

HỆ PHƯƠNG TRÌNH

(Ôn thi TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA NĂM 2015)

Biên soạn: Huỳnh Chí Hào - THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu

PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

Bài 1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2y^3 + 12y^2 + 25y + 18 = (2x + 9)\sqrt{x + 4} & (1) \\ \sqrt{3x + 1} + 3x^2 - 14x - 8 = \sqrt{6 - 4y - y^2} & (2) \end{cases}$$

(Thi thử của THPT Nghi Sơn – Thanh Hóa)

Bài giải

♥ Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ 6 - 4y - y^2 \geq 0 \end{cases} \quad (*)$

♥ Khai thác phương trình (1) để tìm hệ thức liên hệ đơn giản của x và y

(sử dụng phương pháp hàm số kiểu $f(u) = f(v)$)

♦ $2y^3 + 12y^2 + 25y + 18 = (2x + 9)\sqrt{x + 4} \Leftrightarrow 2(y + 2)^3 + (y + 2) = 2(\sqrt{x + 4})^3 + \sqrt{x + 4} \quad (3)$

[Tại sao ?]

♦ Xét hàm đặc trưng $f(t) = 2t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$ ta có:

$$f'(t) = 6t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}$$

Nên: $(3) \Leftrightarrow f(y + 2) = f(\sqrt{x + 4}) \Leftrightarrow y + 2 = \sqrt{x + 4} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -2 \\ (y + 2)^2 = x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -2 \\ x = 4y + y^2 \end{cases} \quad (4)$

♥ Thế (4) vào (2) để được phương trình một ẩn

$$\sqrt{3x + 1} - \sqrt{6 - x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0 \quad (5)$$

♦ Phương trình (5) có một nghiệm là $x = 5$ nên có thể biến đổi về phương trình tích số bằng kỹ thuật nhân liên hợp.

$$(5) \Leftrightarrow (\sqrt{3x + 1} - 4) - (\sqrt{6 - x} - 1) + 3x^2 - 14x - 5 = 0 \quad (\text{Tách thành các biểu thức liên hợp})$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x - 5)}{\sqrt{3x + 1} + 4} + \frac{x - 5}{\sqrt{6 - x} + 1} + (x - 5)(3x + 1) = 0 \quad (\text{Nhân liên hợp})$$

$$\Leftrightarrow (x - 5) \left[\frac{3}{\sqrt{3x + 1} + 4} + \frac{1}{\sqrt{6 - x} + 1} + (3x + 1) \right] = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

♦ Với $x = 5 \Rightarrow y = 1$ (thỏa điều kiện $(*)$)

♥ Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (5; 1) \otimes$

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bước 1: Tìm điều kiện cho các biến x, y của hệ phương trình (nếu có)

Bước 2: Tìm một hệ thức liên hệ đơn giản của x và y bằng phương pháp hàm số

+ Biến đổi một phương trình của hệ về dạng $f(u) = f(v)$ (u, v là các biểu thức chứa x, y)

+ Xét hàm đặc trưng $f(t)$, chứng minh $f(t)$ đơn điệu, suy ra: $u = v$ (đây là hệ thức đơn giản chứa x, y)

Bước 3: Thay hệ thức đơn giản tìm được vào phương trình còn lại của hệ để được phương trình 1 ẩn

Bước 4: Giải phương trình 1 ẩn (cần ôn tập tốt các phương pháp giải phương trình 1 ẩn).

