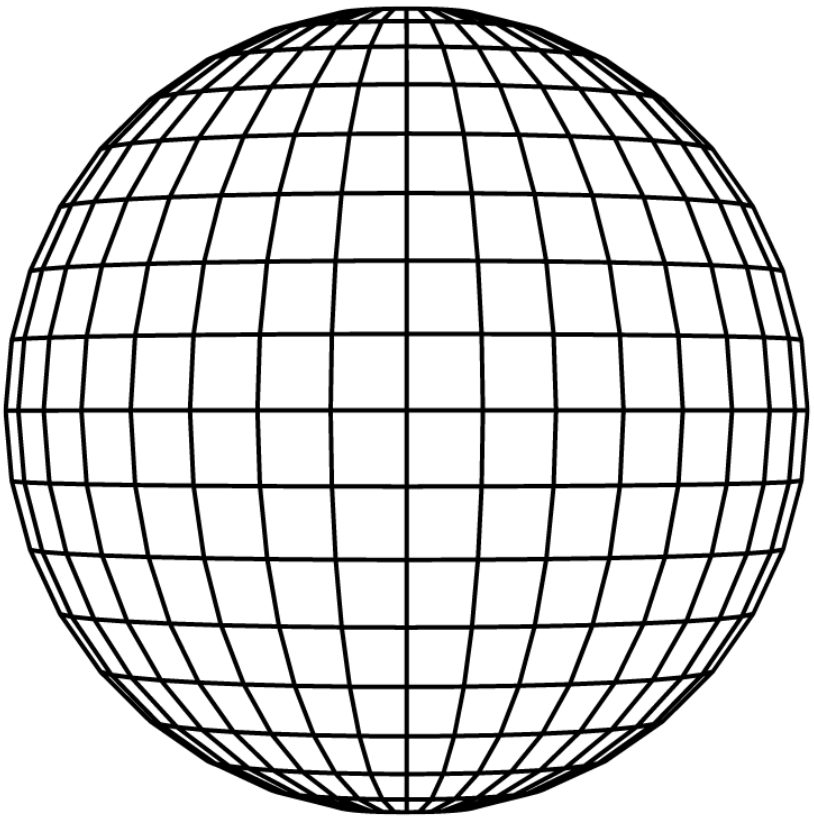
PHAN NHẬT LINH

NÓN - TRỤ - CẦU

TÀI LIỆU MỚI NĂM 2024

File word cho giáo viên liên hệ Zalo: 0817.098.716



NẮM TRỌN CÁC CHUYÊN ĐỀ NĂM 2024 - PHAN NHẬT LINH

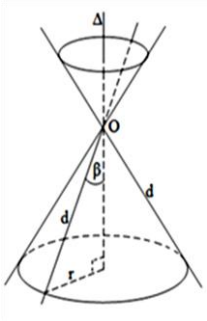
CHƯƠNG 4

MẶT NÓN, MẶT TRỤ MẶT CẦU

CHỦ ĐỀ 10 MẶT NÓN TRÒN XOAY VÀ KHỐI NÓN

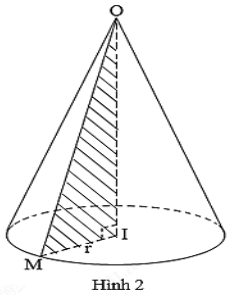
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Mặt nón tròn xoay



- Đường thẳng d,Δ cắt nhau tại O và tạo thành góc β với $0^0 < \beta < 90^0$. Mặt phẳng (P) chứa d,Δ và (P) quay quanh trục Δ với góc β không đổi thì tạo thành mặt nón tròn xoay đỉnh O. Trong đó:
  - Δ gọi là trục
  - d được gọi là đường sinh
  - Góc 2β được gọi là góc ở đỉnh

2. Khối nón



Hình 2

- Khối nón là phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay, kể cả hình nón đó.
- Đỉnh, mặt đáy, đường sinh của một hình nón cũng là đỉnh, mặt đáy, đường sinh của khối nón tương ứng.
- Cho hình nón có chiều cao h, đường sinh l và bán kính đáy r. Khi đó, ta có các công thức sau:
  - Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq} = \pi.r.l$
  - Diện tích đáy của hình nón: $S_{day} = \pi.r^2$
  - Diện tích toàn phần của hình nón: $S_{tp} = S_{xq} + S_{day} = \pi.r.l + \pi.r^2$
  - Thể tích của khối nón: $V_{non} = \frac{1}{3}\pi.r^2.h$

Dạng 1: Tính S_{xq} và S_{tp} của khối nón. Thể tích khối nón

- Cho hình nón có chiều cao h, đường sinh l và bán kính đáy r. Khi đó, ta có các công thức sau:
  - Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq} = \pi.r.l$
  - Diện tích đáy của hình nón: $S_{day} = \pi.r^2$
  - Diện tích toàn phần của hình nón: $S_{tp} = S_{xq} + S_{day} = \pi.r.l + \pi.r^2$
  - Thể tích của khối nón: $V_{non} = \frac{1}{3}\pi.r^2.h$

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cắt hình nón (N) bằng một mặt phẳng qua trục của nó, ta thu được thiết diện là tam giác đều cạnh $2a$. Tính diện tích xung quanh của (N).

A. $2\pi a^2$. **B.** $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $4\pi a$. **D.** $\frac{2\pi a^2}{3}$.

Lời giải

……

……

……

……

Câu 2: Cho khối nón có độ dài đường cao bằng bán kính đáy. Biết thể tích khối nón bằng $\pi\sqrt{3}a^3$. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

A. $3\sqrt{2}\pi a^2$. **B.** $3\pi a^2$. **C.** $\sqrt{3}\pi a^2$. **D.** $2\pi a^2$.

Lời giải

……

……

……

……

Câu 3: Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác đều cạnh có độ dài bằng $2a$. Thể tích khối nón là

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

……

……

……

……

……

……

Câu 4: Cho hình nón đỉnh S. Biết rằng nếu cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục, ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Diện tích xung quanh của hình nón là

A. $S_{xq}=\pi\sqrt{2}a^2$. **B.** $S_{xq}=\pi a^2$. **C.** $S_{xq}=\dfrac{\pi\sqrt{2}a^2}{2}$. **D.** $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2}{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Cho hình nón có chiều cao bằng a. Một mặt phẳng (α) đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều, góc giữa trục của hình nón và mặt phẳng (α) là $60°$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\dfrac{25\pi a^3}{9}$. **B.** $\dfrac{40\pi a^3}{9}$. **C.** $\dfrac{13\pi a^3}{9}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{9}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho khối nón có bán kính $r=\sqrt{3}$ và chiều cao $h=4$. Tính thể tích V của khối nón đã cho

A. $V=16\pi\sqrt{3}$. **B.** $V=\dfrac{16\pi\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=12\pi$. **D.** $V=4\pi$.

Câu 2: Cho hình nón có bán kính đáy $r=2$ và độ dài đường sinh $l=5$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $\dfrac{20\pi}{3}$. **B.** 20π. **C.** $\dfrac{10\pi}{3}$. **D.** 10π.

Câu 3: Cho hình nón có đường kính đáy bằng 6, độ dài đường sinh bằng 5. Diện tích xung quanh hình nón đã cho bằng

A. 20. **B.** 30π. **C.** 15π. **D.** 40.

Câu 4: Một khối nón có bán kính đường tròn đáy $r=3$ và độ dài đường sinh $l=5$. Tính thể tích của khối nón đó.

A. 15π. **B.** 36π. **C.** 12π. **D.** 30π.

Câu 5: Cho hình nón có đường kính đáy bằng 6, độ dài đường sinh bằng 5. Diện tích xung quanh hình nón đã cho bằng

A. 20. **B.** 30π. **C.** 15π. **D.** 40.

Câu 6: Diện tích xung quanh của một hình nón có đường sinh $l=3$, bán kính đáy $r=2$ bằng

A. 12. **B.** 12π. **C.** 6. **D.** 6π.

Câu 7: Cho khối nón có chiều cao bằng a và đường sinh bằng $2a$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. πa^3. **B.** $3\pi a^3$. **C.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.

Câu 8: Cho hình nón có bán kính bằng 3, chiều cao bằng 4. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. 48π. **B.** 48. **C.** 12π. **D.** 12.

Câu 9: Cho hình nón có bán kính đáy $r=3$ và góc ở đỉnh bằng $60°$. Thể tích của khối nón giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $9\sqrt{3}$. **B.** $27\sqrt{3}\pi$. **C.** 27π. **D.** $9\sqrt{3}\pi$.

Câu 10: Trong không gian cho tam giác vuông ABC tại A, $AB=a$ và $BC=a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB.

A. $V=\dfrac{2}{3}\pi a^3$. **B.** $V=3\pi a^3$. **C.** $V=\pi a^3$. **D.** $V=2\pi a^3$.

Câu 11: Cho hình trụ có chiều cao $h=1$ và bán kính $r=2$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 2π. **B.** 6π. **C.** 4π. **D.** 3π.

Câu 12: Một hình nón có đường sinh bằng $2a$ và góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Thể tích của khối nón tạo nên từ hình nón đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3\cdot$ **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{24}\pi a^3\cdot$ **C.** $\pi a^3\cdot$ **D.** $4\pi a^3\cdot$

Câu 13: Một khối nón có bán kính đáy r và đường sinh dài gấp đôi bán kính đáy. Thể tích khối nón đó bằng

A. $\sqrt{5}\pi r^3$. **B.** $\sqrt{3}\pi r^3$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{3}\pi r^3$.

Câu 14: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a\sqrt{3}$ và $BC = 2a$. Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB thì đường gấp khúc BCA tạo thành một hình nón tròn xoay. Thể tích của khối nón tròn xoay tạo nên bởi hình nón tròn xoay nói trên là

A. $\pi a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{2\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2\pi a^3$.

Câu 15: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông cân tại A, gọi I là trung điểm của $BC, BC = 2$. Tính diện tích xung quanh của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AI

A. $2\sqrt{2}\pi$. **B.** $\sqrt{2}\pi$. **C.** 2π. **D.** 4π.

Câu 16: Cắt hình nón có chiều cao h bởi một mặt phẳng đi qua trục ta được thiết diện là một tam giác vuông cân. Biết diện tích xung quanh của hình nón là $8\pi\sqrt{2}$. Thể tích của khối nón bằng

A. $\frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{64\pi}{3}$. **C.** $16\pi\sqrt{2}$. **D.** 8π.

Câu 17: Cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục ta được thiết diện là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{6}$. Tính thể tích V của khối nón đó.

A. $V = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{3}$. **B.** $V = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$. **C.** $V = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{6}$. **D.** $V = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{2}$.

Câu 18: Cho hình nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và chu vi đáy bằng $2\pi a$. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

A. $\pi a \cdot$ **B.** $\frac{\pi a^2}{3} \cdot$ **C.** $2\pi a^2 \cdot$ **D.** $\pi a^2 \cdot$

Câu 19: Cho tam giác ABC vuông tại A, xoay tam giác ABC quanh cạnh AB ta được hình nón (N). Tính diện tích xung quanh của nón (N) biết rằng $AB = 6a, ABC = 30°$.

A. $S_{xq} = 24\pi a^2$. **B.** $S_{xq} = 48\pi a^2$. **C.** $S_{xq} = 36\sqrt{6}\pi a^2$. **D.** $S_{xq} = 72\sqrt{3}\pi a^2$.

Câu 20: Trong không gian, cho ΔABC vuông cân tại A, gọi I là trung điểm BC, $BC = 2$. Tính diện tích xung quanh của hình nón nhận được khi quay tam giác ΔABC xung quanh trục AI.

A. $S_{xq} = 2\sqrt{2}\pi$. **B.** $S_{xq} = 4\pi$. **C.** $S_{xq} = 2\pi$. **D.** $S_{xq} = \sqrt{2}\pi$.

Câu 21: Một hình nón có chiều cao bằng $a\sqrt{3}$ và bán kính đáy bằng a. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón.

A. $S_{xq} = 2a^2$. **B.** $S_{xq} = 2\pi a^2$. **C.** $S_{xq} = \sqrt{3}\pi a^2$. **D.** $S_{xq} = \pi a^2$.

Câu 22: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$, $AC = 4$. Diện tích xung quanh của hình nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh trục AB bằng

A. 20π. **B.** 40π. **C.** 15π. **D.** 12π.

Câu 23: Một hình nón (N) có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân với cạnh góc vuông bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích của khối nón (N) bằng

A. $\frac{\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{\pi a^3}{2}$. **C.** πa^3. **D.** $\frac{\pi\sqrt{2}a^3}{12}$

Câu 24: Khối tròn xoay sinh bởi một tam giác đều cạnh a (kể cả điểm trong) khi quay quanh một đường thẳng chứa một cạnh của tam giác có thể tích bằng

A. $\frac{\pi a^3}{4}$. **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{8}$.

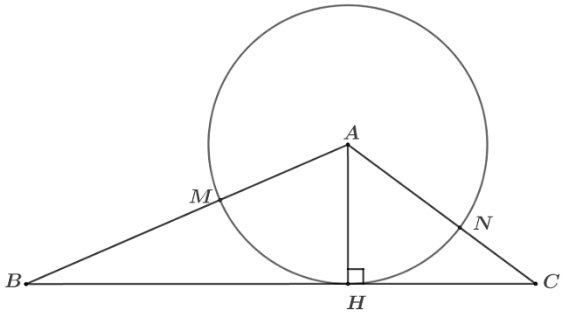
Câu 25: Cho hình nón có đường sinh bằng 2, góc ở đỉnh bằng 120^0. Thể tích của khối nón đó bằng

A. $\sqrt{3}\pi$. **B.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$. **C.** 3π. **D.** π.

Câu 26: Tính thể tích của khối nón có chiều cao bằng 8 và độ dài đường sinh bằng 10.

A. 256π. **B.** 288π. **C.** 96π. **D.** 384π.

Câu 27: Một tấm tôn hình tam giác ABC có độ dài cạnh $AB=3; AC=2; BC=\sqrt{19}$. Điểm H là chân đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC. Người ta dùng compa có tâm là A, bánh kính AH vạch một cung tròn MN. Lấy hình quạt gò thành hình nón không có mặt đáy với đỉnh là A, cung MN thành đường tròn đáy của hình nón. Tính thể tích khối nón trên.



A. $\frac{2\pi\sqrt{114}}{361}$. **B.** $\frac{2\pi\sqrt{3}}{19}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{57}}{361}$. **D.** $\frac{2\pi\sqrt{19}}{361}$.

Câu 28: Cắt hình nón bởi một hình phẳng đi qua trục ta được thiết diện là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{6}$. Thể tích của khối nón đó bằng

A. $V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{3}$. **B.** $V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$. **D.** $V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 29: Cho khối nón có bán kính đáy $r=3$ và độ dài đường sinh $l=5$. Thể tích khối nón đã cho bằng

A. 12π. **B.** 18π. **C.** 6π. **D.** 36π.

Câu 30: Cho hình nón (N) có chiều cao bằng $2a$. Cắt (N) bởi một mặt phẳng qua đỉnh và cách tâm của đáy một khoảng bằng ta được thiết diện có diện tích bằng $\frac{4a^2\sqrt{11}}{3}$. Thể tích khối nón đã cho bằng

A. $\frac{4\pi a^3\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\frac{10\pi a^3}{3}$. **C.** $10\pi a^3$. **D.** $\frac{4\pi a^3\sqrt{5}}{9}$.

Câu 31: Cho hình nón (N) có đỉnh S, chiều cao $h=3$. Mặt phẳng (P) qua đỉnh S cắt hình nón (N) theo thiết diện là tam giác đều. Khoảng cách từ tâm đáy hình nón đến mặt phẳng (P) bằng $\sqrt{6}$. Thể tích khối nón giới hạn bởi hình nón (N) bằng

A. 81π. **B.** 27π. **C.** 36π. **D.** 12π.

Câu 32: Cho khối nón có thiết diện qua trục là tam giác SAB vuông tại S. Biết tam giác SAB có bán kính đường tròn nội tiếp bằng $2\left(\sqrt{2}-1\right)$. Tính thể tích khối nón đã cho

A. $\frac{16\pi}{3}$. **B.** $\frac{2\pi}{3}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** $\frac{8\pi}{3}$.

Câu 33: Cho khối nón (N) có bán kính đáy $r=4a$ và chiều cao lớn hơn bán kính đáy. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh nón và tạo với đáy nón một góc $60°$ cắt khối nón (N) theo thiết diện là một tam giác có diện tích bằng $8\sqrt{3}a^2$. Thể tích của khối nón (N) bằng

A. $64\pi a^3$. **B.** $96\pi a^3$. **C.** $32\pi a^3$. **D.** $192\pi a^3$.

Câu 34: Cho hình nón có chiều cao bằng 3. Một mặt phẳng (α) đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều, góc giữa trục của hình nón và mặt phẳng (α) là $45°$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. 45π. **B.** 15π. **C.** $12\sqrt{25}\pi$. **D.** $5\sqrt{24}\pi$.

Câu 35: Cho hình nón có chiều cao bằng a. Biết rằng khi cắt hình nón đã cho bởi một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cách tâm của đáy hình nón một khoảng bằng $\frac{a}{3}$, thiết diện thu được là một tam giác vuông. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng:

A. $\frac{5\pi a^3}{9}$. **B.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{4\pi a^3}{9}$. **D.** $\frac{5\pi a^3}{12}$.

Câu 36: Cho hình nón (N) có đỉnh S, chiều cao $h=2$. Mặt phẳng (P) qua đỉnh S cắt hình nón (N) theo thiết diện là tam giác đều. Khoảng cách từ tâm đáy hình nón đến mặt phẳng (P) bằng $\sqrt{3}$. Thể tích khối nón giới hạn bởi hình nón (N) bằng

A. $\frac{52\pi}{9}$. **B.** $\frac{104\pi}{3}$. **C.** $\frac{52\pi}{3}$. **D.** $\frac{104\pi}{9}$

Câu 37: Cho hình nón đỉnh S, đường tròn đáy tâm O và góc ở đỉnh bằng $120°$. Một mặt phẳng đi qua S cắt hình nón theo thiết diện là tam giác vuông SAB. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng 3, diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $2\pi\sqrt{3}$. **B.** $27\pi\sqrt{3}$. **C.** $9\pi\sqrt{3}$. **D.** $18\pi\sqrt{3}$.

Câu 38: Cho hình nón đỉnh S, đường tròn đáy tâm O và góc ở đỉnh bằng 120^0. Một mặt phẳng đi qua S cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SAB. Khoảng cách giữa hai đường AB và SO bằng 3, diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng $18\pi\sqrt{3}$. Tính diện tích tam giác SAB.

A. 12. **B.** 18. **C.** 21. **D.** 27.

Câu 39: Cho hình nón (N) có góc ở đỉnh bằng $120°$. Mặt phẳng qua trục của (N), cắt (N) theo một

thiết diện là tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 4. Tính thể tích khối nón (N).

A. 8π. **B.** $4\sqrt{3}\pi$. **C.** 3π. **D.** 6π.

Câu 40: Cho khối nón dình S có đáy là hình tròn tâm O. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn (O) sao cho tam giác SAB vuông và có diện tích bằng $4a^2$. Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng (SAB) bằng 30°. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\frac{5}{3}\pi a^3$. **B.** $4\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi a^3$.

Câu 41: Cho hình nón (N) có đường sinh tạo với đáy một góc $60°$. Mặt phẳng qua trục của (N) cắt (N) được thiết diện là tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Thể tích V của khối nón giới hạn bởi (N) bằng

A. $V = 72\sqrt{3}\pi$. **B.** $V = 24\pi$. **C.** $V = 72\pi$. **D.** $V = 24\sqrt{3}\pi$.

Câu 42: Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác vuông SAB có diện tích bằng $4a^2$. Góc giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng 30^0. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $4\sqrt{10}\pi a^2$. **B.** $8\sqrt{10}\pi a^2$. **C.** $\sqrt{10}\pi a^2$. **D.** $2\sqrt{10}\pi a^2$.

Câu 43: Cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng đáy một góc α sao cho $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ được thiết diện là một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $4\sqrt{3}$. Thể tích khối nón đã cho bằng

A. $15{,}8$. **B.** $37{,}5$. **C.** $47{,}4$. **D.** $15{,}7$.

Câu 44: Cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0 được thiết diện là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng 4. Tính thể tích của khối nón ban đầu.

A. $V = \frac{10\sqrt{3}\pi}{3}$. **B.** $V = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$. **D.** $V = \frac{5\sqrt{3}\pi}{3}$.

Câu 45: Cho hình nón có thiết diện đi qua đỉnh là tam giác SAB vuông tại S,(A, B thuộc đường tròn đáy). Biết tam giác SAB có bán kính đường tròn nội tiếp bằng $2\left(\sqrt{2}-1\right)$ đường cao SO tạo với mặt phẳng SAB một góc $30°$. Diện tích xung quanh của hình nón bằng:

A. $2\sqrt{10}\pi$ **B.** $2\sqrt{5}\pi$ **C.** $4\sqrt{10}\pi$ **D.** $\sqrt{15}\pi$

Câu 46: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 4. Xét hình nón (N) có đáy nằm trên mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt xung quanh đi qua bốn điểm A', B', C', D'. Khi bán kính đáy của (N) bằng $3\sqrt{2}$, diện tích xung quanh của (N) bằng

A. 72π. **B.** 54π. **C.** $36\sqrt{2}\pi$. **D.** 108π.

Câu 47: Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác vuông SAB có diện tích bằng $4a^2$. Góc giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng $30°$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $\sqrt{10}\pi a^2$. **B.** $4\sqrt{10}\pi a^2$. **C.** $2\sqrt{10}\pi a^2$. **D.** $8\sqrt{10}\pi a^2$.

Câu 48: Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác đều SAB có diện tích bằng $4\sqrt{3}$. Góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng đáy bằng 45^0. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $10\sqrt{6}\pi$. **B.** $\frac{5\sqrt{6}}{3}\pi$. **C.** $\frac{5\sqrt{3}}{6}\pi$. **D.** $\frac{10\sqrt{6}}{3}\pi$.

Câu 49: Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, bán kính $R=5$. Mặt phẳng (α) qua S, cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SAB có diện tích bằng $12\sqrt{2}$. Mặt phẳng (α) tạo với đáy hình nón góc 45^o; tam giác OAB nhọn. Thể tích V của khối nón tạo nên từ hình nón đã cho bằng

A. $V=100\pi$. **B.** $V=25\pi$ **C.** $V=\frac{100\pi}{3}$. **D.** $V=75\pi$.

Câu 50: Cho khối nón đỉnh S có chiều cao bằng $6a$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho tam giác SAB vuông cân. Biết khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng $3a$, thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $150\pi a^3$. **B.** $96\pi a^3$. **C.** $108\pi a^3$. **D.** $120\pi a^3$.

Dạng 2: Tính toán các yếu tố liên quan đến khối nón

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho khối nón (N) có chiều cao bằng $3a$. Biết một mặt phẳng đi qua trục và cắt (N) theo thiết diện là tam giác đều. Thể tích của khối nón (N) bằng

A. $3\pi a^3$. **B.** $9\pi a^3$. **C.** $\frac{3\pi a^3}{2}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Cho hai khối nón (N_1), (N_2) có bán kính đáy, chiều cao và thể tích lần lượt là r_1, h_1, V_1 và r_2, h_2, V_2. Biết $\frac{r_1}{r_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{2}{3}$. Tính $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{27}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{9}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{27}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{8}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Một hình nón có diện tích xung quanh bằng $20\pi cm^2$. Tính chiều cao của hình nón biết bán kính đáy bằng $r = 4cm$.

A. $9\ cm$. **B.** $3\ cm$. **C.** $5\ cm$. **D.** $4\ cm$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $SAO = 30^0, SAB = 60^0$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** $2a\sqrt{3}$ **D.** $a\sqrt{5}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Một hình nón đỉnh S bán kính đáy $R = a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là $120°$. Mặt phẳng qua đỉnh hình nón cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác**.** Diện tích lớn nhất của tam giác đó bằng

A. $\sqrt{3}a^2$. **B.** $2a^2$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$. **D.** $2\sqrt{3}a^2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Một hình nón có bán kính đáy $r=5$, chiều cao $h=4$. Độ dài đường sinh của hình nón là

A. $l=3\sqrt{2}.$ **B.** $l=3.$ **C.** $l=\sqrt{41}.$ **D.** $l=9.$

Câu 2: Hình nón có góc ở đỉnh bằng 60^{o} và chiều cao bằng $\sqrt{3}$. Độ dài đường sinh của hình nón bằng

A. $l=2$. **B.** $l=2\sqrt{2}$. **C.** $l=2\sqrt{3}$. **D.** $l=3$.

Câu 3: Một hình nón có diện tích xung quang bằng 40π và bán kính đáy $r=5$ thì có độ dài đường sinh bằng

A. 4. **B.** 4π. **C.** 8. **D.** 8π

Câu 4: Một hình nón có chiều cao $h=6,$ bán kính đáy $R=8.$ Độ dài đường sinh của khối nón đó bằng

A. 10. **B.** 9. **C.** 100. **D.** 14.

Câu 5: Cho hình nón có độ dài đường sinh bằng 4, diện tích xung quanh bằng 8π, tính bán kính đáy R hình tròn của hình nón đó:

A. $R=1$. **B.** $R=2$. **C.** $R=4$. **D.** $R=8$.

Câu 6: Cho hình nón có bán kính đáy bằng a và chiều cao bằng $\sqrt{3}a$. Độ dài đường sinh của hình nón đã cho là

A. $4a$. **B.** $2a$. **C.** $\sqrt{10}a$. **D.** $\sqrt{2}a$.

Câu 7: Hình nón có góc ở đỉnh bằng $60°$ và chiều cao bằng $\sqrt{3}$. Độ dài đường sinh của hình nón bằng

A. 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** 3.

Câu 8: Hình nón có góc ở đỉnh bằng $120°$ và bán kính đáy bằng 3 thì có đường sinh bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** 6. **D.** $3\sqrt{3}$.

Câu 9: Cho khối nón có bán kính đáy $r=\sqrt{2}$, thể tích $V=6\pi$. Chiều cao của khối nón đã cho bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** 6. **D.** 9.

Câu 10: Cho khối nón có chiều cao $h=3,$ thể tích $V=9\pi.$ Bán kính đáy của khối nón đã cho bằng

A. $\sqrt{3}.$ **B.** $3\sqrt{3}.$ **C.** 3. **D. 9.**

Câu 11: Cho hình nón đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O và thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$. Chiều cao h của khối nón là

A. $h=a$. **B.** $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $h=\dfrac{a}{2}$. **D.** $h=\dfrac{3a}{2}$.

Câu 12: Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng $18\pi a^{2}$ và độ dài đường cao bằng a. Tính bán kính R của đường tròn đáy của hình trụ đã cho theo a.

A. $R=3a$. **B.** $R=9a$. **C.** $R=6\text{a}$. **D.** $R=18a$.

Câu 13: Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến mặt (SAB) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $SAO=30^{0},\ SAB=60^{0}$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng

A. $2a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{5}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Câu 14: Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh S, và tạo với trục của (N) một góc $30°$, ta được thiết diện là tam giác SAB vuông và có diện tích bằng $4a^2$. Chiều cao của hình nón bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $2a\sqrt{2}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Câu 15: Cho hình nón có chiều cao bằng 6, đường kính đáy bằng 20. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón và có khoảng cách từ tâm đến mặt phẳng chứa thiết diện là $4{,}8$. Tính diện tích S của thiết diện đó.

A. $S=160\sqrt{3}$. **B.** $S=80\sqrt{3}$. **C.** $S=120$. **D.** $S=60$.

Câu 16: Cho khối nón (N) có đỉnh S, tâm đường tròn đáy là O, góc ở đỉnh bằng $120°$. Một mặt phẳng (P) đi qua S, cắt hình nón (N) theo thiết diện là tam giác vuông SAB. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng 4. Tính thể tích V của khối nón (N).

A. $V=192\pi$. **B.** $V=128\pi$. **C.** $V=96\pi$. **D.** $V=64\pi$.

Câu 17: Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, góc ở đỉnh của hình nón là $\varphi=120°$. Cắt hình nón bởi mặt phẳng đi qua đỉnh S được thiết diện là tam giác vuông SAB, trong đó A,B thuộc đường tròn đáy. Biết rằng khoảng cách giữa SO và AB bằng 3. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

A. $36\sqrt{3}\pi$. **B.** $18\sqrt{3}\pi$. **C.** $27\sqrt{3}\pi$. **D.** $9\sqrt{3}\pi$.

Câu 18: Cắt hình nón (N) đỉnh S cho trước bởi mặt phẳng qua trục của nó, ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2a\sqrt{2}$. Biết BC là một dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy nón một góc 60^0. Tính diện tích tam giác SBC.

A. $\dfrac{2a^2\sqrt{2}}{9}$. **B.** $\dfrac{4a^2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{4a^2\sqrt{2}}{9}$. **D.** $\dfrac{2a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 19: Cho khối nón tròn xoay có đường cao $h=20$ cm, bán kính đáy $r=25$cm. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của khối nón và cách tâm O của đáy khối nón một khoảng bằng 12cm. Khi đó diện tích thiết diện của khối nón cắt bởi mặt phẳng (P) bằng:

A. $500\,\text{cm}^2$. **B.** $475\,\text{cm}^2$. **C.** $450\,\text{cm}^2$. **D.** $550\,\text{cm}^2$.

Câu 20: Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng $60°$ ta thu được thiết diện là một tam giác đều cạnh $4a$. Diện tích xung quanh của (N) bằng

A. $8\sqrt{7}\pi a^2$. **B.** $4\sqrt{13}\pi a^2$. **C.** $8\sqrt{13}\pi a^2$. **D.** $4\sqrt{7}\pi a^2$.

Câu 21: Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với trục của (N) một góc bằng $30°$, ta được là thiết diện là tam giác SAB vuông và có diện tích bằng $4a^2$. Chiều cao của hình nón bằng.

A. $2a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $2a\sqrt{2}$. **D.** $a\sqrt{2}$

Câu 22: Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng qua trục của nó ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Gọi BC là dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy một góc bằng $60°$. Tính diện tích tam giác SBC.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^2$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}a^2$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a^2$. **D.** $\dfrac{a^2}{3}$.

Câu 23: Cho hình nón có chiều cao và bán kính đáy đều bằng 1. Mặt phẳng (P) qua đỉnh của hình nón và cắt đáy theo dây cung có độ dài bằng 1. Khoảng cách từ tâm của đáy tới mặt phẳng (P) bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 24: Cho hình nón có chiều cao và bán kính đáy đều bằng a. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón và cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng a. Khoảng cách từ tâm của đáy tới mặt phẳng (P) bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}a$. **C.** $\frac{\sqrt{7}}{7}a$. **D.** $\frac{\sqrt{21}}{7}a$.

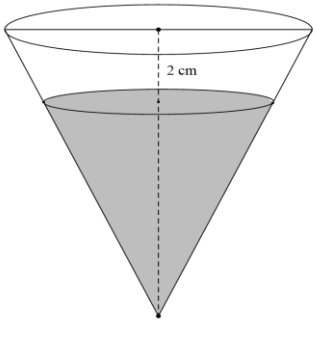
Câu 25: Cho hình nón (N) có đỉnh S và đáy là đường tròn tâm (O), bán kính R, chiều cao $2R$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh và cắt đường tròn đáy theo dây cung AB có độ dài bằng bán kính. Tính sin của góc tạo bởi OA và mặt phẳng (SAB).

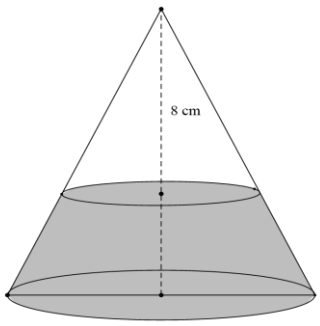
A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{2\sqrt{57}}{19}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{57}}{19}$.

Câu 26: Cho khối nón đỉnh S, tâm mặt đáy O và có thể tích bằng $12\pi a^3$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB = 2a$ và góc $AOB = 60°$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\frac{9\sqrt{7}}{14}a$. **B.** $\frac{18\sqrt{85}}{85}a$. **C.** $\frac{3\sqrt{7}}{14}a$. **D.** $\frac{6\sqrt{85}}{85}a$.

Câu 27: Một dụng cụ hình nón bằng thủy tinh, bên trong có chứa một lượng nước. Khi đặt dụng cụ sao cho đỉnh hình nón hướng xuống dưới theo chiều thẳng đứng thì phần không gian trống trong dụng cụ có chiều cao 2 cm. Khi lật ngược dụng cụ để đỉnh hướng lên trên theo chiều thẳng đứng thì mực nước cao cách đỉnh của nón 8 cm (hình vẽ minh họa bên dưới).





Biết chiều cao của nón là $h = a + \sqrt{b}$ cm. Tính $T = a + b$.

A. 22. **B.** 58. **C.** 86. **D.** 72.

Câu 28: Cho khối nón có đỉnh S, chiều cao bằng 8 và thể tích bằng $\frac{800\pi}{3}$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB = 12$, khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $8\sqrt{2}$. **B.** $\frac{24}{5}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $\frac{5}{24}$.

Câu 29: Cho hình nón N_1 đỉnh S đáy là đường tròn $C(O;R)$, đường cao $SO = 40cm$. Người ta cắt hình nón bằng mặt phẳng vuông góc với trục để được hình nón nhỏ N_2 có đỉnh S và đáy là đường tròn $C'(O';R')$. Biết rằng tỷ số thể tích $\frac{V_{N_2}}{V_{N_1}} = \frac{1}{8}$. Độ dài đường cao của hình nón N_2 là

A. $10\ cm$. **B.** $20\ cm$. **C.** $5cm$. **D.** $49\ cm$.

Câu 30: Cho khối nón có bán kính đáy bằng $\sqrt{3}a$. Gọi M, N là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $MN = 2a$. Biết thể tích của khối nón là $\sqrt{2}\pi a^3$, khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SMN) là

A. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **B.** $2a$. **C.** a. **D.** $\sqrt{3}a$.

Câu 31: Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh S và tạo với trục của (N) một góc bằng 30°, ta được thiết diện là tam giác SAB vuông và có diện tích bằng $4a^2$. Chiều cao của hình nón bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $2a\sqrt{2}$. **D.** $2a\sqrt{3}$.

Câu 32: Cắt hình nón đỉnh I bởi một mặt phẳng đi qua trục hình nón ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$; BC là dây cung của đường tròn đáy sao cho mặt phẳng (IBC) tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc $60°$. Tính theo a diện tích S của tam giác IBC.

A. $S = \frac{\sqrt{2}a^2}{6}$. **B.** $S = \frac{a^2}{3}$. **C.** $S = \frac{\sqrt{2}a^2}{3}$. **D.** $S = \frac{2a^2}{3}$.

Câu 33: Cho một hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O, bán kính $R = \sqrt{5}$ và góc ở đỉnh là 2α với $\sin\alpha = \frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (P) vuông góc với SO tại H và cắt hình nón theo một đường tròn tâm H. Gọi V là thể tích của khối nón đỉnh O và đáy là đường tròn tâm H. Biết $V = \frac{50\pi}{81}$ khi $SH = \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $T = 3a^2 - 2b^3$.

A. 12. **B.** 23. **C.** 21. **D.** 32.

Câu 34: Cho hình nón đỉnh S có góc ở đỉnh bằng 60^0 và có độ dài đường sinh $l = 12cm$. Gọi AB là một đường kính cố định của đáy hình nón. MN là một dây cung thay đổi của đường tròn đáy và luôn vuông góc với AB. Biết rằng tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác SMN luôn thuộc một đường tròn (C) cố định. Tính bán kính của đường tròn (C)

A. $6\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 35: Cho hình nón đỉnh S đáy là hình tròn tâm O, SA, SB là hai đường sinh. Biết $SO = 3$, khoảng cách từ O đến (SAB) là 1 và diện tích ΔSAB là 18. Tính bán kính đáy của hình nón trên.

A. $\frac{\sqrt{674}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{530}}{4}$. **C.** $\frac{9\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{23}{4}$.

Câu 36: Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh S và tạo với trục của (N) một góc bằng $30°$, ta được thiết diện là tam giác SAB vuông và có diện tích bằng $4a^2$. Chiều cao của hình nón bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $2a\sqrt{2}$. **D.** $2a\sqrt{3}$.

Câu 37: Cho khối nón tròn xoay có đường cao $h=5a$ và bán kính đáy $r=4a$. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của khối nón và có khoảng cách đến tâm O của đáy bằng $3a$. Diện tích thiết diện tạo bởi (P) và hình nón là

A. $\frac{25\sqrt{31}}{16}a^2$. **B.** $\frac{5\sqrt{31}}{8}a^2$. **C.** $\frac{5\sqrt{41}}{16}a^2$. **D.** $\frac{25\sqrt{41}}{32}a^2$.

Câu 38: Cho khối nón đỉnh S, tâm mặt đáy O và có thể tích bằng $12\pi a^3$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB=2a$ và góc $AOB=60°$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\frac{9\sqrt{7}}{14}a$. **B.** $\frac{18\sqrt{85}}{85}a$. **C.** $\frac{3\sqrt{7}}{14}a$. **D.** $\frac{6\sqrt{85}}{85}a$.

Câu 39: Cho hình nón đỉnh S, tâm mặt đáy O và có diện tích xung quanh bằng $20\pi a^2$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho độ dài cung AB bằng $\frac{1}{3}$ lần chu vi của đường tròn đáy. Biết rằng bán kính đáy bằng $4a$, khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\frac{2\sqrt{13}}{13}a$. **B.** $\frac{\sqrt{13}}{13}a$. **C.** $\frac{12\sqrt{13}}{13}a$. **D.** $\frac{6\sqrt{13}}{13}a$.

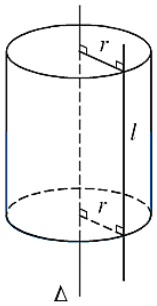
CHƯƠNG 4

MẶT NÓN, MẶT TRỤ MẶT CẦU

CHỦ ĐỀ 10 MẶT TRỤ TRÒN XOAY VÀ KHỐI TRỤ

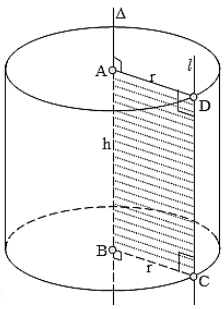
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Mặt trụ



- Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và l song song với nhau, cách nhau một khoảng r Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh đường thẳng Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay hay gọi tắt là mặt trụ. Trong đó:
  - Đường thẳng Δ gọi là trục
  - Đường thẳng l gọi là đường sinh
  - r là bán kính của mặt trụ đó

2. Hình trụ tròn xoay và khối trụ tròn xoay



- Khối trụ tròn xoay hay khối trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ tròn xoay đó.
- Mặt đáy, đường sinh, chiều cao, bán kính của một hình trụ cũng là mặt đáy, đuowngf sinh, chiều cao, bán kính của khối trụ tương ứng.
- Cho hình trụ có chiều cao h, đường sinh l, bán kính đáy r. Khi đó ta có các công thức sau:
  - Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi.r.l$
  - Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 2\pi.r.l + 2\pi.r^2$
  - Thể tích của khối trụ: $V = \pi.r^2.h$

Dạng 1: Tính S_{xq} và S_{tp} của khối trụ. Thể tích khối trụ

- Cho hình trụ có chiều cao h, đường sinh l, bán kính đáy r. Khi đó ta có các công thức sau:
  - Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi.r.l$
  - Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 2\pi.r.l + 2\pi.r^2$
  - Thể tích của khối trụ: $V = \pi.r^2.h$

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Một hình trụ có bán kính đáy bằng a, chu vi thiết diện qua trục bằng $10a$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng.

A. πa^3. **B.** $3\pi a^3$. **C.** $5\pi a^3$. **D.** $4\pi a^3$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Cắt một khối trụ có chiều cao 5 dm bởi một mặt phẳng vuông góc với trục ta được hai khối trụ mới có tổng diện tích toàn phần nhiều hơn diện tích toàn phần của khối trụ ban đầu là 18 dm^2. Tổng diện tích toàn phần của hai khối trụ mới bằng

A. 51π dm^2. **B.** 66π dm^2. **C.** 144π dm^2. **D.** 48π dm^2.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a\sqrt{3}$ và góc $BDC = 30^o$. Quay hình chữ nhật này xung quanh cạnh AD. Thể tích của khối trụ là:

A. $3\pi a^3$. **B.** $2\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** πa^3. **D.** $9\pi a^3$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB=10cm$, cạnh $BC=6cm$. Biết rằng khi quay hình chữ nhật $ABCD$ một vòng xung quanh cạnh AB cố định ta được một hình trụ. Tính diện tích xung quanh hình trụ được tạo thành.

A. $S_{xq}=90\pi\left(cm^2\right)$. **B.** $S_{xq}=100\pi\left(cm^2\right)$. **C.** $S_{xq}=110\pi\left(cm^2\right)$. **D.** $S_{xq}=120\pi\left(cm^2\right)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), bán kính đáy $r=3$. Biết AB một dây cung của đường tròn (O) sao cho tam giác $O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn (O) một góc $60°$. Tính thể tích của khối trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{9\sqrt{7}\pi}{7}$. **B.** $V=\dfrac{81\sqrt{7}\pi}{7}$. **C.** $V=\dfrac{81\pi}{7}$. **D.** $V=81\sqrt{7}\pi$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Một hình trụ có bán kính đáy bằng a, chu vi thiết diện qua trục bằng $10a$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. πa^3. **B.** $3\pi a^3$. **C.** $4\pi a^3$. **D.** $5\pi a^3$.

Câu 2: Gọi l, h, R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính của hình trụ (T). Diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ được xác định theo công thức

A. $S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2$. **B.** $S_{tp} = 2\pi Rl + 2\pi R^2$.

C. $S_{tp} = \pi Rl + 2\pi R^2$. **D.** $S_{tp} = \pi Rh + \pi R^2$.

Câu 3: Cho hình trụ có bán kính $r = 3$ và độ dài đường sinh $l = 5$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 30π. **B.** 15π. **C.** 45π. **D.** 24π.

Câu 4: Cho khối lăng trụ có diện tích đáy là $5a^2$ và chiều cao $3a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $30a^3$. **B.** $15a^2$. **C.** $15a^3$. **D.** $5a^3$.

Câu 5: Cho khối trụ có bán kính đáy $r = 3$ và chiều cao $h = 5$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 30π. **B.** 15π. **C.** 5π. **D.** 45π.

Câu 6: Cho hình nón có độ dài đường sinh bằng a và bán kính đáy bằng R. Tính thể tích của khối trụ đã cho.

A. $\frac{1}{3}\pi aR^2 \cdot$ **B.** $\pi aR^2 \cdot$ **C.** $aR^2 \cdot$ **D.** $2\pi aR^2 \cdot$

Câu 7: Cho hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy bằng r. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ được tính bởi công thức

A. $S_{xq} = \pi rh$. **B.** $S_{xq} = 2\pi rh$. **C.** $S_{xq} = \frac{1}{3}\pi rh$. **D.** $S_{xq} = \pi r^2 h$.

Câu 8: Cho hình trụ có thiết diện đi qua trục là một hình vuông có cạnh bằng $4a$. Diện tích xung quanh của hình trụ là

A. $S = 4\pi a^2$ **B.** $S = 8\pi a^2$ **C.** $S = 24\pi a^2$ **D.** $S = 16\pi a^2$

Câu 9: Cho hình trụ có thiết diện đi qua trục là một hình vuông có cạnh bằng $4a$. Diện tích xung quanh của hình trụ là

A. $S = 4\pi a^2$ **B.** $S = 8\pi a^2$ **C.** $S = 24\pi a^2$ **D.** $S = 16\pi a^2$

Câu 10: Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng S, diện tích đáy bằng diện tích một mặt cầu có bán kính a. Khi đó thể tích của khối trụ tính theo S và a là

A. Sa. **B.** $\frac{1}{2}Sa$. **C.** $\frac{1}{3}Sa$. **D.** $\frac{1}{4}Sa$.

Câu 11: Cho khối trụ (T), cắt khối trụ (T) bằng mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $2\sqrt{3}a$. Tính thể tích của khối trụ đã cho.

A. $V = 2\sqrt{3}\pi a^3$ **B.** $V = 9\sqrt{3}\pi a^3$ **C.** $V = 6\sqrt{3}\pi a^3$ **D.** $V = 3\sqrt{3}\pi a^3$

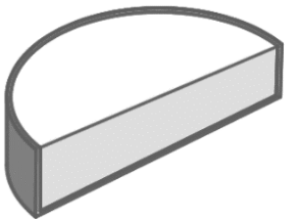
Câu 12: Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng qua trục, ta được thiết diện là một hình vuông có chu vi là 8. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 4π. **B.** $\frac{2}{3}\pi$. **C.** 2π. **D.** 8π.

Câu 13: Diện tích xung quanh của hình trụ có chiều cao bằng $3a$ và bán kính đáy bằng a là

A. $3\pi a^2$ **B.** $9\pi a^2$ **C.** $12\pi a^2$ **D.** $6\pi a^2$

Câu 14: Thể tích của miếng Piza dạng nửa hình trụ có đường kính đáy là 18cm và chiều cao 3cm là



A. 243cm^3. **B.** $81\pi\,\text{cm}^3$. **C.** $\frac{243\pi}{2}\text{cm}^3$. **D.** $972\pi\,\text{cm}^3$.

Câu 15: Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2$, $AD=1$. Quay hình chữ nhật đó xung quanh cạnh AB, ta được một hình trụ. Diên tích xung quanh của hình trụ là

A. 2π. **B.** $\frac{2\pi}{3}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** 4π.

Câu 16: Cho khối trụ (T), cắt khối trụ (T) bằng mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết điện là hình vuông cạnh bằng $2a\sqrt{3}$. Thể tích của khối trụ đã cho là

A. $V=6\sqrt{3}\pi a^3$ **B.** $V=9\sqrt{3}\pi a^3$ **C.** $V=2\sqrt{3}\pi a^3$ **D.** $V=3\sqrt{3}\pi a^3$

Câu 17: Cho hình trụ (T) có thiết diện cắt bởi mặt phẳng chứa đường cao là hình vuông có diện tích bằng $4a^2$. Thể tích khối trụ (T) bằng:

A. $2\pi a^3$. **B.** $8\pi a^3$. **C.** $3\pi a^3$. **D.** πa^3.

Câu 18: Một hình trụ có chiều cao bằng 3 và chu vi đáy bằng 4π. Tính thể tích khối trụ đó.

A. 12π. **B.** 40π. **C.** 18π. **D.** 10π.

Câu 19: Cắt khối trụ (T) bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh bằng 4. Thể tích của khối trụ (T) bằng

A. 8π. **B.** 16π. **C.** 32π. **D.** 64π.

Câu 20: Cắt hình trụ (T) bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh bằng 4. Diện tích xung quanh của hình trụ (T) bằng

A. 4π. **B.** 8π. **C.** 32π. **D.** 16π.

Câu 21: Cắt hình trụ (T)bởi một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là hình vuông cạnh bằng 4. Diện tích xung quanh của hình trụ (T) đã cho bằng

A. 4π. **B.** 20π. **C.** 16π. **D.** 8π.

Câu 22: Cho hình trụ có bán kính đáy $r=4$, đường sinh $l=6$. Diện tích toàn phần của hình trụ đã cho bằng

A. 80π. **B.** 96π. **C.** 56π. **D.** 64π

Câu 23: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2a$. Gọi S là diện tích xung quanh của hình trụ có hai đường tròn đáy là hai đường tròn ngoại tiếp các hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $S = 4\pi a^2\sqrt{3}$. **B.** $S = 4\pi a^2\sqrt{2}$. **C.** $S = 2\pi a^2\sqrt{2}$. **D.** $S = \pi a^2\sqrt{2}$.

Câu 24: Cho hình trụ có bán kính đáy r và chiều cao h. Diện tích toàn phần của hình trụ đã cho bằng

A. $2\pi r(r+h)$. **B.** πrh. **C.** $2\pi rh$. **D.** $\pi r(r+h)$.

Câu 25: Khối trụ có đường kính đáy bằng a, chiều cao bằng $a\sqrt{2}$ thì có diện tích xung quanh bằng.

A. $\pi a^2\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\dfrac{3\pi a^2}{4}$.

Câu 26: Cho hình trụ có thiết diện qua trục là một hình vuông. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ đã cho. Tỷ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{4}{5}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Câu 27: Cho khối trụ có bán kính đường tròn đáy $r = a$ và thể tích $V = 2\pi a^3$. Diện tích xung quanh của khối trụ đã cho bằng

A. πa^2. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $8\pi a^2$. **D.** $4\pi a^2$.

Câu 28: Cho hình trụ có hai đáy là hình tròn tâm O và O', chiều cao $h = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng đi qua tâm O và tạo với OO' một góc $30°$, cắt hai đường tròn tâm O và O' tại bốn điểm là bốn đỉnh của một hình thang có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ và diện tích bằng $3a^2$. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\pi a^3\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 29: Một hình trụ được cắt bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $\sqrt{5}$, thiết diện thu được là hình vuông có diện tích bằng 16. Tính thể tích V của khối trụ đó.

A. $V = 28\pi$. **B.** $V = 32\pi$. **C.** $V = 36\pi$. **D.** $V = 44\pi$.

Câu 30: Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông. Gọi A và B là hai điểm lần lượt nằm trên hai đường tròn (O') và (O). Biết $AB = 2a$ và khoảng cách giữa AB và OO' bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{3}$.

Câu 31: Một công ty chuyên sản xuất chậu trồng cây có dạng hình trụ không có nắp, chậu có thể tích $0,5m^3$. Biết giá vật liệu làm $1m^2$ mặt xung quanh chậu là 100.000 đồng, để làm $1m^2$ đáy chậu là 200.000 đồng. Số tiền ít nhất để mua vật liệu làm một chậu gần nhất với số nào dưới đây?

A. 349.000 đồng. **B.** 725.000 đồng. **C.** 498.000 đồng. **D.** 369.000 đồng.

Câu 32: Cho hình trụ có chiều cao bằng $2\sqrt{5}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục, cách trục một khoảng $\sqrt{5}$, thiết diện thu được là hình vuông. Diện tích xung quanh hình trụ đã cho bằng

A. $8\pi\sqrt{10}$. **B.** $4\pi\sqrt{10}$. **C.** $10\pi\sqrt{5}$. **D.** $20\pi\sqrt{2}$.

Câu 33: Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'). Một mặt phẳng song song với trục và cách trục của hình trụ một khoảng bằng $\frac{10a}{3}$, cắt hình trụ theo thiết diện là một hình vuông $ABCD, A \in (O')$. Biết góc giữa OA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30^0. Thể tích khối trụ đã cho bằng

A. $\frac{1360\sqrt{15}a^3}{54}\pi$. **B.** $\frac{640\sqrt{15}a^3}{54}\pi$. **C.** $\frac{1360\sqrt{15}a^3}{27}\pi$ **D.** $\frac{640\sqrt{15}a^3}{27}\pi$.

Câu 34: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2, BC = 4$. Các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Gọi V_1, V_2 là thể tích của 2 khối tròn xoay khi quay hình chữ nhật $ABCD$ lần lượt quanh trục MP, NQ. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $V_2 = 2V_1$. **B.** $V_2 = V_1$. **C.** $V_2 = 8V_1$. **D.** $V_2 = 4V_1$.

Câu 35: Cho hình trụ có chiều cao bằng $5\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 30. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $5\sqrt{39}\pi$. **B.** $20\sqrt{3}\pi$. **C.** $10\sqrt{39}\pi$. **D.** $10\sqrt{3}\pi$.

Câu 36: Cho hình trụ có chiều cao $8a$. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $2a$ thì thiết diện thu được là một hình chữ nhật có diện tích bằng $48a^2$. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A. $169\pi a^3$. **B.** $52\pi a^3$. **C.** $104\pi a^3$. **D.** $\frac{104\pi a^3}{3}$.

Câu 37: Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), bán kính đáy $R = \sqrt{7}$. AB là một dây cung của đường tròn (O) sao cho tam giác $O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn $(O;R)$ một góc 60^0. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 22π. **B.** 7π. **C.** $3\sqrt{7}\pi$. **D.** 21π.

Câu 38: Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Một mặt phẳng thay đổi, vuông góc với SO và cắt SO, SA, SB, SC, SD lần lượt tại I, M, N, P, Q. Một hình trụ có một đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MNPQ$ và một đáy nằm trên mặt phẳng $(ABCD)$. Thể tích khối trụ lớn nhất bằng

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{8}$ **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{27}$ **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{27}$

Câu 39: Cho hình trụ có chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ lấy hai điểm A, B; trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ lấy hai điểm C, D sao cho $ABCD$ là hình vuông và mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy của hình trụ góc 45^o. Thể tích khối trụ đã cho bằng:

A. $\frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{2}$. **B.** $6\sqrt{2}\pi a^3$. **C.** $3\sqrt{2}\pi a^3$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{8}$.

Câu 40: Trường THPT Kinh Môn thành lập đội bóng chuyền hơi nữ để đi thi đấu giải bóng chuyền hơi nữ giáo viên cấp tỉnh. Để thuận tiện cho việc luyện tập, các cô đã mua 3 quả bóng chuyền hơi, mỗi quả có đường kính bằng $\frac{80}{\pi}cm$. Các cô dùng 1 chiếc thùng hình trụ để cất giữ bóng khi không tập. Biết khi xếp ba quả bóng vào thùng sao cho chúng đôi một tiếp xúc với nhau, mỗi quả bóng đều tiếp xúc với đáy thùng và 1 đường sinh của thùng thì điểm cao nhất của ba quả bóng đều cách mặt trên của thùng $5cm.$ Thể tích của thùng đựng gần nhất với kết quả nào

A. $50(l)$. **B.** $72(l)$. **C.** $25(l)$. **D.** $83(l)$.

Câu 41: Cho hình trụ có bán kính đáy bằng $2a$. Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với trục, cách trục một khoảng bằng a ta được thiết diện là một hình chữ nhật có diện tích bằng $8\sqrt{3}a^2$. Thể tích khối trụ đã cho bằng

A. $4\pi a^3$. **B.** $16\pi a^3$. **C.** $32\pi a^3$. **D.** $27\pi a^3$.

Câu 42: Cho hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$. Tồn tại dây cung AB thuộc đường tròn (O) sao cho $\Delta O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$ hợp với mặt phẳng chứa đường tròn (O) một góc $60°$. Khi đó diện tích xung quanh S_{xq} hình trụ là

A. $S_{xq}=\frac{4\pi R^2}{7}$. **B.** $S_{xq}=\frac{3\pi R^2}{\sqrt{7}}$. **C.** $S_{xq}=\frac{3\pi R^2\sqrt{7}}{7}$. **D.** $S_{xq}=\frac{6\pi R^2\sqrt{7}}{7}$.

Câu 43: Cho khối trụ có hai đáy là hình tròn $(O;r)$ và $(O';r)$. Biết MN là một dây cung của đường tròn $(O;r)$ sao cho tam giác $O'MN$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'MN)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn $(O;r)$ một góc $60°$. Thể tích khối trụ tính theo r bằng

A. $\frac{3\sqrt{7}\pi r^3}{7}$. **B.** $\frac{\sqrt{7}\pi r^3}{7}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}\pi r^3}{5}$. **D.** $\frac{3\sqrt{5}\pi r^3}{5}$.

Câu 44: Cho hình trụ có hai đáy là hình tròn (O,R) và (O',R), AB là một dây cung của đường tròn (O,R), tam giác $O'AB$ đều và mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đáy của hình trụ một góc 45^0. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. $\frac{\pi\sqrt{15}R^3}{15}$. **B.** $\frac{\pi\sqrt{15}R^3}{5}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{7}R^3}{7}$. **D.** $\frac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}$.

Câu 45: Cắt hình trụ (T) có bán kính R bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng a $(0<a<R)$ ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích $16a^2$. Diện tích xung quanh của hình trụ (T) bằng

A. $4\pi a^2\sqrt{5}$. **B.** $\pi a^2\sqrt{5}$. **C.** $8\pi a^2\sqrt{5}$. **D.** $16\pi a^2\sqrt{5}$

Câu 46: Cắt hình trụ (T) có bán kính bằng R bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $a(0<a<R)$ ta được một thiết diện là hình vuông có diện tích $16a^2$. Diện tích xung quanh của hình trụ (T) bằng

A. $4\pi a^2\sqrt{5}$. **B.** $\pi a^2\sqrt{5}$. **C.** $8\pi a^2\sqrt{5}$. **D.** $16\pi a^2\sqrt{5}$.

Câu 47: Cho hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai đường tròn $\left(I;\sqrt{7}\right)$ và $\left(J;\sqrt{7}\right)$. Biết tồn tại dây cung EF của đường tròn $\left(I;\sqrt{7}\right)$ sao cho tam giác JEF là tam giác đều và mặt phẳng (JEF) hợp với mặt đáy của hình trụ một góc bằng $60°$. Thể tích V của khối trụ đã cho là

A. $V=21\pi$. **B.** $V=7\sqrt{6}\pi$. **C.** $V=14\pi$. **D.** $V=28\pi$.

Câu 48: Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), bán kính đáy $r=3$. Biết AB một dây cung của đường tròn (O) sao cho tam giác $O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn (O) một góc $60°$. Tính thể tích của khối trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{9\sqrt{7}\pi}{7}$. **B.** $V=\dfrac{81\sqrt{7}\pi}{7}$. **C.** $V=\dfrac{81\pi}{7}$. **D.** $V=81\sqrt{7}\pi$.

Câu 49: Cho hình trụ (T). Một hình vuông $ABCD$ có hai cạnh AB,CD lần lượt là hai dây cung của hai đường tròn đáy của hình trụ (T), mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy của hình trụ một góc 45^0. Biết $AB=2\sqrt{2}$, tính thể tích V của khối trụ tạo bởi hình trụ đã cho.

A. $V=4\sqrt{2}\pi$. **B.** $V=4\pi$. **C.** $V=6\sqrt{2}\pi$. **D.** $V=6\pi$.

Câu 50: Cho hình trụ có diện tích toàn phần bằng 9π và có thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là một hình vuông. Thể tích khối trụ đã cho là

A. $3\pi\sqrt{6}$. **B.** $\dfrac{3\pi\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{3\pi\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\dfrac{2\pi\sqrt{6}}{3}$.

Câu 51: Cho hình trụ (H) có hai đáy là hai đường tròn có tâm O và O', mặt phẳng (α) đi qua O' và cắt đường tròn tâm O tại hai điểm A,B sao cho tam giác $O'AB$ là tam giác đều và có diện tích $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Biết góc giữa mp(α) và mp(OAB) bằng 60^0, tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ (H)?

A. $S_{tp}=\dfrac{\left(7+3\sqrt{7}\right).\pi a^2}{8}$. **B.** $S_{tp}=\dfrac{\left(7+3\sqrt{7}\right).a^2}{16}$.

C. $S_{tp}=\dfrac{\left(7+3\sqrt{7}\right).\pi a^2}{16}$. **D.** $S_{tp}=\dfrac{\left(7+3\sqrt{7}\right)a^2}{8}$.

Câu 52: Cho hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng 4, trong đó AB, CD lần lượt là hai dây cung trên hai đường tròn đáy của hình trụ (T). Biết rằng $(ABCD)$ tạo với mặt đáy của hình trụ (T) một góc bằng $60°$. Thể tích của khối trụ (T) bằng

A. $\dfrac{5\sqrt{3}}{12}\pi$. **B.** $\dfrac{\sqrt{15}}{2}\pi$. **C.** $\dfrac{\sqrt{15}}{4}\pi$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}\pi$.

Câu 53: Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục ta được thiết diện là hình vuông có diện tích bằng 64, biết khoảng cách từ tâm đáy đến thiết diện bằng 3. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. 64π. **B.** 40π. **C.** 48π. **D.** 80π.

Câu 54: Một hình trụ có bán kính bằng $2a$. Hai điểm A, B lần lượt thuộc hai đường tròn đáy sao cho $AB = 4a$. Biết khoảng cách giữa AB và trục bằng a. Tính thể tích khối trụ đã cho.

A. $\pi a^3\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{8\pi a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $4\pi a^3\sqrt{2}$. **D.** $8\pi a^3$.

Câu 55: Cho hình trụ (T) có O, O' lần lượt là tâm hai đường tròn đáy. Tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, $AB = 2a$, $\sin ACB = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ và OO' tạo với mặt phẳng $(O'AB)$ một góc 30^o. Thể tích khối trụ (T) bằng

A. $2\pi a^3\sqrt{6}$. **B.** $3\pi a^3\sqrt{6}$. **C.** $\pi a^3\sqrt{3}$. **D.** $\pi a^3\sqrt{6}$.

Dạng 4: Khối tròn xoay nội, ngoại tiếp khối đa diện

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Một hình tứ diện đều cạnh a có một đỉnh trùng với đỉnh hình nón, ba đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy của hình nón. Diện tích xung quanh của hình nón bằng:

A. $\pi\sqrt{3}a^2$ **B.** $\frac{1}{3}\pi\sqrt{2}a^2$. **C.** $\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}a^2$. **D.** $\frac{1}{3}\pi\sqrt{3}a^2$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a, góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

A. $V = a^3\pi\sqrt{3}$. **B.** $V = \frac{4a^3\pi\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{9}$. **D.** $V = \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và bán kính đáy bằng a. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. **C.** $\frac{2\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích khối nón đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{2\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Một hình nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Kết quả diện tích toàn phần S_{tp} của hình nón đó bằng $\frac{\pi a^2}{4}\left(\sqrt{b}+c\right)$ với b và c là hai số nguyên dương và $b>1$. Tính bc.

A. $bc=7$. **B.** $bc=15$. **C.** $bc=8$. **D.** $bc=5$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 6: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Gọi M là trung điểm AB. Cho tứ giác $AMCD$ và các điểm trong của nó quay quanh trục AD ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích khối tròn xoay đó.

A. $\frac{7\pi}{3}$. **B.** $\frac{7\pi}{6}$. **C.** $\frac{14\pi}{3}$. **D.** $\frac{14\pi}{9}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 3. Tính diện tích xung quanh S_{xq} hình nón có đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ và đỉnh là tâm hình vuông $A'B'C'D'$.

A. $S_{xq}=8\sqrt{3}\pi$. **B.** $S_{xq}=\dfrac{9\sqrt{5}\pi}{4}$. **C.** $S_{xq}=\dfrac{9\sqrt{5}\pi}{2}$. **D.** $S_{xq}=8\sqrt{5}\pi$

Câu 2: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa cạnh bên với mặt đáy bằng $45°$. Tính diện tích xung quanh của khối nón đỉnh S, đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

A. $4\sqrt{2}\pi a^2$. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $2\sqrt{2}\pi a^2$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$.

Câu 3: Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, góc giữa mặt bên và đáy bằng $60°$. Tính thể tích của khối nón đỉnh S, có đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$.

Câu 4: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh $3a$. Thể tích khối nón đỉnh A và đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác BCD bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}\pi a^3$. **B.** $\sqrt{6}\pi a^3$. **C.** $3\sqrt{6}\pi a^3$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{108}\pi a^3$.

Câu 5: Cho hình nón (N) đỉnh S có bán kính đáy bằng a và diện tích xung quanh $S_{xq}=2\pi a^2$. Tính thể tích V của khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ nội tiếp đường tròn đáy của hình nón (N).

A. $V=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V=\dfrac{2a^3\sqrt{5}}{3}$. **C.** $V=\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $V=2a^3\sqrt{3}$.

Câu 6: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $5\sqrt{2}$, khoảng cách từ tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đến một mặt bên là 2. Thể tích của khối nón ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng:

A. $\dfrac{500}{9}\pi$. **B.** $\dfrac{2000}{9}\pi$. **C.** $\dfrac{500}{3}\pi$. **D.** $\dfrac{500}{27}\pi$.

Câu 7: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh đều bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy nội tiếp tứ giác $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3}{2}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3}{6}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 8: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Khối nón có đỉnh là A, đáy là đường tròn ngoại tiếp ΔBCD thì có thể tích bằng

A. $\dfrac{a^3\pi\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\dfrac{a^3\pi\sqrt{6}}{9}$. **C.** $\dfrac{a^3\pi\sqrt{2}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\pi\sqrt{6}}{27}$.

Câu 9: Cho hình nón (N) có đường sinh tạo với đáy một góc $60°$. Mặt phẳng qua trục của (N) cắt (N) theo thiết diện là một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Tính thể tích V của khối nón giới hạn bởi (N).

A. $V=3\sqrt{3}\pi$. **B.** $V=9\sqrt{3}\pi$. **C.** $V=3\pi$. **D.** $V=9\pi$.

Câu 10: Cho hình chóp $SABCD$ có $SA=SB=SC=SD$. Đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=a$, $AD=2a$, góc giữa SA và mặt phẳng đáy là 60^0. Tính thể tích của khối nón có đỉnh là S, đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

A. $\dfrac{5\pi a^3\sqrt{15}}{6}$. **B.** $\dfrac{5\pi a^3\sqrt{15}}{72}$. **C.** $\dfrac{5\pi a^3\sqrt{15}}{24}$. **D.** $\dfrac{5\pi a^3\sqrt{15}}{8}$.

Câu 11: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên tạo với đáy góc 60°. Thể tích khối nón ngoại tiếp hình chóp là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 12: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác đáy ABC đến một mặt bên là $\dfrac{a}{2}$. Thể tích của khối nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{4\pi a^3}{9}$. **C.** $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{4\pi a^3}{27}$.

Câu 13: Cho một miếng bìa hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 6. Trên cạnh AB lấy điểm M, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $AM=CN=2$. Cuốn miếng bìa sao cho AD trùng BC để tạo thành một hình trụ. Tính thể tích tứ diện $ADMN$.

A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi^2}$. **B.** $\dfrac{81\sqrt{3}}{2\pi^2}$. **C.** $\dfrac{27\sqrt{3}}{2\pi^2}$. **D.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{2\pi^2}$.

Câu 14: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng 1. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đó.

A. $V=\dfrac{5\pi\sqrt{21}}{54}$. **B.** $V=\dfrac{5\pi\sqrt{15}}{18}$. **C.** $V=\dfrac{7\pi\sqrt{21}}{18}$. **D.** $V=\dfrac{7\pi\sqrt{21}}{54}$.

Câu 15: Một đội xây dựng cần hoàn thiện một hệ thống cột tròn của một cửa hàng kinh doanh gồm 15 chiếc. Trước khi hoàn thiện mỗi chiếc cột là mội khối bê tông cốt thép hình lăng trụ lục giác đều có cạnh 14 cm, sau khi hoàn thiện (bằng cách trát thêm vữa tổng hợp vào xung quanh) mỗi cột là một khối trụ có đường kính bằng 30cm. biết chiều cao của mỗi cột trước và sau khi hoàn thiện là 390 cm. Tính lượng vữa hỗn hợp cần dùng (đơn vị m^3, làm tròn đến một chữ thập phân sau dấu phảy).

A. $1{,}1$. **B.** $1{,}9$. **C.** $2{,}0$. **D.** $1{,}2$.

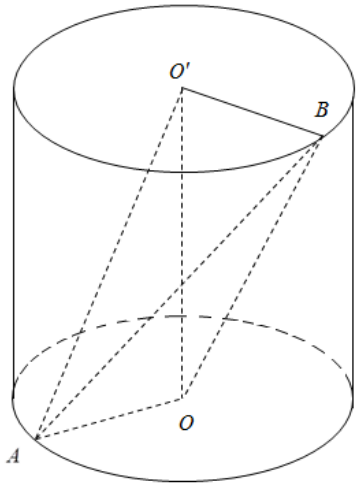
Câu 16: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy là $2a$, biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{4\pi a^2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $4\pi a^2\sqrt{3}$. **C.** $4\pi a^2\sqrt{2}$. **D.** $\frac{2\pi a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 17: Cho hình trụ (T) có AB, CD lần lượt là hai đường kính của hai đường tròn đáy của hình trụ và đồng thời vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng 10. Thể tích khối trụ (T) bằng

A. 60π. **B.** 15π. **C.** 15π. **D.** 30π.

Câu 18: Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy hai điểm A, D sao cho $AD = 2a\sqrt{3}$. Gọi C là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng chứa đường tròn (O'). Trên đường tròn tâm O' lấy điểm B (AB chéo với CD). Đặt α là góc giữa AB và đáy.



Tính $\tan\alpha$ khi thể tích tứ diện $CDAB$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\tan\alpha = \sqrt{3}$. **B.** $\tan\alpha = 1$. **C.** $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dạng 5: Cực trị khối nón, khối trụ

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho hình nón (N_1) có đỉnh S, chiều cao h. Một hình nón (N_2) có đỉnh là tâm của đáy (N_1) và có đáy là một thiết diện song song với đáy của (N_1) như hình vẽ. Khối nón (N_2) có thể tích lớn nhất khi chiều cao x bằng

A. $x=\frac{2h}{3}$. **B.** $x=\frac{h}{2}$. **C.** $x=\frac{h\sqrt{3}}{3}$. **D.** $x=\frac{h}{3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB=a; AD=a\sqrt{3}$, SA vuông góc với đáy. Gọi M, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD. Điểm E là giao điểm của SC và (AMK). Hình nón (N) có đường tròn đáy ngoại tiếp tam giác MKE và có đỉnh thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Khi hình nón (N) có thể tích lớn nhất thì SA bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** a. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $2a\sqrt{2}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho khối nón tròn xoay đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O, góc ở đỉnh bằng $120°$. Mặt phẳng (Q) thay đổi, đi qua S và cắt khối nón theo thiết diện là tam giác SAB. Biết rằng giá trị lớn nhất diện tích tam giác SAB là $2a^2$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (Q) trong trường hợp diện tích tam giác SAB đạt giá trị lớn nhất là

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 2: Cho hình nón có đỉnh S có bán kính đáy bằng a và góc ở đỉnh bằng $120°$. Thiết diện tạo bởi một mặt phẳng đi qua đỉnh S và hình nón là một tam giác có diện tích lớn nhất bằng:

A. $\frac{2}{3}a^2$ **B.** $\frac{1}{3}a^2$ **C.** $\frac{4}{3}a^2$ **D.** $\frac{2}{\sqrt{3}}a^2$

Câu 3: Để làm một hình trụ có nắp, bằng tôn và có thể tích $V=5\pi\ (m^3)$, cần ít nhất bao nhiêu mét vuông tôn?

A. $5\pi\ (m^2)$. **B.** $\pi\sqrt[3]{50}\ (m^2)$. **C.** $\pi\sqrt[3]{25}\ (m^2)$. **D.** $25\pi\ (m^2)$.

Câu 4: Cho hình nón đỉnh S, góc ở đỉnh bằng $120°$, bán kính đáy bằng $R=3a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S cắt nón theo thiết diện là 1 tam giác. Khi diện tích thiết diện lớn nhất $S_{\max}$, tính góc α giữa thiết diện và mặt đáy?

A. 30^o **B.** 45^o **C.** 60^o **D.** $\tan\alpha=2$

Câu 5: Một gia đình dự định làm bể lọc nước có dạng hình nón có bán kính đáy là r và đường sinh bằng $3\ m$. Phần lắp đậy của bể được làm bằng tôn với giá thành 0,5 triệu đồng $1\ m^2$ còn phần thành bể được làm bằng thép không rỉ với giá 2 triệu đồng $1\ m^2$. Để phù hợp với thiết kế nhà cần dung tích bể nước là lớn nhất, vậy chi phí để thi công bể là bao nhiêu triệu đồng?

A. $3\pi+3\pi\sqrt{6}$. **B.** $3\pi+\pi\sqrt{6}$. **C.** $\pi+3\pi\sqrt{6}$. **D.** $3\pi+6\pi\sqrt{6}$.

Câu 6: Một nhà sản xuất sữa bột dành cho trẻ em cần thiết kế hộp sữa có dạng một hình trụ có thể tích bằng $1\ \text{dm}^3$. Để diện tích toàn phần (nguyên liệu làm vỏ hộp) nhỏ nhất thì chiều cao của hộp sữa là bao nhiêu?

A. $h=\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}\ (\text{dm})$. **B.** $h=\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}\ (\text{dm})$. **C.** $h=\sqrt{\frac{4}{\pi}}\ (\text{dm})$. **D.** $h=\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}\ (\text{dm})$.

Câu 7: Cho hình trụ (T) có bán kính đáy $r=\sqrt{6}$ và chiều cao gấp đôi bán kính đáy. Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai đáy trụ. Trên đường tròn tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B sao cho thể tích của tứ diện $OO'AB$ lớn nhất. Tính AB?

A. $\sqrt{30}$. **B.** 6. **C.** 5. **D.** $4\sqrt{3}$.

Câu 8: Một hình trụ có độ dài đường cao bằng 4, các đường tròn đáy lần lượt là $(O;1)$ và $(O';1)$. Giả sử AB là một day cung cố định trên $(O;1)$ sao cho $AOB=120°$ và MN là đường kính thay đổi trên $(O';1)$. Giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ABMN$ là

A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Câu 9: Ông A cần làm một cái bồn chứa dạng hình trụ có nắp đậy có thể tích $300l$ bằng inox để chứa nước. Hỏi bán kính đáy của thùng gần bằng số nào nhất trong các số dưới đây để tiết kiệm vật liệu nhất?

A. $40,5\ cm$. **B.** $3,63\ cm$. **C.** $36,3\ cm$. **D.** $4,05\ cm$.

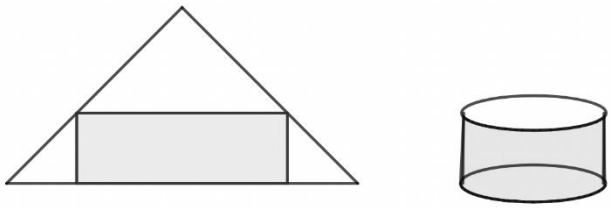
Câu 10: Cho khối trụ có thiết diện tạo bởi mặt phẳng đi qua trục và khối trụ là hình chữ nhật có chu vi là $12\,cm$. Thể tích lớn nhất của khối trụ đó là?

