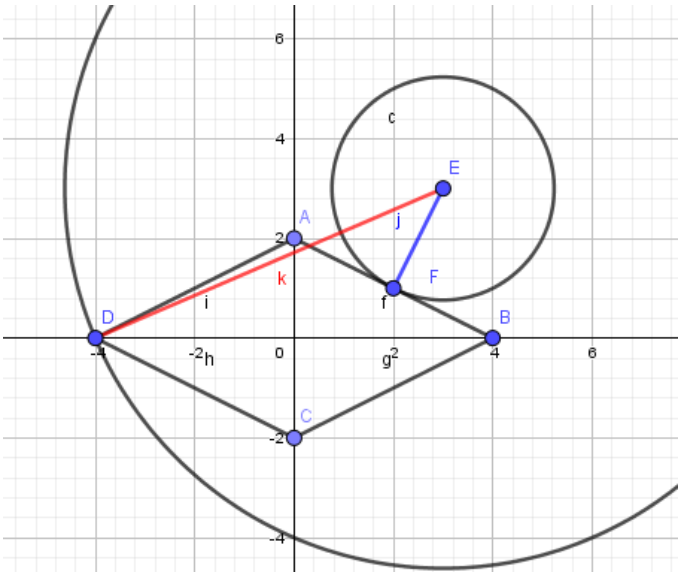
$K(x;y)$ biểu diễn số phức z thuộc cạnh các cạnh của trong hình thoi $ABCD$ như hình vẽ.

$P=\left|z-3-3i\right|$ đạt giá trị lớn nhất khi KM lớn nhất, theo hình vẽ ta có KM lớn nhất khi $K\equiv D$ hay $K\left(-4;0\right)$ suy ra $M=\sqrt{49+9}=\sqrt{58}$

$P=\left|z-3-3i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi KM nhỏ nhất, theo hình vẽ ta có KM nhỏ nhất khi $K\equiv F$ (F là hình chiếu của E trên AB .

Suy ra $F\left(2;1\right)$ do $AE=AB$ nên F là trung điểm của AB .

Suy ra $m=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$. Vậy $M+m=\sqrt{58}+\sqrt{5}$



Câu 22: Cho số phức z có $\left|z\right|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|z^2-z\right|+\left|z^2+z+1\right|$.

A. $\frac{13}{4}$ **B.** 3 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $\frac{11}{4}$

Lời giải

$P=\left|z^2-z\right|+\left|z^2+z+1\right|=\left|z\right|\left|z-1\right|+\left|z^2+z+1\right|=\left|z-1\right|+\left|z^2+z+1\right|$

Do $\left|z\right|=1$ nên ta đặt $z=\cos x+i.\sin x$. Khi đó

$P=\left|z-1\right|+\left|z^2+z+1\right|=\left|\cos x+i.\sin x-1\right|+\left|\cos 2x+i\sin 2x+\cos x+i\sin x+1\right|$

$=\sqrt{\left(\cos x-1\right)^2+\sin^2 x}+\sqrt{\left(\cos 2x+\cos x+1\right)^2+\left(\sin 2x+\sin x\right)^2}$

$=\sqrt{2-2\cos x}+\sqrt{3+4\cos x+2\cos 2x}$

$=\sqrt{2-2\cos x}+\sqrt{4\cos^2 x+4\cos x+1}$

$=\sqrt{2-2\cos x}+\left|2\cos x+1\right|$

Đặt $t=\cos x,\ t\in\left[-1;1\right]$. Xét hàm $y=\sqrt{2-2t}+\left|2t+1\right|$

Với $t\geq -\frac{1}{2}$ thì $y=\sqrt{2-2t}+2t+1,\ y'=\frac{-1}{\sqrt{2-2t}}+2$

$y'=0\Leftrightarrow\frac{-1}{\sqrt{2-2t}}+2=0\Leftrightarrow t=\frac{7}{8}$

$y(1)=3; y\left(\frac{7}{8}\right)=\frac{13}{4}; y\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}$

Với $t<-\frac{1}{2}$ thì $y=\sqrt{2-2t}-2t-1,\ y'=\frac{-1}{\sqrt{2-2t}}-2$

$y'=0\Leftrightarrow\frac{-1}{\sqrt{2-2t}}-2=0\Leftrightarrow\sqrt{2-2t}=\frac{-1}{2}$

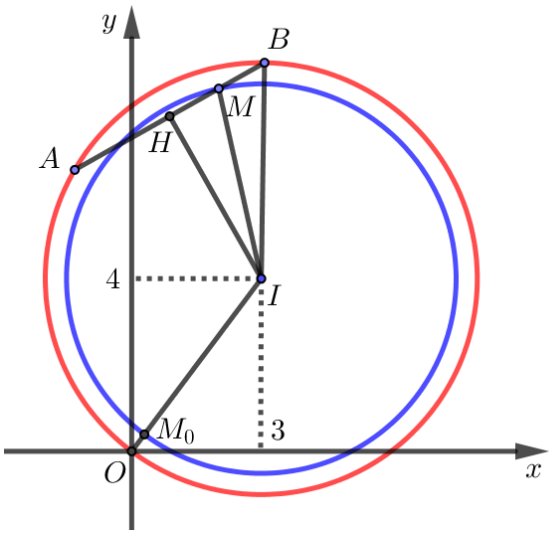
$y(-1)=3; y\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}$

Vậy $\max\limits_{[-1;1]} y=\frac{13}{4}$. Do đó giá trị lớn nhất của $P=\left|z^2-z\right|+\left|z^2+z+1\right|$ là $\frac{13}{4}$.

Câu 23: Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z-6)(8+\overline{zi})$ là số thực. Biết rằng $|z_1-z_2|=4$, giá trị nhỏ nhất của $|z_1+3z_2|$ bằng

A. $5-\sqrt{21}$ **B.** $20-4\sqrt{21}$ **C.** $20-4\sqrt{22}$ **D.** $5-\sqrt{22}$

Lời giải



Giả sử $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Gọi A,B lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức z_1, z_2. Suy ra $AB=|z_1-z_2|=4$.

* Ta có $(z-6)(8+\overline{zi})=[(x-6)+yi].[(8-y)-xi]=(8x+6y-48)-(x^2+y^2-6x-8y)i$.

Theo giả thiết $(z-6)(8+\overline{zi})$ là số thực nên ta suy ra $x^2+y^2-6x-8y=0$. Tức là các điểm A,B thuộc đường tròn (C) tâm $I(3;4)$, bán kính $R=5$.

* Xét điểm M thuộc đoạn AB thỏa $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=4\overrightarrow{OM}$ .Gọi H là trung điểm AB . Ta tính được $HI^2=R^2-HB^2=21; IM=\sqrt{HI^2+HM^2}=\sqrt{22}$, suy ra điểm M thuộc đường tròn (C') tâm $I(3;4)$, bán kính $r=\sqrt{22}$.

* Ta có $|z_1+3z_2|=|\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}|=|4\overrightarrow{OM}|=4OM$, do đó $|z_1+3z_2|$ nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất.

Ta có $(OM)_{\min}=OM_0=|OI-r|=5-\sqrt{22}$.

Vậy $|z_1+3z_2|_{\min}=4OM_0=20-4\sqrt{22}$.

Câu 24: Trong các số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=2$ có hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-z_2|=1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1|^2-|z_2|^2$ bằng

A. -10 **B.** $-4-3\sqrt{5}$ **C.** -5 **D.** $-6-2\sqrt{5}$

Lời giải

Đặt $z_1=x_1+y_1i,(x_1,\ y_1\in\mathbb{R})$ và $z_2=x_2+y_2i,(x_2,y_2\in\mathbb{R})$.

Khi đó $\begin{cases}(x_1-3)^2+(y_1-4)^2=4\\(x_2-3)^2+(y_2-4)^2=4\end{cases}$ và $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=1$.

Ta có $(x_1-3)^2+(y_1-4)^2=(x_2-3)^2+(y_2-3)^2\Leftrightarrow x_1^2+y_1^2-(x_2^2+y_2^2)=6(x_1-x_2)+8(y_1-y_2)$.

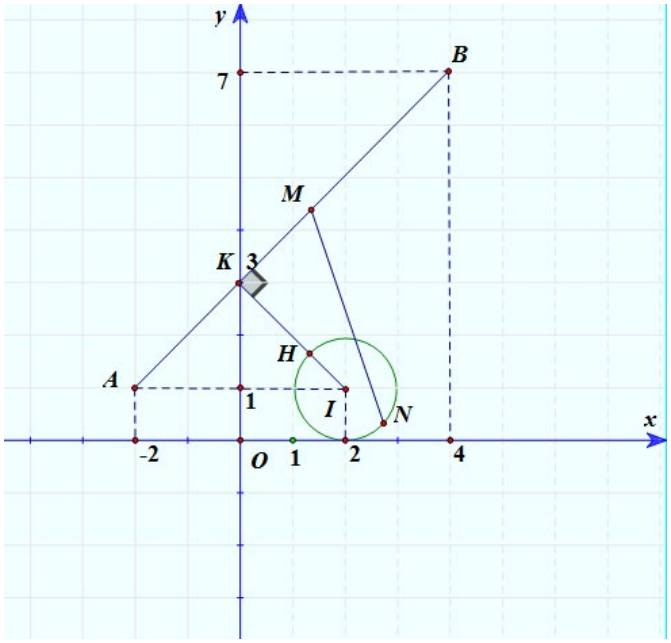
Suy ra $\left||z_1|^2-|z_2|^2\right|=2|3(x_1-x_2)+4(y_1-y_2)|\le 2.\sqrt{(3^2+4^2)\left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\right]}=10$.

Do đó $-10\le|z_1|^2-|z_2|^2\le 10$.

Câu 25: Cho hai số phức z_1,z_2 thoả mãn $|z_1+2-i|+|z_1-4-7i|=6\sqrt{2}$ và $|iz_2-1+2i|=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=|z_1+z_2|$.

A. $\sqrt{2}-1$. **B.** $\sqrt{2}+1$. **C.** $2\sqrt{2}+1$. **D.** $2\sqrt{2}-1$.

Lời giải



Gọi M là điểm biểu diễn số phức z_1 và $A(-2;1)$; $B(4;7)$ lần lượt là hai điểm biểu diễn hai số phức $-2+i$, $4+7i$. Ta có $AB=6\sqrt{2}$. Phương trình đường thẳng AB là $d: x-y+3=0$.

+) $|z_1+2-i|+|z_1-4-7i|=6\sqrt{2} \Leftrightarrow MA+MB=6\sqrt{2} \Leftrightarrow MA+MB=AB$. Do đó tập hợp các điểm biểu diễn số phức z_1 là đoạn thẳng AB.

+) $|iz_2-1+2i|=1 \Leftrightarrow |iz_2-1+2i||i|=1 \Leftrightarrow |-z_2-2-i|=1$.

Gọi N là điểm biểu diễn số phức $-z_2$ và $I(2;1)$ là điểm biểu diễn số phức $2+i$. Ta có $IN=1$

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức $-z_2$ là đường tròn (C) có phương trình:

$(x-2)^2+(y-1)^2=1$.

$d(I,AB)=2\sqrt{2}>1$, suy ra AB không cắt đường tròn.

Gọi K là hình chiếu của $I(2;1)$ lên AB. Dễ thấy K nằm trên đoạn thẳng AB.

Gọi H là giao điểm của đoạn IK với đường tròn (C).

Ta có $|z_1+z_2|=MN \geq KH=d(I,AB)-R=2\sqrt{2}-1$.

Suy ra $min|z_1+z_2|=2\sqrt{2}-1$.

Câu 26: Cho z là số phức thỏa mãn $|\overline{z}|=|z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z-1+2i|+|z+1+3i|$ là

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Đặt $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|\overline{z}|=|z+2i| \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+(b+2)^2} \Leftrightarrow 4b+4=0 \Leftrightarrow b=-1$

$\Rightarrow z=a-i$.

Xét: $|z-1+2i|+|z+1+3i|=|a-1+i|+|a+1+2i|=\sqrt{(1-a)^2+1^2}+\sqrt{(1+a)^2+2^2}$.

Áp dụng BĐT Mincôpxki:

$\sqrt{(1-a)^2+1^2}+\sqrt{(1+a)^2+2^2}\geq\sqrt{(1-a+1+a)^2+(1+2)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.

Suy ra: $|z-1+2i|+|z+1+3i|$ đạt GTNN là $\sqrt{13}$ khi $2(1-a)=1+a\Leftrightarrow a=\frac{1}{3}$.

Nhận xét: Bài toán trên có thể được giải quyết bằng cách đưa về bài toán hình học phẳng.

Câu 27: Cho các số phức $z_1=-2+i$, $z_2=2+i$ và số phức z thay đổi thỏa mãn $|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=16$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị biểu thức M^2-m^2 bằng

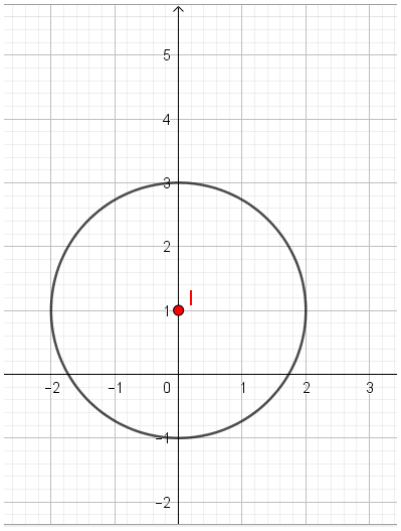
A. 15. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 8.

Lời giải

Giả sử $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=16\Leftrightarrow|x+yi+2-i|^2+|x+yi-2-i|^2=16\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=4$.

Suy ra tập hợp điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm số phức $I(0;1)$ bán kính $R=2$.



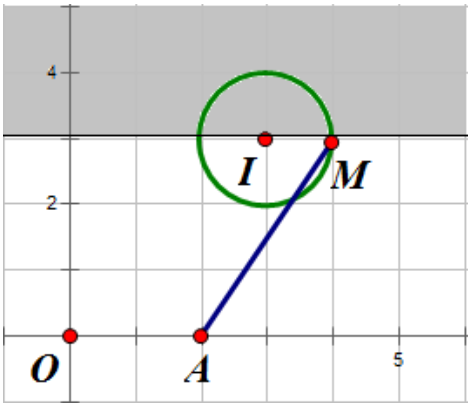
Do đó $m=1$, $M=3$.

Vậy $M^2-m^2=8$.