Bài 2: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 17x - 32y = 6x^2 - 9y^2 - 24 & (1) \\ (y+2)\sqrt{x+4} + (x+9)\sqrt{2y-x+9} = x^2 + 9y + 1 & (2) \end{cases}$$

(Thi thử của THPT Chuyên Vĩnh Phúc)

Bài giải

♥ **Điều kiện:** $\begin{cases} x \geq -4 \\ 2y - x + 9 \geq 0 \end{cases} \quad (*)$

♥ Khai thác phương trình (1) để **tìm hệ thức liên hệ đơn giản của x và y**

(sử dụng phương pháp hàm số kiểu $f(u) = f(v)$)

$$\begin{aligned} \diamond x^3 - y^3 + 17x - 32y = 6x^2 - 9y^2 - 24 &\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 17x - 18 = y^3 - 9y^2 + 32y - 42 \quad [\text{Tại sao ?}] \\ &\Leftrightarrow (x-2)^3 + 5(x-2) = (y-2)^3 + 5(y-2) \quad (3) \end{aligned}$$

♥ **Xét hàm đặc trưng** $f(t) = t^3 + 5t$ trên $\mathbb{R}$ ta có:

$$f'(t) = 3t^2 + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}$$

Nên: $(3) \Leftrightarrow f(x-2) = f(y-2) \Leftrightarrow x-2 = y-2 \Leftrightarrow y = x+1 \quad (4)$

♥ **Thế** (4) vào (2) để được phương trình một ẩn

$$(x+3)\sqrt{x+4} + (x+9)\sqrt{x+11} = x^2 + 9x + 10 \quad (5)$$

♦ Phương trình (5) có một nghiệm là $x = 5$ nên có thể **biến đổi về phương trình tích số bằng kỹ thuật nhân liên hợp.**

$$(5) \Leftrightarrow (x+3)(\sqrt{x+4} - 3) + (x+9)(\sqrt{x+11} - 4) = x^2 + 2x - 35 \quad (\text{Tách thành các biểu thức liên hợp})$$

$$\Leftrightarrow (x+3) \cdot \frac{x-5}{\sqrt{x+4}+3} + (x+9) \cdot \frac{x-5}{\sqrt{x+11}+4} = (x-5)(x+7) \quad (\text{Nhân liên hợp})$$

$$\Leftrightarrow (x-5) \left[\frac{x+3}{\sqrt{x+4}+3} + \frac{x+9}{\sqrt{x+11}+4} - (x+7) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ \frac{x+3}{\sqrt{x+4}+3} + \frac{x+9}{\sqrt{x+11}+4} - (x+7) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

♦ **Chứng minh (6) vô nghiệm**

$$(6) \Leftrightarrow \frac{x+3}{\sqrt{x+4}+3} - \frac{x+5}{2} + \frac{x+9}{\sqrt{x+11}+4} - \frac{x+9}{2} = 0$$

[Tại sao ?]

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x+5)\left(\frac{1}{\sqrt{x+4}+3} - \frac{1}{2}\right)}_{<0} + \underbrace{(x+9)\left(\frac{1}{\sqrt{x+11}+4} - \frac{1}{2}\right)}_{<0} - \underbrace{\frac{2}{\sqrt{x+4}+3}}_{<0} = 0 : \text{phương trình VN}$$

♦ Với $x=5 \Rightarrow y=6$ (thỏa điều kiện (*))

♥ Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (5; 6) \otimes$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Giải các hệ phương trình

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} x^3 + y^3 = 3x^2 - 6x - 3y + 4 \\ x^2 + y^2 - 6x + y - 10 = \sqrt{y+5} - \sqrt{4x+y} \end{cases} & 2) \begin{cases} (53-5x)\sqrt{10-x} + (5y-48)\sqrt{9-y} = 0 \\ \sqrt{2x-y+6} + x^2 - 2x - 66 = \sqrt{-2x+y+11} \end{cases} \\ 3) \begin{cases} (2012-3x)\sqrt{4-x} + (6y-2009)\sqrt{3-2y} = 0 \\ 2\sqrt{7x-8y} + 3\sqrt{14x-18y} = x^2 + 6x + 13 \end{cases} & 4) \begin{cases} x + \sqrt[3]{x} - y\sqrt{y-1} = 0 \\ x^4 + \sqrt{x^3 - x^2 + 1} = x(y-1)^3 + 1 \end{cases} \end{array}$$