A. 3π. **B.** 2π. **C.** 8π. **D.** 4π.

Câu 11: Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 4\text{cm}$, điểm M di động trên nửa đường tròn đó. Gọi d là tiếp tuyến với nửa đường tròn tại M, d cắt các tiếp tuyến của nửa đường tròn tại A, B lần lượt tại D, C. Khi quay tứ giác $ABCD$ quanh trục AB ta được một vật thể tròn xoay có thể tích nhỏ nhất là

A. $16\pi\text{cm}^3$. **B.** $\frac{16\pi}{3}\text{cm}^3$. **C.** $32\pi\text{cm}^3$. **D.** $\frac{32\pi}{3}\text{cm}^3$.

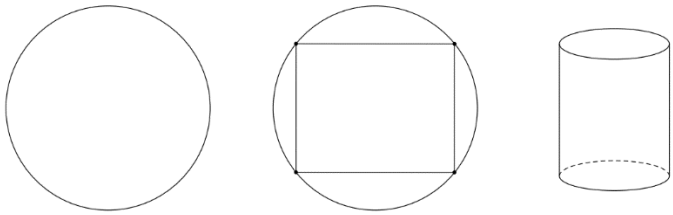
Câu 12: Từ một tấm tôn hình tam giác đều cạnh bằng 6m, ông A cắt thành một tấm tôn hình chữ nhật và cuộn lại được một cái thùng hình trụ(như hình vẽ).



Ông A làm được cái thùng có thể tích tối đa là V (Vật liệu làm nắp thùng coi như không liên quan). Giá trị của V thỏa mãn:

A. $V \le 1m^3$. **B.** $V > 3m^3$. **C.** $2m^3 < V \le 3m^3$. **D.** $1m^3 < V \le 2m^3$.

Câu 13: Từ một miếng tôn hình tròn bán kính $2\,m$, người ta cắt ra một hình chữ nhật rồi uốn thành mặt xung quanh của một chiếc thùng phi hình trụ như hình vẽ bên dưới.

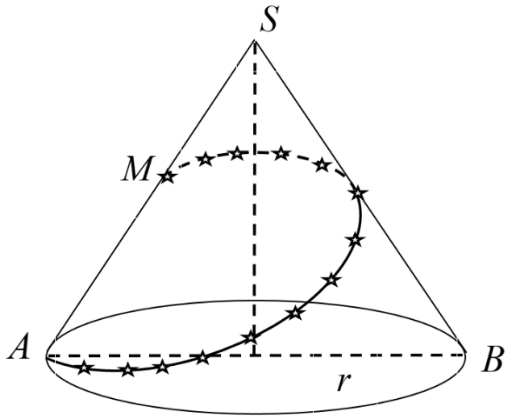


Để thể tích thùng lớn nhất thì diện tích phần tôn bị cắt bỏ gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. $5m^2$. **B.** $9m^2$. **C.** $8m^2$. **D.** $6m^2$.

Câu 14: Nhân dịp năm mới để trang trí một cây thông Noel, ở sân trung tâm có hình nón N như hình vẽ sau. Người ta cuộn quanh cây bằng một sợi dây đèn LED nhấp nháy, bóng đèn hình hoa tuyết từ điểm A đến điểm M sao cho sợi dây luôn tựa trên mặt nón. Biết rằng bán kính đáy hình nón bằng $8m$, độ dài đường sinh bằng $24m$ và M là điểm sao cho $2\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$. Hãy tính chiều dài nhỏ nhất của sợi dây đèn cần có.

A. $8\sqrt{19}\ m$. **B.** $8\sqrt{13}\ m$. **C.** $8\sqrt{7}\ m$. **D.** $9\sqrt{12}\ m$.



Câu 15: Một hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng $a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là 120^0. Thiết diện qua đỉnh của hình nón là một tam giác. Diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của thiết diện đó là bao nhiêu?

A. $S_{\max}=\dfrac{9a^2}{8}$. **B.** $S_{\max}=a^2\sqrt{2}$. **C.** $S_{\max}=4a^2$. **D.** $S_{\max}=2a^2$.

Câu 16: Người ta cần làm một vật dụng dạng hình nón. Diện tích toàn phần của hình nón bằng $1600\pi(cm^2)$. Khi thể tích khối nón lớn nhất, bán kính đáy của chiếc nón là

A. $20\sqrt{2}cm$**.** ***B.*** $20cm$**.** ***C.*** $40cm$**.** ***D.*** $40\sqrt{2}cm$**.**

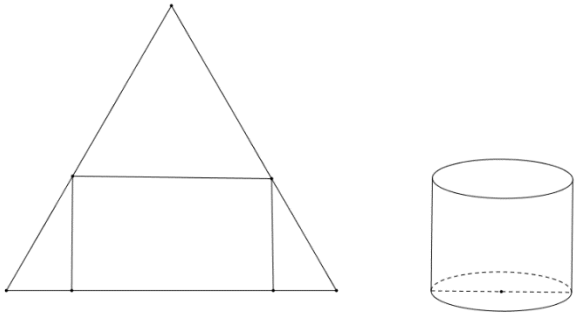
Câu 17: Cho tam giác đều OAB có cạnh bằng $a>0$. Trên đường thẳng d đi qua O và vuông góc với mặt phẳng (OAB) lấy điểm M sao cho $OM=x$.Gọi E,F lần lượt là các hình chiếu vuông góc của A lên MB,OB. Đường thẳng EF cắt đường thẳng d tại N. Quay miền tam giác OBM và OFN quanh d tạo thành hai khối nón tròn xoay. Xác định x để tổng thể tích hai khối nón tròn xoay nhỏ nhất.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Câu 18: Cho mặt cầu (S) bán kính R. Hình nón (N) thay đổi có đỉnh và đường tròn đáy thuộc mặt cầu (S). Thể tích lớn nhất của khối nón (N) là:

A. $\dfrac{32\pi R^3}{81}$. **B.** $\dfrac{32R^3}{81}$. **C.** $\dfrac{32\pi R^3}{27}$. **D.** $\dfrac{32R^3}{27}$.

Câu 19: Từ một tấm tôn hình tam giác đều cạnh bằng 6m, ông A cắt thành một tấm tôn hình chữ nhật và cuộn lại được một cái thùng hình trụ(như hình vẽ)



Ông A làm được cái thùng có thể tích tối đa là V (Vật liệu làm nắp thùng coi như không liên quan). Giá trị của V thỏa mãn

A. $V\le 1\text{m}^3$. **B.** $1\text{m}^3<V\le 2\text{m}^3$. **C.** $2\text{m}^3<V\le 3\text{m}^3$. **D.** $V>3\text{m}^3$.

Câu 20: Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Một mặt phẳng thay đổi, vuông góc với SO và cắt SO, SA, SB, SC, SD lần lượt tại I, M, N, P, Q. Một hình trụ có một đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MNPQ$ và một đáy nằm trên mặt phẳng $(ABCD)$. Thể tích khối trụ lớn nhất bằng

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{8}$ **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{27}$ **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{27}$

Dạng 6: Toán thức tế liên quan đến khối nón, khối trụ

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Một khúc gỗ hình trụ có bán kính R bị cắt bởi một mặt phẳng không song song với đáy ta được thiết diện là một hình elip. Khoảng cách từ điểm A đến mặt đáy là $12\ cm$ khoảng cách từ điểm B đến mặt đáy là $20\ cm$. Đặt khúc gỗ đó vào trong hình hộp chữ nhật có chiều cao bằng $20\ cm$ chứa đầy nước sao cho đường tròn đáy của khúc gỗ tiếp xúc với các cạnh đáy của hình hộp chữ nhật. Sau đó, người ta đo lượng nước còn lại trong hình hộp chữ nhật là 2 lít. Tính bán kính của khúc gỗ

A. R = 5,2 cm. **B.** R = 4,8 cm. **C.** R = 6,4 cm. **D.** R = 8,2 cm.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

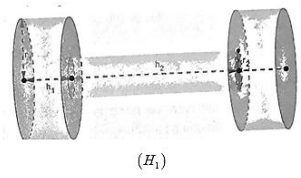
.....

.....

.....

.....

Câu 2: Một quả tạ tập tay gồm ba khối trụ (H_1), (H_2), (H_3) gắn liền nhau lần lượt có bán kính và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2, r_3, h_3 thỏa mãn $r_1 = r_3$, $h_1 = h_3$; $r_2 = \frac{1}{3}r_1$. Biết thể tích của toàn bộ quả tạ bằng 60π và chiều dài quả tạ bằng 9. Thể tích khối trụ (H_2) bằng?



(H_1)

A. $\pi\frac{16(9-2h_1)}{4h_1+9}$. **B.** $\pi\frac{36(9-2h_1)}{4h_1+9}$ **C.** $\pi\frac{60(9-2h_1)}{4h_1+9}$ **D.** $\pi\frac{46(9-2h_1)}{4h_1+9}$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Một bình đựng nước dạng hình nón đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $18\pi\ dm^3$.Biết khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa khối cầu chìm trong nước. Tính thể tích nước còn lại trong bình.

A. $27\pi\ dm^3$. **B.** $6\pi\ dm^3$. **C.** $9\pi\ dm^3$. **D.** $24\pi\ dm^3$.

✍ Lời giải

……

Câu 4: Một ly nước hình trụ có chiều cao $20\ cm$ và bán kính đáy bằng $4\ cm$. Bạn Nam đổ nước vào ly cho đến khi mực nước cách đáy ly $17\ cm$ thì dừng lại. Sau đó, Nam lấy các viên đá lạnh hình cầu có cùng bán kính $2\ cm$ thả vào ly nước. Bạn Nam cần dùng ít nhất bao nhiêu viên đá để nước trào ra khỏi ly?

A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

✍ Lời giải

……

Câu 5: Khi cắt hình nón có chiều cao $16\ cm$ và đường kính đáy $24\ cm$ bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện có diện tích lớn nhất gần với giá trị nào sau đây?

A. 170. **B.** 260. **C.** 294. **D.** 208.

✍ Lời giải

……

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

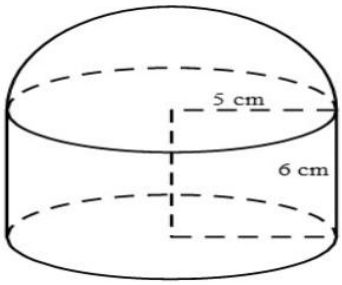
Câu 1: Một thùng hình trụ có bán kính đáy bằng $2(m)$, bên trong thùng có chứa một lượng nước. Biết rằng khi để thùng nằm ngang thì phần bề mặt nước là một hình vuông và mặt nước cách trục của hình trụ một khoảng bằng $\sqrt{3}(m)$. Nếu để thùng thẳng đứng thì chiều cao của nước trong thùng bằng:

A. $10,67$ (cm). **B.** $5,77$ (cm). **C.** $33,3$ (cm). **D.** $8,33$ (cm).

Câu 2: Một trang trại đang dùng hai bể nước hình trụ có cùng chiều cao; bán kính đáy lần lượt bằng $1,6(\mathrm{m})$ và $1,8(\mathrm{m})$. Trang trại làm một bể nước mới hình trụ, có cùng chiều cao và thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên; biết ba hình trụ trên là phần chứa nước của mỗi bể. Bán kính đáy của bể nước mới gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $2,4(\mathrm{m})$. **B.** $2,6(\mathrm{m})$. **C.** $2,5(\mathrm{m})$. **D.** $2,3(\mathrm{m})$.

Câu 3: Một hộp đựng mỹ phẩm được thiết kế (tham khảo hình vẽ) có thân hộp là hình trụ có bán kính hình tròn đáy $r=5cm$, chiều cao $h=6cm$ và nắp hộp là một nửa hình cầu. Người ta cần sơn mặt ngoài của cái hộp đó (không sơn đáy) thì diện tích S cần sơn là



A. $S=160\pi\ cm^2$. **B.** $S=130\pi\ cm^2$. **C.** $S=110\pi\ cm^2$. **D.** $S=80\pi\ cm^2$.

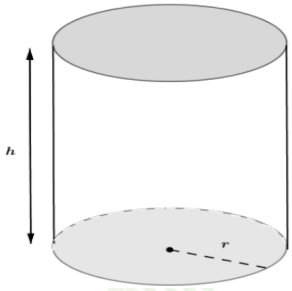
Câu 4: Một hộp sữa có dạng hình trụ và có thể tích bằng $2825\mathrm{cm}^3$. Biết chiều cao của hộp sữa bằng $25\mathrm{cm}$. Diện tích toàn phần của hộp sữa đó gần với số nào sau đây nhất?

A. $1168\mathrm{cm}^2$. **B.** $1172\mathrm{cm}^2$. **C.** $1164\mathrm{cm}^2$. **D.** $1182\mathrm{cm}^2$.

Câu 5: Ông A dự định làm một cái thùng phi hình trụ (không có nắp) với dung tích $5m^3$ bằng thép không gỉ để đựng nước. Chi phí trung bình cho $1m^2$ thép không gỉ là 500.000 đồng. Hỏi chi phí nguyên vật liệu làm cái thùng thấp nhất là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn) ?

A. 6424000 đồng. **B.** 5758000 đồng. **C.** 7790000 đồng. **D.** 6598000 đồng.

Câu 6: Người ta làm một chiếc thùng hình trụ có thể tích V nhất định. Biết rằng giá vật liệu để làm mặt đáy và nắp là như nhau và đắt gấp hai lần giá vật liệu để làm mặt xung quanh của thùng (chi phí cho mỗi đơn vị diện tích). Gọi h,r lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của thùng. Tính tỷ số $\frac{h}{r}$ sao cho chi phí sản xuất vật liệu là nhỏ nhất?

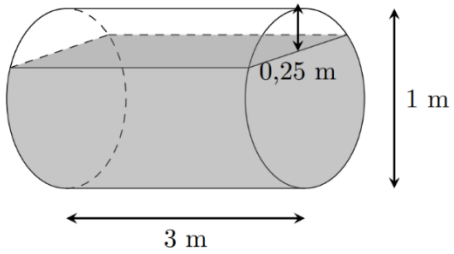


A. $\frac{h}{r}=4$. **B.** $\frac{h}{r}=3\sqrt{2}$. **C.** $\frac{h}{r}=4\sqrt{2}$. **D.** $\frac{h}{r}=2$.

Câu 7: Một chiếc cốc dạng hình trụ, chiều cao $16cm$, đường kính là $8cm$, bề dày của thành cốc và đáy cốc bằng $1cm$. Nếu đổ một lượng nước vào cốc cách miệng cốc $5cm$ thì ta được khối nước có thể tích V_1, nếu đổ đầy cốc ta được khối trụ (*tính cả thành cốc và đáy cốc*) có thể tích V_2. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

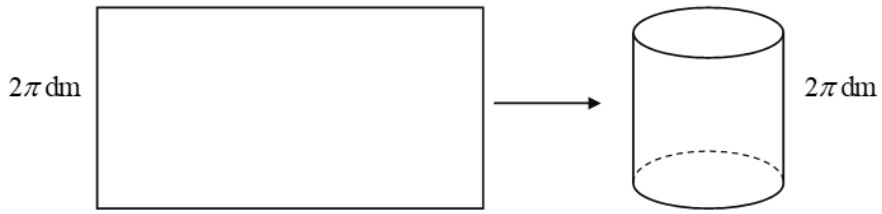
A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{245}{512}$. **C.** $\frac{45}{128}$. **D.** $\frac{11}{16}$.

Câu 8: Một téc nước hình trụ, đang chứa nước được đặt nằm ngang, có chiều dài 3 m và đường kính đáy 1 m. Hiện tại mặt nước trong téc cách phía trên đỉnh của téc $0,25$ m (xem hình vẽ). Tính thể tích của nước trong téc (kết quả làm tròn tới hàng phần nghìn).



A. $1,768m^3$. **B.** $1,167m^3$. **C.** $1,895m^3$. **D.** $1,896m^3$.

Câu 9: Một miếng tôn hình chữ nhật có chiều dài $10,2$ dm, chiều rộng 2π dm được uốn lại thành mặt xung quanh của một chiếc thùng đựng nước có chiều cao 2π dm (như hình vẽ). Biết rằng chỗ ghép mất 2 cm. Hỏi thùng đựng được bao nhiêu lít nước?



A. $20,4$ lít. **B.** $20,4$ lít. **C.** 50 lít. **D.** 100 lít.

Câu 10: Một công ty sản xuất hộp đựng sữa loại 900 gam dạng hình trụ có thể tích V không đổi. Giá thành của vật liệu làm đáy hộp và vỏ xung quanh của hộp là bằng nhau và bằng một nửa giá thành của vật liệu làm nắp hộp. Hỏi tỉ lệ chiều cao h và bán kính R của hộp đựng sữa bằng bao nhiêu để chi phí sản xuất là thấp nhất.

A. $\frac{h}{R}=2$. **B.** $\frac{h}{R}=\sqrt{2}$. **C.** $\frac{h}{R}=\sqrt{3}$. **D.** $\frac{h}{R}=3$.

Câu 11: Để làm một hình trụ có nắp, bằng tôn và có thể tích $V=5\pi$ (m^3), cần ít nhất bao nhiêu mét vuông tôn?

A. 5π $\left(m^2\right)$. **B.** $\pi\sqrt[3]{50}$ $\left(m^2\right)$. **C.** $\pi\sqrt[3]{25}$ $\left(m^2\right)$. **D.** 25π $\left(m^2\right)$.

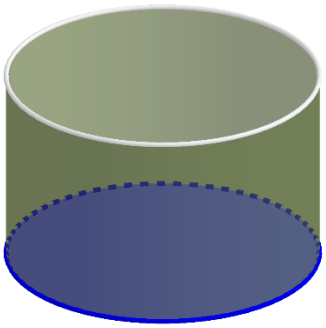
Câu 12: Cho hình nón đỉnh S, góc ở đỉnh bằng $120°$, bán kính đáy bằng $R=3a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S cắt nón theo thiết diện là 1 tam giác. Khi diện tích thiết diện lớn nhất $S_{\max}$, tính góc α giữa thiết diện và mặt đáy?

A. 30^o **B.** 45^o **C.** 60^o **D.** $\tan\alpha=2$

Câu 13: Một gia đình dự định làm bể lọc nước có dạng hình nón có bán kính đáy là r và đường sinh bằng $3\,m$. Phần lắp đậy của bể được làm bằng tôn với giá thành 0,5 triệu đồng $1\ m^2$ còn phần thành bể được làm bằng thép không rỉ với giá 2 triệu đồng $1\ m^2$. Để phù hợp với thiết kế nhà cần dung tích bể nước là lớn nhất, vậy chi phí để thi công bể là bao nhiêu triệu đồng?

A. $3\pi+3\pi\sqrt{6}$. **B.** $3\pi+\pi\sqrt{6}$. **C.** $\pi+3\pi\sqrt{6}$. **D.** $3\pi+6\pi\sqrt{6}$.

Câu 14: Người ta sản xuất thùng phuy sắt có hình dạng là một hình trụ (có nắp đậy kín) bằng cách cán và gò các tấm thép có độ dày $1mm$, biết chiều cao của thùng phuy là $876\,mm$, đường kính ngoài của thùng phuy là $580\,mm$ và khối lượng riêng của thép là $7850\,kg/m^3$. Hỏi thùng phuy nặng khoảng bao nhiêu kg (tính gần đúng sau hai dấu phẩy đến 2 chữ số thập phân)?



A. $15,57\,kg$. **B.** $18,23\,kg$. **C.** $16,63\,kg$. **D.** $17,21kg$

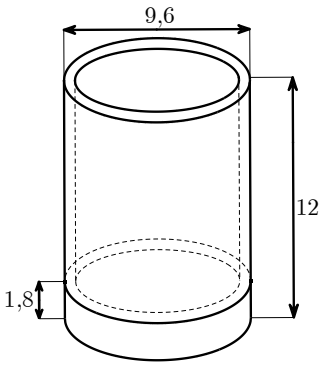
Câu 15: Người ta sử dụng một cuộn đề can hình trụ có đường kính $64,9\,\text{cm}$ để in các băng rôn, khẩu hiệu chuẩn bị cho lễ ra quân năm 2023, do đó đường kính cuộn đề can còn lại là $8,2\,\text{cm}$. Biết độ dày của tấm đề can là $0,04\,\text{cm}$, hãy tính chiều dài L của tấm đề can đã sử dụng? (làm tròn đến hàng đơn vị).

A. $L=325529\,\text{cm}$. **B.** $L=81382\,\text{cm}$. **C.** $L=7749\,\text{cm}$. **D.** $L=24344\,\text{cm}$.

Câu 16: Ông A dự định làm một cái thùng phi hình trụ (không có nắp) với dung tích $1m^3$ bằng thép không gỉ để đựng nước. Chi phí trung bình cho $1m^2$ thép không gỉ là 500.000 đồng. Hỏi chi phí nguyên vật liệu làm cái thùng thấp nhất bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 1.758.000 đồng **B.** 1.107.000 đồng **C.** 2.197.000 đồng **D.** 2.790.000 đồng

Câu 17: Cần bao nhiêu thuỷ tinh để làm một chiếc cốc hình trụ có chiều cao bằng 12 cm, đường kính đáy bằng $9,6\,\text{cm}$ (tính từ mép ngoài cốc), đáy cốc dày $1,8\,\text{cm}$, thành xung quanh cốc dày $0,24\,\text{cm}$ (tính gần đúng đến hai chữ số thập phân)?



A. $64,39\ \text{cm}^3$. **B.** $202,27\ \text{cm}^3$. **C.** $212,31\ \text{cm}^3$. **D.** $666,97\ \text{cm}^3$.

Câu 18: Ống thép mạ kẽm (độ dày của ống thép là hiệu số bán kính mặt ngoài và bán kính mặt trong của ống thép). Nhà máy quy định giá bán của mỗi loại ống thép dựa trên cân nặng của các ống thép đó. Biết rằng thép ống có giá là 24700 đồng/kg và khối lượng riêng của thép là $7850\ kg/m^3$. Một đại lý mua về 1000 ống thép loại có đường kính ngoài là $60\ mm$, độ dày là $3\ mm$, chiều dài là $6\ m$. Hãy tính số tiền mà đại lý bỏ ra để mua 1000 ống thép nói trên (làm tròn đến ngàn đồng).



A. 623789000 đồng. **B.** 624977000 đồng. **C.** 624980000 đồng. **D.** 623867000 đồng.

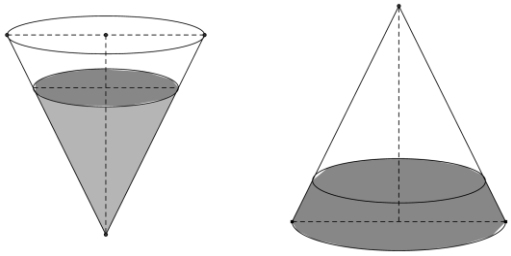
Câu 19: Cho một miếng tôn hình tròn tâm O, bán kính R. Cắt bỏ một phần miếng tôn theo một hình quạt OAB và gò phần còn lại thành một hình nón đỉnh O không có đáy (OA trùng với OB). Gọi S và S' là diện tích miếng tôn ban đầu và diện tích của miếng tôn còn lại. Tìm tỉ số $\dfrac{S'}{S}$ để thể tích của khối nón đạt giá trị lớn nhất.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Câu 20: Cho hình nón (N) có đường cao $SO=h$ và bán kính đáy bằng R, gọi M là điểm trên đoạn SO, đặt $OM=x\ (0<x<h)$. Gọi (C) là thiết diện của hình nón (N) cắt bởi mặt phẳng (P) vuông góc với trục SO tại M. Tìm x để thể tích khối nón đỉnh O đáy là (C) lớn nhất.

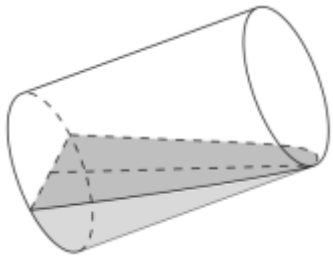
A. $\dfrac{h\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{h}{2}$. **C.** $\dfrac{h}{3}$. **D.** $\dfrac{h\sqrt{2}}{2}$.

Câu 21: Một cốc thủy tinh hình nón có chiều cao $20cm$. Người ta đổ vào cốc thủy tinh một lượng nước, sao cho chiều cao của lượng nước trong cốc bằng $\dfrac{3}{4}$ chiều cao cốc thủy tinh, sau đó người ta bịt kín miệng cốc, rồi lật úp cốc xuống như hình vẽ thì chiều cao của nước lúc này là bao nhiêu (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2)?



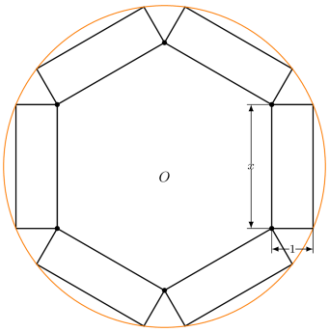
A. $3,34\,cm$ **B.** $2,21cm$ **C.** $5,09\,cm$ **D.** $4,27\,cm$

Câu 22: Một chiếc cốc hình trụ có đường kính đáy $6cm$,chiều cao $15cm$ chứa đầy nước. Nghiêng cốc nước cho nước chảy từ từ ra ngoài cho đến khi mép nước ngang với đường kính của đáy (tham khảo hình vẽ bên). Khi đó thể tích của nước còn lại trong cốc bằng



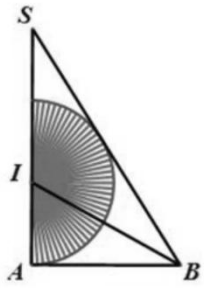
A. $90cm^3$. **B.** $70cm^3$. **C.** $80cm^3$. **D.** $100cm^3$.

Câu 23: Bạn A định làm một cái hộp quà lưu niệm (không nắp) bằng cách cắt từ một tấm bìa hình tròn bán kính $4cm$ để tạo thành một khối lăng trụ lục giác đều, biết 6 hình chữ nhật có các kích thước là $1cm$ và $x\,cm$ (tham khảo hình vẽ). Thể tích của hộp quà gần nhất với giá trị nào sau đây?



A. $24,5cm^3$. **B.** $25cm^3$. **C.** $25,5cm^3$. **D.** $24cm^3$.

Câu 24: Cho tam giác SAB vuông tại A, $ABS = 60°$. Phân giác của góc ABS cắt SA tại I. Vẽ nửa đường tròn tâm I, bán kính IA. Cho miền tam giác SAB và nửa hình tròn quay xung quanh trục SA tạo nên các khối tròn xoay thể tích tương ứng là $V_1;V_2$. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $V_1 = \frac{4}{9}V_2$. **B.** $V_1 = \frac{3}{2}V_2$. **C.** $V_1 = 3V_2$. **D.** $V_1 = \frac{9}{4}V_2$.

Câu 25: Một cái trục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là 5cm, chiều dài lăn là 23cm. Sau khi lăn trọn 10 vòng thì trục lăn tạo nên tường phẳng lớp sơn có diện tích là

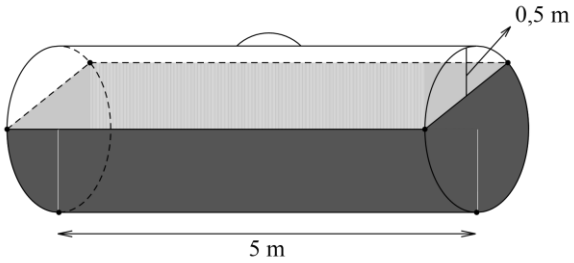


A. $2300\pi\,\text{cm}^2$. **B.** $1150\pi\,\text{cm}^2$. **C.** $862,5\pi\,\text{cm}^2$. **D.** $5230\pi\,\text{cm}^2$.

Câu 26: Người ta thiết kế một thùng chứa hình trụ có thể tích V nhất định. Biết rằng giá của vật liệu làm mặt đáy và nắp của thùng bằng nhau và gấp $1,5$ lần so với giá vật liệu để làm mặt xung quanh của thùng. Gọi chiều cao của thùng là h và bán kính đáy là r. Tính tỉ số $\dfrac{h}{r}$ sao cho chi phí vật liệu sản xuất thùng là nhỏ nhất?

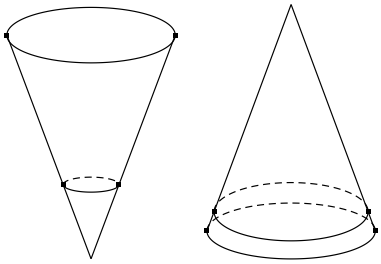
A. $\dfrac{h}{r}=2.$ **B.** $\dfrac{h}{r}=\sqrt{3}.$ **C.** $\dfrac{h}{r}=3.$ **D.** $\dfrac{h}{r}=2\sqrt{3}.$

Câu 27: Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5m, có bán kính đáy 1m, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với $0,5\text{m}$ của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn.



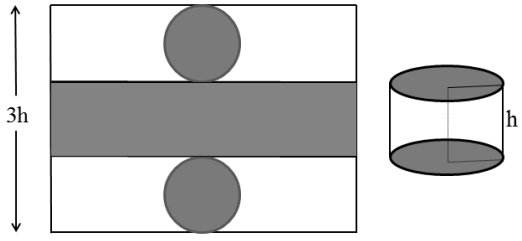
A. $23,562\ \text{m}^3$. **B.** $12,637\ \text{m}^3$. **C.** $6,319\ \text{m}^3$. **D.** $11,781\ \text{m}^3$.

Câu 28: Một cái phễu có dạng hình nón. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của lượng nước trong phễu bằng một phần ba chiều cao của phễu. Hỏi nếu bịt miệng phễu rồi lộn ngược phễu lên thì chiều cao của nước bằng bao nhiêu? Biết chiều cao của phễu là $15\,\text{cm}$.



A. $0,5\,\text{cm}$. **B.** $0,216\,\text{cm}$. **C.** $0,3\,\text{cm}$. **D.** $0,188\,\text{cm}$.

Câu 29: Từ một tấm thép phẳng hình chữ nhật, người ta muốn làm một chiếc thùng đựng dầu hình trụ bằng cách cắt ra hai hình tròn bằng nhau và một hình chữ nhật sau đó hàn kín lại, như hình vẽ dưới đây.



Hai hình tròn làm hai mặt đáy, hình chữ nhật làm thành mặt xung quanh của thùng đựng dầu. Biết thùng đựng dầu có thể tích bằng $50,24$ lít. Tính diện tích của tấm thép hình chữ nhật ban đầu?

A. $1,8062\,\text{m}^2$. **B.** $2,2012\,\text{m}^2$. **C.** $1,5072\,\text{m}^2$. **D.** $1,2064\,\text{m}^2$.

Câu 30: Người ta xếp ba viên bi có bán kính bằng nhau và bằng $\sqrt{3}$ vào một cái lọ hình trụ sao cho các viên bi đều tiếp xúc với hai đáy của lọ hình trụ và các viên bi này đôi một tiếp xúc nhau và cùng tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ. Tính bán kính đáy của lọ hình trụ.

A. $1+2\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2}$. **D.** $2+\sqrt{3}$.

Câu 31: Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ có thể tích là V, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon sữa bò là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ bằng V và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy bằng bao nhiêu?

A. $r=\sqrt[3]{\dfrac{V\pi}{2}}$. **B.** $r=\sqrt[3]{V}$. **C.** $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. **D.** $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2}}$.

Câu 32: Nam muốn xây một bình chứa hình trụ có thể tích 72m^3. Đáy làm bằng bêtông giá 100 nghìn đồng/m^2, thành làm bằng tôn giá 90 nghìn đồng/m^2, nắp bằng nhôm giá 140 nghìn đồng/m^2. Vậy đáy của hình trụ có bán kính bằng bao nhiêu để chi phí xây dựng là thấp nhất?

A. $\dfrac{3}{2\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$. **B.** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$.

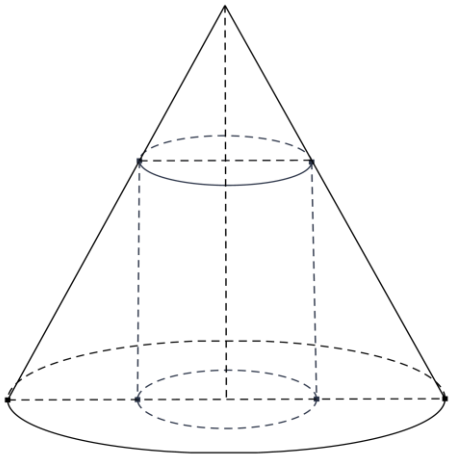
Câu 33: Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón không nắp có thể tích 27cm^3. Với chiều cao h và bán kính đáy là r. Tìm r để lượng giấy tiêu thụ ít nhất

A. $r=\sqrt[6]{\dfrac{3^6}{2\pi^2}}(cm)$. **B.** $r=\sqrt[4]{\dfrac{3^6}{2\pi^2}}(cm)$. **C.** $r=\sqrt[6]{\dfrac{3^8}{2\pi^2}}(cm)$. **D.** $r=\sqrt[4]{\dfrac{3^8}{2\pi^2}}(cm)$.

Câu 34: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau cắt khối cầu tâm O bán kính R tạo thành hai hình tròn (C_1) và (C_2) cùng bán kính. Xét hình nón có đỉnh trùng với tâm của một trong hai hình tròn, đáy trùng với hình tròn còn lại. Biết diện tích xung quanh của hình nón là lớn nhất, khi đó thể tích khối trụ có hai đáy là hai hình tròn (C_1) và (C_2) bằng

A. $\dfrac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\dfrac{2\pi R^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\dfrac{\pi R^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\dfrac{4\pi R^3\sqrt{3}}{3}$.

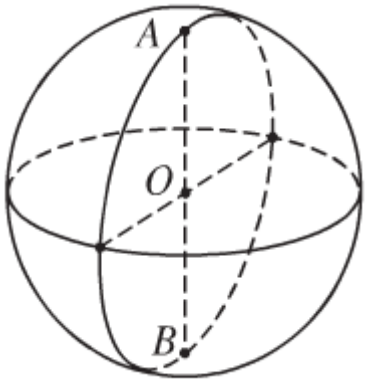
Câu 35: Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3 chiều cao bằng 6, một khối trụ có bán kính đáy thay đổi nội tiếp khối nón đã cho. Thể tích lớn nhất của khối trụ bằng



A. 6π. **B.** 10π. **C.** 4π. **D.** 8π.

Dạng 7: Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

Cho mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R



- Diện tích mặt cầu được tính bằng công thức: $S_{mat\ cau} = 4\pi R^2$
- Thể tích khối cầu được tính bằng công thức: $V_{khoi\ cau} = \frac{4}{3}\pi R^3$

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tính thể tích V của khối cầu có bán kính $R = 2b$?

A. $V = \frac{16}{3}\pi b^3$. **B.** $V = \frac{8}{3}\pi b^3$. **C.** $V = \frac{32}{3}\pi b^3$. **D.** $S_{tp} = 16\pi b^3$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 2: Thể tích của khối cầu có bán kình bằng $2cm$ là

A. $8\pi^3\left(cm^3\right)$. **B.** $8\pi\left(cm^3\right)$. **C.** $\frac{32}{3}\left(cm^3\right)$. **D.** $\frac{32\pi}{3}\left(cm^3\right)$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Cho mặt cầu có bán kính $R = 2$. Diện tích mặt cầu đã cho bằng:

A. $\frac{16}{3}\pi$. **B.** 8π. **C.** 16π. **D.** $\frac{32}{3}\pi$.

Lời giải

.....

.....

…… ……

…… ……

Câu 4: Gọi V_1 là thể tích khối cầu có bán kính R_1, Gọi V_2 là thể tích khối cầu có bán kính $R_2 = 2R_1$. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$

A. $\dfrac{1}{8}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** 4. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

✍ Lời giải

…… ……

…… ……

…… ……

…… ……

Câu 5: Nếu tăng bán kính của một khối cầu gấp 3 lần thì thể tích thay đổi như thế nào?

A. Thể tích tăng gấp 6 lần. **B.** Thể tích tăng gấp 9 lần.

C. Thể tích tăng gấp 3 lần. **D.** Thể tích tăng gấp 27 lần.

✍ Lời giải

…… ……

…… ……

…… ……

…… ……

…… ……

…… ……

…… ……

…… ……

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Diện tích của mặt cầu có bán kính $R=2$ bằng

A. 8π. **B.** 16π. **C.** 4π. **D.** 10π.

Câu 2: Tính thể tích V của khối cầu có đường kính bằng 3cm.

A. $V=36\pi\,\text{cm}^3$. **B.** $V=\dfrac{9\pi}{2}\text{cm}^3$. **C.** $V=9\pi\,\text{cm}^3$. **D.** $V=\dfrac{9\pi}{8}\text{cm}^3$.

Câu 3: Diện tích S của mặt cầu bán kính R được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $\dfrac{3}{4}\pi R^2$. **B.** πR^2. **C.** $4\pi R^2$. **D.** $\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Câu 4: Cho mặt cầu có diện tích bằng $72\pi\left(\text{cm}^2\right)$. Bán kính R của khối cầu bằng

A. $R=3\sqrt{2}\left(\text{cm}\right)$. **B.** $R=\sqrt{6}\left(\text{cm}\right)$. **C.** $R=3\left(\text{cm}\right)$. **D.** $R=6\left(\text{cm}\right)$.

Câu 5: Diện tích mặt cầu có bán kính bằng 2 là

A. 16π. **B.** 64π. **C.** $\dfrac{32\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{256\pi}{3}$.

Câu 6: Cho mặt cầu có bán kính $R=2$. Diện tích mặt cầu đã cho bằng

A. 4π. **B.** 8π. **C.** $\dfrac{32}{3}\pi$. **D.** 16π.

Câu 7: Cho khối cầu bán kính $2R$. Thể tích khối cầu đó bằng

A. $\dfrac{32}{3}\pi R^3$. **B.** $\dfrac{16}{3}\pi R^3$. **C.** $\dfrac{64}{3}\pi R^3$. **D.** $\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Câu 8: Bán kính R của khối cầu có thể tích $V=\dfrac{256\pi}{3}$ là

A. $R=\dfrac{1}{3}$. **B.** $R=3$. **C.** $R=2$. **D.** $R=4$.

Câu 9: Cho khối cầu có đường kính bằng 2. Thể tích khối cầu đã cho bằng

A. $\dfrac{32\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{32}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{4\pi}{3}$.

Câu 10: Một khối cầu có đường kính bằng 4 thì diện tích bề mặt khối cầu đó bằng

A. $\dfrac{32\pi}{3}$. **B.** 16π. **C.** 64π. **D.** $\dfrac{256\pi}{3}$.

Câu 11: Thể tích V của khối cầu có bán kính $R=2\left(\text{m}\right)$ là

A. $V=\dfrac{16\pi}{3}\left(m^3\right)$. **B.** $V=32\pi\left(m^3\right)$. **C.** $V=\dfrac{32\pi}{3}\left(m^3\right)$. **D.** $V=16\pi\left(m^3\right)$.

Câu 12: Thể tích khối cầu có đường kính bằng $2a$ là

A. $2\pi a^3$. **B.** $\dfrac{8}{3}\pi a^3$. **C.** $\dfrac{4}{3}\pi a^3$. **D.** $4\pi a^3$.

Câu 13: Cho mặt cầu có bán kính $r=2$. Diện tích của mặt cầu đã cho là

A. $\frac{16\pi}{3}$. **B.** 16π. **C.** $\frac{32\pi}{3}$. **D.** 4π.

Câu 14: Thể tích khối cầu bán kính $R=3a$ là

A. $V=36\pi a^3$. **B.** $V=18\pi a^3$. **C.** $V=12\pi a^3$. **D.** $V=12\pi a^2$.

Câu 15: Cho khối cầu có bán kính $r=2$. Thể tích của khối cầu đã cho bằng

A. $\frac{32\pi}{3}$. **B.** $\frac{256\pi}{3}$. **C.** 256π **D.** 64π.

Câu 16: Cho mặt cầu (S) có diện tích 4π. Thể tích khối cầu (S) bằng

A. $\frac{4\pi}{3}$. **B.** $\frac{16\pi}{3}$. **C.** 16π. **D.** 32π.

Câu 17: Cho khối cầu có đường kính bằng 4. Thể tích của khối cầu đã cho bằng

A. 16π. **B.** $\frac{32\pi}{3}$. **C.** 32π. **D.** $\frac{8\pi}{3}$.

Câu 18: Một mặt cầu có diện tích là 64π thì thể tích của khối cầu đó bằng

A. $\frac{32\pi}{3}$. **B.** $\frac{256\pi}{3}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** $\frac{2048\pi}{3}$.

Câu 19: Cắt khối cầu tâm I bởi mặt phẳng qua I, thiết diện thu được là hình tròn có diện tích bằng 9π. Thể tích khối cầu đã cho bằng

A. 12π. **B.** 36π. **C.** 18π. **D.** 27π.

Câu 20: Một khối cầu có thể tích bằng $\frac{32\pi}{3}$. Bán kính của khối cầu bằng

A. $R=32$ **B.** $R=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **C.** $R=4$ **D.** $R=2$

Câu 21: Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật có ba kích thước 1, 2, 3 là

A. $\frac{7\pi\sqrt{14}}{3}$. **B.** $\frac{9\pi}{2}$. **C.** 36π. **D.** $\frac{9\pi}{8}$.

Câu 22: Cho mặt cầu có chu vi đường tròn lớn là 3π. Thể tích khối cầu đã cho bằng

A. $\frac{9\pi}{2}$. **B.** 8π. **C.** $3,6\pi$. **D.** 4π.

Câu 23: Cho mặt cầu có diện tích bằng 20π. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** 5. **D.** $\sqrt{10}$

Câu 24: Cho khối cầu có đường kính bằng 1. Thể tích của khối cầu đã cho bằng

A. 4π. **B.** $\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** $\frac{\pi}{12}$.

Câu 25: Cho mặt cầu có thể tích bằng $32\sqrt{3}\pi a^3$. Tính diện tích S của mặt cầu đã cho.

A. $S=12\pi a^2$. **B.** $S=48\pi a^2$. **C.** $S=16\pi a^2$. **D.** $S=24\pi a^2$.

Câu 26: Cho mặt cầu (S) có diện tích $4\pi a^2\,(cm^2)$. Khi đó, thể tích khối cầu (S) là

A. $\frac{64\pi a^3}{3}\,(cm^3)$. **B.** $\frac{16\pi a^3}{3}\,(cm^3)$. **C.** $\frac{\pi a^3}{3}\,(cm^3)$. **D.** $\frac{4\pi a^3}{3}\,(cm^3)$.

Câu 27: Mặt cầu (S) có diện tích bằng $36\pi a^2$, khối cầu (S) này có thể tích bằng

A. $36\pi a^3$. **B.** $288\pi a^3$. **C.** $9\pi a^3$. **D.** $108\pi a^3$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy, ΔABC vuông cân tại C, $AC = 2\sqrt{2}$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $60°$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\frac{112\pi}{3}$. **B.** $\frac{224\pi}{3}$. **C.** 160π. **D.** 40π.

Câu 29: Cho hai đường tròn (C_1) tâm O_1, bán kính bằng 1, (C_2) tâm O_2, bán kính bằng 2 lần lượt nằm trên hai mặt phẳng (P_1), (P_2) sao cho $(P_1)//(P_2)$ và $O_1O_2 \perp (P_1); O_1O_2 = 3$. Tính diện tích mặt cầu qua hai đường tròn đó.

A. 24π. **B.** 20π. **C.** 16π. **D.** 12π.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{18}$. **B.** $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$. **C.** $V = \frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$. **D.** $V = \frac{5\pi}{3}$.

Câu 31: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ΔABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = 1$, góc giữa $A'C$ và (ABC) bằng $60°$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $C'.ABB'A'$.

A. $\frac{5\pi}{2}$. **B.** 5π. **C.** $\frac{5\pi}{4}$. **D.** $\frac{5\pi}{6}$.

Câu 32: Cho hai khối cầu có tổng diện tích bằng 80π tiếp xúc ngoài nhau và cùng tiếp xúc với mặt phẳng (P) lần lượt tại hai điểm A, B. Tính tổng thể tích của hai khối cầu đó biết $AB = 4\sqrt{2}$.

A. $24\sqrt{2}\pi$. **B.** $96\sqrt{2}\pi$. **C.** 96π. **D.** 192π.

Dạng 8: Khối cầu ngoại tiếp khối đa diện

Định nghĩa: Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện là mặt cầu đi qua tất cả các đỉnh của khối đa diện đó.

Điều kiện **cần** và **đủ** để khối chóp có mặt cầu ngoại tiếp: có đáy là một đa giác nội tiếp.

Cách xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện:

- **Bước 1:** Xác định trục của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Gọi tắt là **trục của đáy** (là đường thẳng vuông góc với đáy tại tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy).
- **Bước 2:** Xác định măt phẳng trung trực của một cạnh bên hoặc trục của đường tròn ngoại tiếp một đa giác của mặt bên.
- **Bước 3:** Giao điểm của trục của đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên (hoặc trục của đáy và trục của đường tròn ngoại tiếp một đa giác của mặt bên) là **tâm mặt cầu ngoại tiếp** khối đa diện đó.

Một số công thức tính nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp

Công thức 1: Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy:

$$R = \sqrt{R_d^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}$$

Trong đó R_d là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy, h là độ dài cạnh bên vuông góc với đáy.

Công thức 2: Khối tứ diện vuông (có các cạnh đôi một vuông góc):

$$R = \frac{\sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2}}{2}$$

Công thức 3: Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy:

$$R = \sqrt{R_d^2 + R_b^2 - \frac{a^2}{4}},$$

Trong đó R_d là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy; R_b là bán kính đường tròn ngoại tiếp của mặt bên và a tương ứng là độ dài đoạn giao tuyến của mặt bên và đáy.

Công thức 4: Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau: $R = \frac{a^2}{2h}$

Trong đó a là độ dài cạnh bên và h là chiều cao khối chóp và h được tính bằng công thức $h = \sqrt{a^2 - R_d^2}$.

Công thức 5: Khối tứ diện gần đều $ABCD$ có $AB = CD = a;\ AC = BD = b;\ AD = BC = c$

$$R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}}$$

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Hình chóp có đáy là hình thoi có mặt cầu ngoại tiếp.

B. Hình chóp tứ giác đều có mặt cầu ngoại tiếp.

C. Hình chóp có đáy là tam giác có mặt cầu ngoại tiếp.

D. Hình chóp có đáy là hình chữ nhật có mặt cầu ngoại tiếp.

Lời giải

.....

.....

.....

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có các mặt bên ABC và BCD là các tam giác đều cạnh bằng 2, hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) vuông góc với nhau. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 3: Tìm bán kính $\mathbb{R}$ của mặt cầu ngoại tiếp một hình lập phương có cạnh bằng $\sqrt{3}a$

A. $R=\frac{3a}{2}$. **B.** $R=\sqrt{6}a$. **C.** $R=\frac{a}{2}$. **D.** $R=3a$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=3, AD=4$ và các cạnh bên của hình chóp tạo với mặt đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V=\frac{250\sqrt{3}}{3}\pi$. **B.** $V=\frac{125\sqrt{3}}{6}\pi$. **C.** $V=\frac{500\sqrt{3}}{27}\pi$. **D.** $V=\frac{50\sqrt{3}}{27}\pi$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Tam giác SAB là tam giác vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. điểm O. **B.** trung điểm của SC.

C. trung điểm của AB. **D.** trung điểm của SD.

Lời giải

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?
A. Hình chóp có đáy là hình thoi luôn có mặt cầu ngoại tiếp.
B. Hình lăng trụ đứng luôn có mặt cầu ngoại tiếp.
C. Hình chóp có đáy là hình thang cân luôn có mặt cầu ngoại tiếp.
D. Hình lăng trụ có đáy là hình chữ nhật luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA=a$, $SA\perp(ABCD)$. Thể tích khối cầu đi qua các đỉnh của hình chóp $S.ABCD$ bằng
A. $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{2}$. **B.** $\frac{3\pi\sqrt{3}a^3}{8}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{4}$. **D.** $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{12}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA=a$, $SA\perp(ABCD)$. Thể tích khối cầu đi qua các đỉnh của hình chóp $S.ABCD$ bằng
A. $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{2}$. **B.** $\frac{3\pi\sqrt{3}a^3}{8}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{4}$. **D.** $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{12}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA=a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng
A. $\pi a^2\sqrt{2}$. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $8\pi a^2$. **D.** $4\pi a^2$.

Câu 5: Tính thể tích khối lập phương nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 3
A. $18\sqrt{3}$. **B.** $12\sqrt{2}$. **C.** $24\sqrt{3}$. **D.** $54\sqrt{2}$.

Câu 6: Một khối cầu ngoại tiếp khối lập phương. Tỉ số thể tích giữa khối cầu và khối lập phương là
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 7: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=1, AD=2\sqrt{2}, AA'=\sqrt{3}$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình hộp đã cho bằng
A. $\frac{9}{4}\pi$. **B.** 3π. **C.** 19π. **D.** 12π.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA=2a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng
A. $16\pi a^2$. **B.** $V=\frac{8\pi a^2}{3}$. **C.** $8\pi a^2$. **D.** $V=\frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 9: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là $\triangle ABC$ vuông tại C, $AC=a; BC=a\sqrt{2}$, biết $CC'=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.
A. $R=\frac{a\sqrt{30}}{6}$. **B.** $R=\frac{2a\sqrt{5}}{3}$. **C.** $R=\frac{a\sqrt{30}}{3}$. **D.** $R=\frac{a\sqrt{5}}{6}$.

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$ có các mặt ABC và BCD là các tam giác đều cạnh bằng 2; hai mặt phẳng

(ABD) và (ACD) vuông góc với nhau. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 11: Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình lập phương. Biết khối lập phương có thể tích bằng $36cm^3$. Thể tích của khối cầu (S) bằng

A. $9\pi cm^3$ **B.** $12\pi cm^3$. **C.** $4\pi cm^3$. **D.** $6\pi cm^3$.

Câu 12: Cho hình lập phương có cạnh bằng 1. Thể tích khối cầu đi qua các đỉnh của hình lập phương là

A. $\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$. **B.** $\frac{2\pi}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$. **D.** $\frac{3\pi}{2}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABC), SA = a, AB = a, BCA = 30°$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\sqrt{\frac{5}{2}}a$. **C.** $\frac{5a}{2}$. **D.** a.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. 4. **B.** $\frac{7}{3}a$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Câu 15: Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối hộp chữ nhật có kích thước a, $2a$, $2a$ là

A. $9a^2$. **B.** $\frac{9}{3}\pi a^3$. **C.** $9\pi a^2$. **D.** $3\pi a^2$.

Câu 16: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tam giác SAC đều cạnh a. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = a$. **B.** $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 2a$, ΔABC cân tại A, $BAC = 120°$, $AB = AC = a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $R = a\sqrt{5}$. **B.** $R = a\sqrt{2}$. **C.** $R = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $R = 2a$.

Câu 18: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc, $OA = OB = OC = 1$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC có $AB = 2; AC = 2$ và $\angle BAC = 120^o$. Biết góc giữa (SBC) và (ABC) bằng α với $\tan\alpha = 2$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\sqrt{5}$. **B.** 2. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 20: Cho hình lập phương cạnh a gọi R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lập

phương, bán kính mặt cầu nội tiếp hình lập phương và bán kính mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của hình lập phương. Khẳng định đúng là

A. $R_2^2 = R_1.R_3$. **B.** $R_2^2 = R_1^2 + R_3^2$. **C.** $R_1^2 = R_2^2 + R_3^2$. **D.** $R_3^2 = R_1.R_2$.

Câu 21: Cho hình chóp từ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 1 chiều cao $h = 2$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{9}{8}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 22: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABC$D có cạnh đáy bằng 1, chiều cao $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABC$D .

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 23: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) vuông góc với nhau. Biết tam giác ABC đều cạnh bằng a, tam giác BCD vuông cân tại D. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $SA \perp (ABC)$,Biết $AB = a, AC = a\sqrt{3}, SA = 2a$ .Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 25: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 26: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) vuông góc với nhau. Biết tam giác ABC đều cạnh a, tam giác BCD vuông cân tại D. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 27: Cho tứ diện $ABCD$ có các mặt ABC và BCD là các tam giác đều cạnh bằng 2 ; hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) vuông góc với nhau. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 6 . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy $ABCD$ là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HB = 2HA$. Cạnh SA hợp với mặt phẳng đáy góc $60°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. 84π. **B.** $\frac{220}{3}\pi$. **C.** $\frac{1900}{3}\pi$. **D.** 88π.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a; AD = DC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Tính chu vi giao tuyến của mặt phẳng (SAB) và mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ACD$:

A. πa. **B.** $\sqrt{2}\pi a$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi a$. **D.** $\frac{\pi a}{2}$.

Câu 30: Cho Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{\pi a^3}{6}$. **D.** $\frac{11\sqrt{11}\pi a^3}{162}$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt phẳng (ABC) đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng (SAC) và (SBC), $AC = 2\sqrt{3}a$, $ABC = 60°$, đường thẳng SA tạo với (ABC) một góc $30°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng

A. $32\pi a^2$. **B.** $5\pi a^2$. **C.** $\frac{5}{3}\pi a^2$. **D.** $20\pi a^2$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy biết $SA = a, ASB = 120^0$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $2a$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a}{4}$. **D.** a.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a, ABC = 120^\circ, \Delta SAB$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{41}}{6}$. **B.** $\frac{a\sqrt{39}}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{37}}{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{35}}{6}$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

A. 4. **B.** $\frac{7a}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $45°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{25\pi a^2}{12}$. **B.** $\frac{25\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{25\pi a^2}{9}$. **D.** $\frac{25\pi a^2}{6}$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB = 3, AD = 2$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp khối chóp đã cho bằng:

A. $V = \frac{10\pi}{3}$. **B.** $V = \frac{32\pi}{3}$. **C.** $V = \frac{16\pi}{3}$. **D.** $V = \frac{20\pi}{3}$.

Câu 37: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = a$, $OB = 2a$, $OC = 3a$

. Diện tích mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $OABC$ bằng

A. $S=10\pi a^2$. **B.** $S=12\pi a^2$. **C.** $S=8\pi a^2$. **D.** $S=14\pi a^2$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A. Mặt bên $(SAB)\perp(ABC)$ và tam giác ΔSAB đều cạnh bằng 1. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{15}}{6}$. **D.** $\frac{3\sqrt{21}}{2}$.

Câu 39: Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a.

A. $\frac{7\pi a^2}{5}$. **B.** $\frac{3\pi a^2}{7}$. **C.** $\frac{7\pi a^2}{3}$. **D.** $\frac{7\pi a^2}{6}$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với đáy, ABC là tam giác vuông tại A, biết $AB=3a,\ AC=4a,\ SA=10a$. Tìm bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\frac{5\sqrt{17}}{2}a$. **B.** $5a\sqrt{5}$. **C.** $2a\sqrt{5}$. **D.** $\frac{5\sqrt{5}}{2}a$.

Câu 41: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân, $AB=AC=a$. Góc giữa $A'B$ và mặt đáy (ABC) bằng $45°$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $BCC'A'$ là

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$, $SA\perp(ABCD)$. Cạnh SC tạo với đáy một góc $45°$. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $2a$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $a\sqrt{6}$.

Câu 43: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, $AC=a$, $BC=a\sqrt{2}$, biết $CC'=\frac{\sqrt{3}}{3}a$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.

A. $\frac{10\pi a^2}{7}$. **B.** $\frac{10\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{8\pi a^2}{9}$. **D.** $\frac{10\pi a^2}{9}$.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều. Cho SA vuông góc với mặt đáy và $SA=3a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $60°$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{43\sqrt{129}\pi a^3}{18}$. **B.** $\frac{31\sqrt{93}\pi a^3}{54}$. **C.** $\frac{31\sqrt{93}\pi a^3}{18}$. **D.** $\frac{43\sqrt{129}\pi a^3}{54}$.

Câu 45: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=3$, $BC=5$, hình chiếu vuông góc của B' trên mặt phẳng (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(ABB'A')$ bằng $60°$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $B'.ABC$.

A. $\frac{73\sqrt{3}}{48}$. **B.** $\frac{73\sqrt{3}}{24}$. **C.** $\frac{73\sqrt{6}}{48}$. **D.** $\frac{73\sqrt{6}}{24}$.

Câu 46: Cho tam giác vuông cân ABC có cạnh huyền $AB=2a$. Trên đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC), lấy điểm S sao cho SC tạo với mặt phẳng (ABC) một góc $60°$.

Tính theo a đường kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$. **B.** $2\sqrt{5}a$. **C.** $\sqrt{10}a$. **D.** $2\sqrt{10}a$.

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng 60^o. Mặt cầu (S) tâm A cắt mặt phẳng (SBC) theo thiết diện là một đường tròn có bán kính bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính bán kính của mặt cầu (S).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 48: Cho hình tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a, gọi B', C', D' lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, AD. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp cụt $B'C'D'.BCD$.

A. $\frac{a\sqrt{22}}{8}$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}a}{8}$. **C.** $\frac{11a}{32}$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}a}{4}$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Tính bán kính R của mặt cầu đi qua năm điểm A, B, C, B_1, C_1.

A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. **C.** $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 6. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HB = 2HA$. Cạnh SA hợp với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. 84π. **B.** $\frac{220}{3}\pi$. **C.** $\frac{1900}{3}\pi$. **D.** 88π.

Câu 51: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Biết rằng $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$ và $ASB = 60°$. Tính diện tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $S = \frac{13\pi a^2}{2}$. **B.** $S = \frac{13\pi a^2}{3}$. **C.** $S = \frac{11\pi a^2}{2}$. **D.** $S = \frac{11\pi a^2}{3}$.

Câu 52: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của khối trụ ngoại tiếp, khối cầu nội tiếp, khối cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính giá trị $P = \frac{V_1 + V_2}{V_3}$.

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $P = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. **C.** $P = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $P = \frac{4\sqrt{3}}{9}$.

Câu 53: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $AB = BC = a\sqrt{3}$, góc $SAB = SCB = 90°$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $16\pi a^2$. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $8\pi a^2$. **D.** $12\pi a^2$.

Câu 54: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{\sqrt{6}a}{4}$ **B.** $\frac{3a}{5}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{5}$ **D.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$

Câu 55: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=2$, $ASB=90^\circ$, $BSC=60^\circ$, $CSA=120^\circ$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng:

A. 4π. **B.** $\frac{16\pi}{3}$. **C.** 16π. **D.** 8π.

Câu 56: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 1, chiều cao bằng 2. Thể tích khối cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho bằng:

A. $\frac{32\sqrt{3}\pi}{27}$. **B.** $\frac{16\pi}{3}$. **C.** $\frac{16\pi}{9}$. **D.** $\frac{32\sqrt{3}\pi}{9}$.

Câu 57: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $AB=BC=a\sqrt{3}$, góc $SAB=SCB=90^\circ$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $16\pi a^2$. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $8\pi a^2$. **D.** $12\pi a^2$.

Câu 58: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=4a, BC=3\sqrt{2}a$, $ABC=45^\circ; SAC=SBC=90^\circ$; Sin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng $\frac{\sqrt{2}}{4}$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng

A. $\frac{a\sqrt{183}}{6}$. **B.** $\frac{a\sqrt{183}}{3}$. **C.** $\frac{5a\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{3a\sqrt{5}}{12}$.

Câu 59: Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC có $AB=1$, $AC=2$, $BAC=60^\circ$. Điểm S thay đổi thuộc đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P), (S khác A). Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC. Đường kính MN thay đổi của mặt cầu (T) ngoại tiếp khối đa diện $ABCB_1C_1$ và I là điểm cách tâm mặt cầu (T) một khoảng bằng ba lần bán kính. Tính giá trị nhỏ nhất của $IM+IN$.

A. $6\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{20}$. **C.** 6. **D.** $2\sqrt{10}$.

Câu 60: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=BC=CD=2\sqrt{3}$, $AC=BD=2$, $AD=2\sqrt{2}$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đã cho bằng

A. 6π. **B.** 24π. **C.** $\frac{40\pi}{3}$. **D.** $\frac{10\pi}{3}$.

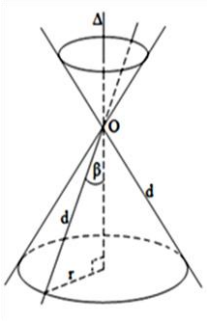
CHƯƠNG 4

MẶT NÓN, MẶT TRỤ MẶT CẦU

CHỦ ĐỀ 10 MẶT NÓN TRÒN XOAY VÀ KHỐI NÓN

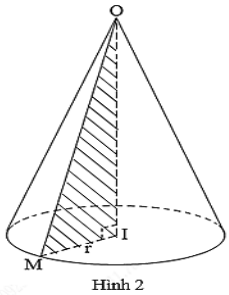
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Mặt nón tròn xoay



- Đường thẳng d,Δ cắt nhau tại O và tạo thành góc β với $0^0 < \beta < 90^0$. Mặt phẳng (P) chứa d,Δ và (P) quay quanh trục Δ với góc β không đổi thì tạo thành mặt nón tròn xoay đỉnh O. Trong đó:
  - Δ gọi là trục
  - d được gọi là đường sinh
  - Góc 2β được gọi là góc ở đỉnh

2. Khối nón



Hình 2

- Khối nón là phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay, kể cả hình nón đó.
- Đỉnh, mặt đáy, đường sinh của một hình nón cũng là đỉnh, mặt đáy, đường sinh của khối nón tương ứng.
- Cho hình nón có chiều cao h, đường sinh l và bán kính đáy r. Khi đó, ta có các công thức sau:
  - Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq} = \pi.r.l$
  - Diện tích đáy của hình nón: $S_{day} = \pi.r^2$
  - Diện tích toàn phần của hình nón: $S_{tp} = S_{xq} + S_{day} = \pi.r.l + \pi.r^2$
  - Thể tích của khối nón: $V_{non} = \frac{1}{3}\pi.r^2.h$

Dạng 1: Tính S_{xq} và S_{tp} của khối nón. Thể tích khối nón

- Cho hình nón có chiều cao h, đường sinh l và bán kính đáy r. Khi đó, ta có các công thức sau:
  - Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq} = \pi.r.l$
  - Diện tích đáy của hình nón: $S_{day} = \pi.r^2$
  - Diện tích toàn phần của hình nón: $S_{tp} = S_{xq} + S_{day} = \pi.r.l + \pi.r^2$
  - Thể tích của khối nón: $V_{non} = \frac{1}{3}\pi.r^2.h$

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cắt hình nón (N) bằng một mặt phẳng qua trục của nó, ta thu được thiết diện là tam giác đều cạnh $2a$. Tính diện tích xung quanh của (N).

A. $2\pi a^2$. **B.** $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $4\pi a$. **D.** $\frac{2\pi a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Cắt hình nón (N) bằng một mặt phẳng qua trục của nó, ta thu được thiết diện là tam giác đều cạnh $2a$ suy ra $\begin{cases} R = a \\ h = a\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow l = \sqrt{h^2 + R^2} = 2a$

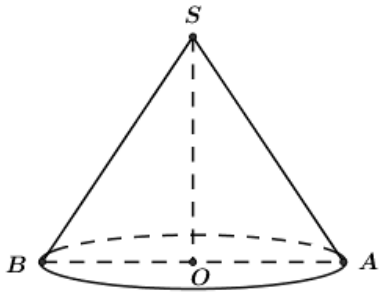
Diện tích xung quanh của (N) là $S_{xq} = \pi Rl = 2\pi a^2$.

Câu 2: Cho khối nón có độ dài đường cao bằng bán kính đáy. Biết thể tích khối nón bằng $\pi\sqrt{3}a^3$. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

A. $3\sqrt{2}\pi a^2$. **B.** $3\pi a^2$. **C.** $\sqrt{3}\pi a^2$. **D.** $2\pi a^2$.

Lời giải

Chọn A



Khối nón có độ dài đường cao bằng bán kính đáy $\Rightarrow h = r$.

Thể tích khối nón $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \pi\sqrt{3}a^3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi r^3 = \pi\sqrt{3}a^3 \Leftrightarrow r = h = \sqrt{3}a$.

Suy ra đường sinh $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{6}a$.

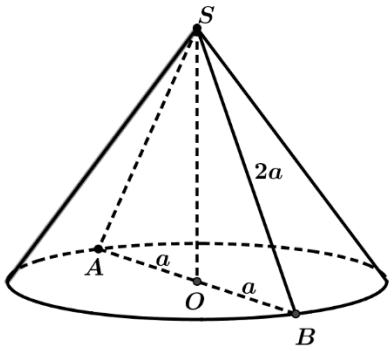
Diện tích xung quanh của hình nón $S_{xq} = \pi rl = \pi.\sqrt{6}a.\sqrt{3}a = 3\sqrt{2}\pi a^2$.

Câu 3: Thiết diện qua trục của một hình nón là một tam giác đều cạnh có độ dài bằng $2a$. Thể tích khối nón là

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn C



Giả sử hình nón có đỉnh là S và tâm đường tròn đáy là O; thiết diện đi qua truc SO là tam giác đều SAB.

Ta có $r=\frac{AB}{2}=a$; $h=SO=SA.\sin 60°=2a.\frac{\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

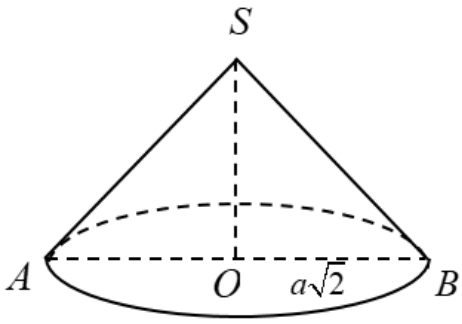
Thể tích khối nón là $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi.a^2.a\sqrt{3}=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 4: Cho hình nón đỉnh S. Biết rằng nếu cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục, ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Diện tích xung quanh của hình nón là

A. $S_{xq}=\pi\sqrt{2}a^2$. **B.** $S_{xq}=\pi a^2$. **C.** $S_{xq}=\frac{\pi\sqrt{2}a^2}{2}$. **D.** $S_{xq}=\frac{\pi a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Giả sử thiết diện qua trục là tam giác SAB.

Theo đề bài ta có tam giác SAB vuông cân tại S, có cạnh huyền $AB=a\sqrt{2}$.

Suy ra $\begin{cases}SA=SB\\SA^2+SB^2=2a^2\end{cases}\Rightarrow$ đường sinh $l=SA=a$ và bán kính $R=OA=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

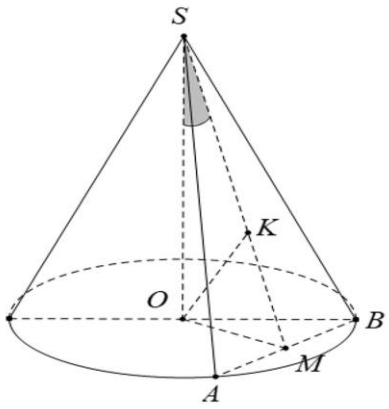
Khi đó diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq}=\pi Rl=\pi\frac{a\sqrt{2}}{2}.a=\frac{\pi\sqrt{2}a^2}{2}$.

Câu 5: Cho hình nón có chiều cao bằng a. Một mặt phẳng (α) đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều, góc giữa trục của hình nón và mặt phẳng (α) là $60°$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\frac{25\pi a^3}{9}$. **B.** $\frac{40\pi a^3}{9}$. **C.** $\frac{13\pi a^3}{9}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Giả sử mặt phẳng (α) cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SAB. Theo giả thiết thì tam giác SAB đều. Gọi O là tâm của đường tròn đáy; h, r lần lượt là đường cao và bán kính của hình nón.

Gọi M là trung điểm của AB, tam giác OAB cân đỉnh O nên $OM \perp AB$ và $SO \perp AB$ suy ra $AB \perp (SOM)$.

Dựng $OK \perp SM$ ($K \in SM$).

Theo trên ta có $AB \perp (SOM) \Rightarrow AB \perp OK \Rightarrow OK \perp (SAB)$.

Vậy góc tạo bởi giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) là $OSM = 60°$.

Xét tam giác vuông SOM có

$$\cos OSM = \frac{SO}{SM} \Rightarrow SM = \frac{a}{\frac{1}{2}} = 2a; OM = SM \sin OSM = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Do tam giác SAB đều nên $SM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \frac{2SM}{\sqrt{3}} = \frac{2.2a}{\sqrt{3}} = \frac{4a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AM = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Khi đó bán kính hình nón $r = OA = \sqrt{OM^2 + AM^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{39}}{3}$.

Thể tích của khối nón đã cho bằng $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{39}}{3}\right)^2 .a = \frac{13\pi a^3}{9}$

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho khối nón có bán kính $r=\sqrt{3}$ và chiều cao $h=4$. Tính thể tích V của khối nón đã cho

A. $V=16\pi\sqrt{3}$. **B.** $V=\dfrac{16\pi\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=12\pi$. **D.** $V=4\pi$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=4\pi$

Câu 2: Cho hình nón có bán kính đáy $r=2$ và độ dài đường sinh $l=5$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $\dfrac{20\pi}{3}$. **B.** 20π. **C.** $\dfrac{10\pi}{3}$. **D.** 10π.

Lời giải

Chọn D

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq}=\pi rl=\pi.2.5=10\pi.$

Câu 3: Cho hình nón có đường kính đáy bằng 6, độ dài đường sinh bằng 5. Diện tích xung quanh hình nón đã cho bằng

A. 20. **B.** 30π. **C.** 15π. **D.** 40.

Lời giải

Chọn C

Ta có $S_{xq}=\pi rl=\pi.\dfrac{6}{2}.5=15\pi$.

Câu 4: Một khối nón có bán kính đường tròn đáy $r=3$ và độ dài đường sinh $l=5$. Tính thể tích của khối nón đó.

A. 15π. **B.** 36π. **C.** 12π. **D.** 30π.

Lời giải

Ta có chiều cao của khối nón $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{25-9}=4.$

Thể tích khối nón là: $V=\dfrac{1}{3}\pi.r^2.h=\dfrac{1}{3}\pi.3^2.4=12\pi.$

Câu 5: Cho hình nón có đường kính đáy bằng 6, độ dài đường sinh bằng 5. Diện tích xung quanh hình nón đã cho bằng

A. 20. **B.** 30π. **C.** 15π. **D.** 40.

Lời giải

Chọn C

Ta có $S_{xq}=\pi rl=\pi.\dfrac{6}{2}.5=15\pi$.

Câu 6: Diện tích xung quanh của một hình nón có đường sinh $l=3$, bán kính đáy $r=2$ bằng

A. 12. **B.** 12π. **C.** 6. **D.** 6π.

Lời giải

Chọn D

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = \pi rl = \pi.2.3 = 6\pi$

Câu 7: Cho khối nón có chiều cao bằng a và đường sinh bằng $2a$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. πa^3. **B.** $3\pi a^3$. **C.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Bán kính đường tròn đáy của hình nón bằng $r = \sqrt{l^2 - h^2} = a\sqrt{3}$.

Thể tích của khối nón bằng $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \pi a^3$.

Câu 8: Cho hình nón có bán kính bằng 3, chiều cao bằng 4. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. 48π. **B.** 48. **C.** 12π. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

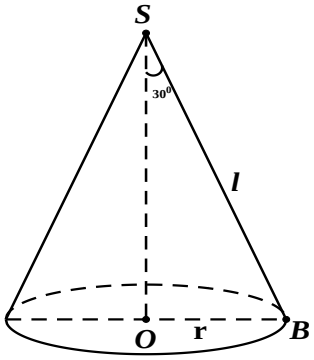
Thể tích của khối nón đã cho bằng $\frac{1}{3}\pi.3^2.4 = 12\pi$.

Câu 9: Cho hình nón có bán kính đáy $r = 3$ và góc ở đỉnh bằng $60°$. Thể tích của khối nón giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $9\sqrt{3}$. **B.** $27\sqrt{3}\pi$. **C.** 27π. **D.** $9\sqrt{3}\pi$.

Lời giải

Chọn D



Ta có góc ở đỉnh bằng $60° \Rightarrow OSB = 30°$.

Xét ΔSOB vuông tại O có: $h = SO = \frac{r}{\tan 30°} = 3\sqrt{3}$.

Vậy thể tích của khối nón đã cho là : $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi.3^2.3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}\pi$.

Câu 10: Trong không gian cho tam giác vuông ABC tại A, $AB = a$ và $BC = a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB.

A. $V = \frac{2}{3}\pi a^3$. **B.** $V = 3\pi a^3$. **C.** $V = \pi a^3$. **D.** $V = 2\pi a^3$.

Lời giải

Chọn A

Do khối nón nhận AB làm trục nên chiều cao $h = AB = a$, độ dài đường sinh $l = BC = a\sqrt{3}$ do đó bán kính đáy $r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{2}a$.

Thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{2}a\right)^2.a = \frac{2}{3}\pi a^3$.

Câu 11: Cho hình trụ có chiều cao $h = 1$ và bán kính $r = 2$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 2π. **B.** 6π. **C.** 4π. **D.** 3π.

Lời giải

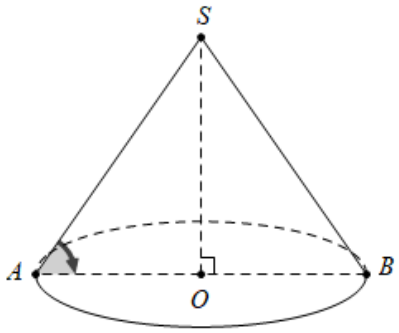
Ta có: $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi.2.1 = 4\pi$.

Câu 12: Một hình nón có đường sinh bằng $2a$ và góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Thể tích của khối nón tạo nên từ hình nón đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{24}\pi a^3$. **C.** πa^3. **D.** $4\pi a^3$.

Lời giải

Chọn B



Gọi r, h lần lượt là bán kính và độ dài đường cao của hình nón.

Giả sử góc giữa đường sinh SA và mặt phẳng đáy là $60°$.

Ta có $\cos SAO = \frac{OA}{SA} \Rightarrow r = OA = SA.\cos 60° = a$ và $h = \sqrt{l^2 - r^2} = a\sqrt{3}$.

Thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 13: Một khối nón có bán kính đáy r và đường sinh dài gấp đôi bán kính đáy.Thể tích khối nón đó bằng

A. $\sqrt{5}\pi r^3$. **B.** $\sqrt{3}\pi r^3$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{3}\pi r^3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có đường sinh khối nón $l = 2r$

Chiều cao khối nón $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{3}r$

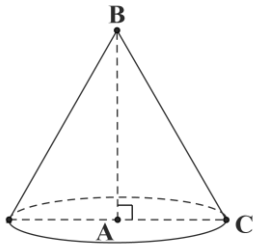
Thể tích của khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2.\sqrt{3}r = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3$.

Câu 14: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a\sqrt{3}$ và $BC = 2a$. Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB thì đường gấp khúc BCA tạo thành một hình nón tròn xoay. Thể tích của khối nón tròn xoay tạo nên bởi hình nón tròn xoay nói trên là

A. $\pi a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{2\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2\pi a^3$.

Lời giải

Chọn C



Hình nón tạo thành có chiều cao $AB = a\sqrt{3}$ và đường sinh $BC = 2a$ nên nó có bán kính đáy là $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(a\sqrt{3}\right)^2} = a$.

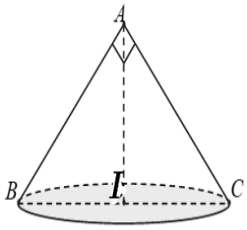
Thể tích khối nón tạo thành là: $V = \frac{1}{3}\pi AC^2.AB = \frac{1}{3}\pi.a^2.a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 15: Trong không gian, cho tam giác ABC vuông cân tại A, gọi I là trung điểm của $BC, BC = 2$. Tính diện tích xung quanh của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AI

A. $2\sqrt{2}\pi$. **B.** $\sqrt{2}\pi$. **C.** 2π. **D.** 4π.

Lời giải

Chọn B



Tam giác ABC vuông cân ở A, I là trung điểm của $BC, BC = 2 \Rightarrow \begin{cases} AI = \frac{1}{2}BC = 1 \\ BI = IC = 1 \\ AB = AC = \sqrt{2} \end{cases}$.

Do đó diện tích xung quanh của hình nón là $V = \pi rl = \pi.1.\sqrt{2} = \sqrt{2}\pi$.

Câu 16: Cắt hình nón có chiều cao h bởi một mặt phẳng đi qua trục ta được thiết diện là một tam giác vuông cân. Biết diện tích xung quanh của hình nón là $8\pi\sqrt{2}$. Thể tích của khối nón bằng

A. $\frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{64\pi}{3}$. **C.** $16\pi\sqrt{2}$. **D.** 8π.

Lời giải

Chọn A

Vì thiết diện qua trục là tam giác vuông cân nên: $h = r$

Mặt khác: $l^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow l = r\sqrt{2}$. Theo đề: $S_{xq} = \pi rl \Leftrightarrow 8\pi\sqrt{2} = \pi r^2\sqrt{2} \Leftrightarrow r = 2\sqrt{2}$

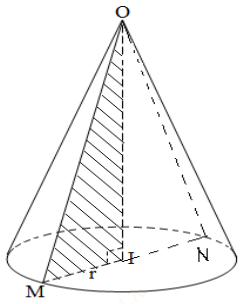
Vậy: Thể tích khối nón bằng: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(2\sqrt{2}\right)^3 = \frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$ (đvdt).

Câu 17: Cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục ta được thiết diện là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{6}$. Tính thể tích V của khối nón đó.

A. $V = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{3}$. **B.** $V = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$. **C.** $V = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{6}$. **D.** $V = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi thiết diện qua trục của hình nón là tam giác OMN.

Theo đề ta có, tam giác OMN vuông cân tại O có $MN = a\sqrt{6}$.

Do đó, $r = \frac{MN}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $h = OI = \frac{MN}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy khối nón có $V = \frac{1}{3}\pi r^2.h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{\pi a^3.\sqrt{6}}{4}$.

Câu 18: Cho hình nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và chu vi đáy bằng $2\pi a$. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

A. πa. **B.** $\frac{\pi a^2}{3}$. **C.** $2\pi a^2$. **D.** πa^2.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết ta có $l = 2a$; chu vi đường đáy là $2\pi r = 2\pi a \Rightarrow r = a$

Vậy diện tích xung quanh là $S = \pi rl = 2\pi a^2$.

Câu 19: Cho tam giác ABC vuông tại A, xoay tam giác ABC quanh cạnh AB ta được hình nón (N). Tính diện tích xung quanh của nón (N) biết rằng $AB = 6a, ABC = 30°$.

A. $S_{xq} = 24\pi a^2$. **B.** $S_{xq} = 48\pi a^2$. **C.** $S_{xq} = 36\sqrt{6}\pi a^2$. **D.** $S_{xq} = 72\sqrt{3}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $AC = AB\tan 30^0 = 2\sqrt{3}a \Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(6a)^2 + \left(2\sqrt{3}a\right)^2} = 4\sqrt{3}a$.

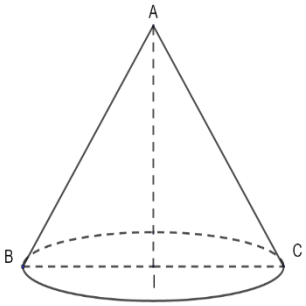
Vậy $S_{sq} = \pi AC.BC = \pi.2\sqrt{3}a.4\sqrt{3}a = 24\pi a^2$.

Câu 20: Trong không gian, cho ΔABC vuông cân tại A, gọi I là trung điểm BC, $BC=2$. Tính diện tích xung quanh của hình nón nhận được khi quay tam giác ΔABC xung quanh trục AI.

A. $S_{xq}=2\sqrt{2}\pi.$ **B.** $S_{xq}=4\pi.$ **C.** $S_{xq}=2\pi.$ **D.** $S_{xq}=\sqrt{2}\pi.$

Lời giải

Chọn D



Vì ΔABC vuông cân tại A có $BC=2$ suy ra $AC=\sqrt{2}$, $r=\dfrac{BC}{2}=1$

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq}=\pi rl=\sqrt{2}\pi$.

Câu 21: Một hình nón có chiều cao bằng $a\sqrt{3}$ và bán kính đáy bằng a. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón.

A. $S_{xq}=2a^2$. **B.** $S_{xq}=2\pi a^2$. **C.** $S_{xq}=\sqrt{3}\pi a^2$. **D.** $S_{xq}=\pi a^2$.

Lời giải

Theo đề bài, ta có $h=a\sqrt{3}, r=a$. Lại có $l^2=r^2+h^2\Rightarrow l=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{a^2+\left(a\sqrt{3}\right)^2}=2a$.

Diện tích xung quanh của hình nón là

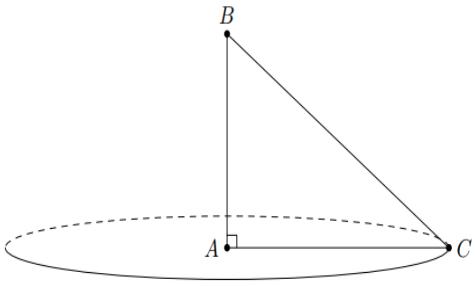
$S_{xq}=\pi.r.l=2\pi a^2$.

Câu 22: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=3$, $AC=4$. Diện tích xung quanh của hình nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh trục AB bằng

A. 20π. **B.** 40π. **C.** 15π. **D.** 12π.

Lời giải

Chọn A



Hình nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh trục AB có bán kính đáy là $r=AC=4$ và chiều cao là $h=AB=3$.

Suy ra đường sinh $l=\sqrt{r^2+h^2}=5$.

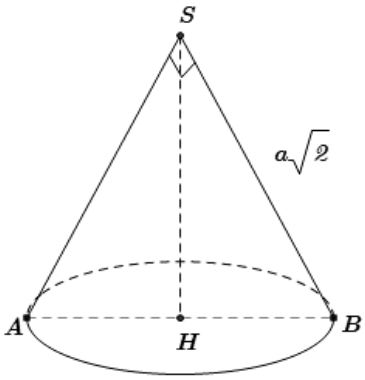
Diện tích xung quanh của hình nón là $S=\pi rl=20\pi$.

Câu 23: Một hình nón (N) có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân với cạnh góc vuông bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích của khối nón (N) bằng

A. $\frac{\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{\pi a^3}{2}$. **C.** πa^3. **D.** $\frac{\pi\sqrt{2}a^3}{12}$

Lời giải

Chọn A



Gọi S là đỉnh của hình nón (N) và H là chân đường cao kẻ tử S lên mặt đáy

Ta có $SH = HA = HB = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{2}SB = a$.

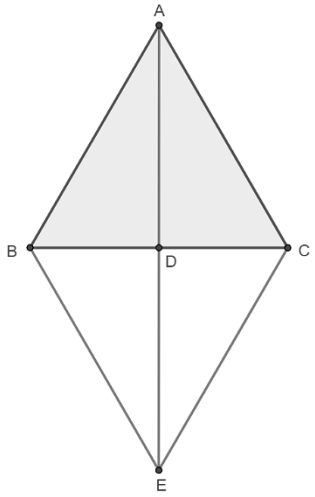
$\Rightarrow V_{(N)} = \frac{1}{3}SH.\pi.HA^2 = \frac{\pi a^3}{3}$.

Câu 24: Khối tròn xoay sinh bởi một tam giác đều cạnh a (kể cả điểm trong) khi quay quanh một đường thẳng chứa một cạnh của tam giác có thể tích bằng

A. $\frac{\pi a^3}{4}$. **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi D là trung điểm BC khi quay tam giác ABC quay quanh cạnh BC ta được hai hình nón đỉnh B và đỉnh C. Gọi thể tích hai khối nón đỉnh B,C lần lượt là V_1,V_2.

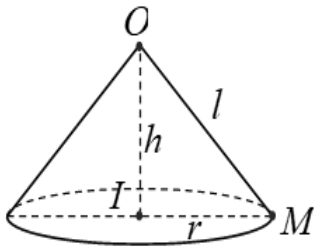
Ta có: $BD = \frac{a}{2}, AD = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V = 2V_1 = 2.\frac{1}{3}.\pi.AD^2.BD = \frac{\pi a^3}{4}$.

Câu 25: Cho hình nón có đường sinh bằng 2, góc ở đỉnh bằng 120^0. Thể tích của khối nón đó bằng

A. $\sqrt{3}\pi$. **B.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$. **C.** 3π. **D.** π.

Lời giải

Chọn D



Vì góc ở đỉnh bằng 120° nên $IOM = 60^\circ$. Trong tam giác vuông IOM ta có

$r = l\sin 60^\circ = \sqrt{3}$

$h = l\cos 60^\circ = 1$.

Thể tích của hình nón là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi.3.1 = \pi$.

Câu 26: Tính thể tích của khối nón có chiều cao bằng 8 và độ dài đường sinh bằng 10.

A. 256π. **B.** 288π. **C.** 96π. **D.** 384π.

Lời giải

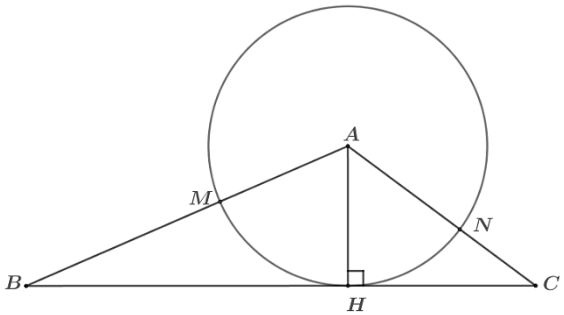
Chọn C

Gọi chiều cao, độ dài đường sinh, bán kính đáy của khối nón lần lượt là h, l, r.

Bán kính đáy của khối nón là $r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.

Thể tích của khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi.6^2.8 = 96\pi$.

Câu 27: Một tấm tôn hình tam giác ABC có độ dài cạnh $AB = 3; AC = 2; BC = \sqrt{19}$. Điểm H là chân đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC. Người ta dùng compa có tâm là A, bánh kính AH vạch một cung tròn MN. Lấy hình quạt gò thành hình nón không có mặt đáy với đỉnh là A, cung MN thành đường tròn đáy của hình nón. Tính thể tích khối nón trên.



A. $\frac{2\pi\sqrt{114}}{361}$. **B.** $\frac{2\pi\sqrt{3}}{19}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{57}}{361}$. **D.** $\frac{2\pi\sqrt{19}}{361}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng hệ quả định lý hàm số cosin cho tam giác ABC ta có:

$\cos BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{3^2 + 2^2 - 19}{2.3.2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow BAC = 120^\circ$.

Suy ra: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin BAC=\frac{1}{2}AH.BC\Leftrightarrow AH=\frac{AB.AC.\sin BAC}{BC}=\frac{3.2.\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{19}}=\frac{3\sqrt{57}}{19}$.

Độ dài cung $MN=\frac{120}{180}\pi.AH=\frac{2\sqrt{57}\pi}{19}$.

Gọi r là bán kính đường tròn đáy của nón, khi đó: $2\pi r=MN\Leftrightarrow r=\frac{MN}{2\pi}=\frac{\sqrt{57}}{19}$.

Gọi h là chiều cao nón, ta có: $h=\sqrt{AH^2-r^2}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{57}}{19}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{57}}{19}\right)^2}=\sqrt{\frac{24}{19}}=\frac{2\sqrt{114}}{19}$.

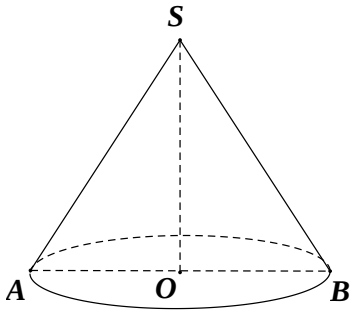
Thể tích khối nón $V=\frac{1}{3}\pi r^2.h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{57}}{19}\right)^2.\left(\frac{2\sqrt{114}}{19}\right)=\frac{2\pi\sqrt{114}}{361}$.

Câu 28: Cắt hình nón bởi một hình phẳng đi qua trục ta được thiết diện là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{6}$. Thể tích của khối nón đó bằng

A. $V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{3}$. **B.** $V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$. **D.** $V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $h=SO=\frac{1}{2}AB=a\frac{\sqrt{6}}{2}$, $R=OA=\frac{1}{2}AB=a\frac{\sqrt{6}}{2}$.

$V=\frac{1}{3}S.h=\frac{1}{3}\pi\left(a\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2.a\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 29: Cho khối nón có bán kính đáy $r=3$ và độ dài đường sinh $l=5$. Thể tích khối nón đã cho bằng

A. 12π. **B.** 18π. **C.** 6π. **D.** 36π.

Lời giải

Chọn A

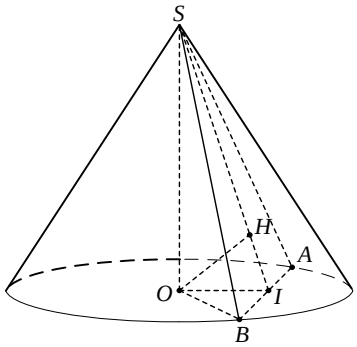
Ta có: $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi.3^2.\sqrt{5^2-3^2}=12\pi$.

Câu 30: Cho hình nón (N) có chiều cao bằng $2a$. Cắt (N) bởi một mặt phẳng qua đỉnh và cách tâm của đáy một khoảng bằng ta được thiết diện có diện tích bằng $\frac{4a^2\sqrt{11}}{3}$. Thể tích khối nón đã cho bằng

A. $\frac{4\pi a^3\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\frac{10\pi a^3}{3}$. **C.** $10\pi a^3$. **D.** $\frac{4\pi a^3\sqrt{5}}{9}$.

Lời giải

Chọn B



Gỉa sử tam giác SAB là thiết diện đi qua đỉnh của hình nón (N).

Gọi I là trung điểm của AB và kẻ $OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow d(O,(SAB)) = HO = a$.

Xét tam giác vuông SOI có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow OI = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Lại có: $SI = \sqrt{SO^2 + IO^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{4a^2}{3}} = \frac{4a}{\sqrt{3}}$.

Xét tam giác SAB có: $AB = \frac{2S_{ABC}}{SI} = \frac{2.\frac{4a^2\sqrt{11}}{3}}{\frac{4a}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{33}a}{3} \Rightarrow BI = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}$.

Xét tam giác OIB có: $OB = \sqrt{OI^2 + IB^2} = \sqrt{\frac{4a^2}{3} + \frac{33a^2}{9}} = a\sqrt{5}$.

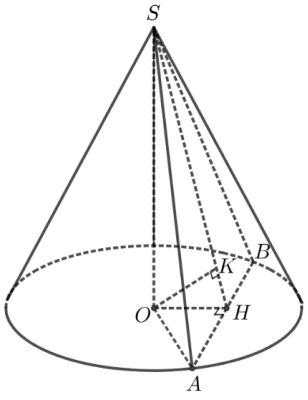
Vậy thể tích của khối nón là: $V = \frac{1}{3}\pi r^2.SO = \frac{1}{3}\pi.5a^2.2a = \frac{10\pi a^3}{3}$.

Câu 31: Cho hình nón (N) có đỉnh S, chiều cao $h = 3$. Mặt phẳng (P) qua đỉnh S cắt hình nón (N) theo thiết diện là tam giác đều. Khoảng cách từ tâm đáy hình nón đến mặt phẳng (P) bằng $\sqrt{6}$. Thể tích khối nón giới hạn bởi hình nón (N) bằng

A. 81π. **B.** 27π. **C.** 36π. **D.** 12π.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $SO = 3$.

Kẻ $OH \perp AB \Rightarrow AH = HB$.

Kẻ $OK \perp SH \Rightarrow OK \perp AB \Rightarrow d\left(O;(P)\right) = d\left(O;(SAB)\right) = OK = \sqrt{6}$.

Kẻ $OH \perp AB \Rightarrow AH = HB = \dfrac{2\sqrt{3}a}{2} = \sqrt{3}a$.

Tam giác vuông SOH vuông tại O,

ta có: $\dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OH^2} \Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OK^2} - \dfrac{1}{SO^2} \Rightarrow OH = \sqrt{\dfrac{SO^2.OK^2}{SO^2 - OK^2}} = 3\sqrt{2}.$

Tam giác vuông SOH vuông tại O có $SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = 3\sqrt{3}$.

Tam giác vuông SAH vuông tại H có $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{AB^2 - \dfrac{AB^2}{4}} = AB\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = 6$

Xét tam giác vuông OAH, ta có: $OA = \sqrt{HA^2 + OH^2} = \sqrt{3^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2} = 3\sqrt{3}$

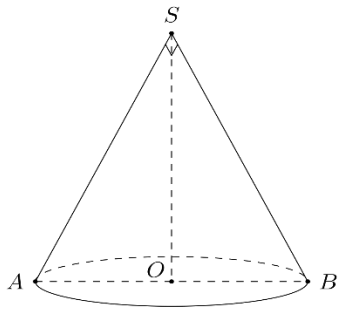
Vậy thể tích khối nón giới hạn bởi hình nón (N) là $V = \dfrac{1}{3}\pi.OA^2.SO = \dfrac{1}{3}\pi.27.3 = 27\pi$.

Câu 32: Cho khối nón có thiết diện qua trục là tam giác SAB vuông tại S. Biết tam giác SAB có bán kính đường tròn nội tiếp bằng $2\left(\sqrt{2}-1\right)$. Tính thể tích khối nón đã cho

A. $\dfrac{16\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{2\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{4\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{8\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Theo đề ΔSAB vuông tại S và $SA = SB$ nên suy ra ΔSAB vuông cân tại S

Đặt $SA = SB = a$ suy ra $AB = a\sqrt{2}$ và đường cao $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Diện tích tam giác SAB là $S = \dfrac{1}{2}SA.SB = \dfrac{a^2}{2}$

Ta có $p = \dfrac{SA + SB + AB}{2} = \dfrac{a + a + a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2a + a\sqrt{2}}{2}$

Suy ra $S = pr = \dfrac{2a + a\sqrt{2}}{2}.2\left(\sqrt{2}-1\right) = \left(2a + a\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$

Từ đó suy ra $\left(2a + a\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right) = \dfrac{a^2}{2} \Leftrightarrow a = 2\sqrt{2}$

Suy ra $SO = OB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}.\sqrt{2}}{2} = 2$

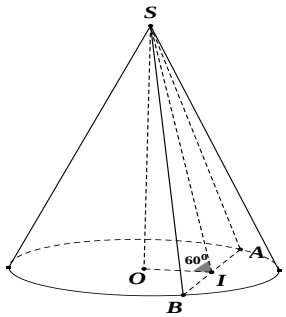
Vậy thể tích khối nón là $V=\frac{1}{3}\pi.OB^2.SO=\frac{1}{3}\pi.2^2.2=\frac{8\pi}{3}$

Câu 33: Cho khối nón (N) có bán kính đáy $r=4a$ và chiều cao lớn hơn bán kính đáy. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh nón và tạo với đáy nón một góc $60°$ cắt khối nón (N) theo thiết diện là một tam giác có diện tích bằng $8\sqrt{3}a^2$. Thể tích của khối nón (N) bằng

A. $64\pi a^3$. **B.** $96\pi a^3$. **C.** $32\pi a^3$. **D.** $192\pi a^3$.

Lời giải

Chọn C



Gọi thiết diện là tam giác SAB và I là trung điểm của đoạn AB.

Ta có $OI\perp AB$ và $SI\perp AB$ nên $SIO=60°$.

Gọi $SO=h(h>4a)$ ta có $OI=\frac{SO}{\tan 60°}=\frac{h\sqrt{3}}{3}\Rightarrow AB=2AI=2\sqrt{OB^2-OI^2}=2\sqrt{16a^2-\frac{3h^2}{9}}$

và $SI=\frac{SO}{\sin 60°}=\frac{2h\sqrt{3}}{3}$.

Do đó $S_{SAB}=\frac{1}{2}SI.AB\Leftrightarrow 8\sqrt{3}a^2=\frac{1}{2}.\frac{2h\sqrt{3}}{3}.2\sqrt{16a^2-\frac{3h^2}{9}}\Leftrightarrow 12a^2=h.\sqrt{16a^2-\frac{3h^2}{9}}$

$\Leftrightarrow 144a^4=h^2\left(16a^2-\frac{3h^2}{9}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{3}h^4-16a^2h^2+144a^4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}h^2=36a^2\\h^2=12a^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}h=6a(nhan)\\h=2\sqrt{3}a(loai)\end{array}\right.$.

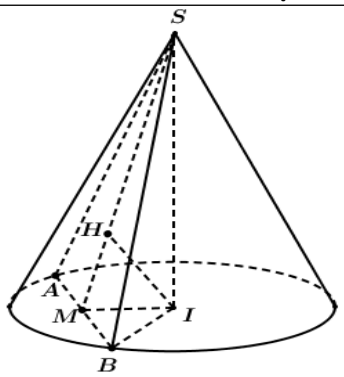
Vậy $V_{(N)}=\frac{1}{3}\pi.r^2.h=\frac{1}{3}\pi.(4a)^2.6a=32\pi a^3$.

Câu 34: Cho hình nón có chiều cao bằng 3. Một mặt phẳng (α) đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều, góc giữa trục của hình nón và mặt phẳng (α) là $45°$. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. 45π. **B.** 15π. **C.** $12\sqrt{25}\pi$. **D.** $5\sqrt{24}\pi$.

Lời giải

Chọn B



Gọi S và I lần lượt là đỉnh của hình nón và tâm của đường tròn đáy của hình nón.

Thiết diện qua đỉnh của hình nón là tam giác đều SAB suy ra $(\alpha)\equiv(SAB)$

Gọi M,H lần lượt là hình chiếu của I lên AB và SM.

Khi đó: $\begin{cases}AB\perp IM\\AB\perp SI\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SIM)\Rightarrow AB\perp IH$

$\begin{cases}IH\perp AB\\IH\perp SM\end{cases}\Rightarrow IH\perp(SAB)$

$\Rightarrow SH$ là hình chiếu của SI lên (SAB) $\Rightarrow(SI,(\alpha))=(SI,SH)=ISM=45^\circ\Rightarrow IMS=45^\circ$

$\Rightarrow\tan 45^\circ=\dfrac{MI}{SI}\Rightarrow MI=3;\ \cos 45^\circ=\dfrac{SI}{SM}\Rightarrow SM=3\sqrt{2}$

Vì tam giác SAB là tam giác đều nên $SM=AB.\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AB=\dfrac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{6}\Rightarrow MB=\sqrt{6}$

$\Rightarrow$Bán kính đường tròn đáy là $r=IB=\sqrt{MI^2+MB^2}=\sqrt{9+6}=\sqrt{15}$

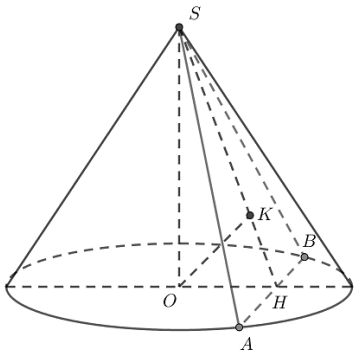
$\Rightarrow$Thể tích của khối nón đã cho là $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2.SI=\dfrac{1}{3}\pi.15.3=15\pi$.

Câu 35: Cho hình nón có chiều cao bằng a. Biết rằng khi cắt hình nón đã cho bởi một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cách tâm của đáy hình nón một khoảng bằng $\dfrac{a}{3}$, thiết diện thu được là một tam giác vuông. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng:

A. $\dfrac{5\pi a^3}{9}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{4\pi a^3}{9}$. **D.** $\dfrac{5\pi a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi thiết diện qua đỉnh là tam giác vuông cân SAB và gọi H là trung điểm AB

Kẻ $OK \perp SH \Rightarrow d\left(O,\left(SAB\right)\right) = OK = \frac{a}{3}$ và ta có $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OH^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Do tam giác SAB vuông cân tại $S \Rightarrow AH = SH = SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

$\Rightarrow OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi.OA^2.SO = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2.a = \frac{5\pi a^3}{12}$.

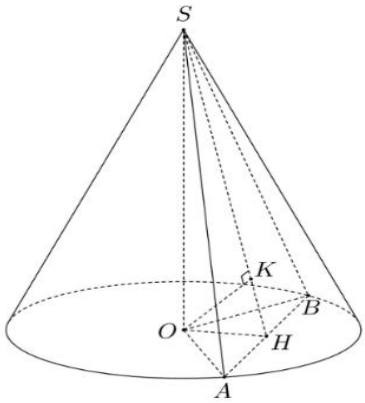
Vậy thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng $\frac{5\pi a^3}{12}$.

Câu 36: Cho hình nón $\left(N\right)$ có đỉnh S, chiều cao $h = 2$. Mặt phẳng $\left(P\right)$ qua đỉnh S cắt hình nón $\left(N\right)$ theo thiết diện là tam giác đều. Khoảng cách từ tâm đáy hình nón đến mặt phẳng $\left(P\right)$ bằng $\sqrt{3}$. Thể tích khối nón giới hạn bởi hình nón $\left(N\right)$ bằng

A. $\frac{52\pi}{9}$. **B.** $\frac{104\pi}{3}$. **C.** $\frac{52\pi}{3}$. **D.** $\frac{104\pi}{9}$

Lời giải

Chọn D



Kẻ $mp\left(SAB\right)$, $OH \perp AB, OK \perp SH$; $OH \perp AB, SO \perp AB$ $\left(SO \perp \left(OAB\right)\right)$

$\Rightarrow AB \perp \left(SOH\right) \Rightarrow AB \perp OK$ mà $OK \perp SH \Rightarrow OK \perp \left(SAB\right)$

$\Rightarrow OK = \sqrt{3} = \frac{SO.OH}{\sqrt{SO^2 + OH^2}} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{2.OH}{\sqrt{4 + OH^2}} \Leftrightarrow OH = \sqrt{12}$

$\Rightarrow SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = 4 = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \rightarrow AB = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow BH = \frac{1}{2}AB = \frac{8\sqrt{3}}{6}6 \Rightarrow OB = \sqrt{OH^2 + HB^2} = \sqrt{12 + \frac{16}{3}} = \frac{2\sqrt{39}}{3}$

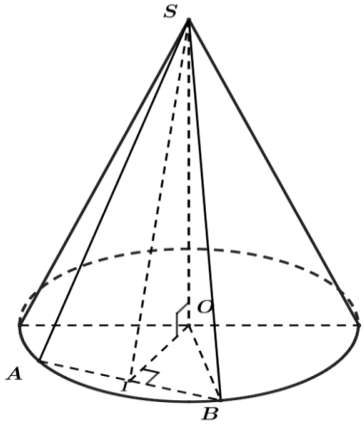
$\Rightarrow V_{(S)} = \frac{1}{3}h.\pi.OB^2 = \frac{1}{3}.2.\pi.\left(\frac{2\sqrt{39}}{3}\right)^2 = \frac{104\pi}{9}$.

Câu 37: Cho hình nón đỉnh S, đường tròn đáy tâm O và góc ở đỉnh bằng $120°$. Một mặt phẳng đi qua S cắt hình nón theo thiết diện là tam giác vuông SAB. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng 3, diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $2\pi\sqrt{3}$. **B.** $27\pi\sqrt{3}$. **C.** $9\pi\sqrt{3}$. **D.** $18\pi\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của AB khi đó $OI \perp AB$.

Mà SO vuông góc với đáy $\Rightarrow SO \perp OI$ nên $d\left(SO, AB\right) = OI = 3$.

Gọi bán kính của đường tròn đáy là $r \Rightarrow OB = r$.

Vì góc ở đỉnh bằng $120° \Rightarrow OSB = 60° \Rightarrow \sin OSB = \dfrac{OB}{SB} \Rightarrow SB = \dfrac{r}{\sin 60°} = \dfrac{2r}{\sqrt{3}}$.

Xét ΔOIB vuông tại I: $IB^2 = OI^2 + OB^2 = 3^2 + r^2 \Rightarrow IB = \sqrt{3^2 + r^2} \Rightarrow AB = 2\sqrt{3^2 + r^2}$.

Xét ΔSAB vuông cân tại S:

$$AB^2 = SA^2 + SB^2 \Leftrightarrow \left(2\sqrt{3^2 + r^2}\right)^2 = \left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^2 \Leftrightarrow r^2 = 27 \Leftrightarrow r = 3\sqrt{3}.$$

$$l = SB = \frac{2r}{\sqrt{3}} = 6.$$

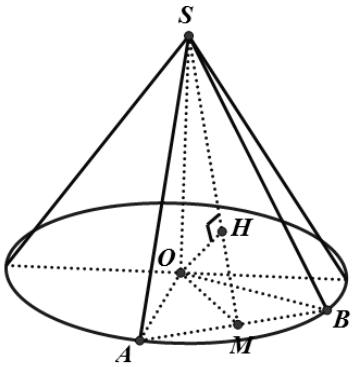
Diện tích xung quanh của hình nón: $S = \pi rl = \pi 3\sqrt{3}.6 = 18\pi\sqrt{3}$.

Câu 38: Cho hình nón đỉnh S, đường tròn đáy tâm O và góc ở đỉnh bằng 120^0. Một mặt phẳng đi qua S cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SAB. Khoảng cách giữa hai đường AB và SO bằng 3, diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng $18\pi\sqrt{3}$. Tính diện tích tam giác SAB.

A. 12. **B.** 18. **C.** 21. **D.** 27.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm AB, khi đó $OM \perp AB$ mà $OM \perp SO$ (do $SO \perp$ đáy).

Suy ra $d\left(AB, SO\right) = OM = 3$.

Ta có $ASO = 60^0 \Rightarrow SA = \dfrac{OA}{\sin 60^0} = \dfrac{2\sqrt{3}.OA}{3}$.

$S_{xq} = \pi OA.SA = \pi OA.\dfrac{2\sqrt{3}OA}{3} = \dfrac{\pi 2\sqrt{3}OA^2}{3} = 18\pi\sqrt{3} \Rightarrow OA = 3\sqrt{3},\ SA = 6$.

$AM = \sqrt{OA^2 - OM^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow AB = 2AM = 6\sqrt{2}$.

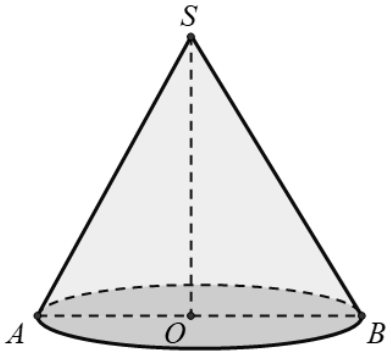
$SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = 3\sqrt{2}$.

Vậy $S_{SAB} = \dfrac{1}{2}.AB.SM = \dfrac{1}{2}.6\sqrt{2}.3\sqrt{2} = 18(đvdt)$.

Câu 39: Cho hình nón (N) có góc ở đỉnh bằng $120°$. Mặt phẳng qua trục của (N), cắt (N) theo một thiết diện là tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 4. Tính thể tích khối nón (N).

A. 8π. **B.** $4\sqrt{3}\pi$. **C.** 3π. **D.** 6π.

Lời giải



Gọi tam giác SAB là thiết diện của hình nón khi cắt bởi mặt phẳng đi qua đỉnh
R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB, r là bán kính hình nón
Áp dụng định lý sin trong tam giác SAB ta có:

$\dfrac{AB}{\sin ASB} = 2R \Rightarrow AB = 2R.\sin ASB = 4\sqrt{3} \Rightarrow r = \dfrac{AB}{2} = 2\sqrt{3}$

Mặt khác, $\tan OSB = \dfrac{OB}{SO} \Rightarrow SO = h = \dfrac{OB}{\tan OSB} = \dfrac{r}{\tan 60^0} = 2$

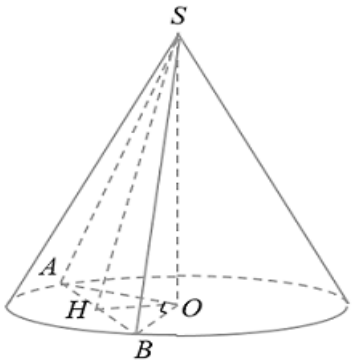
Thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2.h \Rightarrow V = \dfrac{1}{3}\pi\left(2\sqrt{3}\right)^2.2 = 8\pi$.

Câu 40: Cho khối nón dình S có đáy là hình tròn tâm O. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn (O) sao cho tam giác SAB vuông và có diện tích bằng $4a^2$. Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng (SAB) bằng 30°. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\dfrac{5}{3}\pi a^3$. **B.** $4\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\pi a^3$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn C.



Thiết diện là tam giác SAB vuông nên

$S_{SAB}=\frac{1}{2}SA.SB=4a^2\Leftrightarrow\frac{1}{2}SA^2=4a^2\Rightarrow SA=2a\sqrt{2}\Rightarrow AB=4a\Rightarrow SH=2a$.

Ta có: $\left(SO;\left(SAB\right)\right)=HSO=30^0$ suy ra: $\cos 30^0=\frac{SO}{SH}\Rightarrow SO=SH.\frac{\sqrt{3}}{2}=2a.\frac{\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SAO vuông tại O nên: $OA^2=SA^2-SO^2=8a^2-3a^2=5a^2\Rightarrow OA=a\sqrt{5}$.

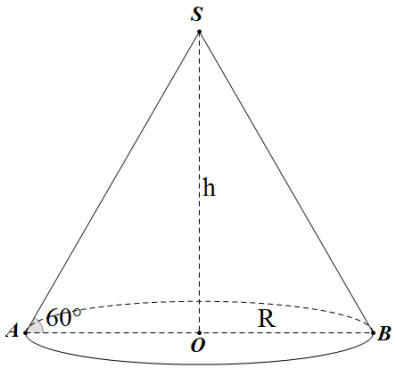
Thể tích khối nón: $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(a\sqrt{5}\right)^2a\sqrt{3}=\frac{5a^3\sqrt{3}}{3}\pi$.

Câu 41: Cho hình nón $\left(N\right)$ có đường sinh tạo với đáy một góc $60°$. Mặt phẳng qua trục của $\left(N\right)$ cắt $\left(N\right)$ được thiết diện là tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Thể tích V của khối nón giới hạn bởi $\left(N\right)$ bằng

A. $V=72\sqrt{3}\pi$. **B.** $V=24\pi$. **C.** $V=72\pi$. **D.** $V=24\sqrt{3}\pi$.

Lời giải

Chọn B



Xét ΔSAB có $SA=SB$ và $SAB=60°$ suy ra ΔSAB đều.

Đặt $AB=a$. Bán kính đường tròn nội tiếp ΔSAB: $r=\frac{S_{SAB}}{p_{SAB}}=\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{2}}=\frac{a\sqrt{3}}{6}=2\Rightarrow a=4\sqrt{3}$

Bán kính đường tròn đáy hình nón: $R=\frac{AB}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

Chiều cao hình nón: $h=\frac{AB\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2}=6$

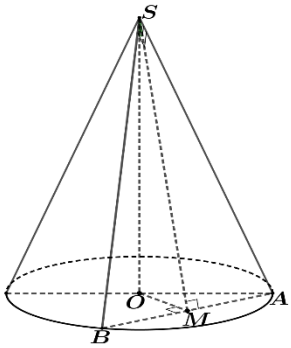
Thể tích khối nón: $V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{1}{3}\pi.\left(2\sqrt{3}\right)^2.6=24\pi$

Câu 42: Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác vuông SAB có diện tích bằng $4a^2$. Góc giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng 30^0. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $4\sqrt{10}\pi a^2$. **B.** $8\sqrt{10}\pi a^2$. **C.** $\sqrt{10}\pi a^2$. **D.** $2\sqrt{10}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Kẻ $OM \perp AB \Rightarrow \left(SO;(SAB)\right) = MSO = 30°$.

Ta có: $S_{SAB} = 4a^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}SM.AB = 4a^2$ và $AB = 2SM$. Từ đó suy ra: $SM = 2a; AB = 4a$ và $SA = 2\sqrt{2}a$. Ta lại có: $SO = \cos 30°.SM = \sqrt{3}a$ và $r = OA = \sqrt{8a^2 - 3a^2} = a\sqrt{5}$.

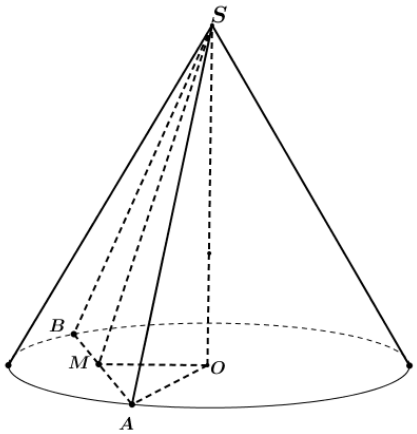
Vậy $S_{xq} = \pi rl = 2\sqrt{10}\pi a^2$.

Câu 43: Cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng đáy một góc α sao cho $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ được thiết diện là một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $4\sqrt{3}$. Thể tích khối nón đã cho bằng

A. $15,8$. **B.** $37,5$. **C.** $47,4$. **D.** $15,7$.

Lời giải

Chọn C



Gọi thiết diện của hình nón và mặt phẳng qua đỉnh S của hình nón là tam giác SAB

Từ giả thiết suy ra tam giác SAB vuông cân tại S và có cạnh huyền $AB = 4\sqrt{3}$

$\Rightarrow SA = SB = 2\sqrt{6}; SM = \frac{AB}{2} = 2\sqrt{3}$

Gọi M là trung điểm của AB. Khi đó góc giữa mặt phẳng (SAB) và đáy là $\alpha = SMO$

Xét tam giác vuông $SMO: \cos\alpha = \dfrac{MO}{SM} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{MO}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow MO = 2$

Suy ra bán kính đường tròn đáy của hình nón là $r = OA = \sqrt{OM^2 + AM^2} = \sqrt{4+12} = 4$
(với O là tâm đường tròn đáy của hình nón)

Chiều cao của hình nón là $h = SO = \sqrt{SM^2 - MO^2} = \sqrt{12-4} = 2\sqrt{2}$

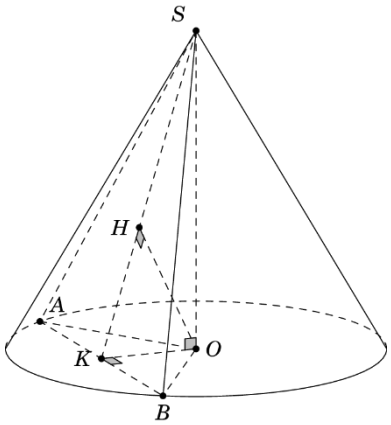
$\Rightarrow$ Thể tích khối nón đã cho là $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2.h = \dfrac{1}{3}\pi.16.2\sqrt{2} \approx 47,4$.

Câu 44: Cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0 được thiết diện là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng 4. Tính thể tích của khối nón ban đầu.

A. $V = \dfrac{10\sqrt{3}\pi}{3}$. **B.** $V = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{3}\pi}{3}$. **D.** $V = \dfrac{5\sqrt{3}\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Giả sử hình nón đỉnh (S) tâm O, thiết diện qua đỉnh ở giả thiết là tam giác vuông cân SAB.

Gọi K là trung điểm của AB, suy ra góc giữa (SAB) và mặt đáy là $SKO = 60°$.

Ta có $AB = 4 \Rightarrow SK = \dfrac{1}{2}AB = 2$ và $SA = SB = 2\sqrt{2}$.

Tam giác SKO vuông tại $O: SO = SK.\tan SKO = \sqrt{3}$.

Tam giác SAO vuông tại $O: AO = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{5}$.

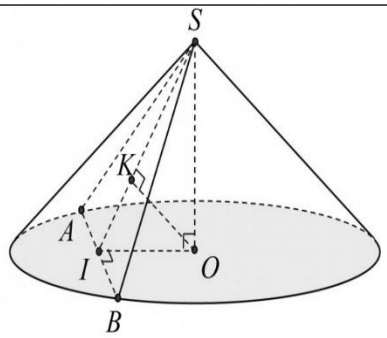
Thể tích khối nón $V = \dfrac{1}{3}\pi.AO^2.SO = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}\pi$.

Câu 45: Cho hình nón có thiết diện đi qua đỉnh là tam giác SAB vuông tại S,(A, B thuộc đường tròn đáy). Biết tam giác SAB có bán kính đường tròn nội tiếp bằng $2\left(\sqrt{2}-1\right)$ đường cao SO tạo với mặt phẳng SAB một góc $30°$. Diện tích xung quanh của hình nón bằng:

A. $2\sqrt{10}\pi$ **B.** $2\sqrt{5}\pi$ **C.** $4\sqrt{10}\pi$ **D.** $\sqrt{15}\pi$

Lời giải

Chọn C



Ta có $S_{\Delta SAB} = p.2\left(\sqrt{2}-1\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2}.SA.SB = \frac{SA+SB+\sqrt{2}.SA}{2}.2\left(\sqrt{2}-1\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}l^2 = l\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right) \Leftrightarrow l = 2\sqrt{2} \Rightarrow AB = l\sqrt{2} = 4$.

Mặt khác gọi I là trung điểm của AB ta có $OSI = 30°$

$$\sin 30^0 = \frac{OI}{SI} = \frac{\sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}}}{\sqrt{l^2 - \frac{AB^2}{4}}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{R^2-4}}{\sqrt{8-4}} \Leftrightarrow \sqrt{R^2-4} = 1 \Leftrightarrow R^2 = 5 \Leftrightarrow R = \sqrt{5}$$

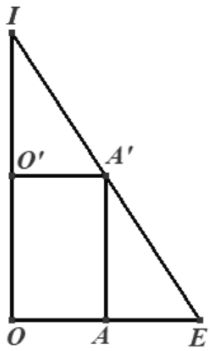
$\Rightarrow S_{xq} = \pi Rl = 2\sqrt{2}.\sqrt{5}\pi = 2\sqrt{10}\pi$.

Câu 46: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 4. Xét hình nón (N) có đáy nằm trên mặt phẳng $(ABCD)$ và mặt xung quanh đi qua bốn điểm A', B', C', D'. Khi bán kính đáy của (N) bằng $3\sqrt{2}$, diện tích xung quanh của (N) bằng

A. 72π. **B.** 54π. **C.** $36\sqrt{2}\pi$. **D.** 108π.

Lời giải

Chọn B



Gọi *I* là đỉnh của hình nón, *O* và O' lần lượt là tâm của các hình vuông $ABCD$, $A'B'C'D'$.
Ta thấy $I \in OO'$.
Gọi *E* là giao điểm của IA' với $(ABCD)$. Suy ra $A \in OE$.
(N) có bán kính *OE* và đường cao *IO*.

Ta có $\Delta IOE \sim \Delta IO'A' \Rightarrow \frac{IO'}{IO} = \frac{O'A'}{OE} \Leftrightarrow \frac{IO'}{IO'+OO'} = \frac{O'A'}{OE} \Leftrightarrow \frac{IO'}{IO'+4} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow IO' = 8$.

$\Rightarrow IO = 8+4 = 12$.

Do đó độ dài đường sinh của (N) bằng $IE = \sqrt{IO^2+OE^2} = \sqrt{12^2+18} = 9\sqrt{2}$.

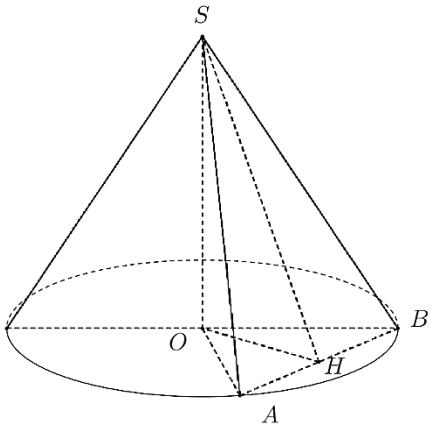
Vậy diện tích xung quanh của (N) là $S_{xq} = \pi.9\sqrt{2}.3\sqrt{2} = 54\pi$.

Câu 47: Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác vuông SAB có diện tích bằng $4a^2$. Góc giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng $30°$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $\sqrt{10}\pi a^2$. **B.** $4\sqrt{10}\pi a^2$. **C.** $2\sqrt{10}\pi a^2$. **D.** $8\sqrt{10}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: tam giác SAB vuông cân tại S.

Mà $S_{\Delta SAB} = 4a^2$, suy ra $SA = SB = 2a\sqrt{2}$, $AB = 4a$.

Gọi H là trung điểm của AB, suy ra $SH = \dfrac{1}{2}AB = 2a$.

Lại có: $(SO;(SAB)) = OSH = 30° \Rightarrow SO = SH.\cos 30° = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SOA vuông tại O, có: $OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = a\sqrt{5}$.

Vậy diện tích xung quanh của hình nón đã cho là

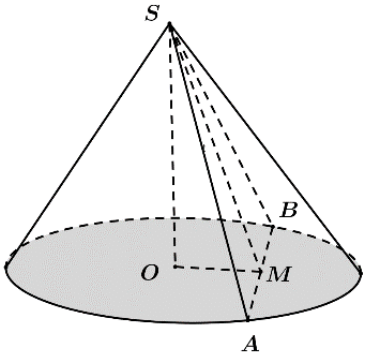
$S_{xq} = \pi rl = \pi.OA.SA = \pi.a\sqrt{5}.2a\sqrt{2} = 2\sqrt{10}\pi a^2$.

Câu 48: Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O. Một mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón và cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác đều SAB có diện tích bằng $4\sqrt{3}$. Góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng đáy bằng 45^0. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $10\sqrt{6}\pi$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{6}}{3}\pi$. **C.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{6}\pi$. **D.** $\dfrac{10\sqrt{6}}{3}\pi$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm AB, tam giác SAB đều nên

$S_{SAB} = AB^2 \dfrac{\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \Rightarrow AB = 4 \Rightarrow SM = AB\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

Ta có $\begin{cases} SM \perp AB \\ OM \perp AB \end{cases} \Rightarrow (SOM) \perp AB$.

$\begin{cases} (SOM) \cap (SAB) = SM \\ (SOM) \cap (AOB) = OM \end{cases} \Rightarrow \big((SAB),(AOB)\big) = (SM, OM) = SMO = 45^0$

$\Rightarrow \Delta SOM$ vuông cân tại O nên $SO = OM = \dfrac{SM}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$

Ta có $OA = \sqrt{OM^2 + AM^2} = \sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{10}$.

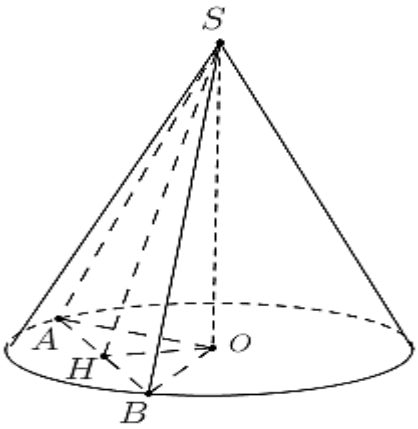
Thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3} SO.\pi.OA^2 = \dfrac{1}{3}\sqrt{6}.\pi.\left(\sqrt{10}\right)^2 = \dfrac{10\sqrt{6}}{3}\pi$.

Câu 49: Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, bán kính $R = 5$. Mặt phẳng (α) qua S, cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SAB có diện tích bằng $12\sqrt{2}$. Mặt phẳng (α) tạo với đáy hình nón góc 45^o; tam giác OAB nhọn. Thể tích V của khối nón tạo nên từ hình nón đã cho bằng

A. $V = 100\pi$. **B.** $V = 25\pi$ **C.** $V = \dfrac{100\pi}{3}$. **D.** $V = 75\pi$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $AB = 2x$. Do tam giác OAB nhọn nên $AB^2 < OA^2 + OB^2 \Rightarrow 4x^2 < 50 \Rightarrow x \in \left(0; \dfrac{5}{\sqrt{2}}\right)$.

Gọi H là trung điểm của AB. Khi đó: $AB \perp SO, AB \perp OH \Rightarrow AB \perp (SOH)$

$\Rightarrow \big((\alpha),(OAB)\big) = SHO = 45^o \Rightarrow SO = OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{25 - x^2}$;

$SH = OH\sqrt{2} = \sqrt{2\left(25 - x^2\right)}$.

Do đó: $S_{SAB} = \dfrac{1}{2} AB.SH = x\sqrt{2\left(25 - x^2\right)} = 12\sqrt{2} \Rightarrow x^4 - 25x^2 + 144 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3\,(tm) \\ x = 4\,(ktm) \end{array}\right.$

$\Rightarrow SO = \sqrt{25 - x^2} = 4$.

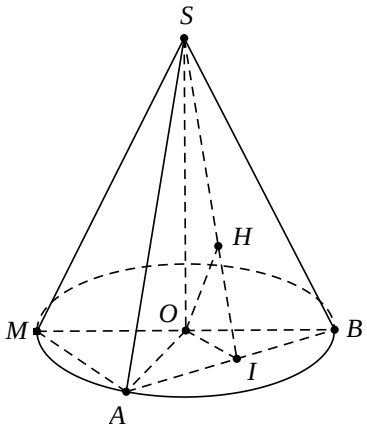
Vậy $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2.SO = \dfrac{100\pi}{3}$.

Câu 50: Cho khối nón đỉnh S có chiều cao bằng $6a$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho tam giác SAB vuông cân. Biết khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng $3a$, thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $150\pi a^3$. **B.** $96\pi a^3$. **C.** $108\pi a^3$. **D.** $120\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



Kẻ $OI \perp AB$ và $OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow d(O;(SAB)) = OH$.

Bài ra $d(O;(SAB)) = 3a \Rightarrow OH = 3a$.

Ta có ΔSOI vuông tại $O \Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OI^2} \Rightarrow \dfrac{1}{9a^2} = \dfrac{1}{36a^2} + \dfrac{1}{OI^2}$

$\Rightarrow OI = 2a\sqrt{3} \Rightarrow SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \sqrt{36a^2 + 12a^2} = 4a\sqrt{3}$.

Ta có ΔSAB luôn cân tại S.

Bài ra ΔSAB vuông cân nên ΔSAB vuông cân tại S

$\Rightarrow SI = \dfrac{1}{2}AB \Rightarrow AB = 2SI = 8a\sqrt{3} \Rightarrow IA = \dfrac{AB}{2} = 4a\sqrt{3}$

$\Rightarrow R = OA = \sqrt{OI^2 + IA^2} = 2a\sqrt{15} \Rightarrow V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi.\left(2a\sqrt{15}\right)^2.6a = 120\pi a^3$.

Dạng 2: Tính toán các yếu tố liên quan đến khối nón

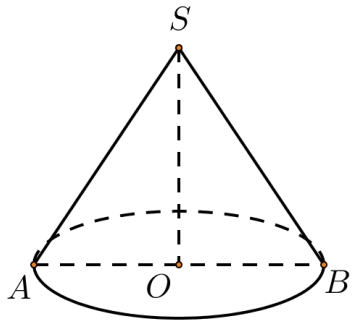
A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho khối nón (N) có chiều cao bằng $3a$. Biết một mặt phẳng đi qua trục và cắt (N) theo thiết diện là tam giác đều. Thể tích của khối nón (N) bằng

A. $3\pi a^3$. **B.** $9\pi a^3$. **C.** $\frac{3\pi a^3}{2}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1:

Giả sử tam giác SAB đều cạnh x

Xét tam giác vuông SAO có: $SO^2 = SA^2 - AO^2 = AB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = AB^2 - \frac{AB^2}{4} = \frac{3}{4}AB^2$

$\Rightarrow AB^2 = \frac{4}{3}SO^2 = \frac{4}{3}.(3a)^2 = 12a^2 \Rightarrow AB = \sqrt{12a^2} = 2\sqrt{3}a \Rightarrow r = a\sqrt{3}$

Vậy thể tích khối nón (N) là: $V = \frac{1}{3}\pi.r^2.h = \frac{1}{3}.\pi\left(a\sqrt{3}\right)^2.3a = 3\pi a^3.$

Cách 2: Giả sử tam giác SAB đều cạnh x.

Ta có: $SO = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{3}}{2} = 3a \Leftrightarrow x = 2a\sqrt{3}.$ Suy ra: $r = \frac{x}{2} = a\sqrt{3}.$

Vậy thể tích khối nón (N) là: $V = \frac{1}{3}\pi.r^2.h = \frac{1}{3}.\pi\left(a\sqrt{3}\right)^2.3a = 3\pi a^3.$

Câu 2: Cho hai khối nón (N_1), (N_2) có bán kính đáy, chiều cao và thể tích lần lượt là r_1, h_1, V_1 và r_2, h_2, V_2. Biết $\frac{r_1}{r_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{2}{3}$. Tính $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{27}$. **B.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{9}$. **C.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{27}$. **D.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Khối nón (N_1) có thể tích là $V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1$.

Khối nón (N_2) có thể tích là $V_2 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2$.

Do đó $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2}=\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\frac{h_1}{h_2}=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$.

Câu 3: Một hình nón có diện tích xung quanh bằng $20\pi cm^2$. Tính chiều cao của hình nón biết bán kính đáy bằng $r=4cm$.

A. $9\ cm$. **B.** $3\ cm$. **C.** $5\ cm$. **D.** $4\ cm$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $S_{xq}=\pi rl=\pi.4.l=20\pi\Rightarrow l=5$

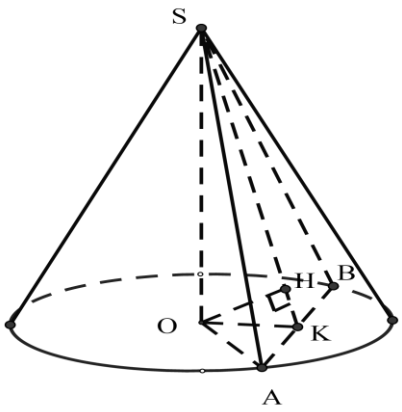
Do vậy, $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{25-16}=3(cm)$

Câu 4: Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $SAO=30^0, SAB=60^0$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** $2a\sqrt{3}$ **D.** $a\sqrt{5}$

Lời giải

Chọn A



Gọi K là trung điểm của AB ta có $OK\perp AB$ vì tam giác OAB cân tại O

Mà $SO\perp AB$ nên $AB\perp(SOK)\Rightarrow(SOK)\perp(SAB)$ mà $\Rightarrow(SOK)\cap(SAB)=SK$ nên từ O dựng $OH\perp SK$ thì $OH\perp(SAB)\Rightarrow OH=d(O,(SAB))$

Xét tam giác SAO ta có: $\sin SAO=\frac{SO}{SA}\Rightarrow SO=\frac{SA}{2}$

Xét tam giác SAB ta có: $\sin SAB=\frac{SK}{SA}\Rightarrow SK=\frac{SA\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác SOK ta có: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OK^2}+\frac{1}{OS^2}=\frac{1}{SK^2-SO^2}+\frac{1}{SO^2}$

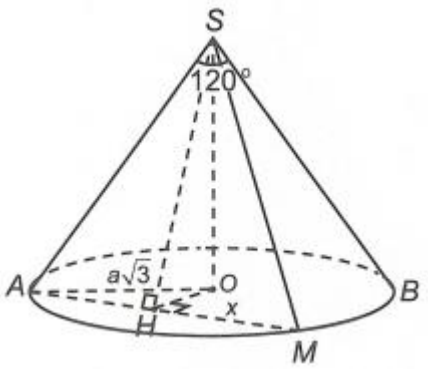
$\Rightarrow\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{\frac{SA^2}{4}}+\frac{1}{\frac{3SA^2}{4}-\frac{SA^2}{4}}=\frac{4}{SA^2}+\frac{2}{SA^2}\Rightarrow\frac{6}{SA^2}=\frac{3}{a^2}\Rightarrow SA=2a^2\Rightarrow SA=a\sqrt{2}$

Câu 5: Một hình nón đỉnh S bán kính đáy $R=a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là $120°$. Mặt phẳng qua đỉnh hình nón cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác**.** Diện tích lớn nhất của tam giác đó bằng

A. $\sqrt{3}a^2$. **B.** $2a^2$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$. **D.** $2\sqrt{3}a^2$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử ΔSAM là thiết diện tạo bởi mặt phẳng và hình nón. Gọi $AM = x\left(0 < x \le 2a\sqrt{3}\right)$.

Gọi H là trung điểm của $AM \Rightarrow OH \perp AM \Rightarrow AM \perp (SOH) \Rightarrow AM \perp SH$.

Vì $ASB = 120° \Rightarrow ASO = 60° \Rightarrow \begin{cases} SA = \dfrac{AO}{\sin 60°} = 2a \\ SO = \dfrac{AO}{\tan 60°} = a \end{cases}$.

$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{3a^2 - \dfrac{x^2}{4}} \Rightarrow SH = \sqrt{OH^2 + SO^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{x^2}{4}}$.

$S_{\Delta SAM} = \dfrac{1}{2}AM.SH = \dfrac{1}{2}x\sqrt{4a^2 - \dfrac{x^2}{4}} \le \dfrac{\dfrac{x^2}{4} + 4a^2 - \dfrac{x^2}{4}}{2}$.

$S_{\Delta SAM} \le 2a^2$

Vậy $S_{\max} = 2a^2$, đẳng thức xảy ra khi $x = 2a\sqrt{2}$.

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Một hình nón có bán kính đáy $r=5$, chiều cao $h=4$. Độ dài đường sinh của hình nón là

A. $l=3\sqrt{2}.$ **B.** $l=3.$ **C.** $l=\sqrt{41}.$ **D.** $l=9.$

Lời giải

Chọn C

Độ dài đường sinh của hình nón là $l=\sqrt{h^2+r^2}=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$.

Câu 2: Hình nón có góc ở đỉnh bằng 60^o và chiều cao bằng $\sqrt{3}$. Độ dài đường sinh của hình nón bằng

A. $l=2$. **B.** $l=2\sqrt{2}$. **C.** $l=2\sqrt{3}$. **D.** $l=3$.

Lời giải

Ta có $\cos 30^o=\dfrac{h}{l}\Rightarrow l=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 30^o}=2$.

Câu 3: Một hình nón có diện tích xung quang bằng 40π và bán kính đáy $r=5$ thì có độ dài đường sinh bằng

A. 4. **B.** 4π. **C.** 8. **D.** 8π

Lời giải

Ta có $S_{xq}=\pi rl\Rightarrow 40\pi=\pi rl\Rightarrow l=8$.

Câu 4: Một hình nón có chiều cao $h=6,$ bán kính đáy $R=8.$ Độ dài đường sinh của khối nón đó bằng

A. 10. **B.** 9. **C.** 100. **D.** 14.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $l=\sqrt{R^2+h^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10.$

Câu 5: Cho hình nón có độ dài đường sinh bằng 4, diện tích xung quanh bằng 8π, tính bán kính đáy R hình tròn của hình nón đó:

A. $R=1$. **B.** $R=2$. **C.** $R=4$. **D.** $R=8$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $S_{xq}=\pi.R.l\Rightarrow R=\dfrac{S_{xq}}{\pi.l}=\dfrac{8\pi}{4\pi}=2.$

Câu 6: Cho hình nón có bán kính đáy bằng a và chiều cao bằng $\sqrt{3}a$. Độ dài đường sinh của hình nón đã cho là

A. $4a$. **B.** $2a$. **C.** $\sqrt{10}a$. **D.** $\sqrt{2}a$.

Lời giải

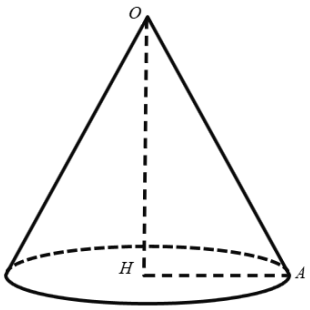
Chọn B

Độ dài đường sinh của hình nón đã cho là $l=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{a^2+\left(\sqrt{3}a\right)^2}=2a$.

Câu 7: Hình nón có góc ở đỉnh bằng $60°$ và chiều cao bằng $\sqrt{3}$. Độ dài đường sinh của hình nón bằng

A. 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** 3.

Lời giải



Ta có góc ở đỉnh của hình nón bằng $60°$ nên $HOA = 30°$.

Trong tam giác HAO vuông tại H có $OA = \dfrac{OH}{\cos 30°} = 2$.

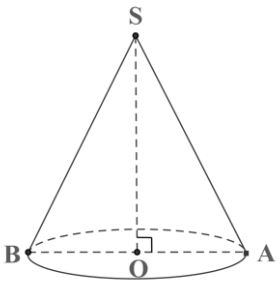
Vậy độ dài đường sinh của hình nón bằng 2.

Câu 8: Hình nón có góc ở đỉnh bằng $120°$ và bán kính đáy bằng 3 thì có đường sinh bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** 6. **D.** $3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $ASO = \dfrac{ASB}{2} = \dfrac{120°}{2} = 60°$ và $R = OA = 3$.

Đường sinh của hình nón là: $l = SA = \dfrac{OA}{\sin 60°} = 3 : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Câu 9: Cho khối nón có bán kính đáy $r = \sqrt{2}$, thể tích $V = 6\pi$. Chiều cao của khối nón đã cho bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có $V = \dfrac{1}{3}S_d.h \Rightarrow h = \dfrac{3V}{S_d} = \dfrac{3V}{\pi.r^2} = \dfrac{3.6\pi}{\pi.\left(\sqrt{2}\right)^2} = 9$.

Câu 10: Cho khối nón có chiều cao $h = 3$, thể tích $V = 9\pi$. Bán kính đáy của khối nón đã cho bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** 3. **D. 9.**

Lời giải

Chọn C

Ta có: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h \Leftrightarrow r^2 = \dfrac{3V}{\pi h} = \dfrac{3.9\pi}{\pi.3} = 9 \Rightarrow r = 3$.

Câu 11: Cho hình nón đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O và thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$. Chiều cao h của khối nón là

A. $h=a$. **B.** $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $h=\dfrac{a}{2}$. **D.** $h=\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Chiều cao h của khối nón chính là chiều cao của tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$.

Do đó $h=\dfrac{a\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3a}{2}$.

Câu 12: Cho hình trụ có diện tích xung quanh bằng $18\pi a^2$ và độ dài đường cao bằng a. Tính bán kính R của đường tròn đáy của hình trụ đã cho theo a.

A. $R=3a$. **B.** $R=9a$. **C.** $R=6\text{a}$. **D.** $R=18a$.

Lời giải

Chọn B

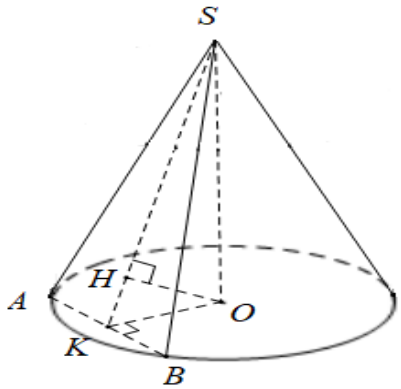
Ta có $S_{xq}=2\pi Rh\Rightarrow R=\dfrac{S_{xq}}{2\pi h}=9a$.

Câu 13: Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến mặt (SAB) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $SAO=30^0$, $SAB=60^0$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng

A. $2a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{5}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C.



Gọi K là trung điểm của AB $\Rightarrow (SOK)\perp (SAB)$ nên trong (SOK), kẻ $OH\perp SK$ (với $H\in SK$) thì $d\left(O;(SAB)\right)=OH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ta có, tam giác SAB đều nên $SK=SA\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và lại có $SO=SA.\sin SAO=\dfrac{SA}{2}$.

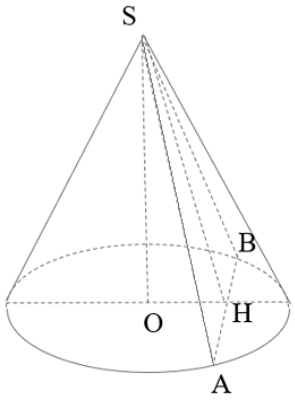
Xét tam giác SOK vuông tại O có

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OK^2}\Rightarrow\frac{6}{SA^2}=\frac{1}{OH^2}\Rightarrow SA=a\sqrt{2}\Rightarrow l=a\sqrt{2}.$$

Câu 14: Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh S, và tạo với trục của (N) một góc $30°$, ta được thiết diện là tam giác SAB vuông và có diện tích bằng $4a^2$. Chiều cao của hình nón bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $2a\sqrt{2}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải



Ta có $(SO;(SAB)) = OSH = 30°$ mà $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}SA^2 = 4a^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{8}$

Mà $AB^2 = 2SA^2 = 16a^2 \Rightarrow AB = 4a$. Tam giác SAB vuông cân tại S nên $SH = \frac{1}{2}AB = 2a$

Xét tam giác SOH ta có $SO = SH \cdot \cos 30° = a\sqrt{3}$.

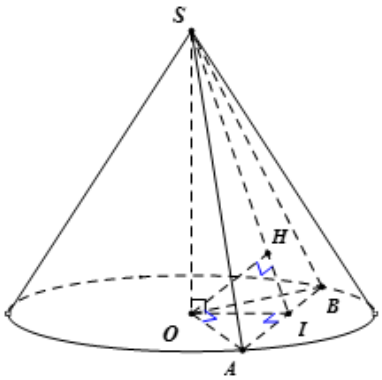
Vậy đường cao của hình nón là $SO = a\sqrt{3}$.

Câu 15: Cho hình nón có chiều cao bằng 6, đường kính đáy bằng 20. Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón và có khoảng cách từ tâm đến mặt phẳng chứa thiết diện là $4{,}8$. Tính diện tích S của thiết diện đó.

A. $S = 160\sqrt{3}$. **B.** $S = 80\sqrt{3}$. **C.** $S = 120$. **D.** $S = 60$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm AB, O là tâm của đáy hình nón, H là hình chiếu của O lên SI.



Ta có: $\begin{cases} SO \perp AB \\ OI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SIO) \Rightarrow AB \perp OH$.

Ta lại có: $\begin{cases} AB \perp OH \\ SI \perp OH \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow d(O,(SAB)) = OH = 4{,}8$; $SO = 6$, $OA = \frac{20}{2} = 10$.

ΔSIO vuông tại O, có đường cao OH: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow OI = \sqrt{\frac{SO^2.OH^2}{SO^2 - OH^2}} = 8$.

Ta có: $SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = 10$ và ΔOIA vuông tại I: $IA = \sqrt{OA^2 - OI^2} = 6 \Rightarrow AB = 2IA = 12$.

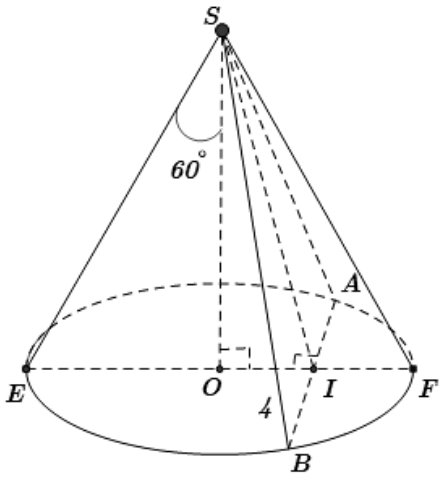
Suy ra $S_{SAB}=\frac{1}{2}.SI.AB=60$. Vậy diện tích thiết diện cần tìm bằng 60.

Câu 16: Cho khối nón (N) có đỉnh S, tâm đường tròn đáy là O, góc ở đỉnh bằng $120°$. Một mặt phẳng (P) đi qua S, cắt hình nón (N) theo thiết diện là tam giác vuông SAB. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng 4. Tính thể tích V của khối nón (N).

A. $V=192\pi$. **B.** $V=128\pi$. **C.** $V=96\pi$. **D.** $V=64\pi$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm AB $\Rightarrow\begin{cases}OI\perp SO\\OI\perp AB\end{cases}\Rightarrow d(SO,AB)=OI=4$.

Đặt $OE=R\Rightarrow\begin{cases}SO=\frac{R\sqrt{3}}{3}\\SE=\frac{2R\sqrt{3}}{3}\end{cases}\Rightarrow SI=\sqrt{SO^2+OI^2}=\sqrt{\frac{R^2}{3}+16}$.

Mặt khác $AB=2AI=2\sqrt{AO^2-OI^2}=2\sqrt{R^2-16}$.

Vì ΔSAB vuông tại S nên $SI=\frac{1}{2}AB\Leftrightarrow\sqrt{\frac{R^2}{3}+16}=\sqrt{R^2-16}\Leftrightarrow R^2=48\Leftrightarrow R=4\sqrt{3}$.

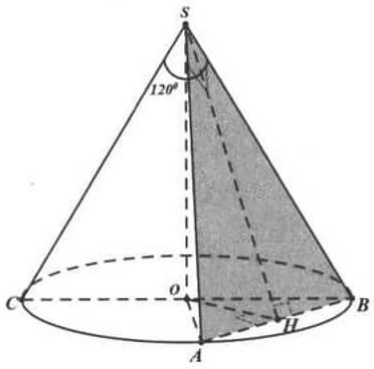
$\Rightarrow h=SO=4$. Vậy $V=\frac{1}{3}\pi R^2.h=\frac{1}{3}\pi.48.4=64\pi$.

Câu 17: Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, góc ở đỉnh của hình nón là $\varphi=120°$. Cắt hình nón bởi mặt phẳng đi qua đỉnh S được thiết diện là tam giác vuông SAB, trong đó A,B thuộc đường tròn đáy. Biết rằng khoảng cách giữa SO và AB bằng 3. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

A. $36\sqrt{3}\pi$. **B.** $18\sqrt{3}\pi$. **C.** $27\sqrt{3}\pi$. **D.** $9\sqrt{3}\pi$.

Lời giải

Chọn B



Kẻ $OH \perp AB \Rightarrow d\left(AB;SO\right)=OH=3$.

Tam giác SAB vuông cân tại S. Gọi r là bán kính đường tròn đáy của hình nón.

Đường sinh $l=SB=\dfrac{OB}{\sin OSB}=\dfrac{r}{\sin 60°}=\dfrac{2r\sqrt{3}}{3}\Rightarrow BH=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{SB\sqrt{2}}{2}=\dfrac{r\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác OBH vuông tại H.

Ta có: $OH^2+BH^2=OB^2\Leftrightarrow 9+\dfrac{6r^2}{9}=r^2\Leftrightarrow r=3\sqrt{3}\Rightarrow l=\dfrac{2r\sqrt{3}}{3}=6$.

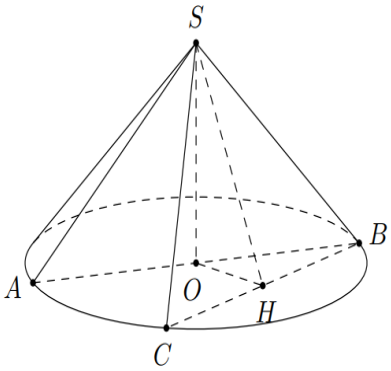
Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón là: $S_{xq}=\pi rl=\pi.3\sqrt{3}.6=18\pi\sqrt{3}$.

Câu 18: Cắt hình nón $\left(N\right)$ đỉnh S cho trước bởi mặt phẳng qua trục của nó, ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2a\sqrt{2}$. Biết BC là một dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng $\left(SBC\right)$ tạo với mặt phẳng đáy nón một góc 60^0. Tính diện tích tam giác SBC.

A. $\dfrac{2a^2\sqrt{2}}{9}$. **B.** $\dfrac{4a^2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{4a^2\sqrt{2}}{9}$. **D.** $\dfrac{2a^2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi thiết diện là tam giác vuông SAB, khi đó $AB=2a\sqrt{2}$ nên hình nón có bán kính $r=a\sqrt{2}$ và chiều cao $SO=a\sqrt{2}$.

Gọi H là hình chiếu của O trên BC.

Khi đó $BC\perp\left(SOH\right)$ nên $SHO=\left(\left(SBC\right),\left(ABC\right)\right)=60°$.