Câu 28: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2i|\leq|z-4i|$ và $|z-3-3i|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-2|$ là:

A. $\sqrt{13}+1$. **B.** $\sqrt{10}+1$. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Lời giải



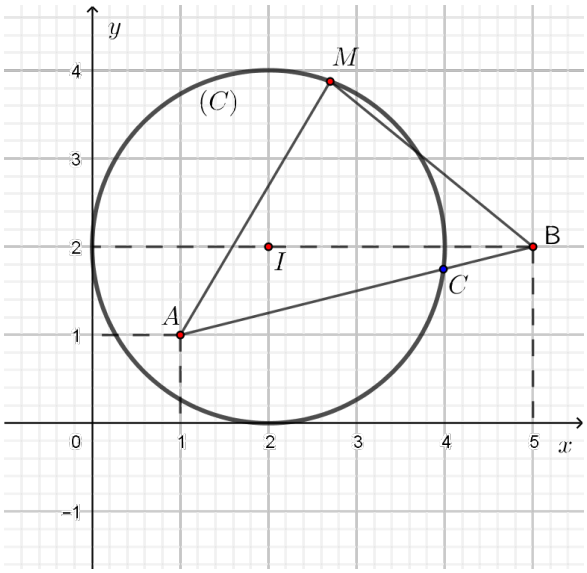
Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z ta có: $|z-2i|\le|z-4i| \Leftrightarrow x^2+(y-2)^2\le x^2+(y-4)^2$

$\Leftrightarrow y\le 3$; $|z-3-3i|=1 \Leftrightarrow$ điểm M nằm trên đường tròn tâm $I(3;3)$ và bán kính bằng 1. Biểu thức $P=|z-2|=AM$ trong đó $A(2;0)$, theo hình vẽ thì giá trị lớn nhất của $P=|z-2|$ đạt được khi $M(4;3)$ nên $\max P=\sqrt{(4-2)^2+(3-0)^2}=\sqrt{13}$.

Câu 29: Xét số phức z thỏa mãn $|z-2-2i|=2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-1-i|+|z-5-2i|$ bằng

A. $1+\sqrt{10}$. **B.** 4. **C.** $\sqrt{17}$ **D.** 5.

Lời giải



Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z. Do $|z-2-2i|=2$ nên tập hợp điểm M là đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-2)^2=4$.

Các điểm $A(1;1)$, $B(5;2)$ là điểm biểu diễn các số phức $1+i$ và $5+2i$. Khi đó, $P=MA+MB$.

Nhận thấy, điểm A nằm trong đường tròn (C) còn điểm B nằm ngoài đường tròn (C), mà $MA+MB\ge AB=\sqrt{17}$. Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của đoạn AB với (C).

Ta có, phương trình đường thẳng $AB: x-4y+3=0$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng AB và đường tròn (C) là nghiệm của hệ với $1<y<5$

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2=4\\ x-4y+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(4y-5)^2+(y-2)^2=4\\ x=4y-3\end{cases}$$

Ta có $(4y-5)^2+(y-2)^2=4\Leftrightarrow 17y^2-44y+25=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{22+\sqrt{59}}{17}(N)\\ y=\dfrac{22-\sqrt{59}}{17}(L)\end{array}\right.$

Vậy $\min P=\sqrt{17}$ khi $z=\dfrac{37+4\sqrt{59}}{17}+\dfrac{22+\sqrt{59}}{17}i$

Câu 30: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Môđun của số phức $w=M+mi$ là

A. $|w|=3\sqrt{137}$. **B.** $|w|=\sqrt{1258}$. **C.** $|w|=2\sqrt{309}$. **D.** $|w|=2\sqrt{314}$.

Lời giải

- Đặt $z=x+yi$, với $x,y\in\mathbb{R}$.

Ta có: $|z-3-4i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow|(x-3)+(y-4)i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=5$, hay tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C) có tâm $I(3;4)$, bán kính $r=\sqrt{5}$.

- Khi đó : $P=|z+2|^2-|z-i|^2=(x+2)^2+y^2-x^2-(y-1)^2=4x+2y+3$

$\Rightarrow 4x+2y+3-P=0$, kí hiệu là đường thẳng Δ.

- Số phức z tồn tại khi và chỉ khi đường thẳng Δ cắt đường tròn (C)

$\Leftrightarrow d(I;\Delta)\le r\Leftrightarrow\dfrac{|23-P|}{2\sqrt{5}}\le\sqrt{5}\Leftrightarrow|P-23|\le 10\Leftrightarrow 13\le P\le 33$

Suy ra $M=33$ và $m=13\Rightarrow w=33+13i$.

Vậy $|w|=\sqrt{1258}$.

Câu 31: Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+1-i|=2$ và $z_2=iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z_1-z_2|$?

A. $m=\sqrt{2}-1$. **B.** $m=2\sqrt{2}$. **C.** $m=2$. **D.** $m=2\sqrt{2}-2$.

Lời giải

Đặt $z_1=a+bi;\ a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow z_2=-b+ai$

$\Rightarrow z_1-z_2=(a+b)+(b-a)i$.

Nên $|z_1-z_2|=\sqrt{(a+b)^2+(b-a)^2}=\sqrt{2}.|z_1|$

Ta lại có $2=|z_1+1-i|\le|z_1|+|1-i|=|z_1|+\sqrt{2}$

$\Rightarrow|z_1|\ge 2-\sqrt{2}$. Suy ra $|z_1-z_2|=\sqrt{2}.|z_1|\ge 2\sqrt{2}-2$.

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{-1}<0$.

Vậy $m=\min|z_1-z_2|=2\sqrt{2}-2$.

Câu 32: Cho hai số phức z,w thỏa mãn $\begin{cases}|z-3-2i|\le 1\\ |\mathrm{w}+1+2i|\le|\mathrm{w}-2-i|\end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=|z-\mathrm{w}|$.

A. $P_{\min}=\dfrac{3\sqrt{2}-2}{2}$. **B.** $P_{\min}=\sqrt{2}+1$. **C.** $P_{\min}=\dfrac{5\sqrt{2}-2}{2}$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{3\sqrt{2}-2}{2}$.

Lời giải

Giả sử $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$, $\mathrm{w}=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$.

$|z-3-2i|\le 1\Leftrightarrow(a-3)^2+(b-2)^2\le 1$

$|\mathrm{w}+1+2i|\le|\mathrm{w}-2-i|\Leftrightarrow(x+1)^2+(y+2)^2\le(x-2)^2+(y-1)^2$.

Suy ra $x+y=0$.

$P=|z-\mathrm{w}|=\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}=\sqrt{(a-x)^2+(b+x)^2}$.

Từ ta có $I(3;2)$, bán kính $r=1$. Gọi H là hình chiếu của I trên $d:y=-x$.

Đường thẳng HI có PTTS $\begin{cases}x=3+t\\ y=2+t\end{cases}$.

$M\in HI\Rightarrow M(3+t;2+t)$

$M\in(C)\Leftrightarrow 2t^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ t=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$

$t=2\Rightarrow M\left(3+\dfrac{1}{\sqrt{2}};2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $MH=\dfrac{5+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$t=3\Rightarrow M\left(3-\dfrac{1}{\sqrt{2}};2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $MH=\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

Vậy $P_{\min}=\dfrac{5\sqrt{2}-2}{2}$.

Câu 33: Cho các số phức w, z thỏa mãn $|\mathrm{w}+\mathrm{i}|=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5\mathrm{w}=(2+\mathrm{i})(z-4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-1-2\mathrm{i}|+|z-5-2\mathrm{i}|$ bằng

A. $6\sqrt{7}$. **B.** $4+2\sqrt{13}$. **C.** $2\sqrt{53}$. **D.** $4\sqrt{13}$.

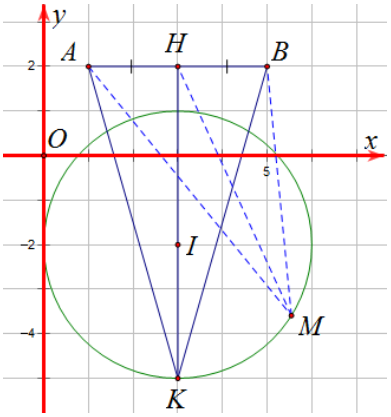
Lời giải

Gọi $z=x+y\mathrm{i}$, với $x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số phức z.

Theo giả thiết, $5\mathrm{w}=(2+\mathrm{i})(z-4)\Leftrightarrow 5(\mathrm{w}+\mathrm{i})=(2+\mathrm{i})(z-4)+5\mathrm{i}\Leftrightarrow(2-\mathrm{i})(\mathrm{w}+\mathrm{i})=z-3+2\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow|z-3+2\mathrm{i}|=3$. Suy ra $M(x;y)$ thuộc đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+2)^2=9$.

Ta có $P=|z-1-2\mathrm{i}|+|z-5-2\mathrm{i}|=MA+MB$, với $A(1;2)$ và $B(5;2)$.



Gọi H là trung điểm của AB, ta có $H(3;2)$ và khi đó:

$P=MA+MB\le\sqrt{2\left(MA^2+MB^2\right)}$ hay $P\le\sqrt{4MH^2+AB^2}$.

Mặt khác, $MH\le KH$ với mọi $M\in(C)$ nên $P\le\sqrt{4KH^2+AB^2}=\sqrt{4(IH+R)^2+AB^2}$

$=2\sqrt{53}$.

Vậy $P_{\max}=2\sqrt{53}$ khi $\begin{cases}M\equiv K\\MA=MB\end{cases}$ hay $z=3-5\mathrm{i}$ và $\mathrm{w}=\frac{3}{5}-\frac{11}{5}\mathrm{i}$.

Câu 34: Xét các số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-3-2i|=2$. Tính $a+b$ khi $|z+1-2i|+2|z-2-5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $4-\sqrt{3}$. **B.** $2+\sqrt{3}$. **C.** 3. **D.** $4+\sqrt{3}$.

Lời giải

Cách 1:

Đặt $z-3-2i=w$ với $w=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$. Theo bài ra ta có $|w|=2\Leftrightarrow x^2+y^2=4$.

Ta có $P=|z+1-2i|+2|z-2-5i|=|w+4|+2|w+1-3i|=\sqrt{(x+4)^2+y^2}+2\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$

$=\sqrt{20+8x}+2\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}=2\sqrt{5+2x}+2\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$

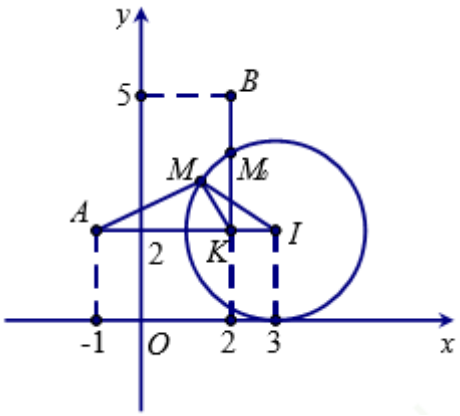
$=2\left(\sqrt{x^2+y^2+2x+1}+\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}\right)=2\left(\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}\right)$

$\ge 2\left(|y|+|y-3|\right)\ge 2|y+3-y|=6$.

$$P=6\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y(3-y)\ge 0\\ x^2+y^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=\sqrt{3}\end{cases}.$$

Vậy GTNN của P là bằng 6 đạt được khi $z=2+\left(2+\sqrt{3}\right)i$.

Cách 2:



$|z-3-2i|=2\Rightarrow MI=2\Rightarrow M\in(I;2)$ với $I=(3;2)$.

$P=|z+1-2i|+2|z-2-5i|=MA+2MB$ với $A=(1;2)$, $B=(2;5)$.

Ta có $IM=2$; $IA=4$. Chọn $K(2;2)$ thì $IK=1$. Do đó ta có $IA.IK=IM^2\Rightarrow\dfrac{IA}{IM}=\dfrac{IM}{IK}$

$\Rightarrow\Delta IAM$ và ΔIMK đồng dạng với nhau $\Rightarrow\dfrac{AM}{MK}=\dfrac{IM}{IK}=2\Rightarrow AM=2MK$.

Từ đó $P=MA+2MB=2(MK+MB)\ge 2BK$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M, K, B thẳng hàng và M thuộc đoạn thẳng BK.

Từ đó tìm được $M=\left(2;2+\sqrt{3}\right)$.

Cách 3:

Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức $z=a+bi$. Đặt $I=(3;2)$, $A(-1;2)$ và $B(2;5)$.

Ta xét bài toán: Tìm điểm M thuộc đường tròn (C) có tâm I, bán kính $R=2$ sao cho biểu thức $P=MA+2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Trước tiên, ta tìm điểm $K(x;y)$ sao cho $MA=2MK\ \forall M\in(C)$.

Ta có $MA=2MK\Leftrightarrow MA^2=4MK^2\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2=4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IK}\right)^2$

$\Leftrightarrow MI^2+IA^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}=4\left(MI^2+IK^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IK}\right)\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}-4\overrightarrow{IK}\right)=3R^2+4IK^2-IA^2\ (*)$.

$(*)$ luôn đúng $\forall M \in (C) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} - 4\overrightarrow{IK} = \vec{0} \\ 3R^2 + 4IK^2 - IA^2 = 0 \end{cases}$.

$\overrightarrow{IA} - 4\overrightarrow{IK} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-3) = -4 \\ 4(y-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$.

Thử trực tiếp ta thấy $K(2;2)$ thỏa mãn $3R^2 + 4IK^2 - IA^2 = 0$.

Vì $BI^2 = 1^2 + 3^2 = 10 > R^2 = 4$ nên B nằm ngoài (C).

Vì $KI^2 = 1 < R^2 = 4$ nên K nằm trong (C).

Ta có $MA + 2MB = 2MK + 2MB = 2(MK + MB) \geq 2KB$.

Dấu bằng trong bất đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn thẳng BK.

Do đó $MA + 2MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của (C) và đoạn thẳng BK.

Phương trình đường thẳng $BK: x = 2$.

Phương trình đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 2 \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$.

Thử lại thấy $M(2; 2+\sqrt{3})$ thuộc đoạn BK.

Vậy $a = 2$, $b = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow a + b = 4 + \sqrt{3}$.

Câu 35: Biết rằng hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 3 - 4i| = 1$ và $|z_2 - 3 - 4i| = \frac{1}{2}$. Số phức z có phần thực là a và phần ảo là b thỏa mãn $3a - 2b = 12$. Giá trị nhỏ nhất của $P = |z - z_1| + |z - 2z_2| + 2$ bằng:

A. $P_{\min} = \frac{\sqrt{9945}}{11}$. **B.** $P_{\min} = 5 - 2\sqrt{3}$. **C.** $P_{\min} = \frac{\sqrt{9945}}{13}$. **D.** $P_{\min} = 5 + 2\sqrt{5}$.

Lời giải

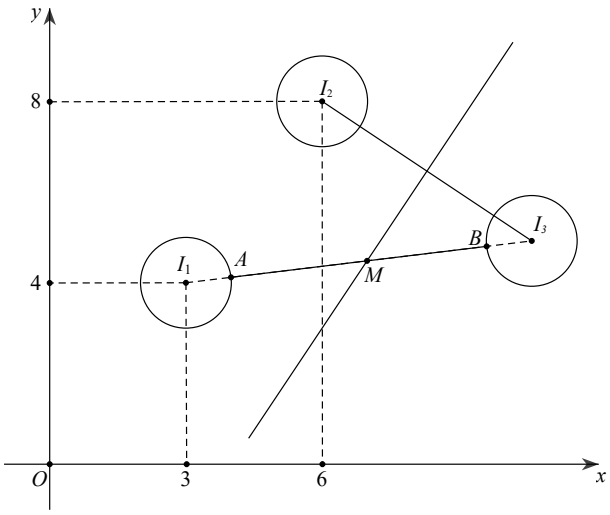
Gọi M_1, M_2, M lần lượt là điểm biểu diễn cho số phức z_1, $2z_2$, z trên hệ trục tọa độ Oxy.

