

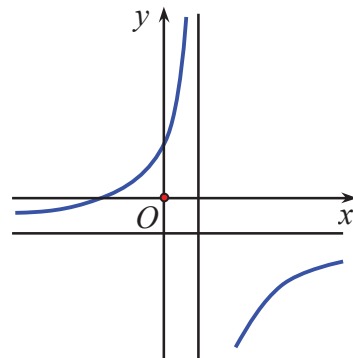
Câu 1: Hàm số $y = x^4 - 2x^3 + 2x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ dưới.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
B. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
C. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
D. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.



Câu 3: Đồ thị hàm số $y = x^2(x^2 - 3)$ tiếp xúc với đường thẳng $y = 2x$ tại bao nhiêu điểm?

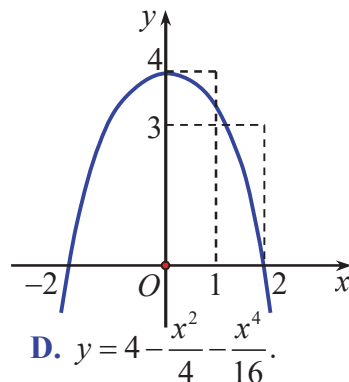
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận đứng.
B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng hai tiệm cận đứng.
C. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
D. Đồ thị hàm số đã cho có đúng hai tiệm cận ngang.

Câu 5: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = 4 - \frac{x^4}{4}$. B. $y = 4 - x^2$. C. $y = 4 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}$. D. $y = 4 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{16}$.



Câu 6: Giả sử tồn tại hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
y	0		$+\infty$	1	$+\infty$	0	1

Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = m$ có bốn nghiệm thực phân biệt là

- A. $(-2; 0] \cup \{1\}$. B. $(-2; 0) \cup \{1\}$. C. $(-2; 0]$. D. $(-2; 0)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho và có hệ số góc m . Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho tổng các khoảng cách từ hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho đến Δ nhỏ nhất là

- A. $\{0\}$. B. $\left\{\pm \frac{1}{2}\right\}$. C. $\emptyset$. D. $\{\pm 1\}$.

- Câu 8:** Cho hàm số $y = x^3 + (2m-1)x^2 + (1+m)x$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số đã cho có 2 điểm cực trị, đồng thời hoành độ điểm cực đại không nhỏ hơn -1 là
- A. $\left(-\infty; \frac{-1}{4}\right] \cup \{2\}$. B. $\left(-\infty; \frac{-1}{4}\right) \cup (2; +\infty)$.
 C. $\left(-\infty; \frac{-1}{4}\right)$. D. $\left(-\infty; \frac{-1}{4}\right) \cup \{2\}$.
- Câu 9:** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + m^2}{x+1}$ đạt cực đại tại $x=1$ là:
- A. $\{\emptyset\}$. B. $\{2\}$. C. $\{2; -2\}$. D. $\emptyset$.
- Câu 10:** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $\frac{|x|-2}{|x|+1} = m$ có đúng hai nghiệm phân biệt là:
- A. $[0; 2)$. B. $[1; 2)$. C. $[1; 2] \cup \{0\}$. D. $[1; 2) \cup \{0\}$.
- Câu 11:** Một vùng đất hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 25\text{ km}$, $BC = 20\text{ km}$ và M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC . Một người cưỡi ngựa xuất phát từ A đi đến C bằng cách đi thẳng từ A đến một điểm X thuộc đoạn MN rồi lại đi thẳng từ X đến C . Vận tốc của ngựa khi đi trên phần $ABNM$ là 15 km/h , vận tốc của ngựa khi đi trên phần $MNCD$ là 30 km/h . Thời gian ít nhất để ngựa di chuyển từ A đến C là mấy giờ?
- A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{41}}{4}$. C. $\frac{4+\sqrt{29}}{6}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.
- Câu 12:** Hàm số $y = (4-x^2)^{\frac{1}{5}}$ có tập xác định là
- A. $(-2; 2)$. B. $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.
 C. $\mathbb{R}$. D. $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.
- Câu 13:** Phương trình $x(\ln x - 1) = 0$ có số nghiệm là
- A. 0. B. 1. C. 2. D. e .
- Câu 14:** Giá trị của m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ là
- A. $m = 3$. B. $m = 4$. C. $m = \frac{9}{2}$. D. $m = \frac{3}{2}$.
- Câu 15:** Tìm tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{7-2^x-6 \cdot 2^{-x}} + \sqrt{x - \frac{2x^2-6x}{x-4}}$.
- A. $\emptyset$. B. $\{0\}$. C. $[2; \log_2 6]$. D. $[2; \log_2 6] \cup \{0\}$.
- Câu 16:** Nếu $a = \log_2 3$, $b = \log_2 5$ thì
- A. $\log_2 \sqrt[3]{360} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}a + \frac{1}{6}b$. B. $\log_2 \sqrt[3]{360} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}a + \frac{1}{3}b$.
 C. $\log_2 \sqrt[3]{360} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}b$. D. $\log_2 \sqrt[3]{360} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b$.

Câu 17: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{2x^2+x+1} \leq \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{1-x}$ là

A. $\left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

B. $\left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

C. $(-1; 0)$.

D. $\left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Câu 18: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x$ là

A. $f'(x) = \frac{\sqrt[3]{\cos^4 x} - \frac{1}{3} \sin x \sqrt[3]{\cos^{-2} x}}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} - 1$.

B. $f'(x) = \frac{\sqrt[3]{\cos^4 x} + \frac{1}{3} \sin^2 x \sqrt[3]{\cos^{-2} x}}{\sqrt[6]{\cos x}} - 1$.

C. $f'(x) = \frac{\sqrt[3]{\cos^4 x} + \frac{1}{3} \sin^2 x \sqrt[3]{\cos x}}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} - 1$.

D. $f'(x) = \frac{\left(\sqrt[3]{\cos^2 x} - 1\right)^2 \left(2\sqrt[3]{\cos^2 x} + 1\right)}{3 \cos x \sqrt[3]{\cos x}}$.

Câu 19: Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{3^x}$. Khẳng định nào đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đã cho là hàm số lẻ.

C. Giá trị của hàm số đã cho luôn không dương.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang.

Câu 20: Một người vay ngân hàng 200.000.000 đồng theo hình thức trả góp hàng tháng trong 48 tháng. Lãi suất ngân hàng cố định 0,8%/ tháng. Mỗi tháng người đó phải trả (lần đầu tiên phải trả là 1 tháng sau khi vay) số tiền gốc là số tiền vay ban đầu chia cho 48 và số tiền lãi sinh ra từ số tiền gốc còn nợ ngân hàng. Tổng số tiền lãi người đó đã trả trong toàn bộ quá trình nợ là bao nhiêu?

A. 38.400.000 đồng. B. 10.451.777 đồng. C. 76.800.000 đồng. D. 39.200.000 đồng.

Câu 21: Giá trị nhỏ nhất của $P = (\log_a b^2)^2 + 6 \left(\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right)^2$ với a, b là các số thực thay đổi thỏa mãn

$\sqrt{b} > a > 1$ là

A. 30.

B. 40.

C. 50.

D. 60.

Câu 22: Nguyên hàm của hàm số $y = \cos^2 x \cdot \sin x$ là

A. $\frac{1}{3} \cos^3 x + C$.

B. $-\cos^3 x + C$.

C. $-\frac{1}{3} \cos^3 x + C$.

D. $\frac{1}{3} \sin^3 x + C$.

Câu 23: Cho $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x) dx = 7$; $\int_2^6 f(x) dx = 3$. Khi đó giá trị của

biểu thức $P = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx$ là

A. 10.

B. 4.

C. 3.

D. -4.

Câu 24: Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$. Giá trị của $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2x) \sin x \cos x dx$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $-\frac{1}{4}$.

- Câu 25:** Thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ quanh trục hoành Ox có giá trị bằng
- A. $\frac{8\pi}{15}$. B. $\frac{7\pi}{8}$. C. $\frac{15\pi}{8}$. D. $\frac{8\pi}{7}$.
- Câu 26:** Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục trên miền $D = [a; b]$ có đồ thị là một đường cong C . Gọi S là phần giới hạn bởi C và các đường thẳng $x = a$, $x = b$. Người ta chứng minh được rằng diện tích mặt cong tròn xoay tạo thành khi xoay S quanh Ox bằng $S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$. Theo kết quả trên, tổng diện tích bề mặt của khối tròn xoay tạo thành khi xoay phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - \ln x}{4}$ và các đường thẳng $x = 1$, $x = e$ quanh Ox là
- A. $\frac{2e^2 - 1}{8} \pi$. B. $\frac{4e^4 - 9}{64} \pi$. C. $\frac{4e^4 + 16e^2 + 7}{16} \pi$. D. $\frac{4e^4 - 9}{16} \pi$.
- Câu 27:** Cho hàm số $y = \frac{x^4}{2} - 2m^2x^2 + 2$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu, đồng thời đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại tạo với đồ thị một hình phẳng có diện tích bằng $\frac{64}{15}$ là
- A. $\emptyset$. B. $\{\pm 1\}$. C. $\left\{\pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm 1\right\}$. D. $\left\{\pm \frac{1}{2}; \pm 1\right\}$.
- Câu 28:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y = x^2 \sqrt{x^2 + 1}$, trục Ox và đường thẳng $x = 1$ bằng $\frac{a\sqrt{b} - \ln(1 + \sqrt{b})}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Khi đó giá trị của $a + b + c$ là
- A. 11. B. 12. C. 13. D. 14.
- Câu 29:** Cho số phức $z = 2 - 3i$. Điểm biểu diễn số phức liên hợp của z là
- A. $(2; 3)$. B. $(-2; -3)$. C. $(2; -3)$. D. $(-2; 3)$.
- Câu 30:** Số phức nghịch đảo của số phức $z = 1 + 3i$ là
- A. $\frac{1}{10}(1 + 3i)$. B. $\frac{1}{10}(1 - 3i)$. C. $1 - 3i$. D. $\frac{1}{\sqrt{10}}(1 + 3i)$.
- Câu 31:** Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2 - 8z + 5 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2 + |z_2|^2$ là
- A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. 2. D. $\sqrt{5}$.
- Câu 32:** Xét số phức z thỏa mãn $2|z - 1| + 3|z - i| \leq 2\sqrt{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $\frac{3}{2} < |z| < 2$. B. $|z| > 2$. C. $|z| < \frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$.
- Câu 33:** Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z + 2| + |z - 2| = 5$ trên mặt phẳng tọa độ là một
- A. đường thẳng. B. đường tròn. C. elip. D. hypebol.