Suy ra $OH=SO.\cot 60°=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, do đó $BC=2BH=2\sqrt{OB^2-OH^2}=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

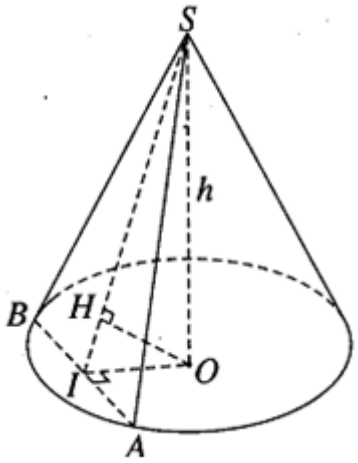
Lại có $SH=\dfrac{SO}{\sin 60°}=\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$ nên $S_{\Delta SBC}=\dfrac{1}{2}.BC.SH=\dfrac{2a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 19: Cho khối nón tròn xoay có đường cao $h = 20$ cm, bán kính đáy $r = 25$cm. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của khối nón và cách tâm O của đáy khối nón một khoảng bằng 12cm. Khi đó diện tích thiết điện của khối nón cắt bởi mặt phẳng (P) bằng:

A. 500cm^2. **B.** 475cm^2. **C.** 450cm^2. **D.** 550cm^2.

Lời giải

Chọn A



Gọi S là đỉnh của khối nón. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S cắt khối nón theo hai đường sinh bằng nhau là $SA = SB$ nên ta có thiết diện là tam giác cân SAB.

Gọi I là trung điêm của đoạn AB, ta có $OI \perp AB$. Từ tâm O của đáy ta kẻ $OH \perp SI$ tại H, ta có $OH \perp (SAB)$ và do đó theo giả thiết ta có $OH = 12\text{cm}$. Xét tam giác vuông SOI

ta có: $\dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{OH^2} - \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{12^2} - \dfrac{1}{20^2} \Rightarrow OI = 15(\text{cm}).$

Mặt khác, xét tam giác vuông SOI ta còn có: $OS.OI = SI.OH$

$\Rightarrow SI = \dfrac{OS.OI}{OH} = \dfrac{20.15}{12} = 25(\text{cm}).$

Gọi S_t là diện tích của thiết diện tam giác SAB. Ta có: $S_t = \dfrac{1}{2}AB.SI$, trong đó

$AB = 2AI$. Vì $AI^2 = OA^2 - OI^2 = 25^2 - 15^2 = 20^2$ nên $AI = 20\text{cm}$ và $AB = 40\text{cm}$.

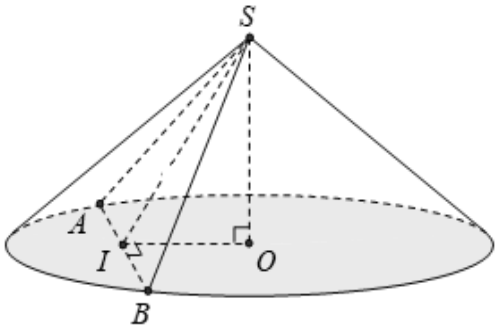
Vậy thiết diện SAB có diện tích là: $S_t = \dfrac{1}{2} \cdot 40 \cdot 25 = 500\left(\text{cm}^2\right).$

Câu 20: Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng $60°$ ta thu được thiết diện là một tam giác đều cạnh $4a$. Diện tích xung quanh của (N) bằng

A. $8\sqrt{7}\pi a^2$. **B.** $4\sqrt{13}\pi a^2$. **C.** $8\sqrt{13}\pi a^2$. **D.** $4\sqrt{7}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Theo đề bào ta có độ dài đường sinh của hình nón là $l = SA = 4a$.

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow OI \perp AB$, mà $SO \perp AB$ nên góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt đáy hình nón là góc (SO, OI) và bằng SIO.

Theo đề bài $SIO = 60°$, mà tam giác SAB là tam giác đều cạnh $4a$ nên $SI = \dfrac{4a\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}$.

Ta có $\cos SIO = \dfrac{IO}{SI} \Rightarrow IO = SI\cos 60° = 2a\sqrt{3}.\dfrac{1}{2} = a\sqrt{3}$.

Mà $IB = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{4a}{2} = 2a$ nên bán kính đáy hình nón là $R = OB = \sqrt{IO^2 + IB^2} = \sqrt{3a^2 + 4a^2} = a\sqrt{7}$.

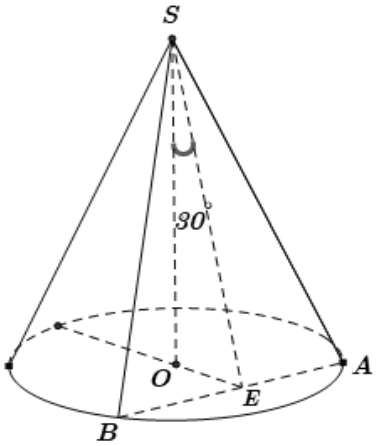
Vậy diện tích xung quanh hình nón (N) bằng $S = \pi Rl = \pi a\sqrt{7}.4a = 4\pi a^2\sqrt{7}$.

Câu 21: Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với trục của (N) một góc bằng $30°$, ta được là thiết diện là tam giác SAB vuông và có diện tích bằng $4a^2$. Chiều cao của hình nón bằng.

A. $2a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $2a\sqrt{2}$. **D.** $a\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn B



Gọi S là đỉnh của hình nón (N) và O là chân đường cao kẻ tử S lên mặt đáy

Ta có $(SO,(SAB)) = \angle OSE = 30° \Rightarrow SE = \dfrac{SO}{\cos 30°} = \dfrac{2SO}{\sqrt{3}}$.

Mặt khác ΔSAB vuông cân tại S nên $S_{\Delta SAB} = SE^2 = 4a^2 \Leftrightarrow \dfrac{4}{3}.SO^2 = 4a^2 \Rightarrow SO = a\sqrt{3}$.

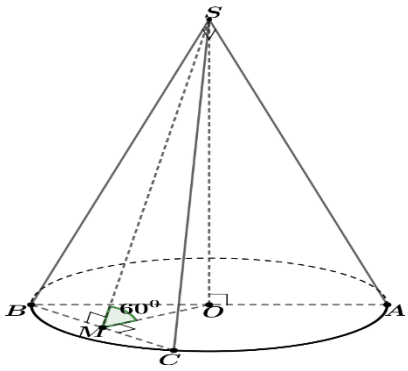
Câu 22: Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng qua trục của nó ta được một tam giác vuông cân có cạnh

huyền bằng $a\sqrt{2}$. Gọi BC là dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy một góc bằng $60°$. Tính diện tích tam giác SBC.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}a^2$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$. **D.** $\frac{a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn B.



Giả sử thiết diện là tam giác SAB.

Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow SMO = 60°$.

ΔSAB vuông cân tại $S \Rightarrow SO = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tính được $SM = \frac{SO}{\sin 60°} = \frac{a\sqrt{6}}{3}, OM = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ và $BC = 2MB = 2\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

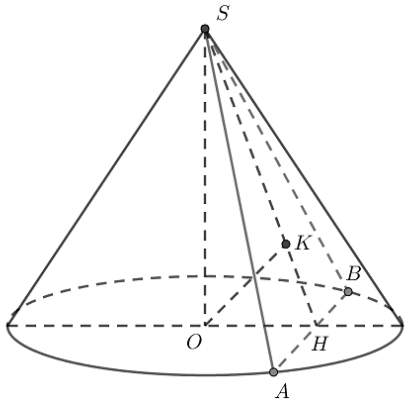
Diện tích tam giác SBC là $S = \frac{1}{2}SM.BC = \frac{\sqrt{2}a^2}{3}$.

Câu 23: Cho hình nón có chiều cao và bán kính đáy đều bằng 1. Mặt phẳng (P) qua đỉnh của hình nón và cắt đáy theo dây cung có độ dài bằng 1. Khoảng cách từ tâm của đáy tới mặt phẳng (P) bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\frac{\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi thiết diện qua đỉnh là tam giác vuông cân SAB và gọi H là trung điểm AB.

Kẻ $OK \perp SH \Rightarrow d(O,(SAB)) = OK$

Ta có $SO = 1;\ OA = 1;\ AB = 1 \Rightarrow HA = \frac{1}{2}$.

Trong tam giác AHO có $OH=\sqrt{OA^2-HA^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác SOH có $\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OH^2}=1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}\Rightarrow OK^2=\frac{3}{7}\Rightarrow OK=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

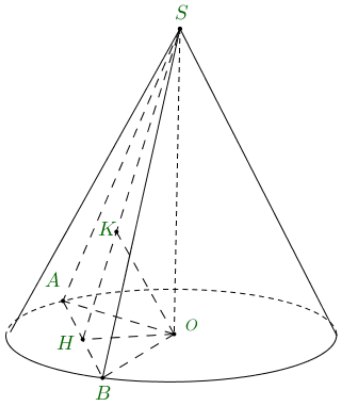
Vậy $d\left(O,\left(SAB\right)\right)=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 24: Cho hình nón có chiều cao và bán kính đáy đều bằng a. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón và cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng a. Khoảng cách từ tâm của đáy tới mặt phẳng (P) bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}a$. **C.** $\frac{\sqrt{7}}{7}a$. **D.** $\frac{\sqrt{21}}{7}a$.

Lời giải

Chọn D



Giả sử hình nón đã cho có đỉnh là S, tâm của đáy là O và (P) cắt đường tròn đáy theo dây cung AB.

Gọi H là trung điểm của đoạn AB và K là hình chiếu của O trên SH.

Ta có: $AB\perp SO,OH\Rightarrow AB\perp\left(SOH\right)\Rightarrow AB\perp OK$, mà $OK\perp SH\Rightarrow OK\perp\left(SAB\right)$ $\Rightarrow d\left(O,\left(P\right)\right)=OK$.

Xét tam giác vuông SOH có $OH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$(do tam giác OAB đều có cạnh bằng a), $SO=a$.

Suy ra: $OK=\frac{OS.OH}{\sqrt{OS^2+OH^2}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

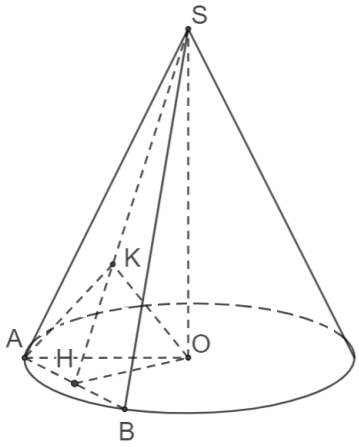
Vậy $d\left(O,\left(P\right)\right)=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 25: Cho hình nón $\left(N\right)$ có đỉnh S và đáy là đường tròn tâm $\left(O\right)$, bán kính R, chiều cao $2R$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh và cắt đường tròn đáy theo dây cung AB có độ dài bằng bán kính. Tính sin của góc tạo bởi OA và mặt phẳng $\left(SAB\right)$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{2\sqrt{57}}{19}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{57}}{19}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $SO \perp AB$, kẻ $OH \perp AB \Rightarrow AB \perp (SOH) \Rightarrow (SAB) \perp (SOH), (SAB) \cap (SOH) = SH$.

Kẻ $OK \perp SH \Rightarrow OK \perp (SAB) \Rightarrow (OA,(SAB)) = (OA, AK) = OAK$.

Ta có $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R \Rightarrow OK = \dfrac{SO.OH}{\sqrt{SO^2 + OH^2}} = 2\sqrt{\dfrac{3}{19}}R$.

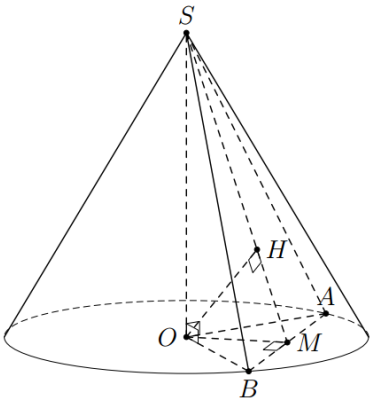
$\sin OAK = \dfrac{OK}{OA} = \dfrac{2\sqrt{57}}{19}$.

Câu 26: Cho khối nón đỉnh S, tâm mặt đáy O và có thể tích bằng $12\pi a^3$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB = 2a$ và góc $AOB = 60°$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\dfrac{9\sqrt{7}}{14}a$. **B.** $\dfrac{18\sqrt{85}}{85}a$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{7}}{14}a$. **D.** $\dfrac{6\sqrt{85}}{85}a$.

Lời giải

Chọn A



Vì tam giác OAB đều nên bán kính đường tròn đáy $r = AB = 2a$.

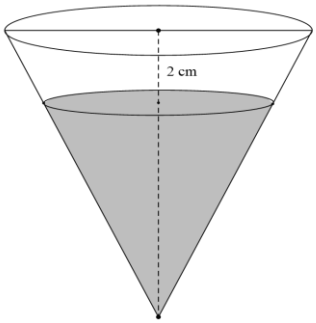
$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = 12\pi a^3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\pi(2a)^2 h = 12a^3\pi \Leftrightarrow h = 9a$.

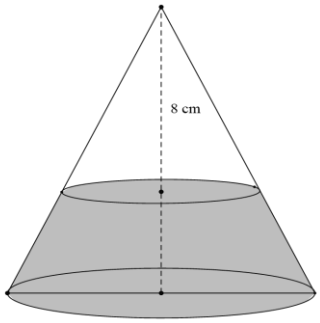
Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Khi đó $AB \perp (SOM)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên SM. Suy ra $OH \perp (SAB)$ hay $d(O,(SAB)) = OH$.

Ta có $OM = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2a.\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Suy ra $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{OS^2}\Leftrightarrow\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2}+\frac{1}{\left(9a\right)^2}\Leftrightarrow OH=\frac{9\sqrt{7}}{14}a$.

Câu 27: Một dụng cụ hình nón bằng thủy tinh, bên trong có chứa một lượng nước. Khi đặt dụng cụ sao cho đỉnh hình nón hướng xuống dưới theo chiều thẳng đứng thì phần không gian trống trong dụng cụ có chiều cao 2 cm. Khi lật ngược dụng cụ để đỉnh hướng lên trên theo chiều thẳng đứng thì mực nước cao cách đỉnh của nón 8 cm (hình vẽ minh họa bên dưới).





Biết chiều cao của nón là $h=a+\sqrt{b}$ cm. Tính $T=a+b$.

A. 22. **B.** 58. **C.** 86. **D.** 72.

Lời giải

Chọn C

Gọi r, h, V lần lượt là bán kính, chiều cao, thể tích của hình nón và V_1 là thể tích nước ở hình 1 và V_2 là thể tích của hình nón không có nước trong hình 2.

Ở hình vẽ 1, gọi r_1, h_1 là bán kính và chiều cao của phần nước hình nón, khi đó:

$$\frac{V_1}{V}=\frac{h_1\pi r_1^2}{h\pi r^2}=\frac{h_1}{h}\frac{r_1^2}{r^2}=\left(\frac{h_1}{h}\right)^3=\left(1-\frac{2}{h}\right)^3.$$

Ở hình vẽ 2, gọi r_2, h_2 là bán kính và chiều cao của hình nón không có nước, khi đó:

$$\frac{V_2}{V}=\frac{h_2\pi r_2^2}{h\pi r^2}=\frac{h_2}{h}\frac{r_2^2}{r^2}=\left(\frac{h_2}{h}\right)^3=\left(\frac{8}{h}\right)^3.$$

Cộng theo vế, ta có:

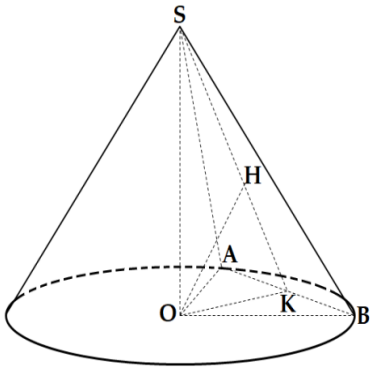
$$\frac{V_1}{V}+\frac{V_2}{V}=\left(1-\frac{2}{h}\right)^3+\left(\frac{8}{h}\right)^3\Leftrightarrow h^3=\left(h-2\right)^3+8^3\Leftrightarrow -6h^2+12h+504=0\Rightarrow h=1+\sqrt{85}.$$

Câu 28: Cho khối nón có đỉnh S, chiều cao bằng 8 và thể tích bằng $\frac{800\pi}{3}$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB=12$, khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng $\left(SAB\right)$ bằng

A. $8\sqrt{2}$. **B.** $\frac{24}{5}$. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $\frac{5}{24}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O, R lần lượt là tâm và bán kính đáy của khối nón, K, H lần lượt là hình chiếu của O lên AB, SK. Khi đó khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt phẳng (SAB) bằng OH.

Ta có: $V=\frac{1}{3}\pi R^2.h \Rightarrow R^2=\frac{3V}{\pi.h}=\frac{3.\frac{800\pi}{3}}{\pi.8}=100 \Rightarrow R=10$

Trong tam giác vuông OBK có: $OK=\sqrt{OB^2-BK^2}=\sqrt{R^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$.

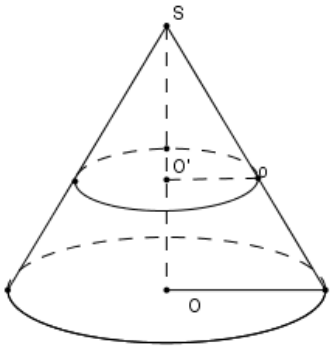
Trong tam giác vuông SOK có: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{8^2}+\frac{1}{8^2}=\frac{2}{8^2} \Rightarrow OH=4\sqrt{2}$.

Câu 29: Cho hình nón N_1 đỉnh S đáy là đường tròn $C(O;R)$, đường cao $SO=40cm$. Người ta cắt hình nón bằng mặt phẳng vuông góc với trục để được hình nón nhỏ N_2 có đỉnh S và đáy là đường tròn $C'(O';R')$. Biết rằng tỷ số thể tích $\frac{V_{N_2}}{V_{N_1}}=\frac{1}{8}$. Độ dài đường cao của hình nón N_2 là

A. 10 cm. **B.** 20 cm. **C.** $5cm$. **D.** 49 cm.

Lời giải

Chọn B



Từ giả thiết ta có $\frac{SO'}{SO}=\frac{R'}{R}=k \Rightarrow \frac{V_{N_2}}{V_{N_1}}=\frac{\frac{1}{3}\pi R'^2.SO'}{\frac{1}{3}\pi R^2.SO}=\frac{R'^2.SO'}{R^2.SO}=k^3 \Rightarrow k^3=\frac{1}{8} \Leftrightarrow k=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow SO'=\frac{1}{2}SO=20\ cm$.

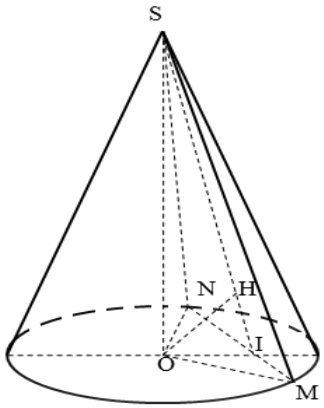
Câu 30: Cho khối nón có bán kính đáy bằng $\sqrt{3}a$. Gọi M, N là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $MN=2a$. Biết thể tích của khối nón là $\sqrt{2}\pi a^3$, khoảng cách từ tâm của đường tròn đáy đến mặt

phẳng (SMN) là

A. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **B.** $2a$. **C.** a. **D.** $\sqrt{3}a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi r,h lần lượt là bán kính đường tròn đáy và đường cao của khối nón.

Theo giả thiết ta có $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow \pi a^2 h=\sqrt{2}\pi a^3 \Rightarrow SO=h=\sqrt{2}a$.

Gọi I là trung điểm của MN. O là tâm của đường tròn đáy.

ΔOMN cân tại O, I là trung điểm của MN nên $OI\perp MN \Rightarrow OI=\sqrt{OM^2-IM^2}=a\sqrt{2}$.

Khi đó, ta có $IO\perp MN, SO\perp MN \Rightarrow MN\perp(SIO)$.

Kẻ $OH\perp SI$ tại H, có $MN\perp(SIO)\Rightarrow MN\perp OH$ mà $OH\perp SI\Rightarrow OH\perp(SMN)$ tại H.

$\Rightarrow d\left(O,(SMN)\right)=OH=\frac{SO.OI}{\sqrt{SO^2+OI^2}}=a$.

Câu 31: Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh S và tạo với trục của (N) một góc bằng 30°, ta được thiết diện là tam giác SAB vuông và có diện tích bằng $4a^2$. Chiều cao của hình nón bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $2a\sqrt{2}$. **D.** $2a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

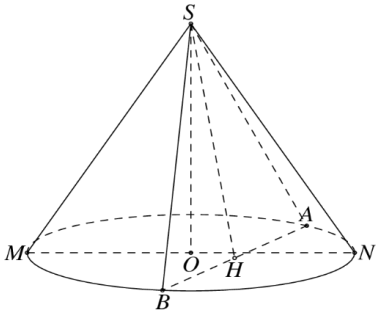
Gọi H là trung điểm AB, h là chiều cao của hình nón.

Khi đó, góc giữa trục SO và (SAB) bằng góc $OSH=30^\circ$. Khi đó ta có

$SH=\frac{SO}{\cos OSH}=\frac{2h}{\sqrt{3}}$.

Theo giả thiết ta có tam giác SAB vuông cân tại S, do đó $AB=2SH=\frac{4h}{\sqrt{3}}$.

Diện tích tam giác SAB bằng $4a^2$, suy ra $\frac{1}{2}\cdot SH\cdot AB=4a^2\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{2h}{\sqrt{3}}\cdot\frac{4h}{\sqrt{3}}=4a^2\Rightarrow h=a\sqrt{3}$.

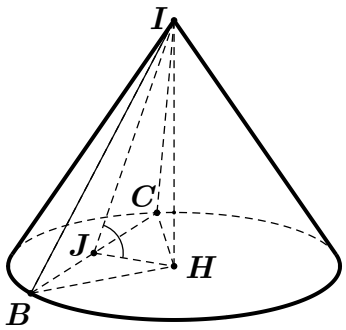


Câu 32: Cắt hình nón đỉnh I bởi một mặt phẳng đi qua trục hình nón ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$; BC là dây cung của đường tròn đáy sao cho mặt phẳng (IBC) tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc $60°$. Tính theo a diện tích S của tam giác IBC.

A. $S=\dfrac{\sqrt{2}a^2}{6}$. **B.** $S=\dfrac{a^2}{3}$. **C.** $S=\dfrac{\sqrt{2}a^2}{3}$. **D.** $S=\dfrac{2a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi r, h, l lần lượt là bán kính đáy, chiều cao và đường sinh của hình nón đã cho.

Vì cắt hình nón đỉnh I bởi một mặt phẳng đi qua trục hình nón ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$ nên $\begin{cases}2r=a\sqrt{2}\Rightarrow r=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\\ l=\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=a\end{cases}\Rightarrow h=\sqrt{l^2-r^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi H là tâm của đường tròn đáy và J là trung điểm của BC.

Ta có $\begin{cases}BC\perp IH\\ BC\perp HJ\end{cases}\Rightarrow BC\perp(IHJ)$.

Suy ra góc giữa mặt phẳng (IBC) với mặt phẳng chứa đáy hình nón là góc $IJH=60°$

Ta có $JI=\dfrac{IH}{\sin 60°}=\dfrac{h}{\sin 60°}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow BJ=\sqrt{l^2-JI^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow BC=2BJ=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $S=\dfrac{1}{2}.JI.BC=\dfrac{\sqrt{2}a^2}{3}$.

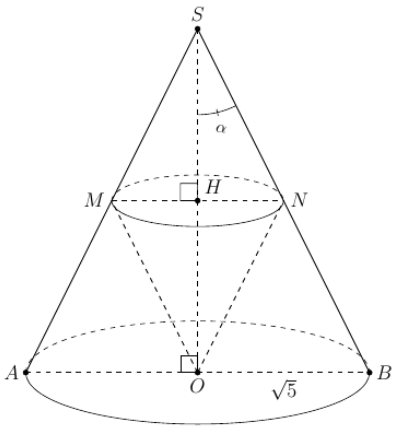
Câu 33: Cho một hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O, bán kính $R=\sqrt{5}$ và góc ở đỉnh là 2α với $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$. Một mặt phẳng (P) vuông góc với SO tại H và cắt hình nón theo một đường tròn tâm H. Gọi V là thể tích của khối nón đỉnh O và đáy là đường tròn tâm H. Biết $V=\dfrac{50\pi}{81}$

khi $SH=\dfrac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $T=3a^2-2b^3$.

A. 12. **B.** 23. **C.** 21. **D.** 32.

Lời giải

Chọn C



Trong ΔSOB vuông tại O ta có $OSB=\alpha$ với $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\dfrac{4}{9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Suy ra $\tan\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow\dfrac{HN}{SH}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow HN=\dfrac{2.SH}{\sqrt{5}}$.

Mặt khác $\sin\alpha=\dfrac{HN}{SN}=\dfrac{OB}{SB}\Rightarrow SB=\dfrac{OB}{\sin\alpha}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$;

Trong ΔSOB vuông tại O ta có $SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=\sqrt{\dfrac{45}{4}-5}=\dfrac{5}{2}$.

Theo bài ta có thể tích khối nón đỉnh O và đáy là đường tròn tâm H là

$$V=\frac{50\pi}{81}\Leftrightarrow\frac{1}{3}.OH.\pi.HN^2=\frac{50\pi}{81}\Leftrightarrow OH.HN^2=\frac{50}{27}\Leftrightarrow(SO-SH).\frac{4SH^2}{5}=\frac{50}{27}$$

$$\Leftrightarrow(5-2.SH)SH^2=\frac{125}{27}\Leftrightarrow 54SH^3-135SH^2+125=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}SH=\dfrac{5}{3}\\ SH=-\dfrac{5}{6}\ (loai)\end{array}\right.$$

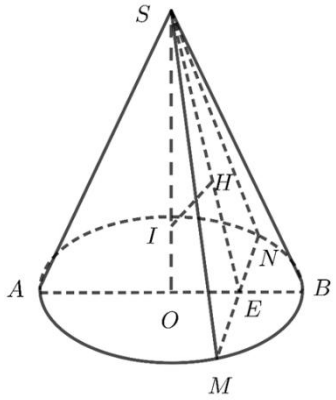
Suy ra $a=5;b=3$. Vậy $T=3a^2-2b^3=3.25-2.27=21$.

Câu 34: Cho hình nón đỉnh S có góc ở đỉnh bằng 60^0 và có độ dài đường sinh $l=12cm$. Gọi AB là một đường kính cố định của đáy hình nón. MN là một dây cung thay đổi của đường tròn đáy và luôn vuông góc với AB. Biết rằng tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác SMN luôn thuộc một đường tròn (C) cố định. Tính bán kính của đường tròn (C)

A. $6\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là trung điểm của đường kính AB, I tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB.
Do SAB cố định $\Rightarrow I$ cố định.

Tam giác SAB cân có góc $ASB = 60^0 \Rightarrow \Delta SAB$ đều. $\Rightarrow SI = \frac{2}{3}SO = \frac{2}{3}.12.\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

Gọi $MN \cap AB \equiv E \Rightarrow OE \perp MN$, E là trung điểm MN,
Lại có ΔSMN cân $\Rightarrow SE \perp MN \Rightarrow (SAB) \perp MN \Rightarrow (SAB) \perp (SMN)$.

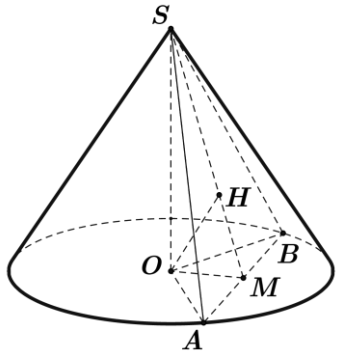
Có SO là trục của đường tròn đáy, $I \in SO$, I tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB
$\Rightarrow IS = IA = IB = IM = IN$
Kẻ $IH \perp SE \Rightarrow IH \perp (SMN)$ vì $(SMN) \perp (SAB), (SMN) \cap (SAB) \equiv SE$
Khi đó: H - tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SMN.
H luôn nhìn 2 điểm cố định S, I dưới 1 góc vuông. Vậy quỹ tích điểm H là đường tròn (C) nhận SI là đường kính trong mặt phẳng $(SAB) \Rightarrow R = \frac{SI}{2} = 2\sqrt{3}$.

Câu 35: Cho hình nón đỉnh S đáy là hình tròn tâm O, SA, SB là hai đường sinh. Biết $SO = 3$, khoảng cách từ O đến (SAB) là 1 và diện tích ΔSAB là 18. Tính bán kính đáy của hình nón trên.

A. $\frac{\sqrt{674}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{530}}{4}$. **C.** $\frac{9\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{23}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm AB, kẻ $OH \perp SM$ tại H, suy ra $OH \perp (SAB)$, nên $OH = d(O;(SAB)) = 1$.

Đặt $a = OM$ và gọi r là bán kính hình tròn đáy của hình nón đã cho.
Ta có:
$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} \Rightarrow \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} = \frac{8}{9}$. Suy ra $OM = \frac{3}{\sqrt{8}}$.

Từ đó: $SM=\sqrt{SO^2+OM^2}=\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)^2}=\frac{9}{\sqrt{8}}$. $AB=2MA=2\sqrt{r^2-OM^2}=2\sqrt{r^2-\frac{9}{8}}$.

Bởi vậy: $S_{\Delta SAB}=18\Leftrightarrow\frac{1}{2}.AB.SM=18\Leftrightarrow\frac{1}{2}.2\sqrt{r^2-\frac{9}{8}}.\frac{9}{\sqrt{8}}=18$

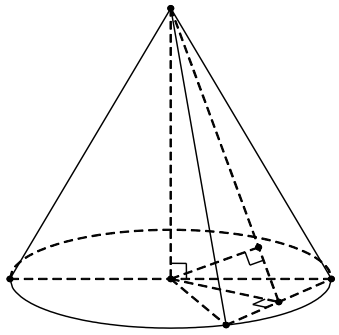
$\Leftrightarrow\sqrt{r^2-\frac{9}{8}}=4\sqrt{2}\Leftrightarrow r^2=\frac{265}{8}\Leftrightarrow r=\frac{\sqrt{530}}{4}$.

Câu 36: Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh S và tạo với trục của (N) một góc bằng $30°$, ta được thiết diện là tam giác SAB vuông và có diện tích bằng $4a^2$. Chiều cao của hình nón bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $2a\sqrt{2}$. **D.** $2a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Theo giả thiết ta có tam giác *SAB* vuông cân tại *S*.

Gọi *E* là trung điểm *A**B***. Khi đó $SE\perp AB$ và $SE=\frac{1}{2}AB$.

Ta có $S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}.AB.SE=4a^2\Leftrightarrow\frac{1}{2}AB.\frac{1}{2}AB=4a^2\Rightarrow AB=4a\Rightarrow SE=2a$.

Gọi *H* là hình chiếu của *O* trên *SE*.

Ta có $\begin{cases}AB\perp OE\\AB\perp SO\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SOE)\Rightarrow AB\perp OH$.

Suy ra $OH\perp(SAB)$.

Do đó $(SO,(SAB))=(SO,SH)=OSH=OSE=30°$.

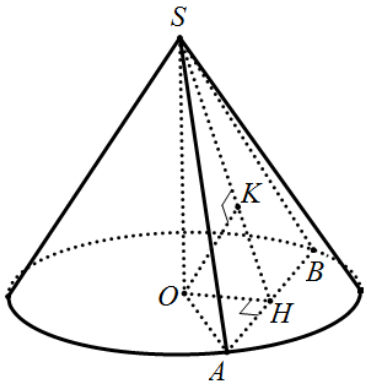
Tam giác vuông *SOE* có $SO=SE.\cos OSE=a\sqrt{3}$.

Câu 37: Cho khối nón tròn xoay có đường cao $h=5a$ và bán kính đáy $r=4a$. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của khối nón và có khoảng cách đến tâm O của đáy bằng $3a$. Diện tích thiết diện tạo bởi (P) và hình nón là

A. $\frac{25\sqrt{31}}{16}a^2$. **B.** $\frac{5\sqrt{31}}{8}a^2$. **C.** $\frac{5\sqrt{41}}{16}a^2$. **D.** $\frac{25\sqrt{41}}{32}a^2$.

Lời giải

Chọn A



Thiết diện tạo bởi (P) và hình nón là ΔSAB.

Gọi H là trung điểm AB.

Từ O kẻ $OK \perp SH$. Ta có: $\begin{cases} AB \perp OH \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOH) \Rightarrow AB \perp OK$.

$\Rightarrow \begin{cases} OK \perp SH \\ OK \perp AB \end{cases} \Rightarrow OK \perp (SAB) \Rightarrow d(O;(SAB)) = OK = 3a$

ΔSOH vuông tại H: $\dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OH^2} \Rightarrow OH = \dfrac{OK.OS}{\sqrt{OS^2 - OK^2}} = \dfrac{3a.5a}{\sqrt{(5a)^2 - (3a)^2}} = \dfrac{15}{4}a$.

$\Rightarrow SH = \sqrt{SO^2 + OH^2} = \sqrt{(5a)^2 + \left(\dfrac{15}{4}a\right)^2} = \dfrac{25}{4}a$.

ΔOAH vuông tại $H \Rightarrow AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{(4a)^2 - \left(\dfrac{15}{4}a\right)^2} = \dfrac{\sqrt{31}}{4}a \Rightarrow AB = \dfrac{\sqrt{31}}{2}a$.

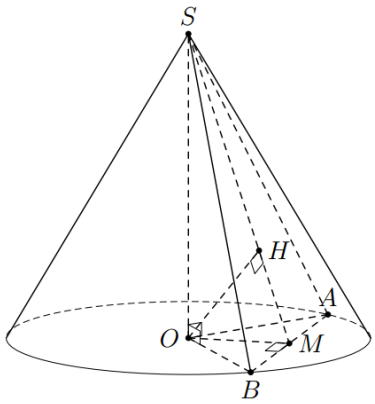
Vậy $S_{SAB} = \dfrac{1}{2}SH.AB = \dfrac{1}{2}.\dfrac{25}{4}a.\dfrac{\sqrt{31}}{2}a = \dfrac{25\sqrt{31}}{16}a^2$.

Câu 38: Cho khối nón đỉnh S, tâm mặt đáy O và có thể tích bằng $12\pi a^3$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho $AB = 2a$ và góc $AOB = 60°$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\dfrac{9\sqrt{7}}{14}a$. **B.** $\dfrac{18\sqrt{85}}{85}a$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{7}}{14}a$. **D.** $\dfrac{6\sqrt{85}}{85}a$.

Lời giải

Chọn A



Vì tam giác OAB đều nên bán kính đường tròn đáy $r = AB = 2a$.

$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=12\pi a^3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi(2a)^2 h=12a^3\pi \Leftrightarrow h=9a$.

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Khi đó $AB\perp(SOM)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên SM. Suy ra $OH\perp(SAB)$ hay $d(O,(SAB))=OH$.

Ta có $OM=\frac{AB\sqrt{3}}{2}=\frac{2a.\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

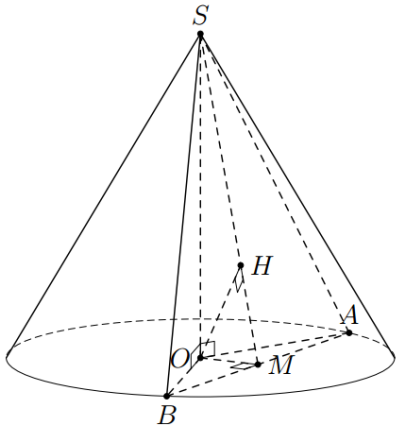
Suy ra $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{OS^2}\Leftrightarrow\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2}+\frac{1}{(9a)^2}\Leftrightarrow OH=\frac{9\sqrt{7}}{14}a$.

Câu 39: Cho hình nón đỉnh S, tâm mặt đáy O và có diện tích xung quanh bằng $20\pi a^2$. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho độ dài cung AB bằng $\frac{1}{3}$ lần chu vi của đường tròn đáy. Biết rằng bán kính đáy bằng $4a$, khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\frac{2\sqrt{13}}{13}a$. **B.** $\frac{\sqrt{13}}{13}a$. **C.** $\frac{12\sqrt{13}}{13}a$. **D.** $\frac{6\sqrt{13}}{13}a$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $S_{xq}=\pi rl=20\pi a^2\Leftrightarrow\pi.4a.l=20\pi a^2\Leftrightarrow l=5a$.

$SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{(5a)^2-(4a)^2}=3a$.

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Khi đó $AB\perp(SOM)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên SM. Suy ra $OH\perp(SAB)$ hay $d(O,(SAB))=OH$.

Vì độ dài cung AB bằng $\frac{1}{3}$ lần chu vi của đường tròn đáy nên góc $AOB=120^\circ\Rightarrow MOB=60^\circ$

Ta có $\cos MOB=\frac{OM}{OB}\Rightarrow OM=OB.\cos MOB=4a.\cos 60^\circ=2a$.

Suy ra $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OM^2}+\frac{1}{OS^2}\Leftrightarrow\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{(2a)^2}+\frac{1}{(3a)^2}\Leftrightarrow OH=\frac{6\sqrt{13}}{13}a$.

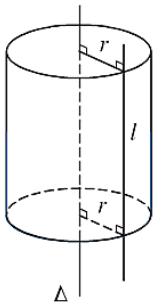
CHƯƠNG 4

MẶT NÓN, MẶT TRỤ MẶT CẦU

CHỦ ĐỀ 10 MẶT TRỤ TRÒN XOAY VÀ KHỐI TRỤ

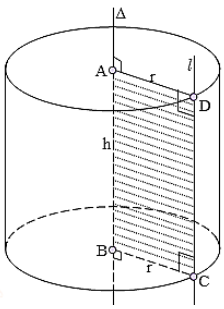
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Mặt trụ



- Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và l song song với nhau, cách nhau một khoảng r Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh đường thẳng Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay hay gọi tắt là mặt trụ. Trong đó:
  - Đường thẳng Δ gọi là trục
  - Đường thẳng l gọi là đường sinh
  - r là bán kính của mặt trụ đó

2. Hình trụ tròn xoay và khối trụ tròn xoay



- Khối trụ tròn xoay hay khối trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ tròn xoay đó.
- Mặt đáy, đường sinh, chiều cao, bán kính của một hình trụ cũng là mặt đáy, đuowngf sinh, chiều cao, bán kính của khối trụ tương ứng.
- Cho hình trụ có chiều cao h, đường sinh l, bán kính đáy r. Khi đó ta có các công thức sau:
  - Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi.r.l$
  - Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 2\pi.r.l + 2\pi.r^2$
  - Thể tích của khối trụ: $V = \pi.r^2.h$

Dạng 1: Tính S_{xq} và S_{tp} của khối trụ. Thể tích khối trụ

- Cho hình trụ có chiều cao h, đường sinh l, bán kính đáy r. Khi đó ta có các công thức sau:
  - Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi.r.l$
  - Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 2\pi.r.l + 2\pi.r^2$
  - Thể tích của khối trụ: $V = \pi.r^2.h$

B VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Một hình trụ có bán kính đáy bằng a, chu vi thiết diện qua trục bằng $10a$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng.

A. πa^3. **B.** $3\pi a^3$. **C.** $5\pi a^3$. **D.** $4\pi a^3$.

Lời giải

Chọn B

Thiết diện qua trục là một hình chữ nhật có độ dài tương ứng là $2r$ và h (r, h tương ứng là bán kính đáy và chiều cao của trụ).

Do đó $2(2r+h) = 10 \Rightarrow h = 3a$.

Vậy thể tích của khối trụ đã cho là: $V = \pi r^2 h = 3\pi a^3$.

Câu 2: Cắt một khối trụ có chiều cao 5 dm bởi một mặt phẳng vuông góc với trục ta được hai khối trụ mới có tổng diện tích toàn phần nhiều hơn diện tích toàn phần của khối trụ ban đầu là 18 dm^2. Tổng diện tích toàn phần của hai khối trụ mới bằng

A. 51π dm^2. **B.** 66π dm^2. **C.** 144π dm^2. **D.** 48π dm^2.

Lời giải

Chọn B

Tổng diện tích toàn phần của hai khối trụ mới S'_{tp}.

Diện tích toàn phần của khối trụ ban đầu S_{tp}.

Diện tích đáy của hình trụ là $S_{đ}$.

Ta có $S'_{tp} = S_{tp} + 2S_{đ}$.

$\Leftrightarrow 2S_{đ} = S'_{tp} - S_{tp} = 18\pi \ (\text{dm}^2) \Leftrightarrow S_{đ} = \dfrac{18\pi}{2} = 9\pi \ (\text{dm}^2) \Leftrightarrow \pi R^2 = 9\pi \Leftrightarrow R = 3 \ (\text{dm}).$

Diện tích toàn phần của khối trụ ban đầu là

$S_{tp} = 2\pi R(R+h) = 2\pi \cdot 3(3+5) = 48\pi \ (\text{dm}^2)$

Tổng diện tích toàn phần của hai khối trụ mới là

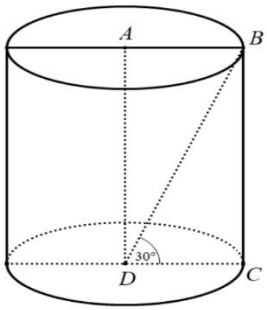
$S'_{tp} = 48\pi + 18\pi = 66\pi \ (\text{dm}^2).$

Câu 3: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a\sqrt{3}$ và góc $BDC = 30^o$. Quay hình chữ nhật này xung quanh cạnh AD. Thể tích của khối trụ là:

A. $3\pi a^3$. **B.** $2\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** πa^3. **D.** $9\pi a^3$.

Lời giải

Chọn A



Khi quay hình chữ nhật này xung quanh cạnh AD ta được hình trụ như hình vẽ trên.

Ta có: $R = AB = a\sqrt{3}; h = AD = AB.\tan 30^o = \text{a}$.

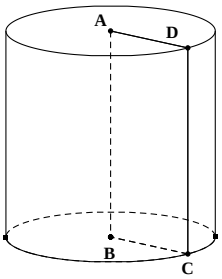
Suy ra $\Rightarrow V_{khoi\,tru} = h.\pi R^2 = a.\pi.\left(a\sqrt{3}\right)^2 = 3\pi a^3$

Câu 4: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 10cm$, cạnh $BC = 6cm$. Biết rằng khi quay hình chữ nhật $ABCD$ một vòng xung quanh cạnh AB cố định ta được một hình trụ. Tính diện tích xung quanh hình trụ được tạo thành.

A. $S_{xq} = 90\pi\left(cm^2\right)$. **B.** $S_{xq} = 100\pi\left(cm^2\right)$. **C.** $S_{xq} = 110\pi\left(cm^2\right)$. **D.** $S_{xq} = 120\pi\left(cm^2\right)$.

Lời giải

Chọn D



Do hình trụ được tạo thành bằng cách quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh AB cố định nên ta có AB là chiều cao, BC là bán kính đáy.

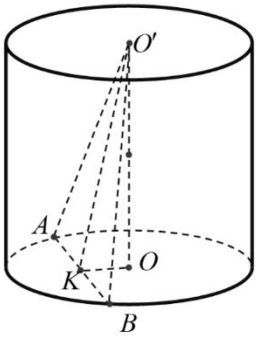
Diện tích xung quanh hình trụ $S_{xq} = 2\pi R.h = 2.\pi.10.6 = 120\pi\left(cm^2\right)$.

Câu 5: Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), bán kính đáy $r = 3$. Biết AB một dây cung của đường tròn (O) sao cho tam giác $O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn (O) một góc $60°$. Tính thể tích của khối trụ đã cho.

A. $V = \dfrac{9\sqrt{7}\pi}{7}$. **B.** $V = \dfrac{81\sqrt{7}\pi}{7}$. **C.** $V = \dfrac{81\pi}{7}$. **D.** $V = 81\sqrt{7}\pi$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $AB = 2x$

Gọi K là trung điểm AB. Ta có : $AB \perp OK$ và $AB \perp OO'$ nên góc giữa mặt phẳng $(O'AB)$ và mặt phẳng chứa đường tròn (O) là OKO'. $OKO' = 60° \Rightarrow O'K = 2OK \Rightarrow O'K^2 = 4OK^2$

$\Rightarrow 3x^2 = 4\left(r^2 - x^2\right) \Rightarrow x^2 = \dfrac{4r^2}{7}$.

Mặt khác : $OO'^2 = O'B^2 - OB^2 = 4x^2 - r^2 = 4.\dfrac{4r^2}{7} - r^2 = \dfrac{9r^2}{7} \Rightarrow O'O = \dfrac{3\sqrt{7}r}{7} = \dfrac{9\sqrt{7}}{7}$.

Vậy thể tích khối trụ đã cho là : $V = \pi r^2 h = \dfrac{81\sqrt{7}\pi}{7}$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Một hình trụ có bán kính đáy bằng a, chu vi thiết diện qua trục bằng $10a$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. πa^3. **B.** $3\pi a^3$. **C.** $4\pi a^3$. **D.** $5\pi a^3$.

Lời giải

Chọn B

Chu vi thiết diện qua trục là $P = 2(h+2r) = 2(h+2a) = 10a \Leftrightarrow h = 3a$

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi.a^2.3a = 3\pi a^3$.

Câu 2: Gọi l, h, R lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính của hình trụ (T). Diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ được xác định theo công thức

A. $S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2$. **B.** $S_{tp} = 2\pi Rl + 2\pi R^2$.

C. $S_{tp} = \pi Rl + 2\pi R^2$. **D.** $S_{tp} = \pi Rh + \pi R^2$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ được xác định theo công thức $S_{tp} = 2\pi Rl + 2\pi R^2$

Câu 3: Cho hình trụ có bán kính $r = 3$ và độ dài đường sinh $l = 5$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 30π. **B.** 15π. **C.** 45π. **D.** 24π.

Lời giải

Chọn A

Diện tích xung quanh của hình trụ $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi.3.5 = 30\pi$.

Câu 4: Cho khối lăng trụ có diện tích đáy là $5a^2$ và chiều cao $3a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $30a^3$. **B.** $15a^2$. **C.** $15a^3$. **D.** $5a^3$.

Lời giải

Chọn C

Thể tích khối lăng trụ: $V = B.h = 5a^2.3a = 15a^3$.

Câu 5: Cho khối trụ có bán kính đáy $r = 3$ và chiều cao $h = 5$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 30π. **B.** 15π. **C.** 5π. **D.** 45π.

Lời giải

Chọn D

Thể tích của khối trụ: $V = \pi.r^2.h = \pi.3^2.5 = 45\pi$

Câu 6: Cho hình nón có độ dài đường sinh bằng a và bán kính đáy bằng R. Tính thể tích của khối trụ đã cho.

A. $\frac{1}{3}\pi aR^2$. **B.** πaR^2. **C.** aR^2. **D.** $2\pi aR^2$.

Lời giải

Chọn C

Thể tích của khối trụ là $V=\frac{1}{3}\pi R^2.h=\frac{1}{3}\pi R^2.a$

Câu 7: Cho hình trụ có chiều cao h và bán kính đáy bằng r. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ được tính bởi công thức

A. $S_{xq}=\pi rh$. **B.** $S_{xq}=2\pi rh$. **C.** $S_{xq}=\frac{1}{3}\pi rh$. **D.** $S_{xq}=\pi r^2h$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ là $S_{xq}=2\pi rh$.

Câu 8: Cho hình trụ có thiết diện đi qua trục là một hình vuông có cạnh bằng $4a$. Diện tích xung quanh của hình trụ là

A. $S=4\pi a^2$ **B.** $S=8\pi a^2$ **C.** $S=24\pi a^2$ **D.** $S=16\pi a^2$

Lời giải

Chọn D

Vì thiết diện đi qua trục là một hình vuông có cạnh bằng $4a$, nên bán kính đường tròn đáy $r=2a$ và độ dài đường sinh là $l=4a$, suy ra diện tích xung quanh là $S=2\pi rl=2\pi.2a.4a=16\pi a^2$.

Câu 9: Cho hình trụ có thiết diện đi qua trục là một hình vuông có cạnh bằng $4a$. Diện tích xung quanh của hình trụ là

A. $S=4\pi a^2$ **B.** $S=8\pi a^2$ **C.** $S=24\pi a^2$ **D.** $S=16\pi a^2$

Lời giải

Vì thiết diện đi qua trục là một hình vuông có cạnh bằng $4a$, nên bán kính đường tròn đáy $r=2a$ và độ dài đường sinh là $l=4a$, suy ra diện tích xung quanh là $S=2\pi rl=2\pi.2a.4a=16\pi a^2$.

Câu 10: Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng *S*, diện tích đáy bằng diện tích một mặt cầu có bán kính a. Khi đó thể tích của khối trụ tính theo *S* và a là

A. Sa. **B.** $\frac{1}{2}Sa$. **C.** $\frac{1}{3}Sa$. **D.** $\frac{1}{4}Sa$.

Lời giải

Chọn A

Gọi r là bán kính đáy của hình trụ, h là chiều cao của hình trụ.

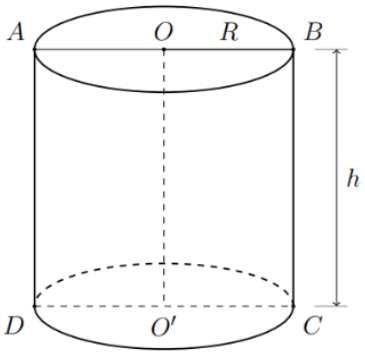
Theo bài ra ta có: $\begin{cases}S=2\pi rh\\ \pi r^2=4\pi a^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}r=2a\\ h=\dfrac{S}{4\pi a}\end{cases}\Rightarrow V=\pi r^2h=Sa$.

Câu 11: Cho khối trụ (T), cắt khối trụ (T) bằng mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $2\sqrt{3}a$. Tính thể tích của khối trụ đã cho.

A. $V=2\sqrt{3}\pi a^3$ **B.** $V=9\sqrt{3}\pi a^3$ **C.** $V=6\sqrt{3}\pi a^3$ **D.** $V=3\sqrt{3}\pi a^3$

Lời giải

Chọn C



Vì $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng $2\sqrt{3}a \Rightarrow R = \dfrac{2\sqrt{3}a}{2} = \sqrt{3}a$.

Suy ra: $S_{\text{đáy}} = \pi R^2 = \pi\left(\sqrt{3}a\right)^2 = 3a^2\pi$.

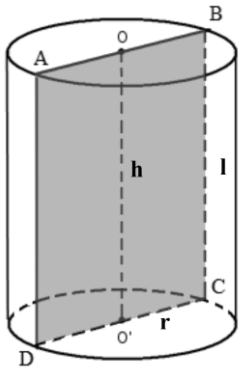
Thể tích khối trụ bằng: $V = 3a^2\pi.2\sqrt{3}a = 6\sqrt{3}a^3\pi$

Câu 12: Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng qua trục, ta được thiết diện là một hình vuông có chu vi là 8. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 4π. **B.** $\dfrac{2}{3}\pi$. **C.** 2π. **D.** 8π.

Lời giải

Chọn A



Thiết diện thu được là hình vuông $ABCD$, nên $l = 2r = \dfrac{8}{4} = 2$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi.1.2 = 4\pi$.

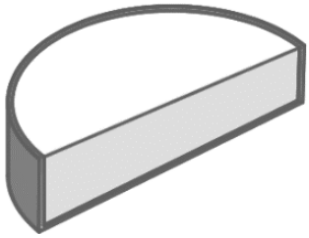
Câu 13: Diện tích xung quanh của hình trụ có chiều cao bằng $3a$ và bán kính đáy bằng a là

A. $3\pi a^2$ **B.** $9\pi a^2$ **C.** $12\pi a^2$ **D.** $6\pi a^2$

Lời giải

+Ta có $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi a.3a = 6\pi a^2$.

Câu 14: Thể tích của miếng Piza dạng nửa hình trụ có đường kính đáy là 18cm và chiều cao 3cm là



A. 243cm^3. **B.** $81\pi\,\text{cm}^3$. **C.** $\dfrac{243\pi}{2}\text{cm}^3$. **D.** $972\pi\,\text{cm}^3$.

Lời giải

Ta có thể tích miếng Piza là $V=\frac{1}{2}\pi.3.\left(\frac{18}{2}\right)^2=\frac{243\pi}{2}\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 15: Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2$, $AD=1$. Quay hình chữ nhật đó xung quanh cạnh AB, ta được một hình trụ. Diên tích xung quanh của hình trụ là

A. 2π. **B.** $\frac{2\pi}{3}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** 4π.

Lời giải

Chọn D

Quay hình chữ nhật quanh cạnh AB ta được một khối trụ có chiều cao $h=AB$ và bán kính đáy là $r=AD$.

Khi đó diện tích xung quanh của khối trụ là $S=2\pi rh=2.\pi.1.2=4\pi$.

Câu 16: Cho khối trụ (T), cắt khối trụ (T) bằng mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết điện là hình vuông cạnh bằng $2a\sqrt{3}$. Thể tích của khối trụ đã cho là

A. $V=6\sqrt{3}\pi a^3$ **B.** $V=9\sqrt{3}\pi a^3$ **C.** $V=2\sqrt{3}\pi a^3$ **D.** $V=3\sqrt{3}\pi a^3$

Lời giải

Cắt khối trụ (T) bằng mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết điện là hình vuông cạnh bằng $2a\sqrt{3}\Rightarrow h=2a\sqrt{3},\ r=a\sqrt{3}$.

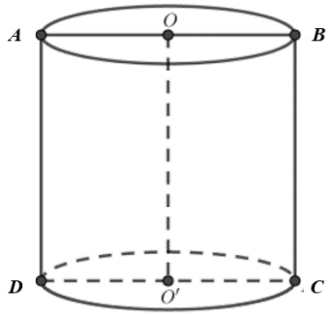
Thể tích của khối trụ đã cho là: $V=\pi r^2h=\pi.(a\sqrt{3})^2.2\sqrt{3}a=6\sqrt{3}\pi a^3$.

Câu 17: Cho hình trụ (T) có thiết diện cắt bởi mặt phẳng chứa đường cao là hình vuông có diện tích bằng $4a^2$. Thể tích khối trụ (T) bằng:

A. $2\pi a^3$. **B.** $8\pi a^3$. **C.** $3\pi a^3$. **D.** πa^3.

Lời giải

Chọn A



Gọi thiết diện cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng chứa đường cao là hình vuông $ABCD$.

Ta có $ABCD$ là hình vuông diện tích bằng $4a^2\Rightarrow\begin{cases}OB=R=a\\OO'=h=2a\end{cases}$.

Vậy thể tích của khối trụ $V_{(T)}=\pi R^2h=\pi a^2.2a=2\pi a^3$.

Câu 18: Một hình trụ có chiều cao bằng 3 và chu vi đáy bằng 4π. Tính thể tích khối trụ đó.

A. 12π. **B.** 40π. **C.** 18π. **D.** 10π.

Lời giải

Chọn A

Gọi r là bán kính đáy của hình trụ đã cho.

Chu vi đáy bằng $4\pi \Rightarrow 2\pi r = 4\pi \Rightarrow r = 2$.

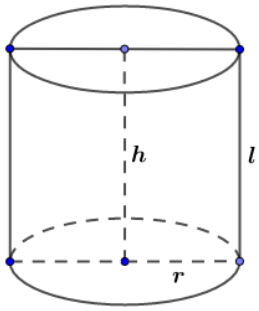
Vậy thể tích của khối trụ đã cho là $V = \pi r^2 h = 12\pi$.

Câu 19: Cắt khối trụ (T) bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh bằng 4. Thể tích của khối trụ (T) bằng

A. 8π. **B.** 16π. **C.** 32π. **D.** 64π.

Lời giải

Chọn B



Khối trụ (T) có $h = 4, r = 2$.

Ta có $V = \pi r^2 h = \pi 2^2.4 = 16\pi$.

Câu 20: Cắt hình trụ (T) bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh bằng 4. Diện tích xung quanh của hình trụ (T) bằng

A. 4π. **B.** 8π. **C.** 32π. **D.** 16π.

Lời giải

Chọn D

Cắt hình trụ (T) bởi một mặt phẳng qua trục của nó, ta được thiết diện là một hình vuông cạnh bằng 4, nên độ dài đường sinh của hình trụ là $l = 4$, bán kính đường tròn đáy hình trụ là $r = 2$.

Diện tích xung quanh của hình trụ (T) bằng $S_{xq} = 2\pi.r.l = 2\pi.2.4 = 16\pi$.

Câu 21: Cắt hình trụ (T) bởi một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là hình vuông cạnh bằng 4. Diện tích xung quanh của hình trụ (T) đã cho bằng

A. 4π. **B.** 20π. **C.** 16π. **D.** 8π.

Lời giải

Chọn C

Cắt hình trụ (T) bởi một mặt phẳng qua trục, ta được thiết diện là hình vuông cạnh bằng 4 nên bán kính hình trụ bằng 2 và chiều cao hình trụ bằng độ dài đường sinh bằng 4.

Diện tích xung quanh của hình trụ (T) đã cho bằng $S_{xq} = 2\pi.r.l = 16\pi$.

Câu 22: Cho hình trụ có bán kính đáy $r = 4$, đường sinh $l = 6$. Diện tích toàn phần của hình trụ đã cho bằng

A. 80π. **B.** 96π. **C.** 56π. **D.** 64π

Lời giải

Chọn A

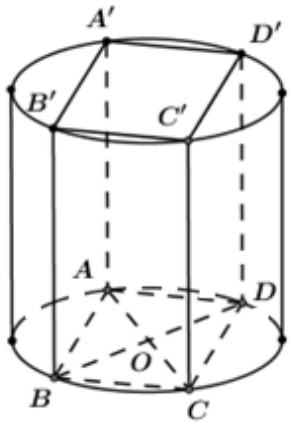
Ta có $S_{tp} = 2\pi r(r + l) = 2\pi 4(4 + 6) = 80\pi$.

Câu 23: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2a$. Gọi S là diện tích xung quanh của hình trụ có hai đường tròn đáy là hai đường tròn ngoại tiếp các hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $S = 4\pi a^2\sqrt{3}$. **B.** $S = 4\pi a^2\sqrt{2}$. **C.** $S = 2\pi a^2\sqrt{2}$. **D.** $S = \pi a^2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Hình trụ có hai đường tròn đáy là hai đường tròn ngoại tiếp các hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$

$\Rightarrow$ bán kính đáy hình trụ là $R = \dfrac{AC}{2} = a\sqrt{2}$ và đường sinh $l = 2a$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S = 2\pi Rl = 2\pi.a\sqrt{2}.2a = 4\pi a^2\sqrt{2}$..

Câu 24: Cho hình trụ có bán kính đáy r và chiều cao h. Diện tích toàn phần của hình trụ đã cho bằng

A. $2\pi r(r+h)$. **B.** πrh. **C.** $2\pi rh$. **D.** $\pi r(r+h)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 25: Khối trụ có đường kính đáy bằng a, chiều cao bằng $a\sqrt{2}$ thì có diện tích xung quanh bằng.

A. $\pi a^2\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\dfrac{3\pi a^2}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Đường kính đáy của hình trụ bằng $a \Rightarrow$ Bán kính đáy là $\dfrac{a}{2}$.

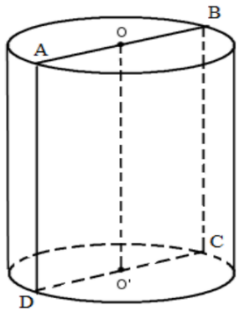
Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi rl = 2\pi.\dfrac{a}{2}.a\sqrt{2} = \pi a^2\sqrt{2}$.

Câu 26: Cho hình trụ có thiết diện qua trục là một hình vuông. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ đã cho. Tỷ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{4}{5}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi thiết diện qua trục là hình vuông $ABCD$ có cạnh là a suy ra $r=\frac{a}{2};l=a$

Ta có $\frac{S_1}{S_2}=\frac{2\pi rl}{2\pi rl+2\pi r^2}=\frac{\pi a^2}{\pi a^2+\pi\frac{a^2}{2}}=\frac{2}{3}$.

Câu 27: Cho khối trụ có bán kính đường tròn đáy $r=a$ và thể tích $V=2\pi a^3$. Diện tích xung quanh của khối trụ đã cho bằng

A. πa^2. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $8\pi a^2$. **D.** $4\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $V=2\pi a^3\Leftrightarrow \pi r^2h=2\pi a^3\Leftrightarrow h=2a$.

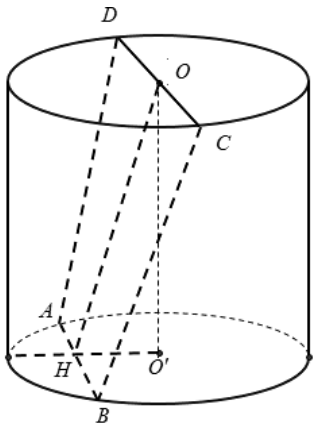
Suy ra $S_{xq}=2\pi rh=2\pi.a.2a=4\pi a^2$.

Câu 28: Cho hình trụ có hai đáy là hình tròn tâm O và O', chiều cao $h=a\sqrt{3}$. Mặt phẳng đi qua tâm O và tạo với OO' một góc $30°$, cắt hai đường tròn tâm O và O' tại bốn điểm là bốn đỉnh của một hình thang có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ và diện tích bằng $3a^2$. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\pi a^3\sqrt{3}$. **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có góc giữa mặt phẳng $(ABCD)$ và OO' là góc $HOO'=30°$, $OO'=a\sqrt{3}$.

$\cos HOO'=\frac{OO'}{OH}\Rightarrow OH=\frac{OO'}{\cos 30°}=\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2a$

Ta có $CD=2r\Rightarrow AB=r$

Theo giả thiết diện tích hình thang $ABCD$ bằng $3a^2$ nên ta có

$(AB+CD)\dfrac{OH}{2}=3a^2 \Leftrightarrow 3r.\dfrac{2a}{2}=3a^2 \Leftrightarrow r=a$

Vậy thể tích khối trụ bằng $V=\pi a^2.a\sqrt{3}=\pi a^3\sqrt{3}$.

Câu 29: Một hình trụ được cắt bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $\sqrt{5}$, thiết diện thu được là hình vuông có diện tích bằng 16. Tính thể tích V của khối trụ đó.

A. $V=28\pi$. **B.** $V=32\pi$. **C.** $V=36\pi$. **D.** $V=44\pi$.

Lời giải

Chọn C

Gọi a là cạnh của thiết diện hình vuông. Theo giả thiết ta có $a^2=16\Rightarrow a=4$.

Khi đó, $h=a=4$.

Do khoảng cách từ trục của hình trụ đến thiết diện bằng $\sqrt{5}$ nên ta có $r=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{9}=3.$

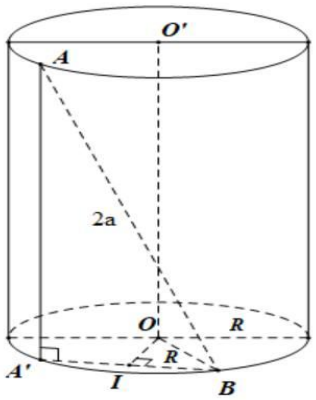
Vậy thể tích khối trụ là $V=\pi r^2h=9\pi.4=36\pi.$

Câu 30: Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông. Gọi A và B là hai điểm lần lượt nằm trên hai đường tròn (O') và (O). Biết $AB=2a$ và khoảng cách giữa AB và OO' bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Dựng $AA'//OO'$ ($A'\in(O)$), gọi I là trung điểm $A'B$, R là bán kính đáy.

Suy ra: khoảng cách giữa AB và OO' là $OI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Và: $IB=\sqrt{OB^2-OI^2}=\sqrt{R^2-\dfrac{3a^2}{4}}\Rightarrow A'B=2IB=\sqrt{4R^2-3a^2}$.

Thiết diện qua trục là hình vuông nên $AA'=2R$.

Ta có: $AA'^2+A'B^2=AB^2\Leftrightarrow 4R^2+4R^2-3a^2=4a^2\Leftrightarrow R=\dfrac{a\sqrt{14}}{4}$.

Câu 31: Một công ty chuyên sản xuất chậu trồng cây có dạng hình trụ không có nắp, chậu có thể tích $0,5m^3$. Biết giá vật liệu làm $1m^2$ mặt xung quanh chậu là 100.000 đồng, để làm $1m^2$ đáy chậu là 200.000 đồng. Số tiền ít nhất để mua vật liệu làm một chậu gần nhất với số nào dưới đây?

A. 349.000 đồng. **B.** 725.000 đồng. **C.** 498.000 đồng. **D.** 369.000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Gọi $x(m)$, $h(m)$ lần lượt là bán kính và chiều cao của chậu hình trụ.

Vì thể tích chậu bằng $0,5m^3$ nên $\pi x^2 h = 0,5 \Rightarrow h = \dfrac{0,5}{\pi x^2}$.

Diện tích xung quanh của chậu là $2\pi xh\left(m^2\right)$ nên số tiền mua vật liệu để làm mặt xung quanh là $2\pi xh.100.000 = 2\pi x.\dfrac{0,5}{\pi x^2}.100.000 = \dfrac{100.000}{x}$ (đồng).

Diện tích đáy của chậu là $\pi x^2\left(m^2\right)$ nên số tiền mua vật liệu để làm đáy chậu là $\pi x^2.200.000 = 200.000\pi x^2$ (đồng).

Số tiền mua vật liệu làm một cái chậu là

$$T = \frac{100.000}{x} + 200.000\pi x^2 = \frac{50.000}{x} + \frac{50.000}{x} + 200.000\pi x^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{50.000}{x}.\frac{50.000}{x}.200.000\pi x^2}$$

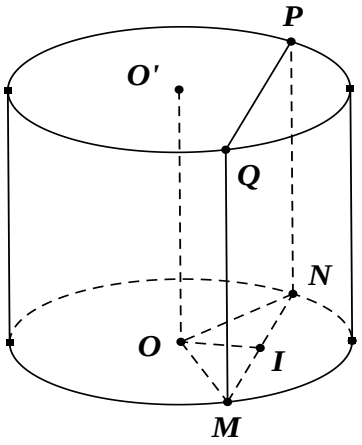
hay $T \geq 3\sqrt[3]{50000^2.200000.\pi} \approx 348734,2055$.

Câu 32: Cho hình trụ có chiều cao bằng $2\sqrt{5}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục, cách trục một khoảng $\sqrt{5}$, thiết diện thu được là hình vuông. Diện tích xung quanh hình trụ đã cho bằng

A. $8\pi\sqrt{10}$. **B.** $4\pi\sqrt{10}$. **C.** $10\pi\sqrt{5}$. **D.** $20\pi\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $l = h = 2\sqrt{5}$

Thiết diện là hình vuông $MNPQ$ nên $MN = 2\sqrt{5} \Rightarrow MI = \sqrt{5}, OI = \sqrt{5}$,

Suy ra ΔOMI vuông cân tại $I \Rightarrow$ bán kính đường tròn đáy $R = OM = \sqrt{10}$.

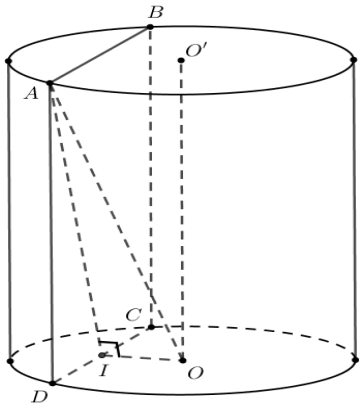
$S_{xq} = 2\pi Rl = 2.\pi.\sqrt{10}.2\sqrt{5} = 20\sqrt{2}\pi$.

Câu 33: Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'). Một mặt phẳng song song với trục và cách trục của hình trụ một khoảng bằng $\frac{10a}{3}$, cắt hình trụ theo thiết diện là một hình vuông $ABCD, A \in (O')$. Biết góc giữa OA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30^0. Thể tích khối trụ đã cho bằng

A. $\frac{1360\sqrt{15}a^3}{54}\pi$. **B.** $\frac{640\sqrt{15}a^3}{54}\pi$. **C.** $\frac{1360\sqrt{15}a^3}{27}\pi$ **D.** $\frac{640\sqrt{15}a^3}{27}\pi$.

Lời giải

Chọn D



Gọi là I trung điểm CD

Ta có : $\begin{cases} OI \perp CD \\ OI \perp AD \end{cases} \Rightarrow OI \perp (ABCD) \Rightarrow d_{(O,(ABCD))} = OI = \frac{10a}{3}$

Đồng thời, $\left(OA,(ABCD)\right) = OAI = 30^o$

Nên $\tan 30^0 = \frac{OI}{AI} \Rightarrow AD\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\frac{10}{3}a}{\tan 30^0} \Rightarrow h = AD = \frac{4\sqrt{15}}{3}a$

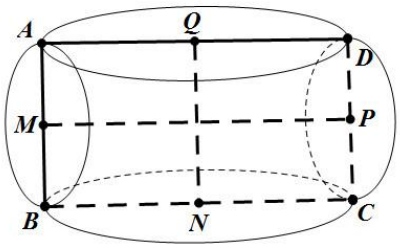
$\Rightarrow R = OD = \frac{4\sqrt{10}}{3}a \Rightarrow V = \pi R^2 h = \frac{640\sqrt{15}a^3}{27}\pi$

Câu 34: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2, BC = 4$. Các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Gọi V_1, V_2 là thể tích của 2 khối tròn xoay khi quay hình chữ nhật $ABCD$ lần lượt quanh trục MP, NQ. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $V_2 = 2V_1$. **B.** $V_2 = V_1$. **C.** $V_2 = 8V_1$. **D.** $V_2 = 4V_1$.

Lời giải

Chọn A



Khối tròn xoay khi quay hình chữ nhật quanh trục MP là khối trụ có chiều cao $h_1 = MP = BC = 4$ bán kính $r_1 = \dfrac{AB}{2} = 1$. $V_1 = \pi.4.1 = 4\pi$.

Khối tròn xoay khi quay hình chữ nhật quanh trục NQ là khối trụ có chiều cao $h_2 = NQ = AB = 2$ bán kính $r_2 = \dfrac{BC}{2} = 2$. $V_2 = \pi.2^2.2 = 8\pi$.

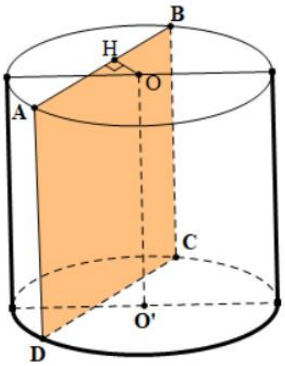
Vậy $V_2 = 2V_1$.

Câu 35: Cho hình trụ có chiều cao bằng $5\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 30. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $5\sqrt{39}\pi$. **B.** $20\sqrt{3}\pi$. **C.** $10\sqrt{39}\pi$. **D.** $10\sqrt{3}\pi$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $O,\ O'$ lần lượt là tâm của hai đáy và $ABCD$ là thiết diện song song với trục với $A, B \in (O)$; $C, D \in (O')$. Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow OH = d\left(OO', (ABCD)\right) = 1$.

Vì $S_{ABCD} = 30 \Leftrightarrow AB.BC = 30 \Rightarrow AB = \dfrac{30}{5\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow HA = HB = \sqrt{3}$.

Bán kính của đáy là $r = \sqrt{OH^2 + HA^2} = \sqrt{3+1} = 2$.

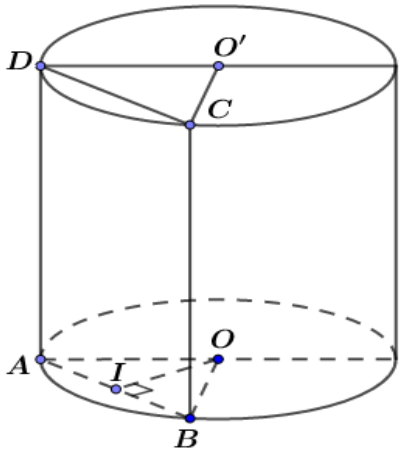
Diện tích xung quanh của hình trụ bằng $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi.2.5\sqrt{3} = 20\sqrt{3}\pi$.

Câu 36: Cho hình trụ có chiều cao $8a$. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $2a$ thì thiết diện thu được là một hình chữ nhật có diện tích bằng $48a^2$. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A. $169\pi a^3$. **B.** $52\pi a^3$. **C.** $104\pi a^3$. **D.** $\dfrac{104\pi a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Cắt hình trụ bởi mặt phẳng (P) song song với trục của hình trụ có thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$. Suy ra, (P) vuông góc với mặt đáy. Gọi I là trung điểm của AB. Suy ra $OI \perp (P)$. Do đó, khoảng cách giữa (P) và trục của hình trụ bằng độ dài OI. Do đó, $OI = 2a$.

Ta có $S_{ABCD} = AB.AD = AB.8a = 48a^2 \Rightarrow AB = 6a \Rightarrow AI = 3a$.

Xét tam giác vuông OAI ta có: $OA = \sqrt{AI^2 + OI^2} = \sqrt{(3a)^2 + (2a)^2} = a\sqrt{13}$.

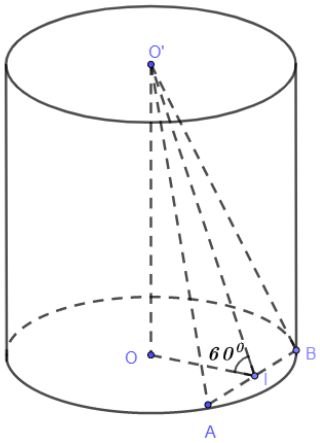
Vậy thể tích khối trụ bằng: $V = \pi R^2 h = \pi\left(a\sqrt{13}\right)^2 8a = 104\pi a^3$.

Câu 37: Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), bán kính đáy $R = \sqrt{7}$. AB là một dây cung của đường tròn (O) sao cho tam giác $O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn $(O;R)$ một góc 60^0. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 22π. **B.** 7π. **C.** $3\sqrt{7}\pi$. **D.** 21π.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm của AB

Ta có: $\begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp OO' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (OO'I) \Rightarrow OIO' = 60^0$

Đặt $AB = x$, do $\Delta O'AB$ đều $\Rightarrow O'I = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

Ta có $OI = O'I.\cos 60^0 = \dfrac{x\sqrt{3}}{4}$

Mặt khác, $OI=\sqrt{OA^2-AI^2}=\sqrt{7-\frac{x^2}{4}}\Rightarrow\sqrt{7-\frac{x^2}{4}}=\frac{x\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow 7-\frac{x^2}{4}=\frac{3x^2}{16}\Leftrightarrow x=4$

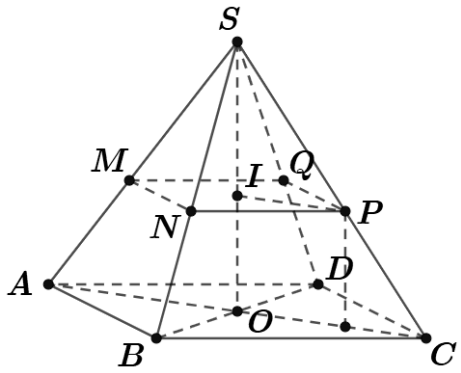
$\Rightarrow OO'=OI.\tan 60^0=3$ nên $V=\pi R^2h=\pi.\left(\sqrt{7}\right)^2.3=21\pi$

Câu 38: Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Một mặt phẳng thay đổi, vuông góc với SO và cắt SO, SA, SB, SC, SD lần lượt tại I, M, N, P, Q. Một hình trụ có một đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MNPQ$ và một đáy nằm trên mặt phẳng $(ABCD)$. Thể tích khối trụ lớn nhất bằng

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{8}$ **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{27}$ **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{27}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $OC=\frac{AC}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow SO=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do $(MNPQ)$ song song với mặt đáy nên $\frac{IP}{OC}=\frac{SI}{SO}\Leftrightarrow\frac{IP}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{SI}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}\Leftrightarrow IP=SI$.

$\Rightarrow IO=SO-OI=\frac{a\sqrt{2}}{2}-IP$.

Khi đó ta có thể tích khối trụ là $V=IO.\pi.IP^2=\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}-IP\right)IP^2$

Cách 1:

Đặt $x=IP$ với $0<x<\frac{a\sqrt{2}}{2}$, khi đó:

Xét hàm số $f(x)=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}-x\right)x^2$ với $0<x<\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Ta có $f'(x)=xa\sqrt{2}-3x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=0 & (l)\\ x=\frac{a\sqrt{2}}{3} & (n)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{a\sqrt{2}}{3}$		$\frac{a\sqrt{2}}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{a^3\sqrt{2}}{27}$	↘	0

Từ bảng biến thiên ta thấy $\max\limits_{x\in\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)} f(x)=f\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{a^3\sqrt{2}}{27}\Rightarrow V_{\max}=\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{27}$.

Cách 2:

Áp dụng bất đẳng thức Am – Gm:

$$V=\frac{1}{2}\pi\left(a\sqrt{2}-2IP\right)IP.IP\le\frac{1}{2}\pi\frac{\left(a\sqrt{2}-2IP+IP+IP\right)^3}{27}=\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{27}.$$

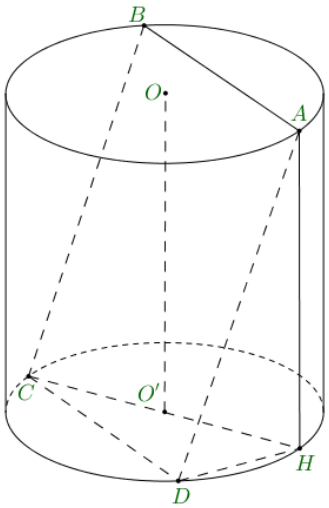
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a\sqrt{2}-2IP=IP\Leftrightarrow IP=\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 39: Cho hình trụ có chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ lấy hai điểm A,B; trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ lấy hai điểm C,D sao cho $ABCD$ là hình vuông và mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy của hình trụ góc 45^o. Thể tích khối trụ đã cho bằng:

A. $\frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{2}$. **B.** $6\sqrt{2}\pi a^3$. **C.** $3\sqrt{2}\pi a^3$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}\pi a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử tâm của đáy thứ nhất và đáy thứ hai của hình trụ lần lượt là O và O'.

Gọi H là hình chiếu của A trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ.

Ta có: $CD\perp AD, AH\Rightarrow CD\perp DH$, tức là CH là đường kính đáy thứ hai của hình trụ.

$CD\perp(ADH)$; $(ADH)\cap(ABCD)=AD$; $(ADH)\cap(CDH)=DH$

$\Rightarrow\left((ABCD),(CDH)\right)=ADH=45^o\Rightarrow\Delta ADH$ vuông cân tại H có $AH=DH=OO'=a\sqrt{2}$,

$AD=AH\sqrt{2}=OO'\sqrt{2}=2a\Rightarrow CD=2a\Rightarrow CH=\sqrt{(CD)^2+(DH)^2}=a\sqrt{6}$.

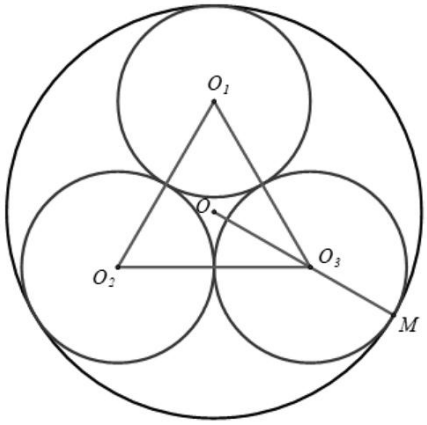
Vậy thể tích khối trụ bằng: $\pi\left(\frac{CH}{2}\right)^2.OO' = \frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 40: Trường THPT Kinh Môn thành lập đội bóng chuyền hơi nữ để đi thi đấu giải bóng chuyền hơi nữ giáo viên cấp tỉnh. Để thuận tiện cho việc luyện tập, các cô đã mua 3 quả bóng chuyền hơi, mỗi quả có đường kính bằng $\frac{80}{\pi}cm$. Các cô dùng 1 chiếc thùng hình trụ để cất giữ bóng khi không tập. Biết khi xếp ba quả bóng vào thùng sao cho chúng đôi một tiếp xúc với nhau, mỗi quả bóng đều tiếp xúc với đáy thùng và 1 đường sinh của thùng thì điểm cao nhất của ba quả bóng đều cách mặt trên của thùng $5cm$. Thể tích của thùng đựng gần nhất với kết quả nào

A. $50(l)$. **B.** $72(l)$. **C.** $25(l)$. **D.** $83(l)$.

Lời giải

Chọn B



Gọi tâm ba quả bóng lần lượt là O_1, O_2, O_3. Theo giả thiết ba đường tròn lớn của của ba viên bi có bán kính bằng nhau đôi một tiếp xúc nhau nên tam giác $O_1O_2O_3$ là tam giác đều cạnh $\frac{80}{\pi}cm.$

Gọi O là tâm tam giác $O_1O_2O_3$ thì $OO_1 = OO_2 = OO_3 = \frac{2}{3}.\frac{80}{\pi}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{80}{\sqrt{3}\pi}(cm)$

Do 3 viên bi tiếp xúc với các đường sinh của hình trụ và đều tiếp xúc với đáy trụ nên điểm O sẽ nằm trên trục của hình trụ.

Khi đó bán kính đáy trụ: $OM = OO_3 + O_3M = \frac{80}{\sqrt{3}\pi} + \frac{40}{\pi} = \frac{80+40\sqrt{3}}{\pi\sqrt{3}}(cm)$

Do 3 quả bóng đều cách mặt trên của thùng là $5cm$ nên chiều cao hình trụ là: $\frac{80}{\pi} + 5(cm)$

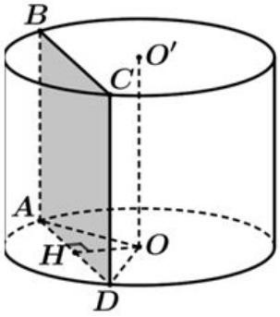
Vậy thể tích trụ: $V = \pi r^2 h = \pi.\left(\frac{80+40\sqrt{3}}{\pi\sqrt{3}}\right)^2.\left(\frac{80}{\pi}+5\right) \approx 72034,766\left(cm^3\right) \approx 72(l)$

Câu 41: Cho hình trụ có bán kính đáy bằng $2a$. Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng song song với trục, cách trục một khoảng bằng a ta được thiết diện là một hình chữ nhật có diện tích bằng $8\sqrt{3}a^2$. Thể tích khối trụ đã cho bằng

A. $4\pi a^3$. **B.** $16\pi a^3$. **C.** $32\pi a^3$. **D.** $27\pi a^3$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $d\left(O;\left(ABCD\right)\right)=OH=a;OD=2a$.

$\Rightarrow HD=\sqrt{OD^2-OH^2}=\sqrt{3}a\Rightarrow AD=2a\sqrt{3}$.

Mà $S_{ABCD}=8\sqrt{3}a^2\Rightarrow AB.AD=8\sqrt{3}a^2\Leftrightarrow AB.2a\sqrt{3}=8\sqrt{3}a^2\Leftrightarrow AB=4a$.

$\Rightarrow OO'=AB=4a.$

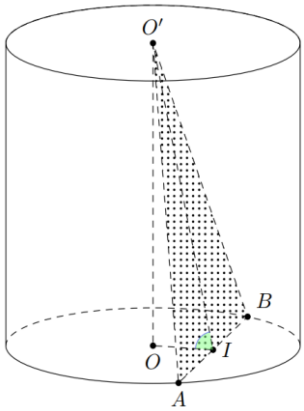
Thể tích khối trụ là $V=\pi r^2h=\pi\left(2a\right)^2.4a=16\pi a^2.$

Câu 42: Cho hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai hình tròn $\left(O;R\right)$ và $\left(O';R\right)$. Tồn tại dây cung AB thuộc đường tròn $\left(O\right)$ sao cho $\Delta O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $\left(O'AB\right)$ hợp với mặt phẳng chứa đường tròn $\left(O\right)$ một góc $60°$. Khi đó diện tích xung quanh S_{xq} hình trụ là

A. $S_{xq}=\dfrac{4\pi R^2}{7}$. **B.** $S_{xq}=\dfrac{3\pi R^2}{\sqrt{7}}$. **C.** $S_{xq}=\dfrac{3\pi R^2\sqrt{7}}{7}$. **D.** $S_{xq}=\dfrac{6\pi R^2\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm AB. Khi đó $OI\perp AB$.

Xét tam giác $O'OI$ vuông tại O có $OI=\dfrac{O'O}{\tan 60°}=\dfrac{O'O}{\sqrt{3}}$ và $O'I=\dfrac{O'O}{\sin 60°}=\dfrac{2O'O}{\sqrt{3}}$.

Mặt khác xét tam giác OIA vuông tại I có

$AI^2=R^2-OI^2=R^2-\dfrac{OO'^2}{3}\Rightarrow AB^2=4\left(R^2-\dfrac{O'O^2}{3}\right).$

Vì tam giác $O'AB$ đều nên

$O'I=AB\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow O'I^2=\dfrac{3}{4}AB^2\Leftrightarrow\dfrac{4}{3}O'O^2=3R^2-O'O^2\Leftrightarrow O'O=\dfrac{3R}{\sqrt{7}}.$

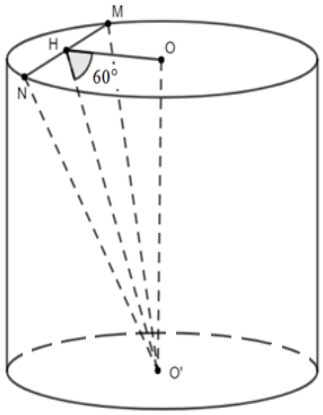
Diện tích xung quanh hình trụ $S_{xq} = 2\pi R.O'O = \dfrac{6\pi R^2\sqrt{7}}{7}$.

Câu 43: Cho khối trụ có hai đáy là hình tròn $(O;r)$ và $(O';r)$. Biết MN là một dây cung của đường tròn $(O;r)$ sao cho tam giác $O'MN$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'MN)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn $(O;r)$ một góc $60°$. Thể tích khối trụ tính theo r bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{7}\pi r^3}{7}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{7}\pi r^3}{7}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}\pi r^3}{5}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{5}\pi r^3}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của MN, khi đó góc giữa mặt phẳng $(O'MN)$ và mặt phẳng chứa đường tròn $(O;r)$ là $OHO' = 60°$. Đặt $MN = O'M = O'N = x$ suy ra $O'H = \sqrt{OM^2 - \left(\dfrac{MN}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$; $OH = \sqrt{OM^2 - HM^2} = \sqrt{r^2 - \dfrac{x^2}{4}}$.

Khi đó ta có $\cos 60° = \dfrac{OH}{O'H} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{4}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}x} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{4}x = \sqrt{r^2 - \dfrac{x^2}{4}} \Leftrightarrow x = \dfrac{4r}{\sqrt{7}}$.

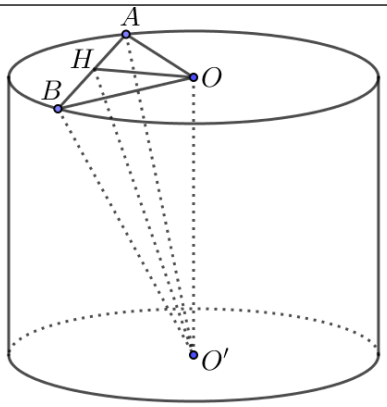
Suy ra $O'H = \dfrac{2\sqrt{3}r}{\sqrt{7}} \Rightarrow OO' = O'H.\sin 60° = \dfrac{3r}{\sqrt{7}}$. Do đó $V = \pi r^2.OO' = \dfrac{3\sqrt{7}\pi r^3}{7}$.

Câu 44: Cho hình trụ có hai đáy là hình tròn (O,R) và (O',R), AB là một dây cung của đường tròn (O,R), tam giác $O'AB$ đều và mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đáy của hình trụ một góc 45^0. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{\pi\sqrt{15}R^3}{15}$. **B.** $\dfrac{\pi\sqrt{15}R^3}{5}$. **C.** $\dfrac{\pi\sqrt{7}R^3}{7}$. **D.** $\dfrac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm AB khi đó mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đáy của hình trụ bằng $OHO' = 45^0$.

Ta có $O'H = \dfrac{O'B.\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OO' = \dfrac{O'B.\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

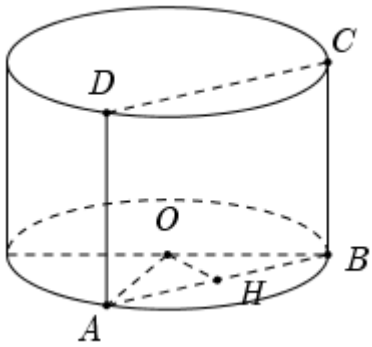
Mặt khác: $OB^2 + OO'^2 = O'B^2 \Rightarrow R^2 + \dfrac{3O'B^2}{8} = O'B^2 \Rightarrow O'B = \sqrt{\dfrac{8}{5}}.R \Rightarrow OO' = \dfrac{\sqrt{15}R}{5}$.

Vậy thể tích $V = \dfrac{\pi R^3\sqrt{15}}{5}$.

Câu 45: Cắt hình trụ (T) có bán kính R bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng a $(0 < a < R)$ ta được thiết diện là một hình vuông có diện tích $16a^2$. Diện tích xung quanh của hình trụ (T) bằng

A. $4\pi a^2\sqrt{5}$. **B.** $\pi a^2\sqrt{5}$. **C.** $8\pi a^2\sqrt{5}$. **D.** $16\pi a^2\sqrt{5}$

Lời giải



Thiết diện là một hình vuông có diện tích $16a^2$ nên $AB = AD = 2HB = 4a$.

$R = OA = \sqrt{OH^2 + HB^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$.

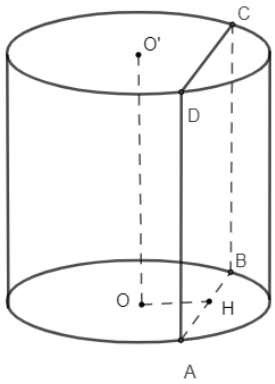
Diện tích xung quanh của hình trụ (T): $S = 2\pi Rl = 2\pi.a\sqrt{5}.4a = 8\pi a^2\sqrt{5}$.

Câu 46: Cắt hình trụ (T) có bán kính bằng R bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $a(0 < a < R)$ ta được một thiết diện là hình vuông có diện tích $16a^2$. Diện tích xung quanh của hình trụ (T) bằng

A. $4\pi a^2\sqrt{5}$. **B.** $\pi a^2\sqrt{5}$. **C.** $8\pi a^2\sqrt{5}$. **D.** $16\pi a^2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow OH = d\left(O,\left(ABCD\right)\right) = a$.

Ta có: $S_{ABCD} = 16a^2 \Rightarrow AB^2 = 16a^2 \Rightarrow AB = 4a \Rightarrow AH = \dfrac{AB}{2} = 2a$.

ΔOAH vuông tại $\Rightarrow OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = a\sqrt{5}$

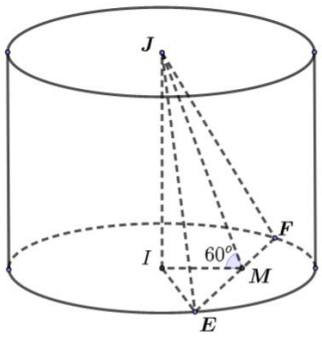
$S_{xq} = 2\pi Rl = 2\pi.OA.AD = 2\pi.a\sqrt{5}.4a = 8\sqrt{5}\pi a^2$.

Câu 47: Cho hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai đường tròn $\left(I;\sqrt{7}\right)$ và $\left(J;\sqrt{7}\right)$. Biết tồn tại dây cung EF của đường tròn $\left(I;\sqrt{7}\right)$ sao cho tam giác JEF là tam giác đều và mặt phẳng $\left(JEF\right)$ hợp với mặt đáy của hình trụ một góc bằng $60°$. Thể tích V của khối trụ đã cho là

A. $V = 21\pi$. **B.** $V = 7\sqrt{6}\pi$. **C.** $V = 14\pi$. **D.** $V = 28\pi$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của EF, khi đó ta có $IM \perp EF$ và $JM \perp EF$.

Theo đề ta có $IMJ = 60°$.

Đặt $IM = x,\ \left(0 < x < \sqrt{7}\right)$.

Ta có $EF = 2EM = 2\sqrt{IE^2 - IM^2} = 2\sqrt{7 - x^2}$; ΔJEF đều nên $JM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}EF = \sqrt{21 - 3x^2}$.

Xét tam giác IMJ vuông tại J có $\cos IMJ = \dfrac{IM}{JM} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{\sqrt{21 - 3x^2}} \Rightarrow x = \sqrt{3}$ hay $IM = \sqrt{3}$

và $IJ = IM.\tan IMJ = 3$.

Thể tích của khối trụ đã cho là $V = \pi R^2 h = 21\pi$.

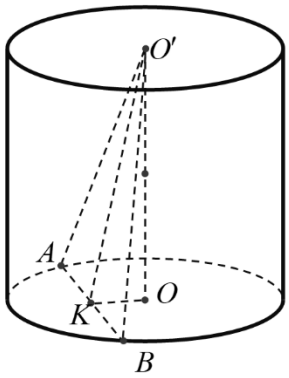
Câu 48: Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $\left(O\right)$ và $\left(O'\right)$, bán kính đáy $r = 3$. Biết AB một dây cung của đường tròn $\left(O\right)$ sao cho tam giác $O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $\left(O'AB\right)$ tạo với mặt phẳng

chứa đường tròn (O) một góc $60°$. Tính thể tích của khối trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{9\sqrt{7}\pi}{7}$. **B.** $V=\dfrac{81\sqrt{7}\pi}{7}$. **C.** $V=\dfrac{81\pi}{7}$. **D.** $V=81\sqrt{7}\pi$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $AB=2x$

Gọi K là trung điểm AB. Ta có : $AB\perp OK$ và $AB\perp OO'$ nên góc giữa mặt phẳng $(O'AB)$ và mặt phẳng chứa đường tròn (O) là OKO'. $OKO'=60°\Rightarrow O'K=2OK\Rightarrow O'K^2=4OK^2$

$\Rightarrow 3x^2=4\left(r^2-x^2\right)\Rightarrow x^2=\dfrac{4r^2}{7}$.

Mặt khác : $OO'^2=O'B^2-OB^2=4x^2-r^2=4.\dfrac{4r^2}{7}-r^2=\dfrac{9r^2}{7}\Rightarrow O'O=\dfrac{3\sqrt{7}r}{7}=\dfrac{9\sqrt{7}}{7}$.

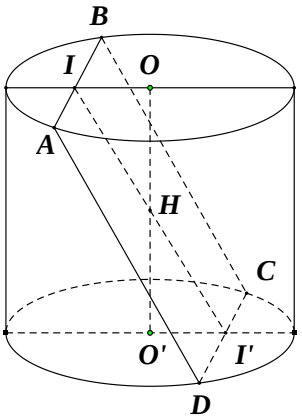
Vậy thể tích khối trụ đã cho là : $V=\pi r^2h=\dfrac{81\sqrt{7}\pi}{7}$.

Câu 49: Cho hình trụ (T). Một hình vuông $ABCD$ có hai cạnh AB,CD lần lượt là hai dây cung của hai đường tròn đáy của hình trụ (T), mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy của hình trụ một góc 45^0. Biết $AB=2\sqrt{2}$, tính thể tích V của khối trụ tạo bởi hình trụ đã cho.

A. $V=4\sqrt{2}\pi$. **B.** $V=4\pi$. **C.** $V=6\sqrt{2}\pi$. **D.** $V=6\pi$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I,I' lần lượt là trung điểm của AB,CD; O,O' lần lượt là tâm đường tròn đáy của hình trụ (như hình vẽ); H là trung điểm của II'.

Khi đó H là trung điểm của OO' và góc giữa $(ABCD)$ tạo với đáy là $HI'O' = 45°$.

Do $I'H = \frac{1}{2}AD = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow O'H = O'I' = \frac{I'H}{\sqrt{2}} = 1$. Khi đó $h = OO' = 2$.

Ta có: $r = O'C = \sqrt{O'I'^2 + I'C^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3}$.

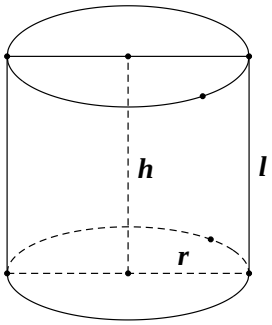
Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi\left(\sqrt{3}\right)^2.2 = 6\pi$.

Câu 50: Cho hình trụ có diện tích toàn phần bằng 9π và có thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là một hình vuông. Thể tích khối trụ đã cho là

A. $3\pi\sqrt{6}$. **B.** $\frac{3\pi\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{3\pi\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi r là bán kính đáy của hình trụ.

Vì hình trụ có thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua trục là một hình vuông nên hình trụ đó có chiều cao $h = l = 2r$.

Diện tích toàn phần của hình trụ là $S_{tp} = 2\pi r^2 + 2\pi rl = 2\pi r^2 + 4\pi r^2 = 6\pi r^2$.

Theo bài ra, ta có $6\pi r^2 = 9\pi \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Do đó thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = 2\pi r^3 = 2\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \frac{3\pi\sqrt{6}}{2}$.

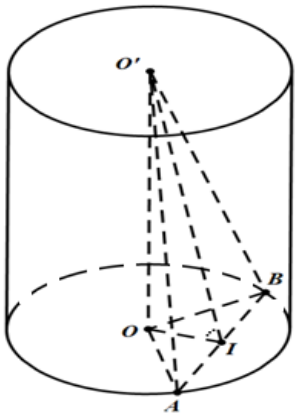
Câu 51: Cho hình trụ (H) có hai đáy là hai đường tròn có tâm O và O', mặt phẳng (α) đi qua O' và cắt đường tròn tâm O tại hai điểm A, B sao cho tam giác $O'AB$ là tam giác đều và có diện tích $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Biết góc giữa mp(α) và mp(OAB) bằng 60^0, tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ (H)?

A. $S_{tp} = \frac{\left(7+3\sqrt{7}\right).\pi a^2}{8}$. **B.** $S_{tp} = \frac{\left(7+3\sqrt{7}\right).a^2}{16}$.

C. $S_{tp} = \frac{\left(7+3\sqrt{7}\right).\pi a^2}{16}$. **D.** $S_{tp} = \frac{\left(7+3\sqrt{7}\right)a^2}{8}$.

Lời giải

Chọn A



$\Delta O'AB$ là tam giác đều và có diện tích $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow AO' = AB = BO' = a$.

Gọi I là trung điểm AB, $IO' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ta có: $\begin{cases} IO' \perp AB \\ IO \perp AB \end{cases} \Rightarrow \left((\alpha),(OAB)\right) = OIO' = 60^0$.

$OO' = IO'.\sin 60^0 = \frac{3a}{4}$; $IA = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$; $OI = IO'.\cos 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$;

$OA = \sqrt{IA^2 + OI^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{4}$.

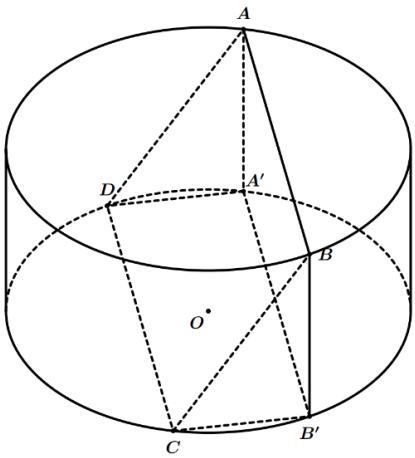
Hình trụ (H) có chiều cao $h = l = OO' = \frac{3a}{4}$, bán kính đường tròn đáy $r = OA = \frac{a\sqrt{7}}{4}$, có diện tích toàn phần $S_{tp} = 2\pi r(r+l) = 2\pi.\frac{a\sqrt{7}}{4}.\left(\frac{a\sqrt{7}}{4} + \frac{3a}{4}\right) = \frac{\left(7+3\sqrt{7}\right)}{8}.\pi a^2$

Câu 52: Cho hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng 4, trong đó AB, CD lần lượt là hai dây cung trên hai đường tròn đáy của hình trụ (T). Biết rằng $(ABCD)$ tạo với mặt đáy của hình trụ (T) một góc bằng $60°$. Thể tích của khối trụ (T) bằng

A. $\frac{5\sqrt{3}}{12}\pi$. **B.** $\frac{\sqrt{15}}{2}\pi$. **C.** $\frac{\sqrt{15}}{4}\pi$. **D.** $\frac{5\sqrt{3}}{4}\pi$.

Lời giải

Chọn D



Giả sử (P) cắt đường tròn đáy trên theo dây cung AB, cắt đường tròn đáy dưới theo dây cung

CD.

Ta có $AB = 2$.

Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B xuống đường tròn đáy dưới.

Lúc này $A'B'CD$ là hình chữ nhật và là hình chiếu vuông góc của hình vuông $ABCD$ mặt đáy dưới.

Khi đó $\cos 60° = \dfrac{S_{A'B'CD}}{S_{ABCD}} \Rightarrow S_{A'B'CD} = 2$

mà $S_{A'B'CD} = CD.CB'$ nên $CB' = \dfrac{2}{CD} = 1.$

Khi đó $BB' = \sqrt{BC^2 - CB'^2} = \sqrt{3}$ và $OB' = \dfrac{DB'}{2} = \dfrac{\sqrt{CD^2 + CB'^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

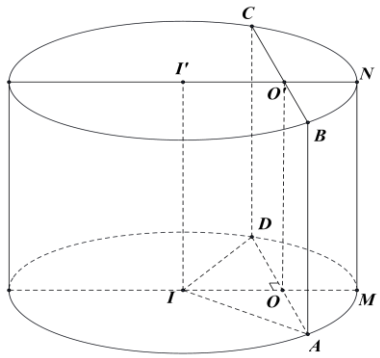
Thể tích khối trụ (T) bằng $V = \pi.OB'^2.BB' = \dfrac{5\sqrt{3}}{4}\pi$.

Câu 53: Cắt hình trụ (T) bởi mặt phẳng song song với trục ta được thiết diện là hình vuông có diện tích bằng 64, biết khoảng cách từ tâm đáy đến thiết diện bằng 3. Diện tích xung quanh của (T) bằng

A. 64π. **B.** 40π. **C.** 48π. **D.** 80π.

Lời giải

Chọn D



Gọi I, I' lần lượt là tâm hai đường tròn đáy.

Thiết diện là hình vuông $ABCD$. Ta có: $S_{ABCD} = 64 \Rightarrow l = AB = AD = 8.$

Gọi O, O' lần lượt trung điểm của AD, BC $\Rightarrow OA = 4$.

$d(I,(ABCD)) = OI = 3 \Rightarrow R = IA = \sqrt{OI^2 + OA^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$

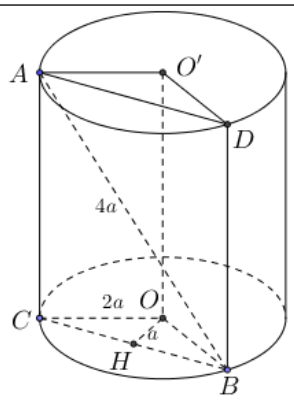
Diện tích xung quanh của hình trụ (T) bằng: $S = 2\pi Rl = 2\pi.5.8 = 80\pi$.

Câu 54: Một hình trụ có bán kính bằng $2a$. Hai điểm A, B lần lượt thuộc hai đường tròn đáy sao cho $AB = 4a$. Biết khoảng cách giữa AB và trục bằng a. Tính thể tích khối trụ đã cho.

A. $\pi a^3\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{8\pi a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $4\pi a^3\sqrt{2}$. **D.** $8\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



Dựng các đường sinh AC và BD.

Ta có $OO' // (ACBD) \Rightarrow d(OO', AB) = d(OO', (ACBD)) = d(O, (ACBD))$.

Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow OH \perp (ACBD) \Rightarrow d(O, (ACBD)) = OH = a.$

Tam giác OHC vuông tại H suy ra $HC = a\sqrt{3}$ nên $BC = 2a\sqrt{3}$

Tam giác ABC vuông tại $C \Rightarrow AC = OO' = 2a$.

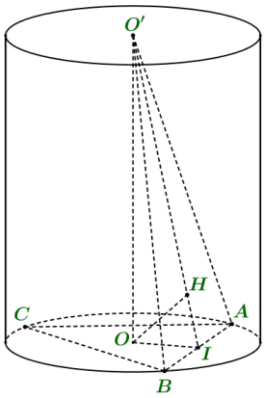
Vậy khối trụ đã cho có thể tích $V = \pi r^2 h = \pi.4a^2.2a = 8\pi a^3$

Câu 55: Cho hình trụ (T) có O, O' lần lượt là tâm hai đường tròn đáy. Tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, $AB = 2a$, $\sin ACB = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ và OO' tạo với mặt phẳng $(O'AB)$ một góc 30^o. Thể tích khối trụ (T) bằng

A. $2\pi a^3\sqrt{6}$. **B.** $3\pi a^3\sqrt{6}$. **C.** $\pi a^3\sqrt{3}$. **D.** $\pi a^3\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi r là bán kính đáy của hình trụ. Tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O nên $r = \dfrac{AB}{2\sin ACB} = \dfrac{2a}{2.\dfrac{1}{\sqrt{3}}} = a\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB, ta có:

$\left.\begin{array}{l} OI \perp AB \\ OO' \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp (O'OI) \Rightarrow (O'AB) \perp (O'OI)$, $(O'AB) \cap (O'OI) = O'I$.

Kẻ $OH \perp O'I$, $H \in O'I$, ta có $O'H$ là hình chiếu vuông góc của OO' lên mặt phẳng $(O'AB)$

$\Rightarrow OO'I = 30^o$.

Trong tam giác vuông $OO'I$: $OO' = OI.\cot OO'I = \sqrt{OA^2 - AI^2}\cot 30^o = a\sqrt{6}$, $h = OO'$ là chiều cao của khối trụ (T). Thể tích khối trụ (T) bằng $V = \pi r^2 h = 3\pi a^3\sqrt{6}$.

Dạng 4: Khối tròn xoay nội, ngoại tiếp khối đa diện

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Một hình tứ diện đều cạnh a có một đỉnh trùng với đỉnh hình nón, ba đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy của hình nón. Diện tích xung quanh của hình nón bằng:

A. $\pi\sqrt{3}a^2$ **B.** $\frac{1}{3}\pi\sqrt{2}a^2$. **C.** $\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}a^2$. **D.** $\frac{1}{3}\pi\sqrt{3}a^2$.

Lời giải

Chọn D

Do đáy hình chóp là tam giác đều nên bán kính đáy của hình nón $r=\frac{\sqrt{3}}{3}a$

Đường sinh của hình nón có độ dài bằng cạnh của hình tứ diện đều

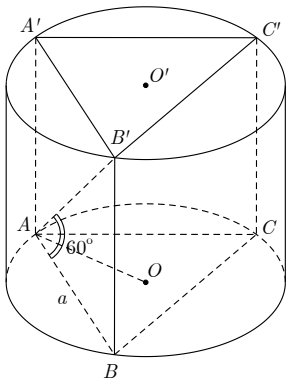
Vậy diện tích xung quanh hình nón là $\pi.r.l=\pi.\frac{\sqrt{3}}{3}a.a=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi a^2$

Câu 2: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a, góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

A. $V=a^3\pi\sqrt{3}$. **B.** $V=\frac{4a^3\pi\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\frac{a^3\pi\sqrt{3}}{9}$. **D.** $V=\frac{a^3\pi\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O và O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và $\Delta A'B'C'$.

Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên ΔABC là tam giác đều và $B'B\perp(ABC)$.

$\Rightarrow$ Góc giữa AB' và mặt phẳng (ABC) chính là góc giữa AB' và AB hay $B'AB=60°$.

$\Rightarrow BB'=AB.\tan 60°=a\sqrt{3}$.

Lại có ΔABC là tam giác đều cạnh a nên $OA=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Mặt khác, hình trụ ngoại tiếp lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có đường cao là BB', bán kính đáy là OA.

Vậy thể tích khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

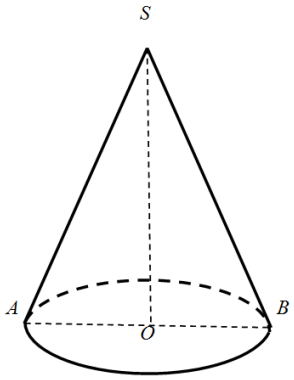
$$V=\pi.OA^2.BB'=\pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2.a\sqrt{3}=\frac{a^3\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 3: Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và bán kính đáy bằng a. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. **C.** $\frac{2\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi khối nón đã cho có S là đỉnh, O là tâm đáy, đường sinh SA. Ta có $SA = 2a$, $OA = a$.

$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

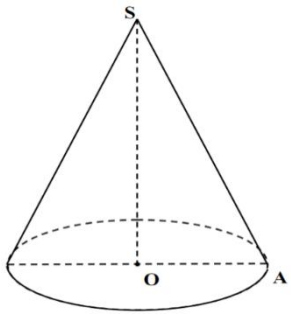
Thể tích của khối nón là: $V = \frac{1}{3}SO.\pi.OA^2 = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\pi.a^2 = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.

Câu 4: Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích khối nón đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{2\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử khối nón có đỉnh S, đường tròn đáy tâm O và bán kính $R = OA$.

Ta có tam giác SOA vuông tại O nên $R = OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(a\sqrt{3}\right)^2} = a$.

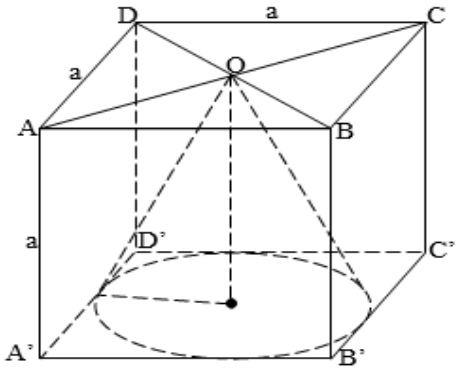
Thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi.a^2.a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Một hình nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Kết quả diện tích toàn phần S_{tp} của hình nón đó bằng $\frac{\pi a^2}{4}\left(\sqrt{b} + c\right)$ với b và c là hai số nguyên dương và $b > 1$. Tính bc.

A. $bc = 7$. **B.** $bc = 15$. **C.** $bc = 8$. **D.** $bc = 5$.

Lời giải

Chọn D



Hình nón có đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$ có cạnh là a nên đáy của hình nón là hình tròn có bán kính $r=\frac{a}{2}$.

Hình nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ nên chiều cao của hình nón bằng độ dài cạnh của hình vuông. Suy ra: $h=a$.

Khi đó: độ dài đường sinh của hình nón là: $l=\sqrt{h^2+r^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{5a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Diện tích toàn phần của hình nón là: $S_{tp}=\pi r(r+l)=\pi\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}+\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{\pi a^2}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)$.

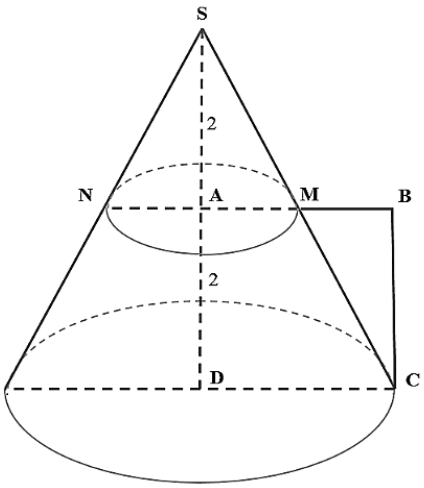
Suy ra: $b=5;c=1\Rightarrow bc=5$.

Câu 6: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Gọi M là trung điểm AB. Cho tứ giác $AMCD$ và các điểm trong của nó quay quanh trục AD ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích khối tròn xoay đó.

A. $\frac{7\pi}{3}$. **B.** $\frac{7\pi}{6}$. **C.** $\frac{14\pi}{3}$. **D.** $\frac{14\pi}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Cách 1

Gọi $S=CM\cap DA$. Vì M là trung điểm của AB, mà $\begin{cases}AM\,//\,CD\\AM=\frac{1}{2}CD\end{cases}$ nên AM là đường trung bình của $\Delta SCD\Rightarrow A$ là trung điểm của $SD\Rightarrow SD=2AD=4$.

Khi cho tứ giác $AMCD$ và các điểm trong của nó quay quanh trục AD thì ta được một khối nón cụt có chiều cao $AD=2$, hai đáy là hai đường tròn có bán kính lần lượt là $R_1=CD=2$, $R_2=AM=1$ và có thể tích là V.

Tam giác SCD và các điểm trong của nó quay quanh trục SD sẽ tạo thành một khối nón tròn xoay có chiều cao $SD=4$, bán kính đáy $R_1=CD=2$ nên có thể tích là $V_1=\frac{1}{3}\pi R_1^2.SD=\frac{16\pi}{3}$.

Tam giác SAM và các điểm trong của nó quay quanh trục SD tạo thành một khối nón tròn xoay có chiều cao $SA=2$, bán kính đáy $R_2=AM=1$ nên có thể tích là $V_2=\frac{1}{3}\pi R_2^2.SA=\frac{2\pi}{3}$.

Ta có $V=V_1-V_2=\frac{14\pi}{3}$.

Cách 2:

Áp dụng công thức tính nhanh thể tích khối nón cụt có chiều cao h, hai bán kính đáy là R_1,R_2

$V=\frac{1}{3}\pi\left(R_1^2+R_2^2+R_1R_2\right).h=\frac{1}{3}\pi\left(4+1+2\right).2=\frac{14\pi}{3}$.

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng 3. Tính diện tích xung quanh S_{xq} hình nón có đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ và đỉnh là tâm hình vuông $A'B'C'D'$.

A. $S_{xq}=8\sqrt{3}\pi$. **B.** $S_{xq}=\dfrac{9\sqrt{5}\pi}{4}$. **C.** $S_{xq}=\dfrac{9\sqrt{5}\pi}{2}$. **D.** $S_{xq}=8\sqrt{5}\pi$

Lời giải

Chọn B

Hình nón có đáy là đường tròn bán kính bằng $R=\dfrac{3}{2}$ và chiều cao $h=3$.

Độ dài đường sinh là: $l=\sqrt{R^2+h^2}=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+3^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.

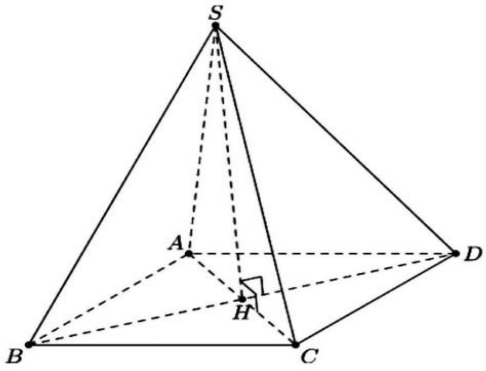
Diện tích xung quanh: $S_{xq}=\pi Rl=\dfrac{9\sqrt{5}\pi}{4}$.

Câu 2: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa cạnh bên với mặt đáy bằng $45°$. Tính diện tích xung quanh của khối nón đỉnh S, đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

A. $4\sqrt{2}\pi a^2$. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $2\sqrt{2}\pi a^2$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Vì đường tròn ngoại tiếp $ABCD$ mà đáy là hình vuông nên $R=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}.2a\sqrt{2}=a\sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông SAH có $SA=l=\dfrac{AC}{2\cos 45°}=\dfrac{2a\sqrt{2}}{2.\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=2a$.

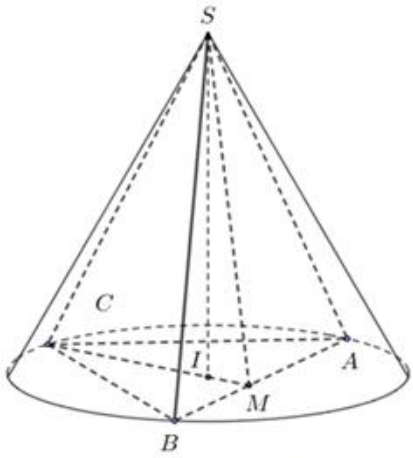
Diện tích xung quanh của hình nón là: $S=\pi Rl=\pi.a\sqrt{2}.2a=2\sqrt{2}a^2$.

Câu 3: Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, góc giữa mặt bên và đáy bằng $60°$. Tính thể tích của khối nón đỉnh S, có đáy là hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3}{6}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là tâm đường tròn $(ABC) \Rightarrow IA = r = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2} = a$.

Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow AB \perp (SMC)$

$\Rightarrow$ Góc giữa mặt bên và mặt đáy là góc $SMC = 60°$

$\Rightarrow SI = IM.\tan 60° = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

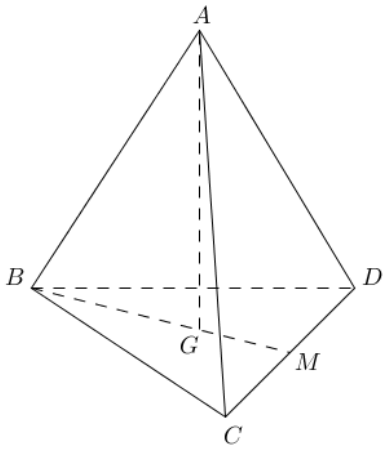
Thể tích khối nón $V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}\pi r^2.SI = \frac{1}{3}\pi a^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 4: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh $3a$. Thể tích khối nón đỉnh A và đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác BCD bằng

A. $\frac{\sqrt{6}}{4}\pi a^3$. **B.** $\sqrt{6}\pi a^3$. **C.** $3\sqrt{6}\pi a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{108}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm cạnh CD và G là trọng tâm tam giác BCD.

Vì tam giác BCD đều cạnh $3a$ nên $BM = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

G là trọng tâm tam giác BCD, suy ra $BG = \frac{2}{3}.BM = a\sqrt{3}, GM = \frac{1}{3}BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác AGB có: $AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \sqrt{(3a)^2 - \left(a\sqrt{3}\right)^2} = a\sqrt{6}$.

Khối nón đỉnh A và đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác BCD có chiều cao $h = AG = a\sqrt{6}$ và bán kính đáy $r = GM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

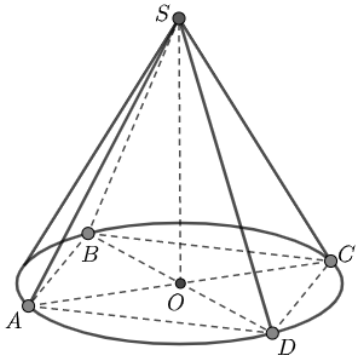
Vậy thể tích khối nón là: $V = \dfrac{1}{3}.h.\pi r^2 = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{6}.\pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{\sqrt{6}}{4}\pi a^3$.

Câu 5: Cho hình nón (N) đỉnh S có bán kính đáy bằng a và diện tích xung quanh $S_{xq} = 2\pi a^2$. Tính thể tích V của khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ nội tiếp đường tròn đáy của hình nón (N).

A. $V = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V = \dfrac{2a^3\sqrt{5}}{3}$. **C.** $V = \dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $V = 2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Do đường tròn đáy có bán kính đáy bằng a nên $OA = a \Rightarrow AB = a\sqrt{2}$.

Mặt khác, $S_{xq} = 2\pi a^2 \Rightarrow \pi a.l = 2\pi a^2 \Rightarrow l = SA = 2a$.

Chiều cao của khối chóp $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

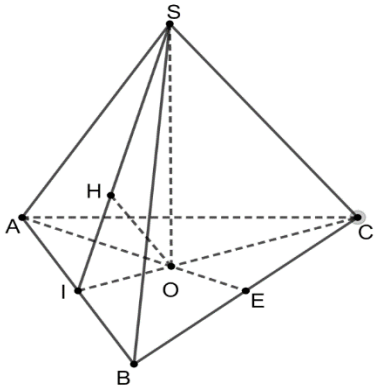
Thể tích của khối chóp là: $V = \dfrac{1}{3}2a^2.a\sqrt{3} = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

Câu 6: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $5\sqrt{2}$, khoảng cách từ tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đến một mặt bên là 2. Thể tích của khối nón ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng:

A. $\dfrac{500}{9}\pi$. **B.** $\dfrac{2000}{9}\pi$. **C.** $\dfrac{500}{3}\pi$. **D.** $\dfrac{500}{27}\pi$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I, E lần luợt là trung điểm của AB, BC. Kẻ $OH \perp SI$ $(H \in SI)$.

Ta có $SO \perp (ABC) \Rightarrow SO \perp AB$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow AB \perp OH$.

Ta có $\begin{cases} OH \perp AB \\ OH \perp SI \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow d(O;(SAB)) = OH = 2$.

Ta có $OI = \frac{1}{3}CI = \frac{1}{3}.\frac{5\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$.

Xét ΔSOI có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{\left(\frac{5\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \frac{1}{100} \Rightarrow SO = 10$.

Xét khối nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có chiều cao $h = SO = 10$, $r = OC = \frac{2}{3}CI = \frac{5\sqrt{6}}{3}$.

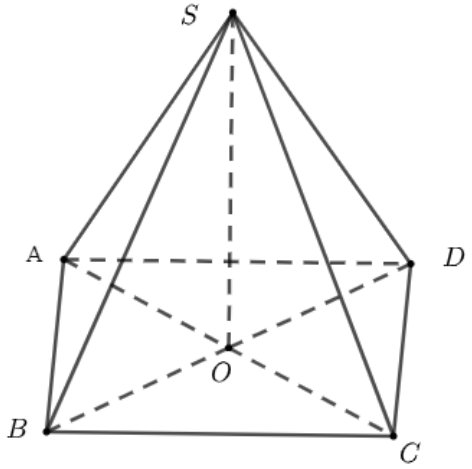
Thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{5\sqrt{6}}{3}\right)^2.10 = \frac{500}{9}\pi$.

Câu 7: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh đều bằng $a\sqrt{2}$. Thể tích khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy nội tiếp tứ giác $ABCD$ bằng

A. $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\pi a^3}{2}$. **C.** $\frac{\pi a^3}{6}$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ nên đáy $ABCD$ là hình vuông.

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$; $AC = 2a; AO = \frac{AC}{2} = a$.

Đường tròn đáy nội tiếp tứ giác $ABCD$ có tâm O, bán kính $r = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác vuông SOA có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = a$.

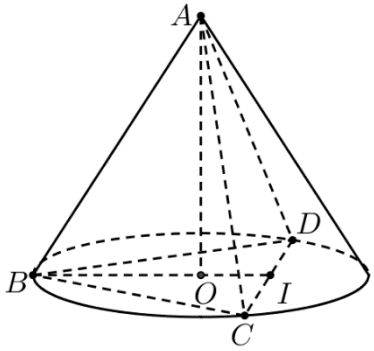
Thể tích khối nón bằng $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.a = \frac{\pi a^3}{6}$.

Câu 8: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Khối nón có đỉnh là A, đáy là đường tròn ngoại tiếp ΔBCD thì có thể tích bằng

A. $\frac{a^3\pi\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{a^3\pi\sqrt{6}}{9}$. **C.** $\frac{a^3\pi\sqrt{2}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\pi\sqrt{6}}{27}$.

Lời giải

Chọn D



Tam giác ΔBCD là tam giác đều cạnh a nên $BI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OB = \frac{2}{3}BI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác AOB vuông tại O có $AO = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy thể tích hình nón có đỉnh A, đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BDC là:

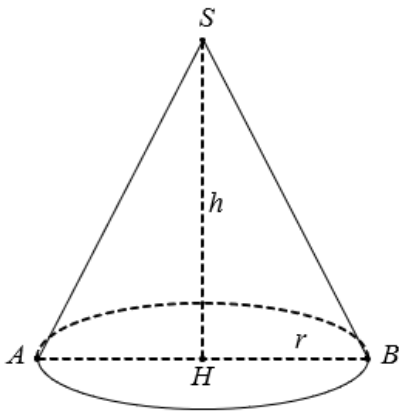
$V = \frac{1}{3}\pi.OB^2.AO = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2.\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{a^3\pi\sqrt{6}}{27}$.

Câu 9: Cho hình nón (N) có đường sinh tạo với đáy một góc $60°$. Mặt phẳng qua trục của (N) cắt (N) theo thiết diện là một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Tính thể tích V của khối nón giới hạn bởi (N).

A. $V = 3\sqrt{3}\pi$. **B.** $V = 9\sqrt{3}\pi$. **C.** $V = 3\pi$. **D.** $V = 9\pi$.

Lời giải

Chọn C



Thiết diện qua trục của (N) là ΔSAB

Vì ΔSAB cân tại S, $SAB = 60^o$ (gt) $\Rightarrow \Delta SAB$ đều $\Rightarrow l = 2R$ (R là bán kính nón)

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều SAB

Có $r=\dfrac{S_{\Delta SAB}}{p}=\dfrac{\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{3l}{2}}=\dfrac{l\sqrt{3}}{6}=1\Leftrightarrow l=2\sqrt{3}$

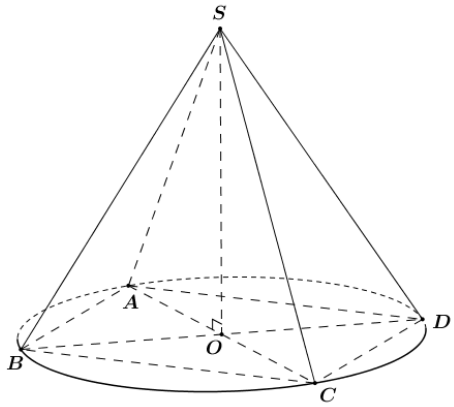
Ta được ciều cao của nón $h=l.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3$. Vậy $V_{(N)}=\dfrac{1}{3}\pi R^2h=3\pi.$

Câu 10: Cho hình chóp $SABCD$ có $SA=SB=SC=SD$. Đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=a$, $AD=2a$, góc giữa SA và mặt phẳng đáy là 60^0. Tính thể tích của khối nón có đỉnh là S, đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

A. $\dfrac{5\pi a^3\sqrt{15}}{6}$. **B.** $\dfrac{5\pi a^3\sqrt{15}}{72}$. **C.** $\dfrac{5\pi a^3\sqrt{15}}{24}$. **D.** $\dfrac{5\pi a^3\sqrt{15}}{8}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Vì $SA=SB=SC=SD\Rightarrow SO\perp(ABCD)$. Ta có: $AC=a\sqrt{5}\Rightarrow AO=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Hình chiếu của SA lên mặt phẳng đáy là OA nên góc giữa SA và mặt phẳng đáy là $SAO=60°$.

Xét tam giác SAO: $\tan SAO=\dfrac{SO}{OA}\Rightarrow SO=OA.\sqrt{3}=\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

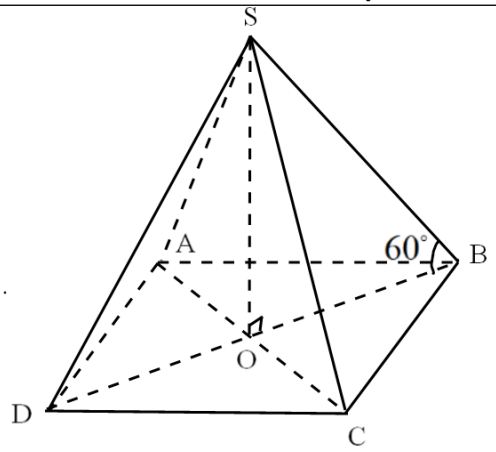
Thể tích của khối nón cần tính là $V=\dfrac{1}{3}\pi.OA^2.SO=\dfrac{1}{3}\pi.\left(\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2.\dfrac{a\sqrt{15}}{2}=\dfrac{5\pi a^3\sqrt{15}}{24}$.

Câu 11: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên tạo với đáy góc 60°. Thể tích khối nón ngoại tiếp hình chóp là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $S.ABCD$ là hình chóp đều, gọi $O = AC \cap BD$

$\Rightarrow$ Góc giữa cạnh bên với mặt đáy là $SBO = 60^\circ$

$ABCD$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow BD = a\sqrt{2}$

Khối nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có bán kính đường tròn đáy $R = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

ΔSOB vuông tại O, có $OB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, góc $SBO = 60^\circ$

$\Rightarrow$ Chiều cao khối nón $h = SO = \tan 60^\circ .OB = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

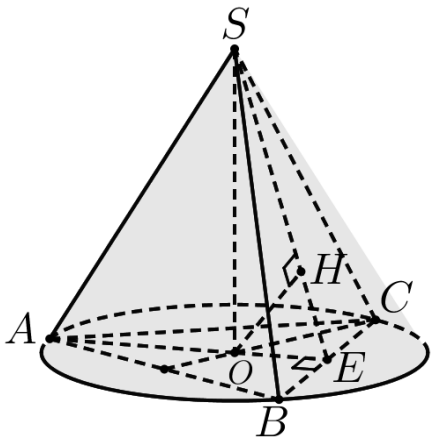
$\Rightarrow$ Thể tích khối nón là: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 .\dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}\pi$.

Câu 12: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác đáy ABC đến một mặt bên là $\dfrac{a}{2}$. Thể tích của khối nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{4\pi a^3}{9}$. **C.** $\dfrac{4\pi a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{4\pi a^3}{27}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi E là trung điểm của BC, suy ra $BC \perp OE$.

Dựng $OH \perp SE$ tại H.

Ta có $\begin{cases} BC \perp OE \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOE) \Rightarrow BC \perp OH$.

Khi đó $\begin{cases} OH \perp BC \\ OH \perp SE \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SBC)$, suy ra $OH = d\left(O,(SBC)\right) = \dfrac{a}{2}$.

Vì tam giác đều ABC cạnh $2a$ nên $AE = 2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Suy ra $OA = \dfrac{2}{3}AE = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ và $OE = \dfrac{1}{3}AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác vuông SOE, ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OE^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OE^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow SO = a.$$

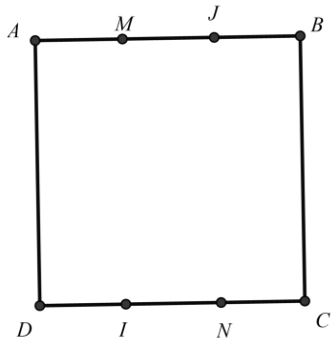
Khối nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có bán kính đáy $R = OA = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$, đường cao $h = SO = a$

Vậy thể tích khối nón: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2.h = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2.a = \dfrac{4\pi a^3}{9}$.

Câu 13: Cho một miếng bìa hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 6. Trên cạnh AB lấy điểm M, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $AM = CN = 2$. Cuốn miếng bìa sao cho AD trùng BC để tạo thành một hình trụ. Tính thể tích tứ diện $ADMN$.

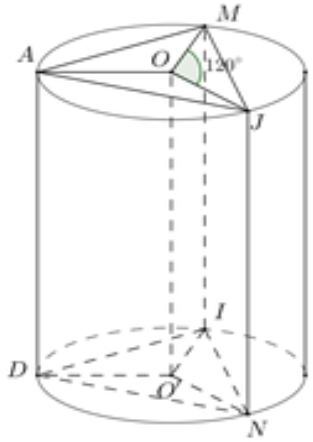
A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi^2}$. **B.** $\dfrac{81\sqrt{3}}{2\pi^2}$. **C.** $\dfrac{27\sqrt{3}}{2\pi^2}$. **D.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{2\pi^2}$.

Lời giải



Chọn C

Xét hình vuông $ABCD$, trên cạnh AB lấy điểm J sao cho $AM = MJ = JB = 2$, trên cạnh DC lấy điểm I sao cho $DI = IN = NC = 2$.



Xét đường tròn đáy hình trụ có độ dài các cung $AM = MJ = JA = DI = IN = ND = 2$ nên $AMJ.AIN$ là hình lăng trụ đều có đáy là 2 tam giác đều bằng nhau, đường cao $AD = 6$.

Xét đường tròn tâm O có tam giác AMJ là tam giác đều nội tiếp đường tròn.

Mặt khác chu vi đường tròn bằng $2\pi R = 6$ (độ dài cạnh hình vuông $AB = 6$).

Nên $R = \dfrac{3}{\pi}$.

Vậy trong tam giác đều AMJ có: $AM\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{3}{\pi} \Rightarrow AM = \dfrac{3\sqrt{3}}{\pi} \Rightarrow S_{\Delta AMJ} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}.\dfrac{27}{\pi^2}$.

Vậy thể tích hình lăng trụ đều $AMJ.DIN$ bằng:

$V_{AMJ.DNI} = AD.S_{AMJ} = 6.\dfrac{27}{\pi^2}.\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{81\sqrt{3}}{2\pi^2}$.

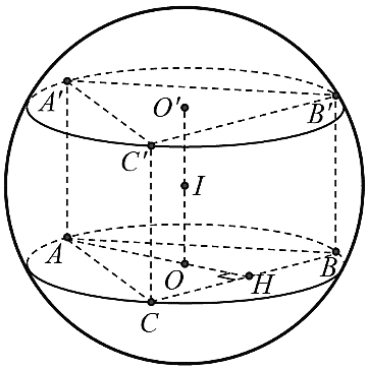
Mặt khác $V_{ADMN} = \dfrac{1}{3}V_{AMJ.DNI} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{81\sqrt{3}}{2\pi^2} = \dfrac{27\sqrt{3}}{2\pi^2}$.

Câu 14: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng 1. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đó.

A. $V = \dfrac{5\pi\sqrt{21}}{54}$. **B.** $V = \dfrac{5\pi\sqrt{15}}{18}$. **C.** $V = \dfrac{7\pi\sqrt{21}}{18}$. **D.** $V = \dfrac{7\pi\sqrt{21}}{54}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I và R lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Do $R = IA = IB = IC = IA' = IB' = IC' \Rightarrow$ tâm I là trung điểm của OO' với O và O' lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC và $\Delta A'B'C'$.

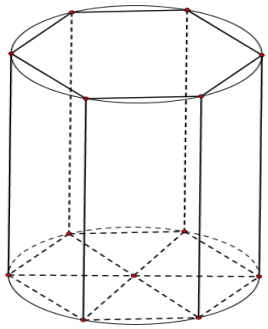
Do đó $OI = \dfrac{OO'}{2} = \dfrac{1}{2}, AO = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{2}{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác vuông OAI có: $R = IA = \sqrt{IO^2 + OA^2} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{21}}{6}$.

Vậy thể tích khối cầu là: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi.\left(\dfrac{\sqrt{21}}{6}\right)^3 = \dfrac{7\pi\sqrt{21}}{54}$.

Câu 15: Một đội xây dựng cần hoàn thiện một hệ thống cột tròn của một cửa hàng kinh doanh gồm 15 chiếc. Trước khi hoàn thiện mỗi chiếc cột là mội khối bê tông cốt thép hình lăng trụ lục giác đều có cạnh 14 cm, sau khi hoàn thiện (bằng cách trát thêm vữa tổng hợp vào xung quanh) mỗi cột là một khối trụ có đường kính bằng 30cm. biết chiều cao của mỗi cột trước và sau khi hoàn thiện là 390 cm. Tính lượng vữa hỗn hợp cần dùng (đơn vị m^3, làm tròn đến một chữ thập phân sau dấu phảy).

A. $1{,}1$. **B.** $1{,}9$. **C.** $2{,}0$. **D.** $1{,}2$.



Lời giải

Chọn D.

Thể tích lăng trụ (phần bê tông cốt thép): $V_1 = S.h = 6.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.h = 294h\sqrt{3}$.

Đường kính của cột tròn $r = \dfrac{30}{2} = 15cm$

Thể tích của khối trụ là: $V_2 = \pi r^2 h = 15^2\pi h = 225\pi h$.

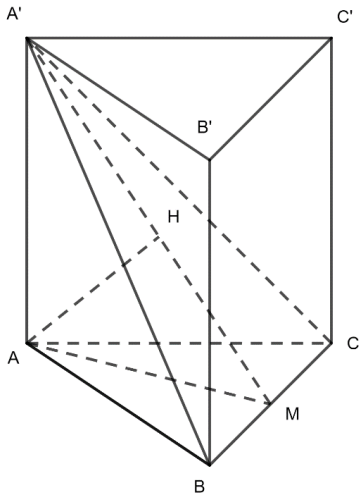
Thể tích phần vữa hỗn hợp $V = 15(V_2 - V_1) = 15\left(225\pi - 294\sqrt{3}\right)h = 15\left(225\pi - 294\sqrt{3}\right).390.10^{-6} = 1,2m^3$.

Câu 16: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy là $2a$, biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{4\pi a^2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $4\pi a^2\sqrt{3}$. **C.** $4\pi a^2\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{2\pi a^2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của BC. Kẻ $AH \perp A'M\ (H \in A'M)$

Khi đó $d\left(A;(A'BC)\right) = AH = a\sqrt{2}$

Vì ΔABC đều $\Rightarrow AM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Xét $\Delta A'AM$ vuông tại A có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Rightarrow AA' = a\sqrt{6}$

Bán kính hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R=\frac{2}{3}AM=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Diện tích xung quanh của hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

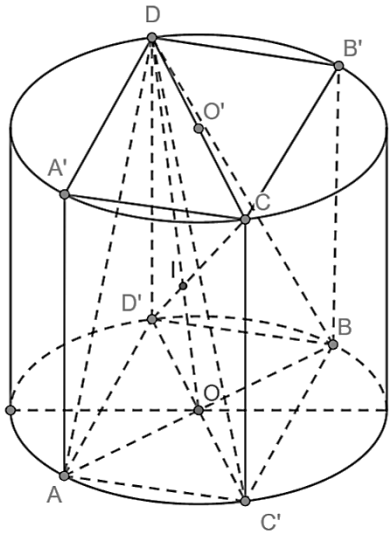
$S_{xq}=2\pi Rh=2\pi.\frac{2a\sqrt{3}}{3}.a\sqrt{6}=4\pi a^2\sqrt{2}$.

Câu 17: Cho hình trụ (T) có AB,CD lần lượt là hai đường kính của hai đường tròn đáy của hình trụ và đồng thời vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng 10. Thể tích khối trụ (T) bằng

A. 60π. **B.** 15π. **C.** 15π. **D.** 30π.

Lời giải

Chọn B



Dựng các đường thẳng $AA';BB';CC';DD'$ song song với đường sinh của hình trụ (như hình vẽ) tạo thành hình lăng trụ đứng.

Gọi O là giao của AB và $C'D'$.

Gọi I là giao điểm của DO và $D'C$. Khi đó, áp dụng định lí ta lét ta có: $\frac{IC}{ID}=\frac{DC}{D'O}=2$.

Ta có $\frac{V_{C.ABD}}{V_{D'.ABD}}=\frac{CI}{D'I}=2$; $\frac{V_{D'ABD}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\frac{1}{6}.\Rightarrow\frac{V_{C.ABD}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\frac{1}{3}$.

Theo bài ra $V_{CABD}=10\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'}=30$

$\Leftrightarrow DD'.\frac{1}{2}AB.CD=30\Leftrightarrow h.\frac{1}{2}.2r.2r=30\Leftrightarrow hr^2=15$.

Vậy thể tích khối trụ là: $V=\pi.r^2.h=15\pi$

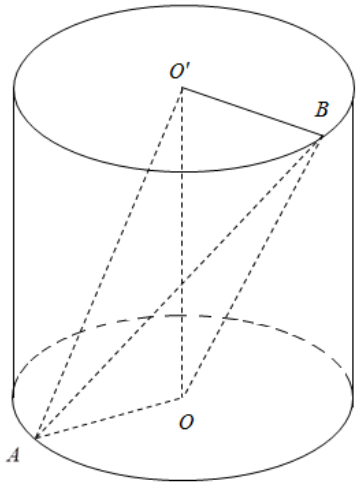
Cách 2: Áp dụng công thức:

$V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB.CD.d\left(AB,CD\right).\sin\left(AB,CD\right)=\frac{1}{6}\left(2R\right)^2.h\Rightarrow R^2h=\frac{3}{2}.V_{ABCD}=15$.

Khi đó thể tích khối trụ: $V=\pi R^2h=15\pi$.

Câu 18: Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy hai điểm A,D sao cho $AD=2a\sqrt{3}$. Gọi C là hình chiếu

vuông góc của D lên mặt phẳng chứa đường tròn (O'). Trên đường tròn tâm O' lấy điểm B (AB chéo với CD). Đặt α là góc giữa AB và đáy.

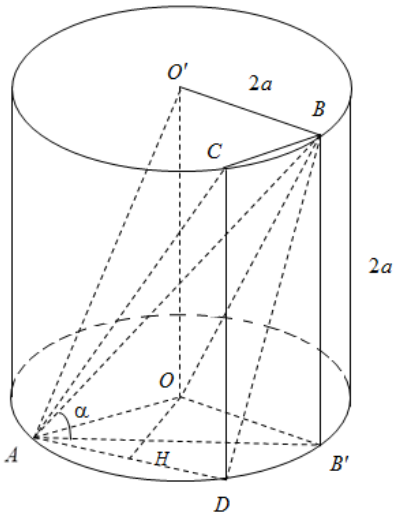


Tính $\tan\alpha$ khi thể tích tứ diện $CDAB$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\tan\alpha=\sqrt{3}$. **B.** $\tan\alpha=1$. **C.** $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn C



C là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng chứa đường tròn (O') nên C nằm trên đường tròn (O').

Tam giác ACD vuông tại D nên ta có diện tích tam giác ACD là

$S_{ACD}=\dfrac{1}{2}AD.CD=\dfrac{1}{2}.2a\sqrt{3}.2a=2a^2\sqrt{3}$.

Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng chứa đường tròn (O).

Khi đó góc giữa AB với mặt phẳng đáy là góc $BAB'=\alpha$.

$AB'=BB'.\cot\alpha=2a\cot\alpha$.

Từ giả thiết có tam giác AOD cân tại O và $AOD=120°$.

Gọi H là trung điểm AD thì ta có $OH=AH.\tan 30°=a\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{3}=a$.

Đồng thời có $OH\perp(ACD)$.

Gọi K là hình chiếu của B' trên AD thì ta có $B'K \perp OH$ và $B'K = d\left(B',(ACD)\right) = d\left(B,(ACD)\right)$.

Có: $V_{CDAB} = \frac{1}{3} S_{ACD}.d\left(B,(ACD)\right) = \frac{1}{3} S_{ACD}.B'K$.

Thể tích của khối tứ diện $CDAB$ đạt giá trị lớn nhất khi $B'K$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ $K \equiv H$ và B', O, H thẳng hàng $\Leftrightarrow B'H = B'O + OH = 2a + a = 3a$.

Suy ra $AB' = \sqrt{AH^2 + B'H^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(3a\right)^2} = 2a\sqrt{3}$.

Từ đó: $2a\sqrt{3} = 2a.\cot\alpha \Leftrightarrow \cot\alpha = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

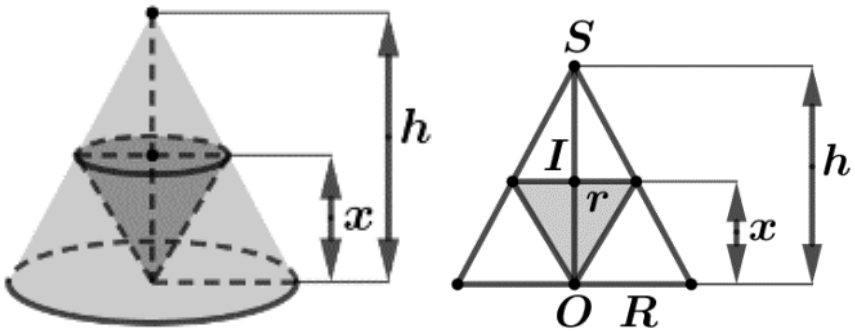
Dạng 5: Cực trị khối nón, khối trụ

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Cho hình nón (N_1) có đỉnh S, chiều cao h. Một hình nón (N_2) có đỉnh là tâm của đáy (N_1) và có đáy là một thiết diện song song với đáy của (N_1) như hình vẽ. Khối nón (N_2) có thể tích lớn nhất khi chiều cao x bằng

A. $x=\dfrac{2h}{3}$. **B.** $x=\dfrac{h}{2}$. **C.** $x=\dfrac{h\sqrt{3}}{3}$. **D.** $x=\dfrac{h}{3}$.

Lời giải



Xét mặt cắt qua trục hình nón và kí hiệu như hình vẽ. Với O, I lần lượt là tâm đáy của hình nón (N_1), (N_2); R, r lần lượt là các bán kính của hai đường tròn đáy của (N_1), (N_2).

Ta có $\dfrac{SI}{SO}=\dfrac{r}{R}\Leftrightarrow\dfrac{h-x}{h}=\dfrac{r}{R}\Rightarrow r=\dfrac{R(h-x)}{h}$.

Thể tích khối nón (N_2) là: $V_{(N_2)}=\dfrac{1}{3}\pi r^2x=\dfrac{1}{3}\pi.\dfrac{R^2(h-x)^2}{h^2}.x=\dfrac{\pi R^2}{3h^2}\times x(h-x)^2$.

Xét hàm $f(x)=x(h-x)^2$ với $0<x<h$.

Áp dụng BĐT Cauchy cho 3 số dương, ta có:

$$f(x)=\frac{2x(h-x)(h-x)}{2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{2x+h-x+h-x}{3}\right)^3=\frac{4h^3}{27}$$

Đẳng thức xảy ra khi $2x=h-x\Leftrightarrow\ x=\dfrac{h}{3}$.

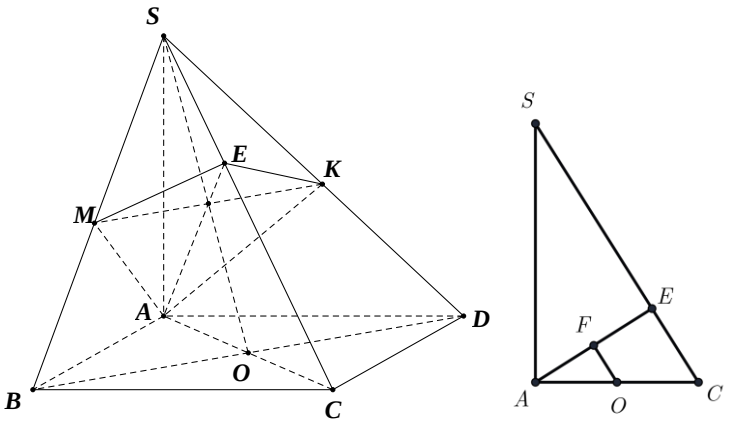
Vậy $\max\limits_{(0;h)}f(x)=\dfrac{4h^3}{27}$ đạt được khi $x=\dfrac{h}{3}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB=a;AD=a\sqrt{3}$, SA vuông góc với đáy. Gọi M, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD. Điểm E là giao điểm của SC và (AMK). Hình nón (N) có đường tròn đáy ngoại tiếp tam giác MKE và có đỉnh thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Khi hình nón (N) có thể tích lớn nhất thì SA bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** a. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $2a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $SC \perp (AMEK)$.

Lại có $AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp ME$.

Suy ra tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MEK là trung điểm F của AE.

Gọi O là tâm $ABCD$. Suy ra $OF // SC \Rightarrow OF \perp (MEK)$.

Vậy thể tích hình nón có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác MKE và đỉnh thuộc mặt phẳng $ABCD$ bằng

$V = \frac{1}{3}\pi.\left(\frac{AE}{2}\right)^2.OF = \frac{1}{12}.\pi.AE^2.OF = \frac{1}{24}.\pi.AE^2.OE$. Vậy $V_{\max} \Leftrightarrow AE^2.OE_{\max}$.

Ta có: $AE^2 + OE^2 = AC^2 = AB^2 + AD^2 = 4a^2$.

Suy ra $4a^2 = \frac{AE^2}{2} + \frac{AE^2}{2} + OE^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}AE^4OE^2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{AE^2}{2} = \frac{4}{3}a^2 \Leftrightarrow AE^2 = \frac{8a^2}{3} \Rightarrow \frac{1}{AE^2} = \frac{3}{8a^2}$.

Ta có: $\frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AE^2} \Rightarrow AS = 2\sqrt{2}a$.

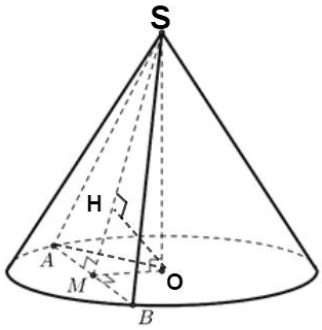
B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho khối nón tròn xoay đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O, góc ở đỉnh bằng $120°$. Mặt phẳng (Q) thay đổi, đi qua S và cắt khối nón theo thiết diện là tam giác SAB. Biết rằng giá trị lớn nhất diện tích tam giác SAB là $2a^2$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (Q) trong trường hợp diện tích tam giác SAB đạt giá trị lớn nhất là

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi đường sinh của hình nón là l.

$S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}SA.SB.\sin(ASB) = \frac{1}{2}l^2.\sin(ASB) \le \frac{1}{2}l^2 \Rightarrow (S_{\Delta SAB})_{\max} = \frac{1}{2}l^2$.

Dấu "=" xảy ra khi $\sin(ASB) = 1 \Leftrightarrow ASB = 90° \Leftrightarrow \Delta SAB$ vuông cân ở S.

Do đó $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}l^2 \Leftrightarrow 2a^2 = \frac{1}{2}l^2 \Rightarrow l = 2a.$

Tam giác SAB vuông cân ở $S \Rightarrow AB = SA.\sqrt{2} = 2a\sqrt{2}$

Góc ở đỉnh của hình nón là $120° \Rightarrow OSA = 60°$.

Xét ΔSOA vuông ở O: $\begin{cases} SO = SA.\cos 60° = a \\ AO = SA\sin 60° = a\sqrt{3} \end{cases}$.

Kẻ $OM \perp AB$ ở M. Kẻ $OH \perp SM$ ở H.

Ta có: $AB \perp OM; AB \perp SO \Rightarrow AB \perp (SOM) \Rightarrow AB \perp OH$.

Mà $OH \perp SM \Rightarrow OH \perp (SAB)$ tại $H \Rightarrow d(O;(Q)) = d(O;(SAB)) = OH$.

Ta có $AM = MB = a\sqrt{2}.$

Xét ΔOAM vuông ở $M \Rightarrow OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = a.$

Xét ΔSOM vuông ở O có $OM = SO = a$ nên ΔSOM vuông cân ở O.

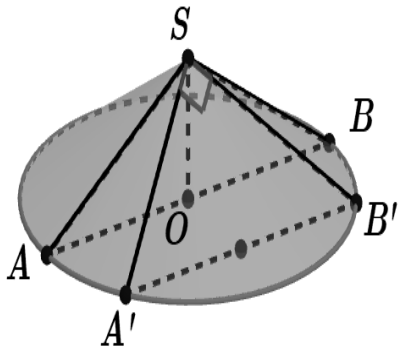
Mà OH là đường cao của tam giác $SOM \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow d(O;(Q)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 2: Cho hình nón có đỉnh S có bán kính đáy bằng a và góc ở đỉnh bằng $120°$. Thiết diện tạo bởi một mặt phẳng đi qua đỉnh S và hình nón là một tam giác có diện tích lớn nhất bằng:

A. $\frac{2}{3}a^2$ **B.** $\frac{1}{3}a^2$ **C.** $\frac{4}{3}a^2$ **D.** $\frac{2}{\sqrt{3}}a^2$

Lời giải

Chọn A



Ta có $AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA2SB\cos ASB \Leftrightarrow SA = \sqrt{\frac{AB^2}{2-2\cos ASB}} = \sqrt{\frac{(2a)^2}{2-2\cos 120°}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Ta có diện tích thiết diện là $S' = \frac{1}{2}l^2 \sin\alpha \le \frac{1}{2}l^2 = \frac{1}{2}SA^2 = \frac{2}{3}a^2$.

Đẳng thức xảy ra khi $\sin\alpha = 1$ hay $\alpha = A'SB' = 90°$.

Câu 3: Để làm một hình trụ có nắp, bằng tôn và có thể tích $V = 5\pi\ (m^3)$, cần ít nhất bao nhiêu mét vuông tôn?

A. $5\pi\ \left(m^2\right)$. **B.** $\pi\sqrt[3]{50}\ \left(m^2\right)$. **C.** $\pi\sqrt[3]{25}\ \left(m^2\right)$. **D.** $25\pi\ \left(m^2\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $V = B.h = \pi r^2 h = 5\pi \Rightarrow h = \frac{5}{r^2}$.

$S_{tp} = S_{xq} + 2B = 2\pi rh + 2\pi r^2 = \frac{10\pi}{r} + 2\pi r^2 = \pi\left(\frac{5}{r} + \frac{5}{r} + 2r^2\right)$.

Suy ra: $S_{tp} = \pi\left(\frac{5}{r} + \frac{5}{r} + 2r^2\right) \ge \pi\sqrt[3]{\frac{5}{r}.\frac{5}{r}.2r^2} = \pi\sqrt[3]{50}\ \left(m^2\right)$.

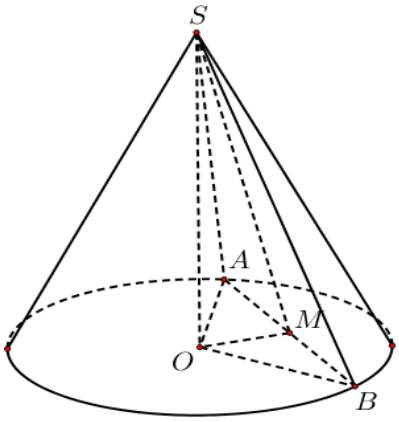
Số mét vuông tôn cần ít nhất là $\pi\sqrt[3]{50}\ \left(m^2\right)$.

Câu 4: Cho hình nón đỉnh S, góc ở đỉnh bằng $120°$, bán kính đáy bằng $R = 3a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S cắt nón theo thiết diện là 1 tam giác. Khi diện tích thiết diện lớn nhất $S_{\max}$, tính góc α giữa thiết diện và mặt đáy?

A. 30^o **B.** 45^o **C.** 60^o **D.** $\tan\alpha = 2$

Lời giải

Chọn B



Gọi thiết diện qua đỉnh của hình chóp là ΔSAB với M là trung điểm của AB.

Vì góc ở đỉnh bằng $120°$ nên $OSB = 60^o \Rightarrow SBO = 30^o$.

Xét ΔSOB: $SO = OB.\tan 30^o = 3a\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 3a$.

Đặt $OM = x$. Với $0 < x < 3a\sqrt{3}$.

Xét ΔSOM: $SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{9a^2 + x^2}$.

Xét ΔBOM: $BM = \sqrt{OB^2 - OM^2} = \sqrt{27a^2 - x^2}$.

Vậy $AB = 2BM = 2\sqrt{27a^2 - x^2}$.

Diện tích: $S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2}AB.SM = \dfrac{1}{2}.2\sqrt{27a^2 - x^2}.\sqrt{9a^2 + x^2} = \sqrt{\left(27a^2 - x^2\right).\left(9a^2 + x^2\right)}$.

$\Rightarrow S_{\Delta SAB} \le \dfrac{27a^2 - x^2 + 9a^2 + x^2}{2} = 18a^2$.

$\Rightarrow S_{\max} = 18a^2$. Dấu bằng xảy ra khi: $27a^2 - x^2 = 9a^2 + x^2 \Leftrightarrow x^2 = 9a^2 \Leftrightarrow x = 3a$.

Ta có $\begin{cases} OM \perp AB \\ SM \perp AB \end{cases}$ nên góc giữa (SAB) và mặt đáy là $SMO = \alpha$.

Khi đó $\tan\alpha = \dfrac{SO}{MO} = \dfrac{3a}{3a} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^o$.

Câu 5: Một gia đình dự định làm bể lọc nước có dạng hình nón có bán kính đáy là r và đường sinh bằng $3\ m$. Phần lắp đậy của bể được làm bằng tôn với giá thành 0,5 triệu đồng $1\ m^2$ còn phần thành bể được làm bằng thép không rỉ với giá 2 triệu đồng $1\ m^2$. Để phù hợp với thiết kế nhà cần dung tích bể nước là lớn nhất, vậy chi phí để thi công bể là bao nhiêu triệu đồng?

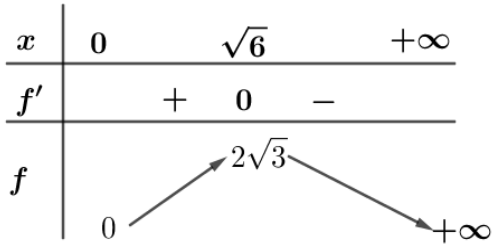
A. $3\pi + 3\pi\sqrt{6}$. **B.** $3\pi + \pi\sqrt{6}$. **C.** $\pi + 3\pi\sqrt{6}$. **D.** $3\pi + 6\pi\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn D

Thể tích bể nước: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2.h = \dfrac{1}{3}\pi r^2.\sqrt{9 - r^2}$.

Xét hàm số $f(r) = \dfrac{1}{3}\pi r^2.\sqrt{9 - r^2} \Rightarrow f'(r) = \dfrac{1}{3}\pi.\left(2r.\sqrt{9 - r^2} - \dfrac{r^3}{\sqrt{9 - r^2}}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = -\sqrt{6} \\ r = 0 \\ r = \sqrt{6} \end{array}\right.$



Vậy dung tích bể lớn nhất khi $r=\sqrt{6}$

Vậy chi phí làm bể là:

Phần lắp đậy của bể: $T_1=0,5.\pi r^2=3\pi$ (Triệu đồng).

Phần thành bể: $T_2=2.\pi rl=6\sqrt{6}\pi$ (Triệu đồng).

Vậy tổng chi phí thi công là $3\pi+6\pi\sqrt{6}$.

Câu 6: Một nhà sản xuất sữa bột dành cho trẻ em cần thiết kế hộp sữa có dạng một hình trụ có thể tích bằng 1 dm^3. Để diện tích toàn phần (nguyên liệu làm vỏ hộp) nhỏ nhất thì chiều cao của hộp sữa là bao nhiêu?

A. $h=\sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}}\ (\text{dm})$. **B.** $h=\sqrt[3]{\dfrac{2}{\pi}}\ (\text{dm})$. **C.** $h=\sqrt{\dfrac{4}{\pi}}\ (\text{dm})$. **D.** $h=\sqrt[3]{\dfrac{3}{\pi}}\ (\text{dm})$.

Lời giải

Gọi h là chiều cao hình trụ. Khi đó bán kính đáy trụ là: $V=\pi r^2.h\Rightarrow r^2=\dfrac{1}{\pi.h}\Rightarrow r=\sqrt{\dfrac{1}{\pi.h}}$.

Diện tích toàn phần của hình trụ:

$$S=2\pi rh+2\pi r^2=2\pi\left(\sqrt{\frac{1}{\pi h}}.h+\frac{1}{\pi h}\right)=2\pi\left(\sqrt{\frac{h}{\pi}}+\frac{1}{\pi h}\right)=2\left(\sqrt{\pi h}+\frac{1}{h}\right)$$

$$=\sqrt{\pi}\sqrt{h}+\sqrt{\pi}\sqrt{h}+\frac{2}{h}\overset{\text{Cauchy}}{\geq}3\sqrt[3]{2\pi}.$$

Suy ra $S_{Min}=3\sqrt[3]{2\pi}$ đẳng thức xảy ra khi $\sqrt{\pi}.\sqrt{h}=\dfrac{2}{h}\Leftrightarrow h\sqrt{h}=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\Leftrightarrow h^3=\dfrac{4}{\pi}\Leftrightarrow h=\sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}}$.

Câu 7: Cho hình trụ (T) có bán kính đáy $r=\sqrt{6}$ và chiều cao gấp đôi bán kính đáy. Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai đáy trụ. Trên đường tròn tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B sao cho thể tích của tứ diện $OO'AB$ lớn nhất. Tính AB?

A. $\sqrt{30}$. **B.** 6. **C.** 5. **D.** $4\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A xuống mặt đáy (O').

Ta có $OO'A'A$ là hình chữ nhật.

Ta có $S_{OO'A}=\dfrac{1}{2}S_{OO'AA'}=\dfrac{1}{2}.OO'.AA'=\dfrac{1}{2}\sqrt{6}.2\sqrt{6}=6.$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm B lên đường thẳng $O'A$.

Ta có $\begin{cases}BH\perp O'A'\\BH\perp OO'\end{cases}\Rightarrow BH\perp(OO'A).$

Thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ là $V=\dfrac{1}{3}BH.S_{OO'A}=2BH\leq 2OB=2\sqrt{6}$.

Khi đó tam giác $O'A'B$ vuông tại O'.

$\Rightarrow A'B = r\sqrt{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow A'B = \sqrt{AA'^2 + A'B^2} = \sqrt{24+12} = 6.$

Câu 8: Một hình trụ có độ dài đường cao bằng 4, các đường tròn đáy lần lượt là $(O;1)$ và $(O';1)$. Giả sử AB là một day cung cố định trên $(O;1)$ sao cho $AOB = 120°$ và MN là đường kính thay đổi trên $(O';1)$. Giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ABMN$ là

A. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $V_{ABMN} = \frac{1}{6} AB.MN.d(AB, MN).\sin(AB, MN)$.

Mà $d(AB, MN) = 4$; và có $\sin(AB, MN) \le 1$

Nên $V_{ABMN} \le \frac{1}{6}.AB.MN.4.1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ABMN$ là $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ khi $\sin(AB, MN) = 1 \Leftrightarrow AB \perp MN$

Câu 9: Ông A cần làm một cái bồn chứa dạng hình trụ có nắp đậy có thể tích $300l$ bằng inox để chứa nước. Hỏi bán kính đáy của thùng gần bằng số nào nhất trong các số dưới đây để tiết kiệm vật liệu nhất?

A. $40,5\ cm$. **B.** $3,63\ cm$. **C.** $36,3\ cm$. **D.** $4,05\ cm$.

Lời giải

Chọn C

Gọi h và R lần lượt là chiều cao và bán kính đáy ($h > 0$, $R > 0$, đơn vị: dm).

Ta có $V = \pi R^2 h = 300 \Rightarrow h = \frac{300}{\pi R^2}$

Diện tích toàn phần của hình trụ là: $S_{TP} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = \frac{600}{R} + 2\pi R^2$

Để tiết kiệm vật liệu nhất thì S_{TP} phải nhỏ nhất.

Ta có $S_{TP} = \frac{600}{R} + 2\pi R^2 = \frac{300}{R} + \frac{300}{R} + 2\pi R^2 \ge 3\sqrt[3]{\frac{300}{R}.\frac{300}{R}.2\pi R^2} = 30\sqrt[3]{180\pi}$

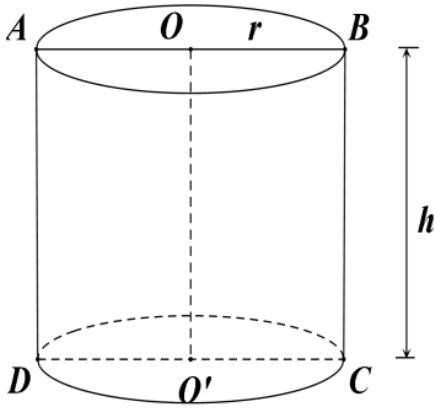
Dấu bằng xảy ra khi $\frac{300}{R} = 2\pi R^2 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{150}{\pi}} \approx 3,63(dm) \approx 36,3(cm)$.

Câu 10: Cho khối trụ có thiết diện tạo bởi mặt phẳng đi qua trục và khối trụ là hình chữ nhật có chu vi là $12\,cm$. Thể tích lớn nhất của khối trụ đó là?

A. 3π. **B.** 2π. **C.** 8π. **D.** 4π.

Lời giải

Chọn C



Gọi bán kính đáy và chiều cao của khối trụ đó lần lượt là r,h $(r,h>0)$

Theo giả thiết ta có: $2(h+2r)=12 \Leftrightarrow h+2r=6 \Leftrightarrow h=6-2r$ với $0<r<3$

Lại có: thể tích của khối trụ là: $V=\pi r^2 h=\pi r^2(6-2r)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số $r,r,6-2r$ ta có:

$r+r+(6-2r)\ge 3\sqrt[3]{r.r.(6-2r)} \Leftrightarrow r^2(6-2r)\le 8 \Leftrightarrow \pi r^2(6-2r)\le 8\pi \Leftrightarrow V\le 8\pi$.

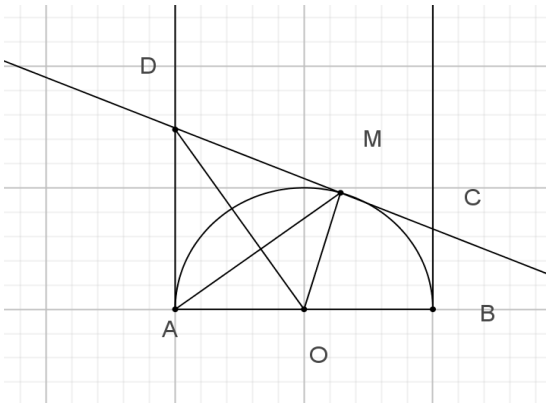
Dấu "=" xảy ra khi $r=6-2r \Leftrightarrow r=2$. Khi đó $V_{\max}=8\pi$

Câu 11: Cho nửa đường tròn đường kính $AB=4\text{cm}$, điểm M di động trên nửa đường tròn đó. Gọi d là tiếp tuyến với nửa đường tròn tại M, d cắt các tiếp tuyến của nửa đường tròn tại A,B lần lượt tại D,C. Khi quay tứ giác $ABCD$ quanh trục AB ta được một vật thể tròn xoay có thể tích nhỏ nhất là

A. $16\pi\text{cm}^3$. **B.** $\frac{16\pi}{3}\text{cm}^3$. **C.** $32\pi\text{cm}^3$. **D.** $\frac{32\pi}{3}\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn A



$ABCD$ là hình thang vuông. Thể tích của khối tròn xoay nhỏ nhất khi hình thang $ABCD$ có diện tích nhỏ nhất $S_{ABCD}=\frac{AB}{2}(AD+BC)$

Ta chứng minh được $AD+BC=CD$

Vì $DA=DM$ do $\Delta DAO=\Delta DMO$ (c.g.c). DO chung, $DAO=DMO$, $OA=OM$.

Tương tự ta chứng minh được $CM=CB$.

Từ đó $AD+BC=DM+CM=CD$.

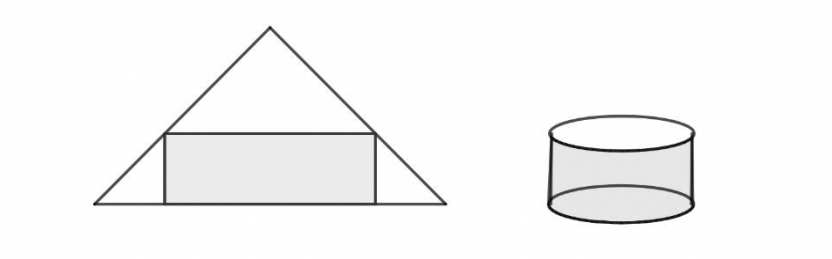
$S_{ABCD}=\frac{AB}{2}(AD+BC)=2(AD+BC)=2CD\ge 2AB$. Dó đó S_{ABCD} nhỏ nhất khi $CD=AB=4$.

Khí đó

Giả sử M là trung điểm của CD. $ABCD$ là hình chữ nhật. Khi quay quanh AB tạo thành hình trụ có bán kính $r = OM = 2cm, l = 4cm$.

Khi đó thể tích khối trụ bằng $V = \pi r^2 l = \pi 4.4 = 16\pi\left(cm^3\right)$.

Câu 12: Từ một tấm tôn hình tam giác đều cạnh bằng $6\,\text{m}$, ông A cắt thành một tấm tôn hình chữ nhật và cuộn lại được một cái thùng hình trụ(như hình vẽ).

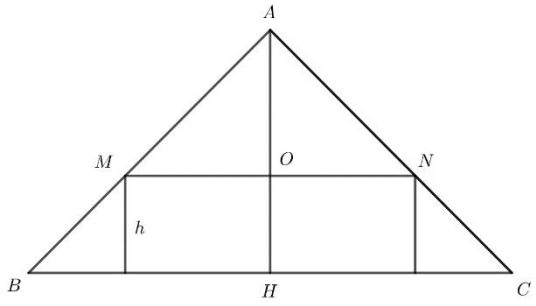


Ông A làm được cái thùng có thể tích tối đa là V (Vật liệu làm nắp thùng coi như không liên quan). Giá trị của V thỏa mãn:

A. $V \le 1m^3$. **B.** $V > 3m^3$. **C.** $2m^3 < V \le 3m^3$. **D.** $1m^3 < V \le 2m^3$.

Lời giải

Chọn C



Gọi h là chiều cao $0 < h < 3\sqrt{3}$ và r là bán kính đáy của cái thùng.

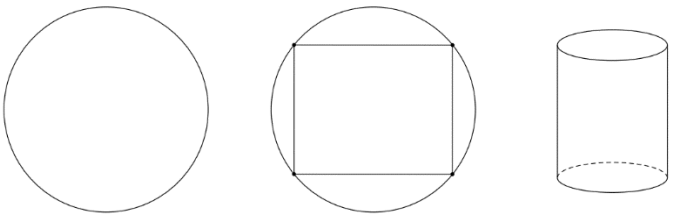
Theo định lý ta-let ta có: $\frac{AO}{AH} = \frac{MN}{BC} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}-h}{3\sqrt{3}} = \frac{2\pi r}{6} \Leftrightarrow r = \frac{3\sqrt{3}-h}{\pi\sqrt{3}}$.

Vậy $V = \pi r^2 h = \frac{1}{6\pi}(3\sqrt{3}-h)^2 2h \le \frac{1}{6\pi}\left(\frac{3\sqrt{3}-h+3\sqrt{3}-h+2h}{3}\right)^3 = \frac{1}{6\pi}(2\sqrt{3})^3 = \frac{4\sqrt{3}}{\pi}m^3$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 3\sqrt{3}-h = 2h \Leftrightarrow, h = \sqrt{3}$ (thõa mãn)

Khi đó: $V = \max V_t = \frac{4\sqrt{3}}{\pi}m^3 \Rightarrow 2m^3 < V \le 3m^3$.

Câu 13: Từ một miếng tôn hình tròn bán kính $2\,m$, người ta cắt ra một hình chữ nhật rồi uốn thành mặt xung quanh của một chiếc thùng phi hình trụ như hình vẽ bên dưới.

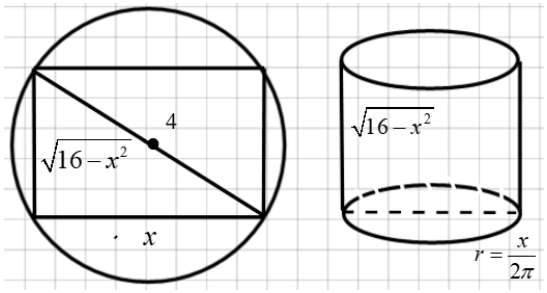


Để thể tích thùng lớn nhất thì diện tích phần tôn bị cắt bỏ gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. $5m^2$. **B.** $9m^2$. **C.** $8m^2$. **D.** $6m^2$.

Lời giải

Chọn A



Gọi x là độ dài một cạnh hình chữ nhật được cắt ra $(0<x<4)$.

Suy ra độ dài cạnh còn lại của hình chữ nhật là $\sqrt{16-x^2}$ (như hình vẽ trên).

Nên bán kính đáy của thùng phi là $r=\frac{x}{2\pi}$. Ta có $V_{phi}=\pi r^2 h=\frac{x^2}{4\pi}\sqrt{16-x^2}$.

Đặt $f(x)=x^2\sqrt{16-x^2}$.

V_{phi} đạt giá trị lớn nhất khi $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

$$f'(x)=2x.\sqrt{16-x^2}-\frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 4.\sqrt{\frac{2}{3}}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	0		$4.\sqrt{\frac{2}{3}}$		4
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$
$f(x)$	0	↗	$f\left(4.\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	↘	0

$$\Rightarrow \underset{(0;4)}{\text{Max}}\, f(x)=f\left(4.\sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

Vậy để thể tích thùng lớn nhất thì diện tích phần tôn bị cắt bỏ là

$$\pi.2^2-x.\sqrt{16-x^2}=4\pi-4.\sqrt{\frac{2}{3}}.\sqrt{16-\frac{32}{3}}\simeq 5.02.$$

Cách 2 : Tìm GTLN của V_{phi} :

Ta có : $V_{phi}=\pi r^2 h=\frac{x^2}{4\pi}\sqrt{16-x^2}=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{16-x^2}=\frac{1}{2\pi}.\sqrt{\frac{x^2}{2}.\frac{x^2}{2}.\left(16-x^2\right)}$

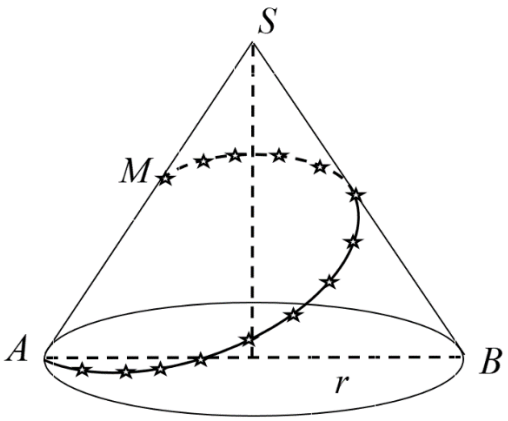
$$\Rightarrow V_{phi}\le\frac{1}{2\pi}.\sqrt{\left(\frac{\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+16-x^2}{3}\right)^3}=\frac{32\sqrt{3}}{9\pi}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{x^2}{2}=16-x^2\Leftrightarrow x=\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

Câu 14: Nhân dịp năm mới để trang trí một cây thông Noel, ở sân trung tâm có hình nón N như hình vẽ sau. Người ta cuộn quanh cây bằng một sợi dây đèn LED nhấp nháy, bóng đèn hình hoa tuyết

từ điểm A đến điểm M sao cho sợi dây luôn tựa trên mặt nón. Biết rằng bán kính đáy hình nón bằng $8m$, độ dài đường sinh bằng $24m$ và M là điểm sao cho $2\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$. Hãy tính chiều dài nhỏ nhất của sợi dây đèn cần có.

A. $8\sqrt{19}\ m$. **B.** $8\sqrt{13}\ m$. **C.** $8\sqrt{7}\ m$. **D.** $9\sqrt{12}\ m$.

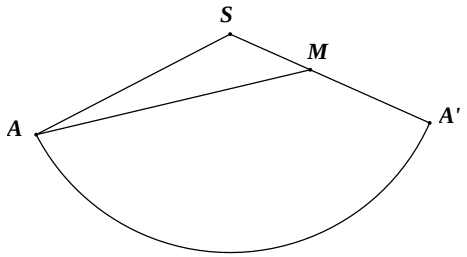


Lời giải

Chọn B

Ta có: $2\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{SM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SA}\Rightarrow SM=\frac{1}{3}SA=8\ m$.

Trải hình nón ra như hình bên dưới



Khi đó chu vi đáy của hình nón cũng là độ dài cung AA' suy ra $2\pi R=16\pi\ m\ =l_{AA'}$.

Góc $\alpha=ASA'=\frac{l_{AA'}}{SA}=\frac{16\pi}{24}=\frac{2\pi}{3}$

Chiều dài nhỏ nhất của sợi dây đèn cần có là đoạn thẳng $AM=\sqrt{SA^2+SM^2-2SA.SM.\cos\alpha}$

$=\sqrt{24^2+8^2-2.24.8.\cos\frac{2\pi}{3}}=8\sqrt{13}\ m$.

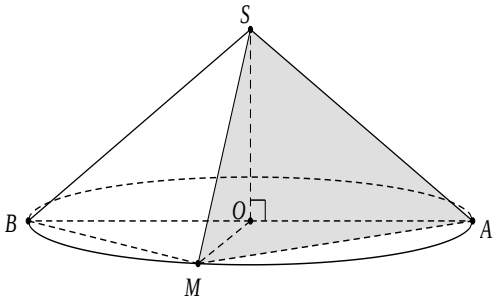
Câu 15: Một hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng $a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là 120^0. Thiết diện qua đỉnh của hình nón là một tam giác. Diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của thiết diện đó là bao nhiêu?

A. $S_{\max}=\frac{9a^2}{8}$. **B.** $S_{\max}=a^2\sqrt{2}$. **C.** $S_{\max}=4a^2$. **D.** $S_{\max}=2a^2$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử O là tâm đáy và AB là một đường kính của đường tròn đáy hình nón. Thiết diện qua đỉnh của hình nón là tam giác cân SAM .



Theo giả thiết hình nón có bán kính đáy $R = OA = a\sqrt{3}\,\text{cm}$, $ASB = 120^0$ nên $ASO = 60^0$. Xét tam giác SOA vuông tại O, ta có: $\sin 60^0 = \dfrac{OA}{SA} \Rightarrow SA = \dfrac{OA}{\sin 60^0} = 2a$.

Diện tích thiết diện là: $S_{\Delta SAM} = \dfrac{1}{2}SA.SM.\sin ASM = \dfrac{1}{2}2a.2a.\sin ASM = 2a^2 \sin ASM$

Do $0 < \sin ASM \le 1$ nên $S_{\Delta SAM}$ lớn nhất khi và chỉ khi $\sin ASM = 1$ hay khi tam giác ASM vuông cân tại đỉnh S (vì $ASB = 120^0 > 90^0$ nên tồn tại tam giác ASM thỏa mãn).

Vậy diện tích thiết diện lớn nhất là: $S_{\max} = 2a^2$ (đvdt).

Câu 16: Người ta cần làm một vật dụng dạng hình nón. Diện tích toàn phần của hình nón bằng $1600\pi(cm^2)$. Khi thể tích khối nón lớn nhất, bán kính đáy của chiếc nón là

A. $20\sqrt{2}cm$. ***B***. $20cm$. ***C***. $40cm$. ***D***. $40\sqrt{2}cm$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $a = 1600$

Gọi chiều cao và bán kính đáy của hình nón lần lượt là: $h; r$

Ta có:

$S_{tp} = \pi.r^2 + \pi.r.\sqrt{r^2+h^2} = a\pi \Rightarrow r^2 + r.\sqrt{r^2+h^2} = a \Leftrightarrow r.\sqrt{r^2+h^2} = a - r^2$

$\Leftrightarrow r^2\left(r^2+h^2\right) = a^2 - 2.a.r^2 + r^4 \quad ; \quad \left(r < \sqrt{a}\right) \Leftrightarrow r^2 = \dfrac{a^2}{h^2+2a}$

$V = \dfrac{1}{3}.\pi.\dfrac{a^2}{h^2+2a}.h = \dfrac{\pi.a^2}{3}.\dfrac{h}{h^2+2a}$

Khi đó: V lớn nhất $\Leftrightarrow \dfrac{h}{h^2+2a}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \dfrac{h^2+2a}{h}$ nhỏ nhất

Vì $\dfrac{h^2+2a}{h} = h + \dfrac{2a}{h} \ge 2\sqrt{h.\dfrac{2a}{h}} = 2\sqrt{2a}$

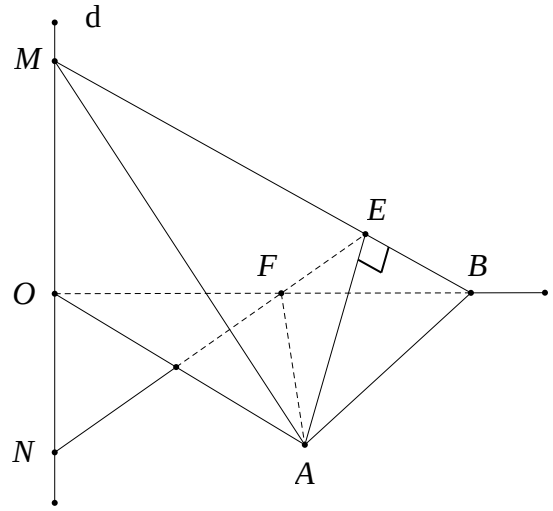
Nên V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $h = \dfrac{2a}{h} \Leftrightarrow h = \sqrt{2a} \Rightarrow r^2 = \dfrac{a}{4} \Leftrightarrow r = \dfrac{\sqrt{a}}{2} = 20cm$

Câu 17: Cho tam giác đều OAB có cạnh bằng $a > 0$. Trên đường thẳng d đi qua O và vuông góc với mặt phẳng (OAB) lấy điểm M sao cho $OM = x$. Gọi E, F lần lượt là các hình chiếu vuông góc của A lên MB, OB. Đường thẳng EF cắt đường thẳng d tại N. Quay miền tam giác OBM và OFN quanh d tạo thành hai khối nón tròn xoay. Xác định x để tổng thể tích hai khối nón tròn xoay nhỏ nhất.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases} AF \perp OB \\ AF \perp OM \end{cases} \Rightarrow AF \perp (MOB) \Rightarrow AF \perp MB$.

Mặt khác $AE \perp MB$. Vậy $MB \perp (AEF) \Rightarrow MB \perp EF$ suy ra tam giác EFB vuông tại E.

Xét hai tam giác vuông NOF và BEF có $OF = FB, OFN = BFE \Rightarrow \Delta OFN = \Delta EFB$.

Suy ra $FBE = FNO$ nên $\Delta OFN \sim \Delta OMB \Rightarrow \frac{NO}{BO} = \frac{OF}{OM} \Rightarrow OM.ON = OF.OB = \frac{a^2}{2}$.

Quay miền tam giác OBM và OFN quanh d tạo thành hai khối nón có tổng thể tích

$V = \frac{1}{3}\pi.OF^2.ON + \frac{1}{3}\pi.OB^2.OM = \frac{1}{3}\pi.\frac{a^2}{4}.ON + \frac{1}{3}\pi.a^2.OM = \frac{1}{3}\pi.a^2\left(\frac{ON}{4} + OM\right)$.

Mà $\frac{ON}{4} + OM \geq 2\sqrt{\frac{ON}{4}.OM} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

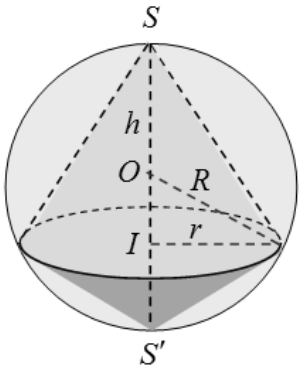
Vậy $V \geq \frac{1}{3}\pi.a^2\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{6}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \frac{ON}{4} = OM \\ ON.OM = \frac{a^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ON = a\sqrt{2} \\ OM = \frac{\sqrt{2}a}{4} \end{cases}$. Vậy $x = OM = \frac{\sqrt{2}a}{4}$.

Câu 18: Cho mặt cầu (S) bán kính R. Hình nón (N) thay đổi có đỉnh và đường tròn đáy thuộc mặt cầu (S). Thể tích lớn nhất của khối nón (N) là:

A. $\frac{32\pi R^3}{81}$. **B.** $\frac{32R^3}{81}$. **C.** $\frac{32\pi R^3}{27}$. **D.** $\frac{32R^3}{27}$.

Lời giải



Chọn A

Ta có thể tích khối nón đỉnh S lớn hơn hoặc bằng thể tích khối nón đỉnh S'. Do đó chỉ cần xét khối nón đỉnh S có bán kính đường tròn đáy là r và đường cao là $SI = h$ với $h \ge R$.

Thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) là:

$$V = \frac{1}{3}h.S_{(C)} = \frac{1}{3}h.\pi.r^2 = \frac{1}{3}h.\pi.\left[R^2 - (h-R)^2\right] = \frac{1}{3}\pi\left(-h^3 + 2h^2R\right).$$

Xét hàm số: $f(h) = -h^3 + 2h^2R$ với $h \in [R; 2R)$.

Ta có $f'(h) = -3h^2 + 4hR$; $f'(h) = 0 \Leftrightarrow -3h^2 + 4hR = 0 \Leftrightarrow h = 0$ (loại) hoặc $h = \frac{4R}{3}$.

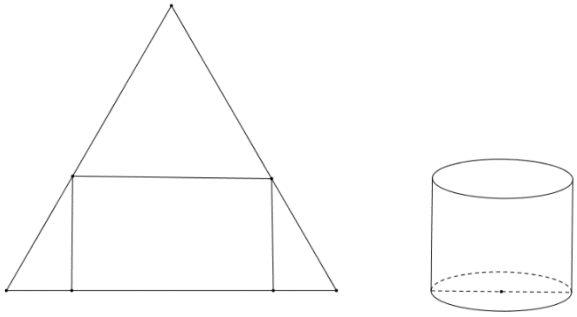
Bảng biến thiên:

h	R		$\frac{4R}{3}$		$2R$
$f'(h)$		$+$	0	$-$	
$f(h)$	R^3	↗	$\frac{32R^3}{27}$	↘	0

Ta có: $\max f(h) = \frac{32}{27}R^3$ tại $h = \frac{4R}{3}$.

Vậy thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất là $V = \frac{1}{3}\pi\frac{32}{27}R^3 = \frac{32}{81}\pi R^3$ khi $h = \frac{4R}{3}$.

Câu 19: Từ một tấm tôn hình tam giác đều cạnh bằng 6m, ông A cắt thành một tấm tôn hình chữ nhật và cuộn lại được một cái thùng hình trụ(như hình vẽ)

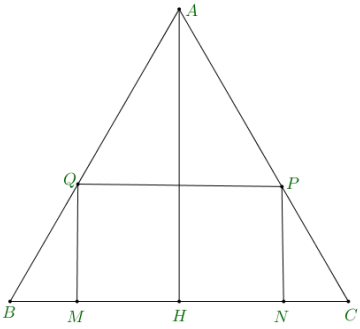


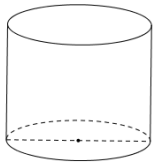
Ông A làm được cái thùng có thể tích tối đa là V (Vật liệu làm nắp thùng coi như không liên quan). Giá trị của V thỏa mãn

A. $V \le 1\text{m}^3$. **B.** $1\text{m}^3 < V \le 2\text{m}^3$. **C.** $2\text{m}^3 < V \le 3\text{m}^3$. **D.** $V > 3\text{m}^3$.

Lời giải

Chọn C





Giả sử tấm tôn hình tam giác đều ABC, ông A cắt thành một tấm tôn hình chữ nhật $MNPQ$ như hình vẽ, H là trung điểm của BC.

Đặt $MN = 2x\ \left(x \in (0;3)\right)$.

Ta có $AH = 3\sqrt{3}$, $\dfrac{MQ}{AH} = \dfrac{BM}{BH} = \dfrac{3-x}{3} \Rightarrow MQ = (3-x)\sqrt{3}$.

Cái thùng hình trụ có bán kính đáy $R = \dfrac{2x}{2\pi} = \dfrac{x}{\pi}$, chiều cao $h = MQ = (3-x)\sqrt{3}$. Suy ra, thể tích của cái thùng là

$$V = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{x}{\pi}\right)^2 (3-x)\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}x^2(3-x) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}.x.x(6-2x) \le \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{x+x+(6-2x)}{3}\right)^3 = \frac{4\sqrt{3}}{\pi}$$

.

$V = \dfrac{4\sqrt{3}}{\pi} \Leftrightarrow x = 6-2x \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn).

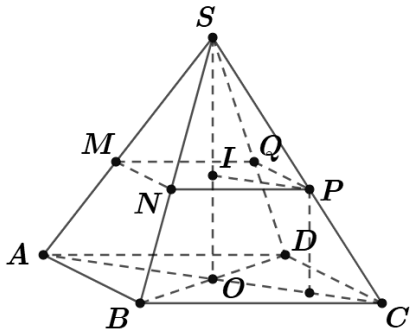
Vậy $\max V = \dfrac{4\sqrt{3}}{\pi}\text{m}^3$.

Câu 20: Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Một mặt phẳng thay đổi, vuông góc với SO và cắt SO, SA, SB, SC, SD lần lượt tại I, M, N, P, Q. Một hình trụ có một đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MNPQ$ và một đáy nằm trên mặt phẳng $(ABCD)$. Thể tích khối trụ lớn nhất bằng

A. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{8}$ **B.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{27}$ **C.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{27}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $OC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SO = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do $(MNPQ)$ song song với mặt đáy nên $\frac{IP}{OC}=\frac{SI}{SO}\Leftrightarrow\frac{IP}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{SI}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}\Leftrightarrow IP=SI$.

$\Rightarrow IO=SO-OI=\frac{a\sqrt{2}}{2}-IP$.

Khi đó ta có thể tích khối trụ là $V=IO.\pi.IP^2=\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}-IP\right)IP^2$

Cách 1:

Đặt $x=IP$ với $0<x<\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Xét hàm số $f(x)=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}-x\right)x^2$ với $0<x<\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Ta có $f'(x)=xa\sqrt{2}-3x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=0 & (l)\\ x=\frac{a\sqrt{2}}{3} & (n)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{a\sqrt{2}}{3}$		$\frac{a\sqrt{2}}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{27}$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên ta thấy $\max\limits_{x\in\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)}f(x)=f\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{a^3\sqrt{2}}{27}\Rightarrow V_{\max}=\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{27}$.

Cách 2:

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM:

$V=\frac{1}{2}\pi\left(a\sqrt{2}-2IP\right)IP.IP\le\frac{1}{2}\pi\frac{\left(a\sqrt{2}-2IP+IP+IP\right)^3}{27}=\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{27}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a\sqrt{2}-2IP=IP\Leftrightarrow IP=\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Dạng 6: Toán thức tế liên quan đến khối nón, khối trụ

Dựa vào kiến thức được nêu trong phần lý thuyết

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Một khúc gỗ hình trụ có bán kính R bị cắt bởi một mặt phẳng không song song với đáy ta được thiết diện là một hình elip. Khoảng cách từ điểm A đến mặt đáy là $12\ cm$ khoảng cách từ điểm B đến mặt đáy là $20\ cm$. Đặt khúc gỗ đó vào trong hình hộp chữ nhật có chiều cao bằng $20\ cm$ chứa đầy nước sao cho đường tròn đáy của khúc gỗ tiếp xúc với các cạnh đáy của hình hộp chữ nhật. Sau đó, người ta đo lượng nước còn lại trong hình hộp chữ nhật là 2 lít. Tính bán kính của khúc gỗ

A. R = 5,2 cm. **B.** R = 4,8 cm. **C.** R = 6,4 cm. **D.** R = 8,2 cm.

Lời giải

Chọn D

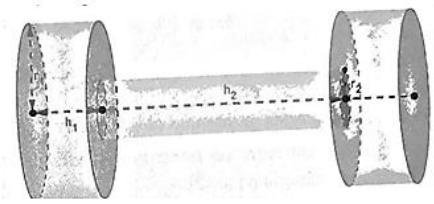
Giả sử R có đơn vị là m. Có $2l = 0.002\ \left(m^3\right)$.

Thể tích khối hộp bằng $4R^2.0,2 = 0,8R^2\ \left(m^3\right)$.

Thể tích khúc gỗ bằng $\pi R^2\left(\frac{0,12+0,2}{2}\right) = 0,16\pi R^2\ \left(m^3\right)$.

Ta có $0,8R^2 - 0,16\pi R^2 = 0,002 \Rightarrow R \approx 0,08201\left(m\right) \Rightarrow R \approx 8,2\ cm$

Câu 2: Một quả tạ tập tay gồm ba khối trụ $\left(H_1\right)$, $\left(H_2\right)$, $\left(H_3\right)$ gắn liền nhau lần lượt có bán kính và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2, r_3, h_3 thỏa mãn $r_1 = r_3$, $h_1 = h_3$; $r_2 = \frac{1}{3}r_1$. Biết thể tích của toàn bộ quả tạ bằng 60π và chiều dài quả tạ bằng 9. Thể tích khối trụ $\left(H_2\right)$ bằng?



(H_1)

A. $\pi\frac{16\left(9-2h_1\right)}{4h_1+9}$. **B.** $\pi\frac{36\left(9-2h_1\right)}{4h_1+9}$ **C.** $\pi\frac{60\left(9-2h_1\right)}{4h_1+9}$ **D.** $\pi\frac{46\left(9-2h_1\right)}{4h_1+9}$

Lời giải

Chọn C

Chiều dài quả tạ là $l = h_1 + h_2 + h_3 = 2h_1 + h_2 = 9 \Rightarrow h_2 = 9 - 2h_1$

Thể tích quả tạ là $V = V_{(H_1)} + V_{(H_2)} + V_{(H_3)} = \pi r_1 h_1 + \pi r_2 h_2 + \pi r_3 h_3 = 2\pi r_1 h_1 + \pi r_2 h_2 = 60\pi$

$\Leftrightarrow 2r_1 h_1 + r_2 h_2 = 60 \Leftrightarrow 6r_2 h_1 + r_2\left(9 - 2h_1\right) = 60 \Leftrightarrow r_2\left(9 + 4h_1\right) = 60 \Leftrightarrow r_2 = \frac{60}{9+4h_1}$

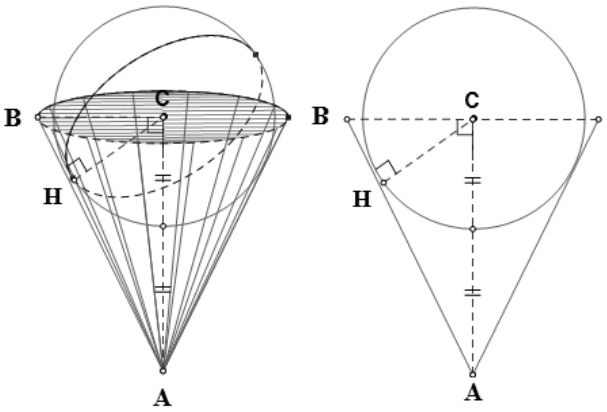
Thể tích $V_{(H_2)} = \pi r_2 h_2 = \pi\frac{60}{9+4h_1}\left(9-2h_1\right) = \pi\frac{60\left(9-2h_1\right)}{9+4h_1}$.

Câu 3: Một bình đựng nước dạng hình nón đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $18\pi\ dm^3$.Biết khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa khối cầu chìm trong nước. Tính thể tích nước còn lại trong bình.

A. $27\pi\ dm^3$. **B.** $6\pi\ dm^3$. **C.** $9\pi\ dm^3$. **D.** $24\pi\ dm^3$.

Lời giải

Chọn B



Vì đúng một nửa khối cầu chìm trong nước nên thể tích khối cầu gấp 2 lần thể tích nước tràn ra ngoài.

Gọi bán kính khối cầu là R, lúc đó: $\frac{4}{3}\pi R^3=36\pi \Leftrightarrow R^3=27$.

Xét tam giác ABC có AC là chiều cao bình nước nên $AC=2R$

Trong tam giác ABC có: $\frac{1}{CH^2}=\frac{1}{CA^2}+\frac{1}{CB^2}\Leftrightarrow\frac{1}{R^2}=\frac{1}{4R^2}+\frac{1}{CB^2}\Leftrightarrow CB^2=\frac{4R^2}{3}$.

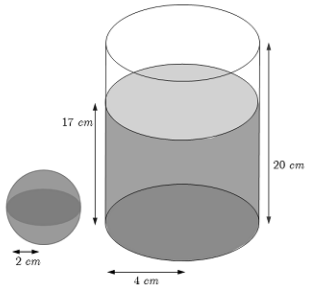
Thể tích khối nón: $V_n=\frac{1}{3}\pi.CB^2.AC=\frac{1}{3}\pi.\frac{4R^2}{3}.2R=\frac{8\pi}{9}.R^3=24\pi\ dm^3$.

Vậy thể tích nước còn lại trong bình: $24\pi-18\pi=6\pi\ dm^3$

Câu 4: Một ly nước hình trụ có chiều cao $20\ cm$ và bán kính đáy bằng $4\ cm$. Bạn Nam đổ nước vào ly cho đến khi mực nước cách đáy ly $17\ cm$ thì dừng lại. Sau đó, Nam lấy các viên đá lạnh hình cầu có cùng bán kính $2\ cm$ thả vào ly nước. Bạn Nam cần dùng ít nhất bao nhiêu viên đá để nước trào ra khỏi ly?

A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải



Chọn C

Ta có thể tích phần không chứa nước $V_1=3.\pi.4^2=48\pi$. Như vậy để nước trào ra ngoài thì số bi thả vào cốc có tổng thể tích lớn hơn 48π.

Gọi n là số viên bi tối thiểu thả vào cốc khi đó tổng thể tích của n viên bi là $V_2 = n.\frac{4}{3}\pi.2^3 = \frac{32\pi n}{3}$

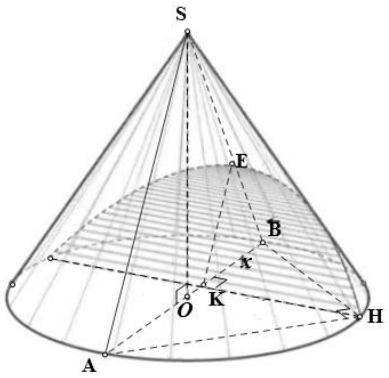
Theo bài ra $\frac{32\pi n}{3} > 48\pi \Leftrightarrow n > \frac{9}{2}$. Vậy $n = 5$.

Câu 5: Khi cắt hình nón có chiều cao 16 *cm* và đường kính đáy 24 *cm* bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện có diện tích lớn nhất gần với giá trị nào sau đây?

A. 170. **B.** 260. **C.** 294. **D.** 208.

Lời giải

Chọn D



Cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện là một parabol.

Xét dây cung bất kỳ chứa đoạn KH như hình vẽ, suy ra tồn tại đường kính $AB \perp KH$, trong tam giác SAB, $KE // SA, E \in SB$, Suy ra Parabol nhận KE làm trục như hình vẽ chính là một thiết diện thỏa yêu cầu bài toán. Đặt $BK = x$.

Trong tam giác ABH có: $HK^2 = BK.AK = x(24 - x)$.

Trong tam giác SAB có: $\frac{KE}{SA} = \frac{BK}{BA} \Leftrightarrow KE = \frac{BK}{BA}.SA \Leftrightarrow KE = \frac{5x}{6}$.

Thiết diện thu được là một parabol có diện tích: $S = \frac{4}{3}KH.KE$.

Ta có: $S^2 = \frac{16}{9}KH^2.KE^2 = \frac{16}{9}.x(24-x).\frac{25x^2}{36} = \frac{100}{81}.(24x^3 - x^4) \Rightarrow S = \frac{10}{9}.\sqrt{24x^3 - x^4}$

Đặt $f(x) = 24x^3 - x^4$, với $0 < x < 24$.

Ta có: $f'(x) = 72x^2 - 4x^3$. Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 72x^2 - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 18 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		18		24
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	34992	↘	

Vậy thiết diện có diện tích lớn nhất là: $\frac{10}{9}\sqrt{34992} \approx 207{,}8\ cm^2$

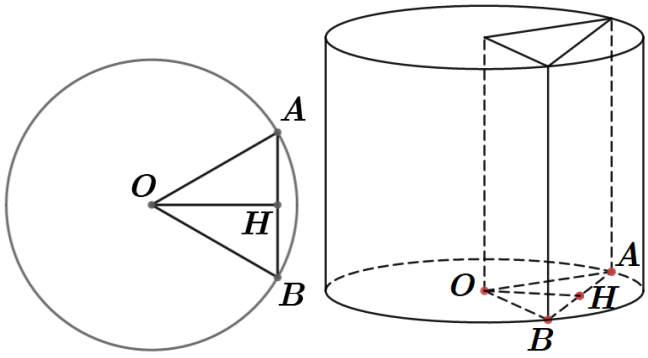
B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Một thùng hình trụ có bán kính đáy bằng $2(m)$, bên trong thùng có chứa một lượng nước. Biết rằng khi để thùng nằm ngang thì phần bề mặt nước là một hình vuông và mặt nước cách trục của hình trụ một khoảng bằng $\sqrt{3}(m)$. Nếu để thùng thẳng đứng thì chiều cao của nước trong thùng bằng:

A. $10,67$ (cm). **B.** $5,77$ (cm). **C.** $33,3$ (cm). **D.** $8,33$ (cm).

Lời giải

Chọn B



Ta $AB = 2HA = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2 \Rightarrow h = 2\,(\text{m})$.

Ta có $OA = OB = AB$ nên tam giác AOB đều nên $AOB = 60°$, khi đó hình viên phân giới hạn bởi dây cung AB và cung nhỏ AB có diện tích là $\frac{60}{360}\pi 2^2 - \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$.

Vậy khi để thùng thẳng đứng, chiều cao của nước trong thùng là $\frac{\left(\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}\right)2}{4\pi} \approx 0,0577(m)$.

Câu 2: Một trang trại đang dùng hai bể nước hình trụ có cùng chiều cao; bán kính đáy lần lượt bằng $1,6(\text{m})$ và $1,8(\text{m})$. Trang trại làm một bể nước mới hình trụ, có cùng chiều cao và thể tích bằng tổng thể tích của hai bể nước trên; biết ba hình trụ trên là phần chứa nước của mỗi bể. Bán kính đáy của bể nước mới gần nhất với kết quả nào dưới đây?

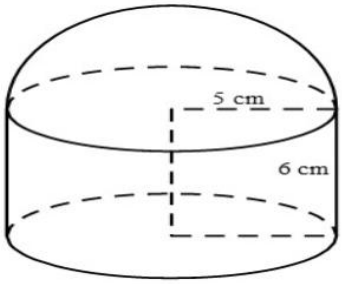
A. $2,4(\text{m})$. **B.** $2,6(\text{m})$. **C.** $2,5(\text{m})$. **D.** $2,3(\text{m})$.

Lời giải

Chọn A

Gọi chiều cao của các hình trụ là h và bán kính đáy của hình trụ mới là R. Khi đó ta có: $\pi R^2 h = \pi(1,6)^2 h + \pi(1,8)^2 h \Leftrightarrow R^2 = (1,6)^2 + (1,8)^2 \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{29}{5}} \approx 2,4$.

Câu 3: Một hộp đựng mỹ phẩm được thiết kế (tham khảo hình vẽ) có thân hộp là hình trụ có bán kính hình tròn đáy $r = 5cm$, chiều cao $h = 6cm$ và nắp hộp là một nửa hình cầu. Người ta cần sơn mặt ngoài của cái hộp đó (không sơn đáy) thì diện tích S cần sơn là



A. $S=160\pi\ cm^2$. **B.** $S=130\pi\ cm^2$. **C.** $S=110\pi\ cm^2$. **D.** $S=80\pi\ cm^2$.

Lời giải

Chọn C

+) Diện tích xung quanh của hình trụ $S_{xq}=2\pi rh=2\pi.5.6=60\pi\ cm^2$

+) Diện tích nửa mặt cầu $\frac{S_{mc}}{2}=\frac{4\pi r^2}{2}=\frac{4\pi.5^2}{2}=50\pi\ cm^2$

Vậy diện tích $S=S_{xq}+\frac{S_{mc}}{2}=60\pi+50\pi=110\pi\ cm^2$.

Câu 4: Một hộp sữa có dạng hình trụ và có thể tích bằng 2825cm^3. Biết chiều cao của hộp sữa bằng 25cm. Diện tích toàn phần của hộp sữa đó gần với số nào sau đây nhất?

A. 1168cm^2. **B.** 1172cm^2. **C.** 1164cm^2. **D.** 1182cm^2.

Lời giải

Chọn A

Gọi bán kính đáy của hình trụ là R. Khi đó theo bài ra ta có:

$V=2825\Leftrightarrow\pi R^2.25=2825\Leftrightarrow R^2=\frac{113}{\pi}\Leftrightarrow R=\sqrt{\frac{113}{\pi}}$.

Vậy diện tích toàn phần của hộp sữa là:

$S_{tp}=2\pi Rh+2\pi R^2=2\pi.\sqrt{\frac{113}{\pi}}.25+2\pi\left(\sqrt{\frac{113}{\pi}}\right)^2\approx 1168\text{cm}^2$.

Câu 5: Ông A dự định làm một cái thùng phi hình trụ (không có nắp) với dung tích $5m^3$ bằng thép không gỉ để đựng nước. Chi phí trung bình cho $1m^2$ thép không gỉ là 500.000 đồng. Hỏi chi phí nguyên vật liệu làm cái thùng thấp nhất là bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn) ?

A. 6424000 đồng. **B.** 5758000 đồng. **C.** 7790000 đồng. **D.** 6598000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Gọi x, y lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ

Ta có thể tích $V=h.S=y.x^2.\pi=5\Rightarrow y=\frac{5}{x^2.\pi}$ (1)

Lại có diện tích bề mặt hình trụ không nắp $S_{\text{tru}}=S_{xq}+S_d=2\pi xy+\pi x^2$ (2)

Để chi phí thấp nhất thì S_{tru} nhỏ nhất do đó

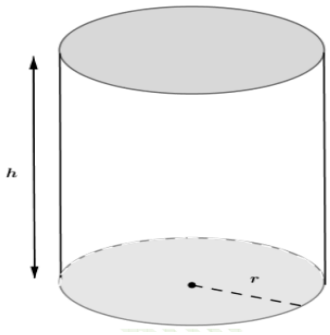
Thay (1) và (2) ta được

$S_{\text{tru}}=S_{xq}+S_d=2\pi xy+\pi x^2=2\pi.x.\frac{5}{x^2.\pi}+\pi x^2=\frac{10}{x}+\pi.x^2\geq 3.\sqrt[3]{\frac{5}{x}.\frac{5}{x}.\pi.x^2}=3\sqrt[3]{25\pi}$

Chi phí nguyên vật liệu làm cái thùng thấp nhất là : $S_{\text{tru}}.500000=3\sqrt[3]{25\pi}.500000\approx 6424000$

Câu 6: Người ta làm một chiếc thùng hình trụ có thể tích V nhất định. Biết rằng giá vật liệu để làm mặt

đáy và nắp là như nhau và đắt gấp hai lần giá vật liệu để làm mặt xung quanh của thùng (chi phí cho mỗi đơn vị diện tích). Gọi h, r lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của thùng. Tính tỷ số $\frac{h}{r}$ sao cho chi phí sản xuất vật liệu là nhỏ nhất?



A. $\frac{h}{r}=4$. **B.** $\frac{h}{r}=3\sqrt{2}$. **C.** $\frac{h}{r}=4\sqrt{2}$. **D.** $\frac{h}{r}=2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $V=\pi r^2 h \Rightarrow h=\frac{V}{\pi r^2}$.

Có $S_{xq}=2\pi rh=2\pi r.\frac{V}{\pi r^2}=\frac{2V}{r}$ và $S_d=2\pi r^2$.

Giả sử chi phí giá vật liệu để làm mặt xung quanh của thùng A thì chi phí làm mặt đáy và nắp là $2A$.

Tổng chi phí là

$$T=2A.S_d+A.S_{xq}=2A.2\pi r^2+A.\frac{2V}{r}=A\left(4\pi r^2+\frac{2V}{r}\right)$$

$$=A\left(4\pi r^2+\frac{V}{r}+\frac{V}{r}\right)\geq A.3.\sqrt[3]{4\pi r^2.\frac{V}{r}.\frac{V}{r}}=3A\sqrt[3]{4\pi V^2}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $4\pi r^2=\frac{V}{r}\Leftrightarrow r^3=\frac{V}{4\pi}$.

Khi đó $\frac{h}{r}=\frac{\frac{V}{\pi r^2}}{r}=\frac{V}{\pi r^3}=\frac{V}{\pi.\frac{V}{4\pi}}=4$.

Câu 7: Một chiếc cốc dạng hình trụ, chiều cao $16cm$, đường kính là $8cm$, bề dày của thành cốc và đáy cốc bằng $1cm$. Nếu đổ một lượng nước vào cốc cách miệng cốc $5cm$ thì ta được khối nước có thể tích V_1, nếu đổ đầy cốc ta được khối trụ (*tính cả thành cốc và đáy cốc*) có thể tích V_2. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{245}{512}$. **C.** $\frac{45}{128}$. **D.** $\frac{11}{16}$.

Lời giải

Chọn C

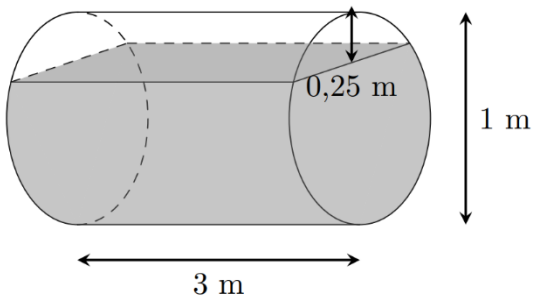
Khi đổ nước đầy cốc ta được khối trụ (tính cả thành cốc và đáy cốc) có $h_1=16cm, r_1=4cm$.

Khối nước khi đổ một lượng nước cách miệng cốc $5cm$ ta được khối trụ có

$h_2 = 16-5-1 = 10\,cm, r_2 = \dfrac{8-1}{2} = \dfrac{7}{2}cm$.

Do đó: $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi.\left(\dfrac{7}{2}\right)^2.10}{\pi.4^2.16} = \dfrac{245}{512}$.

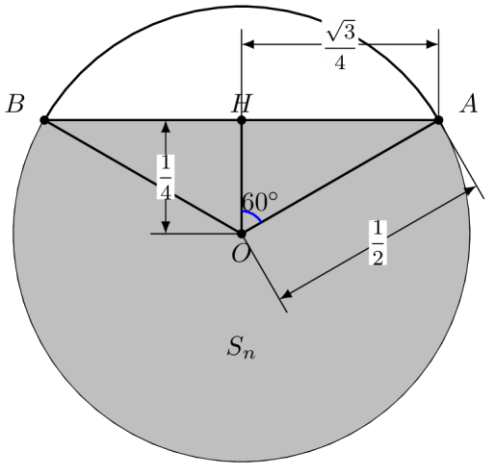
Câu 8: Một téc nước hình trụ, đang chứa nước được đặt nằm ngang, có chiều dài $3\,\text{m}$ và đường kính đáy 1 m. Hiện tại mặt nước trong téc cách phía trên đỉnh của téc $0,25$ m (xem hình vẽ). Tính thể tích của nước trong téc (kết quả làm tròn tới hàng phần nghìn).



A. $1,768m^3$. **B.** $1,167m^3$. **C.** $1,895m^3$. **D.** $1,896m^3$.

Lời giải

Chọn D



Thể tích của téc khi chứa đầy nước $V = S_d.h = \pi.\left(\dfrac{1}{2}\right)^2.3 = \dfrac{3\pi}{4}(m^3)$

Xét đường tròn mặt đáy của téc

Phần diện tích nước đang chiếm gọi là S_n, phần không có nước là hình viên phân giới hạn bởi dây AB và cung AB

Tính được $sd\,AOB = 120^\circ, AB = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (m)

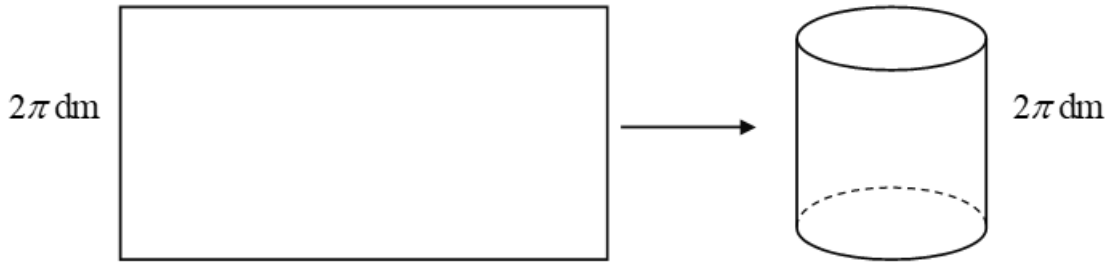
$S_n = S_d - \left(S_{AOB} - S_{AOB}\right) = S_d - \dfrac{120}{360}S_d + S_{AOB} = \dfrac{2}{3}S_d + S_{AOB}$

$S_n = \dfrac{2}{3}\pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{4}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{8\pi + 3\sqrt{3}}{48}(m^2)$

Do téc đặt nằm ngang với mặt đất, do đó, mặt nước vuông góc với hai đáy. Khi đó, tỷ lệ diện tích mặt đáy chính là tỷ lệ thể tích của nước trong té **C.** Ta có

$$\frac{V_n}{V}=\frac{S_n}{S}\Rightarrow V_n=V.\frac{S_n}{S}=\frac{3\pi}{4}.\frac{\frac{8\pi+3\sqrt{3}}{48}}{\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2}\approx 1.896(m^3)$$

Câu 9: Một miếng tôn hình chữ nhật có chiều dài $10,2\,\text{dm}$, chiều rộng $2\pi\,\text{dm}$ được uốn lại thành mặt xung quanh của một chiếc thùng đựng nước có chiều cao $2\pi\,\text{dm}$ (như hình vẽ). Biết rằng chỗ ghép mất $2\,\text{cm}$. Hỏi thùng đựng được bao nhiêu lít nước?



A. $20,4$ lít. **B.** $20,4$ lít. **C.** 50 lít. **D.** 100 lít.

Lời giải

Chọn C

Vì chỗ ghép mất $2\,\text{cm}$ nên chu vi đáy chiếc thùng là $10,2-0,2=10(\text{dm})$.

Gọi $r(\text{dm})$ là bán kính đáy, ta có $2\pi r=10\Leftrightarrow r=\frac{5}{\pi}(\text{dm})$.

Thể tích chiếc thùng: $V=\pi r^2h=\pi.\left(\frac{5}{\pi}\right)^2.2\pi=50\left(\text{dm}^3\right)$.

Vậy thùng đựng được 50 lít nước

Câu 10: Một công ty sản xuất hộp đựng sữa loại $900\,\text{gam}$ dạng hình trụ có thể tích V không đổi. Giá thành của vật liệu làm đáy hộp và vỏ xung quanh của hộp là bằng nhau và bằng một nửa giá thành của vật liệu làm nắp hộp. Hỏi tỉ lệ chiều cao h và bán kính R của hộp đựng sữa bằng bao nhiêu để chi phí sản xuất là thấp nhất.

A. $\frac{h}{R}=2$. **B.** $\frac{h}{R}=\sqrt{2}$. **C.** $\frac{h}{R}=\sqrt{3}$. **D.** $\frac{h}{R}=3$.

Lời giải

Chọn D

Gọi x là giá thành của vật liệu làm đáy hộp.

Tổng chi phí sản xuất hộp sữa là $T=\left(2\pi Rh+\pi R^2\right).x+\pi R^2.2x=\left(2\pi Rh+3\pi R^2\right).x$

Để tổng chi phí là thấp nhất khi $S=2\pi Rh+3\pi R^2$ nhỏ nhất.

Ta có $S=2\pi Rh+3\pi R^2=\pi Rh+\pi Rh+3\pi R^2\geq 3\sqrt[3]{3\pi^3.h^2.R^4}=3\sqrt[3]{3\pi.V^2}$

Vậy S đạt giá trị nhỏ nhất khi $\pi Rh=3\pi R^2\Leftrightarrow\frac{h}{R}=3.$

Câu 11: Để làm một hình trụ có nắp, bằng tôn và có thể tích $V=5\pi\ (m^3)$, cần ít nhất bao nhiêu mét vuông tôn?

A. $5\pi\ \left(m^2\right)$. **B.** $\pi\sqrt[3]{50}\ \left(m^2\right)$. **C.** $\pi\sqrt[3]{25}\ \left(m^2\right)$. **D.** $25\pi\ \left(m^2\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $V = B.h = \pi r^2 h = 5\pi \Rightarrow h = \dfrac{5}{r^2}$.

$S_{tp} = S_{xq} + 2B = 2\pi rh + 2\pi r^2 = \dfrac{10\pi}{r} + 2\pi r^2 = \pi\left(\dfrac{5}{r} + \dfrac{5}{r} + 2r^2\right)$.

Suy ra: $S_{tp} = \pi\left(\dfrac{5}{r} + \dfrac{5}{r} + 2r^2\right) \geq \pi\sqrt[3]{\dfrac{5}{r}.\dfrac{5}{r}.2r^2} = \pi\sqrt[3]{50}\ \left(m^2\right)$.

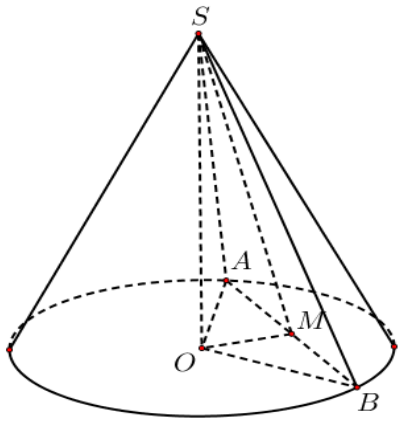
Số mét vuông tôn cần ít nhất là $\pi\sqrt[3]{50}\ \left(m^2\right)$.

Câu 12: Cho hình nón đỉnh S, góc ở đỉnh bằng $120°$, bán kính đáy bằng $R = 3a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S cắt nón theo thiết diện là 1 tam giác. Khi diện tích thiết diện lớn nhất $S_{\max}$, tính góc α giữa thiết diện và mặt đáy?

A. 30^o **B.** 45^o **C.** 60^o **D.** $\tan\alpha = 2$

Lời giải

Chọn B



Gọi thiết diện qua đỉnh của hình chóp là ΔSAB với M là trung điểm của AB.

Vì góc ở đỉnh bằng $120°$ nên $OSB = 60^o \Rightarrow SBO = 30^o$.

Xét ΔSOB: $SO = OB.\tan 30^o = 3a\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 3a$.

Đặt $OM = x$. Với $0 < x < 3a\sqrt{3}$.

Xét ΔSOM: $SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{9a^2 + x^2}$.

Xét ΔBOM: $BM = \sqrt{OB^2 - OM^2} = \sqrt{27a^2 - x^2}$.

Vậy $AB = 2BM = 2\sqrt{27a^2 - x^2}$.

$S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2}AB.SM = \dfrac{1}{2}.2\sqrt{27a^2 - x^2}.\sqrt{9a^2 + x^2} = \sqrt{\left(27a^2 - x^2\right).\left(9a^2 + x^2\right)}$.

$\Rightarrow S_{\Delta SAB} \leq \dfrac{27a^2 - x^2 + 9a^2 + x^2}{2} = 18a^2$.

$\Rightarrow S_{\max} = 18a^2$. Dấu bằng xảy ra khi: $27a^2 - x^2 = 9a^2 + x^2 \Leftrightarrow x^2 = 9a^2 \Leftrightarrow x = 3a$.

Ta có $\begin{cases} OM \perp AB \\ SM \perp AB \end{cases}$ nên góc giữa (SAB) và mặt đáy là $SMO = \alpha$.

Khi đó $\tan\alpha = \dfrac{SO}{MO} = \dfrac{3a}{3a} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^o$.

Câu 13: Một gia đình dự định làm bể lọc nước có dạng hình nón có bán kính đáy là r và đường sinh bằng

$3\,m$. Phần lắp đậy của bể được làm bằng tôn với giá thành 0,5 triệu đồng 1 m^2 còn phần thành bể được làm bằng thép không rỉ với giá 2 triệu đồng 1 m^2. Để phù hợp với thiết kế nhà cần dung tích bể nước là lớn nhất, vậy chi phí để thi công bể là bao nhiêu triệu đồng?

A. $3\pi+3\pi\sqrt{6}$. **B.** $3\pi+\pi\sqrt{6}$. **C.** $\pi+3\pi\sqrt{6}$. **D.** $3\pi+6\pi\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn D

Thể tích bể nước: $V=\frac{1}{3}\pi r^2.h=\frac{1}{3}\pi r^2.\sqrt{9-r^2}$.

Xét hàm số $f\ r\ =\frac{1}{3}\pi r^2.\sqrt{9-r^2}\Rightarrow f'\ r\ =\frac{1}{3}\pi.\left(2r.\sqrt{9-r^2}-\frac{r^3}{\sqrt{9-r^2}}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}r=-\sqrt{6}\\r=0\\r=\sqrt{6}\end{array}\right.$

x	0		$\sqrt{6}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$2\sqrt{3}$	↘	$+\infty$

Vậy dung tích bể lớn nhất khi $r=\sqrt{6}$

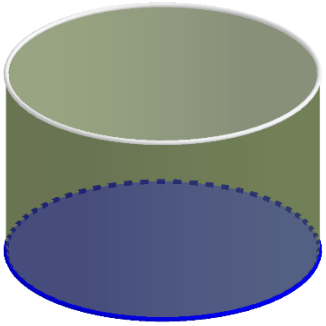
Vậy chi phí làm bể là

Phần lắp đậy của bể: $T_1=0,5.\pi r^2=3\pi$ (Triệu đồng).

Phần thành bể: $T_2=2.\pi rl=6\sqrt{6}\pi$ (Triệu đồng).

Vậy tổng chi phí thi công là $3\pi+6\pi\sqrt{6}$.

Câu 14: Người ta sản xuất thùng phuy sắt có hình dạng là một hình trụ (có nắp đậy kín) bằng cách cán và gò các tấm thép có độ dày $1mm$, biết chiều cao của thùng phuy là $876\,mm$, đường kính ngoài của thùng phuy là $580\,mm$ và khối lượng riêng của thép là $7850\,kg/m^3$. Hỏi thùng phuy nặng khoảng bao nhiêu kg (tính gần đúng sau hai dấu phẩy đến 2 chữ số thập phân)?



A. $15,57\,kg$. **B.** $18,23\,kg$. **C.** $16,63\,kg$. **D.** $17,21kg$

Lời giải

Chọn C

Bán kính ngoài của thùng phuy là $r_1=\frac{580}{2}=290\,mm$

Bán kính trong của thùng phuy là $r^2=\frac{580}{2}-1=289$

Thể tích của thùng phuy là: $V=\pi.r_1^2h-\pi r_2^2h=\pi.876\left(290^2-289^2\right)=507204\pi\left(mm^3\right)$

Khối lượng thùng phuy (tính luôn khối lượng 2 nắp đậy kín):

$m=\left(\pi.507204+2\pi.289^2.1\right).\dfrac{7850}{10^9}\simeq 16,63kg$.

Câu 15: Người ta sử dụng một cuộn đề can hình trụ có đường kính $64,9\,\text{cm}$ để in các băng rôn, khẩu hiệu chuẩn bị cho lễ ra quân năm 2023, do đó đường kính cuộn đề can còn lại là $8,2\,\text{cm}$. Biết độ dày của tấm đề can là $0,04\,\text{cm}$, hãy tính chiều dài L của tấm đề can đã sử dụng? (làm tròn đến hàng đơn vị).