Khi đó quỹ tích của điểm M_1 là đường tròn (C_1) tâm $I(3;4)$, bán kính $R = 1$;

quỹ tích của điểm M_2 là đường (C_2) tròn tâm $I(6;8)$, bán kính $R = 1$;

quỹ tích của điểm M là đường thẳng $d: 3x - 2y - 12 = 0$.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $MM_1 + MM_2 + 2$.



Gọi (C_3) có tâm $I_3\left(\frac{138}{13};\frac{64}{13}\right)$, $R=1$ là đường tròn đối xứng với (C_2) qua d. Khi đó $\min(MM_1+MM_2+2)=\min(MM_1+MM_3+2)$ với $M_3\in(C_3)$.

Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đoạn thẳng I_1I_3 với (C_1), (C_3). Khi đó với mọi điểm $M_1\in(C_1)$, $M_3\in(C_3)$, $M\in d$ ta có $MM_1+MM_3+2\ge AB+2$, dấu "=" xảy ra khi $M_1\equiv A, M_3\equiv B$. Do đó $P_{\min}=AB+2=I_1I_3-2+2=I_1I_3=\frac{\sqrt{9945}}{13}$.

Câu 36: Trong các số phức thỏa mãn: $|z-1+i|=|\overline{z}+1-2i|$, số phức z có mô đun nhỏ nhất có phần ảo là

A. $\frac{3}{10}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $-\frac{3}{5}$. **D.** $-\frac{3}{10}$.

Lời giải

+ Gọi số phức cần tìm là $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$.

$\Rightarrow \overline{z}=a-bi$

+ $|z-1+i|=|\overline{z}+1-2i|$

$\Rightarrow |a+bi-1+i|=|a-bi+1-2i|$

$\Leftrightarrow |a-1+(b+1)i|=|a+1-(b+2)i|$.

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2}=\sqrt{(a+1)^2+(b+2)^2}$

$\Leftrightarrow 4a+2b+3=0\Leftrightarrow b=-\frac{4a+3}{2}=-2a-\frac{3}{2}$

+ $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+\left(2a+\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{5a^2+6a+\frac{9}{4}}=\sqrt{5\left(a^2+\frac{6}{5}a+\frac{9}{25}\right)+\frac{9}{20}}$

$=\sqrt{5\left(a+\frac{3}{5}\right)^2+\frac{9}{20}}\ge\sqrt{\frac{9}{20}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$

$|z|$ nhỏ nhất bằng $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ khi $a=-\frac{3}{5}\Rightarrow b=-\frac{3}{10}$.

Câu 37: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị lớn nhất của $P=\left|z^5+\overline{z}^3+6z\right|-2\left|z^4+1\right|$. Tính $M-m$.

A. $M-m=1$. **B.** $M-m=7$. **C.** $M-m=6$. **D.** $M-m=3$.

Lời giải

Ta có: $z\overline{z}=|z|^2=1\Leftrightarrow\overline{z}=\frac{1}{z}$.

Suy ra $P=\left|z^5+\frac{1}{z^3}+6z\right|-2\left|z^4+1\right|=\frac{1}{|z|^3}\left|z^8+1+6z^4\right|-2\left|z^4+1\right|=\left|z^8+6z^4+1\right|-2\left|z^4+1\right|$

Đặt $w=z^4\Rightarrow|w|=1$, ta được $P=\left|w^2+6w+1\right|-|2w+2|$.

Gọi $w=x+yi$, vì $|w|=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1\Rightarrow\begin{cases}|x|\le 1\\|y|\le 1\end{cases}$.

$P=\left|x^2+6x+1-y^2+2y(x+3)i\right|-2|x+1+yi|=\left|2x^2+6x+2y(x+3)i\right|-2|x+1+yi|$

$=2\left|(x+3)(x+yi)\right|-2\sqrt{(x+1)^2+y^2}=2\left|(x+3)\right||x+yi|-2\sqrt{2x+2}$

$=2(x+3)-2\sqrt{2x+2}$

Xét hàm số $f(x)=2(x+3)-2\sqrt{2x+2}$ trên đoạn $[-1;1]$.

$f'(x)=2-2\frac{1}{\sqrt{2x+2}}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow 2-2\frac{1}{\sqrt{2x+2}}=0\Leftrightarrow\sqrt{2x+2}=1\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

Ta có: $f(-1)=4; f\left(-\frac{1}{2}\right)=3; f(1)=4$

Vậy $M=4,m=3\Rightarrow M-m=1$.

Câu 38: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+2|1-z|$ bằng

A. $6\sqrt{5}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Gọi $z=x+yi;\ (x;y\in\mathbb{R})$.

$|z|=1\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1\Rightarrow y^2=1-x^2\Rightarrow x\in[-1;1]$.

Ta có: $P=|1+z|+3|1-z|=\sqrt{(1+x)^2+y^2}+3\sqrt{(1-x)^2+y^2}=\sqrt{2(1+x)}+2\sqrt{2(1-x)}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{2(1+x)}+2\sqrt{2(1-x)};\ x\in[-1;1]$.

Hàm số liên tục trên $[-1;1]$ và với $x\in(-1;1)$ ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2(1+x)}}-\dfrac{2}{\sqrt{2(1-x)}}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{2(1+x)}}-\dfrac{2}{\sqrt{2(1-x)}}=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{5}\in(-1;1)$.

$f(1)=2;\ f(-1)=4;\ f\left(-\dfrac{3}{5}\right)=2\sqrt{5}$.

$\Rightarrow\max\limits_{x\in[-1;1]}f(x)=2\sqrt{5}$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|1+z|+3|1-z|$ bằng $2\sqrt{5}$ khi $x=-\dfrac{3}{5},\ y=\pm\dfrac{4}{5}$.

Câu 39: Cho số phức z thoả mãn $|z|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1|+|z^2-z+1|$. Tính $M.m$

A. $\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{39}{4}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{13}{4}$.

Lời giải

Thay $|z|^2=1$ vào P ta có

$P=|z+1|+|z^2-z+1|=|z+1|+|z^2-z+|z|^2|=|z+1|+|z^2-z+z.\bar{z}|=|z+1|+|z||z+\bar{z}-1|$

$=|z+1|+|z+\bar{z}-1|$.

Mặt khác $|z+1|^2=(z+1)(\bar{z}+1)=2+z+\bar{z}$.

Đặt $t=z+\bar{z}$ do $|z|=1$ nên điều kiện $t\in[-2;2]$.

Suy ra $P=\sqrt{t+2}+|t-1|$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t+2}+|t-1|$ với $t\in[-2;2]$.

$f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t+2}}+1$ với $t>1$. Suy ra $f'(t)>0$ với $t>1$.

$f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t+2}}-1$ với $t<1$. Suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-7}{4}$.

Ta có bảng biến thiên

t	-2		$-\frac{7}{4}$		1		2
$f'(t)$	|	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	|
$f(t)$	3	↗	$\frac{13}{4}$	↘	$\sqrt{3}$	↗	3

Từ bảng biến thiên suy ra $M=\frac{13}{4}$ tại $t=\frac{-7}{4}$ và $m=\sqrt{3}$ tại $t=2$.

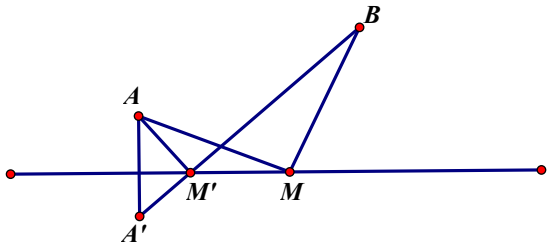
Vậy $M.m=\frac{13\sqrt{3}}{4}$.

Câu 40: Cho số phức z thỏa mãn : $|\overline{z}|=|z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-i|+|z-4|$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** 6.

Lời giải

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z. Ta có $|\overline{z}|=|z+2i|\Leftrightarrow y+1=0$, tức biểu diễn hình học của số phức thỏa mãn giả thiết là đường thẳng $y+1=0$. Xét điểm $A(0;1)$ và $B(4;0)$ thì $P=|z-i|+|z-4|=MA+MB$. Dễ thấy A,B cùng phía với đường thẳng $y+1=0$ nên $MA+MB$ nhỏ nhất bằng BA' trong đó $A'(0;-3)$ đối xứng với A qua đường thẳng $y+1=0$.



Do đó $MA+MB$ nhỏ nhất bằng $BA'=5$.

Câu 41: Cho các số phức $z_1=1+3i$, $z_2=-5-3i$. Tìm điểm $M(x;y)$ biểu diễn số phức z_3, biết rằng trong mặt phẳng phức điểm M nằm trên đường thẳng $x-2y+1=0$ và mô đun số phức $w=3z_3-z_2-2z_1$ đạt gí trị nhỏ nhất.

A. $M\left(-\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$. **B.** $M\left(\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$. **C.** $M\left(-\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right)$. **D.** $M\left(\frac{3}{5};-\frac{1}{5}\right)$.

Lời giải

Trắc nghiệm: Thay tọa độ điểm M vào vế trái phương trình đường thẳng kết quả bằng 0 thỏa ta được đáp án A

Tự luận:

Ta có $w=3z_3-z_2-2z_1=3z_3+3-3i=3(z_3+1-i)\rightarrow|w|=3|z_3+1-i|=3AM$ với $A(-1;3)$

$M(x;y)$ biểu diễn số phức z_3 nằm trên đường thẳng $d:x-2y+1=0$ và $A(-1;3)\notin d$.

Khi đó $|w|=3|z_3+1-i|=3AM$ đạt giá trị nhỏ nhất khi AM ngắn nhất $\Leftrightarrow AM\perp d$

$AM\perp d$ nên AM có phương trình: $2x+y+1=0$.

Khi đó $M=AM\cap d$ nên $M\left(-\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$..

Câu 42: Cho số phức z thoả mãn $|z-1+2i|=\sqrt{5}$. Giá trị lớn nhất của $|z+1+i|$ bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** 20. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải

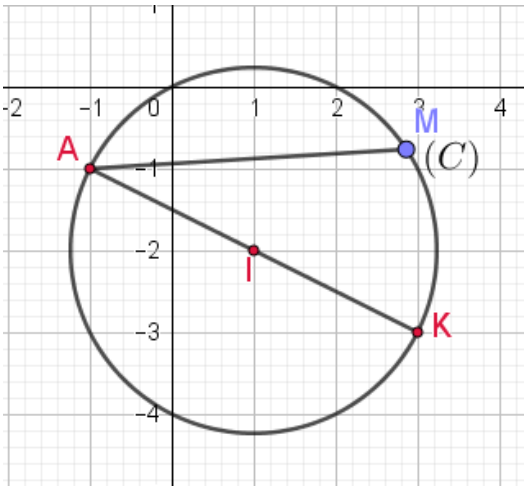
Cách 1.

Ta có $|z+1+i|=|z-1+2i+2-i|\le|z-1+2i|+|2-i|=2\sqrt{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi $z=3-3i$.

Vậy $\max|z+1+i|=2\sqrt{5}$.

Cách 2.



Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$ thì từ điều kiện ta có: $(x-1)^2+(y+2)^2=5$.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho z và $A(-1;-1)$ là điểm biểu diễn cho số phức $-1-i$, khi đó $|z+1+i|=AM$ với M thuộc đường tròn (C) tâm $I(1;-2)$ bán kính $R=\sqrt{5}$.

Dễ thấy $A\in(C)$, do đó $AM\le 2R=2\sqrt{5}$.

Suy ra $\max|z+1+i|=2\sqrt{5}$, đẳng thức xảy ra khi $M\equiv K$.

Cách 3.

$|z-1+2i|=\sqrt{5}$ $(*)$

Đặt $z=x+yi$ $(x,y\in\mathbb{R})$, khi ấy, ta có $(*)\Leftrightarrow|x+yi-1+2i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow|(x-1)+(y+2)i|=\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=5$.

Đặt $\begin{cases}x-1=\sqrt{5}\sin a\\ y+2=\sqrt{5}\cos a\end{cases}$. Ta có $|z+1+i|=|(x+1)+(y+1)i|=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{5}\sin a+2)^2+(\sqrt{5}\cos a-1)^2}=\sqrt{10+4\sqrt{5}\sin a-2\sqrt{5}\cos a}$

$= \sqrt{10+10\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\sin a-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\cos a\right)} = \sqrt{10+10\sin(a-\varphi)}$ với $\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\\ \sin\varphi=\dfrac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}$.

Vì $-1\le\sin(a-\varphi)\le 1$ với mọi $a;\varphi\in\mathbb{R}\Rightarrow\sqrt{10-10}\le|z+1+i|\le\sqrt{10+10}$

$\Leftrightarrow 0\le|z+1+i|\le 2\sqrt{5}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $|z+1+i|$ là $2\sqrt{5}$. Dấu "=" xảy ra khi $\sin(a-\varphi)=1\Leftrightarrow a-\varphi=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$

$\Rightarrow\begin{cases}\cos a=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+k2\pi+\varphi\right)=-\sin\varphi=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\\ \sin a=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+k2\pi+\varphi\right)=\cos\varphi=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-1=\sqrt{5}\sin a\\ y+2=\sqrt{5}\cos a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=2\\ y+2=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=-3\end{cases}$

$\Rightarrow z=3-3i$.

Câu 43: Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z-(2+i)\overline{z}=2i$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Giả sử $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$. Ta có

$(2-i)z-(2+i)\overline{z}=2i\Leftrightarrow(2-i)(x+yi)-(2+i)(x-yi)=2i$

$\Leftrightarrow(2x+y)+(2y-x)i-\left[(2x+y)+(-2y+x)i\right]=2i\Leftrightarrow(4y-2x)i=2i\Leftrightarrow 4y-2x=2$

$\Leftrightarrow x=2y-1$.

Do đó $|z|^2=x^2+y^2=(2y-1)^2+y^2=5y^2-4y+1=\left(\sqrt{5}y-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\dfrac{1}{5}\ge\dfrac{1}{5},\forall y\in\mathbb{R}.$

Suy ra $\min|z|=\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ khi $y=\dfrac{2}{5}$, $x=-\dfrac{1}{5}$.

Câu 44: Số phức z có môđun nhỏ nhất thoả mãn $|-2-3i+\overline{z}|=|z-i|$ là

A. $\dfrac{6}{5}-\dfrac{3}{5}i$. **B.** $\dfrac{3}{5}+\dfrac{6}{5}i$. **C.** $\dfrac{3}{5}-\dfrac{6}{5}i$. **D.** $\dfrac{6}{5}+\dfrac{3}{5}i$.