- Câu 34:** Cho số phức z thỏa mãn $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 3$. Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là
- A. 3. B. $\sqrt{5}$. C. $\sqrt{13}$. D. 5.
- Câu 35:** Khối đa diện đều loại $\{p; q\}$ là khối đa diện có đặc điểm:
- A. mỗi mặt là đa giác đều p cạnh và mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng q mặt.
 B. có p mặt là đa giác đều và mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng q cạnh.
 C. có p mặt là đa giác đều và mỗi mặt có q cạnh.
 D. có q mặt là đa giác đều và mỗi mặt có p cạnh.
- Câu 36:** Cho hình chóp $S.ABC$ có khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) là $2a$ và thể tích bằng a^3 . Nếu ABC là tam giác vuông cân thì độ dài cạnh huyền của nó là
- A. $a\sqrt{3}$. B. $a\sqrt{6}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Câu 37:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 1 và G là trọng tâm của tam giác BCD' . Thể tích V của khối chóp $G.ABC'$ là
- A. $V = \frac{1}{3}$. B. $V = \frac{1}{6}$. C. $V = \frac{1}{12}$. D. $V = \frac{1}{18}$.
- Câu 38:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{5}$. Hình chiếu của điểm S trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của đoạn thẳng BC . Biết rằng góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ASC) bằng 60° . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là
- A. $\frac{5a^3\sqrt{6}}{12}$. B. $\frac{5a^3\sqrt{10}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{210}}{24}$. D. $\frac{a^3\sqrt{30}}{12}$.
- Câu 39:** Cho hình trụ có khoảng cách giữa hai đáy bằng 10, biết diện tích xung quanh của hình trụ bằng 80π . Thể tích của khối trụ là
- A. 160π . B. 164π . C. 64π . D. 144π .
- Câu 40:** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h . Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho là
- A. $\pi\left(h^2 + \frac{4a^2}{3}\right)$. B. $\frac{\pi a^2 h}{3}$.
 C. $\frac{\pi}{3}\left(h^2 + \frac{4a^2}{3}\right)\sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{a^2}{3}}$. D. $\frac{\pi}{3}\sqrt{\left(\frac{h^2}{4} + \frac{a^2}{3}\right)^3}$.
- Câu 41:** Giá trị lớn nhất của thể tích khối nón nội tiếp trong khối cầu có bán kính R là
- A. $\frac{1}{3}\pi R^3$. B. $\frac{4}{3}\pi R^3$. C. $\frac{4\sqrt{2}}{9}\pi R^3$. D. $\frac{32}{81}\pi R^3$.
- Câu 42:** Cho tam giác đều ABC cạnh 1 và hình vuông $MNPQ$ nội tiếp trong tam giác ABC (M thuộc AB , N thuộc AC , P , Q thuộc BC). Gọi S là phần mặt phẳng chứa các điểm thuộc tam giác ABC nhưng không chứa các điểm thuộc hình vuông $MNPQ$. Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay S quanh trục là đường thẳng qua A vuông góc với BC là
- A. $\frac{810 - 467\sqrt{3}}{24}\pi$. B. $\frac{4\sqrt{3} - 3}{96}\pi$. C. $\frac{4\sqrt{3} - 3}{96}$. D. $\frac{54 - 31\sqrt{3}}{12}\pi$.

- Câu 43:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 2z - 4 = 0$ có bán kính R là
- A. $R = \sqrt{5}$. B. $R = 25$. C. $R = 2$. D. $R = 5$.
- Câu 44:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(2;3;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x + 2y - z = 0$ phương trình là
- A. $4x + 3y - 2z - 3 = 0$. B. $4x - 3y - 2z + 3 = 0$.
C. $x - 2y - 3z - 11 = 0$. D. $x + 2y - 3z + 7 = 0$.
- Câu 45:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1;-2;2)$, $B(-3;-2;0)$ và $(P): x + 3y - z + 2 = 0$. Vector chỉ phương của đường thẳng Δ là giao tuyến của (P) và mặt phẳng trung trực của AB có tọa độ là:
- A. $(1;-1;0)$. B. $(2;3;-2)$. C. $(1;-2;0)$. D. $(3;-2;-3)$.
- Câu 46:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;5)$ và $B(0;0;1)$. Mặt phẳng (P) chứa A, B và song song với trục Oy có phương trình là
- A. $4x + y - z + 1 = 0$. B. $2x + z - 5 = 0$.
C. $4x - z + 1 = 0$. D. $y + 4z - 1 = 0$.
- Câu 47:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$ và điểm $M(2;5;3)$. Mặt phẳng (P) chứa Δ sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất là
- A. $x - 4y - z + 1 = 0$. B. $x + 4y + z - 3 = 0$.
C. $x - 4y + z - 3 = 0$. D. $x + 4y - z + 1 = 0$.
- Câu 48:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;2)$, $B(5;4;4)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - z + 6 = 0$. Nếu M thay đổi thuộc (P) thì giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + MB^2$ là
- A. 60. B. 50. C. $\frac{200}{3}$. D. $\frac{2968}{25}$.
- Câu 49:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$ và $D(1;-2;2)$. Các mặt phẳng chứa các mặt của tứ diện $ABCD$ chia không gian $Oxyz$ thành số phần là
- A. 9. B. 12. C. 15. D. 16.
- Câu 50:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{-1}$ và các điểm $A(2;3;-4)$, $B(4;6;-9)$. Gọi C, D là các điểm thay đổi trên đường thẳng Δ sao cho $CD = \sqrt{14}$ và mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$ có thể tích lớn nhất. Khi đó, tọa độ trung điểm của đoạn thẳng CD là
- A. $\left(\frac{79}{35}; \frac{64}{35}; \frac{102}{35}\right)$ B. $\left(\frac{181}{5}; \frac{-104}{5}; \frac{-42}{5}\right)$. C. $\left(\frac{101}{28}; \frac{13}{14}; \frac{69}{28}\right)$. D. $(2;2;3)$.

-----HẾT-----

BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	D	B	B	C	C	D	C	D	D	A	A	B	B	D	C	D	D	A	D	D	C	B	A	A

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
D	B	C	A	B	A	D	C	C	A	B	D	D	A	C	D	A	D	B	D	C	C	A	C	D

GIẢI

Câu 1: Hàm số $y = x^4 - 2x^3 + 2x$ có bao nhiêu điểm cực trị?

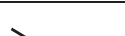
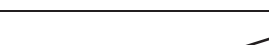
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$y = x^4 - 2x^3 + 2x \Rightarrow y' = 4x^3 - 6x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 2(2x+1)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -\frac{1}{2}.$$

Bảng biến thiên:

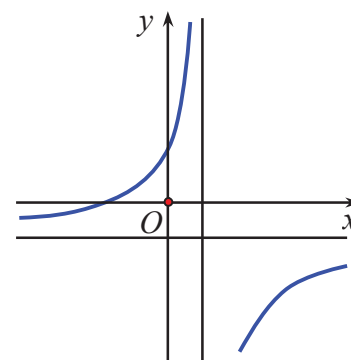
x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y						

Dựa vào BBT, Suy ra hàm số có 1 điểm cực trị.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ dưới.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
 B. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
 C. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
 D. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.



Hướng dẫn giải

Chọn D.

Dựa vào đồ thị ta có

- o Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c} < 0$ nên a và c trái dấu $\rightarrow$ loại đáp án A và C.
- o Tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c} > 0$ nên d và c trái dấu (vậy nên a, d cùng dấu)
- o $f(0) = \frac{b}{d} > 0$ nên b và d cùng dấu $\rightarrow$ loại đáp án B.

Câu 3: Đồ thị hàm số $y = x^2(x^2 - 3)$ tiếp xúc với đường thẳng $y = 2x$ tại bao nhiêu điểm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2(x^2 - 3)$ và đường thẳng

$y = g(x) = 2x$. Khi đó x_0 là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ (1). Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x^2 - 3) = 2x \\ 4x^3 - 6x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x^2 - 3) = 2x \\ 4x^3 - 6x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, x = 0, x = 2 \\ x = -1, x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

Vậy chỉ có một điểm thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận đứng.
- B.** Đồ thị hàm số đã cho có đúng hai tiệm cận đứng.
- C.** Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
- D.** Đồ thị hàm số đã cho có đúng hai tiệm cận ngang.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tập xác định: $D = (-\infty; 1) \setminus \{-1\}$

Ta có: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-1} = -\infty \end{cases}$ nên hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{(1-x)(-x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x}(-x-1)} = -\infty$ nên hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^3}}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 0$ nên hàm số có tiệm cận ngang bằng $y = 0$.

Câu 5: Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A.** $y = 4 - \frac{x^4}{4}$.
- B.** $y = 4 - x^2$.
- C.** $y = 4 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}$.
- D.** $y = 4 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{16}$.

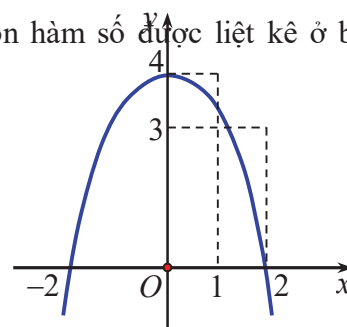
Hướng dẫn giải

Chọn C.

+ Ta có đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm $(2; 0)$ và $(-2; 0)$ nên thay tọa độ đó vào các hàm số trong đáp án thì loại đáp án **D**.

+ Đồ thị không đi qua điểm $(1; 3)$ nên thay tọa độ điểm vào đáp án **A, B, C** thì loại đáp án **B**.

+ Với $x = 1$ thì từ đáp án A ta có $y = \frac{15}{4} = 3,75$ điều này theo đồ thị là không đúng (Theo hình vẽ với $x = 1$ thì $y < 3,5$). Do đó loại đáp án **A**.