Bài 3: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt[4]{x-2} - \sqrt{y^4+5} = y & (1) \\ x^2 + 2x(y-2) + y^2 - 8y + 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

(Phạm Trọng Thu GV THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp – THPT số 2)

Bài giải

♥ **Điều kiện:** $x \geq 2$ (*)

♥ Khai thác phương trình (1) để **tìm hệ thức liên hệ đơn giản của x và y**

♦ $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{x-2} - \sqrt{y^4+5} = y \Leftrightarrow \sqrt[4]{x-2} + \sqrt{(x-2)+5} = y + \sqrt{y^4+5}$ (3)

♦ **Xét hàm đặc trưng** $f(t) = t + \sqrt{t^4+5}$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

f liên tục trên $[0; +\infty)$ và $f'(t) = 1 + \frac{2t^3}{\sqrt{t^4+5}} > 0, \forall t \in [0; +\infty) \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$

Do $\sqrt[4]{x-2} \geq 0$ và $4y = (x+y-2)^2 \Rightarrow y \geq 0$ nên

(3) $\Leftrightarrow f(\sqrt[4]{x-2}) = f(y) \Leftrightarrow \sqrt[4]{x-2} = y \Leftrightarrow x = y^4 + 2$ (4)

♥ **Thế** (4) vào (2) để được phương trình một ẩn

$4y = (y^4 + y)^2 \Leftrightarrow y(y^7 + 2y^4 + y - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y^7 + 2y^4 + y - 4 = 0 \end{cases}$ (5)

♦ Giải phương trình (5) bằng **phương pháp hàm số**

Xét hàm số $g(y) = y^7 + 2y^4 + y - 4$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

Do g liên tục trên $[0; +\infty)$ và $g'(y) = 7y^6 + 8y^3 + 1 > 0, \forall y \in [0; +\infty) \Rightarrow g(y)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$

Nên: (5) $\Leftrightarrow g(y) = g(1) \Leftrightarrow y = 1$

♣ Với $y = 0 \Rightarrow x = 2$ [thỏa (*)]

♣ Với $y = 1 \Rightarrow x = 3$ [thỏa (*)]

♥ Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y)$ là $(2; 0)$ và $(3; 1) \otimes$

Bài 4: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 3x - y^3 - 6y^2 - 9y - 2 + \ln \frac{x-1}{y+1} = 0 & (1) \\ y[\log_2(x-3) + \log_3 y] = x+1 & (2) \end{cases}$$

(Thi thử của THPT Chuyên Vĩnh Phúc)

Bài giải

♥ Điều kiện:
$$\begin{cases} \frac{x-1}{y+1} > 0 \\ x-3 > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ y > 0 \end{cases} \quad (*)$$

♥ Khai thác phương trình (1) để tìm hệ thức liên hệ đơn giản của x và y

♦ $(1) \Leftrightarrow (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + \ln(x-1) = (y+1)^3 + 3(y+1)^2 + \ln(y+1) \quad (3)$

♦ Xét hàm đặc trưng $f(t) = t^3 + 3t^2 + \ln t$ trên khoảng $(0; +\infty)$

$$f'(t) = 3t^2 + 6t + \frac{1}{t} > 0 \quad \forall t > 0 \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên khoảng } (0; +\infty)$$

Do $x-1 > 0$ và $y+1 > 0$ nên

$$(3) \Leftrightarrow f(x-1) = f(y+1) \Leftrightarrow x-1 = y+1 \Leftrightarrow y = x-2 \quad (4)$$

♥ Thế (4) vào (2) để được phương trình một ẩn

$$(x-2)[\log_2(x-3) + \log_3(x-2)] = x+1 \quad (5)$$

♦ Giải phương trình (5) bằng phương pháp hàm số

$$(5) \Leftrightarrow \log_2(x-3) + \log_3(x-2) = \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow \log_2(x-3) + \log_3(x-2) - \frac{x+1}{x-2} = 0 \quad (6)$$

♣ Xét hàm số $g(x) = \log_2(x-3) + \log_3(x-2) - \frac{x+1}{x-2}$ trên khoảng $(3; +\infty)$

$$g'(x) = \frac{1}{(x-3)\ln 2} + \frac{1}{(x-2)\ln 3} + \frac{3}{(x-2)^2} > 0 \quad \forall x > 3$$

$$\Rightarrow g(x) \text{ đồng biến trên khoảng } (3; +\infty).$$

Nên $(6) \Leftrightarrow g(x) = g(5) \Leftrightarrow x = 5 \xrightarrow{(4)} y = 3 \quad [\text{thỏa mãn } (*)]$

♥ Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (5; 3) \otimes$

Bài 5: Giải hệ phương trình:..

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 + 8 = (y-x)(y^2 + xy + x^2 + 6) & (1) \\ (x+y-13)(\sqrt{3y-14} - \sqrt{x+1}) = 5 & (2) \end{cases}$$

(Thi thử của THPT Chuyên Vĩnh Phúc)

Bài giải

♥ **Điều kiện:** $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 3y-14 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq \frac{14}{3} \end{cases} \quad (*)$

♥ Khai thác phương trình (1) để **tìm hệ thức liên hệ đơn giản của x và y**

♦ $(1) \Leftrightarrow (x+1)^3 + 3(x+1) = (y-1)^3 + 3(y-1)$ (3)

♦ **Xét hàm đặc trưng** $f(t) = t^3 + 3t, t \in \mathbb{R}$

$$f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

Do $x+1 > 0$ và $y-1 > 0$ nên

$$(3) \Leftrightarrow f(x+1) = f(y-1) \Leftrightarrow x+1 = y-1 \Leftrightarrow x+2 = y \quad (4)$$

♥ **Thế** (4) vào (2) để được phương trình một ẩn

$$(2x-11)(\sqrt{3x-8} - \sqrt{x+1}) = 5 \quad (5)$$

♦ Giải phương trình (5) bằng **phương pháp hàm số**

Ta nhận thấy $x = \frac{11}{2}$ không là nghiệm của phương trình (5) nên

$$(5) \Leftrightarrow \sqrt{3x-8} - \sqrt{x+1} - \frac{5}{2x-11} = 0. \quad (6)$$

Xét hàm số

$$g(x) = \sqrt{3x-8} - \sqrt{x+1} - \frac{5}{2x-11}, x \in \left[\frac{8}{3}; \frac{11}{2}\right) \cup \left(\frac{11}{2}; +\infty\right)$$

$$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-8}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{10}{(2x-11)^2} = \frac{3\sqrt{x+1} - \sqrt{3x-8}}{2\sqrt{(3x-8)(x+1)}} + \frac{10}{(2x-11)^2} > 0 \quad \forall x \in \left(\frac{8}{3}; \frac{11}{2}\right) \& \left(\frac{11}{2}; +\infty\right)$$

$$\Rightarrow g(x) \text{ đồng biến trên các khoảng } \left(\frac{8}{3}; \frac{11}{2}\right) \& \left(\frac{11}{2}; +\infty\right)$$

♣ Trên khoảng $\left[\frac{8}{3}; \frac{11}{2}\right)$ thì $g(x)$ đồng biến, $3 \in \left[\frac{8}{3}; \frac{11}{2}\right), g(3) = 0$ nên

$$(6) \Leftrightarrow g(x) = g(3) \Leftrightarrow x = 3 \xrightarrow{(4)} y = 5 \quad [\text{thỏa mãn } (*)]$$

♣ Trên khoảng $\left(\frac{11}{2}; +\infty\right)$ thì $g(x)$ đồng biến, $8 \in \left(\frac{11}{2}; +\infty\right), g(8) = 0$ nên

$$(6) \Leftrightarrow g(x) = g(8) \Leftrightarrow x = 8 \xrightarrow{(4)} y = 10 \quad [\text{thỏa mãn } (*)]$$

♥ Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x, y) = (3; 5), (x, y) = (8; 10) \otimes$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Giải các hệ phương trình

$$1) \begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^3 - y^3 = 3y^2 + 4y - x + 2 \\ \sqrt{x + y} + 3\sqrt{x + 3y + 19} = 105 - y^3 - xy \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \sqrt{4x + 2} + \sqrt{2y + 4} = 6 \\ 2(2x + 1)^3 + 2x + 1 = (2y - 3)\sqrt{y - 2} \end{cases}$$

Bài 6: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} & (1) \\ \sqrt{9-4y^2} = 2x^2 + 6y^2 - 7 & (2) \end{cases}$$

(Thi thử của THPT Trần Phú – Thanh Hóa)

Bài giải

♥ Điều kiện: $\begin{cases} x \leq 1 \\ -\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{3}{2} \end{cases} \quad (*)$

♥ Khai thác phương trình (1) để tìm hệ thức liên hệ đơn giản của x và y

(sử dụng phương pháp hàm số kiểu $f(u) = f(v)$)

$$\begin{aligned} \diamond 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} &\Leftrightarrow 2y^3 + y = 2\sqrt{1-x} - 2x\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x} \\ &\Leftrightarrow 2y^3 + y = 2(1-x)\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x} \end{aligned} \quad (3)$$

♦ Xét hàm đặc trưng $f(t) = 2t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$ ta có:

$$f'(t) = 6t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}$$

$$\text{Nên: } (3) \Leftrightarrow f(y) = f(\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 1-x \end{cases} \quad (4)$$

♥ Thế (4) vào (2) để được phương trình một ẩn

$$\sqrt{4x+5} = 2x^2 - 6x - 1 \quad (5)$$

♦ Giải phương trình (5) bằng phương pháp đặt ẩn phụ chuyển về hệ đối xứng loại II

• Phương trình (5) viết lại thành: $(2x-3)^2 = 2\sqrt{4x+5} + 11$

Điều kiện

Đặt $\sqrt{4x+5} = 2t-3 \left(t \geq \frac{3}{2} \right)$, ta được hệ phương trình:

[Tại sao ?]

$$\begin{cases} (2x-3)^2 = 4t+5 & (6) \\ (2t-3)^2 = 4x+5 & (7) \end{cases}$$

• Trừ theo từng vế của (6) và (7) ta được:

$$4(x+t-3)(x-t) = 4t-4x \Leftrightarrow (x-t)(x+t-2) = 0$$

+ Khi $x=t$, thay vào (7) ta được:

$$4x^2 - 12x + 9 = 4x + 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$$

So với điều kiện của x và t ta chọn $x = 2 + \sqrt{3}$. [không thỏa mãn (*)]

+ Khi $x+t-2=0 \Leftrightarrow t=2-x$, thay vào (7) ta được:

$$(1-2x)^2 = 4x+5 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2} \quad (\text{loại})$$

So với điều kiện của x và t ta chọn $x = 1 - \sqrt{2}$.

♦ Với $x = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow y = \pm \sqrt[4]{2}$. [thỏa mãn (*)]

♥ Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y)$ là $(1 - \sqrt{2}; -\sqrt[4]{2})$ và $(1 - \sqrt{2}; \sqrt[4]{2}) \otimes$

Bài 7: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} & (1) \\ \sqrt{x+2} = \sqrt[3]{14-x\sqrt{3-2y}} + 1 & (2) \end{cases}$$

(Thi thử của THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Đà Nẵng)

Bài giải

♥ Điều kiện: $\begin{cases} y \leq \frac{3}{2} \\ x \geq -2 \end{cases} \quad (*)$

♥ Khai thác phương trình (1) để **tìm hệ thức liên hệ đơn giản của x và y**

(sử dụng phương pháp hàm số kiểu $f(u) = f(v)$)

♦ Do $x = 0$ không thỏa hệ nên ta có:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 2 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 2(2-y)\sqrt{3-2y} \\ &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 + \left(1 - \frac{1}{x}\right) = (3-2y)\sqrt{3-2y} + \sqrt{3-2y} \end{aligned} \quad (3)$$

♦ **Xét hàm đặc trưng** $f(t) = t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$ ta có:

$$f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}$$

$$\text{Nên:} \quad (3) \Leftrightarrow f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = f(\sqrt{3-2y}) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = \sqrt{3-2y} \quad (4)$$

♥ **Thế** (4) vào (2) để được phương trình một ẩn

$$\sqrt{x+2} = \sqrt[3]{15-x} + 1 \quad (5)$$

♦ Phương trình (5) có một nghiệm là $x = 7$ nên có thể **biến đổi về phương trình tích số bằng kỹ thuật nhân liên hợp**.

$$(5) \Leftrightarrow \sqrt{x+2} - 3 + 2 - \sqrt[3]{15-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-7) \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+2}+3} + \frac{1}{4-2\sqrt[3]{x+15}+(\sqrt[3]{x+15})^2}}_{>0} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 7$$

♦ Với $x = 7 \Rightarrow y = \frac{111}{98}$ [thỏa mãn (*)]

♥ Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là $\left(7; \frac{111}{98}\right) \otimes$

Bài 8: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 3y + 1 = y^2 - \frac{1}{y} + \frac{3x+4}{\sqrt{x+1}} & (1) \\ \sqrt{9y-2} + \sqrt[3]{7x+2y+2} = 2y+3 & (2) \end{cases}$$

(Thi thử của THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Đà Nẵng)

Bài giải

♥ Điều kiện: $\begin{cases} x > -1 \\ y \geq \frac{2}{9} \end{cases} \quad (*)$

♥ Khai thác phương trình (1) để tìm hệ thức liên hệ đơn giản của x và y

(sử dụng phương pháp hàm số kiểu $f(u) = f(v)$)

♦ Ta có $(1) \Leftrightarrow y^2 - \frac{1}{y} - 3y = x + 1 - \frac{1}{\sqrt{x+1}} - 3\sqrt{x+1}$ (3)

♦ Xét hàm đặc trưng $f(t) = t^2 - \frac{1}{t} - 3t$ trên $(0; +\infty)$ ta có:

$$f'(t) = \frac{(2t+1)(t-1)^2}{t^2} \geq 0, \forall t \in (0; +\infty) \Rightarrow f \text{ đồng biến trên } (0; +\infty)$$

Nên: $(3) \Leftrightarrow f(y) = f(\sqrt{x+1}) \Leftrightarrow y = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x = y^2 - 1$ (4)

♥ Thế (4) vào (2) để được phương trình một ẩn

$$\sqrt{9y-2} + \sqrt[3]{7y^2+2y-5} = 2y+3 \quad (5)$$

♦ Phương trình (5) có hai nghiệm là $y = 2$ $y = 3$ và nên có thể biến đổi về phương trình tích số bằng kỹ thuật nhân liên hợp. Định hướng biến đổi về dạng $(y-2)(y-3).h(x) = 0$ hay $(y^2-5y+6).h(x) = 0$

$$(5) \Leftrightarrow \sqrt{9y-2} - (y+2) + \sqrt[3]{7y^2+2y-5} - (y+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2-5y+6}{\sqrt{9y-2}+y+2} + \frac{(y+1)(y^2-5y+6)}{(y+1)^2 + (y+1)\sqrt[3]{7y^2+2y-5} + (\sqrt[3]{7y^2+2y-5})^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y^2-5y+6) \left(\frac{1}{\sqrt{9y-2}+y+2} + \frac{y+1}{(y+1)^2 + (y+1)\sqrt[3]{7y^2+2y-5} + (\sqrt[3]{7y^2+2y-5})^2} \right) = 0$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{>0}$

$$\Leftrightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

♦ Với $y = 2 \Rightarrow x = 3$ [thỏa mãn (*)]