Lời giải

Đặt $z=x+yi,(x;y\in\mathbb{R})\Rightarrow\overline{z}=x-yi.$

Khi đó $|-2-3i+\overline{z}|=|z-i|\Leftrightarrow|(x-2)-(y+3)i|=|x+(y-1)i|$

$\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}\Leftrightarrow x-2y-3=0$.

Do đó tập hợp điểm biểu diễn của z là đường thẳng $\Delta: x-2y-3=0$.

Ta có $\min|z|=\mathrm{d}(O,\Delta)$. Gọi d là đường thẳng qua O và vuông góc với $\Delta\Rightarrow d: 2x+y=0$.

Gọi $H = d \cap \Delta \Rightarrow H: \begin{cases} 2x+y=0 \\ x-2y-3=0 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{3}{5};-\frac{6}{5}\right)$.

Khi đó z có môđun nhỏ nhất thoả mãn có điểm biểu diễn là H, tức là $z=\frac{3}{5}-\frac{6}{5}i$.

Câu 45: Trong các số phức z thỏa mãn $\left|\frac{(12-5i)z+17+7i}{z-2-i}\right|=13$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

A. $\frac{3\sqrt{13}}{26}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Điều kiện: $z \neq 2+i$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow |12-5i|.\left|z+\frac{17+7i}{12-5i}\right|=13|z-2-i| \Leftrightarrow |z+1+i|=|z-2-i|$ (1).

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi$. Vì $z \neq 2+i$ nên $M \neq N(2;1)$.

Khi đó, $(1) \Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=(x-2)^2+(y-1)^2 \Leftrightarrow 6x+4y-3=0$.

Ta thấy đường thẳng $d: 6x+4y-3=0$ không đi qua điểm $N(2;1)$ nên tập hợp điểm M là đường thẳng d.

Ngoài ra, $|z|=OM$ nên $|z|$ nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất, tức là

$OM = \mathrm{d}(O,d)=\frac{3}{\sqrt{6^2+4^2}}=\frac{3\sqrt{13}}{26}$.

Vậy $\min|z|=\frac{3\sqrt{13}}{26}$.

Câu 46: Cho số phức z thỏa mãn $|z^2-2z+5|=|(z-1+2i)(z+3i-1)|$. Tính $\min|w|$, với $w=z-2+2i$.

A. $\min|w|=\frac{1}{2}$. **B.** $\min|w|=1$. **C.** $\min|w|=\frac{3}{2}$. **D.** $\min|w|=2$.

Lời giải

Theo giả thiết, $|z^2-2z+5|=|(z-1+2i)(z+3i-1)|$

$\Leftrightarrow |(z-1+2i)(z-1-2i)|=|(z-1+2i)(z+3i-1)|$

$\Leftrightarrow |z-1+2i|.(|z-1-2i|-|z-1+3i|)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} |z-1+2i|=0 & (1) \\ |z-1-2i|=|z-1+3i| & (2) \end{array}\right.$.

$(1) \Leftrightarrow z-1+2i=0 \Leftrightarrow z=1-2i$. Khi đó, $|w|=|1-2i-2+2i|=1$ (3).

Đặt $z=x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó, $(2) \Leftrightarrow |(x-1)+(y-2)i|=|(x-1)+(y+3)i|$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=(x-1)^2+(y+3)^2 \Leftrightarrow (y-2)^2=(y+3)^2 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2} \Rightarrow z=x-\frac{1}{2}i$.

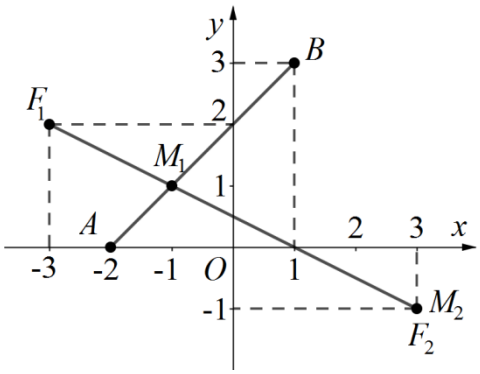
$\Rightarrow |w| = \left|(x-2)+\frac{3}{2}i\right| = \sqrt{(x-2)^2+\frac{9}{4}} \geq \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \ \forall x \in \mathbb{R}. \ (4).$

Từ (3) và $(4) \Rightarrow \min|w| = 1.$

Câu 47: Xét các số phức z thỏa mãn $|z+3-2i|+|z-3+i| = 3\sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z+2|+|z-1-3i|$. Tìm M, m.

A. $M = \sqrt{17}+\sqrt{5}$; $m = 3\sqrt{2}$.
B. $M = \sqrt{26}+2\sqrt{5}$; $m = \sqrt{2}$.
C. $M = \sqrt{26}+2\sqrt{5}$; $m = 3\sqrt{2}$.
D. $M = \sqrt{17}+\sqrt{5}$; $m = \sqrt{3}$.

Lời giải



Gọi M là điểm biểu diễn số phức z, $F_1(-3;2)$, $F_2(3;-1)$, $A(-2;0)$ và $B(1;3)$.

Ta có $|z+3-2i|+|z-3+i| = 3\sqrt{5}$ và $F_1F_2 = 3\sqrt{5} \Rightarrow MF_1+MF_2 = F_1F_2$.

Do đó tập hợp các điểm M là đoạn thẳng F_1F_2.

Dựa vào hình vẽ, ta thấy:

+ $M = P_{\max} = M_2A+M_2B = \sqrt{26}+2\sqrt{5}$.

+ $m = P_{\min} = M_1A+M_1B = AB = 3\sqrt{2}$.

Vậy $M = \sqrt{26}+2\sqrt{5}$; $m = 3\sqrt{2}$.

Câu 48: Xét các số phức z thỏa mãn $|z-1-3i| = 2$. Số phức z mà $|z-1|$ nhỏ nhất là

A. $z = 1+5i$.
B. $z = 1+i$.
C. $z = 1+3i$.
D. $z = 1-i$.

Lời giải

Giả sử $z = x+yi \ (x;y \in \mathbb{R})$.

Ta có $|z-1-3i| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2} = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = -y^2+6y-5$

Vì $(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow -y^2+6y-5 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 5$

$|z-1| = \sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{6y-5}$

Vì $1 \leq y \leq 5 \Leftrightarrow 1 \leq 6y-5 \leq 25 \Leftrightarrow 1 \leq |z-1| \leq 5$

Vậy $|z-1|$ nhỏ nhất khi $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ khi đó $z=1+i$

Câu 49: Cho các số phức z, z_1, z_2 thay đổi thỏa mãn các điều kiện sau: $|iz+2i+4|=3$, phần thực của z_1 bằng 2, phần ảo của z_2 bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=|z-z_1|^2+|z-z_2|^2$.

A. 9. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Đặt $z=x+yi, x, y \in \mathbb{R}$, ta có $M(z)=M(x;y)$

Khi đó: $|iz+2i+4|=3 \Leftrightarrow |i(x+yi)+2i+4|=3 \Leftrightarrow |(-y+4)+(x+2)i|=3$

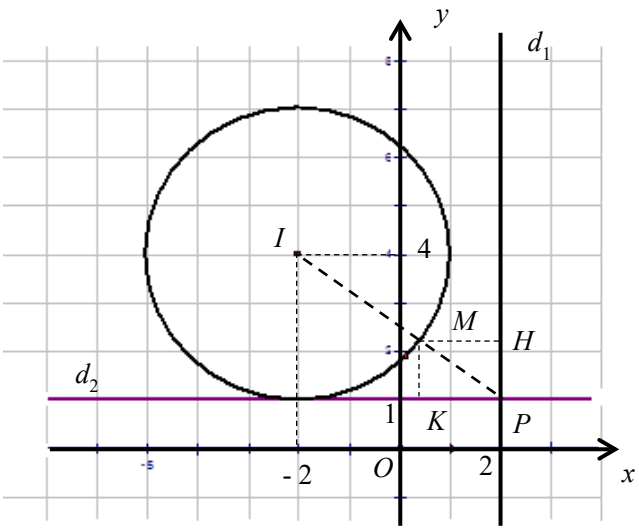
$$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-4)^2=9$$

Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn (C) tâm $I(-2;4)$, bán kính $R=3$.

Mặt khác: $z_1=2+bi \Rightarrow A(z_1)=A(2;b) \Rightarrow$ Tập hợp điểm A là đường thẳng $d_1: x=2$.

$z_2=a+i \Rightarrow B(z_2)=B(a;1) \Rightarrow$ Tập hợp điểm B là đường thẳng $d_2: y=1$.

Giao điểm của d_1 và d_2 là $P(2;1)$.



Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M trên d_1 và d_2.

Ta có: $T=|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=MA^2+MB^2 \geq MH^2+MK^2=MP^2$.

T đạt giá trị nhỏ nhất khi $A \equiv H, B \equiv K$ và I, M, P thẳng hàng.

Phương trình đường thẳng $IP: \begin{cases} x=2+4t \\ y=1-3t \end{cases} \Rightarrow M(2+4t;1-3t)$.

Mà $M \in (C)$ nên ta có $(4+4t)^2+(-3-3t)^2=9 \Leftrightarrow (1+t)^2=\frac{9}{25} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{2}{5} \\ t=-\frac{8}{5} \end{array}\right.$

- Với $t=-\frac{8}{5} \Rightarrow M\left(-\frac{22}{5};\frac{29}{5}\right)$

- Với $t=-\frac{2}{5}\Rightarrow M\left(\frac{2}{5};\frac{11}{5}\right)\Rightarrow z=\frac{2}{5}+\frac{11}{5}i\Rightarrow z_1=2+\frac{11}{5}i, z_2=\frac{2}{5}+i.$

Suy ra $MP_{\min}=IP-IM=IP-R=\sqrt{4^2+(-3)^2}-3=2$.

Vậy $T_{\min}=2^2=4$ khi $z=\frac{2}{5}+\frac{11}{5}i, z_1=2+\frac{11}{5}i, z_2=\frac{2}{5}+i.$

Câu 50: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z+i|$.

A. $5\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** $\sqrt{61}$. **D.** $3\sqrt{5}$.

Lời giải

Giả sử $z=x+yi$, $(x, y\in\mathbb{R})$.

+) Ta có: $|z-3-4i|=\sqrt{5}\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=5 \quad (1)$.

+) $P=|z+2|^2-|z-i|^2=\left[(x+2)^2+y^2\right]-\left[x^2+(y-1)^2\right]=4x+2y+3$

$=4(x-3)+2(y-4)+23\le\sqrt{\left(4^2+2^2\right)\left[(x-3)^2+(y-4)^2\right]}+23=33$.

$P=33\Leftrightarrow\frac{x-3}{4}=\frac{y-4}{2}\Leftrightarrow x-3=2(y-4) \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases}x=5\\y=5\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$.

Với $\begin{cases}x=5\\y=5\end{cases}\Rightarrow P=33$; Với $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}\Rightarrow P=13$.

Vậy số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất là $z=5+5i$. Khi đó $|z+i|=\sqrt{61}$.

Câu 51: Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-1-i|=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|a+b-5|$ là

A. $3-\sqrt{2}$. **B.** $2-\sqrt{2}$. **C.** $3-2\sqrt{2}$. **D.** $2+\sqrt{2}$.

Lời giải

Cách 1:

Theo giả thiết ta có $|z-1-i|=1\Leftrightarrow(a-1)^2+(b-1)^2=1$.

Đặt $a=1+\sin t$, $b=1+\cos t\ (0\le t\le 2\pi)$.

Khi đó $P=|a+b-5|=|\sin t+\cos t-3|=\left|\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-3\right|=3-\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$.

Ta có: $-1\le\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\le 1\Leftrightarrow-\sqrt{2}\le-\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}\Leftrightarrow 3-\sqrt{2}\le P\le 3+\sqrt{2}$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của P là $3-\sqrt{2}$.

Cách 2:

Theo giả thiết ta có $|z-1-i|=1\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-1)^2=1\Rightarrow a,b\in[0;2]$.

Khi đó $P=|a+b-5|=5-a-b=3-\left[(a-1)+(b-1)\right]$.

Theo BĐT Bunhia ta có:

$$(a-1)+(b-1)\le\sqrt{(1^2+1^2).\left[(a-1)^2+(b-1)^2\right]}=\sqrt{2}$$

Do đó $P\ge 3-\sqrt{2}$.

Câu 52: Cho số phức $z=a+bi$ (a, $b\in\mathbb{R}$) thỏa mãn $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=|z+2|+2|z-2|$.

A. 10. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $10\sqrt{2}$. **D.** 7.

Lời giải

Ta có: $|z+2|^2=(a+2)^2+b^2$; $|z-2|^2=(a-2)^2+b^2$.

Suy ra: $|z+2|^2+|z-2|^2=2\left(a^2+b^2\right)+8=2|z|^2+8=10$.

Ta có: $A^2=\left(|z+2|+2|z-2|\right)^2\le\left(1^2+2^2\right)\left(|z+2|^2+|z-2|^2\right)=50$.

Vì $A\ge 0$ nên từ đó suy ra $A\le\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của A là $5\sqrt{2}$.

Câu 53: Cho số thực a thay đổi và số phức z thỏa mãn $\dfrac{z}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{i-a}{1-a(a-2i)}$. Trên mặt phẳng tọa độ, gọi M là điểm biểu diễn số phức z. Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai điểm M và $I(-3;4)$ là

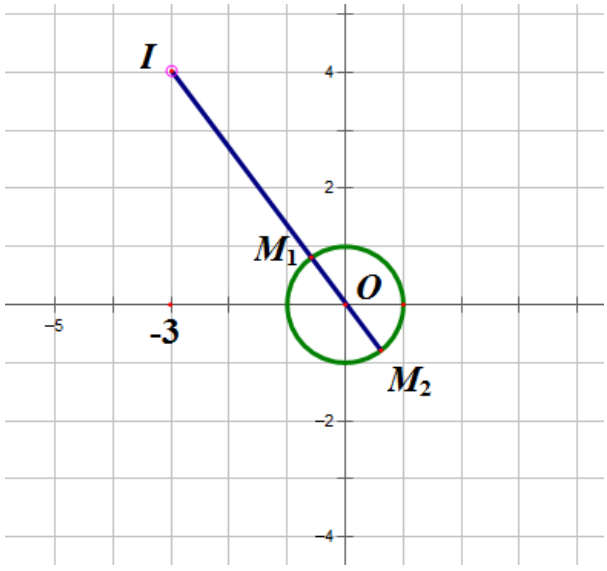
A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $\dfrac{z}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{i-a}{1-a(a-2i)}\Leftrightarrow\dfrac{z}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{(i-a)\left(1-a^2-2ai\right)}{\left(a^2+1\right)^2}$

$\Leftrightarrow\dfrac{z}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{a^3+a+\left(a^2+1\right)i}{\left(a^2+1\right)^2}\Leftrightarrow z=\dfrac{a+i}{\sqrt{a^2+1}}\Rightarrow|z|=1.$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm O bán kính $R=1$.