Vậy đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số trong đáp án **C**.

Câu 6: Giả sử tồn tại hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
y	0		$+\infty$	1	$+\infty$	0	1

Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x) = m$ có bốn nghiệm thực phân biệt là

- A.** $(-2; 0] \cup \{1\}$. **B.** $(-2; 0) \cup \{1\}$. **C.** $(-2; 0]$. **D.** $(-2; 0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ nên phần đồ thị tương ứng với $x \in (1; +\infty)$ có đường tiệm cận ngang là $y = 1$. Do đó phần đồ thị này không cắt đường thẳng $y = 1$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ nên phần đồ thị tương ứng với $x \in (-\infty; 1)$ có đường tiệm cận ngang là $y = 0$. Do đó phần đồ thị này không cắt đường thẳng $y = 0$.

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình $f(x) = m$ có bốn nghiệm thực phân biệt thì đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại bốn điểm phân biệt khi $-2 < m \leq 0$.

Câu 7: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho và có hệ số góc m . Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho tổng các khoảng cách từ hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho đến Δ nhỏ nhất là

- A.** $\{0\}$. **B.** $\left\{\pm \frac{1}{2}\right\}$. **C.** $\emptyset$. **D.** $\{\pm 1\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$y = x^4 - 2x^2$. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1), y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0
y	$+\infty$	-1	0	-1	$+\infty$

Vậy, điểm cực đại của đồ thị hàm số là gốc tọa độ $O(0; 0)$. Các điểm cực tiểu là $A(-1; -1)$ và $B(1; -1)$.

Phương trình đường thẳng Δ thỏa đề bài có dạng $y = mx$, hay $mx - y = 0$.

$$S = d[A;(\Delta)] + d[B;(\Delta)] = \frac{|-m+1|}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{|-m+1|+|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$S^2 = \frac{2(m^2+1)+2|-m^2+1|}{m^2+1} = 2+2 \cdot \frac{|-m^2+1|}{m^2+1} \geq 2+2 \cdot \frac{0}{m^2+1} = 2.$$

Vậy S^2 đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $-m^2+1=0$ hay $m=\pm 1$. Vì $S>0$ nên ta kết luận S đạt giá trị bé nhất là $\sqrt{2}$ khi $m=\pm 1$

Câu 8: Cho hàm số $y = x^3 + (2m-1)x^2 + (1+m)x$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số đã cho có 2 điểm cực trị, đồng thời hoành độ điểm cực đại không nhỏ hơn -1 là

- A. $\left(-\infty; \frac{-1}{4}\right] \cup \{2\}$. B. $\left(-\infty; \frac{-1}{4}\right) \cup (2; +\infty)$.
C. $\left(-\infty; \frac{-1}{4}\right)$. D. $\left(-\infty; \frac{-1}{4}\right) \cup \{2\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 + 2(2m-1)x + 1+m$. Vậy

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2(2m-1)x + 1+m = 0 \quad (*)$$

Đồ thị của hàm số đã cho có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 7m - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{-1}{4} \\ m > 2 \end{cases} \quad (1)$$

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của $(*)$, sao cho $x_1 < x_2$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$						$+\infty$

Vậy x_1 là điểm cực đại của hàm số đã cho.

Đặt $VT(*) = f(x)$. Yêu cầu bài toán tương đương hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 của phương trình $(*)$ phải thỏa $-1 \leq x_1 < x_2$, nghĩa là

$$\begin{cases} f(-1) \geq 0 \\ -1 < -\frac{b}{2a} = \frac{-2m+1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m < 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $m < \frac{-1}{4}$.

Câu 9: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + m^2}{x+1}$ đạt cực đại tại $x=1$ là:

- A. $\{\emptyset\}$. B. $\{2\}$. C. $\{2; -2\}$. D. $\emptyset$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$y' = \frac{x^2 + 2x + 1 - m^2}{(x+1)^2}.$$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ nên cần có $y'(1) = 0$, hay $4 - m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm 2$.

Với $m = \pm 2$ ta được: $y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			0		$+\infty$		$+\infty$
	$-\infty$		$-\infty$		0		

Quan sát bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Vậy không tồn tại m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 10: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $\frac{|x|-2}{|x|+1} = m$ có đúng hai

nghiệm phân biệt là:

A. $[0; 2)$.

B. $[1; 2)$.

C. $[1; 2] \cup \{0\}$.

D. $[1; 2) \cup \{0\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

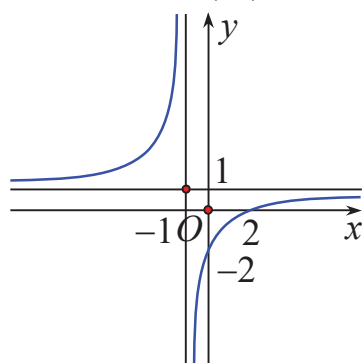
*Khảo sát vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ có đồ thị (C) ta được đồ thị như hình bên dưới.

*Từ đồ thị (C) suy ra đồ thị hàm số $y = \frac{|x|-2}{|x|+1} = f(|x|)$ có đồ thị (C_1) bằng cách:

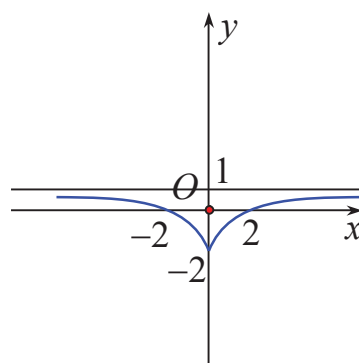
Phần 1 : Giữ nguyên đồ thị hàm số (C) phần bên phải trục tung.

Phần 2 : Lấy đối xứng phần 1 qua trục tung.

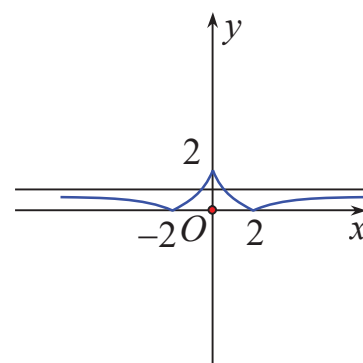
Ta được đồ thị (C_1) như hình bên dưới.



$$(C): y = \frac{x-2}{x+1}$$



$$(C_1): y = \frac{|x|-2}{|x|+1}$$



$$(C_2): y = \frac{||x|-2|}{|x|+1}$$

*Từ đồ thị hàm số (C_1) suy ra đồ thị hàm số $y = \frac{||x|-2|}{|x|+1} = |f(|x|)|$ có đồ thị (C_2) bằng cách:

Phần 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C_1) nằm trên trục Ox .

Phần 2: Lấy đối xứng phần nằm dưới trục Ox của đồ thị (C_1) qua trục Ox .

Ta được đồ thị (C_2) như hình vẽ bên trên.

Quan sát đồ thị (C_2) ta được phương trình $\frac{|x|-2}{|x|+1} = m$ có đúng hai nghiệm phân biệt khi và

chỉ khi $\begin{cases} m = 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}$.

Câu 11: Một vùng đất hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 25 \text{ km}$, $BC = 20 \text{ km}$ và M , N lần lượt là trung điểm của AD , BC . Một người cưỡi ngựa xuất phát từ A đi đến C bằng cách đi thẳng từ A đến một điểm X thuộc đoạn MN rồi lại đi thẳng từ X đến C . Vận tốc của ngựa khi đi trên phần $ABNM$ là 15 km/h , vận tốc của ngựa khi đi trên phần $MNCD$ là 30 km/h . Thời gian ít nhất để ngựa di chuyển từ A đến C là mấy giờ?

A. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{41}}{4}$.

C. $\frac{4+\sqrt{29}}{6}$.

D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi $MX = x (\text{km})$ với $0 \leq x \leq 25$

Quãng đường $AX = \sqrt{x^2 + 10^2}$

$\Rightarrow$ thời gian tương ứng $\frac{\sqrt{x^2 + 100}}{15} (\text{h})$

Quãng đường $CX = \sqrt{(25-x)^2 + 10^2}$

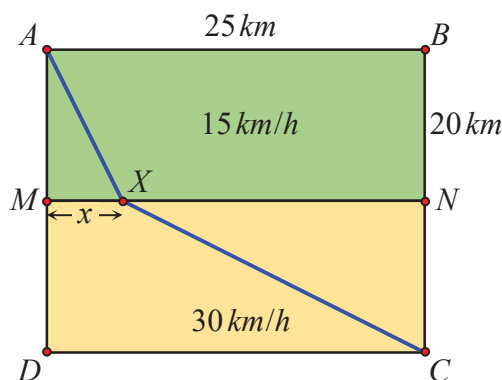
thời gian tương ứng $\frac{\sqrt{x^2 - 50x + 725}}{30} (\text{h})$

Tổng thời gian $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 100}}{15} + \frac{\sqrt{x^2 - 50x + 725}}{30}$ với $x \in [0; 25]$, tìm giá trị nhỏ nhất $f(x)$

$$f'(x) = \frac{x}{15\sqrt{x^2 + 100}} + \frac{x-25}{30\sqrt{x^2 - 50x + 725}}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Tính các giá trị $f(0) = \frac{4+\sqrt{29}}{6} \approx 1,56$, $f(25) = \frac{1+\sqrt{29}}{3} \approx 2,13$, $f(5) = \frac{2\sqrt{5}}{3} \approx 1,49$

Vậy hàm số đạt GTNN bằng $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ tại $x = 5$



Câu 12: Hàm số $y = (4 - x^2)^{\frac{1}{5}}$ có tập xác định là

A. $(-2; 2)$.

B. $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

C. $\mathbb{R}$.

D. $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số đã cho là hàm lũy thừa với số mũ không nguyên

Hàm số xác định khi và chỉ khi $4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$. Vậy TXĐ $D = (-2; 2)$.

Câu 13: Phương trình $x(\ln x - 1) = 0$ có số nghiệm là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. e .

Hướng dẫn giải

Chợ nB.

Điều kiện $nx > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} x=0 \\ \ln x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=e \end{cases}$. Do $x > 0$ nên phương trình có nghiệm duy nhất là $x=e$.