A. $L=325529\,\text{cm}$. **B.** $L=81382\,\text{cm}$. **C.** $L=7749\,\text{cm}$. **D.** $L=24344\,\text{cm}$.

Lời giải

Trải phần đề can đã sử dụng ta được một khối hộp chữ nhật có thể tích là $L.0,04.h$ (với h là chiều cao của khối trụ).

Thể tích khối đề can đã sử dụng là $\pi R^2h-\pi r^2h$ (với R là bán kính khối trụ cuộn đề can ban đầu, r là bán kính khối trụ cuộn đề can còn lại).

Khi đó ta có phương trình

$L.0.04.h=\pi R^2h-\pi r^2h$

$\Leftrightarrow L=\dfrac{\pi R^2-\pi r^2}{0,04}=\dfrac{\pi 32,45^2-\pi 4,1^2}{0,04}=81382\,\text{cm}$.

Câu 16: Ông A dự định làm một cái thùng phi hình trụ (không có nắp) với dung tích $1m^3$ bằng thép không gỉ để đựng nước. Chi phí trung bình cho $1m^2$ thép không gỉ là 500.000 đồng. Hỏi chi phí nguyên vật liểu làm cái thùng thấp nhất bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 1.758.000 đồng **B.** 1.107.000 đồng **C.** 2.197.000 đồng **D.** 2.790.000 đồng

Lời giải

Chọn C

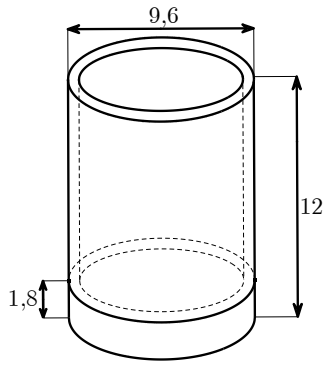
Gọi r và h lần lượt là bán kính và chiều cao của hình trụ. Khi đó, ta có $V=h\pi r^2\Rightarrow h\pi r=\dfrac{1}{r}$.

Ta có diện tích vật liệu để làm thùng phi là $S=2\pi rh+\pi r^2=\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{r}+\pi r^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Am – gm $S=\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{r}+\pi r^2\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{r}+\pi r^2}=3\sqrt[3]{\pi}$.

Khi đó chi phí nguyên vật liểu làm cái thùng thấp nhất là $3\sqrt[3]{\pi}500.000\approx 2.197.000$.

Câu 17: Cần bao nhiêu thuỷ tinh để làm một chiếc cốc hình trụ có chiều cao bằng $12\ \text{cm}$, đường kính đáy bằng $9,6\,\text{cm}$ (tính từ mép ngoài cốc), đáy cốc dày $1,8\,\text{cm}$, thành xung quanh cốc dày $0,24\,\text{cm}$ (tính gần đúng đến hai chữ số thập phân)?



A. $64,39\ \text{cm}^3$. **B.** $202,27\ \text{cm}^3$. **C.** $212,31\ \text{cm}^3$. **D.** $666,97\ \text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $V_1;V_2$ lần lượt là thể tích của chiếc cốc thuỷ tinh và thể tích của khối lượng chất lỏng mà cốc có thể đựng.

Ta có: $V_1 = 12.\pi.4,8^2 = \dfrac{6912}{25}\pi\left(\text{cm}^3\right)$

$V_2 = \left(12-1,8\right).\pi.\left(\dfrac{9,6-2.0,24}{2}\right)^2 \approx 666,32\left(\text{cm}^3\right)$

Vậy khối lượng thuỷ tinh cần sử dụng là: $\dfrac{6912}{25}\pi - 666,32 \approx 202,27\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 18: Ống thép mạ kẽm (độ dày của ống thép là hiệu số bán kính mặt ngoài và bán kính mặt trong của ống thép). Nhà máy quy định giá bán của mỗi loại ống thép dựa trên cân nặng của các ống thép đó. Biết rằng thép ống có giá là 24700 đồng/kg và khối lượng riêng của thép là $7850\ kg/m^3$. Một đại lý mua về 1000 ống thép loại có đường kính ngoài là $60\ mm$, độ dày là $3\ mm$, chiều dài là $6\ m$. Hãy tính số tiền mà đại lý bỏ ra để mua 1000 ống thép nói trên (làm tròn đến ngàn đồng).



A. 623789000 đồng. **B.** 624977000 đồng. **C.** 624980000 đồng. **D.** 623867000 đồng.

Lời giải

Chọn B

Bán kính mặt ngoài của ống thép: $R = 30\,mm = 0,03\,m$.

Bán kính mặt trong của ống thép: $r = 30\,mm - 3\,mm = 27mm = 0,027\,m$.

Thể tích của 1000 ống thép là:

$V = 1000.\pi\left(R^2 - r^2\right).h = 1000.\pi\left(0.03^2 - 0.027^2\right).6 \approx 3,223274\,\text{m}^3$.

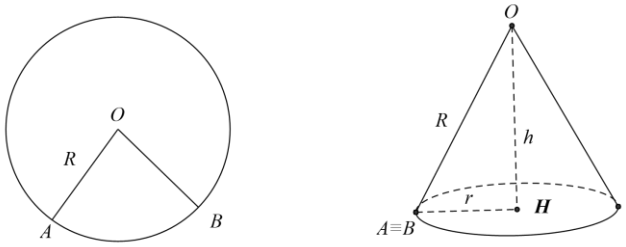
Khối lượng của 1000 ống thép là $3,223274.7850 = 25302,70139\,\text{kg}$.

Số tiền mà đại lý bỏ ra để mua 1000 ống thép là $25302,70139.24.700 = 624977000$ (đồng).

Câu 19: Cho một miếng tôn hình tròn tâm O, bán kính R. Cắt bỏ một phần miếng tôn theo một hình quạt OAB và gò phần còn lại thành một hình nón đỉnh O không có đáy (OA trùng với OB). Gọi S và S' là diện tích miếng tôn ban đầu và diện tích của miếng tôn còn lại. Tìm tỉ số $\frac{S'}{S}$ để thể tích của khối nón đạt giá trị lớn nhất.

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải



Diện tích của miếng tôn ban đầu là $S=\pi R^2$.

Gọi h, r, l lần lượt là đường cao, bán kính và đường sinh của hình nón được tạo thành. Khi đó ta có $l=R$ nên thể tích khối nón $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$V=\frac{2}{3}\pi.\frac{r}{\sqrt{2}}.\frac{r}{\sqrt{2}}.\sqrt{R^2-r^2}=\frac{2}{3}\pi\sqrt{\frac{r^2}{2}.\frac{r^2}{2}.\left(R^2-r^2\right)}\le\frac{2}{3}\pi\sqrt{\left(\frac{\frac{r^2}{2}+\frac{r^2}{2}+R^2-r^2}{3}\right)^3}=\frac{2\sqrt{3}\pi R^3}{27}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{r^2}{2}=R^2-r^2\Leftrightarrow r^2=\frac{2}{3}R^2\Leftrightarrow r=\frac{\sqrt{6}}{3}R.$

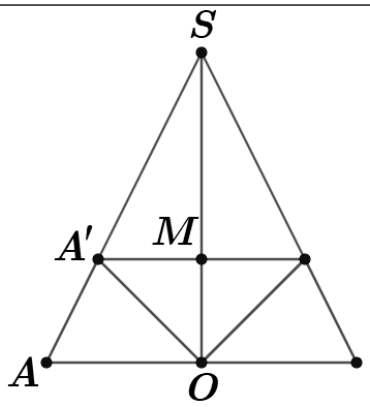
Khi đó $S'=\pi rl=\pi\frac{R\sqrt{6}}{3}R=\pi R^2\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}S.$ Suy ra $\frac{S'}{S}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$

Câu 20: Cho hình nón (N) có đường cao $SO=h$ và bán kính đáy bằng R, gọi M là điểm trên đoạn SO, đặt $OM=x\,(0<x<h)$. Gọi (C) là thiết diện của hình nón (N) cắt bởi mặt phẳng (P) vuông góc với trục SO tại M. Tìm x để thể tích khối nón đỉnh O đáy là (C) lớn nhất.

A. $\frac{h\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{h}{2}$. **C.** $\frac{h}{3}$. **D.** $\frac{h\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có tam giác SMA' đồng dạng với tam giác SOA nên $\frac{A'M}{AO}=\frac{SM}{SO}=\frac{SO-MO}{SO}=1-\frac{x}{h}$.

Gọi V là thể tích khối nón đỉnh O đáy là (C), khi đó:

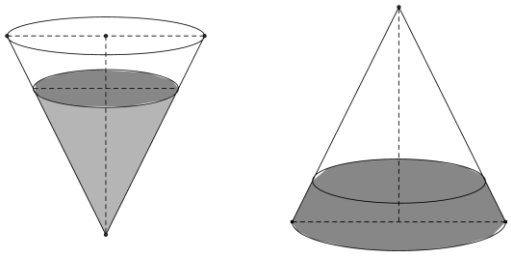
$$V=\frac{1}{3}MO\pi A'M^2=\frac{1}{3}x\pi R^2\left(1-\frac{x}{h}\right)^2=\frac{h\pi R^2}{6}\frac{2x}{h}\left(1-\frac{x}{h}\right)\left(1-\frac{x}{h}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Am – gm:

$$V=\frac{h\pi R^2}{6}\frac{2x}{h}\left(1-\frac{x}{h}\right)\left(1-\frac{x}{h}\right)\le\frac{h\pi R^2}{6}\left(\frac{\frac{2x}{h}+1-\frac{x}{h}+1-\frac{x}{h}}{3}\right)^3=\frac{4h\pi R^2}{81}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{2x}{h}=1-\frac{x}{h}\Leftrightarrow x=\frac{h}{3}$.

Câu 21: Một cốc thủy tinh hình nón có chiều cao $20cm$. Người ta đổ vào cốc thủy tinh một lượng nước, sao cho chiều cao của lượng nước trong cốc bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao cốc thủy tinh, sau đó người ta bịt kín miệng cốc, rồi lật úp cốc xuống như hình vẽ thì chiều cao của nước lúc này là bao nhiêu (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2)?



A. $3,34cm$ **B.** $2,21cm$ **C.** $5,09cm$ **D.** $4,27cm$

Lời giải

Chọn A

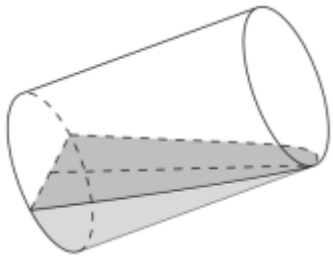
Gọi R là bán kính đáy của cái phểu ta có $\frac{3R}{4}$ là bán kính của đáy chứa cột nước

Ta có thể tích phần nón không chứa nước là $V=\frac{1}{3}\pi(R)^2.20-\frac{1}{3}\pi\left(\frac{3R}{4}\right)^2.\frac{3}{4}.20=\frac{185}{48}\pi R^2$.

Khi lật ngược phểu Gọi h chiều cao của cột nước trong phểu.phần thể tích phần nón không chứa nước là: $V=\frac{1}{3}\pi(20-h)\left(\frac{R(20-h)}{20}\right)^2=\frac{1}{1200}\pi(20-h)^3R^2$

Mà: $\frac{1}{1200}\pi\left(20-h\right)^3R^2=\frac{185}{48}\pi R^2\Rightarrow\left(20-h\right)^3=4625\Rightarrow h\approx3,34$.

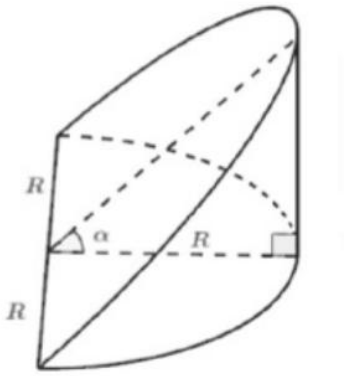
Câu 22: Một chiếc cốc hình trụ có đường kính đáy $6cm$,chiều cao $15cm$ chứa đầy nước. Nghiêng cốc nước cho nước chảy từ từ ra ngoài cho đến khi mép nước ngang với đường kính của đáy (tham khảo hình vẽ bên). Khi đó thể tích của nước còn lại trong cốc bằng



A. $90cm^3$. **B.** $70cm^3$. **C.** $80cm^3$. **D.** $100cm^3$.

Lời giải

Chọn A



Chọn trục Ox trùng với đường kính.

Thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox cắt trục Ox tại điểm có hoành độ $x\left(-R\le x\le R\right)$ là một tam giác vuông có độ dài 2 cạnh góc vuông là $\sqrt{R^2-x^2}$ và $\sqrt{R^2-x^2}.\tan\alpha$

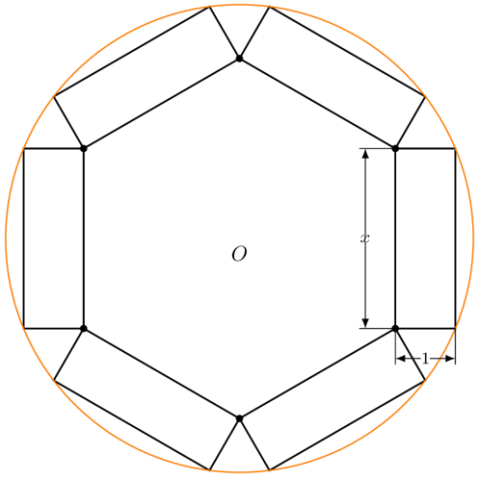
Khi đó, diện tích thiết diện là: $S\left(x\right)=\frac{1}{2}\sqrt{R^2-x^2}.\sqrt{R^2-x^2}.\tan\alpha=\frac{1}{2}\left(R^2-x^2\right)\tan\alpha$

Gọi h là chiều cao của cốc nước. Khi đó: $R=3cm$, $h=15cm$

Thể tích khối nước còn lại trong cốc là:

$V=2.\int_0^R\mathrm{S}\left(x\right)\mathrm{d}x=2.\frac{1}{2}\tan\alpha\int_0^R\left(R^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.R^3.\tan\alpha=\frac{2}{3}.3^3.\frac{15}{3}=90cm^3$.

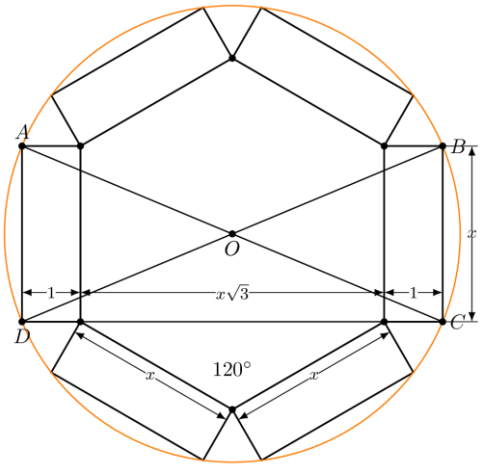
Câu 23: Bạn A định làm một cái hộp quà lưu niệm (không nắp) bằng cách cắt từ một tấm bìa hình tròn bán kính $4cm$ để tạo thành một khối lăng trụ lục giác đều, biết 6 hình chữ nhật có các kích thước là $1cm$ và $x\,cm$ (tham khảo hình vẽ). Thể tích của hộp quà gần nhất với giá trị nào sau đây?



A. $24,5cm^3$. **B.** $25cm^3$. **C.** $25,5cm^3$. **D.** $24cm^3$.

Lời giải

Chọn B



Xét hình chữ nhật $ABCD$ nội tiếp (O), do đó, AC là đường kính của (O). Ta có $AC=8cm$.

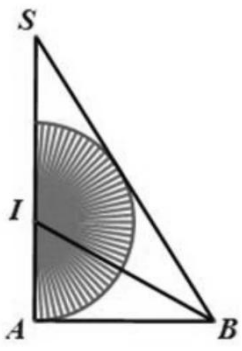
Tính được $DC=1+x\sqrt{3}+1=x\sqrt{3}+2$

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác ADC ta có

$$x^2+\left(2+x\sqrt{3}\right)^2=8^2 \Leftrightarrow 4x^2+4x\sqrt{3}-60=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$$

$$V=h.S_d=1.6.\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3}{2}x^2\sqrt{3}=\frac{-27\sqrt{7}+99\sqrt{3}}{4}\approx 25,0094cm^3$$

Câu 24: Cho tam giác SAB vuông tại A, $ABS=60°$. Phân giác của góc ABS cắt SA tại I. Vẽ nửa đường tròn tâm I, bán kính IA. Cho miền tam giác SAB và nửa hình tròn quay xung quanh trục SA tạo nên các khối tròn xoay thể tích tương ứng là $V_1;V_2$. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $V_1 = \frac{4}{9}V_2$. **B.** $V_1 = \frac{3}{2}V_2$. **C.** $V_1 = 3V_2$. **D.** $V_1 = \frac{9}{4}V_2$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $AB = x\ (x > 0)$. Tam giác SAB vuông tại $A \Rightarrow SA = AB.\tan ABS = x\sqrt{3}$.

IB là phân giác trong góc $B \Rightarrow IBA = 30° \Rightarrow IA = AB\tan 30° = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Quay miền tam giác SAB quanh SA ta được khối nón có chiều cao là SA, bán kính đáy là AB

$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3}\pi.AB^2.SA = \frac{1}{3}\pi.x^2.x\sqrt{3} = \frac{\pi x^3\sqrt{3}}{3}$.

Quay nửa hình tròn tâm I quanh SA ta được khối cầu tâm I bán kính IA

$\Rightarrow V_2 = \frac{4}{3}\pi IA^3 = \frac{4}{3}\pi.\frac{x^3}{3\sqrt{3}} = \frac{4\pi x^3\sqrt{3}}{27} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{4}$.

Câu 25: Một cái trục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là 5cm, chiều dài lăn là 23cm. Sau khi lăn trọn 10 vòng thì trục lăn tạo nên tường phẳng lớp sơn có diện tích là



A. $2300\pi\,\text{cm}^2$. **B.** $1150\pi\,\text{cm}^2$. **C.** $862,5\pi\,\text{cm}^2$. **D.** $5230\pi\,\text{cm}^2$.

Lời giải

Chọn B

Khi lăn trọn một vòng thì trục lăn tạo trên tường phẳng lớp sơn có diện tích bằng diện tích xung quanh của trục lăn là $S = 2\pi R.h = 2\pi.\frac{5}{2}.23 = 115\pi(\text{cm}^2)$.

Vậy sau khi lăn trọn 10 vòng thì trục lăn tạo nên tường phẳng lớp sơn có diện tích là $10S = 1150\pi(\text{cm}^2)$.

Câu 26: Người ta thiết kế một thùng chứa hình trụ có thể tích V nhất định. Biết rằng giá của vật liệu làm mặt đáy và nắp của thùng bằng nhau và gấp $1,5$ lần so với giá vật liệu để làm mặt xung quanh của thùng. Gọi chiều cao của thùng là h và bán kính đáy là r. Tính tỉ số $\frac{h}{r}$ sao cho chi phí vật liệu sản xuất thùng là nhỏ nhất?

A. $\frac{h}{r} = 2.$ **B.** $\frac{h}{r} = \sqrt{3}.$ **C.** $\frac{h}{r} = 3.$ **D.** $\frac{h}{r} = 2\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn C

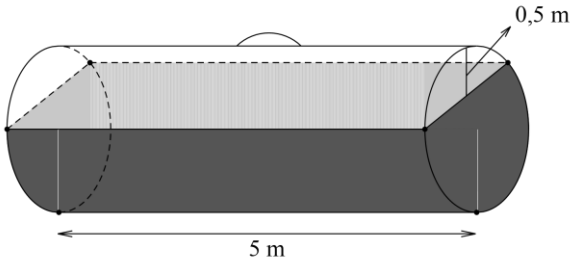
Gọi giá của vật liệu làm mặt xung quanh là $x,(x>0)$, suy ra giá của vật liệu làm đáy và nắp là $1,5x$.

Tổng chi phí vật liệu sản xuất thùng:

$$T=3x\pi r^2+2x\pi rh=\pi x\left(3r^2+\frac{2V}{\pi r}\right)=\pi x\left(3r^2+\frac{V}{\pi r}+\frac{V}{\pi r}\right)\geq \pi x.\left(3\sqrt[3]{3r^2.\frac{V}{\pi r}.\frac{V}{\pi r}}\right)=3\pi x.\sqrt[3]{\frac{3V^2}{\pi^2}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{V}{\pi r}=3r^2\Leftrightarrow\frac{\pi r^2h}{\pi r}=3r^2\Leftrightarrow h=3r\Leftrightarrow\frac{h}{r}=3.$

Câu 27: Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5m, có bán kính đáy 1m, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với $0,5\text{m}$ của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn.

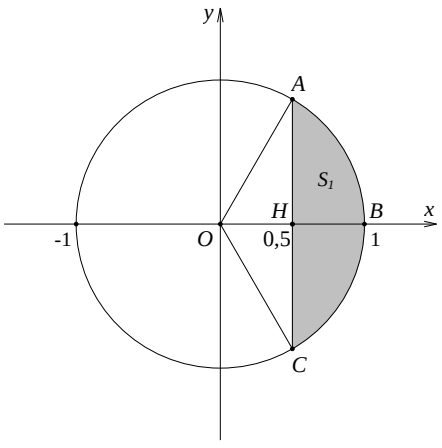


A. $23,562\text{ m}^3$. **B.** $12,637\text{ m}^3$. **C.** $6,319\text{ m}^3$. **D.** $11,781\text{ m}^3$.

Lời giải

Chọn B

Gắn hệ trục tọa độ Oxy vào đáy hình trụ như hình vẽ sau



Ta có H là trung điểm OB nên ΔOAB là tam giác đều. Suy ra $AOB=60°$ và $AOC=120°$ nên hình quạt chứa cung nhỏ AC có diện tích là $S=\frac{1}{3}\pi r^2=\frac{\pi}{3}$.

Khi đó diện tích phần tô đậm trên hình vẽ là $S_1=S-S_{OAC}=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}.0,5.\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

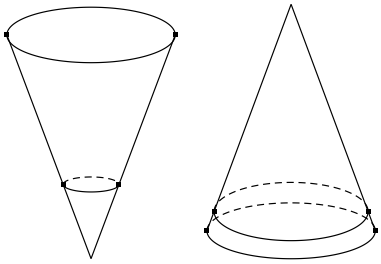
Và thể tích dầu được rút ra là $V_1 = h.S_1 = 5.\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Thể tích bồn chứa dầu hình trụ là $V = \pi r^2 h = 5\pi$.

Thể tích dầu còn lại trong bồn là $V_2 = V - V_1 = 5\pi - 5.\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{10\pi}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{4} \approx 12,637\left(\text{m}^3\right)$.

Cách khác: Có thể tính diện tích phần tô đậm bằng tích phân $S_1 = 2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\text{d}x$.

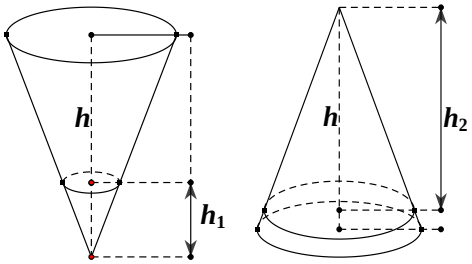
Câu 28: Một cái phễu có dạng hình nón. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của lượng nước trong phễu bằng một phần ba chiều cao của phễu. Hỏi nếu bịt miệng phễu rồi lộn ngược phễu lên thì chiều cao của nước bằng bao nhiêu? Biết chiều cao của phễu là $15\,\text{cm}$.



A. $0,5\,\text{cm}$. **B.** $0,216\,\text{cm}$. **C.** $0,3\,\text{cm}$. **D.** $0,188\,\text{cm}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $h = 15\,\text{cm}$ là chiều cao của phễu và V là thể tích của phễu hình nón.

Ký hiệu $h_1 = \frac{1}{3}h = 5$ cm là chiều cao và V_1 là thể tích của lượng nước trong phễu.

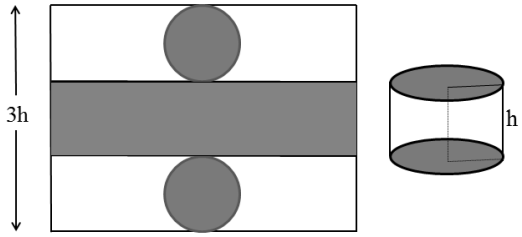
Gọi h_2, V_2 là chiều cao và thể tích của phần không gian trống trong phễu khi lật ngược phễu lại.

Ta có $V_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 V = \frac{V}{27}$, $V_2 = \left(\frac{h_2}{h}\right)^3 V$ và $V_1 = V - V_2$.

Khi đó: $V_1 = V - V_2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^3 V = V - \left(\frac{h_2}{h}\right)^3 V \Leftrightarrow \frac{1}{27} = 1 - \left(\frac{h_2}{15}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{h_2}{15} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{27}} \Leftrightarrow h_2 = 5\sqrt[3]{26}$.

Vậy chiều cao của nước khi lật ngược phễu lại là $h - h_2 = 15 - 5\sqrt[3]{26} \approx 0,188$ cm.

Câu 29: Từ một tấm thép phẳng hình chữ nhật, người ta muốn làm một chiếc thùng đựng dầu hình trụ bằng cách cắt ra hai hình tròn bằng nhau và một hình chữ nhật sau đó hàn kín lại, như hình vẽ dưới đây.



Hai hình tròn làm hai mặt đáy, hình chữ nhật làm thành mặt xung quanh của thùng đựng dầu. Biết thùng đựng dầu có thể tích bằng $50,24$ lít. Tính diện tích của tấm thép hình chữ nhật ban đầu?

A. $1,8062\,\mathrm{m}^2$. **B.** $2,2012\,\mathrm{m}^2$. **C.** $1,5072\,\mathrm{m}^2$. **D.** $1,2064\,\mathrm{m}^2$.

Lời giải

Chọn C

Gọi tấm thép hình chữ nhật ban đầu là $ABCD$, r là bán kính của hình tròn đáy.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là: $S = AB.AD$. Ta có $3h = 4r + h \Leftrightarrow h = 2r$.

Thể tích của khối trụ $V = \pi.r^2.h = 3,14.r^2.2\mathrm{r} = 6,28\mathrm{r}^3$.

Theo bài ra $V = 50,24 \Leftrightarrow 6,28r^3 = 50,24 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = 2$.

Do $r = 2\,\mathrm{dm} = 0,2\,\mathrm{m} \Rightarrow AD = 3h = 6r = 1,2\,\mathrm{m}; AB = 2\pi.r = 1,256\,\mathrm{m}$.

Vậy $S = 1,2.1,256 = 1,5072\,(\mathrm{m}^2)$.

Câu 30: Người ta xếp ba viên bi có bán kính bằng nhau và bằng $\sqrt{3}$ vào một cái lọ hình trụ sao cho các viên bi đều tiếp xúc với hai đáy của lọ hình trụ và các viên bi này đôi một tiếp xúc nhau và cùng tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ. Tính bán kính đáy của lọ hình trụ.

A. $1+2\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2}$. **D.** $2+\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm của ba viên bi và $r_1 = r_2 = r_3 = \sqrt{3}$ là bán kính của ba viên bi đó.

Theo giả thiết thì ba đường tròn lớn của ba viên bi đôi một tiếp xúc với nhau, khi đó ba điểm O_1, O_2, O_3 tạo thành một tam giác đều cạnh $2\sqrt{3}$. Gọi O là trọng tâm của tam giác $O_1O_2O_3$ thì

$OO_1 = OO_2 = OO_3 = \dfrac{2}{3}.2\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2$.

Cũng theo giả thiết thì ba viên bi tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ tại 3 điểm nằm trên một đường tròn bằng đường tròn đáy của lọ hình trụ.

Vậy bán kính đáy của lọ hình trụ là $OM = OO_3 + O_3M = 2 + \sqrt{3}$.

Câu 31: Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ có thể tích là V, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon sữa bò là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ bằng V và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy bằng bao nhiêu?

A. $r=\sqrt[3]{\dfrac{V\pi}{2}}$. **B.** $r=\sqrt[3]{V}$. **C.** $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. **D.** $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $S_{đáy}=\pi r^2$; $S_{xq}=2\pi rh$.

Thể tích khối trụ $V=S_{đáy}.h\Rightarrow h=\dfrac{V}{S_{đáy}}=\dfrac{V}{\pi r^2}$.

$S_{tp}=2S_{đáy}+S_{xq}=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+2\pi r.\dfrac{V}{\pi r^2}=2\pi r^2+\dfrac{2V}{r}$.

Xét hàm số $f\left(r\right)=2\pi r^2+\dfrac{2V}{r}$, có $f'\left(r\right)=4\pi r-\dfrac{2V}{r^2}$; $f'\left(r\right)=0\Leftrightarrow 4\pi r=\dfrac{2V}{r^2}\Leftrightarrow r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số đạt tại $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Vậy khi $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ thì diện tích toàn phần hình trụ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 32: Nam muốn xây một bình chứa hình trụ có thể tích 72m^3. Đáy làm bằng bêtông giá 100 nghìn đồng/m^2, thành làm bằng tôn giá 90 nghìn đồng/m^2, nắp bằng nhôm giá 140 nghìn đồng/m^2. Vậy đáy của hình trụ có bán kính bằng bao nhiêu để chi phí xây dựng là thấp nhất?

A. $\dfrac{3}{2\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$. **B.** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{\pi}}(\text{m})$.

Lời giải

Chọn B

Gọi bán kính đáy của hình trụ là R và chiều cao là h.

Do thể tích khối trụ là 72 nên $\pi R^2h=72\Leftrightarrow h=\dfrac{72}{\pi R^2}$.

Diện tích đáy là πR^2. Diện tích xung quanh là $2\pi Rh=2\pi R.\dfrac{72}{\pi R^2}=\dfrac{144}{R}$.

Chi phí làm bình là:

$T=100.\pi R^2+90.\dfrac{144}{R}+140.\pi R^2=240\pi R^2+\dfrac{12960}{R}$

$=240\pi R^2+\dfrac{6480}{R}+\dfrac{6480}{R}\geq 3\sqrt[3]{240\pi R^2.\dfrac{6480}{R}.\dfrac{6480}{R}}=6480\sqrt[3]{\pi}.$

Dấu bằng xảy ra khi $240\pi R^2=\dfrac{6480}{R}=\dfrac{6480}{R}\Leftrightarrow R=\dfrac{3}{\sqrt[3]{\pi}}.$

Câu 33: Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón không nắp có thể tích 27cm^3. Với chiều cao h và bán kính đáy là r. Tìm r để lượng giấy tiêu thụ ít nhất

A. $r=\sqrt[6]{\dfrac{3^6}{2\pi^2}}(cm)$. **B.** $r=\sqrt[4]{\dfrac{3^6}{2\pi^2}}(cm)$. **C.** $r=\sqrt[6]{\dfrac{3^8}{2\pi^2}}(cm)$. **D.** $r=\sqrt[4]{\dfrac{3^8}{2\pi^2}}(cm)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=27\Rightarrow h=\frac{3^4}{\pi r^2}$. Độ dài đường sinh là $l=\sqrt{h^2+r^2}=\sqrt{\frac{3^8}{\pi^2r^4}+r^2}$

Lượng giấy tiêu thụ ít nhất khi diện tích xung quanh nhỏ nhất.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq}=\pi rl=\pi r\sqrt{\frac{3^8}{\pi^2r^4}+r^2}=\pi\sqrt{\frac{3^8}{\pi^2r^2}+r^4}$

$.=\pi\sqrt{\frac{3^8}{2\pi^2r^2}+\frac{3^8}{2\pi^2r^2}+r^4}\ge\pi\sqrt{3\sqrt[3]{\frac{3^{16}}{4\pi^4}}}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{3^8}{2\pi^2r^2}=r^4\Leftrightarrow r=\sqrt[6]{\frac{3^8}{2\pi^2}}(cm)$. Chọn đáp án C

Câu 34: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau cắt khối cầu tâm O bán kính R tạo thành hai hình tròn (C_1) và (C_2) cùng bán kính. Xét hình nón có đỉnh trùng với tâm của một trong hai hình tròn, đáy trùng với hình tròn còn lại. Biết diện tích xung quanh của hình nón là lớn nhất, khi đó thể tích khối trụ có hai đáy là hai hình tròn (C_1) và (C_2) bằng

A. $\frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{2\pi R^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi r,h,l lần lượt là bán kính đáy, chiều cao và đường sinh của hình nón và I_1,I_2,O lần lượt là tâm của hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ và mặt cầu.

Vì hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ có bán kính bằng nhau nên dễ dàng suy ra: $OI_1=OI_2=\frac{h}{2}$

Ta có $r=\sqrt{R^2-\frac{h^2}{4}}\Rightarrow l=\sqrt{h^2+r^2}=\sqrt{R^2+\frac{3h^2}{4}}$.

Diện tích xung quanh hình nón là

$S_{xq}=\pi rl=\pi.\sqrt{R^2-\frac{h^2}{4}}.\sqrt{R^2+\frac{3h^2}{4}}=\frac{\pi}{4\sqrt{3}}\sqrt{\left(12R^2-3h^2\right).\left(4R^2+3h^2\right)}\le\frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}$.

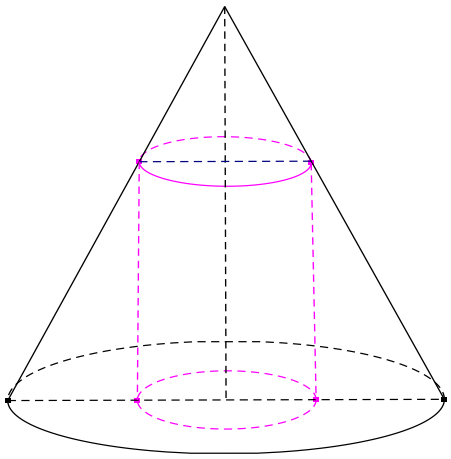
S_{xq} lớn nhất bằng $\frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $12R^2-3h^2=4R^2+3h^2\Leftrightarrow h=\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

$\Rightarrow r=\frac{R\sqrt{6}}{3}$.

Mà bán kính đáy và chiều cao của hình nón cũng chính là bán kính đáy và chiều cao hình trụ.

Vậy thể tích hình trụ $V=\pi.r^2.h=\pi.\frac{6R^2}{9}.\frac{2R}{\sqrt{3}}=\frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 35: Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3 chiều cao bằng 6, một khối trụ có bán kính đáy thay đổi nội tiếp khối nón đã cho. Thể tích lớn nhất của khối trụ bằng



A. 6π. **B.** 10π. **C.** 4π. **D.** 8π.

Lời giải

Chọn D

Gọi bán kính của khối trụ là $x\left(0<x<3\right)$, chiều cao của khối trụ là $h=OO'\left(0<h<6\right)$.

Khi đó thể tích khối trụ là: $V=\pi x^2h$.

Ta có: $\Delta SO'N$ đồng dạng với ΔSOB nên có $\frac{O'N}{OB}=\frac{SO'}{SO}\Leftrightarrow\frac{x}{3}=\frac{6-h}{6}\Leftrightarrow h=6-2x$.

Suy ra $V=\pi x^2h=\pi x^2\left(6-2x\right)=\pi\left(6x^2-2x^3\right)$.

Xét hàm $f\left(x\right)=6x^2-2x^3,\ \left(0<x<3\right)$.

$f'\left(x\right)=12x-6x^2;\ f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ \left(l\right)\\x=2\ \left(n\right)\end{array}\right.$

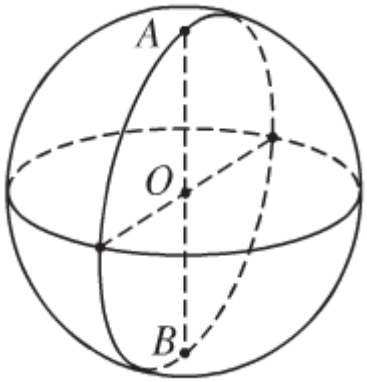
Bảng biến thiên:

Do đó V lớn nhất khi hàm $f\left(x\right)$ đạt giá trị lớn nhất.

Vậy thể tích của khối trụ lớn nhất là $V=8\pi$ khi bán kính khối trụ bằng 2.

Dạng 7: Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

Cho mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R



- Diện tích mặt cầu được tính bằng công thức: $S_{mat\ cau} = 4\pi R^2$
- Thể tích khối cầu được tính bằng công thức: $V_{khoi\ cau} = \frac{4}{3}\pi R^3$

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Tính thể tích V của khối cầu có bán kính $R = 2b$?

A. $V = \frac{16}{3}\pi b^3$. **B.** $V = \frac{8}{3}\pi b^3$. **C.** $V = \frac{32}{3}\pi b^3$. **D.** $S_{tp} = 16\pi b^3$.

Lời giải

Chọn C

Thể tích khối cầu cần tính là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(2b)^3 = \frac{32}{3}\pi b^3$.

Câu 2: Thể tích của khối cầu có bán kình bằng $2cm$ là

A. $8\pi^3(cm^3)$. **B.** $8\pi(cm^3)$. **C.** $\frac{32}{3}(cm^3)$. **D.** $\frac{32\pi}{3}(cm^3)$.

Lời giải

Chọn D

Thể tích của khối cầu là: $V = \frac{4}{3}.\pi.2^3 = \frac{32\pi}{3}(cm^3)$.

Câu 3: Cho mặt cầu có bán kính $R = 2$. Diện tích mặt cầu đã cho bằng:

A. $\frac{16}{3}\pi$. **B.** 8π. **C.** 16π. **D.** $\frac{32}{3}\pi$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích mặt cầu đã cho bằng: $S = 4\pi R^2 = 4\pi 4 = 16\pi$.

Câu 4: Gọi V_1 là thể tích khối cầu có bán kính R_1, Gọi V_2 là thể tích khối cầu có bán kính $R_2 = 2R_1$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 4. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{4}{3}\pi R_1^{\,3}}{\frac{4}{3}\pi R_2^{\,3}}=\frac{R_1^{\,3}}{\left(2R_1\right)^3}=\frac{1}{8}$.

Câu 5: Nếu tăng bán kính của một khối cầu gấp 3 lần thì thể tích thay đổi như thế nào?

A. Thể tích tăng gấp 6 lần.

B. Thể tích tăng gấp 9 lần.

C. Thể tích tăng gấp 3 lần.

D. Thể tích tăng gấp 27 lần.

Lời giải

Chọn D

Thể tích khối cầu có bán kính R là $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

Thể tích khối cầu có bán kính $R'=3R$ là $V'=\frac{4}{3}\pi\left(3R\right)^3$.

Ta có: $\frac{V'}{V}=\frac{\frac{4}{3}\pi\left(3R\right)^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}=27$. Vậy nếu tăng bán kính của một khối cầu gấp 3 lần thì thể tích tăng gấp 27 lần.

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Diện tích của mặt cầu có bán kính $R=2$ bằng

A. 8π. **B.** 16π. **C.** 4π. **D.** 10π.

Lời giải

Chọn B

Diện tích của mặt cầu có bán kính $R=2$ bằng $S=4\pi R^2=16\pi$.

Câu 2: Tính thể tích V của khối cầu có đường kính bằng 3cm.

A. $V=36\pi\,\text{cm}^3$. **B.** $V=\dfrac{9\pi}{2}\text{cm}^3$. **C.** $V=9\pi\,\text{cm}^3$. **D.** $V=\dfrac{9\pi}{8}\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn B

Bán kính $R=\dfrac{3}{2}$ nên thể tích của khối cầu bằng $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{9\pi}{2}\text{cm}^3$.

Câu 3: Diện tích S của mặt cầu bán kính R được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $\dfrac{3}{4}\pi R^2$. **B.** πR^2. **C.** $4\pi R^2$. **D.** $\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích S của mặt cầu bán kính R bằng $4\pi R^2$.

Câu 4: Cho mặt cầu có diện tích bằng $72\pi\left(\text{cm}^2\right)$. Bán kính R của khối cầu bằng

A. $R=3\sqrt{2}\left(\text{cm}\right)$. **B.** $R=\sqrt{6}\left(\text{cm}\right)$. **C.** $R=3\left(\text{cm}\right)$. **D.** $R=6\left(\text{cm}\right)$.

Lời giải

Diện tích mặt cầu $S=4\pi R^2=72\pi\left(\text{cm}^2\right)\Rightarrow R=3\sqrt{2}\left(\text{cm}\right)$.

Câu 5: Diện tích mặt cầu có bán kính bằng 2 là

A. 16π. **B.** 64π. **C.** $\dfrac{32\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{256\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 6: Cho mặt cầu có bán kính $R=2$. Diện tích mặt cầu đã cho bằng

A. 4π. **B.** 8π. **C.** $\dfrac{32}{3}\pi$. **D.** 16π.

Lời giải

Chọn D

Diện tích mặt cầu: $S=4\pi R^2=16\pi$

Câu 7: Cho khối cầu bán kính $2R$. Thể tích khối cầu đó bằng

A. $\dfrac{32}{3}\pi R^3$. **B.** $\dfrac{16}{3}\pi R^3$. **C.** $\dfrac{64}{3}\pi R^3$. **D.** $\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối cầu đó là $V=\frac{4}{3}\pi\left(2R\right)^3=\frac{32}{3}\pi R^3$.

Câu 8: Bán kính R của khối cầu có thể tích $V=\frac{256\pi}{3}$ là

A. $R=\frac{1}{3}$. **B.** $R=3$. **C.** $R=2$. **D.** $R=4$.

Lời giải

Chọn D

Thể tích của khối cầu $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{256\pi}{3}\Rightarrow R=4$.

Câu 9: Cho khối cầu có đường kính bằng 2. Thể tích khối cầu đã cho bằng

A. $\frac{32\pi}{3}$. **B.** $\frac{32}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{4\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Thể tích khối cầu: $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3=\frac{4}{3}\pi$

Câu 10: Một khối cầu có đường kính bằng 4 thì diện tích bề mặt khối cầu đó bằng

A. $\frac{32\pi}{3}$. **B.** 16π. **C.** 64π. **D.** $\frac{256\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Khối cầu có đường kính bằng 4 thì khối cầu có bán kinh $R=2$.

Diện tích bề mặt khối cầu đó bằng $S=4\pi R^2=4\pi.2^2=16\pi$.

Câu 11: Thể tích V của khối cầu có bán kính $R=2\left(\text{m}\right)$ là

A. $V=\frac{16\pi}{3}\left(m^3\right)$. **B.** $V=32\pi\left(m^3\right)$. **C.** $V=\frac{32\pi}{3}\left(m^3\right)$. **D.** $V=16\pi\left(m^3\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi.2^3=\frac{32\pi}{3}\left(m^3\right)$.

Câu 12: Thể tích khối cầu có đường kính bằng $2a$ là

A. $2\pi a^3$. **B.** $\frac{8}{3}\pi a^3$. **C.** $\frac{4}{3}\pi a^3$. **D.** $4\pi a^3$.

Lời giải

Chọn C

Vì khối cầu có đường kính bằng $2a\Rightarrow$ bán kính $R=a\Rightarrow$ Thể tích khối cầu: $V=\frac{4}{3}\pi a^3$

Câu 13: Cho mặt cầu có bán kính $r=2$. Diện tích của mặt cầu đã cho là

A. $\frac{16\pi}{3}$. **B.** 16π. **C.** $\frac{32\pi}{3}$. **D.** 4π.

Lời giải

Chọn B

Diện tích mặt cầu đã cho là $S = 4\pi r^2 = 16\pi$.

Câu 14: Thể tích khối cầu bán kính $R = 3a$ là

A. $V = 36\pi a^3$. **B.** $V = 18\pi a^3$. **C.** $V = 12\pi a^3$. **D.** $V = 12\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối cầu bán kính $R = 3a$ là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(3a)^3 = 36\pi a^3$.

Câu 15: Cho khối cầu có bán kính $r = 2$. Thể tích của khối cầu đã cho bằng

A. $\frac{32\pi}{3}$. **B.** $\frac{256\pi}{3}$. **C.** 256π **D.** 64π.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối cầu đã cho là $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi.2^3 = \frac{32\pi}{3}$.

Câu 16: Cho mặt cầu (S) có diện tích 4π. Thể tích khối cầu (S) bằng

A. $\frac{4\pi}{3}$. **B.** $\frac{16\pi}{3}$. **C.** 16π. **D.** 32π.

Lời giải

Ta có $S = 4\pi R^2 = 4\pi \Rightarrow R = 1$

Thể tích khối cầu $V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

Câu 17: Cho khối cầu có đường kính bằng 4. Thể tích của khối cầu đã cho bằng

A. 16π. **B.** $\frac{32\pi}{3}$. **C.** 32π. **D.** $\frac{8\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Khối cầu có đường kính bằng 4 nên bán kính của khối cầu đã cho là $r = 2$. Do đó thể tích của khối cầu đã cho là $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}.2^3\pi = \frac{32}{3}\pi.$

Câu 18: Một mặt cầu có diện tích là 64π thì thể tích của khối cầu đó bằng

A. $\frac{32\pi}{3}$. **B.** $\frac{256\pi}{3}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** $\frac{2048\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Diện tích mặt cầu bằng $S = 4\pi R^2 = 64\pi \Rightarrow R = 4$.

Thể tích của khối cầu bằng $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{256\pi}{3}$.

Câu 19: Cắt khối cầu tâm I bởi mặt phẳng qua I, thiết diện thu được là hình tròn có diện tích bằng 9π. Thể tích khối cầu đã cho bằng

A. 12π. **B.** 36π. **C.** 18π. **D.** 27π.

Lời giải

Chọn B

Cắt khối cầu tâm I bởi mặt phẳng qua I, thiết diện thu được là hình tròn thì bán kính của đường tròn chính là bán kính của mặt cầu.

$S = 9\pi = \pi R^2 \Leftrightarrow R = 3$

Do đó, thể tích khối cầu đã cho là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.27 = 36\pi$

Câu 20: Một khối cầu có thể tích bằng $\frac{32\pi}{3}$. Bán kính của khối cầu bằng

A. $R = 32$ **B.** $R = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ **C.** $R = 4$ **D.** $R = 2$

Lời giải

Chọn D

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32\pi}{3} \Rightarrow R = 2$

Câu 21: Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật có ba kích thước 1, 2, 3 là

A. $\frac{7\pi\sqrt{14}}{3}$. **B.** $\frac{9\pi}{2}$. **C.** 36π. **D.** $\frac{9\pi}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Bán kính khối cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật có ba kích thước 1, 2, 3 là: $R = \frac{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Thể tích khối cầu trên là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^3 = \frac{7\pi\sqrt{14}}{3}$.

Câu 22: Cho mặt cầu có chu vi đường tròn lớn là 3π. Thể tích khối cầu đã cho bằng

A. $\frac{9\pi}{2}$. **B.** 8π. **C.** $3,6\pi$. **D.** 4π.

Lời giải

Chọn A

Đường tròn lớn có bán kính bằng bán kính mặt cầu nên $R = \frac{3}{2} \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9\pi}{2}$

Câu 23: Cho mặt cầu có diện tích bằng 20π. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** 5. **D.** $\sqrt{10}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $S_{mc} = 4\pi r^2 \Leftrightarrow 20\pi = 4\pi r^2 \Leftrightarrow r^2 = 5 \Leftrightarrow r = \sqrt{5}$.

Câu 24: Cho khối cầu có đường kính bằng 1. Thể tích của khối cầu đã cho bằng

A. 4π. **B.** $\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** $\frac{\pi}{12}$.

Lời giải

Chọn B

Bán kính của khối cầu là $R=\frac{1}{2}$.

Thể tích của khối cầu là $V=\frac{4}{3}.\pi.R^3=\frac{4}{3}.\pi.\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{\pi}{6}$.

Câu 25: Cho mặt cầu có thể tích bằng $32\sqrt{3}\pi a^3$. Tính diện tích S của mặt cầu đã cho.

A. $S=12\pi a^2$. **B.** $S=48\pi a^2$. **C.** $S=16\pi a^2$. **D.** $S=24\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $V=\frac{4}{3}\pi r^3 \Leftrightarrow 32\sqrt{3}\pi a^3=\frac{4}{3}\pi r^3 \Leftrightarrow r=2\sqrt{3}a$

Vậy $S=4\pi r^2=4\pi\left(2\sqrt{3}a\right)^2=48\pi a^2$.

Câu 26: Cho mặt cầu (S) có diện tích $4\pi a^2\ (cm^2)$. Khi đó, thể tích khối cầu (S) là

A. $\frac{64\pi a^3}{3}\ (cm^3)$. **B.** $\frac{16\pi a^3}{3}\ (cm^3)$. **C.** $\frac{\pi a^3}{3}\ (cm^3)$. **D.** $\frac{4\pi a^3}{3}\ (cm^3)$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích mặt cầu (S): $S=4\pi R^2 \Leftrightarrow 4\pi a^2=4\pi R^2 \Rightarrow R=a\ (cm)$

Thể tích khối cầu (S): $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi.a^3\ (cm^3)$.

Câu 27: Mặt cầu (S) có diện tích bằng $36\pi a^2$, khối cầu (S) này có thể tích bằng

A. $36\pi a^3$. **B.** $288\pi a^3$. **C.** $9\pi a^3$. **D.** $108\pi a^3$.

Lời giải

Chọn A

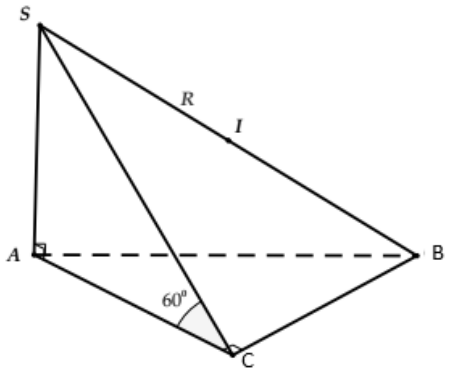
Ta có: $S_{mc}=4\pi r^2=36\pi a^2 \Rightarrow r=3a$ nên $V_{k.c}=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi.(3a)^3=36\pi a^3$..

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy, ΔABC vuông cân tại C, $AC=2\sqrt{2}$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $60°$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\frac{112\pi}{3}$. **B.** $\frac{224\pi}{3}$. **C.** 160π. **D.** 40π.

Lời giải

Chọn D



Do $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC \Rightarrow ((SBC),(ABC)) = SCA = 60^\circ$

Xét ΔSAC vuông tại A: $\tan SCA = \dfrac{SA}{AC} \Leftrightarrow SA = AC.\tan SCA = 2\sqrt{6}$

Do ΔSCB vuông tại C và tam giác ΔSAB vuông tại A nên tâm I mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là trung điểm của $SB \Rightarrow R = \dfrac{SB}{2}$

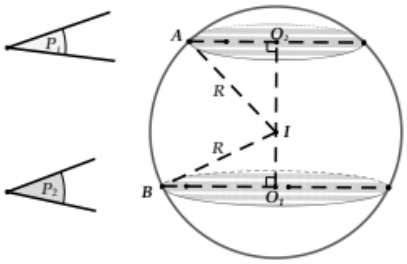
Tính được $AB = 4; SB = 2\sqrt{10} \Rightarrow R = \sqrt{10}$. Vậy $S = 4\pi R^2 = 40\pi$

Câu 29: Cho hai đường tròn (C_1) tâm O_1, bán kính bằng 1, (C_2) tâm O_2, bán kính bằng 2 lần lượt nằm trên hai mặt phẳng (P_1), (P_2) sao cho $(P_1)//(P_2)$ và $O_1O_2 \perp (P_1); O_1O_2 = 3$. Tính diện tích mặt cầu qua hai đường tròn đó.

A. 24π. **B.** 20π. **C.** 16π. **D.** 12π.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là tâm mặt cầu, Đặt $IO_1 = x$ $(0 < x < 3)$.

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = IB^2 - O_1B^2 = R^2 - 1 \\ (3-x)^2 = IA^2 - O_2A^2 = R^2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R^2 = 1 + x^2 \\ R^2 = 4 + (3-x)^2 \end{cases}$

$\Rightarrow 4 + (3-x)^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow R = \sqrt{IO_1^2 + BO_1^2} = \sqrt{5}$

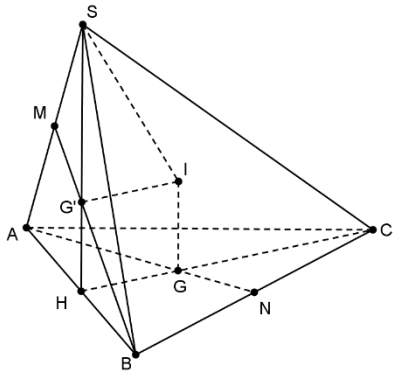
Vậy $S = 4\pi R^2 = 20\pi$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $V = \dfrac{5\sqrt{15}\pi}{18}$. **B.** $V = \dfrac{5\sqrt{15}\pi}{54}$. **C.** $V = \dfrac{4\sqrt{3}\pi}{27}$. **D.** $V = \dfrac{5\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm cạnh AB, G, G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và SAB.

$SI = \sqrt{IG'^2 + SG'^2} = \sqrt{HG^2 + SG'^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{6}$.

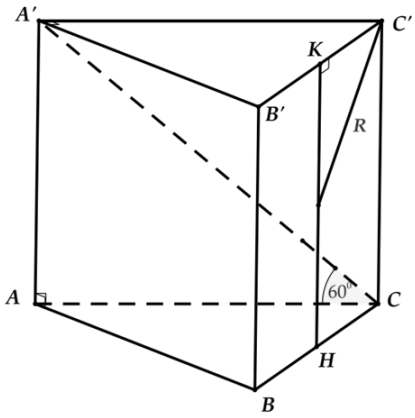
Vậy thể tích khối cầu là $V = \frac{4}{3}\pi.\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right)^3 = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$.

Câu 31: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ΔABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = 1$, góc giữa $A'C$ và (ABC) bằng 60°. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $C'.ABB'A'$.

A. $\frac{5\pi}{2}$. **B.** 5π. **C.** $\frac{5\pi}{4}$. **D.** $\frac{5\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $AA' \perp (ABC) \Rightarrow (A'C,(ABC)) = A'CA$.

Xét $\Delta A'CA$ vuông tại A:

$\tan A'CA = \frac{AA'}{AC} \Leftrightarrow AA' = AC.\tan A'CA = \sqrt{3}$.

Nhận xét: *Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $C'.ABB'A'$ cũng là mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.*

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, B'C'$.

Bán kính mặt cầu là $R = IC' = \sqrt{IK^2 + (KC')^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

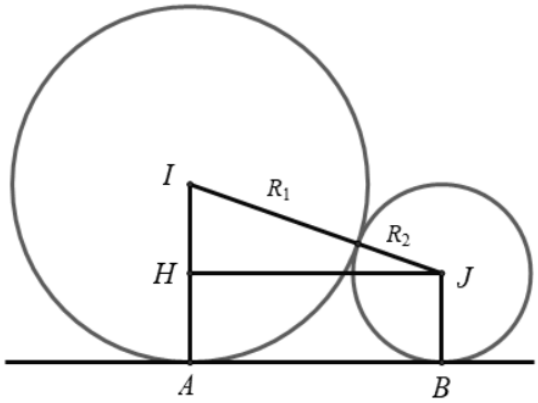
Vậy diện tích mặt cầu là $S = 4\pi R^2 = 4.\frac{5\pi}{4} = 5\pi$.

Câu 32: Cho hai khối cầu có tổng diện tích bằng 80π tiếp xúc ngoài nhau và cùng tiếp xúc với mặt phẳng (P) lần lượt tại hai điểm A, B. Tính tổng thể tích của hai khối cầu đó biết $AB = 4\sqrt{2}$.

A. $24\sqrt{2}\pi$. **B.** $96\sqrt{2}\pi$. **C.** 96π. **D.** 192π.

Lời giải

Chọn C



Gọi R_1, R_2 là bán kính $\left(R_1 > R_2\right)$; I, J là tâm của các mặt cầu (như hình vẽ).

Gọi H là hình chiếu của J lên IA.

Theo bài ra, ta có hệ:

$$\begin{cases}\left(R_1+R_2\right)^2 = IH^2 + HJ^2 \\ 4\pi\left(R_1^2+R_2^2\right) = 80\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(R_1+R_2\right)^2 = \left(R_1-R_2\right)^2 + AB^2 \\ R_1^2+R_2^2 = 20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}R_1.R_2 = 8 \\ R_1+R_2 = 6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}R_1 = 4 \\ R_2 = 2\end{cases}$$

Vậy $V = \frac{4}{3}\pi\left(R_1^3+R_2^3\right) = \frac{4}{3}\pi.72 = 96\pi$.

Dạng 8: Khối cầu ngoại tiếp khối đa diện

Định nghĩa: Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện là mặt cầu đi qua tất cả các đỉnh của khối đa diện đó.

Điều kiện **cần** và **đủ** để khối chóp có mặt cầu ngoại tiếp: có đáy là một đa giác nội tiếp.

Cách xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện:

- **Bước 1:** Xác định trục của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Gọi tắt là **trục của đáy** (là đường thẳng vuông góc với đáy tại tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy).
- **Bước 2:** Xác định măt phẳng trung trực của một cạnh bên hoặc trục của đường tròn ngoại tiếp một đa giác của mặt bên.
- **Bước 3:** Giao điểm của trục của đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên (hoặc trục của đáy và trục của đường tròn ngoại tiếp một đa giác của mặt bên) là **tâm mặt cầu ngoại tiếp** khối đa diện đó.

Một số công thức tính nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp

Công thức 1: Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy:

$$R = \sqrt{R_d^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}$$

Trong đó R_d là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy, h là độ dài cạnh bên vuông góc với đáy.

Công thức 2: Khối tứ diện vuông (có các cạnh đôi một vuông góc):

$$R = \frac{\sqrt{OA^2 + OB^2 + OC^2}}{2}$$

Công thức 3: Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy:

$$R = \sqrt{R_d^2 + R_b^2 - \frac{a^2}{4}},$$

Trong đó R_d là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy; R_b là bán kính đường tròn ngoại tiếp của mặt bên và a tương ứng là độ dài đoạn giao tuyến của mặt bên và đáy.

Công thức 4: Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau: $R = \frac{a^2}{2h}$

Trong đó a là độ dài cạnh bên và h là chiều cao khối chóp và h được tính bằng công thức $h = \sqrt{a^2 - R_d^2}$.

Công thức 5: Khối tứ diện gần đều $ABCD$ có $AB = CD = a;\ AC = BD = b;\ AD = BC = c$

$$R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}}$$

A VÍ DỤ MINH HỌA

Câu 1: Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Hình chóp có đáy là hình thoi có mặt cầu ngoại tiếp.

B. Hình chóp tứ giác đều có mặt cầu ngoại tiếp.

C. Hình chóp có đáy là tam giác có mặt cầu ngoại tiếp.

D. Hình chóp có đáy là hình chữ nhật có mặt cầu ngoại tiếp.

Lời giải

Chọn A

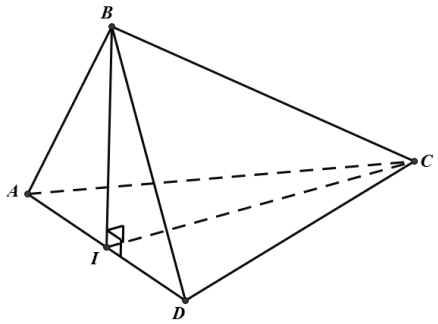
Hình thoi không nội tiếp được đường tròn, do đó hình chóp có đáy là hình thoi không có mặt cầu ngoại tiếp.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có các mặt bên ABC và BCD là các tam giác đều cạnh bằng 2, hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) vuông góc với nhau. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của AD thì $\angle BIC = (ABD, ACD) = 90^0 \Rightarrow \Delta IBC$ vuông tại I.

Vì $\Delta ABD = \Delta CBD$ nên $IB = IC = \sqrt{2} \Rightarrow IA = \sqrt{AC^2 - IC^2} = \sqrt{2} \Rightarrow IA = IB = IC = ID = \sqrt{2}$.

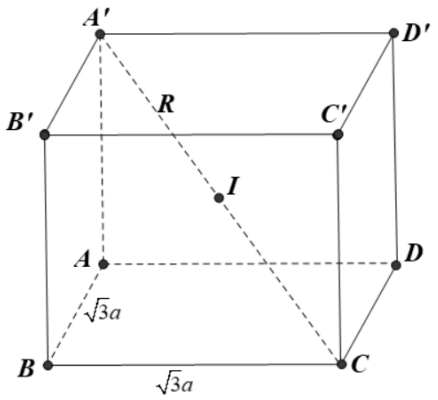
Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng $\sqrt{2}$.

Câu 3: Tìm bán kính $\mathbb{R}$ của mặt cầu ngoại tiếp một hình lập phương có cạnh bằng $\sqrt{3}a$

A. $R = \frac{3a}{2}$. **B.** $R = \sqrt{6}a$. **C.** $R = \frac{a}{2}$. **D.** $R = 3a$.

Lời giải

Chọn A



Đường chéo của hình lập phương $A'C$ là: $A'C = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} = 3a$

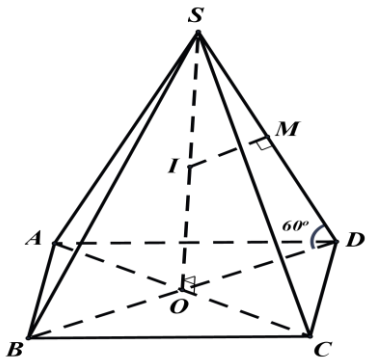
Gọi I là trung điểm của $A'C$ thì I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương, nên bán kính $R = \frac{3a}{2}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3, AD = 4$ và các cạnh bên của hình chóp tạo với mặt đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V = \frac{250\sqrt{3}}{3}\pi$. **B.** $V = \frac{125\sqrt{3}}{6}\pi$. **C.** $V = \frac{500\sqrt{3}}{27}\pi$. **D.** $V = \frac{50\sqrt{3}}{27}\pi$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$. Khi đó, SO là trục của hình chóp $S.ABCD$.

Gọi M là trung điểm của của SD. Kẻ đường trung trực của cạnh SD cắt SO tại I. Khi đó, I là tâm khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Ta có: $\Delta SMI \sim \Delta SOD$ suy ra $\frac{SM}{SO} = \frac{SI}{SD} = \frac{MI}{OD} \Rightarrow SI = \frac{SM.SD}{SO} = \frac{SD^2}{2SO}$.

Ta có: $OD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 4^2} = \frac{5}{2}$. Xét tam giác SOD vuông tại O, ta có:

$SO = \tan 60°.\text{OD} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$, $SD = \frac{OD}{\cos 60°} = 5$.

Suy ra $SI = \frac{5^2}{2.\frac{5\sqrt{3}}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. Vậy $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{500\sqrt{3}}{27}\pi$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Tam giác SAB là tam giác vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. điểm O. **B.** trung điểm của SC.

C. trung điểm của AB. **D.** trung điểm của SD.

Lời giải

Chọn A

Do tam giác SAB là tam giác vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$.

Gọi I là trung điểm của AB. Trong $(ABCD)$ từ I kẻ đường thẳng d_1 vuông góc với AB.

Suy ra $\begin{cases} d_1 \perp (SAB) \\ O \in \mathrm{d}_1 \end{cases}$.

Do đó tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là điểm O.

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hình chóp có đáy là hình thoi luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

B. Hình lăng trụ đứng luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

C. Hình chóp có đáy là hình thang cân luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

D. Hình lăng trụ có đáy là hình chữ nhật luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

Lời giải

Chọn C

Hình chóp có đáy là đa giác có đường tròn ngoại tiếp thì có mặt cầu ngoại tiếp.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA=a$, $SA\perp(ABCD)$. Thể tích khối cầu đi qua các đỉnh của hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{2}$. **B.** $\frac{3\pi\sqrt{3}a^3}{8}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{4}$. **D.** $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ cạnh a là $R_d=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Đường cao của khối chóp $S.ABCD$ là $h=SA=a$.

Suy ra bán kính khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là:

$$R=\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2+R_d^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{2a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng: $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\frac{a^3 3\sqrt{3}}{8}=\frac{a^3\pi\sqrt{3}}{2}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA=a$, $SA\perp(ABCD)$. Thể tích khối cầu đi qua các đỉnh của hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{2}$. **B.** $\frac{3\pi\sqrt{3}a^3}{8}$. **C.** $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{4}$. **D.** $\frac{\pi\sqrt{3}a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ cạnh a là $R_d=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Đường cao của khối chóp $S.ABCD$ là $h=SA=a$.

Suy ra bán kính khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là:

$$R=\sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2+R_d^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{2a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng: $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\frac{a^3 3\sqrt{3}}{8}=\frac{a^3\pi\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA=a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng

A. $\pi a^2\sqrt{2}$. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $8\pi a^2$. **D.** $4\pi a^2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$. Mà $AB \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Chứng minh tương tự $DC \perp SD$. Vậy $SBC = 90^0; SDC = 90^0 \Rightarrow$ mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có đường kính SC.

$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2\sqrt{2}a \Rightarrow R = \dfrac{SC}{2} = \sqrt{2}a$.

Nên diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng $4\pi R^2 = 8\pi a^2$..

Câu 5: Tính thể tích khối lập phương nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 3

A. $18\sqrt{3}$. **B.** $12\sqrt{2}$. **C.** $24\sqrt{3}$. **D.** $54\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi x là cạnh của khối lập phương.

Đường chéo của khối lập phương là $x\sqrt{3}$.

Khối lập phương nội tiếp mặt cầu tương đương mặt cầu ngoại tiếp khối lập phương.

Ta có bán kính của mặt cầu ngoại tiếp khối lập phương bằng $\dfrac{x\sqrt{3}}{2} = 3 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối lập phương $V = x^3 = \left(2\sqrt{3}\right)^3 = 24\sqrt{3}$.

Câu 6: Một khối cầu ngoại tiếp khối lập phương. Tỉ số thể tích giữa khối cầu và khối lập phương là

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\pi$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi cạnh của hình lập phương là 1

$\Rightarrow$ Bán kính khối cầu ngoại tiếp khối lập phương là $R = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ Thể tích khối cầu là $V_1 = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}$

Ta có : Thể tích khối lập phương là $V_2 = 1$

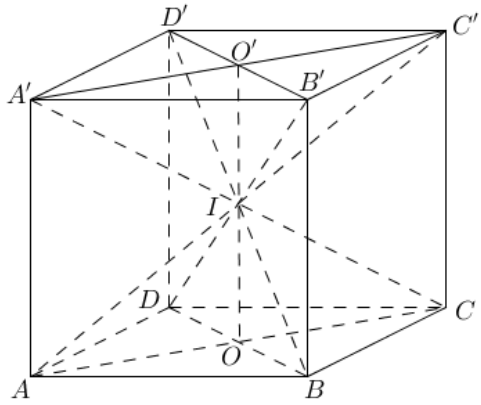
Tỉ số thể tích giữa khối cầu và khối lập phương là : $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

Câu 7: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 1, AD = 2\sqrt{2}, AA' = \sqrt{3}$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình hộp đã cho bằng

A. $\dfrac{9}{4}\pi$. **B.** 3π. **C.** 19π. **D.** 12π.

Lời giải

Chọn D



Gọi O, O' lần lượt là tâm của hình chữ nhật $ABCD, A'B'C'D'$.

Gọi I là trung điểm $OO' \Rightarrow IA = IB = IC = ID = IA' = IB' = IC' = ID'$.

Suy ra I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, bán kính $R = \dfrac{AC'}{2} = \dfrac{\sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{1+8+3}}{2} = \sqrt{3}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình hộp đã cho: $S = 4\pi R^2 = 12\pi$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA = 2a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $16\pi a^2$. **B.** $V = \dfrac{8\pi a^2}{3}$. **C.** $8\pi a^2$. **D.** $V = \dfrac{4\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$ là AC.

Do đó $\left(SC,(ABCD)\right) = \left(SC, AC\right) = SCA = 60°$.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, và M là trung điểm của SA.

Dựng $d_1 \perp (ABCD)$ tại $O \Rightarrow d_1$ là trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

Trong mặt phẳng chứa SA và d_1, dựng d_2 là đường trung trực của SA. Gọi $I = d_1 \cap d_2$.

Vì $\begin{cases} I \in d_1 \\ I \in d_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IA = IB = IC = ID \\ IA = IS \end{cases}$. Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Xét ΔSAC vuông tại A, có I là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔSAC. Suy ra I là trung điểm của cạnh huyền SC.

Ta có $\sin SCA = \dfrac{SA}{SC} \Rightarrow SC = \dfrac{SA}{\sin SCA} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sin 60°} = 4a$.

Suy ra $R = IC = \dfrac{SC}{2} = 2a$.

Do đó diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi(2a)^2 = 16\pi a^2$.

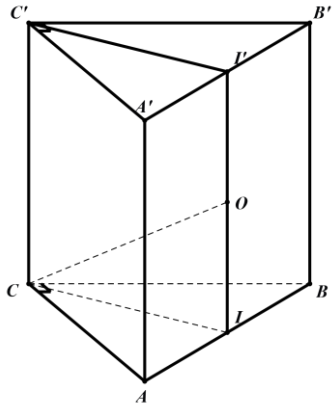
Câu 9: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là $\triangle ABC$ vuông tại C, $AC = a; BC = a\sqrt{2}$, biết $CC' = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.

A. $R=\dfrac{a\sqrt{30}}{6}$. **B.** $R=\dfrac{2a\sqrt{5}}{3}$. **C.** $R=\dfrac{a\sqrt{30}}{3}$. **D.** $R=\dfrac{a\sqrt{5}}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi I,I' tương ứng là trung điểm $AB;A'B'$ thì II' là trục của hai đường tròn ngoại tiếp hai đáy của lăng trụ, gọi O là trung điểm II' thì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$.



Bán kính $R=OC$.

Trong $\triangle ABC$ vuông tại C, $AB=a\sqrt{3}$, $CI=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$OI=\dfrac{II'}{2}=\dfrac{CC'}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

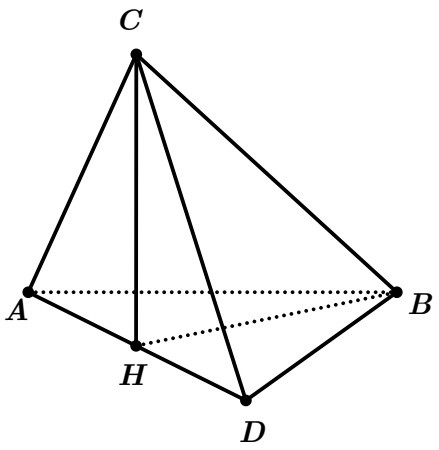
Trong $\triangle OCI$ vuông tại I, $R=OC=\sqrt{CI^2+OI^2}=\dfrac{a\sqrt{30}}{6}$.

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$ có các mặt ABC và BCD là các tam giác đều cạnh bằng 2; hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) vuông góc với nhau. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm AD. Ta có các tam giác $ACD;ABD$ lần lượt cân tại C và B.

Ta có $\Delta ACD=\Delta ABD(c.c.c)\Rightarrow \Delta CBH$ cân tại H.

Mặt khác, do $(ABD)\perp(ACD)$, ta được $CH\perp HB$; suy ra $HB=HC=\sqrt{2}$.

Lại có $HD=HA=\sqrt{BD^2-HB^2}=\sqrt{2}$, ta được H là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

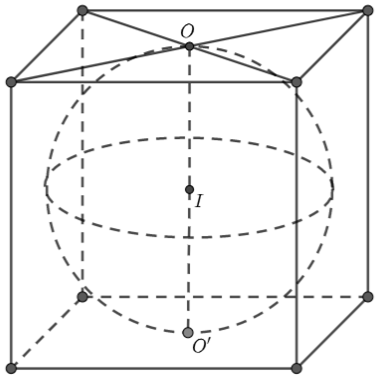
Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $AH=\sqrt{2}$

Câu 11: Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình lập phương. Biết khối lập phương có thể tích bằng $36cm^3$. Thể tích của khối cầu (S) bằng

A. $9\pi cm^3$ **B.** $12\pi cm^3$. **C.** $4\pi cm^3$. **D.** $6\pi cm^3$.

Lời giải

Chọn D



Giả sử cạnh hình lập phương có độ dài bằng a.

Khi đó bán kính của mặt cầu nội tiếp hình lập phương là $R=\frac{a}{2}$.

Mặt khác, theo giả thiết ta có $V_{lp}=36\Leftrightarrow a^3=36\Leftrightarrow a=\sqrt[3]{36}\,(cm)$.

Vậy $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi.\frac{a^3}{8}=\frac{4}{3}\pi.\frac{36}{8}=6\pi\,(cm^3)$.

Câu 12: Cho hình lập phương có cạnh bằng 1. Thể tích khối cầu đi qua các đỉnh của hình lập phương là

A. $\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$. **B.** $\frac{2\pi}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$. **D.** $\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi O là tâm hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'\Rightarrow O$ là tâm khối cầu đi qua các đỉnh của hình lập phương $\Rightarrow R=OA=\frac{1}{2}AC'=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối cầu đi qua các đỉnh của hình lập phương là:

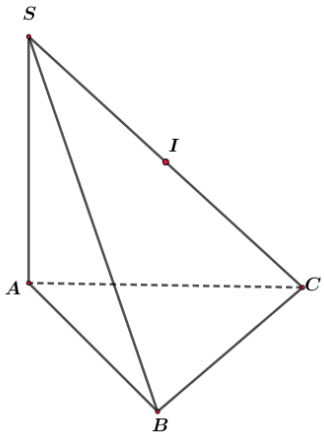
$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABC), SA=a, AB=a, BCA=30°$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\sqrt{\frac{5}{2}}a$. **C.** $\frac{5a}{2}$. **D.** a.

Lời giải

Chọn A



Ta có

$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB \ (1)$

$SA \perp (ABC) \Rightarrow AC \perp SA \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra A, B cùng nhìn SC dưới một góc vuông.

Do đó tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là trung điểm I của SC.

Mà $AC = \dfrac{AB}{\sin 30^\circ} = 2a$; $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow$ bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho là $R = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. 4. **B.** $\dfrac{7}{3}a$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt R_d : bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

R_b : bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB.

R_{mc} : bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

$R_d = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}.$

$R_b = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.$

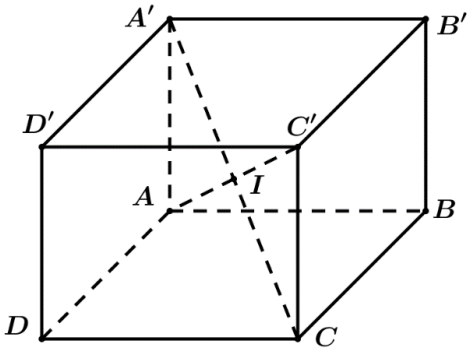
$R_{mc} = \sqrt{R_d^2 + R_b^2 - \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - a^2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{3}.$

Câu 15: Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối hộp chữ nhật có kích thước a, $2a$, $2a$ là

A. $9a^2$. **B.** $\dfrac{9}{3}\pi a^3$. **C.** $9\pi a^2$. **D.** $3\pi a^2$.

Lời giải

Chọn C



Xét hình hộp chữ nhật là $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = 2a$.

Gọi I là trung điểm $A'C$, suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

Ta có bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là:

$$R = \frac{1}{2}AC' = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} = \frac{3}{2}a.$$

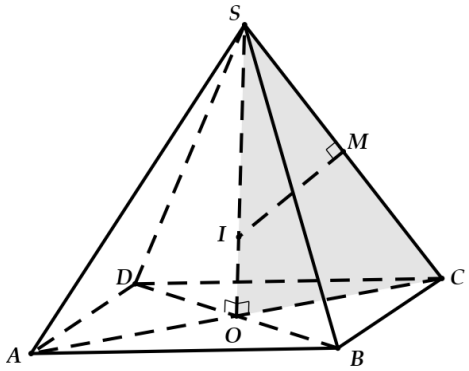
Vậy diện tích mặt cầu là: $S = 4\pi R^2 = 9\pi a^2$.

Câu 16: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tam giác SAC đều cạnh a. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = a$. **B.** $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Tam giác SAC đều cạnh a (gt), có SO là đường trung tuyến nên $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam ΔSMI và ΔSOC đồng dạng nên suy ra: $\frac{SI}{SC} = \frac{SM}{SO} \Rightarrow SI = \frac{SM.SC}{SO} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

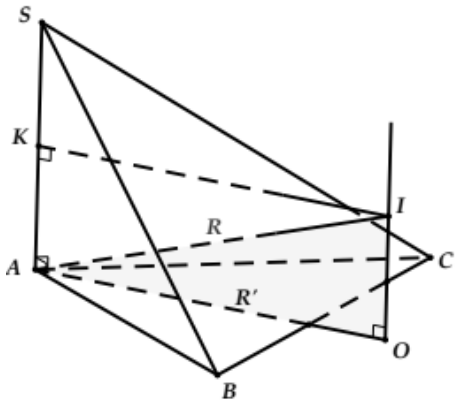
Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 2a$, ΔABC cân tại A, $BAC = 120°$, $AB = AC = a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $R = a\sqrt{5}$. **B.** $R = a\sqrt{2}$. **C.** $R = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $R = 2a$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos BAC = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$.

Xét ΔABC có $\dfrac{BC}{\sin BAC} = 2R' \Leftrightarrow R' = a$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

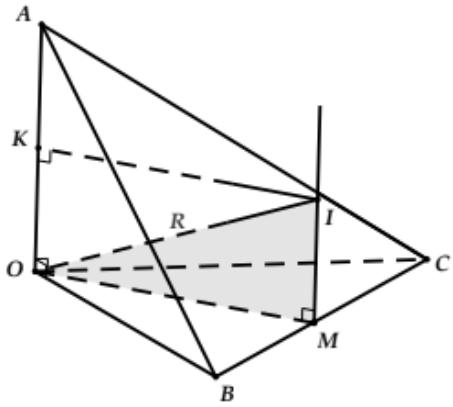
Lúc đó $R = \sqrt{\dfrac{SA^2}{4} + R'^2} = a\sqrt{2}$.

Câu 18: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc, $OA = OB = OC = 1$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm BC, qua M dựng $d // OA$.

Gọi K là trung điểm của OA, qua K dựng $\Delta // OM \Rightarrow \Delta \cap d = \{I\}$ là tâm mặt cầu và bán kính

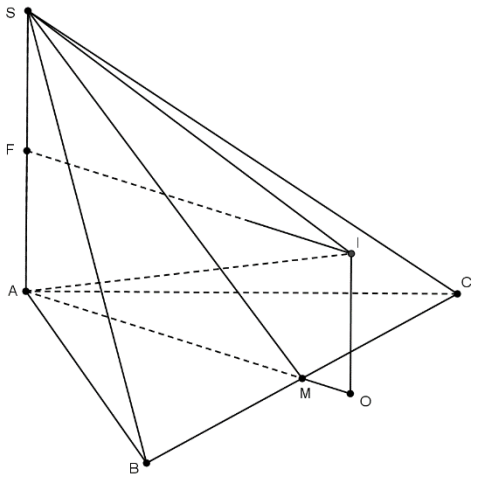
$R = \sqrt{\dfrac{OA^2}{4} + OM^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC có $AB = 2; AC = 2$ và $\angle BAC = 120^o$. Biết góc giữa (SBC) và (ABC) bằng α với $\tan\alpha = 2$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\sqrt{5}$. **B.** 2. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm cạnh BC

$\Rightarrow \begin{cases} AM \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM \Rightarrow ((SBC);(ABC)) = \angle SMA$

Theo giả thiết $\tan\alpha = \dfrac{SA}{AM} \Leftrightarrow SA = AM.\tan\alpha = AB.\cos BAM.\tan\alpha = 2$.

Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos BAC = 3 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$.

Xét $\Delta ABC : \dfrac{BC}{\sin BAC} = 2R' \Leftrightarrow R' = 2$ (R' là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC)

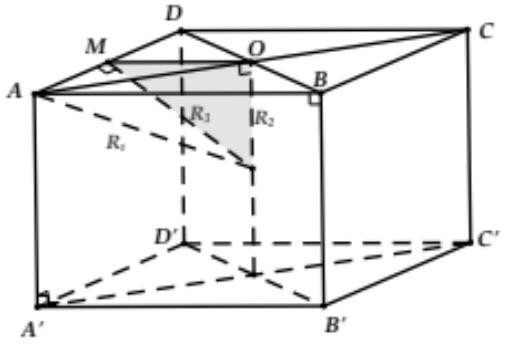
Vậy bán kính mặt cầu là $R = \sqrt{R'^2 + \dfrac{SA^2}{4}} = \sqrt{5}$

Câu 20: Cho hình lập phương cạnh a gọi R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương, bán kính mặt cầu nội tiếp hình lập phương và bán kính mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của hình lập phương. Khẳng định đúng là

A. $R_2^2 = R_1.R_3$. **B.** $R_2^2 = R_1^2 + R_3^2$. **C.** $R_1^2 = R_2^2 + R_3^2$. **D.** $R_3^2 = R_1.R_2$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $R_1 = \dfrac{B'D}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, R_2 = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}, R_2 = \sqrt{OM^2 + OI^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

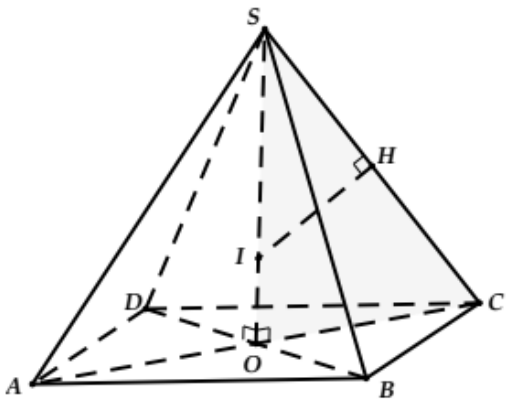
$\Rightarrow R_2^2 + R_3^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{2a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4} = R_1^2$.

Câu 21: Cho hình chóp từ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 1 chiều cao $h = 2$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{9}{8}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A



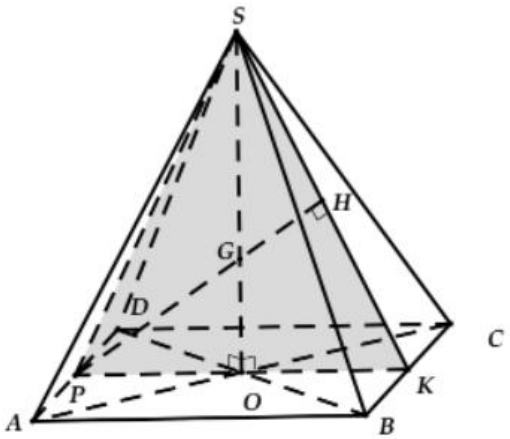
Xét hai tam giác đồng dạng SHI và SOC ta có $\frac{SH}{SO}=\frac{SI}{SC}\Rightarrow SI=\frac{SC.SH}{SO}=\frac{9}{8}=R$

Câu 22: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 1, chiều cao $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có ΔSPK cân và có $PK=1$, $SO=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\Delta SPK$ đều.

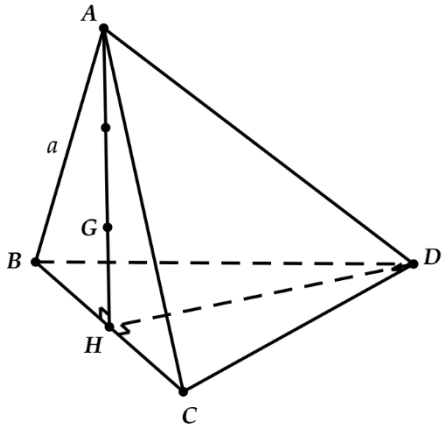
Gọi G là trọng tâm $\Delta SPK\Rightarrow\begin{cases}GH\perp(SBC)\\GO\perp(ABCD)\end{cases}\Rightarrow R=GO=GH=\frac{1}{3}SO=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Câu 23: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) vuông góc với nhau. Biết tam giác ABC đều cạnh bằng a, tam giác BCD vuông cân tại D. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, H là trung điểm cạnh BC.

Do $(ABC)\perp(BCD)$ và tam giác BCD vuông cân tại D nên AH là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

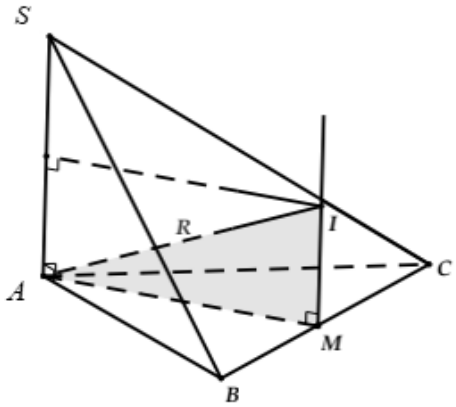
Suy ra G là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ và bán kính mặt cầu là $R = AG = \frac{2}{3}AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $SA\perp(ABC)$,Biết $AB = a, AC = a\sqrt{3}, SA = 2a$ .Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm BC, do tam giác ABC vuông tại A nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Qua M dựng đường thẳng d song song với SA,

Gọi N là trung điểm SA, Trên mặt phẳng (SAM) dựng đường thẳng trung trực của SA cắt Đường thẳng d tại I.

$\Rightarrow IA = IB = IC = IS$.

Suy ra I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$, bán kính $R = IA$

Ta có $AB = a, AC = a\sqrt{3} \Rightarrow BC = 2a \Leftrightarrow AM = \frac{BC}{2} = a$,

$AN = \frac{SA}{2} = a \Rightarrow AI = a\sqrt{2}\,(do\ AMIN\ là\ hình\ vuông).\Rightarrow IA = IB = IC = IS = a\sqrt{2} = R$.

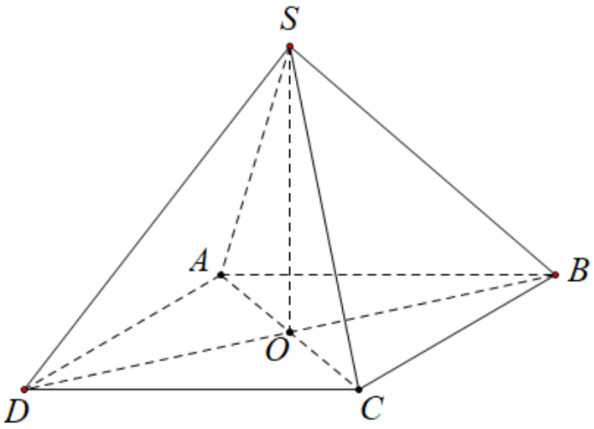
Câu 25: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp

hình chóp đã cho bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $OA = OB = OC = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow OA = OB = OC = OD = OS = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

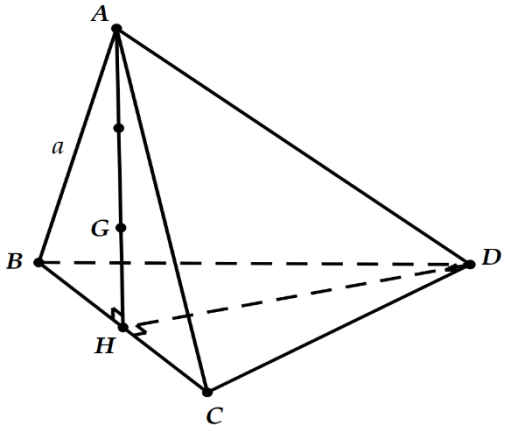
Suy ra O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ và bán kính của mặt cầu đó bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 26: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) vuông góc với nhau. Biết tam giác ABC đều cạnh a, tam giác BCD vuông cân tại D. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, H là trung điểm cạnh BC. Do $(ABC) \perp (BCD)$ và tam giác BCD vuông cân tại D nên AH là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.
Suy ra G là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ và bán kính mặt cầu là:

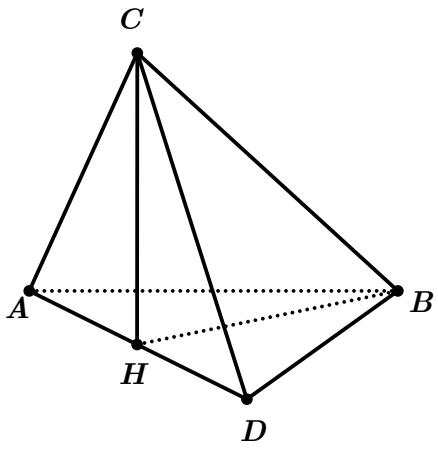
$R = AG = \frac{2}{3}AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 27: Cho tứ diện $ABCD$ có các mặt ABC và BCD là các tam giác đều cạnh bằng 2; hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) vuông góc với nhau. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm AD. Ta có các tam giác $ACD; ABD$ lần lượt cân tại C và B.

Ta có $\Delta ACD = \Delta ABD(c.c.c) \Rightarrow \Delta CBH$ cân tại H.

Mặt khác, do $(ABD) \perp (ACD)$, ta được $CH \perp HB$; suy ra $HB = HC = \sqrt{2}$.

Lại có $HD = HA = \sqrt{BD^2 - HB^2} = \sqrt{2}$, ta được H là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

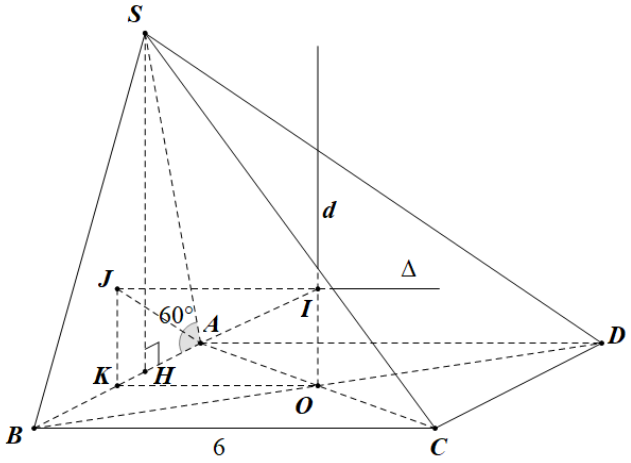
Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là $AH = \sqrt{2}$

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 6. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy $ABCD$ là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HB = 2HA$. Cạnh SA hợp với mặt phẳng đáy góc $60°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. 84π. **B.** $\frac{220}{3}\pi$. **C.** $\frac{1900}{3}\pi$. **D.** 88π.

Lời giải

Chọn B



Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB, K là trung điểm của AB.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Qua O dựng d vuông góc với $(ABCD)$ tại O suy ra d là trục đường tròn ngoại tiếp đáy hình chóp $S.ABCD$. Vì $JK // SH // d$ nên d đồng phẳng với JK

.Qua J dựng Δ vuông góc với (SAB) tại J suy ra Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB. Đường thẳng d và Δ cắt nhau tại I suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Xét ΔSAH vuông tại H: $\tan SAH = \dfrac{SH}{AH} \Rightarrow SH = AH.\tan SAH = 2.\tan 60° = 2\sqrt{3}$

$SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = 4$

$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2 - 2SA.AB.\cos SAB} = \sqrt{4^2 + 6^2 - 2.4.6.\cos 60°} = 2\sqrt{7}$

$S_{SAB} = \dfrac{1}{2}SH.AB = \dfrac{1}{2}.2\sqrt{3}.6 = 6\sqrt{3}$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB: $JA = \dfrac{SA.AB.SB}{4S_{SAB}} = \dfrac{4.6.2\sqrt{7}}{4.6\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$

Tứ giác $IJKO$ là hình chữ nhật suy ra $IJ = KO = \dfrac{1}{2}BC = 3$

Xét ΔAIJ vuông tại I: $IA = \sqrt{JA^2 + IJ^2} = \sqrt{\left(\dfrac{2\sqrt{21}}{3}\right)^2 + 3^2} = \dfrac{\sqrt{165}}{3}$

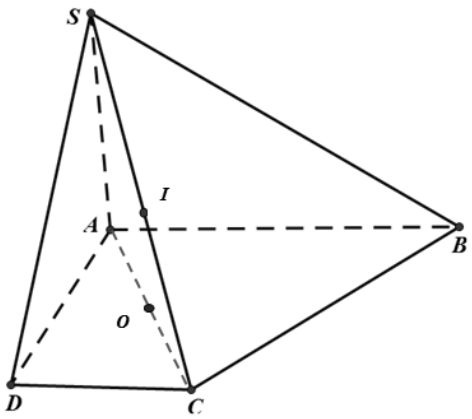
Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$: $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\dfrac{\sqrt{165}}{3}\right)^2 = \dfrac{220\pi}{3}$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a; AD = DC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Tính chu vi giao tuyến của mặt phẳng (SAB) và mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ACD$:

A. πa. **B.** $\sqrt{2}\pi a$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi a$. **D.** $\dfrac{\pi a}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là trung điểm của AC, I là trung điểm của SC.

Do tam giác ADC vuông tại D nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC.

Mặt khác $OI // SA$ nên $OI \perp (DAC)$ suy ra $IA = DI = IC = SI$. Hay I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ACD$. Bán kính mặt cầu $R = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Giả sử mặt phẳng (SAB) cắt mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ACD$ theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính r. Ta có $r=\sqrt{R^2-h^2}$ trong đó $h=d\left(I,(SAB)\right)$.

Lại có $d\left(I;(SAB)\right)=\frac{1}{2}d\left(C;(SAB)\right)=\frac{1}{2}d\left(D,(SAB)\right)=\frac{1}{2}DA=\frac{1}{2}a$.

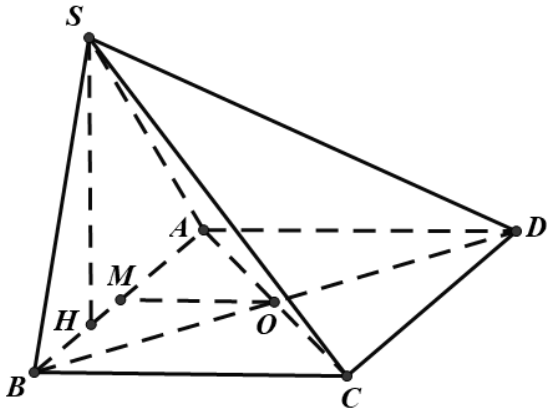
Vậy $r=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ nên chu vi đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (SAB) và mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ACD$ là: $C=2\pi r=\sqrt{2}\pi a.$

Câu 30: Cho Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{\pi a^3}{6}$. **D.** $\frac{11\sqrt{11}\pi a^3}{162}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, ta có: $OA=OB=OC=OD\ (1).$

Gọi M là trung điểm cạnh $AB,$ do tam giác SAB vuông tại S nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $SAB.$

Gọi H là hình chiếu của S lên $AB,$ khi đó $SH\perp(ABCD).$

Ta có $\begin{cases}OM\perp AB\\OM\perp SH\end{cases}\Rightarrow OM\perp(SAB)\Rightarrow OM$ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác $SAB.$

$\Rightarrow OA=OB=OS\ (2).$

Từ $(1),(2)$ suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD.$

Bán kính mặt cầu $R=OA=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích khối cầu $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

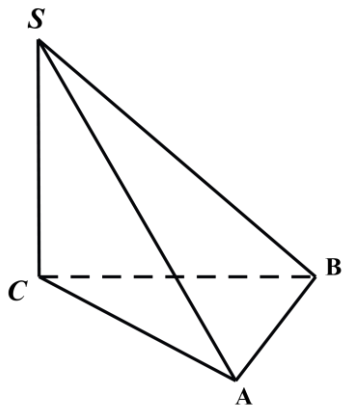
Cách 2: $R_{cau}=\sqrt{R_{ABCD}^2+R_{SAB}^2-\frac{AB^2}{4}}$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt phẳng (ABC) đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng (SAC) và (SBC), $AC=2\sqrt{3}a$, $ABC=60°$, đường thẳng SA tạo với (ABC) một góc $30°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng

A. $32\pi a^2$. **B.** $5\pi a^2$. **C.** $\frac{5}{3}\pi a^2$. **D.** $20\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Có $\begin{cases}(SAC)\perp(ABC)\\(SBC)\perp(ABC)\\(SAC)\cap(SBC)=SC\end{cases}\Rightarrow SC\perp(ABC)$

Từ đề bài ta có $(SA,(ABC))=SAC=30^\circ\Rightarrow SC=AC.\tan 30^0=2\sqrt{3}a.\frac{1}{\sqrt{3}}=2a$

Áp dụng cho chóp có cạnh bên vuông góc với đáy thì bán kính mặt cầu chóp đã cho là

$R=\sqrt{R_{ABC}^2+\left(\frac{SC}{2}\right)^2}$

Với $\frac{SC}{2}=\frac{2a}{2}=a$ và $R_{ABC}=\frac{AC}{2\sin ABC}=\frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{3}}=2a$

$\Rightarrow R=\sqrt{(2a)^2+a^2}=\sqrt{5a^2}$ $R=\sqrt{(2a)^2+a^2}=\sqrt{5a^2}$

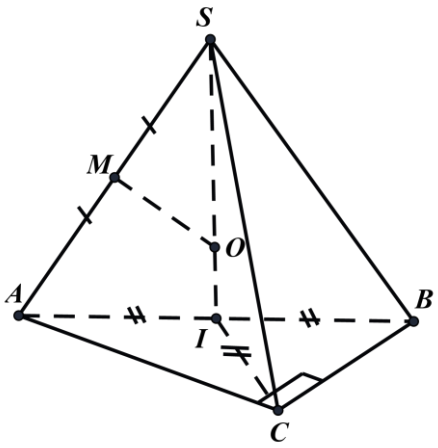
Vậy diện tích mặt cầu hình chóp đã cho bằng $S=4\pi R^2=20\pi a^2$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy biết $SA=a, ASB=120^0$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $2a$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a}{4}$. **D.** a.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của AB.

Do tam giác ABC vuông tại C nên $IA = IB = IC$.

Do tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên $SI \perp (ABC)$.

Trong mặt phẳng (SAB), gọi O là giao điểm của đường trung trực của đoạn thẳng SA và SI.

Ta có O là tâm mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ và bán kính mặt cầu (S) là $R = OA = OB = OC = OS$.

Vì tam giác SAB cân tại S, I là trung điểm của AB và $SA = a, ASB = 120^0$ nên $SIA = 90^0, ASI = 60^0 \Rightarrow SI = \cos 60^0.SA = \dfrac{a}{2}$.

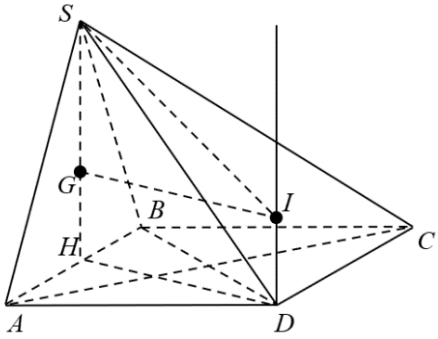
Vì $\Delta SMO \sim \Delta SIA \Rightarrow \dfrac{SO}{SA} = \dfrac{SM}{SI} \Rightarrow SO = \dfrac{SA^2}{2SI} = \dfrac{a^2}{2.\dfrac{a}{2}} = a$. Vậy $R = a$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a, ABC = 120^\circ, \Delta SAB$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{41}}{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{39}}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{37}}{6}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{35}}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm cạnh $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Tam giác ABD đều nên $DA = DB = AB$

Mà $AB = BC = DC$

Nên $DA = DB = DC$

Suy ra D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Dựng trục $Dx \perp (ABCD)$

Gọi G là tâm của tam giác SAB. Dựng trục Gy

Gọi I là giao điểm Dx và Gy

Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

Tam giác ABD đều nên $DH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Tam giác SAB đều nên $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SG = \dfrac{2}{3}SH = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

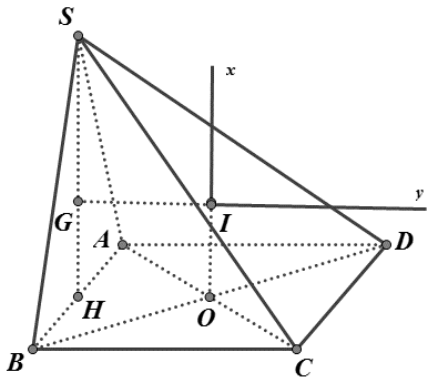
Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

$R = IS = \sqrt{IG^2 + SG^2} = \dfrac{a\sqrt{39}}{6}$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

A. 4. **B.** $\dfrac{7a}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải



Chọn C

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, từ O dựng $Ox \perp (ABCD)$.

Từ trọng tâm G của tam giác SAB dựng $Gy \perp (SAB)$.

Gọi $I = Ox \cap Gy$. Vậy I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Gọi H là trung điểm AB khi đó $SH \perp (ABCD)$.

Ta có $GHOI$ là hình bình hành $OI = GH = \dfrac{1}{3}SH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vì $OI \perp (ABCD) \Rightarrow OI \perp OB \Rightarrow \Delta BOI$ vuông tại O

Xét ΔBOI vuông tại O ta có

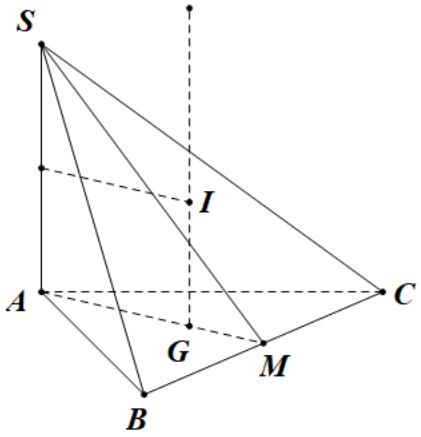
$IB^2 = IO^2 + OB^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{2a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{7a^2}{3} \Rightarrow IB = \dfrac{\sqrt{21}a}{3} = R$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng $45°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{25\pi a^2}{12}$. **B.** $\dfrac{25\pi a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{25\pi a^2}{9}$. **D.** $\dfrac{25\pi a^2}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của BC, G là trọng tâm tam giác ABC.

Dựng đường thẳng d qua G và song song với $SA \Rightarrow d \perp (ABC)$, d là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC.

Dựng đường trung trực cạnh SA, cắt d tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp $S.ABC$ và bán kính $R = IA$.

Ta có:

$((SBC),(ABC)) = SMA = 45° \Rightarrow SA = AM.\tan 45° = \sqrt{3}a$.

$AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

Bán kính mặt cầu $IA = \sqrt{AG^2 + IG^2} = \sqrt{AG^2 + \frac{SA^2}{4}} = \frac{5\sqrt{3}a}{6}$.

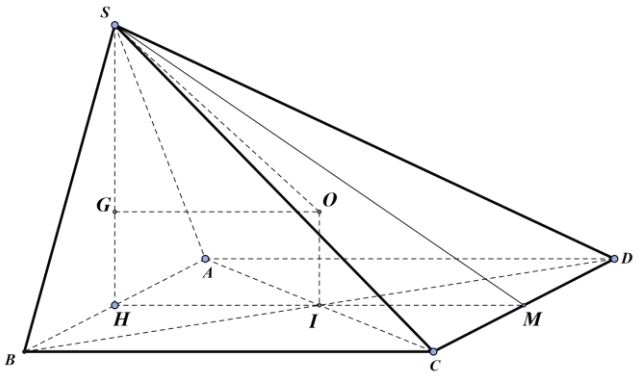
Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = \frac{25\pi a^2}{3}$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB = 3, AD = 2$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp khối chóp đã cho bằng:

A. $V = \frac{10\pi}{3}$. **B.** $V = \frac{32\pi}{3}$. **C.** $V = \frac{16\pi}{3}$. **D.** $V = \frac{20\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H, I, M, O lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD, SM.

Ta có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\ SH\perp AB\\ SH\subset(SAB)\\ (SAB)\cap(ABCD)=AB\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

Gọi G là trọng tâm tam giác SAB, kẻ đường thẳng Δ qua I và vuông góc với $(ABCD)$, kẻ đường thẳng d qua G song song với HI cắt Δ tại O.

Suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$, R là bán kính mặt cầu ngoai tiếp hình chóp $S.ABCD$. Ta có $SH=AB.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}; HI=1$.

Ta có $R=SO=\sqrt{SG^2+GO^2}=2$.

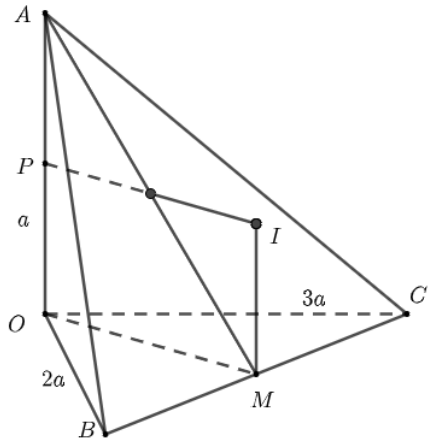
Thể tích khối cầu $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{32}{3}\pi$.

Câu 37: Cho tứ diện $OABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau và $OA=a$, $OB=2a$, $OC=3a$. Diện tích mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $OABC$ bằng

A. $S=10\pi a^2$. **B.** $S=12\pi a^2$. **C.** $S=8\pi a^2$. **D.** $S=14\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm cạnh BC; $OM=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

Gọi P là trung điểm cạnh OA; $OP=\dfrac{a}{2}$.

Đường thẳng song song với OA, đi qua M là trục của tam giác OBC.

$PI\,||\,OM$ (I thuộc trục của tam giác OBC). Khi đó ta được I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$, bán kính mặt cầu $R=OI$.

$OI=\sqrt{OM^2+IM^2}=\sqrt{\dfrac{13a^2}{4}+\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

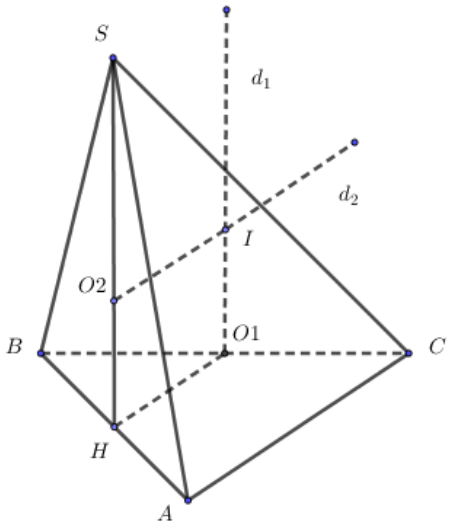
Diện tích mặt cầu $S=4\pi R^2=14\pi a^2$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A. Mặt bên $(SAB)\perp(ABC)$ và tam giác ΔSAB đều cạnh bằng 1. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{15}}{6}$. **D.** $\frac{3\sqrt{21}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và SAB

Qua O_1 dựng đường thẳng d_1 vuông góc với (ABC) thì d_1 là trục của tam giác ABC và $d_1 // O_2H$

Qua O_2 dựng đường thẳng d_2 vuông góc với (SAB) thì d_2 là trục của tam giác SAB và $d_2 // O_1H$

Từ đó suy ra tâm I mặt cầu là giao điểm của d_1 và d_2

Ta có tứ giác HO_1IO_2 là hình chữ nhật, suy ra $IH^2 = O_1H^2 + O_2H^2$

Gọi R_1, R_2 là bán kính đường tròn ngoại tiếp ABC và SAB

Ta có $\begin{cases} O_1H^2 = R_1^2 - \frac{AB^2}{4} \\ O_2H^2 = R_2^2 - \frac{AB^2}{4} \end{cases} \Rightarrow IH^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{2}$

Bán kính tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp là

$$R^2 = IH^2 + HA^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{2} + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{4} \Rightarrow R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{4}}$$

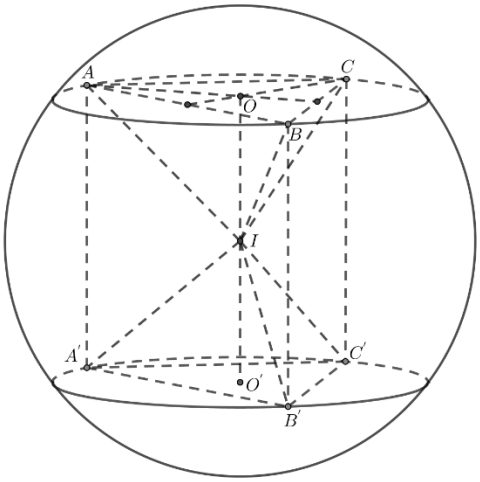
Thay số vào ta được $R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1^2}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{6}$.

Câu 39: Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a.

A. $\frac{7\pi a^2}{5}$. **B.** $\frac{3\pi a^2}{7}$. **C.** $\frac{7\pi a^2}{3}$. **D.** $\frac{7\pi a^2}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Giả sử lăng trụ đều có tất cả các cạnh bằng a là $ABC.A'B'C'$.

Gọi O và O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác $ABC, A'B'C'$. Suy ra tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là trung điểm I của OO'.

Ta có bán kính mặt cầu là $r = IA = \sqrt{AO^2 + IO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$

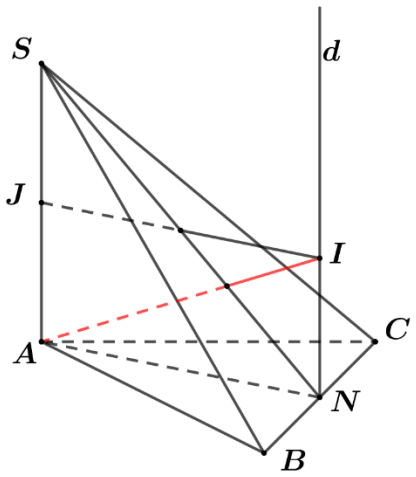
Diện tích mặt cầu cần tìm là $S = \frac{7\pi a^2}{3}$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với đáy, ABC là tam giác vuông tại A, biết $AB = 3a,\ AC = 4a,\ SA = 10a$. Tìm bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\frac{5\sqrt{17}}{2}a$. **B.** $5a\sqrt{5}$. **C.** $2a\sqrt{5}$. **D.** $\frac{5\sqrt{5}}{2}a$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N, J lần lượt là trung điểm BC và SA.

Vì ΔABC vuông tại A nên N là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Dựng đường thẳng d đi qua N và vuông góc (ABC), suy ra d là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Ta có $d // SA$ vì cùng vuông góc với (ABC).

Dựng mặt phẳng trung trực của cạnh SA, đi qua J và cắt d tại I.

Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$, suy ra $R = IA$.

Vì $JAN = ANI = AJI = 90°$ suy ra tứ giác $ANIJ$ là hình chữ nhật.

Xét ΔABC vuông tại A, ta có $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=5a\Rightarrow AN=\frac{1}{2}BC=\frac{5a}{2}$.

Xét ΔAIN vuông tại N, ta có:

$$R=AI=\sqrt{IN^2+AN^2}=\sqrt{\frac{1}{4}SA^2+AN^2}=\sqrt{\frac{1}{4}.100a^2+\frac{25a^2}{4}}=\frac{5\sqrt{5}}{2}a.$$

Cách 2: Công thức làm nhanh: Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy

Giả sử: r là bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy, h là chiều cao

Bán kính mặt cầu là: R có công thức tính: $R=\sqrt{\frac{1}{4}h^2+r^2}$.

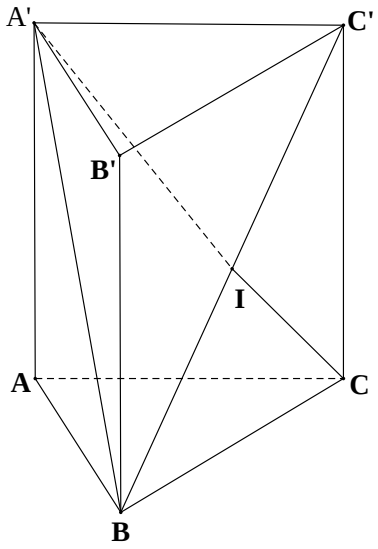
Áp dụng: $h=\frac{SA}{2};r=\frac{BC}{2}=\frac{\sqrt{AB^2+BC^2}}{2}$. Suy ra $R=\frac{5\sqrt{5}}{2}a$.

Câu 41: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân, $AB=AC=a$. Góc giữa $A'B$ và mặt đáy (ABC) bằng $45°$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $BCC'A'$ là

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Góc giữa $A'B$ và mặt đáy (ABC) là $A'BA$ nên $A'BA=45°$. Suy ra tam giác $A'AB$ vuông cân tại A, do đó $A'A=a$

$$\left.\begin{array}{l}A'C'\perp A'B'\\A'C'\perp A'A\end{array}\right\}\Rightarrow A'C'\perp(A'B'BA)\Rightarrow A'C'\perp A'B$$

Gọi I là trung điểm BC'

Tam giác $A'C'B$ vuông tại A', có I là trung điểm cạnh huyền BC' nên $A'I=BI=IC'$.

Tam giác BCC' vuông tại C, có I là trung điểm cạnh huyền BC' nên $CI=BI=IC'$.

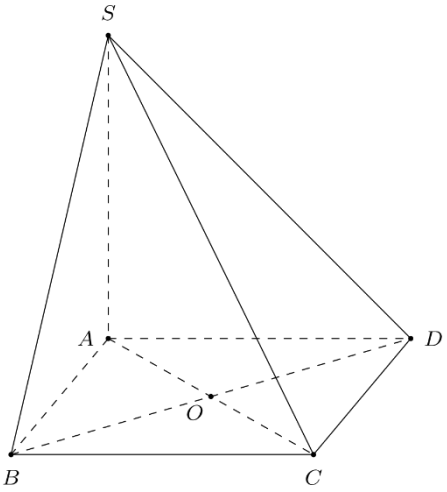
Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $BCC'A'$. Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $BCC'A'$ là $IB=\frac{BC'}{2}=\frac{\sqrt{BC^2+CC'^2}}{2}=\frac{\sqrt{AB^2+AC^2+CC'^2}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$, $SA\perp(ABCD)$. Cạnh SC tạo với đáy một góc $45°$. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $2a$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $a\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C



Xét ΔABC vuông tại B ta có $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{a^2+\left(a\sqrt{3}\right)^2}=2a$.

Ta có $SA\perp(ABCD)$ suy ra AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Suy ra góc giữa đường SC và mặt đáy bằng góc giữa hai đường thẳng SC và AC và bằng góc $SCA=45°$ (vì ΔSAC vuông tại A).

Ta có $\tan SCA=\dfrac{SA}{AC}\Rightarrow\tan 45°=\dfrac{SA}{2a}\Leftrightarrow SA=2a$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ là $R=OA=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{2a}{2}=a$

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

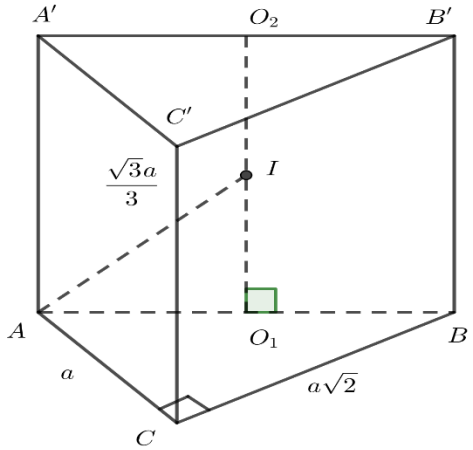
$R_{mc}=\sqrt{R^2+\left(\dfrac{SA}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{2a}{2}\right)^2}=a\sqrt{2}$.

Câu 43: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, $AC=a$, $BC=a\sqrt{2}$, biết $CC'=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.

A. $\dfrac{10\pi a^2}{7}$. **B.** $\dfrac{10\pi a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{8\pi a^2}{9}$. **D.** $\dfrac{10\pi a^2}{9}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp hai đáy.

Vì tam giác ABC vuông tại C nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đáy là trung điểm O_1 của cạnh huyền AB, tương tự ta có O_2 là trung điểm $A'B'$.

Suy ra trung điểm I của O_1O_2 là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ, bán kính mặt cầu là IA.

Ta có: $CC' = \frac{\sqrt{3}}{3}a \Rightarrow IO_1 = \frac{1}{2}CC' = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Xét tam giác ABC vuông tại C: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow AO_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác AIO_1 vuông tại O_1: $IA = \sqrt{IO_1{}^2 + AO_1{}^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{6}a$.

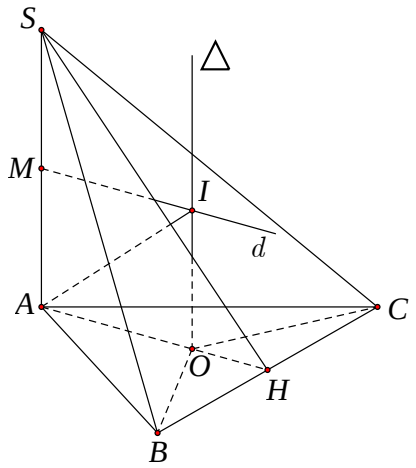
Vậy diện tích mặt cầu cầu là: $S = 4\pi\left(\frac{\sqrt{30}}{6}a\right)^2 = \frac{10\pi a^2}{3}$.

Câu 44: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác đều. Cho *SA* vuông góc với mặt đáy và $SA = 3a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60°. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABC* bằng

A. $\frac{43\sqrt{129}\pi a^3}{18}$. **B.** $\frac{31\sqrt{93}\pi a^3}{54}$. **C.** $\frac{31\sqrt{93}\pi a^3}{18}$. **D.** $\frac{43\sqrt{129}\pi a^3}{54}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi *H* là trung điểm của BC. Ta có: $(SBC) \cap (ABC) = BC$.

Do tam giác *ABC* đều nên $BC \perp AH$. Mà $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$.

Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc $SHA = 60°$.

Gọi *O* là tâm của tam giác đều ABC. Kẻ đường thẳng Δ vuông góc với (ABC) tại *O*.

Gọi *M* là trung điểm của SA. Kẻ đường trung trực *d* của *SA* (*d* song song với *AH*).

Gọi *I* là giao điểm của Δ và *d*.

Ta có $I \in \Delta \Rightarrow IA = IB = IC$. Và $I \in d \Rightarrow IS = IA$.

Từ đó suy ra $IA = IB = IC = IS$. Do đó *I* là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABC*.

Bán kính của mặt cầu này là $R = IA = IB = IC = IS$.

Xét tam giác SAH vuông tại A, ta có: $\tan SHA = \dfrac{SA}{AH} \Rightarrow AH = \dfrac{SA}{\tan SHA} = \dfrac{3a}{\tan 60^\circ} = \dfrac{3a}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}a.$

Ta có $AO = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{2}{3}.\sqrt{3}a = \dfrac{2\sqrt{3}a}{3}.$

Và $AM = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{3a}{2}.$

Ta có, tứ giác $AMIO$ là hình chữ nhật nên ta có:

$$R = IA = \sqrt{AM^2 + AO^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}a}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{129}a}{6}.$$

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

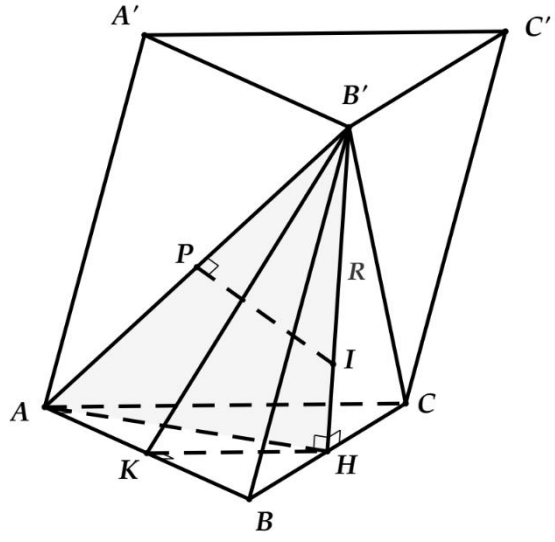
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{129}a}{6}\right)^3 = \frac{43\sqrt{129}\pi a^3}{54}.$$

Câu 45: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 3$, $BC = 5$, hình chiếu vuông góc của B' trên mặt phẳng (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(ABB'A')$ bằng 60°. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $B'.ABC$.

A. $\dfrac{73\sqrt{3}}{48}$. **B.** $\dfrac{73\sqrt{3}}{24}$. **C.** $\dfrac{73\sqrt{6}}{48}$. **D.** $\dfrac{73\sqrt{6}}{24}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi K là trung điểm của $AB \Rightarrow \big((ABB'A'),(ABC)\big) = B'KH$.

Xét tam giác $B'KH$ vuông tại H: $B'H = KH.\tan B'KH = 2\sqrt{3}$.

Suy ra $B'A = \sqrt{AH^2 + B'H^2} = \dfrac{\sqrt{73}}{2}.$

Xét hai tam giác $B'PI$ và $B'HA$ đồng dạng: $\dfrac{B'I}{B'A} = \dfrac{B'P}{B'H} \Rightarrow IB' = \dfrac{B'A.B'P}{B'H} = \dfrac{73\sqrt{3}}{48}$.

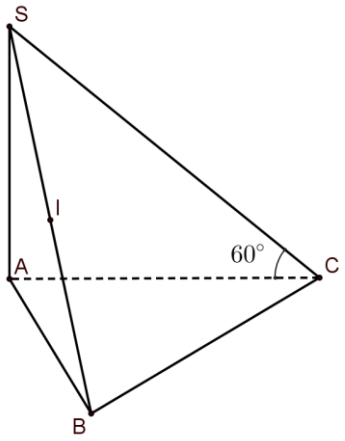
Vậy $R = IB' = \dfrac{73\sqrt{3}}{48}$.

Câu 46: Cho tam giác vuông cân ABC có cạnh huyền $AB = 2a$. Trên đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC), lấy điểm S sao cho SC tạo với mặt phẳng (ABC) một góc $60°$. Tính theo a đường kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$. **B.** $2\sqrt{5}a$. **C.** $\sqrt{10}a$. **D.** $2\sqrt{10}a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm của SB.

Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow$ góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) là góc SCA.

Do tam giác (ABC) vuông cân tại C nên $BC \perp AC$ và $BC = AC = a\sqrt{2}$.

Mà $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAC)$.

$BC \perp SC \Rightarrow$ tam giác SBC vuông tại C

$\Rightarrow IB = IC = IS$ (1)

Mặt khác ta có tam giác SAB vuông tại $A \Rightarrow IB = IA = IS$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow IA = IB = IC = IS$.

$\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

$\Rightarrow$ đường kính mặt cầu là SB

Ta có: $SA = AC.\tan 60° = a\sqrt{6}$.

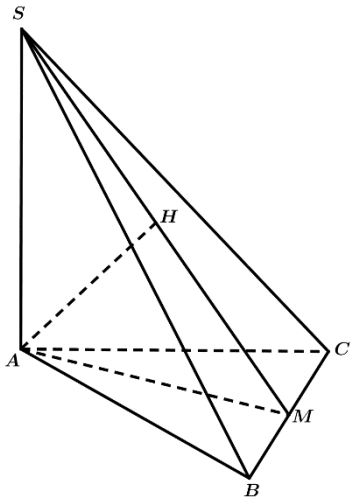
$\Rightarrow SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{10}$.

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng 60^o. Mặt cầu (S) tâm A cắt mặt phẳng (SBC) theo thiết diện là một đường tròn có bán kính bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính bán kính của mặt cầu (S).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm đoạn BC, ΔABC đều cạnh a nên $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ AM \perp BC, AM \subset (ABC) \\ SM \perp BC, SM \subset (SBC) \end{cases}$ nên góc giữa (SBC) và (ABC) là $SMA = 60^o$.

$\tan 60^o = \dfrac{SA}{AM} \Rightarrow SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \dfrac{3a}{2}$

Kẻ $AH \perp SM$ tại $H \Rightarrow h = d\left(A,(SBC)\right) = AH$

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Rightarrow AH = \dfrac{3a}{4}$

Mặt cầu (S) tâm A, bán kính R cắt mặt phẳng (SBC) theo thiết diện là một đường tròn có bán kính $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Ta có $R = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{16} + \dfrac{9a^2}{16}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

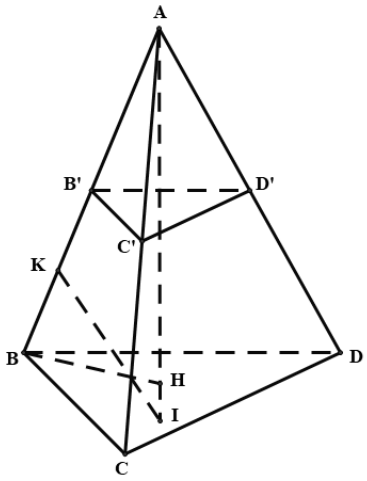
Câu 48: Cho hình tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a, gọi B', C', D' lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, AD. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp cụt $B'C'D'.BCD$.

A. $\dfrac{a\sqrt{22}}{8}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{2}a}{8}$. **C.** $\dfrac{11a}{32}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{2}a}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi AH là đường cao của hình tứ diện đều $ABCD$, khi đó AH là trục của cả hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD và tam giác $B'C'D'$. Gọi I là giao điểm của đường thẳng AH và mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng BB' thì $IB = IC = ID = IB' = IC' = ID'$. Hay sáu điểm B, C, D, B', C', D' cùng nằm trên mặt cầu tâm I, bán kính IB.



Gọi K là trung điểm của BB', do ΔAIK đồng dạng với ΔABH, ta có

$$\frac{IK}{BH}=\frac{AK}{AH}\Rightarrow IK=\frac{BH.AK}{AH}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{3a}{4}}{\frac{a\sqrt{6}}{3}}=\frac{3\sqrt{2}a}{8}.$$

Do đó $IB^2=IK^2+KB^2=\frac{9a^2}{32}+\frac{a^2}{16}=\frac{11a^2}{32}$. Suy ra $R=IB=\frac{a\sqrt{11}}{4\sqrt{2}}=\frac{a\sqrt{22}}{8}$.

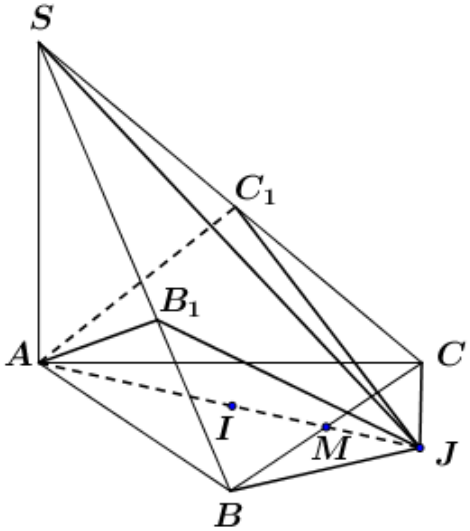
Vậy bán kính mặt cầu là $\frac{a\sqrt{22}}{8}$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Tính bán kính R của mặt cầu đi qua năm điểm A, B, C, B_1, C_1.

A. $R=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $R=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **C.** $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $R=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, M là trung điểm BC và J là điểm đối xứng của I qua M. Suy ra I là trung điểm AJ.

Suy ra $AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}, IM=MJ=\frac{a\sqrt{3}}{6}, AI=\frac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow AJ=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác ACJ có $CI = \frac{1}{2}AJ \Rightarrow \Delta ACJ$ vuông tại C (1).

Tam giác ABJ có $BI = \frac{1}{2}AJ \Rightarrow \Delta ABJ$ vuông tại B (2).

Ta có $\begin{cases} JC \perp AC \\ JC \perp SA \end{cases} \Rightarrow JC \perp AC_1$.

Khi đó $\begin{cases} AC_1 \perp SC \\ AC_1 \perp JC \end{cases} \Rightarrow AC_1 \perp (SCJ) \Rightarrow AC_1 \perp JC_1$. Hay tam giác AC_1J vuông tại C_1 (3).

Ta có $\begin{cases} JB \perp AB \\ JB \perp SA \end{cases} \Rightarrow JB \perp AB_1$.

Khi đó $\begin{cases} AB_1 \perp SB \\ AB_1 \perp JB \end{cases} \Rightarrow AB_1 \perp (SBJ) \Rightarrow AB_1 \perp JB_1$. Hay tam giác AB_1J vuông tại B_1 (4).

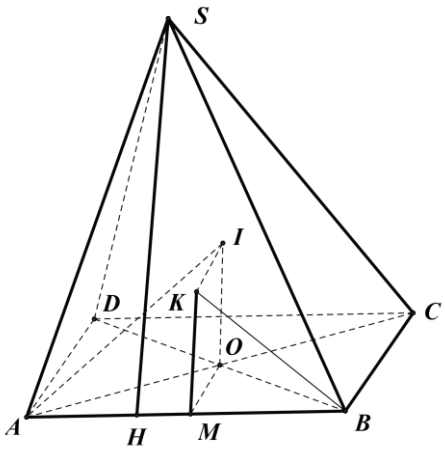
Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra năm điểm A, B, C, B_1, C_1 cùng nhìn AJ dưới một góc vuông nên nội tiếp mặt cầu tâm I, bán kính $AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 6. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HB = 2HA$. Cạnh SA hợp với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ bằng

A. 84π. **B.** $\frac{220}{3}\pi$. **C.** $\frac{1900}{3}\pi$. **D.** 88π.

Lời giải

Chọn B



Gọi O, K lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ và tam giác SAB; M là trung điểm của AB; I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Khi đó: $IO \perp (ABCD)$; $IK \perp (SAB)$, suy ra tứ giác $IKMO$ là hình chữ nhật.

Bán kính mặt cầu là $R = IA = \sqrt{IO^2 + OA^2} = \sqrt{KM^2 + OA^2} = \sqrt{KB^2 - MB^2 + OA^2}$.

Theo giả thiết, góc giữa SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0, suy ra $SAH = 60^0$.

Xét tam giác SAH vuông tại H ta có: $SH = AH.\tan 60^0 = 2\sqrt{3}$.

Xét tam giác SBH vuông tại H ta có: $SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = 2\sqrt{7}$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác SAB: $\frac{SB}{\sin 60^0} = 2.KB$, suy ra: $KB = \sqrt{\frac{28}{3}}$.

Xét hình vuông $ABCD$ cạnh 6, ta có: $OA = 3\sqrt{2}$.

Khi đó: $R = \sqrt{\frac{28}{3} - 3^2 + 18} = \sqrt{\frac{55}{3}}$.

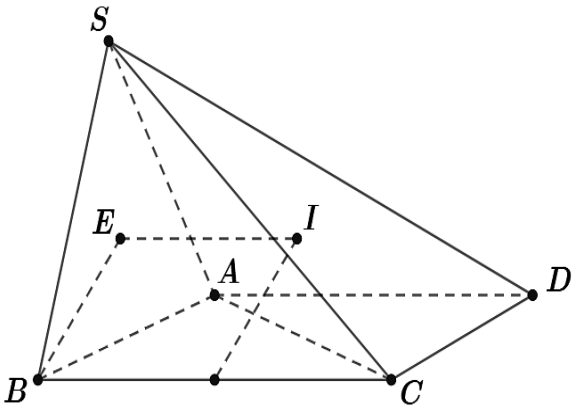
Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $S = 4\pi R^2 = \frac{220}{3}\pi$.

Câu 51: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Biết rằng $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$ và $ASB = 60°$. Tính diện tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $S = \frac{13\pi a^2}{2}$. **B.** $S = \frac{13\pi a^2}{3}$. **C.** $S = \frac{11\pi a^2}{2}$. **D.** $S = \frac{11\pi a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi R, R_{SAB} lần lượt là bán kính khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB, khi đó $R_{SAB} = \frac{AB}{2\sin ASB} = \frac{a}{2\sin 60°} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ cũng là khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Mặt khác hình chóp $S.ABC$ là một hình chóp có cạnh bên BC vuông góc với mặt đáy nên

$$R = \sqrt{R_{SAB}^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{39}}{6} \Rightarrow S = \frac{13\pi a^2}{3}.$$

Câu 52: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của khối trụ ngoại tiếp, khối cầu nội tiếp, khối cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính giá trị $P = \frac{V_1 + V_2}{V_3}$.

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $P = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. **C.** $P = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $P = \frac{4\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $V_1 = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 .a = \frac{\pi a^3}{2}$; $V_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3}{6}$

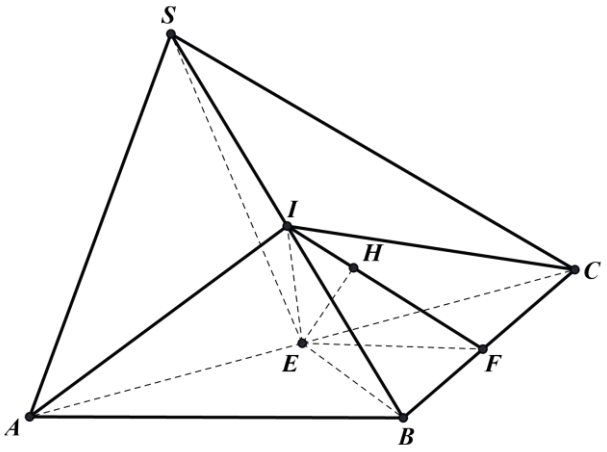
$V_3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$. Do đó $P = \frac{V_1 + V_2}{V_3} = \frac{\frac{\pi a^3}{2} + \frac{\pi a^3}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$.

Câu 53: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $AB = BC = a\sqrt{3}$, góc $SAB = SCB = 90°$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $16\pi a^2$. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $8\pi a^2$. **D.** $12\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm SB

Ta có: $IS = IA = IB$ (ΔSAB vuông tại A)

$IS = IC = IB$ (ΔSCB vuông tại C)

$\Rightarrow IS = IB = IA = IC = R \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Gọi E là trung điểm AC, mà ΔABC vuông tại B

Nên IE là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

$\Rightarrow IE \perp (ABC)$ tại E.

Ta có: $AE \cap (SBC) = C \Rightarrow \frac{d[E,(SBC)]}{d[A,(SBC)]} = \frac{EC}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow d[E,(SBC)] = \frac{1}{2}d[A,(SBC)] = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow EH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Ta có: $\frac{1}{EI^2} = \frac{1}{EH^2} - \frac{1}{EF^2} \Rightarrow EI = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

$EB = \left(a\sqrt{3}\right).\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow IB = \frac{a\sqrt{6}}{2}.\sqrt{2} = a\sqrt{3}$

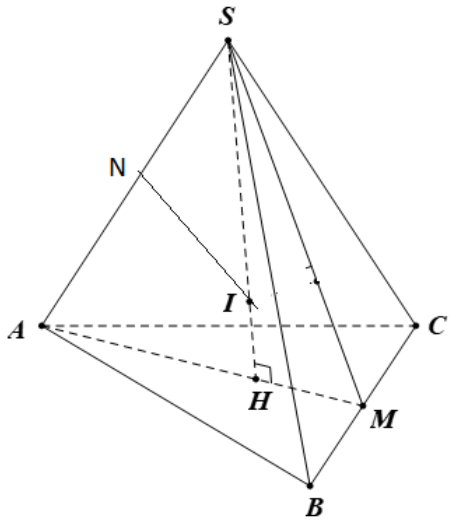
Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$: $S_{(I;IB)} = 4\pi R^2 = 12\pi a^2$.

Câu 54: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{\sqrt{6}a}{4}$ **B.** $\frac{3a}{5}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{5}$ **D.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$

Lời giải

Chọn D



Kẻ $SH \perp (ABC)$ tại H.

Vì $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Suy ra SH là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Trong mặt phẳng (SAH) kẻ đường trung trực của SA cắt SH tại I.

Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

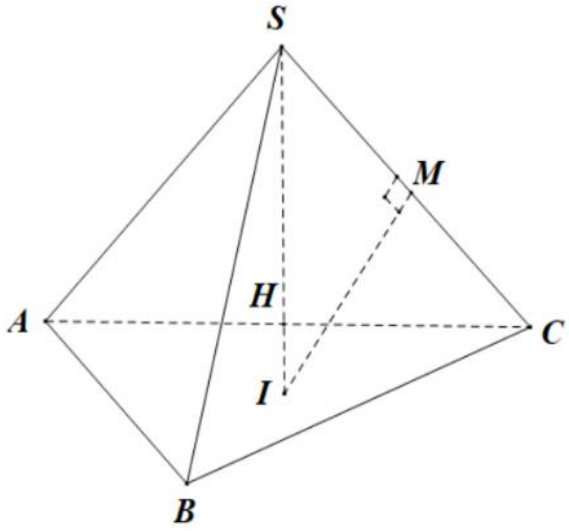
Bán kính $R = IS = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{SA^2}{2\sqrt{SA^2 - HA^2}} = \frac{2a^2}{2\sqrt{2a^2 - \frac{3}{9}a^2}} = \frac{\sqrt{15}a}{5}$.

Câu 55: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = 2$, $ASB = 90^\circ$, $BSC = 60^\circ$, $CSA = 120^\circ$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng:

A. 4π. **B.** $\frac{16\pi}{3}$. **C.** 16π. **D.** 8π.

Lời giải

Chọn C



Ta có $SB = SC = 2$, $BSC = 60°$ suy ra tam giác BSC đều $\Rightarrow BC = 2$.

Lại có $SA = SC = 2$, $ASB = 90°$ suy ra tam giác ASB vuông cân tại $S \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}$.

Mặt khác, $SA = SC = 2$, $ASB = 120°$, áp dụng định lí cosin cho tam giác ASC, ta được:

$AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA.SC.\cos ASC = 3.2^2 \Leftrightarrow AC = 2\sqrt{3}$.

Xét tam giác ABC có $BC^2 + AB^2 = 2^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 12 = AC^2$ suy ra tam giác ABC vuông tại B.

Gọi H là trung điểm của cạnh AC suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Mà $SA = SB = SC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Trong mặt phẳng (SAC) kẻ đường trung trực canh SC cắt đường thẳng SH tại I suy ra là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Xét tam giác vuông ASH vuông tại H có $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$.

Ta có $\Delta SHC \sim \Delta SMI \Rightarrow \frac{SI}{SC} = \frac{SM}{SH} \Leftrightarrow SI = \frac{SM.SC}{SH} = 2$

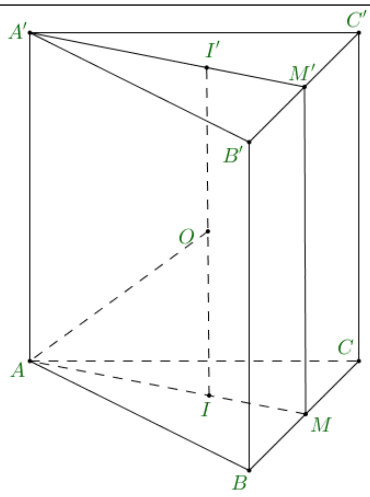
Diện tích mặt cầu ngoại tiếp chóp là. $S = 4\pi R^2 = 16\pi$.

Câu 56: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 1, chiều cao bằng 2. Thể tích khối cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho bằng:

A. $\frac{32\sqrt{3}\pi}{27}$. **B.** $\frac{16\pi}{3}$. **C.** $\frac{16\pi}{9}$. **D.** $\frac{32\sqrt{3}\pi}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I, I' lần lượt là trọng tâm tam giác $ABC, A'B'C'$, O là trung điểm của II'. Khi đó O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

Ta có $AI = \frac{2}{3}AM = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $OI = 1$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ $R = OA = \sqrt{OI^2 + AI^2} = \sqrt{(1)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

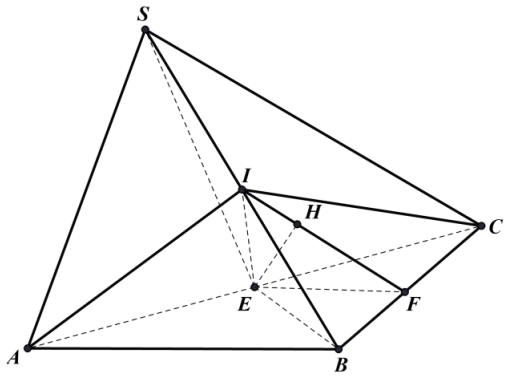
Thể tích khối cầu ngoại tiếp lăng trụ $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{32\pi}{9\sqrt{3}} = \frac{32\pi\sqrt{3}}{27}$.

Câu 57: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $AB = BC = a\sqrt{3}$, góc $SAB = SCB = 90°$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $16\pi a^2$. **B.** $2\pi a^2$. **C.** $8\pi a^2$. **D.** $12\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm SB

Ta có: $IS = IA = IB$ (ΔSAB vuông tại A)

$IS = IC = IB$ (ΔSCB vuông tại C)

$\Rightarrow IS = IB = IA = IC = R \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Gọi E là trung điểm AC, mà ΔABC vuông tại B

Nên IE là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

$\Rightarrow IE \perp (ABC)$ tại E.

Ta có: $AE \cap (SBC) = C \Rightarrow \dfrac{d\left[E,(SBC)\right]}{d\left[A,(SBC)\right]} = \dfrac{EC}{AC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow d\left[E,(SBC)\right] = \dfrac{1}{2} d\left[A,(SBC)\right] = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow EH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Ta có: $\dfrac{1}{EI^2} = \dfrac{1}{EH^2} - \dfrac{1}{EF^2} \Rightarrow EI = \sqrt{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

$EB = \left(a\sqrt{3}\right).\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow IB = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\sqrt{2} = a\sqrt{3}$

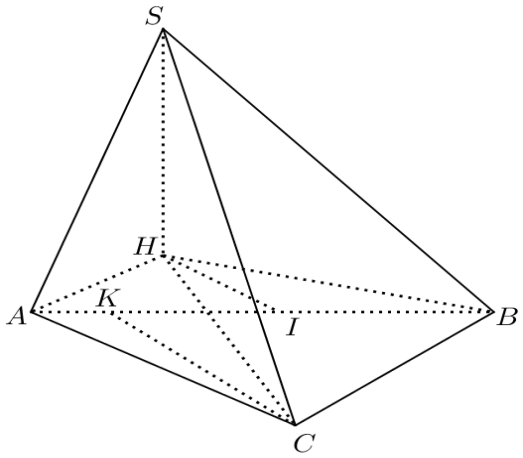
Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$: $S_{(I;IB)} = 4\pi R^2 = 12\pi a^2$.

Câu 58: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 4a, BC = 3\sqrt{2}a,\ ABC = 45°; SAC = SBC = 90°$; Sin góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{183}}{6}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{183}}{3}$. **C.** $\dfrac{5a\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{5}}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Do $SA \perp AC, SB \perp BC$ nên S, A, B, C nằm trên mặt cầu đường kính SC,

Ta có $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\sin 45^0 = 10a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{10}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC).

Ta có $CA \perp SA$ và $CA \perp SH$ nên $CA \perp HA$.

Tương tự: $CB \perp HB$.

Khi đó $ABCH$ nội tiếp đường tròn đường kính HC nên $HC = \dfrac{AC}{\sin 45^0} = 2\sqrt{5}a$.

Ta có: $HB = \sqrt{HC^2 - BC^2} = a\sqrt{2}$

Gọi K, I là hình chiếu vuông góc của C và của H lên AB. Khi đó ΔCKB và ΔHIB vuông cân nên $CK = \dfrac{3\sqrt{2}a}{\sqrt{2}} = 3a$ và $HI = \dfrac{HB}{\sqrt{2}} = a$.

Do đó $\dfrac{d\left(H,(SAB)\right)}{d\left(C,(SAB)\right)} = \dfrac{HI}{CK} = \dfrac{1}{3}$

Ta có $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}\Rightarrow\frac{d\left(C,(SAB)\right)}{CB}=\frac{\sqrt{2}}{4}\Rightarrow d\left(C,(SAB)\right)=CB.\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{3a}{2}\Rightarrow d\left(H,(SAB)\right)=\frac{a}{2}$.

Khi đó $\frac{1}{SH^2}=\frac{1}{d^2\left(H,(SAB)\right)}-\frac{1}{HI^2}=\frac{4}{a^2}-\frac{1}{a^2}=\frac{3}{a^2}\Rightarrow SH^2=\frac{a^2}{3}$.

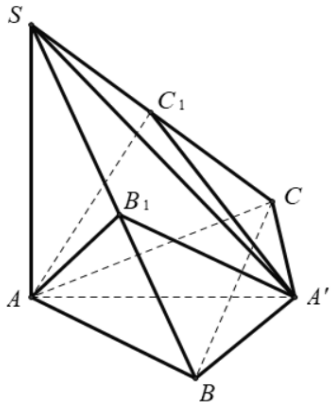
Vậy $SC=\sqrt{SH^2+HC^2}=\sqrt{\frac{a^2}{3}+20a^2}=\frac{a\sqrt{183}}{3}$, suy ra bán kính mặt cầu $R=\frac{a\sqrt{183}}{6}$.

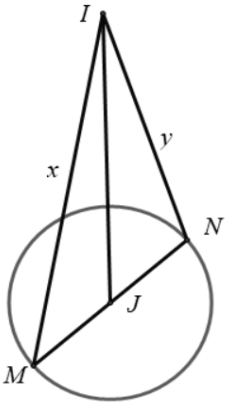
Câu 59: Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC có $AB=1$, $AC=2$, $BAC=60^\circ$. Điểm S thay đổi thuộc đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P), (S khác A). Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC. Đường kính MN thay đổi của mặt cầu (T) ngoại tiếp khối đa diện $ABCB_1C_1$ và I là điểm cách tâm mặt cầu (T) một khoảng bằng ba lần bán kính. Tính giá trị nhỏ nhất của $IM+IN$.

A. $6\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{20}$. **C.** 6. **D.** $2\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn C





Ta có $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos A=3\Rightarrow BC=\sqrt{3}$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC: $R=\frac{BC}{2\sin A}=1$.

Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, A' là điểm đối xứng của A qua J.

Ta dễ dàng chứng minh được: $AC\perp A'C, AB\perp A'B, AB_1\perp A'B_1, AC_1\perp A'C_1\Rightarrow A,B,C,A_1,B_1$ đều thuộc mặt cầu tâm J, đường kính $AA'=2R=2=MN$.

Đặt $IM=x, IN=y; x,y\in[2;4]$.

Nếu I,J,M,N thẳng hàng thì $\left[\begin{array}{l}x=2,y=4\\x=4,y=2\end{array}\right.\Rightarrow x^2+y^2=20$.

Nếu I,J,M,N không thẳng hàng thì

$$IJ^2=\frac{x^2+y^2}{2}-\frac{MN^2}{4}\Leftrightarrow x^2+y^2=2\left(IJ^2+\frac{MN^2}{4}\right)=2(9+1)=20.$$

Vậy, ta luôn có: $x^2+y^2=20$.

Do $x,y\in[2;4]\Rightarrow(x-2)(y-2)\ge 0\Leftrightarrow xy\ge 2(x+y)-4$.

$x^2+y^2=20 \Leftrightarrow (x+y)^2-20=2xy \geq 4(x+y)-8 \Rightarrow (x+y)^2-4(x+y)-12 \geq 0 \Leftrightarrow x+y \geq 6$.

Vậy $\min(x+y)=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \Rightarrow y=4 \\ y=2 \Rightarrow x=4 \end{array}\right.$.

Câu 60: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=BC=CD=2\sqrt{3}$, $AC=BD=2$, $AD=2\sqrt{2}$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đã cho bằng

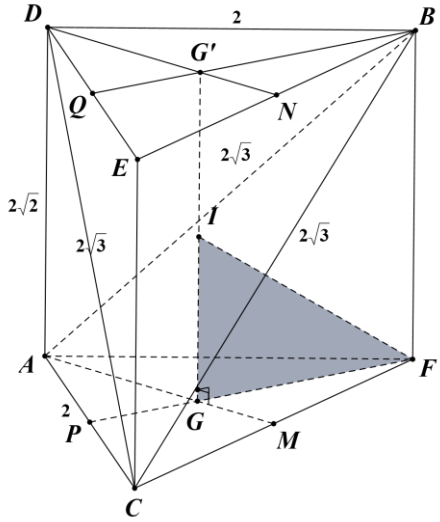
A. 6π. **B.** 24π. **C.** $\frac{40\pi}{3}$. **D.** $\frac{10\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có tam giác ACD là tam giác vuông tại A, tam giác ABD là tam giác vuông tại D.

Dựng khối lăng trụ tam giác đều $ACF.DEB$ như hình vẽ.



Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ACF và DEB; I là trung điểm của đoạn GG'. Khi đó I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ $ACF.DEB$, đồng thời cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp là $R=IF=\sqrt{IG^2+GF^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{30}}{3}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp là $S=4\pi R^2=\frac{40\pi}{3}$.