Ta có: $OI = 5$. Do đó: $OM_{\min} = OM_1 = OI - R = 5 - 1 = 4$.

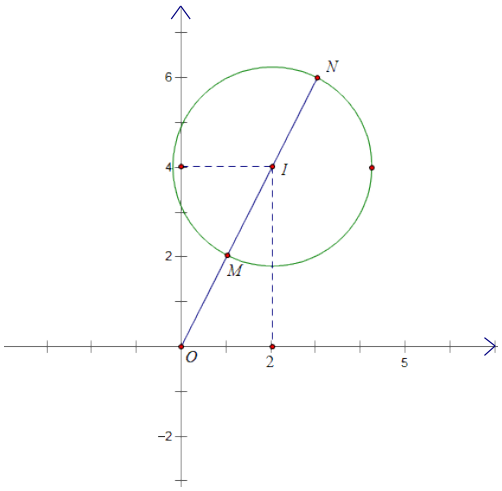
Câu 54: Xét số phức z thỏa mãn $|z-2-4i| = \sqrt{5}$. Gọi a và b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị biểu thức $a^2 - b^2$ bằng

A. 40. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** 20. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có $|z-2-4i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = 5 \Rightarrow$ tập hợp điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm $I(2;4)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.



Kẻ đường thẳng đi qua 2 điểm O và I cắt đường tròn tại 2 điểm M và N như hình vẽ.

$OI = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$; $IM = IN = R = \sqrt{5}$.

Từ hình vẽ ta thấy:

$|z|_{\min} = OM = OI - IM = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5} = b$.

$|z|_{\max} = ON = OI + IN = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5} = a$.

Vậy $a^2 - b^2 = 40$.

Câu 55: Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $\left|z-3+\sqrt{3}i\right|=2$ và $\left|z_1-z_2\right|=4$. Giá trị lớn nhất của $\left|z_1\right|+\left|z_2\right|$ bằng

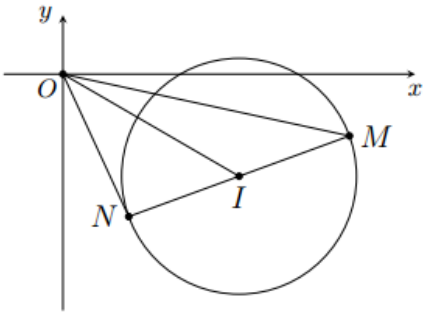
A. 8. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** 4. **D.** $2+2\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của hai số phức z_1, z_2.

Do $\begin{cases}\left|z_1-3+\sqrt{3}i\right|=\left|z_2-3+\sqrt{3}i\right|=2\\ \left|z_1-z_2\right|=4\end{cases}$ nên $\begin{cases}M,\mathrm{N}\in(C):(x-3)^2+\left(y+\sqrt{3}\right)^2=2^2\\ MN=4=2.2\end{cases}$.

Như vậy MN là đường kính của đường tròn (C) với tâm $I\left(3;-\sqrt{3}\right)$, bán kính $R=2$, do đó I là trung điểm MN, $\mathrm{O}I=\sqrt{12}$.



Ta có $\left|z_1\right|+\left|z_2\right|=OM+ON\le\sqrt{(1+1)\left(OM^2+ON^2\right)}=\sqrt{2\left(2\mathrm{O}I^2+\dfrac{MN^2}{2}\right)}=8$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $OM=ON\Leftrightarrow MN$ là đường kính của (C) vuông góc với OI.

Câu 56: Giả sử z_1,z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $(z-6)\left(8+\overline{zi}\right)$ là số thực. Biết rằng $\left|z_1-z_2\right|=4$. Giá trị nhỏ nhất của $\left|z_1+3z_2\right|$ bằng

A. $5-\sqrt{21}$. **B.** $20-4\sqrt{21}$. **C.** $20-4\sqrt{22}$. **D.** $5-\sqrt{22}$.

Lời giải

Giả sử số phức $z=x+yi$ thỏa mãn $(z-6)\left(8+\overline{zi}\right)$ là số thực. Ta có:

$(z-6)\left(8+\overline{zi}\right)=(x+yi-6)(8+\overline{(x+yi)i})=(x-6)(8-y)+8xy+\left[-8x(x-6)+y(8-y)\right]i$

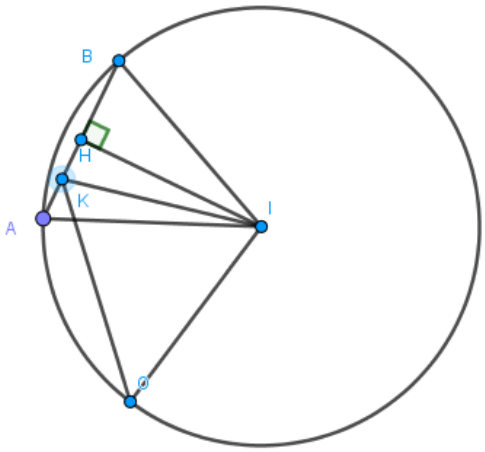
Để là $(z-6)\left(8+\overline{zi}\right)$ số thực thì $-8x(x-6)+y(8-y)=0\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$

Vậy điểm biểu diễn số phức z_1,z_2 thuộc đường tròn tâm $I(3,4)$, bán kính $R=5$

Giả sử $z_1=x_1+y_1i$ có điểm biểu diễn $A(x_1,y_1)$; $z_2=x_2+y_2i$ có điểm biểu diễn $B(x_2,y_2)$.

Vì $\left|z_1-z_2\right|=4\Leftrightarrow\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=4\Leftrightarrow AB=4$

Ta xét $\left|z_1+3z_2\right|=\left|\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}\right|$



Gọi H là trung điểm AB, K là trung điểm HB, khi đó ta có:

$|z_1+3z_2|=|\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}|=|2(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OB})|=|4\overrightarrow{OK}|=4OK$

Ta có $OI=IB=IA=5; AB=4; \text{AH}=\text{HB}=2; HK=1$ Suy ra $IH=\sqrt{21}\Rightarrow IK=\sqrt{22}$.

Theo bất đẳng thức tam giác ta có $OK+KI\geq OI\Leftrightarrow OK\geq OI-KI\Leftrightarrow OK\geq 5-\sqrt{22}$.

Suy ra $|z_1+3z_2|=4OK\geq 20-4\sqrt{22}$

Câu 57: Trong các số phức z thỏa mãn $|z^2+1|=2|z|$ gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2+|z_2|^2$ bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức mô đun : $|z_1+z_2|\geq||z_1|-|z_2||$. Dấu bằng xảy ra $z_1=kz_2,(k\leq 0)$.

Ta có: $2|z|=|z^2+1|\geq||z^2|-1|\Leftrightarrow -2|z|\leq|z^2|-1\leq 2|z|$

Với $|z^2|-1\leq 2|z|\Leftrightarrow|z^2|-2|z|-1\leq 0\Rightarrow|z|\leq 1+\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}|z|=1+\sqrt{2}\\ z^2=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-3-2\sqrt{2}\\ z=\pm(1+\sqrt{2})i\end{cases}\Rightarrow|z|_{\max}=1+\sqrt{2}=|z_2|$

Với $|z^2|-1\geq -2|z|\Leftrightarrow|z^2|+2|z|-1\geq 0\Rightarrow|z|\geq -1+\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}|z|=\sqrt{2}-1\\ z^2=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-3+2\sqrt{2}\\ z=\pm(\sqrt{2}-1)i\end{cases}\Rightarrow|z|_{\min}=\sqrt{2}-1=|z_1|$

Vậy $|z_1|^2+|z_2|^2=(\sqrt{2}-1)^2+(\sqrt{2}+1)^2=6.$

Câu 58: Gọi z là số phức có môđun nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện $|z-2-8i|=\sqrt{17}$. Biết $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$, tính $m=2a^2-3b$

A. $m=-18$. **B.** $m=54$. **C.** $m=-10$. **D.** $m=14$.

Lời giải

Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|z-2-8i|=\sqrt{17}\Leftrightarrow\sqrt{(a-2)^2+(b-8)^2}=\sqrt{17}\Leftrightarrow IM=\sqrt{17}$ với $I(2;8)$.

Suy ra: M thuộc đường tròn (C) có tâm I bán kính $R=\sqrt{17}$.

Lại có: $OI=\sqrt{2^2+8^2}=2\sqrt{17}>R$ nên O nằm ngoài (C).

GTNN của môđun z là $|z|_{\min}=OM_{\min}=OI-R=\sqrt{17}$ (1).

Đẳng thức xảy ra khi $M=OI\cap(C)$ và M nằm giữa O và I (2).

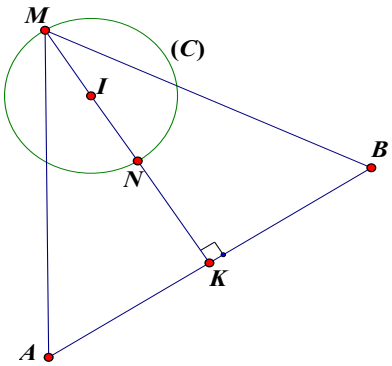
Từ (1) và (2) ta có M là trung điểm OI nên $M(1;4)$.

Suy ra $a=1;b=4$. Khi đó: $m=2a^2-3b=2-12=-10$.

Câu 59: Xét các số phức $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+2-3i|=2\sqrt{2}$. Tính $P=2a+b$ khi $|z+1+6i|+|z-7-2i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P=3$. **B.** $P=-3$. **C.** $P=1$. **D.** $P=7$.

Lời giải



Đặt $A(-1;-6),B(7;2)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(8;8)$ và trung điểm của AB là $K(3;-2)$.

Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức z ta có: $(a+2)^2+(b-3)^2=8$.

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn (C) có tâm $I(-2;3)$, bán kính $R=\sqrt{8}$.

Ta thấy $\overrightarrow{IK}=(5;-5)\Rightarrow\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow I$ nằm trên đường thẳng trung trực của AB.

Xét tam giác $MAB\Rightarrow MA^2+MB^2=2MK^2+\dfrac{AB^2}{2}$.

$\Rightarrow 2(MA^2+MB^2)=4MK^2+AB^2\geq(MA+MB)^2\Rightarrow MA+MB\leq\sqrt{4MK^2+AB^2}$.

Ta có $|z+1+6i|+|z-7-2i|$ là tổng khoảng cách từ điểm M trên đường tròn (C) tới hai điểm A và B.

Vậy $MA+MB$ lớn nhất khi: $\begin{cases} MA=MB \\ MK \text{ max} \end{cases}$. Điều này xảy ra khi M là giao điểm của IK với đường tròn (C) và M nằm ngoài đoạn IK.

Ta có phương trình của đường thẳng $IK: \begin{cases} x=-2+t \\ y=3-t \end{cases}$.

Tọa độ giao điểm của IK với đường tròn (C) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=3-t \\ (x+2)^2+(y-3)^2=8 \end{cases} \Rightarrow 2t^2=8 \Rightarrow t=\pm 2.$$

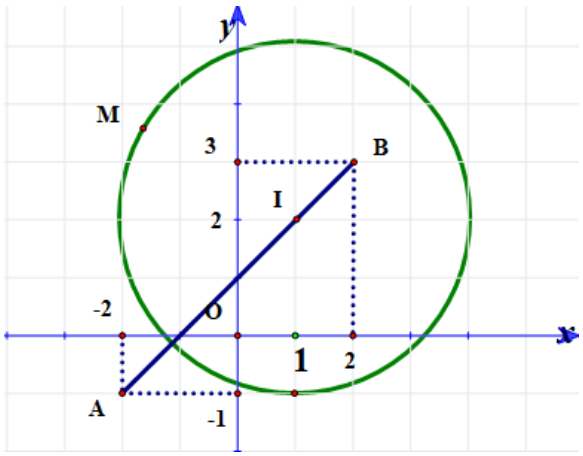
Vậy điểm M cần tìm ứng với $t=-2$ khi đó

$$M(-4;5) \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow P=2a+b=-8+5=-3$$

Câu 60: Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z+1-3i|=3\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z+2+i|+\sqrt{6}|z-2-3i|$ bằng

A. $5\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{15}(1+\sqrt{6})$. **C.** $6\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{10}+3\sqrt{15}$.

Lời giải



Cách 1

$$|(1+i)z+1-3i|=3\sqrt{2} \Leftrightarrow |1+i|\left|z+\frac{1-3i}{1+i}\right|=3\sqrt{2} \Leftrightarrow |z-(1+2i)|=3 \ (1).$$

Gọi $\overrightarrow{OM}=(x;\ y)$, $\overrightarrow{OI}=(1;\ 2)$ là vec-tơ biểu diễn cho các số phức $z=x+iy$, $w=1+2i$.

Từ (1) có $|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OI}|=3 \Leftrightarrow MI=3$.

Suy ra M thuộc đường tròn (C) tâm $I(1;2)$ bán kính $R=3$, $(C):(x-1)^2+(y-2)^3=9$

Gọi $\overrightarrow{OA}=(-2;-1)$, $\overrightarrow{OB}=(2;3)$ lần lượt là vec-tơ biểu diễn cho số phức $a=-2-i$, $b=2+3i$.

Có $\overrightarrow{IA}=(-3;-3)$, $\overrightarrow{IB}=(1;1)$. Suy ra $\overrightarrow{IA}=-3\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Lúc đó $P=MA+\sqrt{6}MB=MA+\sqrt{2}.\sqrt{3}MB\le\sqrt{3\left(MA^2+3MB^2\right)}$.

Có $MA^2+3MB^2=\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)^2+3\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)^2=4IM^2+IA^2+3IB^2$.

Có $IM^2=9$, $IA^2=18$, $IB^2=2$, nên $MA^2+3MB^2=60$.

Suy ra $P\le\sqrt{3.60}=6\sqrt{5}$.

Có $P=6\sqrt{5}\Leftrightarrow\dfrac{MA}{1}=\dfrac{\sqrt{3}MB}{\sqrt{2}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $P=6\sqrt{5}$.

Cách 2.

Giả sử $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z khi đó

$\left|(1+i)z+1-3i\right|=3\sqrt{2}\Leftrightarrow\left|x-y+1+(x+y-3)i\right|=3\sqrt{2}\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-4y-4=0$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-2)^2=9$. Do đó M thuộc đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính $R=3$.

Đặt $\begin{cases}a=x-1\\b=y-2\end{cases}$ Ta có $a^2+b^2=9$. Gọi $A=(-2;-1)$, $B=(2;3)$

$P=\left|z+2+i\right|+\sqrt{6}\left|z-2-3i\right|=MA+\sqrt{6}MB=\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{6\left[(x-2)^2+(y-3)^2\right]}$

$=\sqrt{(a+3)^2+(b+3)^2}+\sqrt{6\left[(a-1)^2+(b-1)^2\right]}=\sqrt{6(a+b)+27}+\sqrt{6}\sqrt{(-2)(a+b)+11}$

$=\sqrt{6(a+b)+27}+\sqrt{2}\sqrt{(-6)(a+b)+33}\le\sqrt{(1+2)(27+33)}=6\sqrt{5}$.