Câu 14: Giá trị của m để phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ là

- A. $m = 3$. B. $m = 4$. C. $m = \frac{9}{2}$. D. $m = \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải**Chợ nB.**

Đặt $t = 2^x$, điều kiện $nt > 0$. Phương trình đã cho trở thành $nt^2 - 2mt + 2m = 0$ (1).

Ta có $2^{x_1+x_2} = 8 \Leftrightarrow 2^{x_1}.2^{x_2} = 8$.

Vậy phương trình (1) phải có hai nghiệm dương t_1, t_2 sao cho $t_1.t_2 = 8$.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1.t_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$$

Câu 15: Tìm tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{7-2^x-6.2^{-x}} + \sqrt{x-\frac{2x^2-6x}{x-4}}$.

- A. $\emptyset$. B. $\{0\}$. C. $[2; \log_2 6]$. D. $[2; \log_2 6] \cup \{0\}$.

Hướng dẫn giải**Chợ nD.**

$$\begin{aligned} \text{Hàm số xác định} &\Leftrightarrow \begin{cases} 7-2^x-6.2^{-x} \geq 0 \\ x-\frac{2x^2-6x}{x-4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2^{2x}+7.2^x-6 \geq 0 \\ \frac{-x^2+2x}{x-4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq 2^x \leq 6 \\ x \leq 0 \\ 2 \leq x < 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \log_2 6 \\ x \leq 0 \\ 2 \leq x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2 \leq x \leq \log_2 6 \end{cases}. \end{aligned}$$

Câu 16: Nếu $a = \log_2 3$, $b = \log_2 5$ thì

- A. $\log_2 \sqrt[6]{360} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}a + \frac{1}{6}b$. B. $\log_2 \sqrt[6]{360} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}a + \frac{1}{3}b$.
C. $\log_2 \sqrt[6]{360} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}b$. D. $\log_2 \sqrt[6]{360} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b$.

Hướng dẫn giải**Chợ nC.**

$$\log_2 \sqrt[6]{360} = \frac{1}{6} \log_2 (5.3^2.2^3) = \frac{1}{6} (3 + 2 \log_2 3 + \log_2 5) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}b.$$

Câu 17: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{2x^2+x+1} \leq \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{1-x}$ là

- A. $\left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$. B. $\left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

C. $(-1; 0)$.

D. $\left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\begin{aligned} \text{Do } x^2 + \frac{1}{2} > 0 \forall x \text{ nên } \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{2x^2+x+1} \leq \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{1-x} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{1}{2} = 1 \\ x^2 + \frac{1}{2} > 1 \\ 2x^2 + x + 1 \leq 1 - x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right) \\ x \in [-1; 0] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x \in \left[-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ x \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x \in \left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \end{aligned}$$

Câu 18: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x$ là

A. $f'(x) = \frac{\sqrt[3]{\cos^4 x} - \frac{1}{3} \sin x \sqrt[3]{\cos^{-2} x}}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} - 1$.

B. $f'(x) = \frac{\sqrt[3]{\cos^4 x} + \frac{1}{3} \sin^2 x \sqrt[3]{\cos^{-2} x}}{\sqrt[6]{\cos x}} - 1$.

C. $f'(x) = \frac{\sqrt[3]{\cos^4 x} + \frac{1}{3} \sin^2 x \sqrt[3]{\cos x}}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} - 1$.

D. $f'(x) = \frac{\left(\sqrt[3]{\cos^2 x} - 1\right)^2 \left(2\sqrt[3]{\cos^2 x} + 1\right)}{3 \cos x \sqrt[3]{\cos x}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Chú ý rằng $\left(\sqrt[3]{\cos x}\right)' = \frac{-\sin x}{3\sqrt[3]{\cos^2 x}} \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Ta có $f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \sqrt[3]{\cos x} - \sin x \cdot \left(\sqrt[3]{\cos x}\right)'}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} - 1$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos x \cdot \sqrt[3]{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{3\sqrt[3]{\cos^2 x}}}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} - 1 = \frac{3\cos^2 x + \sin^2 x - 3\sqrt[3]{\cos^4 x}}{3\cos x \cdot \sqrt[3]{\cos^2 x}} \\
&= \frac{3\cos^2 x + \sin^2 x - 3\sqrt[3]{\cos^4 x}}{3\cos x \cdot \sqrt[3]{\cos^2 x}} = \frac{2\cos^2 x + 1 - 3\sqrt[3]{\cos^4 x}}{3\cos x \cdot \sqrt[3]{\cos^2 x}} \\
&= \frac{\left(\sqrt[3]{\cos^2 x} - 1\right)^2 \left(2\sqrt[3]{\cos^2 x} + 1\right)}{3\cos x \sqrt[3]{\cos x}}
\end{aligned}$$

Lưu ý với học sinh: Khi tính đến $\frac{\cos x \cdot \sqrt[3]{\cos x} + \frac{\sin^2 x}{3\sqrt[3]{\cos^2 x}}}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} - 1$, học sinh có thể loại kết quả theo

các sau

- Loại đáp án **A**, vì tử số trong đáp án **A** có dấu trừ.
- Loại đáp án **B**, vì mẫu số của đáp án **B** là căn bậc 6
- Loại đáp án **C**, vì tử số của đáp án **C** có $\sin^2 x \sqrt[3]{\cos x}$ chứ không phải là $\frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$.

Câu 19: Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{3^x}$. Khẳng định nào đúng?

- A.** Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$. **B.** Hàm số đã cho là hàm số lẻ.
C. Giá trị của hàm số đã cho luôn không dương. **D.** Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } y' &= \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1\right)3^x - (\sqrt{x^2+1}+x) \cdot 3^x \cdot \ln 3}{3^{2x}} \\
&= \frac{(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1}(x + \sqrt{x^2+1}) \ln 3}{3^x \cdot \sqrt{x^2+1}} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

vì $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ và $\sqrt{x^2+1} \geq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 20: Một người vay ngân hàng 200.000.000 đồng theo hình thức trả góp hàng tháng trong 48 tháng. Lãi suất ngân hàng cố định 0,8%/tháng. Mỗi tháng người đó phải trả (lần đầu tiên phải trả là 1 tháng sau khi vay) số tiền gốc là số tiền vay ban đầu chia cho 48 và số tiền lãi sinh ra từ số tiền gốc còn nợ ngân hàng. Tổng số tiền lãi người đó đã trả trong toàn bộ quá trình nợ là bao nhiêu?

- A.** 38.400.000 đồng. **B.** 10.451.777 đồng. **C.** 76.800.000 đồng. **D.** 39.200.000 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Để thuận tiện trong trình bày, tất cả các số tiền dưới đây được tính theo đơn vị triệu đồng.

Số tiền phải trả tháng thứ 1: $\frac{200}{48} + 200 \cdot 0,8\%$.

Số tiền phải trả tháng thứ 2:

$$\frac{200}{48} + \left(200 - \frac{200}{48}\right) \cdot 0,8\% = \frac{200}{48} + 47 \cdot \frac{200}{48} \cdot 0,8\%.$$

Số tiền phải trả tháng thứ 3:

$$\frac{200}{48} + \left(200 - 2 \cdot \frac{200}{48}\right) \cdot 0,8\% = \frac{200}{48} + 46 \cdot \frac{200}{48} \cdot 0,8\%.$$

Số tiền phải trả tháng thứ 48

$$\frac{200}{48} + \left(200 - 47 \cdot \frac{200}{48}\right) \cdot 0,8\% = \frac{200}{48} + 1 \cdot \frac{200}{48} \cdot 0,8\%.$$

Suy ra tổng số tiền lãi phải trả là:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot \frac{200}{48} \cdot 0,8\% + 2 \cdot \frac{200}{48} \cdot 0,8\% + \dots + 47 \cdot \frac{200}{48} \cdot 0,8\% + 200 \cdot 0,8\% \\ &= \frac{200}{48} \cdot 0,8\% (1 + 2 + \dots + 48) = \frac{200}{48} \cdot 0,8\% \cdot \frac{48(1+48)}{2} = 39,2 \end{aligned}$$

Câu 21: Giá trị nhỏ nhất của $P = (\log_a b^2)^2 + 6 \left(\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right)^2$ với a, b là các số thực thay đổi thỏa mãn

$\sqrt{b} > a > 1$ là

A. 30.

B. 40.

C. 50.

D. 60.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $P = (2 \log_a b)^2 + 6 \left(\log_{\frac{b}{a^2}} \frac{b}{a} \right)^2$.

Đặt $x = \frac{b}{a^2} > \frac{a^2}{a^2} = 1$. Vậy $b = a^2 x$ và

$$\begin{aligned} P &= [2 \log_a (a^2 x)]^2 + 6 \left(\log_x \frac{a^2 x}{a} \right)^2 = 4 (\log_a a^2 + \log_a x)^2 + 6 [\log_x (xa)]^2 \\ &= 4 (2 + \log_a x)^2 + 6 (\log_x x + \log_x a)^2 = 4 (2 + \log_a x)^2 + 6 \left(1 + \frac{1}{\log_a x} \right)^2. \end{aligned}$$

Đặt $t = \log_a x > \log_a 1 = 0 \Rightarrow P = 4(t+2)^2 + 6 \left(1 + \frac{1}{t} \right)^2$.

Xét hàm số $f(t) = 4(t+2)^2 + 6 \left(1 + \frac{1}{t} \right)^2$, với $t \in (0; +\infty)$ có

$$f'(t) = 8(t+2) + 12 \left(1 + \frac{1}{t} \right) \cdot \frac{-1}{t^2} = 8(t+2) - \frac{12(t+1)}{t^3}.$$

$$\begin{cases} t \in (0; +\infty) \\ f'(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in (0; +\infty) \\ 2t^3(t+2) = 3(t+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in (0; +\infty) \\ 2t^4 + 4t^3 - 3t - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \in (0; +\infty) \\ 2t^3(t-1) + 6t^2(t-1) + 6t(t-1) + 3(t-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in (0; +\infty) \\ (t-1)(2t^3 + 6t^2 + 6t + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1.$$

Từ đó suy ra $f(t) \geq f(1) = 60$, nên $P \geq 60$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \log_a x = 1$ nên $x = a$ hay $\frac{b}{a^2} = a \Leftrightarrow b = a^3$.