♦ Với $y = 3 \Rightarrow x = 8$ [thỏa mãn (*)]

♥ Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ là $(3; 2); (8; 3) \otimes$

Bài 9: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - y = (2x+1)(y-2) & (1) \\ \sqrt{3x-8} - \sqrt{y} = \frac{5}{x+y-2} & (2) \end{cases}$$

Bài giải

♥ Điều kiện: $\begin{cases} x \geq \frac{8}{3} \\ y \geq 0 \\ x+y-12 \neq 0 \end{cases} \quad (*)$

♥ Khai thác phương trình (1) để tìm hệ thức liên hệ đơn giản của x và y

♦ $(1) \Leftrightarrow (y-x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = x+1$ (3)

♥ Thế (3) vào (2) để được phương trình một ẩn

$$\sqrt{3x-8} - \sqrt{x+1} = \frac{5}{2x-11} \quad (5)$$

♦ Giải phương trình (5) bằng phương pháp hàm số

$$(5) \Leftrightarrow \sqrt{3x-8} - \sqrt{x+1} - \frac{5}{2x-11} = 0. \quad (6)$$

Xét hàm số

$$f(x) = \sqrt{3x-8} - \sqrt{x+1} - \frac{5}{2x-11}, x \in \left[\frac{8}{3}; \frac{11}{2}\right) \cup \left(\frac{11}{2}; +\infty\right)$$

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-8}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{10}{(2x-11)^2} = \frac{3\sqrt{x+1} - \sqrt{3x-8}}{2\sqrt{(3x-8)(x+1)}} + \frac{10}{(2x-11)^2} > 0 \quad \forall x \in \left(\frac{8}{3}; \frac{11}{2}\right) \& \left(\frac{11}{2}; +\infty\right)$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên các khoảng } \left(\frac{8}{3}; \frac{11}{2}\right) \& \left(\frac{11}{2}; +\infty\right)$$

♣ Trên khoảng $\left[\frac{8}{3}; \frac{11}{2}\right)$ thì $f(x)$ đồng biến, $3 \in \left[\frac{8}{3}; \frac{11}{2}\right), f(3) = 0$ nên

$$(6) \Leftrightarrow f(x) = f(3) \Leftrightarrow x = 3 \xrightarrow{(4)} y = 4 \text{ [thỏa mãn (*)]}$$

♣ Trên khoảng $\left(\frac{11}{2}; +\infty\right)$ thì $f(x)$ đồng biến, $8 \in \left(\frac{11}{2}; +\infty\right), f(8) = 0$ nên

$$(6) \Leftrightarrow f(x) = f(8) \Leftrightarrow x = 8 \xrightarrow{(4)} y = 9 \text{ [thỏa mãn (*)]}$$

♥ Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x, y) = (3; 5), (x, y) = (8; 10) \otimes$

XEM THÊM PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ DẠNG TRÊN

CÁCH GIẢI PHƯƠNG TRÌNH DẠNG

$$(ax+b)^n = p\sqrt[n]{a'x+b'} + qx + r$$

(x là ẩn số; p, q, r, a, b, a', b' là các hằng số; $pa'a' \neq 0$; $n \in \{2; 3\}$)

$$\text{Dạng thường gặp: } (ax+b)^2 = p\sqrt{a'x+b'} + qx + r$$

1. Phương pháp giải

Đặt ẩn phụ:

$$+ \text{Đặt } \sqrt[n]{a'x+b'} = ay+b \text{ nếu } pa' > 0$$

$$+ \text{Đặt } \sqrt[n]{a'x+b'} = -(ay+b) \text{ nếu } pa' < 0$$

Bài toán dẫn đến giải hệ phương trình hai ẩn đối với x và y :

$$\begin{cases} h(x) = Ay + Bx + C \\ h(y) = (A' + B)x + C' \end{cases} \quad (*)$$

(*) thường là hệ đối xứng loại 2 đối với x và y .

Chú ý: Có thể sử dụng phương pháp nâng lũy thừa để đưa về phương trình bậc bốn.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Giải phương trình $\sqrt{2x+15} = 32x^2 + 32x - 20$ (1)

Lời giải

- Điều kiện: $2x+15 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{15}{2}$

- Phương trình (1) viết lại thành: $2(4x+2)^2 = \sqrt{2x+15} + 28$

Đặt $\sqrt{2x+15} = 4y+2 \left(y \geq -\frac{1}{2} \right)$, ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} (4y+2)^2 = 2x+15 & (2) \\ (4x+2)^2 = 2y+15 & (3) \end{cases}$$

- Trừ theo từng vế của (2) và (3) ta được:

$$(4y + 4x + 4)(4y - 4x) = 2(x - y) \Leftrightarrow (x - y)[1 + 8(x + y + 1)] = 0$$

+ Khi $x = y$, thay vào (3) ta được:

$$(4x + 2)^2 = 2x + 15 \Leftrightarrow 16x^2 + 14x - 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{11}{8} \end{cases}$$

So với điều kiện của x và y ta chọn $x = \frac{1}{2}$.

+ Khi $1 + 8(x + y + 1) = 0 \Leftrightarrow y = -x - \frac{9}{8}$, thay vào (3) ta được:

$$(4x + 2)^2 = -2x - \frac{9}{4} + 15 \Leftrightarrow 64x^2 + 72x - 35 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{221}}{16}$$

So với điều kiện của x và y ta chọn $x = \frac{-9 + \sqrt{221}}{16}$.

- Tập nghiệm của (1) là $S = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{-9 + \sqrt{221}}{16} \right\} \otimes$

Ví dụ 2: Giải phương trình $4x^2 + \sqrt{3x+1} + 5 = 13x$ (1)

Lời giải

- Điều kiện: $3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$
- Phương trình (1) viết lại thành: $(2x - 3)^2 = -\sqrt{3x+1} + x + 4$

Đặt $\sqrt{3x+1} = -(2y-3) \left(y \leq \frac{3}{2} \right)$, ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} (2x-3)^2 = 2y + x + 1 & (2) \\ (2y-3)^2 = 3x + 1 & (3) \end{cases}$$

- Trừ theo từng vế của (2) và (3) ta được:

$$2(2x + 2y - 6)(x - y) = 2y - 2x \Leftrightarrow (x - y)(2x + 2y - 5) = 0$$

+ Khi $x = y$, thay vào (3) ta được:

$$4x^2 - 12x + 9 = 3x + 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 15x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{97}}{8}$$

So với điều kiện của x và y ta chọn $x = \frac{15 - \sqrt{97}}{8}$.

+ Khi $2x + 2y - 5 = 0 \Leftrightarrow 2y = 5 - 2x$, thay vào (3) ta được:

$$(2 - 2x)^2 = 3x + 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 11x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{73}}{8}$$

So với điều kiện của x và y ta chọn $x = \frac{11 + \sqrt{73}}{8}$.

• Tập nghiệm của (1) là $S = \left\{ \frac{11 + \sqrt{73}}{8}; \frac{15 - \sqrt{97}}{8} \right\} \otimes$

3. Một số bài toán tự luyện

Giải các phương trình

1) $\sqrt{x+6} = x^2 + 4x$

2) $x^2 - 4x - 3 = \sqrt{x+5}$

3) $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0$

4) $4x^2 + 14x + 11 = 4\sqrt{6x+10}$

5) $9x^2 + 12x - 2 = \sqrt{3x+8}$

6) $9x^2 - 6x - 5 = \sqrt{3x+5}$

-----Hết-----