Câu 61: Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $\left|z+1-i\right|=3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=2\left|z-4+5i\right|+\left|z+1-7i\right|$ bằng $a\sqrt{b}$. Tính $S=a+b$?

A. 20. **B.** 18. **C.** 24. **D.** 17.

Lời giải

Gọi $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có:

$\left|z+1-i\right|=3\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-1)^2=9(C)$;

Suy ra, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C), có tâm là $I(-1;1)$ và bán kính $R=3$.

Ta có:

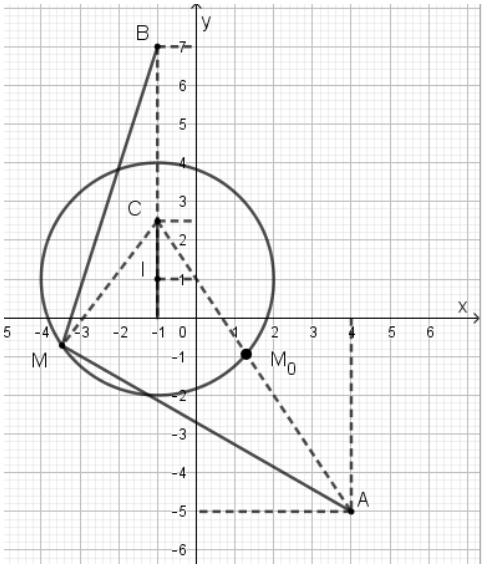
$A=2\left|z-4+5i\right|+\left|z+1-7i\right|=2\sqrt{(x-4)^2+(y+5)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y-7)^2}$

$$= 2\sqrt{(x-4)^2+(y+5)^2} + \sqrt{(x+1)^2+(y-7)^2+3\left((x+1)^2+(y-1)^2-9\right)}$$

$$= 2\sqrt{(x-4)^2+(y+5)^2} + \sqrt{4x^2+8x+4y^2-20y+29}$$

$$= 2\sqrt{(x-4)^2+(y+5)^2} + 2\sqrt{x^2+2x+y^2-10y+\frac{29}{4}}$$

$$= 2\left(\sqrt{(x-4)^2+(y+5)^2} + \sqrt{(x+1)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2}\right).$$



Gọi $M(x;y) \in (C)$.

$\Rightarrow A = 2|z-4+5i| + |z+1-7i| = 2MA + MB,\ A(4;-5); B(-1;7)$.

$\Rightarrow A = 2MA + MB = 2(MA + MC),\ C\left(-1;\frac{5}{2}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{IC} = \left(0;\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \left|\overrightarrow{IC}\right| = \frac{3}{2} < R_{(C)}$.

Suy ra, điểm C nằm trong đường tròn (C).

Vậy, đường thẳng AC cắt đường tròn (C) tại hai điểm.

Do đó, để $A = 2(MA + MC)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì M phải nằm giữa hai điểm A và C.

$\Rightarrow A = 2(MA + MC) \geq 2AC,\ AC = \frac{5\sqrt{13}}{2}$.

$\Rightarrow A \geq 5\sqrt{13} = a\sqrt{b}$.

Vậy, $a + b = 18$.

Câu 62: Cho z_1, z_2 là nghiệm phương trình $|6-3i+iz|=|2z-6-9i|$ và thỏa mãn $|z_1-z_2|=\frac{8}{5}$. Giá trị lớn nhất của $|z_1+z_2|$ bằng

A. $\frac{56}{5}$. **B.** $\frac{28}{5}$. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Gọi $z_1=x_1+y_1i$, $z_2=x_2+y_2i$, với $x_1,y_1,x_2,y_2\in\mathbb{R}$.

Do $|z_1-z_2|=\frac{8}{5}\Rightarrow|(x_1-x_2)+(y_1-y_2)i|=\frac{8}{5}\Rightarrow\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\frac{8}{5}$

Gọi $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ $\Rightarrow M_1M_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\frac{8}{5}$.

Mà z_1 là nghiệm phương trình $|6-3i+iz|=|2z-6-9i|$

$\Rightarrow|(6-y_1)+(x_1-3)i|=|(2x_1-6)+(2y_1-9)i|$

$\Rightarrow\sqrt{(6-y_1)^2+(x_1-3)^2}=\sqrt{(2x_1-6)^2+(2y_1-9)^2}\Leftrightarrow x_1^2+y_1^2-6x_1-8y_1+24=0$

$\Rightarrow M_1(x_1;y_1)\in$ đường tròn $(C):x^2+y^2-6x-8y+24=0$.

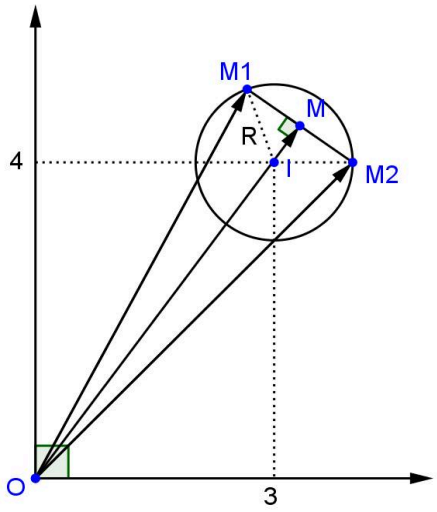
Tương tự $M_2(x_2;y_2)\in(C)$.

Đường tròn (C) có tâm $I(3;4)$, bán kính $R=1$.

Gọi M là trung điểm M_1M_2 $\Rightarrow IM\perp M_1M_2$, $IM=\sqrt{R^2-M_1M^2}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$, và $|z_1+z_2|=2OM$.

Mà $OM\le OI+IM$, dấu bằng xảy ra khi O,I,M thẳng hàng. Khi đó $OM\perp M_1M_2$, và $OM=OI+IM=\frac{28}{5}$.

$\Rightarrow|z_1+z_2|$ đạt giá trị lớn nhất bằng $2(OI+IM)$, bằng $\frac{56}{5}$.



Hoặc đánh giá chọn đáp án như sau:

Gọi $N(-x_2;-y_2) \Rightarrow NM_1 = \sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2} = |z_1+z_2|$

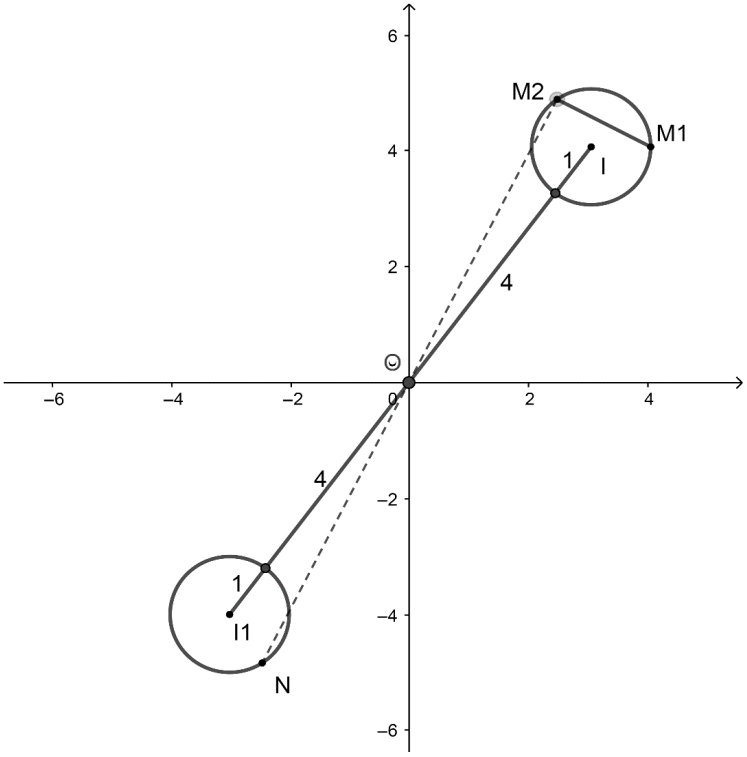
Và N đối xứng với M_2 qua gốc tọa độ O, $N \in$ đường tròn $(C_1): x^2+y^2+6x+8y+24=0$.

(C_1) có tâm $I_1(-3;-4)$, bán kính $R_1=1$, (C_1) đối xứng với (C) qua gốc tọa độ O.

Có $I_1I=10 \Rightarrow I_1I-R-R_1=8$.

Nhận xét: với mọi điểm $M_1 \in (C)$, $N \in (C_1)$ thì $M_1N \geq I_1I-R-R_1$. Loại các đáp án B,C,D

$\Rightarrow |z_1+z_2| = M_1N$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{56}{5}$.



Câu 63: Cho các số phức z và w thỏa mãn $(3-i)|z| = \frac{z}{w-1}+1-i$. Tìm giá trị lớn nhất $T=|w+i|$

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

$(3-i)|z|=\frac{z}{w-1}+1-i \Leftrightarrow \frac{z}{w-1}=3|z|-1+(1-|z|)i \Rightarrow \left|\frac{z}{w-1}\right|=\sqrt{(3|z|-1)^2+(1-|z|)^2}$..

Đặt $t=|z|;\ t>0$.

trở thành: $\frac{t}{|w-1|}=\sqrt{(3t-1)^2+(1-t)^2} \Leftrightarrow |w-1|=\frac{t}{\sqrt{10t^2-8t+2}}$..

$\Leftrightarrow |w-1|=\frac{1}{\sqrt{10-\frac{8}{t}+\frac{2}{t^2}}}=\frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{1}{t}-2\right)^2+2}}\le\frac{1}{\sqrt{2}};\forall t>0$..

Ta luôn có: $|w+i|\le|w-1|+|1+i|\le\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2} \Rightarrow |w+i|\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$..

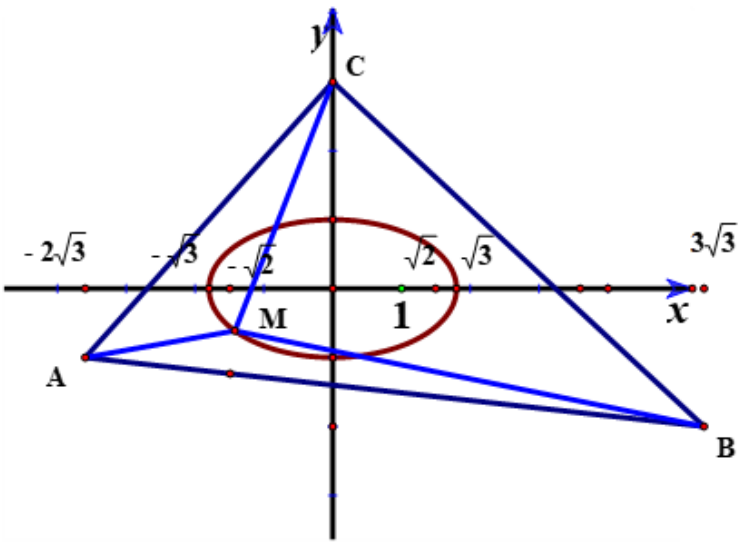
Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}t=|z|=\frac{1}{2}\\ w-1=k(1+i)\\ |w+i|=\frac{3\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=\frac{1}{2}i\\ w=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\end{cases}$.

Vậy: Giá trị lớn nhất của $T=\frac{3\sqrt{2}}{2}$..

Câu 64: Cho các số phức z thỏa mãn $\left|z-\sqrt{2}\right|+\left|z+\sqrt{2}\right|=2\sqrt{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|z+2\sqrt{3}+i\right|+\left|z-3\sqrt{3}+2i\right|+\left|z-3i\right|$.

A. 12. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải



Gọi $M(x;y)$, $F_1(-\sqrt{2};0)$, $F_2(\sqrt{2};0)$, lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức $z=x+yi$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$.

Có $\left|z-\sqrt{2}\right|+\left|z+\sqrt{2}\right|=2\sqrt{3} \Leftrightarrow MF_1+MF_2=2\sqrt{3}$, có $2\sqrt{3}>F_1F_2=2\sqrt{2}$.

Suy ra $M\left(x;\,y\right)$ chạy trên $\left(E\right)$ có tiêu cự $2c=2\sqrt{2}$, độ dài trục lớn $2a=2\sqrt{3}$, độ dài trục nhỏ $2b=2$ và phương trình chính tắc của $\left(E\right)$ là $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{1}=1$.

Có $M\left(x;\,y\right)\in\left(E\right)\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}\\-1\le y\le 1\end{cases}$.

Có $P=\left|z+2\sqrt{3}+i\right|+\left|z-3\sqrt{3}+2i\right|+\left|z-3i\right|$.

$$=\sqrt{\left(x+2\sqrt{3}\right)^2+\left(y+1\right)^2}+\sqrt{\left(x-3\sqrt{3}\right)^2+\left(y+2\right)^2}+\sqrt{x^2+\left(y-3\right)^2}.$$

$$\ge\sqrt{\left(x+2\sqrt{3}\right)^2+\left(y+1\right)^2}+\sqrt{\left(3\sqrt{3}-x\right)^2+\left(y+2\right)^2}+\sqrt{\left(y-3\right)^2}.$$

$$\ge\sqrt{\left(x+2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-x\right)^2+\left(2y+3\right)^2}+\left|y-3\right|\left(1\right).$$

$$=\sqrt{4y^2+12y+84}+3-y.$$

Đặt $f\left(y\right)=2\sqrt{y^2+3y+21}+3-y$, với $-1\le y\le 1$.

Có $f'\left(y\right)=\frac{2y+3}{\sqrt{y^2+3y+21}}-1$.

$f'\left(y\right)=0\Leftrightarrow\sqrt{y^2+3y+21}=2y+3\left(1\right)$,

Có $-1\le y\le 1\Rightarrow\left(1\right)\Leftrightarrow 3y^2+9y-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\quad\left(\text{nhận}\right)\\y=-4\quad\left(\text{loại}\right)\end{array}\right.$.

Có $f\left(-1\right)=4+2\sqrt{19}$, $f\left(1\right)=12$.

Suy ra $\underset{y\in\left[-1;1\right]}{Min}f\left(y\right)=12\Rightarrow P\ge 12$.

Đẳng thức $\left(1\right)$ xảy ra khi $\begin{cases}x=0,y=1\\\frac{x+2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-x}=\frac{y+1}{y+2}>0\end{cases}\Rightarrow x=0,y=1$.

Thử lại: Khi $x=0,y=1$ có $P=12$.

Vậy $MinP=12$ khi $x=0,y=1$.