Câu 22: Nguyên hàm của hàm số $y = \cos^2 x \cdot \sin x$ là

- A. $\frac{1}{3}\cos^3 x + C$. B. $-\cos^3 x + C$. C. $-\frac{1}{3}\cos^3 x + C$. D. $\frac{1}{3}\sin^3 x + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } \int \cos^2 x \sin x dx = -\int \cos^2 x d(\cos x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Câu 23: Cho $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x) dx = 7$; $\int_2^6 f(x) dx = 3$. Khi đó giá trị của biểu thức $P = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx$ là

- A. 10. B. 4. C. 3. D. -4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\begin{aligned} \text{Vì } f(x) \text{ liên tục trên đoạn } [0;10] \text{ nên } \int_0^{10} f(x) dx &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx \\ \Rightarrow P &= \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx = \int_0^{10} f(x) dx - \int_2^6 f(x) dx = 7 - 3 = 4. \end{aligned}$$

Câu 24: Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$. Giá trị của $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2x) \sin x \cos x dx$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $-\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Xét } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2x) \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\cos 2x) \sin 2x dx$$

Đặt $t = \cos 2x \Rightarrow dt = -2 \sin 2x dx$. Đổi cận: khi $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 0$.

$$I = -\frac{1}{4} \int_1^0 f(t) dt = \frac{1}{4} \int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}.$$

Câu 25: Thể tích của vật thể tròn xoay tạo bởi khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ quanh trục hoành Ox có giá trị bằng

- A. $\frac{8\pi}{15}$. B. $\frac{7\pi}{8}$. C. $\frac{15\pi}{8}$. D. $\frac{8\pi}{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } S = \pi \int_0^1 (x^2 - 2x)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} - 4 \frac{x^4}{4} + 4 \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{8\pi}{15}$$

Câu 26: Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục trên miền $D = [a; b]$ có đồ thị là một đường cong C . Gọi S là phần giới hạn bởi C và các đường thẳng $x = a$, $x = b$. Người ta chứng minh được rằng diện

tích mặt cong tròn xoay tạo thành khi xoay S quanh Ox bằng $S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

Theo kết quả trên, tổng diện tích bề mặt của khối tròn xoay tạo thành khi xoay phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - \ln x}{4}$ và các đường thẳng $x = 1$, $x = e$ quanh Ox là

- A. $\frac{2e^2 - 1}{8}\pi$. B. $\frac{4e^4 - 9}{64}\pi$. C. $\frac{4e^4 + 16e^2 + 7}{16}\pi$. D. $\frac{4e^4 - 9}{16}\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Cách 1. (Giải tự luận)

Ta có $f(x) = \frac{2x^2 - \ln x}{4} = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4} \Rightarrow f'(x) = x - \frac{1}{4x} \Rightarrow (f'(x))^2 = \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{16x^2} - \frac{1}{2}$

Lại có $f'(x) = x - \frac{1}{4x} > 0, \forall x \in (1; e)$, nên $f(x)$ đồng biến trên $[1; e]$. Suy ra

$$f(x) \geq f(1) = \frac{1}{2} > 0, \forall x \in [1; e].$$

Từ đây ta thực hiện phép tính như sau

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}\right) \sqrt{1 + \left(x^2 + \frac{1}{16x^2} - \frac{1}{2}\right)} dx \\ S &= 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}\right) \sqrt{x^2 + \frac{1}{16x^2} + \frac{1}{2}} dx = 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}\right) \sqrt{\left(x + \frac{1}{4x}\right)^2} dx \\ &= 2\pi \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}\right) \left(x + \frac{1}{4x}\right) dx \\ &= 2\pi \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}x \ln x - \frac{1}{16} \frac{\ln x}{x}\right) dx \\ &= 2\pi (I_1 + I_2 + I_3) \end{aligned}$$

Với $I_1 = \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x\right) dx = \left(\frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{16}\right) \Big|_1^e = \frac{2e^4 + e^2 - 3}{16}$

$$I_2 = \int_1^e \left(-\frac{1}{4}x \ln x\right) dx = -\frac{1}{4} \frac{1}{4} x^2 (2 \ln x - 1) \Big|_1^e = -\frac{1}{16} e^2 - \frac{1}{16}$$

$$I_3 = \int_1^e \left(-\frac{1}{16} \frac{\ln x}{x}\right) dx = -\frac{1}{32} \ln^2 x \Big|_1^e = -\frac{1}{32}.$$

Cách 2.

Học sinh có thể trực tiếp bấm máy tính tích phân $S = 2\pi \int_1^e \left|\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}\right| \sqrt{1 + \left(x^2 + \frac{1}{16x^2} - \frac{1}{2}\right)} dx$ để có kết quả

Câu 27: Cho hàm số $y = \frac{x^4}{2} - 2m^2x^2 + 2$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu, đồng thời đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại tạo với đồ thị một hình phẳng có diện tích bằng $\frac{64}{15}$ là

- A. $\emptyset$. B. $\{\pm 1\}$. C. $\left\{\pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm 1\right\}$. D. $\left\{\pm \frac{1}{2}; \pm 1\right\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$y' = 2x^3 - 4m^2x = 2x(x^2 - 2m^2); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{2}m \\ x = -\sqrt{2}m \end{cases}$$

Đồ thị của hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow m \neq 0$

Vì $a = \frac{1}{2} > 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ suy ra điểm cực đại của đồ thị hàm số là $A(0; 2)$

Đường thẳng cùng phương với trục hoành qua điểm cực đại có phương trình là $d: y = 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và d là:

$$\frac{x^4}{2} - 2m^2x^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 = 4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2|m| \\ x = -2|m| \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là: (chú ý rằng hàm số đã cho là hàm chẵn)

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2|m|}^{2|m|} \left| \frac{x^4}{2} - 2m^2x^2 \right| dx = 2 \int_0^{2|m|} \left| \frac{x^4}{2} - 2m^2x^2 \right| dx = 2 \left| \int_0^{2|m|} \left(\frac{x^4}{2} - 2m^2x^2 \right) dx \right| \\ &= 2 \left| \left(\frac{x^5}{10} - \frac{2}{3}m^2x^3 \right) \right|_0^{2|m|} = \frac{64}{15}|m|^5 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } S = \frac{64}{15} \Leftrightarrow |m| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

Câu 28: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y = x^2\sqrt{x^2+1}$, trục Ox và đường thẳng $x=1$ bằng $\frac{a\sqrt{b} - \ln(1+\sqrt{b})}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Khi đó giá trị của $a+b+c$ là

- A. 11. B. 12. C. 13. D. 14.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Cách 1 (dùng máy tính):

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2\sqrt{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_0^1 x^2\sqrt{x^2+1} dx$ vì $x^2\sqrt{x^2+1} \geq 0, \forall x \in [0; 1]$.

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{a\sqrt{b} - \ln(1 + \sqrt{b})}{c}$$

Bước 1: Bấm máy tính tích phân $S = \int_0^1 x^2 \sqrt{x^2 + 1} dx = 0,4201583875$ (Lưu D)

Bước 2: Cơ sở : Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$D = \frac{a\sqrt{b} - \ln(1 + \sqrt{b})}{c} \Leftrightarrow c = \frac{a\sqrt{b} - \ln(1 + \sqrt{b})}{D}$ (coi $c = f(x)$, $a = x$, $b \in \mathbb{Z}$ và ta thử các giá trị $b = \dots -5; -4; \dots 0; 1; 2; 3; 4; \dots$)

Thử với $b = 1$:

Thử với $b = 2$: Mode + 7

$$F(X) = \frac{X\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})}{D};$$

Start?	End?
-9	9

Step?
1

Kết quả: $a = 3; c = 8, b = 2$

11 12 13	x	12 23	F(X) 1.2681 4.634
8			

Cách 2 (giải tự luận):

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 \sqrt{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_0^1 x^2 \sqrt{x^2 + 1} dx$ vì $x^2 \sqrt{x^2 + 1} \geq 0, \forall x \in [0; 1]$.

Đặt $x = \tan t \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t) dt$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

$$\text{Khi đó } S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t \sqrt{1 + \tan^2 t} (1 + \tan^2 t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t \cdot \cos t}{(\cos^2 t)^3} dt$$

Đặt $u = \sin t \Rightarrow du = \cos t dt$

Đổi cận $t = 0 \Rightarrow u = 0; t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$S = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{u^2}{(1 - u^2)^3} du = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1 - (1 - u^2)}{(1 - u^2)^3} du = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{(1 - u^2)^3} - \left(\frac{1}{(1 - u^2)^2} \right) \right) du$$

$$\text{Ta có } H = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{(1 - u^2)^3} du = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1 - u + 1 + u}{(1 - u)(1 + u)} \right)^3 du = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{1 + u} + \frac{1}{1 - u} \right)^3 du$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{(1+u)^3} + \frac{1}{(1-u)^3} + \frac{3}{1-u^2} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right) \right) du \\
&= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{(1+u)^3} + \frac{1}{(1-u)^3} + \frac{6}{(1-u^2)^2} \right) du \\
&= \left(\frac{-1}{16(1+u)^2} + \frac{1}{16(1-u)^2} \right) \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{6}{(1-u^2)^2} du \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{6}{(1-u^2)^2} du
\end{aligned}$$

Tính $K = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{6}{(1-u^2)^2} du$

$$\begin{aligned}
K &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{6}{(1-u^2)^2} du = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1-u+1+u}{(1-u)(1+u)} \right)^2 du = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} \right)^2 du \\
&= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{(1-u)^2} + \frac{1}{(1+u)^2} + \frac{2}{(1-u)(1+u)} \right) du = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u} + \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| \right) \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{2} + 3 \ln(1+\sqrt{2})
\end{aligned}$$

Vậy $H = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2} + 3 \ln(1+\sqrt{2})}{8} = \frac{7\sqrt{2} + 3 \ln(1+\sqrt{2})}{8}$

Khi đó $S = \frac{7\sqrt{2} + 3 \ln(1+\sqrt{2})}{8} - \frac{1}{6} K$

$$= \frac{7\sqrt{2} + 3 \ln(1+\sqrt{2})}{8} - \frac{1}{6} (3\sqrt{2} + 3 \ln(1+\sqrt{2})) = \frac{3\sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})}{8}$$

Câu 29: Cho số phức $z = 2 - 3i$. Điểm biểu diễn số phức liên hợp của z là

- A.** $(2; 3)$. **B.** $(-2; -3)$. **C.** $(2; -3)$. **D.** $(-2; 3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Vì $z = 2 - 3i \Rightarrow \bar{z} = 2 + 3i$ Điểm biểu diễn của $\bar{z}$ có tọa độ $(2; 3)$.

Câu 30: Số phức nghịch đảo của số phức $z = 1 + 3i$ là

- A.** $\frac{1}{10}(1+3i)$. **B.** $\frac{1}{10}(1-3i)$. **C.** $1-3i$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{10}}(1+3i)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $z = 1 + 3i \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{1+3i} = \frac{1-3i}{1^2 - (3i)^2} = \frac{1}{10}(1-3i)$.

- Câu 31:** Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2 - 8z + 5 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1|^2 + |z_2|^2$ là
- A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. 2. D. $\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$4z^2 - 8z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 1 + \frac{1}{2}i \\ z_2 = 1 - \frac{1}{2}i \end{cases}. \text{ Suy ra } |z_1|^2 + |z_2|^2 = \frac{5}{2}.$$

- Câu 32:** Xét số phức z thỏa mãn $2|z-1| + 3|z-i| \leq 2\sqrt{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\frac{3}{2} < |z| < 2$. B. $|z| > 2$. C. $|z| < \frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Giả sử $z = x + yi$ có điểm biểu diễn là $M(x; y)$.

Số phức $z-1$ có điểm biểu diễn $A(x-1; y)$. $z-i$ có điểm biểu diễn $B(x; y-1)$.

$$\text{Ta có } 2|z-1| + 3|z-i| \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + 3\sqrt{x^2 + (y-1)^2} \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2OA + 3OB \leq 2AB \quad (1)$$

$$\text{Mà } 2OA + 3OB = 2OA + 2OB + OB \geq 2AB + OB \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 2AB + OB \leq 2AB \Leftrightarrow OB = 0 \Leftrightarrow B \equiv O \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}. \text{ Khi đó } z = i \Rightarrow |z| = 1$$

- Câu 33:** Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z+2| + |z-2| = 5$ trên mặt phẳng tọa độ là một
- A. đường thẳng. B. đường tròn. C. elip. D. hypebol.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có } |z+2| + |z-2| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 + y^2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 5 \quad (1).$$

Đặt $F_1(-2; 0)$, $F_2(2; 0)$ khi đó (1) $\Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 5$ suy ra M nằm trên Elip có hai tiêu điểm là

$$F_1; F_2 \text{ và bán kính trục lớn là } \frac{5}{2}. \text{ Phương trình của elip đó là } \frac{x^2}{\frac{25}{4}} + \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1.$$

- Câu 34:** Cho số phức z thỏa mãn $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 3$. Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là
- A. 3. B. $\sqrt{5}$. C. $\sqrt{13}$. D. 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Trước hết ta có bài toán tổng quát: Cho a, b, c là các số thực dương và số phức $z \neq 0$ thỏa

$$\text{mãn } \left|az + \frac{b}{z}\right| = c. \text{ Chứng minh rằng } \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4ab}}{2a} \leq |z| \leq \frac{c + \sqrt{c^2 + 4ab}}{2a}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi z là số thuần ảo.

Dựa vào dấu đẳng thức xảy ra ta chỉ cần tiến hành giải phương trình $az - \frac{b}{z} = c$ rồi lấy trị tuyệt đối mỗi nghiệm. Khi đó số dương nhỏ là $\min|z|$ số dương lớn là $\max|z|$.

Áp dụng kết quả trên với $a = b = 1$ và $c = 3$, ta có $\min|z| = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}$ và $\max|z| = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$. Vậy tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$ là $\sqrt{13}$.

Câu 35: Khối đa diện đều loại $\{p; q\}$ là khối đa diện có đặc điểm:

- A. mỗi mặt là đa giác đều p cạnh và mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng q mặt.
- B. có p mặt là đa giác đều và mỗi đỉnh là đỉnh chung của đúng q cạnh.
- C. có p mặt là đa giác đều và mỗi mặt có q cạnh.
- D. có q mặt là đa giác đều và mỗi mặt có p cạnh.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Một khối đa diện lồi được gọi là khối đa diện đều loại $\{p; q\}$ nếu:

- a) Mỗi mặt của nó là một đa giác đều p cạnh.
- b) Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng q mặt.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABC$ có khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) là $2a$ và thể tích bằng a^3 . Nếu ABC là tam giác vuông cân thì độ dài cạnh huyền của nó là

- A. $a\sqrt{3}$.
- B. $a\sqrt{6}$.
- C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.
- D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Không mất tính tổng quát, giả sử tam giác ABC vuông cân tại A .

Đặt $x = AB$, ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{x^2}{2}$ và $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SH = \frac{ax^2}{3}$. Vậy

$$V_{S.ABC} = a^3 \Leftrightarrow \frac{ax^2}{3} = a^3 \Leftrightarrow x = a\sqrt{3}.$$

Độ dài cạnh huyền là $BC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{6}$.

Câu 37: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 1 và G là trọng tâm của tam giác BCD' . Thể tích V của khối chóp $G.ABC'$ là

- A. $V = \frac{1}{3}$.
- B. $V = \frac{1}{6}$.
- C. $V = \frac{1}{12}$.
- D. $V = \frac{1}{18}$.

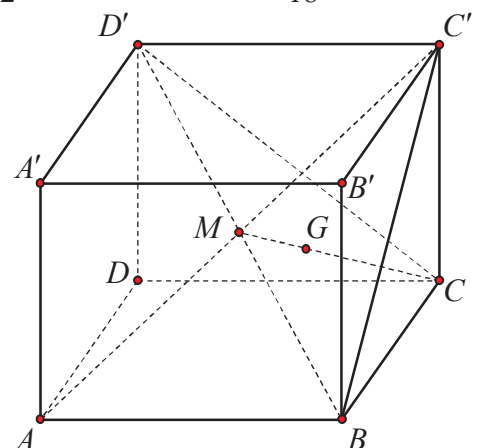
Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi M là trung điểm của BD' theo tính

chất trọng tâm của G ta có $GM = \frac{1}{3} CM$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_{G.ABC'} &= \frac{1}{3} V_{C.ABC'} = \frac{1}{3} V_{A.BCC'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot AB \cdot \frac{1}{2} CB \cdot CC' \\ &= \frac{1}{18} AB \cdot BC \cdot CC' = \frac{1}{18} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$



- Câu 38:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{5}$. Hình chiếu của điểm S trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của đoạn thẳng BC . Biết rằng góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ASC) bằng 60° . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là
- A. $\frac{5a^3\sqrt{6}}{12}$. B. $\frac{5a^3\sqrt{10}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{210}}{24}$. D. $\frac{a^3\sqrt{30}}{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi H là trung điểm của BC , đặt $SH = x, (x > 0)$.

Gắn hình chóp vào hệ trục tọa độ với $A(0;0;0)$, $B(a\sqrt{2};0;0)$, $C(0;a\sqrt{5};0)$,

$H\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{5}}{2}; 0\right)$, $S\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{5}}{2}; x\right)$ như hình vẽ

Ta có:

VTCP của đường thẳng AB là $\vec{i} = (1;0;0)$,

VTCP của đường thẳng AC là $\vec{j} = (0;1;0)$.

$$\overrightarrow{AS} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{5}}{2}; x\right)$$

VTPT của $mp(SAB)$ là $[\overrightarrow{AS}, \vec{i}] = \left(0; x; -\frac{a\sqrt{5}}{2}\right) = \vec{n}_1$

VTPT của $mp(ASC)$ là $[\overrightarrow{AS}, \vec{j}] = \left(-x; 0; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \vec{n}_2$.

$$\text{Có } \cos 60^\circ = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\frac{a^2\sqrt{10}}{4}}{\sqrt{x^2 + \frac{5a^2}{4}} \cdot \sqrt{x^2 + \frac{2a^2}{4}}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 16x^4 + 28x^2a^2 - 30a^4 = 0 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ do } x > 0.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{5} = \frac{a^3\sqrt{30}}{12}.$$

Cách 2:

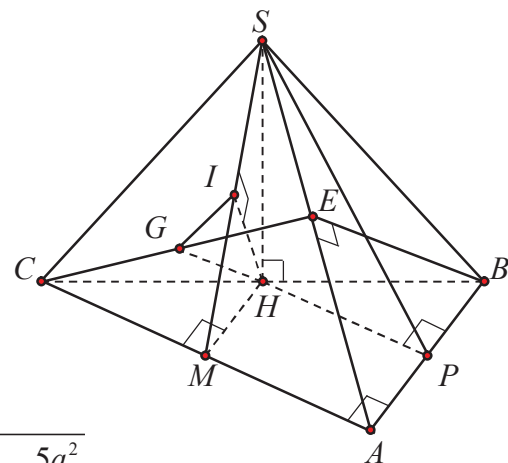
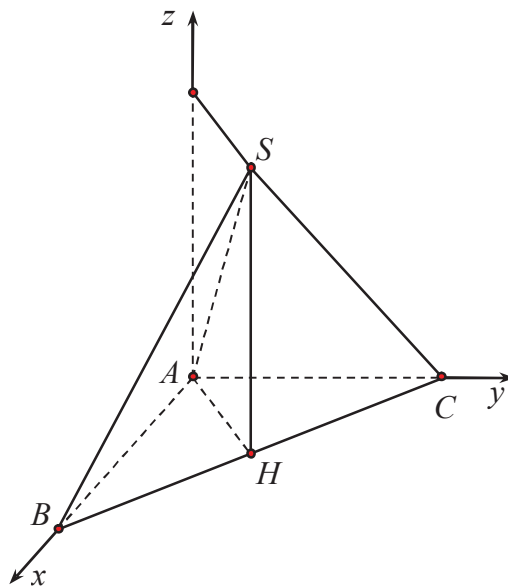
$(SAB) \cap (SAC) = SA$, kẻ $BE \perp SA$ và $GH \parallel BE$, suy ra

$((SAC), (SAB)) = (GH, (SAC)) = \widehat{HGI} = 60^\circ$.