Câu 65: Cho số phức $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$ thỏa mãn $\left|z\right|^2+3y^2=16$. Biểu thức $P=\left\|z-i\right|-\left|z-2\right\|$ đạt giá trị lớn nhất tại $\left(x_0;y_0\right)$ với $x_0<0,y_0>0$. Khi đó: $x_0^2+y_0^2$ bằng

A. $\frac{20-3\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{20+3\sqrt{7}}{2}$. **C.** $\frac{20+3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{20-3\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\left|z\right|^2+3y^2=16\Leftrightarrow x^2+4y^2=16$.

$$P=\left|\sqrt{x^2+(y-1)^2}-\sqrt{(x-2)^2+y^2}\right|=\left|\sqrt{x^2+(y-1)^2}-\sqrt{(2-x)^2+(-y)^2}\right|$$

$$\le\sqrt{(x+2-x)^2+(y-1-y)^2}=\sqrt{5}.$$

$$P_{\max}=\sqrt{5}\Leftrightarrow\begin{cases}x.(-y)=(2-x)(y-1)\\x.(2-x)<0\\(y-1).(-y)<0\\x^2+4y^2=16\\x<0\\y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y-2=0\\x(2-x)<0\\(y-1).(-y)<0\\x^2+4y^2=16\\x<0\\y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2-2y\\(2-2y)^2+4y^2-16=0\\x(2-x)<0\\(y-1).(-y)<0\\x<0\\y>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\\x=1-\sqrt{7}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=1-\sqrt{7}\\y_0=\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\end{cases}\Rightarrow x_0^2+y_0^2=\frac{20-3\sqrt{7}}{2}.$$

Nhận xét: Bài này ta dùng bất đẳng thức véc tơ như sau

Cho $\vec{a}=(a_1;a_2),\vec{b}=(b_1;b_2)\Rightarrow\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2)$, ta có:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\ge\left|\left|\vec{a}\right|-\left|\vec{b}\right|\right|\Leftrightarrow\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2}\ge\left|\sqrt{a_1^2+a_2^2}-\sqrt{b_1^2+b_2^2}\right|.$$

Dấu " = " xãy ra $\Leftrightarrow\vec{a},\vec{b}$ ngược hướng $\Leftrightarrow\begin{cases}a_1b_2=a_2b_1\\a_1b_1<0\\a_2b_2<0\end{cases}$.

Câu 66: Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+4|+|z-4|=10$ và $|z-6|$ lớn nhất. Tính $S=a+b$.

A. $S=11$. **B.** $S=-5$. **C.** $S=-3$. **D.** $S=5$.

Lời giải

Trong mp tọa độ Oxy, Ta gọi các điểm biểu diễn của các số phức:

$z=x+yi$ là $M(x;y)$; $z=-4+0i$ là $F_1(-4;0)$; $z=4+0i$ là $F_2(4;0)$.

Ta có: $|z+4|+|z-4|=10\Rightarrow MF_1+MF_2=10$.

$$\begin{cases}MF_1^2=(x+4)^2+y^2\\MF_2^2=(x-4)^2+y^2\end{cases}\Rightarrow MF_1^2-MF_2^2=16x\Rightarrow MF_1-MF_2=\frac{8x}{5}.$$

Từ và, suy ra $MF_1=5+\dfrac{4x}{5}$.

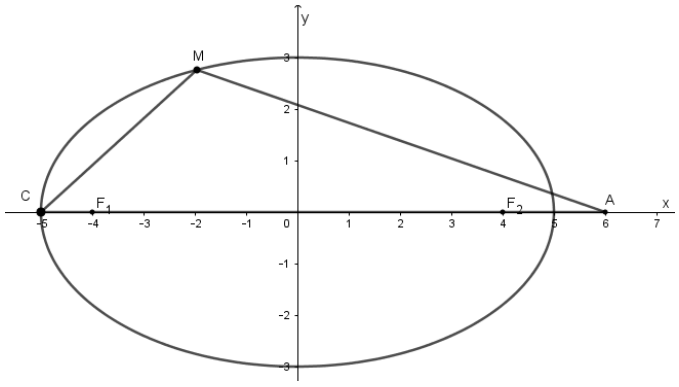
Mặt khác $MF_1^2=(x+4)^2+y^2\Rightarrow\left(5+\dfrac{4x}{5}\right)^2=(x+4)^2+y^2\Rightarrow\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Vậy, tập hợp các điểm biểu diễn của số phức thỏa mãn $|z+4|+|z-4|=10$ là Elip có phương trình $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Theo đề, ta cần tìm điểm thuộc (E) sau cho $|z-6|$ lớn nhất.

Ta gọi các điểm biểu diễn số phức: $z=6+0i$ là $A(6;0)$; $z=a+bi$ là $M(a;b)\in(E)$; $z=-5+0i$ là $C(-5;0)$.

Do đó, $|z-6|$ lớn nhất khi và chỉ khi MA lớn nhất.



Dựa, vào hình vẽ trên ta thấy để MA lớn nhất khi $M\equiv C(-5;0)\Rightarrow a=-5;b=0\Rightarrow S=-5$.

Câu 67: Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa $|z+4|+|z-4|=10$ và $|z-6|$ lớn nhất. Tính $S=a+b$?

A. $S=-3$. **B.** $S=5$. **C.** $S=-5$. **D.** $S=11$.

Lời giải

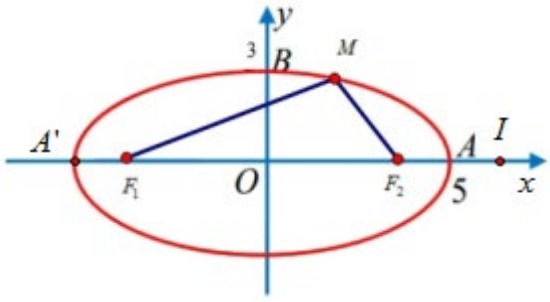
Gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn số phức $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$.

$|z-4|+|z+4|=10\Leftrightarrow|(a-4)+bi|+|(a+4)+bi|=10$

$\Leftrightarrow\sqrt{(a-4)^2+b^2}+\sqrt{(a+4)^2+b^2}=10(*)$

Xét $F_1(-4;0)$ và $F_2(4;0)$. Khi đó $(*)\Leftrightarrow MF_1+MF_2=10$

Suy ra M thuộc Elip có $\begin{cases}c=4\\2a=10\Rightarrow a=5\end{cases}\Rightarrow b=\sqrt{a^2-c^2}=3$



Ta có: $|z-6|=\sqrt{(a-6)^2+b^2}=IM, I(6;0)$, suy ra $\max|z-6|=IA'$ hay điểm $M\equiv A'(-5;0)\Rightarrow z=-5+0i\Rightarrow S=-5$.

Câu 68: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$, M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=|1+z|+2|1-z|$. Giá trị của biểu thức $M+m$ bằng

A. $2\sqrt{5}+2$. **B.** 6. **C.** $2\sqrt{5}+4$. **D.** 7.

Lời giải

Gọi $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$. $|z|=1\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=1\Leftrightarrow x^2+y^2=1$

$\Rightarrow A=|1+z|+2|1-z|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}+2\sqrt{(1-x)^2+y^2}=\sqrt{2+2x}+2\sqrt{2-2x}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{2+2x}+2\sqrt{2-2x}$ với $x\in[-1;1]$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2+2x}}-\dfrac{2}{\sqrt{2-2x}}=\dfrac{\sqrt{1-x}-2\sqrt{1+x}}{\sqrt{2(1-x^2)}}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{1-x}-2\sqrt{1+x}=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{5}\in[-1;1]$.

Khi đó $f(-1)=4$; $f\left(-\dfrac{3}{5}\right)=2\sqrt{5}$; $f(1)=2$.

Do đó $M=\max\limits_{[-1;1]}f(x)=f\left(-\dfrac{3}{5}\right)=2\sqrt{5}$; $m=\min\limits_{[-1;1]}f(x)=f(1)=2$. Suy ra $M+m=2\sqrt{5}+2$.

Câu 69: Xét tập hợp S các số phức $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện $|3z-\bar{z}|=|(1+i)(2+2i)|$. Biểu thức $Q=|z-\bar{z}|(2-x)$ đạt giá trị lớn nhất là M và đạt được tại $z_0=x_0+y_0i$. Tính giá trị $T=M.x_0y_0^2$.

A. $T=-\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **B.** $T=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$. **C.** $T=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **D.** $T=-\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Ta có: $|3z-\bar{z}|=|(1+i)(2+2i)|\Leftrightarrow 4x^2+16y^2=16\Leftrightarrow x^2+4y^2=4\Leftrightarrow 4y^2=4-x^2$

Do đó, $Q=|z-\bar{z}|(2-x)=\sqrt{4y^2}(2-x)=\sqrt{4-x^2}(2-x)=f(x)$, $(-2\le x\le 2)$.

$f'(x)=\dfrac{2x^2-2x-4}{\sqrt{4-x^2}},(-2<x<2)$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\notin(-2\,;\,2)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=-1$.

Mặt khác, $f(-2)=0, f(2)=0, f(-1)=3\sqrt{3}$.

Suy ra $M=3\sqrt{3}$ tại $x_0=-1, y_0^2=\dfrac{3}{4}$.

Vậy $T=\dfrac{-9\sqrt{3}}{4}$.

Câu 70: Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $\left|z-3+\sqrt{3}i\right|=2$ và $\left|z_1-z_2\right|=4$. Giá trị lớn nhất của $\left|z_1\right|+\left|z_2\right|$ bằng

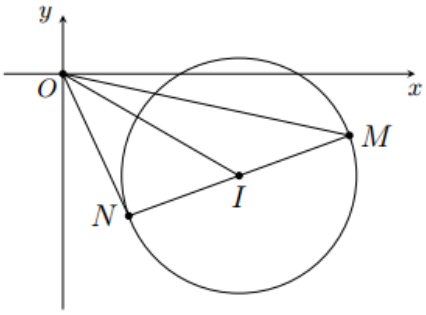
A. 8. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** 4. **D.** $2+2\sqrt{3}$.

Lời giải

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của hai số phức z_1, z_2.

Do $\begin{cases}\left|z_1-3+\sqrt{3}i\right|=\left|z_2-3+\sqrt{3}i\right|=2\\ \left|z_1-z_2\right|=4\end{cases}$ nên $\begin{cases}M,\mathrm{N}\in(C):(x-3)^2+\left(y+\sqrt{3}\right)^2=2^2\\ MN=4=2.2\end{cases}$.

Như vậy MN là đường kính của đường tròn (C) với tâm $I\left(3;-\sqrt{3}\right)$, bán kính $R=2$, do đó I là trung điểm MN, $\mathrm{O}I=\sqrt{12}$.



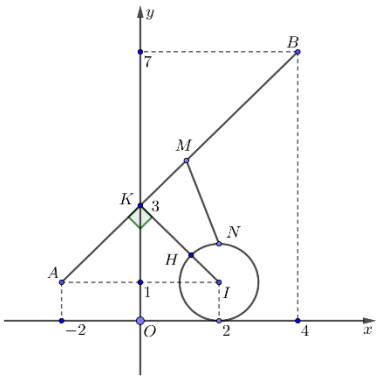
Ta có $\left|z_1\right|+\left|z_2\right|=OM+ON\le\sqrt{(1+1)\left(OM^2+ON^2\right)}=\sqrt{2\left(2\mathrm{O}I^2+\dfrac{MN^2}{2}\right)}=8$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $OM=ON\Leftrightarrow MN$ là đường kính của (C) vuông góc với OI.

Câu 71: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\left|z_1+2-i\right|+\left|z_1-4-7i\right|=6\sqrt{2}$ và $\left|iz_2-1+2i\right|=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\left|z_1+z_2\right|$.

A. $2\sqrt{2}+1$. **B.** $\sqrt{2}-1$. **C.** $2\sqrt{2}-1$. **D.** $\sqrt{2}+1$.

Lời giải



Trên mặt phẳng Oxy, gọi $M(a;b)$ là điểm biểu diễn cho số phức z_1; $A(-2;1)$, $B(4;7)$ lần lượt là điểm biểu cho các số phức $-2+i$ và $4+7i$ $\Rightarrow AB=6\sqrt{2}$.

Từ đó ta được $MA+MB=6\sqrt{2}=AB$ nên tập hợp các điểm M biểu diễn cho số phức z_1 là đoạn thẳng AB nằm trên đường thẳng $d:x-y+3=0$.

Đặt $z_3=-z_2$, khi đó

$|iz_2-1+2i|=1\Leftrightarrow|-iz_3-1+2i|=1\Leftrightarrow|z_3-2-i|=1$. Gọi $N(c;d)$ là điểm biểu diễn cho z_3; $I(2;1)$ là điểm biểu diễn cho số phức $2+i$, khi đó $IN=1$ nên tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức z_3 là đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=1$.

$|z_1+z_2|=|z_1-z_3|=MN$.

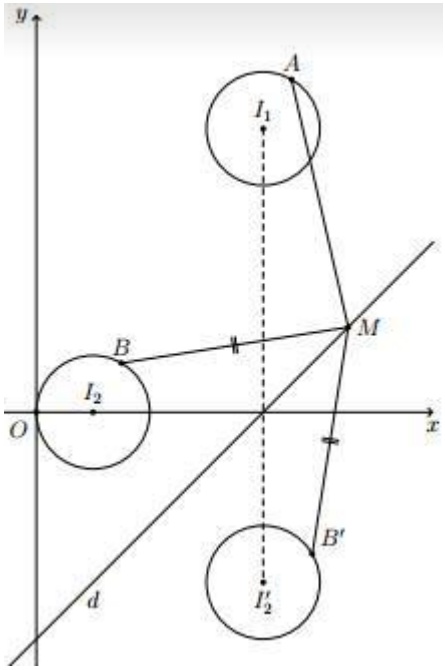
Dễ thấy hình chiếu vuông góc của điểm $I(2;1)$ trên đường thẳng (d) là điểm $K(0;3)$ thuộc đoạn AB suy ra $MN\geq KH$ với H là giao điểm của IK với (C) và thuộc đoạn IK.

Do đó $\min MN=KH=d(I,AB)-R=2\sqrt{2}-1$. Vậy $\min|z_1+z_2|=2\sqrt{2}-1$

Câu 72: Cho số phức z,z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1-4-5i|=|z_2-1|=1$ và $|\overline{z}+4i|=|z-8+4i|$. Tính $|z_1-z_2|$ khi $P=|z-z_1|+|z-z_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất

A. 8 **B.** 6. **C.** $\sqrt{41}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Lời giải



Gọi A là điểm biểu diễn của số phức z_1. Suy ra A thuộc đường tròn (C_1) tâm $I_1(4;5),R=1$.

Gọi B là điểm biểu diễn của số phức z_2. Suy ra B thuộc đường tròn (C_2) tâm $I_2(1;0),R=1$.

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi$

Theo giả thiết $|\overline{z}+4i|=|z-8+4i|\Leftrightarrow x-y=4$. Suy ra M thuộc đường thẳng (d) $x-y-4=0$

Gọi (C_2') có tâm $I_2'(4;-3),R=1$ là đường tròn đối xứng với đường tròn (C_2) tâm $I_2(1;0),R_2=1$ qua đường thẳng d. Gọi B' là điểm đối xứng với đối xứng với B qua đường thẳng d. Ta có $P=|z-z_1|+|z-z_2|=MA+MB=MA+MB'\geq AB'=I_1I_2'-R_1-R_2=6$.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi A, B', I_1, I_2', M thẳng hàng. Khi đó $\overrightarrow{I_1A}=\frac{1}{8}\overrightarrow{I_1I_2'}$ suy ra $A(4;4)$ và $\overrightarrow{I_2B'}=\frac{1}{8}\overrightarrow{I_2'I_1}$ suy ra $B'(4;-2)\Rightarrow B(2;0)$. $AB=2\sqrt{5}$.

Vậy $|z_1-z_2|=2\sqrt{5}$.

Câu 73: Cho các số phức z và ω thỏa mãn $(2+i)|z|=\frac{z}{\omega}+1-i$. Tìm giá trị lớn nhất của $T=|\omega+1-i|$

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **D.** $\sqrt{2}$

Lời giải

$(2+i)|z|=\frac{z}{\omega}+1-i\Leftrightarrow\frac{z}{\omega}=(2+i)|z|-1+i.$

$\Leftrightarrow\frac{z}{\omega}=(2|z|-1)+(|z|+1)i\Rightarrow\left|\frac{z}{\omega}\right|=\sqrt{(2|z|-1)^2+(|z|+1)^2}\Leftrightarrow|\omega|=\sqrt{\frac{|z|^2}{5|z|^2-2|z|+2}}$

$f(t)=\frac{t^2}{5t^2-2t+2}(t\ge 0)\Rightarrow f'(t)=\frac{-2t^2+4t}{(5t^2-2t+2)^2}\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=0\vee t=2$

Bảng biến thiên

t	0		2		+∞
f'(t)	0	+	0	-	
f(t)		↗	$\frac{2}{9}$	↘	

Ta có $T=|\omega+1-i|\le|z|+|1-i|\le\sqrt{\frac{2}{9}}+\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

Câu 74: Cho số phức z và gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+8i=0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-z_1|+|z_2-z|+\left|\overline{z}+2z_1+\frac{z_2}{2}\right|$ được viết dưới dạng $m\sqrt{n}+p\sqrt{q}$. Tổng $m+n-p-q$ bằng

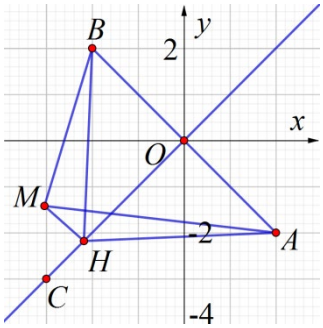
A. 3. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

$z^2+8i=0\Rightarrow z_1=2-2i$ và $z_2=-2+2i$.

$P=|z-z_1|+|z_2-z|+\left|\overline{z}+2z_1+\frac{z_2}{2}\right|=|z-z_1|+|z-z_2|+\left|z+2\overline{z_1}+\frac{\overline{z_2}}{2}\right|=MA+MB+MC$.

Trong đó M, $A(2;-2)$, $B(-2;2)$, $C(-3;-3)$ lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức z, z_1, z_2, $\omega = -2\overline{z_1} - \dfrac{\overline{z_2}}{2} = -3-3i$.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên OC.

Ta có $MA+MB \ge HA+HB \Rightarrow MA+MB+MC \ge HA+HB+HC$.

Do đó $P_{\min} = (MA+MB+MC)_{\min} = HA+HB+HC \Leftrightarrow M \equiv H \Rightarrow M \in OC: y=x$.

Giả sử $M(x;x)\ (x \in [-3;0)) \Rightarrow P = MA+MB+MC = \sqrt{2}(x+3) + 2\sqrt{2(x^2+4)}$

$\Rightarrow P' = \sqrt{2} + 2\sqrt{2}.\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}} \Rightarrow P' = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \in [-3;0)$.

Vậy $P_{\min} = \sqrt{2}\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+3\right) + 2\sqrt{2\left[\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+4\right]} = 2\sqrt{6}+3\sqrt{2}$.

Suy ra $m=2$, $n=6$, $p=3$, $q=2 \Rightarrow m+n-p-q=3$.

Câu 75: Trong các số phức z thỏa mãn $|z^2+1| = 2|z|$ gọi z_1 và z_2 lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2 + |z_2|^2$ bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $z = a+bi; a,b \in \mathbb{R}$.

$|z^2+1| = |a^2-b^2+1+2abi| = \sqrt{(a^2-b^2+1)^2+4a^2b^2}$; $2|z| = 2\sqrt{a^2+b^2}$.

Ta có $|z^2+1| = 2|z| \Rightarrow (a^2-b^2+1)^2 + 4a^2b^2 = 4(a^2+b^2)$

$\Leftrightarrow (a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2 + 2(a^2-b^2) + 1 - 4(a^2+b^2) = 0 \Leftrightarrow (a^2+b^2)^2 - 2a^2 - 6b^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (a^2+b^2)^2 - 6(a^2+b^2) + 1 = -4a^2$.

Vì $-4a^2 \le 0, \forall a \in \mathbb{R}$ nên $(a^2+b^2)^2 - 6(a^2+b^2) + 1 \le 0 \Rightarrow 3-2\sqrt{2} \le a^2+b^2 \le 3+2\sqrt{2}$.

Suy ra $\sqrt{2}-1\le\sqrt{a^2+b^2}\le\sqrt{2}+1\Rightarrow\begin{cases}m=\sqrt{2}-1\\M=\sqrt{2}+1\end{cases}\Rightarrow m^2+M^2=6.$

$M=\sqrt{2}+1\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\a^2+b^2=3+2\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=\pm\left(1+\sqrt{2}\right)\end{cases}.$

$m=\sqrt{2}-1\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\a^2+b^2=3-2\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=\pm\left(\sqrt{2}-1\right)\end{cases}.$

Câu 76: Xét các số phức w, z thỏa mãn $|w+i|=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w=(2+i)(z-4)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z-2i|+|z-6-2i|$.

A. 7. **B.** $2\sqrt{53}$. **C.** $2\sqrt{58}$. **D.** $4\sqrt{13}$.

Lời giải

Cách 1.

Ta có: $5w=(2+i)(z-4)\Leftrightarrow 5w+5i=(2+i)(z-4)+5i$

$\Rightarrow|5w+5i|=|(2+i)(z-4)+5i|\Rightarrow 5|w+i|=|(1+2i)(z-4+1+2i)|=\sqrt{5}|z-3+2i|$

$\Rightarrow 5.\dfrac{3\sqrt{5}}{5}=\sqrt{5}|z-3+2i|\Rightarrow|z-3+2i|=3.$

Ta có:

$|z+z_1|^2+|z-z_1|^2=2\left(|z|^2+|z_1|^2\right);\ \forall z,z_1.$

$|z|^2+|z_1|^2\ge\dfrac{\left(|z|+|z_1|\right)^2}{2};\ \forall z,z_1.$

Ta có: $P=|z-2i|+|z-6-2i|=|z-3-2i+3|+|z-3-2i-3|.$

Áp dụng và, ta có:

$|z-3-2i+3|^2+|z-3-2i-3|^2=2\left(|z-3-2i|^2+9\right).$

$$|z-3-2i+3|^2+|z-3-2i-3|^2\ge\frac{\left(|z-3-2i+3|+|z-3-2i-3|\right)^2}{2}=\frac{\left(|z-2i|+|z-6-2i|\right)^2}{2}$$

.

Vậy, ta có:

$\dfrac{\left(|z-2i|+|z-6-2i|\right)^2}{2}\le 2\left(|z-3-2i|^2+9\right)\Rightarrow\left(|z-2i|+|z-6-2i|\right)^2\le 4\left(|z-3-2i|^2+9\right).$

$\Rightarrow P^2\le 4\left(|z-3-2i|^2+9\right).$

Do $4\left(|z-3-2i|^2+9\right)=4\left(|z-3+2i-4i|^2+9\right)$ nên $P^2\le 4\left(\left(|z-3+2i|+|-4i|\right)^2+9\right)$

$\Rightarrow P^2\le 4\left(7^2+9\right)=232\Rightarrow P\le 2\sqrt{58}.$

Cách 2.

Ta có: $5w=(2+i)(z-4)$ thay $|w+i|=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow |z-3+2i|=3$.

Suy ra, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+2)^2=9$.

Gọi $M\in(C)$.

Ta có: $P=|z-2i|+|z-6-2i|=AM+BM$; $A(0;2),B(6;2)$.

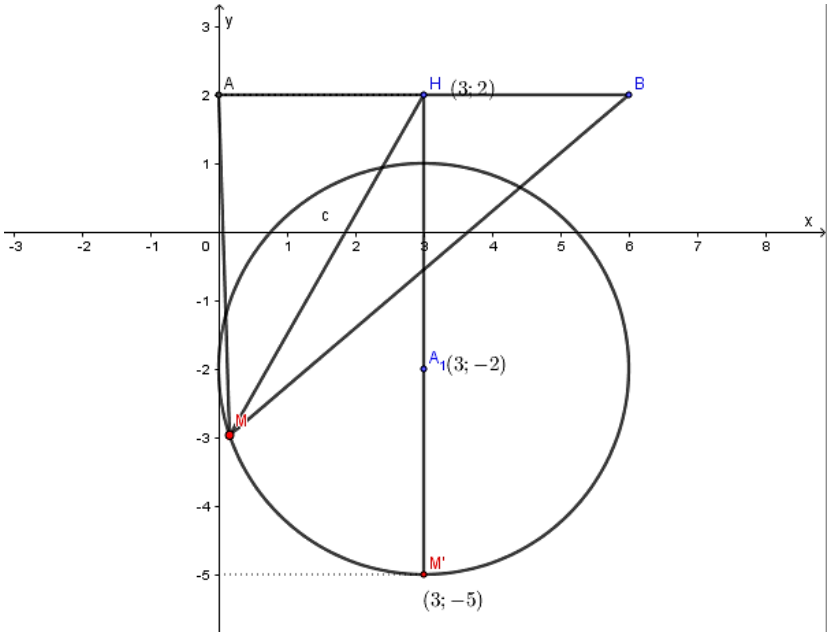
Suy ra $P\le\sqrt{2\left(AM^2+BM^2\right)}$.

Gọi H là trung điểm của cạnh AB.

Ta có: $P\le\sqrt{2\left(AM^2+BM^2\right)}=\sqrt{2\left(2MH^2+\dfrac{AB^2}{2}\right)}=\sqrt{4MH^2+AB^2}$.

Vậy, $P=|z-2i|+|z-6-2i|$ đạt giá trị lớn nhất khi MH^2 đạt giá trị lớn nhất.

Dựa vào hình vẽ sau



Suy ra, MH^2 đạt giá trị lớn nhất khi $M\equiv M'\Rightarrow P^2\le 232\Rightarrow P=2\sqrt{58}$.

Câu 77: Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|z_1-z_2|^2+|z_2-z_3|^2+|z_3-z_1|^2$.

A. $P=9$. **B.** $P=10$. **C.** $P=8$. **D.** $P=12$.

Lời giải

Gọi $A(x_1;y_1)$; $B(x_2;y_2)$; $C(x_3;y_3)$ là các điểm lần lượt biểu diễn các số phức z_1; z_2; z_3.

vì $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ suy ra A; B; C thuộc đường tròn tâm O bán kính bằng 1.

Ta có $|z_1-z_2|=AB$; $|z_2-z_3|=BC$ $|z_3-z_1|=AC$.

Suy ra $P=|z_1-z_2|^2+|z_2-z_3|^2+|z_3-z_1|^2=AB^2+BC^2+AC^2$

$=\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}\right)^2+\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}\right)^2=6-2\left(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}\right)$

$=9-\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)^2=9-\left(3\overrightarrow{OG}\right)^2=9-OG^2\le 9$.

Dấu " = " xảy ra khi $G\equiv O$, hay ΔABC đều.

Câu 78: Cho số phức z thỏa mãn $3|z+\bar{z}|+2|z-\bar{z}|\le 12$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $|z-4+3i|$. Giá trị của $M.m$ bằng:

A. 28. **B.** 24. **C.** 26. **D.** 20.

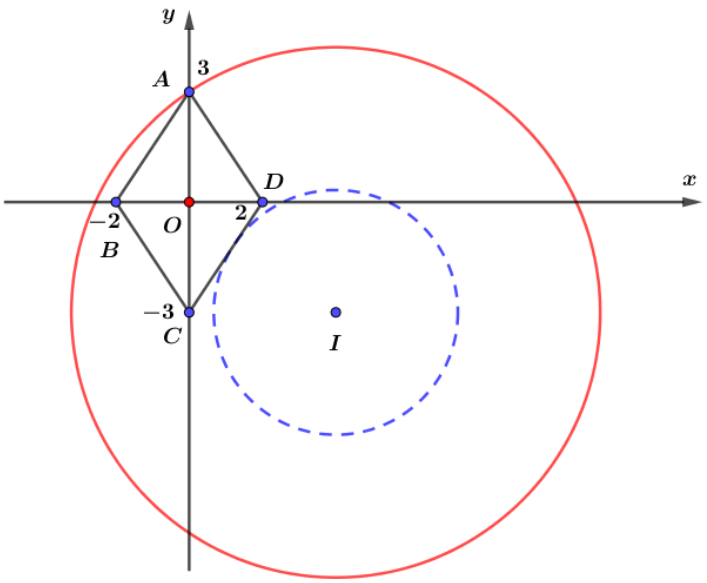
Lời giải

Gọi $z=x+yi;\quad x;y\in\mathbb{R}$.

Xét $3|z+\bar{z}|+2|z-\bar{z}|\le 12\Leftrightarrow 3|x|+2|y|\le 6.$ (1)

Ta có: $P=|z-4+3i|=\sqrt{(x-4)^2+(y+3)^2}$ (2)

Tập hợp những điểm biểu diễn $z=x+yi;\quad x;y\in\mathbb{R}$. thỏa mãn là miền trong của hình thoi $ABCD$ với $A(0;3);\ B(-2;0);\ C(0;-3);\ D(2;0)$ tạo bởi 4 đường thẳng $3|x|+2|y|=6$. Điểm biểu diễn z thỏa mãn là đường tròn tâm $I(4;-3)$ bán kính $R=P\ge 0$.



P đạt min, max khi bán kính đường tròn đạt min, max khi xét sự tương giao với miền hình thoi $ABCD$.

Ta có đường tròn giao với miền hình thoi điểm gần tâm nhất khi đường tròn tiếp xúc cạnh CD: $3x-2y-6=0$ tương ứng có $m=\dfrac{|3.4+2.3-6|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\dfrac{12}{\sqrt{13}}$. Điểm giao xa nhất là đỉnh $A(0;3)$ của hình thoi. Do đó $M=\sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}$.

$\Rightarrow M.m = 24.$