Đặt $SH = h$, ta tính được $SA = \sqrt{h^2 + \frac{7a^2}{4}}$ và $SP = \sqrt{h^2 + \frac{5a^2}{4}}$. Vậy

$$BE = \frac{2S_{SAB}}{SA} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{h^2 + \frac{5a^2}{4}}}{\sqrt{h^2 + \frac{7a^2}{4}}} \Rightarrow HG = \frac{BE}{2}, \quad HI = \frac{SH \cdot HM}{SM} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot h}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}}$$

Tam giác GIH vuông tại I có



$$\sin 60^\circ = \frac{IH}{HG} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{h^2 + \frac{5a^2}{4}}}{\sqrt{h^2 + \frac{7a^2}{4}}} = \frac{h \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}} \Rightarrow h^4 + \frac{7a^2}{4}h^2 - \frac{15a^4}{8} = 0 \Rightarrow h = \frac{2a\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Vậy } V_{SABC} = \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot SH = \frac{a^3 \sqrt{30}}{12}.$$

Câu 39: Cho hình trụ có khoảng cách giữa hai đáy bằng 10, biết diện tích xung quanh của hình trụ bằng 80π . Thể tích của khối trụ là

- A. 160π . B. 164π . C. 64π . D. 144π .

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Chiều cao h chính là khoảng cách hai đáy $\Rightarrow h = 10$.

Diện tích xung quanh hình trụ là $2\pi Rh = 80\pi \Rightarrow R = 4$ là bán kính đường tròn đáy.

Vậy thể tích là $V = \pi R^2 h = 160\pi$.

Câu 40: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng h . Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho là

- A. $\pi \left(h^2 + \frac{4a^2}{3} \right)$. B. $\frac{\pi a^2 h}{3}$.
C. $\frac{\pi}{3} \left(h^2 + \frac{4a^2}{3} \right) \sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{a^2}{3}}$. D. $\frac{\pi}{3} \sqrt{\left(\frac{h^2}{4} + \frac{a^2}{3} \right)^3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Lăng trụ tam giác đều là lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều.

Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và $A'B'C'$. Vậy GG' là trục các đường tròn ngoại tiếp của các tam giác đáy.

Trong mặt phẳng $(AA'G'G)$, kẻ đường trung trực d tại trung điểm M của AA' và cắt GG' tại I .

Khi đó ta có $IA = IA'$.

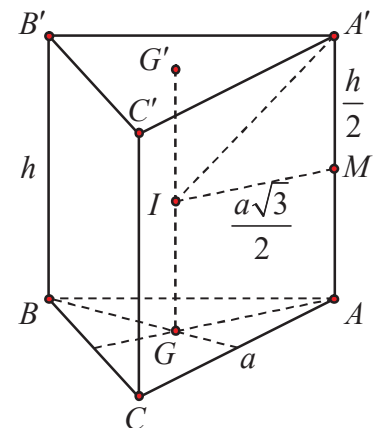
Mà $I \in GG' \Rightarrow IA = IB = IC = IA' = IB' = IC'$.

Do đó mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ có tâm là I là bán kính là IA' .

$$IM = GA = \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad MA' = \frac{h}{2}.$$

$$\text{Ta có } IA' = \sqrt{IM^2 + MA'^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{h^2}{4}}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối cầu là } V = \frac{4\pi}{3} IA'^3 = \frac{4\pi}{3} \sqrt{\left(\frac{a^2}{3} + \frac{h^2}{4} \right)^3} = \frac{\pi}{3} \left(\frac{4a^2}{3} + h^2 \right) \sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{a^2}{3}}.$$



Câu 41: Giá trị lớn nhất của thể tích khối nón nội tiếp trong khối cầu có bán kính R là

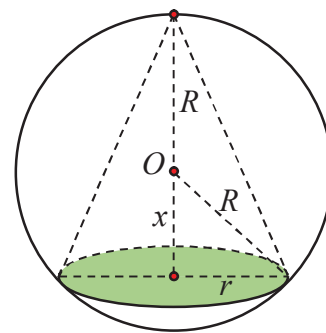
- A. $\frac{1}{3}\pi R^3$. B. $\frac{4}{3}\pi R^3$. C. $\frac{4\sqrt{2}}{9}\pi R^3$. D. $\frac{32}{81}\pi R^3$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Rõ ràng trong hai khối nón cùng bán kính đáy nội tiếp trong một khối cầu thì khối nón có chiều cao lớn hơn thì thể tích lớn hơn, nên ta chỉ xét khối nón có chiều cao lớn hơn trong hai khối nón đó.

Giả sử rằng khối nón có đáy là hình tròn (C) bán kính r . Gọi x với $0 \leq x < R$ là khoảng cách giữa tâm khối cầu đến đáy khối nón. Khi đó chiều cao lớn nhất của khối nón nội tiếp khối cầu với đáy là hình tròn (C) sẽ là $h = R + x$. Khi đó bán kính đáy nón là $r = \sqrt{R^2 - x^2}$, suy ra thể tích khối nón là



$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (R+x)(R^2 - x^2) = \frac{1}{3} \pi (R+x)(R+x)(R-x) = \frac{1}{6} \pi (R+x)(R+x)(2R-2x)$$

Áp dụng BĐT Cô-si ta có $V \leq \frac{1}{6} \pi \frac{(R+x+R+x+2R-2x)^3}{27} = \frac{32\pi R^3}{81}$

Câu 42: Cho tam giác đều ABC cạnh 1 và hình vuông $MNPQ$ nội tiếp trong tam giác ABC (M thuộc AB , N thuộc AC , P , Q thuộc BC). Gọi S là phần mặt phẳng chứa các điểm thuộc tam giác ABC nhưng không chứa các điểm thuộc hình vuông $MNPQ$. Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay S quanh trục là đường thẳng qua A vuông góc với BC là

- A. $\frac{810-467\sqrt{3}}{24} \pi$. B. $\frac{4\sqrt{3}-3}{96} \pi$. C. $\frac{4\sqrt{3}-3}{96}$. D. $\frac{54-31\sqrt{3}}{12} \pi$.

Hướng dẫn giải

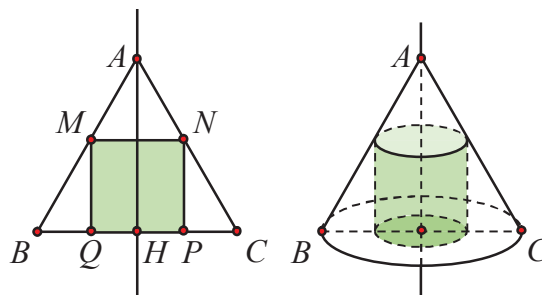
Chọn A.

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay S quanh trục là đường thẳng AH bằng hiệu thể tích khối nón khi quay tam giác ABC và thể tích khối trụ khi quay hình vuông $MNPQ$ quanh trục là đường thẳng AH .

Gọi độ dài cạnh hình vuông là x . Khi đó:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} = 1 - \frac{CN}{CA} = 1 - \frac{NP}{AH}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1} = 1 - \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow x = 2\sqrt{3} - 3$$



$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \pi \left(\frac{x}{2} \right)^2 \cdot x = \frac{810-467\sqrt{3}}{24} \pi.$$

Câu 43: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 2z - 4 = 0$ có bán kính R là

- A. $R = \sqrt{5}$. B. $R = 25$. C. $R = 2$. D. $R = 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Bán kính mặt cầu là $R = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-1)^2 - (-4)} = 5$.

- Câu 44:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(2;3;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x+2y-z=0$ phương trình là
- A. $4x+3y-2z-3=0$. B. $4x-3y-2z+3=0$.
C. $x-2y-3z-11=0$. D. $x+2y-3z+7=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$\overrightarrow{AB} = (2;2;1)$, vector pháp tuyến của (Q) là $\vec{n} = (1;2;-1)$.

Vậy (P) có vector pháp tuyến là $[\overrightarrow{AB}, \vec{n}] = (-4;3;2)$.

Phương trình mặt phẳng $(P): -4x+3(y-1)+2z=0$, hay $(P): 4x-3y-2z+3=0$.

- Câu 45:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1;-2;2)$, $B(-3;-2;0)$ và $(P): x+3y-z+2=0$. Vector chỉ phương của đường thẳng Δ là giao tuyến của (P) và mặt phẳng trung trực của AB có tọa độ là:
- A. $(1;-1;0)$. B. $(2;3;-2)$. C. $(1;-2;0)$. D. $(3;-2;-3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mặt phẳng $(P): x+3y-z+2=0$ có VTPT là $\vec{n}_P = (1;3;-1)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng trung trực của $AB \Rightarrow mp(Q)$ có VTPT là $\vec{n}_Q = \overrightarrow{AB} = (-2;0;-2)$

Ta có $\Delta = (P) \cap (Q)$ nên đường thẳng Δ có VTCP $\vec{a}_\Delta = [\vec{n}_P; \vec{n}_Q] = (-6;4;6)$ cùng phương với vector $(3;-2;-3)$.

- Câu 46:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;5)$ và $B(0;0;1)$. Mặt phẳng (P) chứa A, B và song song với trục Oy có phương trình là
- A. $4x+y-z+1=0$. B. $2x+z-5=0$. C. $4x-z+1=0$. D. $y+4z-1=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;1;-4)$ và trục Oy có VTCP là $\vec{j} = (0;1;0)$

Mặt phẳng (P) chứa A, B và song song với trục Oy nên có VTPT $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \vec{j}] = (4;0;-1)$

Khi đó mặt phẳng (P) đi qua $B(0;0;1)$ và VTPT $\vec{n} = (4;0;-1)$ nên có phương trình $4x-z+1=0$.

- Câu 47:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$ và điểm $M(2;5;3)$. Mặt phẳng (P) chứa Δ sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất là
- A. $x-4y-z+1=0$. B. $x+4y+z-3=0$.
C. $x-4y+z-3=0$. D. $x+4y-z+1=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

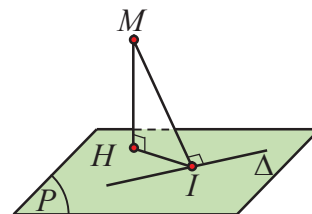
Gọi I là hình chiếu vuông góc của $M(2;5;3)$ trên Δ , H là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (P) .

Ta có $MH = d(M, (P)) \leq MI$. Do đó MH đạt giá trị lớn nhất khi $H \equiv I$, khi đó mặt phẳng (P) chứa Δ và vuông góc với MI .

$$I \in \Delta \Rightarrow I(1+2t; t; 2+2t), \overrightarrow{MI} = (-1+2t; -5+t; -1+2t).$$

$$MI \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \vec{u}_{\Delta} = 0 \Leftrightarrow (2t-1)2 + t - 5 + (2t-1)2 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Mặt phẳng (P) qua $I(3;1;4)$ có một vector pháp tuyến là $\overrightarrow{MI} = (1; -4; 1)$. Phương trình mặt phẳng (P) : $x - 4y + z - 3 = 0$.



Câu 48: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;2)$, $B(5;4;4)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - z + 6 = 0$. Nếu M thay đổi thuộc (P) thì giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + MB^2$ là

- A. 60. B. 50. C. $\frac{200}{3}$. D. $\frac{2968}{25}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi $I(3;3;3)$ là trung điểm đoạn AB . Ta có $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$.

Do đó $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $MI \perp (P)$. Khi đó

$$MI = d(I, (P)) = \frac{|6+3-3+6|}{\sqrt{4+1+1}} = 2\sqrt{6}; \quad AB = \sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{24}.$$

$$\text{Vậy } \min(MA^2 + MB^2) = 2(2\sqrt{6})^2 + \frac{(\sqrt{24})^2}{2} = 60.$$

Câu 49: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$ và $D(1;-2;2)$. Các mặt phẳng chứa các mặt của tứ diện $ABCD$ chia không gian $Oxyz$ thành số phần là

- A. 9. B. 12. C. 15. D. 16.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có 3 đường thẳng chia mặt phẳng thành 7 phần.

3 mặt phẳng chia không gian thành 8 phần, mặt phẳng thứ 4 cắt 3 mặt phẳng trước thành 3 giao tuyến, 3 giao tuyến này chia mặt phẳng thứ 4 thành 7 phần, mỗi phần lại chia 1 phần của không gian thành 2 phần.

Vậy 4 mặt phẳng chia không gian thành $8 + 7 = 15$ phần

Câu 50: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{-1}$ và các điểm $A(2;3;-4)$, $B(4;6;-9)$. Gọi C , D là các điểm thay đổi trên đường thẳng Δ sao cho $CD = \sqrt{14}$ và mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$ có thể tích lớn nhất. Khi đó, tọa độ trung điểm của đoạn thẳng CD là

A. $\left(\frac{79}{35}; \frac{64}{35}; \frac{102}{35}\right)$ B. $\left(\frac{181}{5}; \frac{-104}{5}; \frac{-42}{5}\right)$ C. $\left(\frac{101}{28}; \frac{13}{14}; \frac{69}{28}\right)$ D. $(2; 2; 3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

+ Thể tích tứ diện $ABCD$ là:

$V = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot IE \cdot \sin \alpha$ với IE là đoạn vuông góc chung của AB , CD ; $\alpha = (\widehat{AB; CD})$. Rõ ràng V là hằng số không đổi.

+ Mặt khác: $V = \frac{1}{3} S_{tp} \cdot r \Leftrightarrow r = \frac{3V}{S_{tp}} (2)$, với r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$, S_{tp}

là diện tích toàn phần của tứ diện $ABCD$.

Dựa vào (2), yêu cầu đề bài tương đương với S_{tp} nhỏ nhất.

Ta có:

$$S_{tp} = S_{ACD} + S_{BCD} + S_{CAB} + S_{DAB} = S_{ACD} + S_{BCD} + \frac{1}{2} AB \cdot (d_1 + d_2) \text{ với } d_1 = d(C; AB),$$

$$d_2 = d(D; AB)$$

Vì A, B cố định $CD = \sqrt{14}$ nên $S_{ACD} + S_{BCD}$ không đổi. Do đó S_{tp} nhỏ nhất khi và chỉ khi $d_1 + d_2$ nhỏ nhất. Điều này xảy ra khi trung điểm I của CD là là giao điểm của d và đường thẳng vuông góc chung của d và AB . (Xem chứng minh ở phần bổ sung)

+ Giải bài toán tìm tọa độ 2 điểm của đoạn vuông góc chung ta được $I(2; 2; 3)$ như sau:

$$\overrightarrow{AB} = (2; 3; -5), \quad AB: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + 3t \\ z = -4 - 5t \end{cases}; \quad d \text{ có VTCP } \vec{u}_d = (3; -2; -1)$$

$$IE \text{ có VTCP } \vec{u} = [\overrightarrow{AB}; \vec{u}_d] = (-13; -13; -13), \text{ chọn VTCP là } \vec{u}' = (1; 1; 1).$$

$$I \in d \Rightarrow I(-1 + 3a; 4 - 2a; 4 - a); \quad E \in AB \Rightarrow E(2 + 2b; 3 + 3b; -4 - 5b)$$

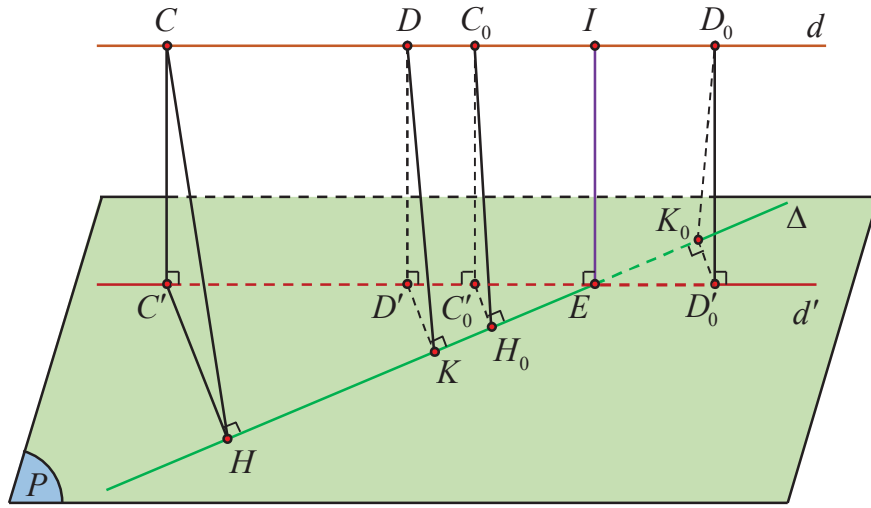
$$\overrightarrow{EI} = (-3 + 3a - 2b; 1 - 2a - 3b; 8 - a + 5b)$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{EI} = k \cdot \vec{u}' \Leftrightarrow \begin{cases} -3 + 3a - 2b = k \\ 1 - 2a - 3b = k \\ 8 - a - 5b = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ k = 2 \end{cases}. \text{ Suy ra: } I(2; 2; 3)$$

Bổ sung: Chứng minh nhận định trên bằng bài toán sau:

Cho hai đường thẳng chéo nhau d và Δ và hai điểm C, D thay đổi trên đường thẳng d sao cho $CD = 2a$ (với a là hằng số dương cho trước). Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ C, D đến Δ . Chứng minh rằng tổng $d_1 + d_2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi trung điểm I của CD là giao điểm của d và đường thẳng vuông góc chung của d và Δ .

Chứng minh



+ Gọi $IE = d$ là đoạn vuông góc chung của d và Δ . Qua E dựng đường thẳng d' song song với d , gọi (P) là mặt phẳng chứa d' và Δ .

Gọi $C_0D_0 = 2a$ là đoạn thẳng nhận I là trung điểm, C_0, D_0 cố định thuộc d .

Gọi C'_0, H_0 lần lượt là hình chiếu của C_0 lên (P) và Δ ; D'_0, K_0 lần lượt là hình chiếu của D_0 lên (P) và Δ ;

Gọi $CD = 2a$ với C, D là hai điểm tùy ý thuộc d .

Gọi C', H lần lượt là hình chiếu của C lên (P) và Δ ; D', K lần lượt là hình chiếu của D lên (P) và Δ .

Ta có: E là trung điểm của đoạn $C'_0D'_0$ và H_0K_0 .

Ta có: $d_{01} + d_{02} = d(C_0; \Delta) + d(D_0; \Delta) = \sqrt{d^2 + C'_0H^2} + \sqrt{d^2 + D'_0H^2} = 2\sqrt{d^2 + b^2}$,
với $b = C'_0H = D'_0K$ là hằng số.

Ta có: $d_1 + d_2 = \sqrt{d^2 + C'H^2} + \sqrt{d^2 + D'K^2}$

Theo Thales ta có:

+ Nếu C', D' cùng phía so với E (và giả sử C' ở xa E hơn so với D') ta có:

$$\frac{C'H - D'K}{b} = \frac{EC' - ED'}{EC'_0} = \frac{C'D'}{a} = 2 \Rightarrow C'H - D'K = 2b$$

+ Nếu C', D' ngược phía so với E ta có:

$$\frac{C'H + D'K}{b} = \frac{EC' + ED'}{EC'_0} = \frac{C'D'}{a} = 2 \Rightarrow C'H + D'K = 2b$$

Trong cả hai trường hợp này, dùng BĐT $\sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{y^2 + b^2} \geq \sqrt{(x+y)^2 + (a+b)^2}$

Ta được

$$d_1 + d_2 = \sqrt{d^2 + C'H^2} + \sqrt{d^2 + D'K^2} \geq \sqrt{(2d)^2 + (C'H \pm D'K)^2} \geq \sqrt{(2d)^2 + (2a)^2} = d_{01} + d_{02}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $CD \equiv C_0D_0$.

Chú ý: BĐT trên chứng minh bằng cách chọn $\vec{u} = (x; y)$, $\vec{v} = (a; b)$ và $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng.