

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

TOÁN 12

TOÁN THỰC TẾ PHẦN 1



2026 - 2027

**Chương trình mới
thống nhất SGK**

Sưu tầm các bài toán đa dạng
giúp học sinh có kỹ năng tư
duy và kỹ năng phản xạ đề.

- ① Trắc nghiệm nhiều phương án
- ② Trắc nghiệm đúng sai
- ③ Trả lời ngắn



LÊ MINH KHA - 0399653362

Mục lục

Chương I.	TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN	3
Chương II.	TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI	21
Chương III.	TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN	39
Chương IV.	LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN	74
Chương V.	LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI	115
Chương VI.	LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN	158

TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

❖ **Câu 1.** Một vật có phương trình quỹ đạo tính theo thời gian là $s(t) = 5 + 8t - 2t^2$. Tại thời điểm nào, vật cách mốc tính quỹ đạo khoảng lớn nhất?

- (A) 1 giây. (B) 2 giây. (C) 3 giây. (D) 4 giây.

❖ **Câu 2.** Một vật dao động có phương trình là $x(t) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$ cm, t có đơn vị là giây. Mệnh đề nào sau đây đúng? Trong khoảng 2 giây đến 3 giây, vận tốc của vật tăng hay giảm?

- (A) Trong khoảng 2 giây đến 3 giây, vận tốc của vật không đổi.
(B) Trong khoảng 2 giây đến 3 giây, vận tốc của vật luôn tăng.
(C) Trong khoảng 2 giây đến 3 giây, vận tốc của vật luôn giảm.
(D) Trong khoảng 2 giây đến 3 giây, vận tốc của vật giảm, sau đó tăng.

❖ **Câu 3.** Một chất điểm chuyển động với vận tốc được cho bởi công thức $v(t) = -3t^2 + 12t + 1$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động. Hỏi sau bao lâu khi chất điểm chuyển động thì đạt được vận tốc lớn nhất?

- (A) 2 (s). (B) 1 (s). (C) 13 (s). (D) 4 (s).

❖ **Câu 4.** Để thiết kế một chiếc bể cá hình hộp chữ nhật có chiều cao là 60 cm, thể tích 96000 cm³. Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70000 VNĐ/m² và loại kính để làm mặt đáy có giá thành 100000 VNĐ/m². Tính chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá.

- (A) 81200 VNĐ. (B) 80200 VNĐ. (C) 82200 VNĐ. (D) 83200 VNĐ.

❖ **Câu 5.** Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- (A) 243 (m/s). (B) 27 (m/s). (C) 144 (m/s). (D) 36 (m/s).

❖ **Câu 6.** Tại một công ty sản xuất đồ chơi A, công ty phải chi 50000 USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi A, công ty phải chi trả 5 USD cho nguyên liệu thô và nhân công. Gọi x ($x \geq 1$) là số đồ chơi A mà công ty đã sản xuất và $T(x)$ (đơn vị USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải trả khi sản xuất x đồ chơi A. Người ta xác định chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A là $M(x) = \frac{T(x)}{x}$. Khi x đủ lớn ($x \rightarrow +\infty$) thì chi phí trung bình USD cho mỗi sản phẩm đồ chơi A gần nhất với kết quả nào sau đây?

Chương 1. TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

- (A) 50000. (B) 50005. (C) 10. (D) 5.

❖ **Câu 7.** Một bể chứa ban đầu có 100 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 20 lít nước, đồng thời cho vào bể 10 gam chất khử trùng (hòa tan). Hàm số $f(t)$ thể hiện nồng độ chất khử trùng (gam/lít) trong bể sau t phút là:

- (A) $f(t) = \frac{20t + 100}{10t}$. (B) $f(t) = 20t + 100$.
(C) $f(t) = \frac{10t}{20t + 100}$. (D) $f(t) = 20,02 + 100$.

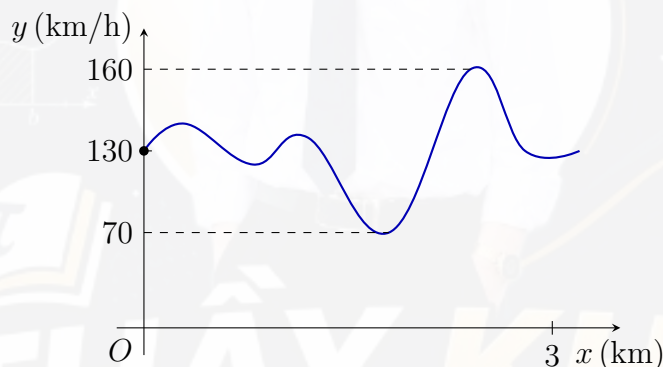
❖ **Câu 8.** Hồ nuôi tôm giống của một anh nông dân chứa 30 khối nước, cứ mỗi giờ máy bơm nước sẽ bơm thêm vào hồ 4 khối nước, đồng thời anh ta cũng thêm vào 3 kg bột xử lý nước. Nồng độ (kg/khối) của bột xử lý nước trong hồ không bao giờ vượt qua

- (A) 12 (kg/khối). (B) 1,33 (kg/khối).
(C) 0,75 (kg/khối). (D) 0,05 (kg/khối).

❖ **Câu 9.** Một công ty xác định tổng chi phí để sản xuất x đơn vị sản phẩm là $C(x) = x^2 + 40x + 2500$. Chi phí trung bình cho mỗi đơn vị sản phẩm là $M(x) = \frac{C(x)}{x}$. Chi phí trung bình thấp nhất khi số lượng sản phẩm sản xuất là

- (A) $x = 40$. (B) $x = 50$. (C) $x = 60$. (D) $x = 100$.

❖ **Câu 10.** Đồ thị bên dưới là tốc độ của chiếc xe đua trên đoạn đường đua bằng phẳng dài 3 km



Tốc độ nhỏ nhất của xe đua trên đoạn đường này bằng

- (A) 3 (km/h). (B) 160 (km/h). (C) 130 (km/h). (D) 70 (km/h).

❖ **Câu 11.** Một vật được phóng thẳng đứng lên từ mặt đất với tốc độ ban đầu là 32,5 m/s (bỏ qua sức cản của không khí), độ cao (tính bằng mét) của vật sau t giây được cho bởi công thức $h(t) = 32,5t - 4,9t^2$. Vận tốc của vật sau 3 giây bằng

- (A) 53,4 (m/s). (B) 32,5 (m/s). (C) 3,1 (m/s). (D) 4,9 (m/s).

❖ **Câu 12.** Một công ty sản xuất một sản phẩm. Bộ phận tài chính của công ty đưa ra hàm giá bán là $p(x) = 1000 - 25x$ trong đó $p(x)$ (triệu đồng) là giá bán của mỗi sản phẩm mà tại giá bán này có x sản phẩm được bán ra. Khi đó hàm doanh thu của công ty là

- (A) $f(x) = 1000x - 25x^2$. (B) $f(x) = 1000x + 25x^2$.
(C) $f(x) = 25x^2 - 1000x$. (D) $f(x) = 1000 - 25x^2$.

❖ **Câu 13.** Giả sử tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình v (km/h) theo công thức $C(v) = \frac{5400}{v} + \frac{3}{2}v$ ($0 < v \leq 120$). Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu để tiết kiệm tiền xăng nhất?

(A) 30.

(B) 60.

(C) 90.

(D) 120.

❖ **Câu 14.** Dân số của Việt Nam sau t năm tính từ năm 2023 được dự đoán theo công thức với $N(t)$ tính theo đơn vị triệu người: $N(t) = 100 \cdot e^{0,012t}$, $0 < t \leq 50$. Biết rằng đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ gia tăng dân số của Việt Nam (đơn vị là triệu người/năm). Vào năm nào thì tốc độ gia tăng dân số hơn 2 triệu người/năm?

(A) 2063.

(B) 2064.

(C) 2065.

(D) 2066.

❖ **Câu 15.** Giả sử hàm cầu đối với một loại hàng hóa được cho bởi công thức $p = \frac{354}{1 + 0,01x}$, $x \geq 0$.

Trong đó p là giá bán (nghìn đồng) của mỗi đơn vị sản phẩm và x là số lượng đơn vị sản phẩm đã bán. Số lượng đơn vị sản phẩm bán được sẽ thay đổi như thế nào khi giá bán tăng?

(A) Tăng lên.

(B) Giảm đi.

(C) Không thay đổi.

(D) Không xác định được.

❖ **Câu 16.** Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được $s(t)$ (km) là hàm phụ thuộc theo biến t (giây) theo quy tắc sau: $s(t) = e^{t^2+3} + 2t \cdot e^{3t+1}$ (km). Hỏi vận tốc của tên lửa sau 1 giây là bao nhiêu (biết hàm biểu thị vận tốc là đạo hàm của hàm biểu thị quãng đường theo thời gian).

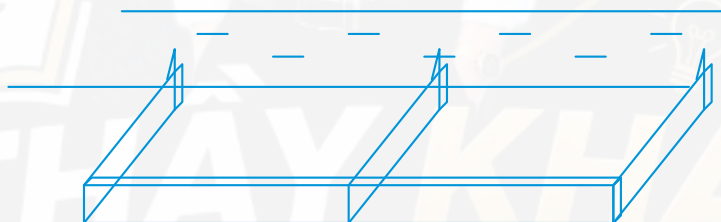
(A) $5e^4$ (km/s).

(B) $3e^4$ (km/s).

(C) $9e^4$ (km/s).

(D) $10e^4$ (km/s).

❖ **Câu 17.** Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng mỗi mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng mỗi mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được.



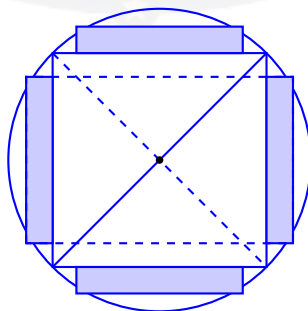
(A) 6250 m².

(B) 1250 m².

(C) 3125 m².

(D) 50 m².

❖ **Câu 18.** Từ một khúc gỗ tròn hình trụ có đường kính bằng 40 cm, cần xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và bốn miếng phụ được tô màu xanh như hình vẽ dưới đây. Tìm chiều rộng x của miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất.



Chương 1. TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

(A) $x = \frac{3\sqrt{34} - 17\sqrt{2}}{2}$ (cm).

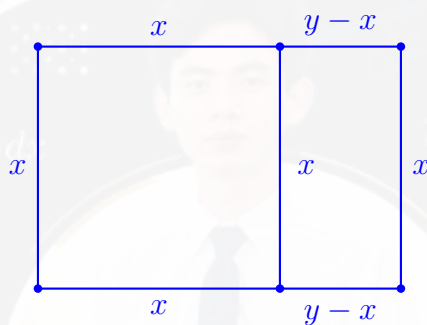
(B) $x = \frac{3\sqrt{34} - 19\sqrt{2}}{2}$ (cm).

(C) $x = \frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2}$ (cm).

(D) $x = \frac{5\sqrt{34} - 13\sqrt{2}}{2}$ (cm).

C

❖ **Câu 19.** Kỳ thi THPT Quốc gia năm 2016 vừa kết thúc, Nam đỗ vào trường Đại học Bách Khoa Hà Nội. Kỳ I của năm nhất gần qua, kỳ II sắp đến. Hoàn cảnh không được tốt nên gia đình rất lo lắng về việc đóng học phí cho Nam, kỳ I đã khó khăn, kỳ II càng khó khăn hơn. Gia đình đã quyết định bán một phần mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 50 m, lấy tiền lo cho việc học của Nam cũng như tương lai của em. Mảnh đất còn lại sau khi bán là một hình vuông cạnh bằng chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật ban đầu. Tìm số tiền lớn nhất mà gia đình Nam nhận được khi bán đất, biết giá tiền 1 m² đất khi bán là 1.500.000 VN đồng.



(A) 112.687.500 VN đồng.

(B) 114.187.500 VN đồng.

(C) 115.687.500 VN đồng.

(D) 117.187.500 VN đồng.

❖ **Câu 20.** Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ tăng thêm giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng một tháng thì sẽ có 2 căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng?

(A) 2.225.000 đồng.

(B) 2.100.000 đồng.

(C) 2.200.000 đồng.

(D) 2.250.000 đồng.

❖ **Câu 21.** Người ta muốn sơn một cái hộp không nắp, đáy hộp là hình vuông và có thể tích là 4 (đơn vị thể tích). Tìm kích thước của hộp để dùng lượng nước sơn tiết kiệm nhất. Giả sử độ dày của lớp sơn tại mọi nơi trên hộp là như nhau.

(A) Cạnh ở đáy là 2, chiều cao là 1.

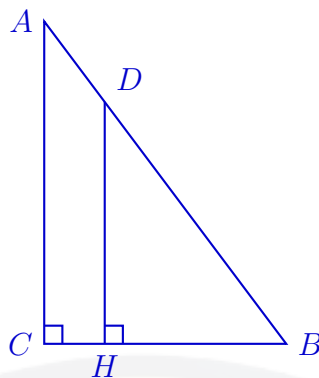
(B) Cạnh ở đáy là $\sqrt{2}$, chiều cao là 2.

(C) Cạnh ở đáy là $2\sqrt{2}$, chiều cao là 0,5.

(D) Cạnh ở đáy là 1, chiều cao là 2.

❖ **Câu 22.** Chiều dài bé nhất của cái thang AB để nó có thể tựa vào tường AC và mặt đất BC,

ngang qua cột đỡ DH cao 4 m, song song và cách tường $CH = 0,5$ m là:



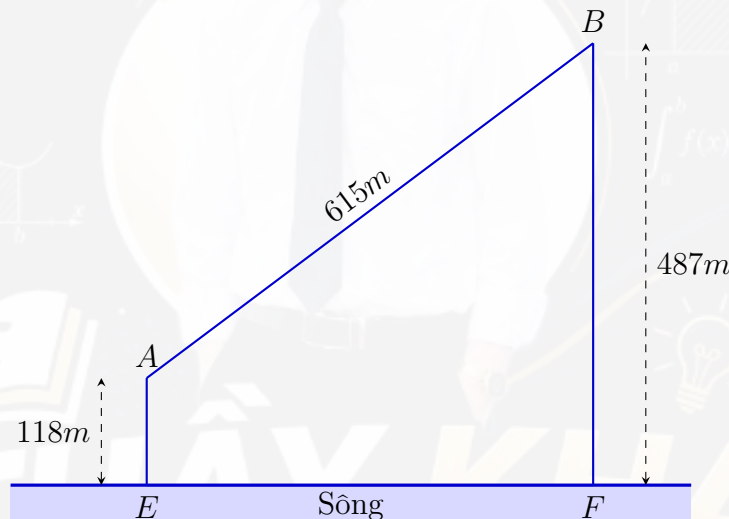
(A) Xấp xỉ 5,602.

(B) Xấp xỉ 6,5902.

(C) Xấp xỉ 5,4902.

(D) Xấp xỉ 5,5902.

❖ **Câu 23.** Cho hai vị trí A, B cách nhau 615 m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118 m và 487 m. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B . Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là:



(A) 596,5 m.

(B) 671,4 m.

(C) 779,8 m.

(D) 741,2 m.

❖ **Câu 24.** Thể tích V (đơn vị: cm^3) của 1 kg nước tại nhiệt độ T (đơn vị: $^{\circ}C$) được tính bởi hàm số $V(T)$, $T \in [0; 30]$. Biết hàm số $V(T)$ có bảng biến thiên như sau:

T	0	T_1	30
$V'(T)$	—	0	+
$V(T)$	$V(0)$	$V(T_1)$	$V(30)$

Với $T_1 \approx 3,97^{\circ}C$. Hỏi thể tích $V(T)$ giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

(A) $(0; 3,97)$.

(B) $(0; 5)$.

(C) $(0; 10)$.

(D) $(0; 30)$.

Chương 1. TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

❖ **Câu 25.** Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hóa bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2, 0 \leq t \leq 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần). Hỏi số người bị nhiễm bệnh tăng trong khoảng thời gian nào?

- (A) (0; 10). (B) (0; 8). (C) (8; 10). (D) (8; 12).

❖ **Câu 26.** Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = t^2 - \frac{1}{6}t^3$ (m). Tìm thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

- (A) $t = 2$. (B) $t = 0, 5$. (C) $t = 2, 5$. (D) $t = 1$.

❖ **Câu 27.** Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin 12V được cho bởi công thức $P = 12I - 0,5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Tìm công suất tối đa của mạch điện.

- (A) 72. (B) 12. (C) $-\frac{1}{192}$. (D) $\frac{23}{2}$.

❖ **Câu 28.** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- (A) 289 (m/s). (B) 105 (m/s). (C) 111 (m/s). (D) 487 (m/s).

❖ **Câu 29.** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $G(x) = 0,25x^2(30 - x)$ trong đó x (mg) và $x > 0$ là lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng bao nhiêu?

- (A) 15 mg. (B) 30 mg. (C) 40 mg. (D) 20 mg.

❖ **Câu 30.** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $G(t) = 45t^2 - t^3$, (kết quả khảo sát được trong 10 tháng vừa qua). Nếu xem $G'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ

- (A) 25. (B) 30. (C) 20. (D) 15.

❖ **Câu 31.** Hằng ngày mực nước của con kênh xuống theo thủy triều, độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (h) trong ngày cho bởi công thức $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$. Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

- (A) $t = 10$ (h). (B) $t = 14$ (h). (C) $t = 15$ (h). (D) $t = 22$ (h).

❖ **Câu 32.** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$ (kết quả khảo sát được trong 8 tháng vừa qua). Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ mấy?

- (A) 12. (B) 30. (C) 20. (D) 15.

❖ **Câu 33.** Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ tăng thêm giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng một tháng thì sẽ có 2 căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng?

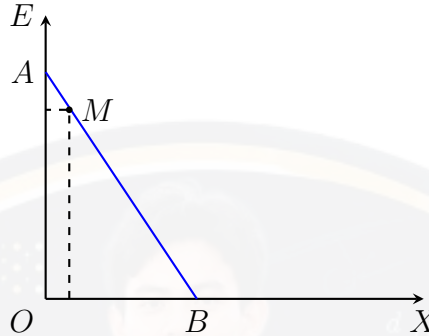
(A) 2.225.000.

(B) 2.100.000.

(C) 2.200.000.

(D) 2.250.000.

❖ **Câu 34.** Trên một đoạn đường giao thông có 2 con đường vuông góc với nhau tại O như hình vẽ. Một địa danh lịch sử có vị trí đặt tại M , vị trí M cách đường OE 125 m và cách đường OX 1 km. Vì lý do thực tiễn người ta muốn làm một đoạn đường thẳng AB đi qua vị trí M , biết rằng giá để làm 100 m đường là 150 triệu đồng. Chọn vị trí của A và B để hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất. Hỏi chi phí thấp nhất là bao nhiêu?



(A) 1,9063 tỷ đồng.

(B) 2,3965 tỷ đồng.

(C) 2,0963 tỷ đồng.

(D) 3 tỷ đồng.

❖ **Câu 35.** Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = -t^3 + 9t^2 + t + 10$, trong đó t tính bằng (s) và S tính bằng (m). Thời gian vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất là:

(A) $t = 5$ s.(B) $t = 6$ s.(C) $t = 2$ s.(D) $t = 3$ s.

❖ **Câu 36.** Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm tính theo công thức $V(t) = \frac{1}{100}(30t^3 - \frac{t^4}{4})(0 \leq t \leq 90)$. Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $v(t) = V'(t)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng

(A) Tốc độ bơm giảm từ phút 60 đến phút thứ 90.

(B) Tốc độ bơm luôn giảm.

(C) Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75.

(D) cả ba đáp án đều sai.

❖ **Câu 37.** Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã nhận thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $P(n) = 480 - 20n$ (g). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

(A) 14.

(B) 13.

(C) 12.

(D) 11.

❖ **Câu 38.** Để giảm nhiệt độ trong phòng từ 28°C , một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị $^\circ\text{C}$) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1; 10]$. Tìm nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động.

(A) $27,832^\circ\text{C}$.(B) $18,4^\circ\text{C}$.(C) $26,2^\circ\text{C}$.(D) $25,312^\circ\text{C}$.

❖ **Câu 39.** Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty

Chương 1. TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

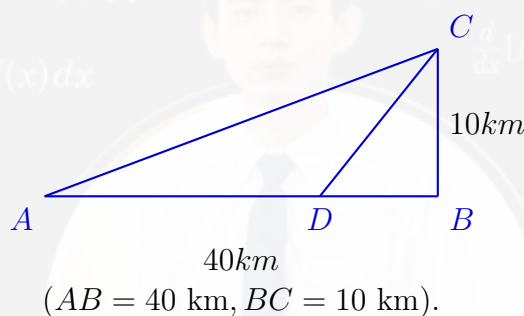
đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

- (A) 2.250.000. (B) 2.350.000. (C) 2.450.000. (D) 2.550.000.

❖ **Câu 40.** Một cửa hàng bán bưởi Doan Hùng với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng thì chỉ bán được khoảng 40 quả. Nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5.000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Biết giá nhập vào là 30.000 đồng/quả. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

- (A) 44.000đ. (B) 43.000đ. (C) 42.000đ. (D) 41.000đ.

❖ **Câu 41.** Một người cần đi từ khách sạn A bên bờ biển đến hòn đảo C . Biết rằng khoảng cách từ đảo C đến bờ biển là 10 km, khoảng cách từ khách sạn A đến điểm B trên bờ gần đảo C nhất là 40 km. Người đó có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy (như hình vẽ dưới đây). Biết kinh phí đi đường thủy là 5 USD/km, đi đường bộ là 3 USD/km. Hỏi người đó phải đi đường bộ một khoảng bao nhiêu để kinh phí nhỏ nhất?



- (A) $\frac{15}{2}$ km. (B) $\frac{65}{2}$ km. (C) 10 km. (D) 40 km.

❖ **Câu 42.** Có hai chiếc cọc cao 10 m và 30 m lần lượt đặt tại hai vị trí A, B . Biết khoảng cách giữa hai cọc bằng 24 m. Người ta chọn một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất nằm giữa hai chân cọc để giăng dây nối đến hai đỉnh C và D của cọc (như hình vẽ). Hỏi ta phải đặt chốt ở vị trí nào trên mặt đất để tổng độ dài của hai sợi dây đó là ngắn nhất?

- (A) $AM = 6\text{m}, BM = 18\text{ m}.$ (B) $AM = 7\text{m}, BM = 17\text{ m}.$
(C) $AM = 4\text{m}, BM = 20\text{ m}.$ (D) $AM = 12\text{m}, BM = 12\text{ m}.$

❖ **Câu 43.** Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm tính theo công thức $V(t) = \frac{1}{100} \left(30t^3 - \frac{t^4}{4} \right)$ ($0 \leq t \leq 90$). Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $v(t) = V'(t)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- (A) Tốc độ bơm giảm từ phút thứ 60 đến phút thứ 90..
(B) Tốc độ luôn bơm giảm..
(C) Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75..
(D) Cả A, B, C đều sai..

❖ **Câu 44.** Một sợi dây kim loại dài 60 cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a , đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r . Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỷ số $\frac{a}{r}$ nào sau đây đúng?

- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 1.

A

❖ **Câu 45.** Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

- (A) 10. (B) 12. (C) 16. (D) 24.

❖ **Câu 46.** Một cửa hàng bán lẻ bán 2500 cái ti vi mỗi năm. Chi phí gửi trong kho là 10\$ một cái mỗi năm. Để đặt hàng chi phí cố định cho mỗi lần đặt là 20\$ cộng thêm 9\$ mỗi cái. Cửa hàng nên đặt hàng bao nhiêu lần trong mỗi năm và mỗi lần bao nhiêu cái để chi phí hàng tồn kho là nhỏ nhất?

- (A) Đặt hàng 25 lần, mỗi lần 100 cái ti vi.
 (B) Đặt hàng 20 lần, mỗi lần 100 cái ti vi.
 (C) Đặt hàng 25 lần, mỗi lần 90 cái ti vi.
 (D) Đặt hàng 20 lần, mỗi lần 90 cái ti vi.

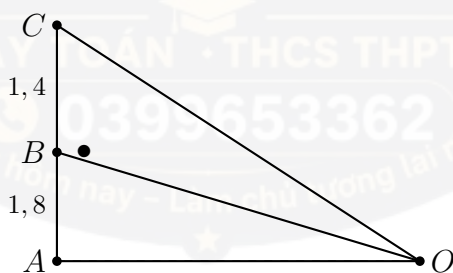
❖ **Câu 47.** Người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 180 mét thẳng hàng rào. Ở đó người ta tận dụng một bờ giậu có sẵn để làm một cạnh của hàng rào và rào thành mảnh đất hình chữ nhật. Hỏi mảnh đất hình chữ nhật được rào có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

- (A) $S_{\max} = 3600 \text{ m}^2$. (B) $S_{\max} = 4000 \text{ m}^2$.
 (C) $S_{\max} = 8100 \text{ m}^2$. (D) $S_{\max} = 4050 \text{ m}^2$.
 D

❖ **Câu 48.** Một lão nông chia đất cho con trai để người con canh tác riêng, biết người con sẽ được chọn miếng đất hình chữ nhật có chu vi bằng 800 (m). Hỏi anh ta chọn mỗi kích thước của nó bằng bao nhiêu để diện tích canh tác lớn nhất?

- (A) $200 \text{ m} \times 200 \text{ m}$. (B) $300 \text{ m} \times 100 \text{ m}$.
 (C) $250 \text{ m} \times 150 \text{ m}$. (D) Đáp án khác.

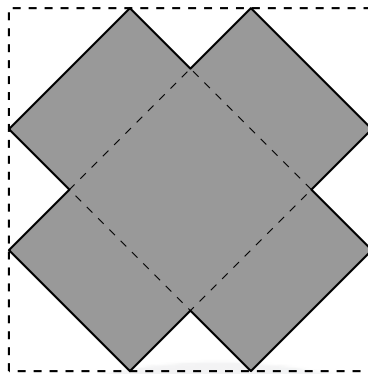
❖ **Câu 49.** Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4 mét và đặt ở độ cao 1,8 mét so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đó? Biết rằng góc BOC là góc nhọn.



- (A) $AO = 2,4m$. (B) $AO = 2m$.
 (C) $AO = 2,6m$. (D) $AO = 3m$.

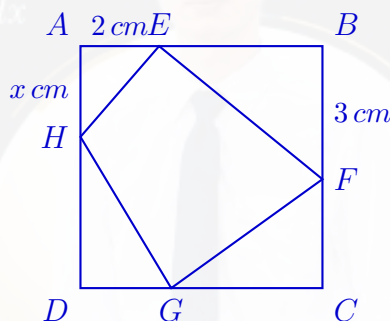
❖ **Câu 50.** Từ hình vuông có cạnh bằng 6 người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó người ta gấp thành hình hộp chữ nhật không nắp. Tính thể tích lớn

nhất của khối hộp.



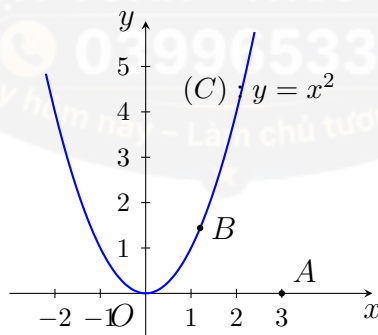
- (A) $8\sqrt{2}$. (B) $10\sqrt{2}$. (C) $9\sqrt{2}$. (D) $11\sqrt{2}$.

❖ **Câu 51.** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tính tổng $x + y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.



- (A) 7. (B) 5. (C) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. (D) $4\sqrt{2}$.

❖ **Câu 52.** Trên sân bay một máy bay cất cánh trên đường băng d (từ trái sang phải) và bắt đầu rời mặt đất tại điểm O . Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với mặt đất và cắt mặt đất theo giao tuyến là đường băng d . Dọc theo đường băng d cách vị trí O một khoảng 300 m về phía bên phải có người quan sát A . Biết máy bay chuyển động trong mặt phẳng (P) và độ cao y của máy bay xác định bởi $y = x^2$ (với x là độ dài máy bay dọc theo đường thẳng d tính từ O). Khoảng cách ngắn nhất từ người A đến máy bay là:

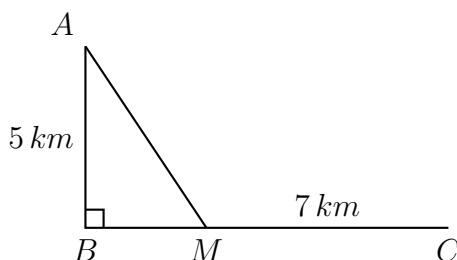


- (A) 300 (m). (B) $100\sqrt{5}$ (m). (C) 200 (m). (D) $100\sqrt{3}$ (m).

B

❖ **Câu 53.** Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển $AB = 5$ km. Trên bờ biển có một

cái kho ở vị trí C cách B một khoảng 7 km. Người canh hải đăng chèo đò từ A đến M trên bờ với vận tốc 4 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h. Vị trí điểm M cách B bao nhiêu để người đó đến kho nhanh nhất?



- (A) 0 km. (B) 7 km.
(C) $2\sqrt{5}$ km. (D) $\frac{14 + 5\sqrt{5}}{12}$ km.

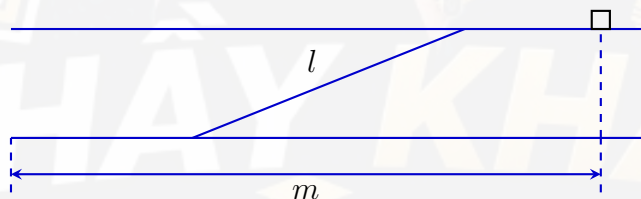
❖ **Câu 54.** Có một tấm gỗ hình vuông cạnh 200 cm. Cắt một tấm gỗ có hình tam giác vuông, có tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số 120 cm từ tấm gỗ trên sao cho tấm gỗ hình tam giác vuông có diện tích lớn nhất. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ này là bao nhiêu?

- (A) 40 cm. (B) $40\sqrt{3}$ cm. (C) 80 cm. (D) $40\sqrt{2}$ cm.

❖ **Câu 55.** Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính 10 cm, biết một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc trên đường kính của đường tròn.

- (A) 80 cm^2 . (B) 100 cm^2 . (C) 160 cm^2 . (D) 200 cm^2 .

❖ **Câu 56.** Trong bài thực hành quân sự, một chiến sĩ phải bơi qua một con sông rộng 100 m để tấn công mục tiêu ở bờ bên kia. Vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một nửa vận tốc chạy bộ. Biết dòng sông thẳng, mục tiêu cách vị trí xuất phát 1 km theo đường chim bay. Chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến mục tiêu nhanh nhất?



- (A) $\frac{400}{3}$. (B) $\frac{40}{33}$. (C) $\frac{100}{3}$. (D) $\frac{200}{\sqrt{3}}$.

❖ **Câu 57.** Để thiết kế một chiếc bể cá hình chữ nhật có chiều cao là 60 cm, thể tích là 96.000 cm^3 , người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70.000 đồng/ m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/ m^2 . Chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là

- (A) 83.200,000 đồng. (B) 382.000 đồng.
(C) 83.200 đồng. (D) 8.320.000 đồng.

❖ **Câu 58.** Ông Nam cần xây dựng một bể nước mưa có thể tích $V = 8 (\text{m}^3)$ dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp $\frac{4}{3}$ lần chiều rộng, đáy và nắp đổ bê tông, cốt thép; xung quanh xây bằng gạch và xi măng. Biết rằng chi phí trung bình là 980.000 đ/ m^2 và ở bể nắp để hở một khoảng hình vuông có diện tích bằng $\frac{2}{9}$ diện tích nắp bể. Tính chi phí thấp nhất mà ông Nam phải chi trả (làm

Chương 1. TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

tròn đến hàng nghìn đồng)

- (A) 22.770.000. (B) 27.657.000đ. (C) 20.965.000đ. (D) 23.235.000đ.

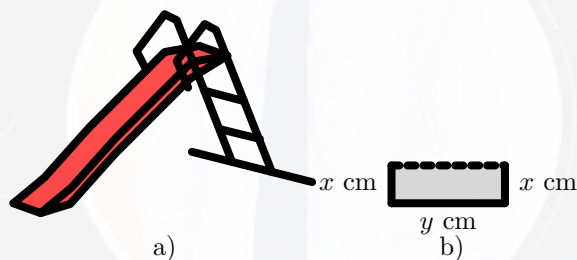
❖ **Câu 59.** Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách 300km. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là hằng số và E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng nào thì năng lượng tiêu hao của cá giảm?

- (A) (6; 10). (B) (6; 12). (C) (6; 9). (D) (9; 20).

❖ **Câu 60.** Một cửa hàng trung bình bán được 100 cái Tivi mỗi tháng với giá 14 triệu đồng một cái. Chủ cửa hàng nhận thấy rằng, nếu giảm giá bán mỗi cái 500 ngàn đồng thì số lượng tivi bán ra sẽ tăng thêm 10 cái mỗi tháng. Hỏi cửa hàng nên bán với giá bao nhiêu để doanh thu của cửa hàng là lớn nhất?

- (A) 8,5 triệu đồng. (B) 9,5 triệu đồng.
(C) 10,5 triệu đồng. (D) 11,5 triệu đồng.

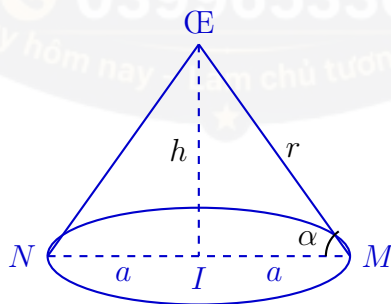
❖ **Câu 61.** Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em được uốn từ một tấm kim loại có bề rộng 80cm, mặt cắt được mô tả ở hình 2. Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích của mặt cắt càng lớn thì càng đảm bảo an toàn cho trẻ em.



Gọi S là diện tích mặt cắt. Với x đạt giá trị bằng bao nhiêu thì cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em?

- (A) 18. (B) 19. (C) 20. (D) 21.

❖ **Câu 62.** Cần phải đặt một ngọn điện ở phía trên và chính giữa một cái bàn hình tròn có bán kính a . Hỏi phải treo ở độ cao bao nhiêu để mép bàn được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C được biểu thị bởi công thức $C = k \frac{\sin \alpha}{r^2}$ (α là góc nghiêng giữa tia sáng và mép bàn, k là hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng).



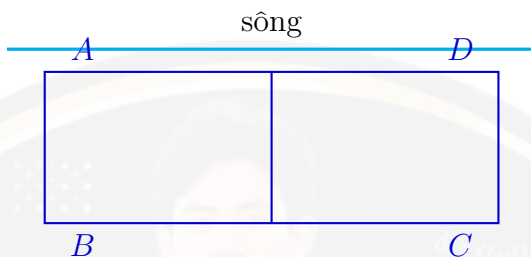
- (A) $h = \frac{3a}{2}$. (B) $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. (C) $h = \frac{a}{2}$. (D) $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

❖ **Câu 63.** Nhà Nam có một chiếc bàn tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$ m. Nam muốn mắc một bóng điện ở phía trên và chính giữa chiếc bàn sao cho mép bàn nhận được nhiều ánh sáng nhất. Biết

rằng cường độ sáng C của bóng điện được biểu thị bởi công thức $C = c \frac{\sin \alpha}{l^2}$ (α là góc tạo bởi tia sáng tới mép bàn và mặt bàn, c - hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng, l khoảng cách từ mép bàn tới bóng điện). Khoảng cách Nam cần treo bóng điện tính từ mặt bàn là

- (A) 1 m. (B) 1,2 m. (C) 1,5 m. (D) 2 m.

❖ **Câu 64.** Một chủ trang trại nuôi gia súc muốn rào thành hai chuồng hình chữ nhật sát nhau và sát một con sông, một chuồng cho cừu, một chuồng cho gia súc. Đã có sẵn 240 m hàng rào. Hỏi diện tích lớn nhất có thể bao quanh là bao nhiêu?



- (A) 4000 m². (B) 8400 m². (C) 4800 m². (D) 2400 m².

❖ **Câu 65.** Nhà của 3 bạn A, B, C nằm ở 3 vị trí tạo thành một tam giác vuông tại B , $AB = 10$ km; $BC = 25$ km và 3 bạn tổ chức họp mặt ở nhà bạn C . Bạn B hẹn chờ bạn A tại vị trí M trên đoạn đường BC . Từ nhà, bạn A đi xe buýt đến điểm hẹn M với tốc độ 30 km/h và từ M hai bạn A, B di chuyển đến nhà bạn C bằng xe máy với tốc độ 50 km/h. Hỏi điểm hẹn M cách nhà bạn B bao nhiêu km để bạn A đến nhà bạn C nhanh nhất?



- (A) 5 km. (B) 7,5 km. (C) 10 km. (D) 12,5 km.

❖ **Câu 66.** Một cửa hàng bán thú kiểng cần làm một chuồng thú hình chữ nhật sao cho phần cần làm hàng rào là 20 m. Chú ý rằng, hình chữ nhật này có hai cạnh trùng với mép của hai bức tường trong góc nhà nên không cần rào. Các cạnh cần rào của hình chữ nhật là bao nhiêu để diện tích của nó là lớn nhất?

- (A) Mỗi cạnh là 10 m. (B) Mỗi cạnh là 9 m.
(C) Mỗi cạnh là 12 m. (D) Mỗi cạnh là 5 m.

❖ **Câu 67.** Giám đốc của nhà hát A đang phân vân trong việc xác định giá vé xem các chương trình được chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng, nó sẽ quyết định nhà hát thu được lợi nhuận hay bị tổn thất. Theo những cuốn sổ ghi chép, ông ta xác định rằng: Nếu giá vé vào cửa là 20\$ thì trung bình có 1000 người đến xem. Nhưng nếu tăng tiền vé lên 1\$ mỗi người thì sẽ mất 100 khách hàng trong số trung bình. Trung bình mỗi khách hàng dành 1,8\$ cho việc uống nước trong nhà hát. Hãy giúp giám đốc nhà hát này xác định xem cần tính giá vé vào cửa bao nhiêu để tổng thu nhập lớn nhất.

- (A) giá vé là 14,1. (B) giá vé là 14.
(C) giá vé là 12,1. (D) giá vé là 15.

Chương 1. TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

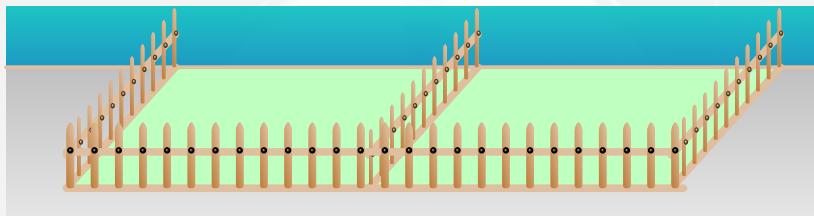
❖ **Câu 68.** Bác Tôm có cái ao có diện tích 50 m^2 để nuôi cá. Vụ vừa qua bác nuôi với mật độ 20 con/m^2 và thu được $1,5$ tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình, bác thấy cứ thả giảm đi 8 con/m^2 thì mỗi con cá thành phẩm thu được tăng thêm $0,5 \text{ kg}$. Vậy vụ tới bác phải mua bao nhiêu con cá giống để đạt được tổng năng suất cao nhất? (Giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi).

- (A) 488 con. (B) 512 con. (C) 1000 con. (D) 215 con.

❖ **Câu 69.** Từ một tấm bìa cứng hình vuông cạnh a , người ta cắt bốn góc bốn hình vuông bằng nhau rồi gấp lại tạo thành một hình hộp không nắp. Tìm cạnh của hình vuông bị cắt để thể tích hình hộp lớn nhất.

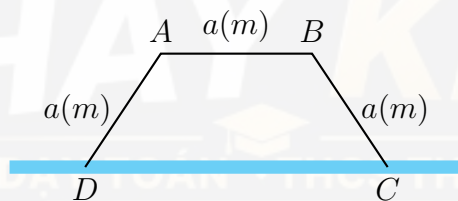
- (A) $\frac{a}{2}$. (B) $\frac{a}{8}$. (C) $\frac{a}{3}$. (D) $\frac{a}{6}$.

❖ **Câu 70.** Một người nông dân có $15\,000\,000$ đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (Hình 35). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là $60\,000$ đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là $50\,000$ đồng/mét, mặt giáp bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



- (A) 6250 m^2 . (B) 6520 m^2 . (C) 6052 m^2 . (D) 6205 m^2 .

❖ **Câu 71.** Một bác nông dân có ba tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $a(\text{m})$ và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như Hình 36 (bờ sông là đường thẳng CD không phải rào).



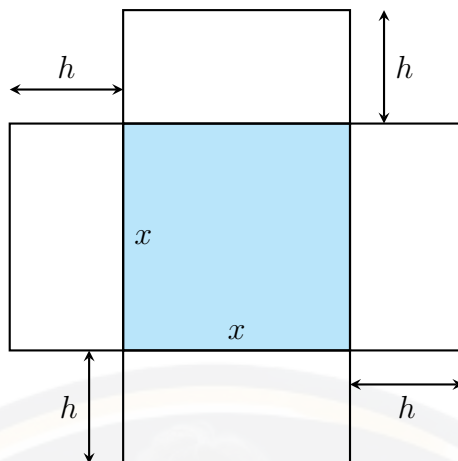
Hình 36

Hỏi bác có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?

- (A) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. (B) $\frac{5a^2\sqrt{3}}{4}$. (C) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. (D) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

❖ **Câu 72.** Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo mẫu như hình vẽ. Hộp có

đáy là một hình vuông cạnh x cm, chiều cao h cm và có thể tích 500 cm^3 .



Giá trị của x để diện tích các mảnh tôn nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

- (A) 8. (B) 7. (C) 9. (D) 10.

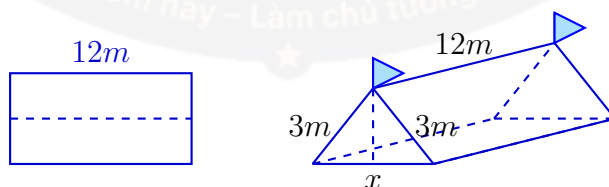
❖ **Câu 73.** Một thùng chứa nhiên liệu gồm phần ở giữa là một hình trụ có chiều dài h mét ($h > 0$) và hai đầu là các nửa hình cầu bán kính r ($r > 0$). Biết rằng thể tích của thùng chứa là $144000\pi \text{ m}^3$. Để sơn mặt ngoài của phần hình cầu cần 20000 đồng cho 1 m^2 , còn sơn mặt ngoài cho phần hình trụ cần 10000 đồng cho 1 m^2 . Để chi phí cho việc sơn diện tích mặt ngoài thùng chứa là nhỏ nhất thì r bằng bao nhiêu (biết bán kính r không được vượt quá 50 m)?

- (A) $r = 25$. (B) $r = 26,5$. (C) $r = 27,8$. (D) $r = 37,8$.

❖ **Câu 74.** Một thùng chứa nhiên liệu gồm phần ở giữa là một hình trụ có chiều dài h mét ($h > 0$) và hai đầu là các nửa hình cầu bán kính r ($r > 0$). Biết rằng thể tích của thùng chứa là $144000\pi \text{ m}^3$. Để sơn mặt ngoài của phần hình cầu cần 20000 đồng cho 1 m^2 , còn sơn mặt ngoài cho phần hình trụ cần 10000 đồng cho 1 m^2 . Để chi phí cho việc sơn diện tích mặt ngoài thùng chứa là nhỏ nhất thì r bằng bao nhiêu (biết bán kính r không được vượt quá 50 m)?

- (A) $r = 25$. (B) $r = 26,5$. (C) $r = 27,8$. (D) $r = 37,8$.

❖ **Câu 75.** Trong đợt chào mừng ngày 26/03/2016, trường THPT Lương Tài số 2 có tổ chức cho học sinh các lớp tham quan dã ngoại ngoài trời, trong số đó có lớp 12A11. Để có thể có chỗ nghỉ ngơi trong quá trình tham quan dã ngoại, lớp 12A11 đã dựng trên mặt đất bằng phẳng 1 chiếc lều bằng bạt từ một tấm bạt hình chữ nhật có chiều dài là 12 m và chiều rộng là 6 m bằng cách: Gập đôi tấm bạt lại theo đoạn nối trung điểm hai cạnh là chiều rộng của tấm bạt sao cho hai mép chiều dài còn lại của tấm bạt sát đất và cách nhau x m (xem hình vẽ). Tìm x để khoảng không gian phía trong lều là lớn nhất?



- (A) $x = 4$. (B) $x = 3$. (C) $x = 3\sqrt{3}$. (D) $x = 3\sqrt{2}$.

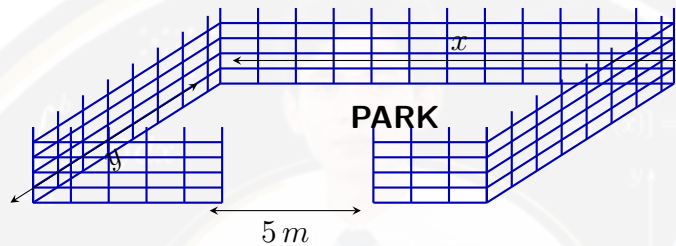
❖ **Câu 76.** Một ca sĩ có buổi biểu diễn âm nhạc với giá vé đã thông báo là 600 đô la thì sẽ có 1000 người đặt vé. Tuy nhiên sau khi đã có 1000 người đặt vé với giá 600 đô la thì nhà quản lý kinh doanh của ca sĩ này nhận thấy, cứ với mỗi 20 đô la giảm giá vé thì sẽ thu hút được thêm 100

Chương 1. TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

người mua vé nên ông quyết định mở ra một chương trình giảm giá vé. Tìm giá vé phù hợp để có được số tiền vé thu vào là cao nhất và số tiền đó là bao nhiêu?

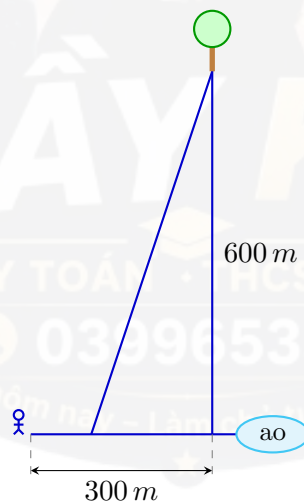
- (A) 400 đô la/vé, số tiền thu vào là 800.000 đô la.
- (B) 400 đô la/vé, số tiền thu vào là 640.000 đô la.
- (C) 100 đô la/vé, số tiền thu vào là 11.000 đô la.
- (D) 100 đô la/vé, số tiền thu vào là 110.000 đô la.

❖ **Câu 77.** Chủ của một nhà hàng muốn làm tường rào bao quanh 600 m^2 đất để làm bãi đỗ xe. Ba cạnh của khu đất sẽ được rào bằng một loại thép với chi phí 14.000 đồng một mét, riêng mặt thứ tư do tiếp giáp với mặt bên của nhà hàng nên được xây bằng tường gạch xi măng với chi phí là 28.000 đồng mỗi mét. Biết rằng cổng vào của khu đỗ xe là 5 m (nằm ở phía rào thép). Tìm chu vi của khu đất sao cho chi phí nguyên liệu bỏ ra là ít nhất, chi phí đó là bao nhiêu?



- (A) 100 m, 1.610.000 đồng.
- (B) 100 m, 1.680.000 đồng.
- (C) 50 m, 1.610.000 đồng.
- (D) 50 m, 1.680.000 đồng.

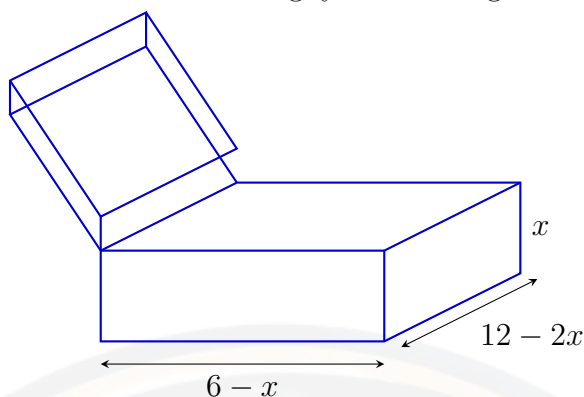
❖ **Câu 78.** Một người phải đi đến cái cây quý trong rừng càng nhanh càng tốt. Con đường mòn chính mà người ta hay đi được miêu tả như sau: Từ vị trí người đó đi thẳng 300 m gặp một cái ao nên không đi tiếp được nữa, rẽ trái đi thẳng 600 m đường rừng sẽ đến cái cây đó. Biết rằng nếu đi đường mòn thì anh ta có thể chạy với tốc độ 160 m/phút, còn khi qua rừng anh ta chỉ có thể đi với tốc độ 70 m/phút.



- (A) Đi thẳng từ vị trí người đó đứng đến cái cây..
- (B) Đi theo đường mòn 292 m rồi rẽ trái đi đến cái cây..
- (C) Đi theo cách truyền thống ở trên..
- (D) Đi thẳng 8 m rồi rẽ trái đi đến cái cây..

❖ **Câu 79.** Một hộp đựng chocolate bằng kim loại có hình dạng lúc mở nắp như hình vẽ dưới đây. Một phần tứ diện phía trên của hộp được dải một lớp bơ sữa ngọt, phần còn lại phía dưới chứa

đầy chocolate nguyên chất. Với kích thước như hình vẽ, gọi $x = x_0$ là giá trị làm cho hộp kim loại có thể tích lớn nhất, khi đó thể tích chocolate nguyên chất có giá trị là V_0 . Tìm V_0 .



- (A) 48 dvtt. (B) 16 dvtt. (C) 64 dvtt. (D) $\frac{64}{3}$ dvtt.

❖ **Câu 80.** Tính thể tích khối rubic mini (mỗi mặt của rubic có 9 ô vuông), biết chu vi mỗi ô (ô hình vuông trên một mặt) là 4 cm.

- (A) 27 cm^3 . (B) 1728 cm^3 . (C) 1 cm^3 . (D) 9 cm^3 .

❖ **Câu 81.** Do nhu cầu sử dụng các nguyên liệu thân thiện với môi trường. Một công ty sản xuất bóng tennis muốn thiết kế một hộp làm bằng giấy cứng để đựng 4 quả bóng tennis có bán kính bằng r , hộp đựng có dạng hình hộp chữ nhật theo 2 cách như sau:

Cách 1: Mỗi hộp đựng 4 quả bóng tennis được đặt dọc, đáy là hình vuông cạnh $2r$, cạnh bên bằng $8r$.

Cách 2: Mỗi hộp đựng 4 quả bóng tennis được xếp theo một hình vuông, đáy của hộp là hình vuông cạnh bằng $4r$, cạnh bên bằng $2r$.

Gọi S_1 là diện tích toàn phần của hộp theo cách 1, S_2 là diện tích toàn phần của hộp theo cách 2. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

- (A) $\frac{9}{8}$. (B) 1. (C) 2. (D) $\frac{2}{3}$.

❖ **Câu 82.** Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chở tối đa được 60 hành khách một chuyến. Nếu một chuyến chở được m hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính là $(30 - \frac{5m}{2})^2$ đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗi chuyến xe là lớn nhất.

- (A) 30. (B) 40. (C) 50. (D) 60.

❖ **Câu 83.** Một cửa hàng bán bưởi Đoàn Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5.000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

- (A) 44.000đ. (B) 43.000đ. (C) 42.000đ. (D) 41.000đ.

❖ **Câu 84.** Công ty du lịch Ban Mê dự định tổ chức một tua xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tua là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tua 100 ngàn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham

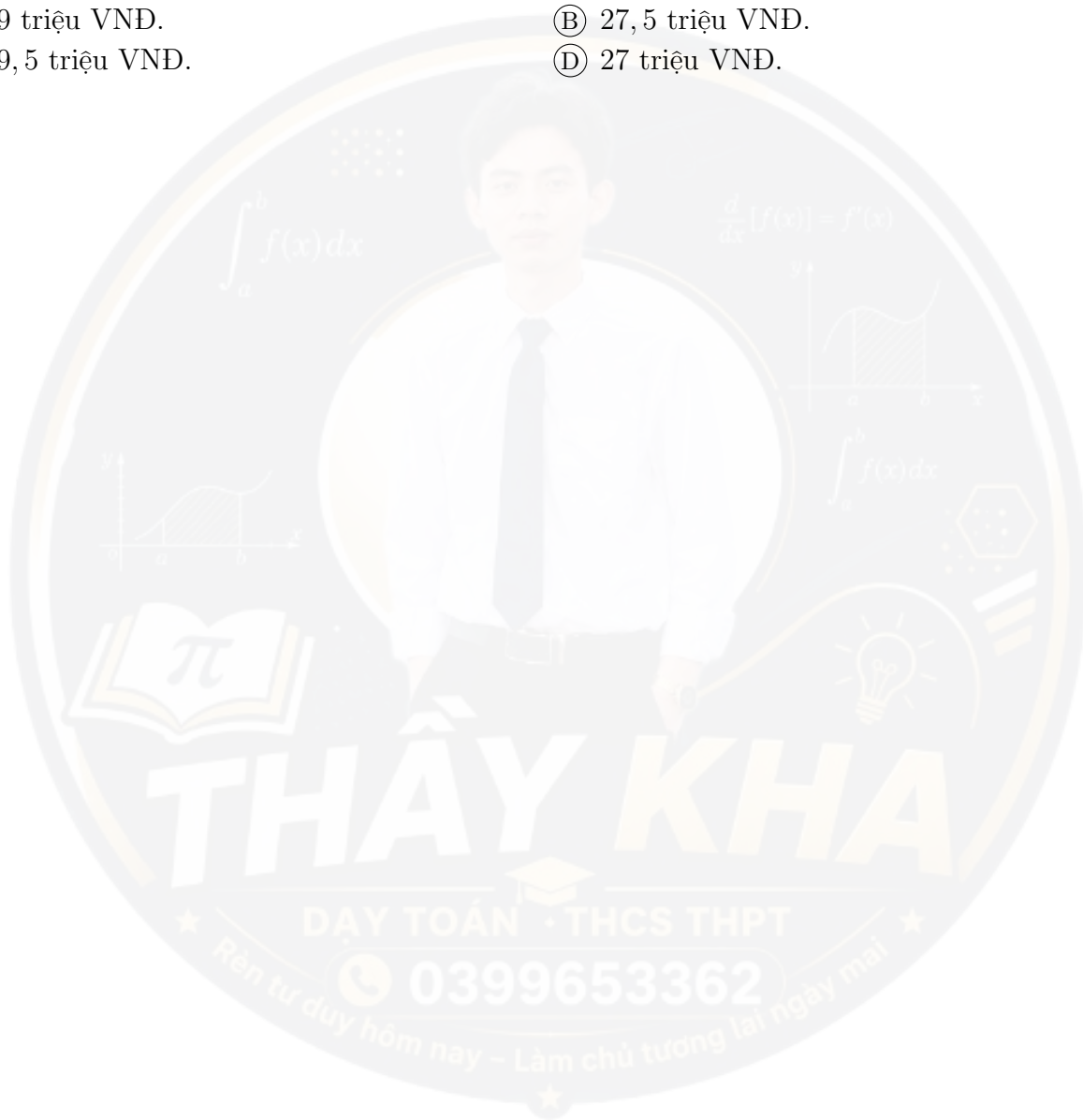
Chương 1. TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

gia. Hỏi công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất.

- (A) 1375000. (B) 3781250. (C) 2500000. (D) 3000000.

↔ **Câu 85.** Một doanh nghiệp bán xe gắn máy trong đó có loại xe A bán ế nhất với giá mua vào mỗi chiếc xe là 26 triệu VND và bán ra 30 triệu VND, với giá bán này thì số lượng bán một năm là 600 chiếc. Cửa hàng cần đẩy mạnh việc bán được loại xe này nên đã đưa ra chiến lược kinh doanh giảm giá bán và theo tính toán của CEO nếu giảm 1 triệu VND mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi cửa hàng định giá bán loại xe đó bao nhiêu thì doanh thu loại xe đó của cửa hàng đạt lớn nhất.

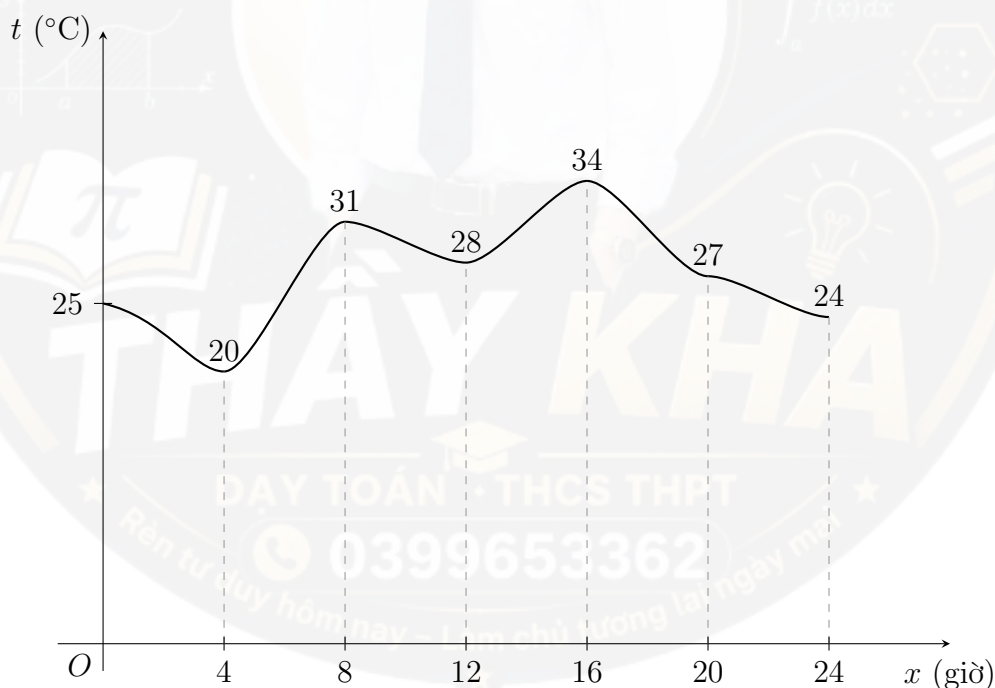
- (A) 29 triệu VND. (B) 27,5 triệu VND.
(C) 29,5 triệu VND. (D) 27 triệu VND.



Bài 1. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$.

- a) Phương trình vận tốc là $v(t) = 3t^2 - 6t + 9$.
- b) Phương trình hàm gia tốc là $a(t) = 6t - 12$.
- c) Vận tốc của chất điểm tăng khi $t \in (0; 1) \cup (3; +\infty)$.
- d) Vận tốc của chất điểm giảm khi $t \in (1; 3)$.

Bài 2. Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày.



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là 28°C .
- b) Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là 20°C .
- c) Thời điểm nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc 16 giờ.
- d) Thời điểm nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc 4 giờ.

Bài 3. Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá

Chương 2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000 đồng.

- a) Nếu cơ sở bán mỗi chiếc khăn với giá 37.000 đồng thì số tiền lãi sau 1 tháng là 44 triệu đồng.
- b) Sau khi cơ sở tăng giá mỗi chiếc khăn thêm x (nghìn đồng) thì tổng số lợi nhuận một tháng của cơ sở được tính theo công thức $f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000$.
- c) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì số khăn bán ra giảm 800 chiếc.
- d) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần bán với giá 39.000 đồng.

Bài 4. Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng được tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức:

$$V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4 \text{ với } 0 \leq t \leq 0,5$$

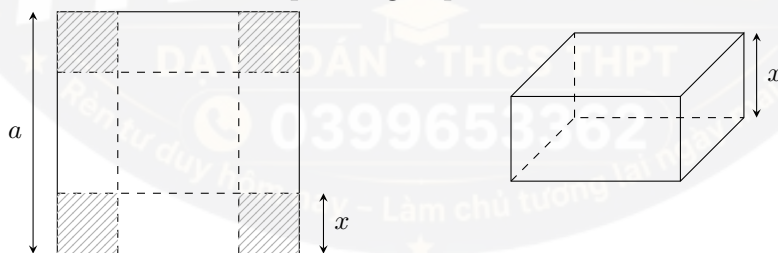
Gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \leq t \leq 0,5$.

- a) Lượng xăng ban đầu trong bình xăng là 1 lít.
- b) Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là 41,5 lít.
- c) $V'(t) = 300(2t - 3t^2) + 4$, với $0 \leq t \leq 0,5$.
- d) Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất.

Bài 5. Ông Thanh nuôi cá chim ở một cái ao có diện tích là 50m^2 . Vụ trước ông nuôi với mật độ là 20 con/ m^2 và thu được 1,5 tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi 8 con/ m^2 thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên 0,5 kg. Giả sử không có hao hụt khi nuôi.

- a) Số cá giống mà ông Thanh đã thả trong vụ vừa qua là 1500 con.
- b) Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phẩm trong vụ vừa qua là 1,5 (kg).
- c) Tổng trọng lượng cá thu được ở vụ này là $F(x) = -0,0652x^2 + 16x + 1500$ (kg).
- d) Vụ tới ông Thanh phải thả 488 con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất.

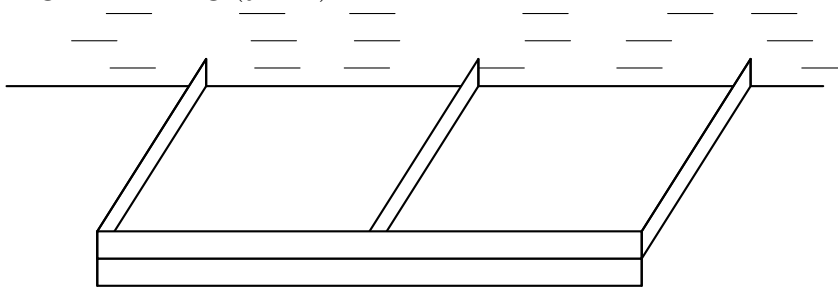
Bài 6. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a . Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp.



- a) Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\frac{a}{12}$.
- b) Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\frac{a}{6}$.
- c) Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng $\frac{2a^3}{27}$.
- d) Thể tích hộp lớn nhất bằng $\frac{a^3}{27}$.

Bài 7. Một người nông dân có 15.000.000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với

mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50000 đồng một mét. Gọi x là chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E (trong ba mặt song song, $x > 0$). Gọi y là chiều dài mặt hàng rào hình chữ E song song với bờ sông ($y > 0$).



- Số tiền phải làm là: $x \cdot 60000 + y \cdot 3 \cdot 50000 = 15000000$ đồng.
- Diện tích đất: $S = x \cdot y = x \cdot \frac{500 - 5x}{2} = 250x - \frac{5}{2}x^2$.
- Diện tích lớn nhất của đất rào thu được $\max_{(0; +\infty)} S = 6250$ (m^2).
- Diện tích lớn nhất của đất rào thu được khi chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E là 50 m.

Bài 8. Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian t cho bởi công thức $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$, với y được tính theo mg/l và t được tính theo giờ, $t \geq 0$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Đồ thị hàm số $y(t)$ có một đường tiệm cận ngang và một đường tiệm cận xiên.
- Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = 5$.
- Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = \frac{1}{3}$.
- Sau một thời gian đủ dài, nồng độ oxygen trong hồ sẽ bão hòa và đạt ngưỡng 5 mg/l .

Bài 9. Dân số của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức

$$f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5} \quad (f(t) \text{ tính bằng nghìn người})$$

- Số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người
- Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 23 nghìn người
- Xét f là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, vậy hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$
- Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Vào năm 1998 thì tốc độ tăng dân số là 0,125 nghìn người/năm

Bài 10. Dân số của một quốc gia sau t (năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức: $N(t) = 100e^{0,012t}$, $N(t)$ được tính bằng triệu người và $0 \leq t \leq 50$.

- Dân số của quốc gia vào năm 2030 là 108,763 (triệu người)
- Dân số của quốc gia vào năm 2035 là 125,488 (triệu người)
- Xem $N(t)$ là hàm số của biến t xác định trên đoạn $[0; 50]$. Khi đó hàm số $N(t)$ đồng biến trên đoạn $[0; 50]$
- Đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Vậy vào năm 2040 thì tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm

Bài 11. Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y = t^3 - 12t + 3, t \geq 0$.

- Hàm gia tốc của vật là $a = y'$.
- Hàm vận tốc của vật là $v(t) = 3t^2 - 12$.
- Tại thời điểm $t = 1$ thì hạt đang chuyển động lên trên.
- Trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 3$ thì quãng đường mà hạt đi là 23 m.

Bài 12. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B . Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm được biểu diễn bởi công thức: $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ triệu đồng (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

- Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.
- Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 600 triệu đồng.
- Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm ($0 \leq x \leq 100$) cho B được biểu diễn bởi công thức $H(x) = -0,001x^3 + 15x - 100$.
- Bên A bán cho B khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

Bài 13. Tại một cơ sở sản xuất nước tinh khiết, nhân viên phụ trách sản xuất cho biết, nếu mỗi ngày cơ sở này sản xuất x (m^3) nước tinh khiết thì phải chi phí các khoản sau: 5 triệu đồng chi phí cố định; 0,15 triệu đồng cho mỗi mét khối sản phẩm; $0,0005x^2$ chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết công suất tối đa mỗi ngày của cơ sở này là $200m^3$. Gọi $C(x)$ là chi phí sản xuất x (m^3) sản phẩm mỗi ngày và $\bar{c}(x)$ là chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm. Khi đó:

- $C(x) = 0,0005x^2 + 0,15x + 5$.
- Chi phí sản xuất $100m^3$ nước tinh khiết là 20 triệu đồng.
- $\bar{c}(x) = 0,0005x + 0,15 + \frac{5}{x}$.
- Chi phí trung bình giảm xuống khi sản lượng nước tinh khiết trong ngày không vượt quá $100m^3$.

Bài 14. Tại một cơ sở sản xuất nước tinh khiết, nhân viên phụ trách sản xuất cho biết, nếu mỗi ngày cơ sở này sản xuất x (m^3) nước tinh khiết thì phải chi phí các khoản sau: 5 triệu đồng chi phí cố định; 0,15 triệu đồng cho mỗi mét khối sản phẩm; $0,0005x^2$ chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết công suất tối đa mỗi ngày của cơ sở này là $200m^3$. Gọi $C(x)$ là chi phí sản xuất x (m^3) sản phẩm mỗi ngày và $\bar{c}(x)$ là chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm. Khi đó

- $C(x) = 0,0005x^2 + 0,15x + 5$.
- Chi phí sản xuất $100m^3$ nước tinh khiết là 20 triệu đồng.
- $\bar{c}(x) = 0,0005x + 0,15 + \frac{5}{x}$.
- Chi phí trung bình giảm xuống khi sản lượng nước tinh khiết trong ngày không vượt quá $100m^3$.

Bài 15. Khi nuôi tôm thẻ trong ao, một kỹ sư thủy sản đã thống kê được nếu mỗi mét vuông mặt ao thả x con tôm giống thì cuối mỗi vụ con tôm có cân nặng trung bình là $108 - x^2$ (gam).

- Sau mỗi vụ khối lượng tôm trung bình trong mỗi mét vuông mặt ao là $(108 - x^2)x$.

- b) Khi thả 10 con tôm giống/ m^2 thì lượng tôm thu được là $0,8 \text{ kg}/m^2$.
- c) Để sản lượng tôm lớn nhất thì nên thả 6 con tôm/ m^2 .
- d) Để lượng tôm thu được tăng lên thì mật độ tôm giống thả vào ao là từ 6 đến $10 \text{ con}/m^2$.

Bài 16. Một vật chuyển động theo hàm số $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t$ (m), với $t \geq 0$ và t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và $s(t)$ là vị trí của vật tại thời điểm t .

- a) Quãng đường mà vật chuyển động được tại thời điểm $t = 3(s)$ là $27(m)$.
- b) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 1(s)$ là $6(m/s)$.
- c) Tại thời điểm vật đạt vận tốc $v(t) = 18(m/s)$ thì quãng đường đi được từ khi bắt đầu chuyển động là $6(m)$.
- d) Vận tốc của vật tăng trong khoảng thời gian từ $t = 0(s)$ đến $t = 1(s)$.

Bài 17. Ông M mua tặng vợ món quà đặt trong chiếc hộp chữ nhật thể tích 32 (đvtt) có đáy là hình vuông và không nắp. Ông quyết định mạ vàng chiếc hộp, độ dày lớp mạ không đổi. Gọi h và x lần lượt là chiều cao và cạnh đáy.

- a) Công thức tính thể tích chiếc hộp là $V = x^2h$.
- b) Diện tích các mặt ngoài của chiếc hộp là $S = 2x^2 + 4xh$.
- c) Diện tích tất cả các mặt được mạ vàng là $S_{MV} = 2x^2 + 4xh$.
- d) Khi cạnh đáy của chiếc hộp $x > 4$ thì x càng lớn, lượng vàng được mạ càng tăng.

Bài 18. Giả sử chi phí tiền xăng C nghìn đồng khi xe đi được 100 km phụ thuộc vào tốc độ trung bình v (km/h) trên cả đoạn đường theo công thức $C(v) = \frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v$, với $0 < v \leq 120$.

- a) Nếu tài xế lái xe với tốc độ trung bình $40 \text{ km}/h$ thì chi phí là 500 nghìn đồng.
- b) $C'(v) = -\frac{16000}{v^2} + \frac{5}{2}$ với $0 < v < 120$.
- c) Nếu tốc độ càng lớn thì chi phí càng giảm.
- d) Chi phí tối thiểu trên đoạn đường tối đa $50 \text{ km}/h$ là 445 nghìn đồng.

Bài 19. Một công ty phát hành một video quảng cáo trên mạng xã hội. Số lượng người xem tích lũy $P(t)$ (đơn vị: người) sau thời gian t (đơn vị: ngày) được mô hình hóa bởi hàm số: $P(t) = \frac{100000}{1+999 \cdot e^{-0,5t}}$. Số lượng người xem tối đa dự kiến trong tệp khách hàng tiềm năng là 100000 người. Tốc độ lan truyền video tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $P'(t)$.

- a) Tại thời điểm $t = 0$, đã có 100 người xem video này.
- b) Để đạt được 90 000 người xem, công ty cần khoảng 18 ngày.
- c) Sau 10 ngày, tổng số lượng người xem video đạt hơn 15 000 người.
- d) Tại thời điểm $t = 5$, tốc độ lan truyền của video vẫn đang trên đà tăng.

Bài 20. Một thùng trộn tại một nhà máy sản xuất kem hiện chứa 2000 lít nước, trong đó có 5 kg đường đã được trộn. Một vòi nước sẽ được mở với tốc độ 50 lít mỗi phút vào thùng, cùng lúc đường được đổ vào thùng với tốc độ 1 kg mỗi phút.

- a) Khối lượng đường sau t phút là $1000t + 5000$ gam.
- b) Nồng độ đường trong thùng luôn tăng khi sản xuất trong thời gian dài liên tục.
- c) Nồng độ đường sau t phút là $f(t) = \frac{1000t + 5000}{50t + 2000}$.

Chương 2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

- d) Tiêu chuẩn không quá 20gam/lt . Nhà máy không thể sản xuất liên tục trong một thời gian dài.

Bài 21. Một đại lý xăng dầu cần làm một bồn chứa dầu hình trụ bằng tôn thể tích $V = 54\pi$ (m^3). Gọi r, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của cái bồn dầu.

- a) Công thức để tính thể tích bồn chứa dầu là $V = \pi r^2 h$.
b) Để diện tích toàn phần nhỏ nhất thì bán kính $r = 3(m)$.
c) Diện tích toàn phần của bồn chứa dầu theo bán kính r là $S(r) = 2\pi \left(\frac{54}{r} + r^2 \right)$.
d) Biết chi phí vật liệu tôn là 500.000 đồng/ m^2 . Khi đó, số tiền ít nhất để mua nguyên vật liệu làm bồn chứa dầu là khoảng $84,8$ triệu đồng.

Bài 22. GigaCloud dịch vụ lưu trữ. Giá cước x (triệu đồng), khách hàng $S(x) = \sqrt{45 - x}$ (nghìn). Chi phí cố định 10 tỷ đồng, chi phí biến đổi $C_v = 3S^2$ tỷ đồng.

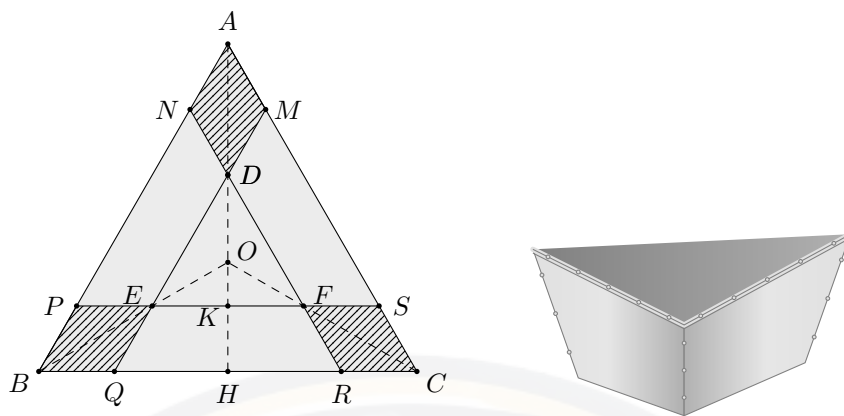
- a) Giá cước 36 triệu đồng/tháng thì công ty GigaCloud đạt lợi nhuận ròng hàng tháng cao nhất.
b) Doanh thu của công ty GigaCloud là $R(x) = xS(x) = x\sqrt{45 - x}$ tỷ đồng.
c) Chi phí cố định của công ty là $C_f = 10$ tỷ đồng mỗi tháng.
d) Lợi nhuận của công ty được biểu diễn bởi hàm số $L(x) = x\sqrt{45 - x} + 3x - 145$.

Bài 23. Chi phí nhiên liệu của một chiếc tàu chạy trên sông được chia làm hai phần. Phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghìn đồng/giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v = 10$ (km/giờ) thì phần thứ hai bằng 30 nghìn đồng/giờ.

- a) Khi vận tốc $v = 10$ (km/giờ) thì chi phí nguyên liệu cho phần thứ nhất trên 1 km đường sông là 48000 đồng.
b) Hàm số xác định tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường sông với vận tốc x (km/h) là $f(x) = \frac{480}{x} + 0,03x^2$.
c) Khi vận tốc $v = 30$ (km/giờ) thì tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường sông là 43000 đồng.
d) Vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường sông nhỏ nhất là $v = 20$ (km/giờ).

Bài 24. Anh Việt có một tấm tôn hình tam giác đều ABC với cạnh bằng 6 (dm). Bên trong tấm nhôm này anh vẽ thêm tam giác đều DEF sao cho hai tam giác có cùng trọng tâm, đồng thời các cạnh tương ứng song song nhau. Anh Việt muốn làm một chậu đựng nước dạng hình chóp cụt tam giác đều với đáy nhỏ là DEF và đáy lớn để hở. Anh cắt bỏ ba hình bình hành ở ba góc của tam giác ABC là $AMDN$, $BPEQ$, $CSFR$ (như hình vẽ). Kẻ đường cao AH và gọi O là trọng

tâm tam giác ABC . Đặt $x = DN = DM$, ($0 < x < 2$).

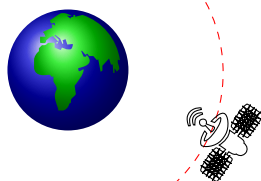


- $NP = QR = SM = 6 - 2x$ (dm).
- $AH = 3\sqrt{3}$ (dm) và $OA = 2\sqrt{3}$ (dm).
- $AD = x\sqrt{3}$ (dm) và $DE = 6 - 3x$ (dm).
- Sau khi gấp hình vuông và dùng keo dán kín các đoạn gấp vào với nhau gồm DM và DN , EP với EQ , FS với FR , sức chứa tối đa của chậu xấp xỉ 4,54 (lít).

Bài 25. Đậu đỗ là một loại thực phẩm quen thuộc trong bữa ăn của người Việt Nam. Ngoài giá trị dinh dưỡng cao, đậu đỗ còn có nhiều công dụng tuyệt vời cho sức khỏe và sắc đẹp như: chống oxy hóa, giúp cơ bắp con người khỏe mạnh, tăng cường sức khỏe cho tim mạch con người, lợi ích cho hệ tiêu hóa, bổ thận, cung cấp vitamin bổ dưỡng cho cơ thể, đào thải độc tố, giải độc, tốt cho hệ miễn dịch, giúp huyết áp ổn định, da đẹp. Cây đậu đỗ khi trồng có chiều cao 6 cm. Khảo sát cho thấy độ cao tính bằng centimet của cây đậu đỗ tại thời điểm t kể từ khi được trồng được cho bởi hàm số $h(t) = -0,005t^4 + bt^3 + c$ (trong đó $b, c \in \mathbb{R}$), với t tính theo tuần. Giả sử $h'(t)$ là tốc độ tăng chiều cao của cây đậu đỗ sau khi trồng (đơn vị của $h'(t)$: cm/tuần). Biết $h'(5) = 5$.

- Hàm số $h(t)$ có công thức $h(t) = -0,005t^4 + 0,1t^3$.
- Giai đoạn tăng trưởng của cây đậu đỗ đó kéo dài 15 tuần.
- Chiều cao tối đa của cây đậu đỗ đó là 90 cm.
- Vào thời điểm cây đậu đỗ đó phát triển nhanh nhất thì chiều cao của cây là 56 cm.

Bài 26. Ta coi Trái Đất là hình cầu hoàn hảo với bán kính $R = 6370$ (km) và diện tích toàn phần là $S = 4\pi R^2$. Các phi hành gia từ tàu vũ trụ chỉ có thể nhìn thấy một phần bề mặt Trái Đất. Ở độ cao h , phần diện tích Trái Đất các phi hành gia có thể nhìn thấy sẽ được tính theo công thức $S_T = 2\pi R^2 \left(1 - \frac{R}{R+h}\right)$, trong đó R là bán kính Trái Đất. Gọi K là tỉ số diện tích bề mặt Trái Đất nhìn thấy được ở độ cao h với diện tích toàn phần của Trái Đất.

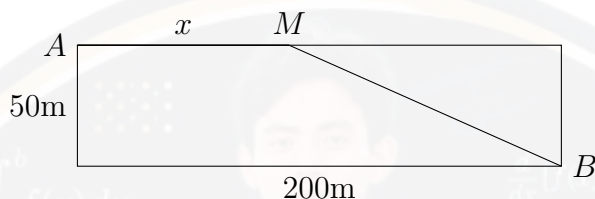


- Công thức tính K là $K = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{h}{R+h}\right)$

Chương 2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

- b) Trong một chuyến bay của tàu con thoi, các phi hành gia đã thực hiện một hoạt động ngoài tàu ở độ cao 280 km. Có 2,5% (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) diện tích bề mặt Trái Đất có thể nhìn thấy ở độ cao đó
- c) Muốn nhìn thấy $\frac{1}{4}$ diện tích bề mặt Trái Đất, các phi hành gia cần đưa tàu con thoi đạt đến độ cao 6470 km
- d) Khi độ cao h càng tăng lên thì K càng tăng nhưng không vượt quá 50%

Bài 27. Có một bể bơi hình chữ nhật rộng 50 m, dài 200 m. Một vận động viên xuất phát từ điểm A , chạy đến điểm M trên cạnh dài và bơi từ M đến điểm B ở góc đối diện. Biết vận tốc chạy 4,8 m/s, vận tốc bơi 2,4 m/s. Gọi x (m) là khoảng cách từ A đến M ($0 < x < 200$).



- a) Thời gian vận động viên chạy từ A đến M là: $\frac{x}{4,8}$ giây.
- b) Thời gian vận động viên bơi từ M đến B là: $\frac{\sqrt{(200-x)^2 + 50^2}}{2,4}$ giây.
- c) Nếu $AM = 100$ m thì tổng thời gian di chuyển từ A đến B ít hơn 1 phút.
- d) Vận động viên chọn điểm M cách A khoảng 171 mét thì đến B nhanh nhất.

Bài 28. Một công ty du lịch in tạp chí. Chi phí xuất bản x cuốn là $C(x) = x^2 - 2000x + 10^7$ (đồng). Chi phí phát hành mỗi cuốn là 4000 (đồng).

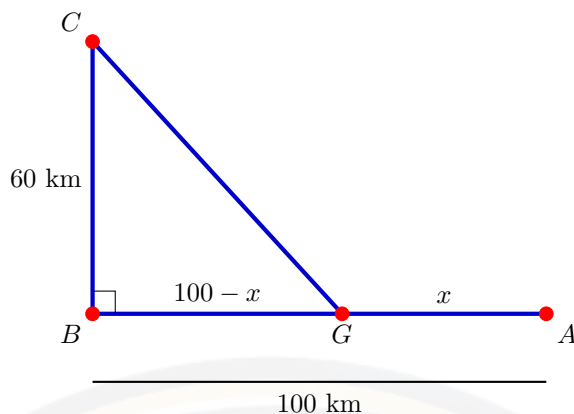
- a) Chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí là: $f(x) = \frac{x^2 - 2000x + 10^7}{x} + 4000$ (đồng).
- b) Chi phí xuất bản và phát hành 5000 cuốn tạp chí là 45 triệu đồng.
- c) Chi phí trung bình mỗi cuốn bắt đầu tăng khi số lượng đạt từ 3163 cuốn trở lên.
- d) Chi phí trung bình thấp nhất là 3162 đồng.

Bài 29. Một công ty bất động sản có 150 căn hộ cho thuê, biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng mỗi tháng thì mỗi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 5 căn hộ bị bỏ trống. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- a) Khi giá cho thuê mỗi căn hộ là 2.200.000 đồng thì có 10 căn hộ bị trống.
- b) Khi giá cho thuê mỗi căn hộ là 2.700.000 đồng thì thu nhập của công ty cao nhất.
- c) Thu nhập cao nhất của công ty đạt được là 312.500.000 đồng.
- d) Khi thu nhập công ty cao nhất thì số căn hộ có người thuê là 125 căn hộ.

Bài 30. Đường dây điện 110KV kéo từ trạm phát (điểm A) trong đất liền ra Côn Đảo (điểm C). Biết $BC = 60\text{km}$, $AB = 100\text{km}$, góc $\widehat{ABC} = 90^\circ$, như hình vẽ. Mỗi km dây điện dưới nước

chi phí là $5000USD$, chi phí cho mỗi km dây điện trên bờ là $3000USD$. Đặt $x = AG$.

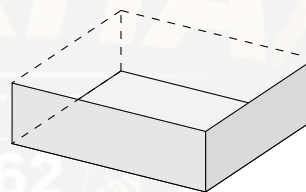
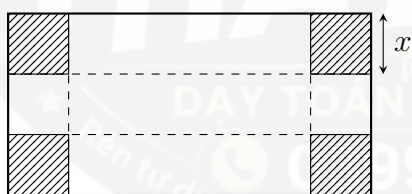


- Khi $x = 20km$ thì đường dây điện nối từ C về G dài $100km$.
- Khi $x = 20km$ thì tổng chi phí mắc điện là $560.000USD$.
- Tổng chi phí mắc điện nhỏ nhất khi $x = 50km$.
- Tổng chi phí mắc điện nhỏ nhất là $540.000USD$.

Bài 31. Một cửa hàng bán vải thiều với giá bán là 30000 đồng/ $1kg$. Giá nhập vào là 16000 đồng/ $1kg$. Với giá này cửa hàng ước chừng bán được 100 kg /ngày. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính cứ giảm 1000 đồng/ $1kg$ thì số vải thiều bán được sẽ tăng thêm là 10 kg .

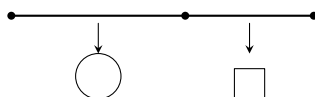
- Nếu giữ nguyên giá ban đầu, lợi nhuận theo ngày của cửa hàng là 1400000 đồng.
- Nếu giá bán là 20000 đồng/ $1kg$, cửa hàng bán được 250 kg /ngày.
- Gọi x (nghìn đồng) là giá tiền mà cửa hàng dự định bán ($16 < x < 30$), khi đó lợi nhuận theo ngày của cửa hàng được xác định bởi hàm số $f(x) = (x - 16)(400 - 10x)$.
- Lợi nhuận tối đa theo ngày của cửa hàng là 1600000 đồng.

Bài 32. Một tấm kim loại hình chữ nhật có kích thước $3m \times 8m$. Người ta cắt mỗi góc một hình vuông có cạnh là x (m) để tạo ra hình hộp chữ nhật không nắp. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:



- Hình vuông được cắt ra ở mỗi góc có cạnh x thỏa $0 < x < \frac{3}{2}$ (m).
- Diện tích mặt đáy của chiếc hộp là $S = (8 - 2x)(3 - 2x)$ (m^2).
- Thể tích của chiếc hộp là $V = 4x^3 + 22x^2 + 24x$ (m^3).
- Chiếc hộp có thể tích lớn nhất bằng $\frac{2}{3}$ (m^3).

Bài 33. Một sợi dây kim loại dài a (cm). Người ta cắt đoạn dây đó thành hai đoạn: đoạn có độ dài x (cm) được uốn thành đường tròn và đoạn còn lại được uốn thành hình vuông ($a > x > 0$).



Chương 2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

- a) Bán kính đường tròn: $r = \frac{x}{\pi}$.
- b) Diện tích hình vuông: $\left(\frac{a-x}{4}\right)^2$.
- c) Tổng diện tích hai hình: $\frac{(4+\pi)x^2 - 2\pi x + \pi a^2}{16\pi}$.
- d) Khi $x = \frac{a\pi}{2+\pi}$ thì hình vuông và hình tròn tương ứng có tổng diện tích nhỏ nhất.

Bài 34. Một vật được làm nóng đến $u_0 = 100^\circ\text{C}$ và sau đó được làm mát trong phòng có nhiệt độ không khí là $T = 30^\circ\text{C}$. Nhiệt độ của vật được làm mát tại thời điểm t (tính bằng phút) có thể được mô hình hóa bằng công thức sau: $u(t) = T + (u_0 - T)e^{kt}$ với k là hằng số.

- a) Nhiệt độ $u(t)$ của vật tại thời điểm t là $u(t) = 30 + 70e^{kt}$.
- b) Nếu hằng số $k = -0,05$ thì nhiệt độ của vật sau 10 phút gần bằng 60°C .
- c) Nếu nhiệt độ của vật là 80°C sau 5 phút thì hằng số k có giá trị gần bằng $-0,0673$.
- d) Nếu nhiệt độ của vật là 80°C sau 5 phút thì nhiệt độ của vật sau 18 phút gần bằng 51°C .

Bài 35. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$ (mg/L).

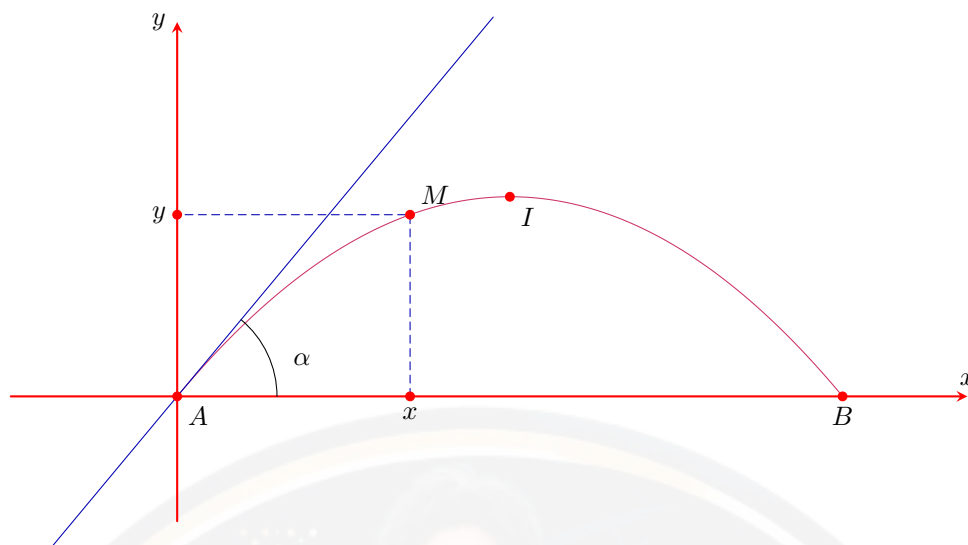
- a) $c'(t) = \frac{t^2 + 1}{(t^2 + 1)^2}$.
- b) $c'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in (0; +\infty) \\ t = -1 \notin (0; +\infty) \end{cases}$.
- c) Nồng độ thuốc trong máu tăng trong 2 giờ đầu tiên sau khi tiêm.
- d) Sau khi tiêm thuốc 1 giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất.

Bài 36. Một công ty sản xuất sản phẩm. Bộ phận tài chính của công ty đưa ra hàm số biểu diễn giá bán mỗi sản phẩm khi có x sản phẩm được bán ra là $p(x) = 1000 - 25x$ (nghìn đồng).

- a) Hàm số doanh thu của công ty khi bán được x sản phẩm là $f(x) = x \cdot p(x)$ (nghìn đồng).
- b) Doanh thu của công ty khi bán được 10 sản phẩm là 7,5 triệu đồng.
- c) Phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm là $x = 2$.
- d) Doanh thu công ty lớn nhất là 10 triệu đồng khi bán được 20 sản phẩm.

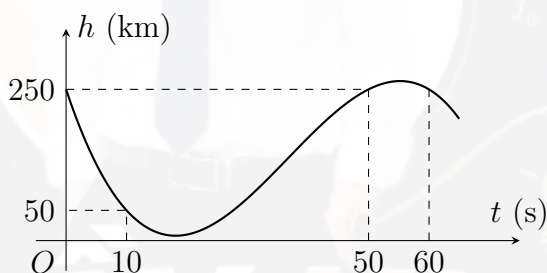
Bài 37. Xét chuyển động của một tàu lượn trên đoạn đường ray có hình dạng một phần đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{135x - x^2 - x^3}{200}$ ($x \geq 0$), trong đó x là khoảng cách theo phương ngang kể từ điểm A , y là độ cao tương ứng của tàu lượn so với phương ngang AB . Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục là 10 m). Các kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị.

- a) Độ dài đoạn AB bằng 111 m.
- b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x_0 = \frac{\sqrt{406} - 1}{3}$.
- c) Độ cao lớn nhất của tàu lượn so với phương ngang AB là 64 m.
- d) Khi tàu lượn đi qua điểm A , tiếp tuyến của quỹ đạo tại A hợp với phương ngang AB một góc $\alpha \approx 34^\circ$.



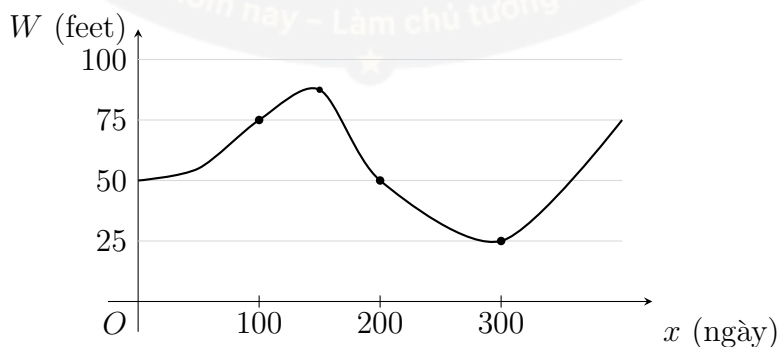
Bài 38. Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng. Trong khoảng 70 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính bởi hàm $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và h tính bằng kilômét.

- Trong 50 giây đầu tiên thì tại thời điểm $t \approx 18$ giây thì con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng và khoảng cách nhỏ nhất này khoảng 8,08 km.
- Đồ thị của hàm số $y = h(t)$ với $0 \leq t \leq 70$ như sau:



- Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $0 \leq t \leq 50$. Vận tốc tức thời của con tàu tại thời điểm $t = 25$ là 5,25 km/s.
- Tại thời điểm $t = 25$, vận tốc tức thời của con tàu vẫn đang tăng.

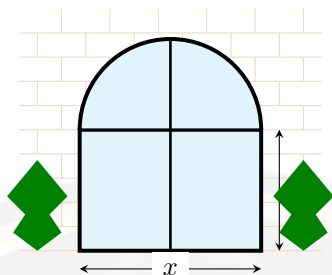
Bài 39. Biểu đồ mực nước của một hồ chứa trong năm được mô tả bằng một hàm số W tính bằng feet với x là số ngày được tính từ đầu năm (hình vẽ bên). Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:



- Trong khoảng từ ngày thứ 150 đến ngày thứ 300 thì mực nước trong hồ giảm
- Mực nước trong hồ chứa đạt cực đại được vào ngày 100

- c) Mức nước trong hồ chứa đạt cực tiểu bằng 25 feet
d) Mức nước trong hồ giảm đi 50 feet từ ngày thứ 100 đến ngày thứ 300.

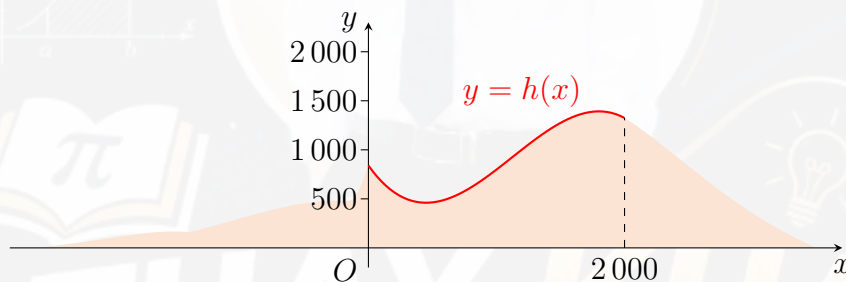
Bài 40. Để làm một cửa sổ có dạng một hình bán nguyệt và một hình chữ nhật ghép lại như hình vẽ bên dưới, người ta dùng 8 m dây thép để làm các đường viền. Gọi x, y là độ dài cạnh của khung hình chữ nhật.



- a) Chiều dài dây để uốn ra bán nguyệt là $\frac{\pi x}{2}$.
b) Giá trị của y tính theo x là $4 - \frac{x(4 + \pi)}{4}$.
c) Diện tích của cửa sổ là $S = 4x - x^2$.
d) Khi diện tích của cửa sổ lớn nhất thì $y = \frac{16}{8 + \pi}$.

Bài 41. Một phần lát cắt của dãy núi có độ cao tính bằng mét được mô tả bởi hàm số

$$y = f(x) = -\frac{1}{1320000}x^3 + \frac{9}{3520}x^2 - \frac{81}{44}x + 840 \text{ với } 0 \leq x \leq 2000.$$



- a) Độ cao thấp nhất của dãy núi là 460 m.
b) Độ cao cao nhất của dãy núi là 1392 m.
c) Trong khoảng $(a; b)$ ($b - a$ lớn nhất) độ cao của dãy núi tăng dần khi đó kết quả $5a - b = 450$.
d) Trong khoảng $(0; c)$, (c lớn nhất) độ cao của dãy núi giảm dần khi đó diện tích toàn phần của khối lập phương cạnh c là $S = 810\,000$.

Bài 42. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Gọi giá bán mới là x (triệu đồng) với $x \in [27; 31]$.

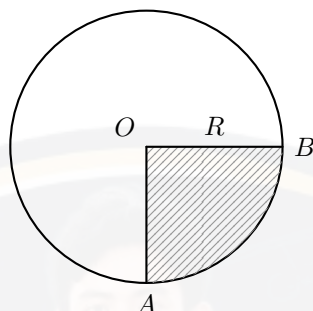
Xét tính đúng sai của các phát biểu sau.

- a) Với giá bán mới là 30 triệu thì số xe bán ra là 200 chiếc.
b) Lợi nhuận thu được được biểu thị qua hàm số $f(x) = -200 \left(x - \frac{61}{2} \right)^2 + 2450$.

c) Với giá bán mới là 30 triệu thì lợi nhuận thu được là 24000 (triệu đồng).

d) Giá bán mới là 30,5 triệu đồng thì lợi nhuận thu được là lớn nhất.

Bài 43. An có một tấm bìa hình tròn như hình vẽ có bán kính $R = 12$ cm, An muốn tạo một cái phễu hình nón từ tấm bìa đó. Khi đó An phải cắt bỏ hình quạt tròn AOB rồi dán OA, OB lại với nhau. Gọi x rad là góc ở tâm của hình quạt tròn AOB và r là bán kính đường tròn đáy của hình nón, với $r > 0$.



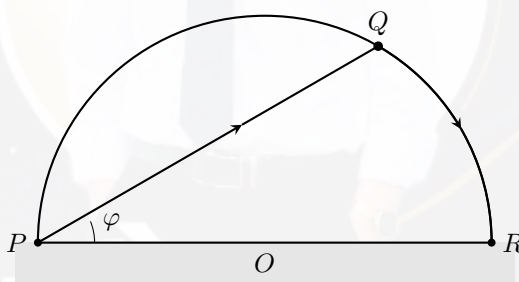
a) Diện tích xung quanh của hình phễu là $S_{xq} = 12\pi r$.

b) Diện tích hình quạt sau khi cắt bỏ hình quạt AOB là $S = 144x\pi$.

c) $V = \frac{1}{3}\pi\sqrt{r^4 \cdot R^2 - r^6}$ là thể tích của phễu.

d) Khi $x = 1,15$ rad thì thể tích phễu lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 44. Cho một bờ hồ hình bán nguyệt có bán kính bằng 2 km, đường kính PR như hình vẽ sau.



Từ điểm P anh Tài chèo một chiếc thuyền với vận tốc 3 km/h đến điểm Q trên bờ hồ, rồi chạy bộ dọc theo thành hồ đến vị trí R với vận tốc 6 km/h. Đặt $\widehat{QPR} = \varphi$ (rad), khi đó

a) Thời gian anh Tài chèo từ P đến Q là $\frac{4 \cos \varphi}{3}$ (giờ).

b) Tổng thời gian anh Tài di chuyển từ P đến R là $t = \frac{4 \cos \varphi}{3} + \frac{2\varphi}{3}$ với $(0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$.

c) Khi $0 < \varphi < \frac{\pi}{6}$ thì thời gian di chuyển của anh Tài tăng.

d) Thời gian chậm nhất mà anh Tài di chuyển từ P đến R là 2 (giờ).

Bài 45. Một nhà máy sản xuất thuốc nhuộm hoạt động tại khu vực gần một dòng sông lớn. Trong quá trình sản xuất, nhà máy này thải ra một lượng chất ô nhiễm đáng kể vào môi trường, gây ảnh hưởng nghiêm trọng đến chất lượng nước và sức khỏe cộng đồng. Để cải thiện tình hình và tuân thủ các quy định về bảo vệ môi trường, nhà máy đã quyết định đầu tư vào một hệ thống xử lý nước thải hiện đại. Chi phí để loại bỏ $x\%$ chất ô nhiễm từ nguồn nước thải được mô hình hóa bởi hàm số phân thức sau: $C(x) = \frac{2x+1}{1-0,01x}$ triệu đồng, $0 \leq x < 100$. Mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Nếu nhà máy giảm từ 20% chất ô nhiễm trở lên thì doanh thu sẽ tăng lên nhờ vào việc nâng

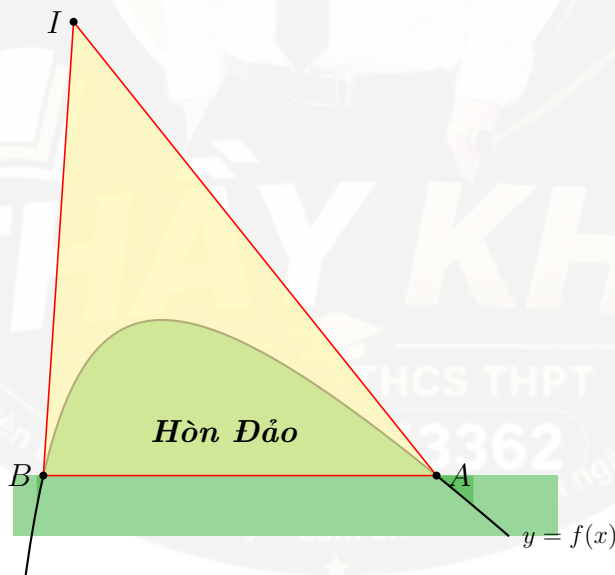
cao uy tín và hình ảnh thương hiệu, được biểu diễn bởi hàm $R(x) = 12x - 240$ triệu đồng. Khi đó lợi nhuận cho việc loại bỏ chất ô nhiễm có thể đạt hơn 177 triệu đồng.

- b) Không thể loại bỏ 100% chất ô nhiễm.
- c) Chi phí để loại bỏ 20% chất ô nhiễm là 51,52 triệu đồng.
- d) Để chi phí không quá 200 triệu đồng thì nhà máy chỉ có thể xử lý tối đa 49,75% chất ô nhiễm.

Bài 46. Một cửa hàng bán đồ thủ công với giá bán một sản phẩm là 40 000 đồng/sản phẩm. Giá nhập vào của sản phẩm đó là 15 000 đồng/sản phẩm. Với giá này cửa hàng ước chừng bán được 120 sản phẩm/ngày. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính cứ giảm 1 000 đồng/sản phẩm thì số sản phẩm bán được sẽ tăng thêm là 15 sản phẩm.

- a) Nếu giá bán là 25 000 đồng/sản phẩm, khi đó cửa hàng bán được 345 sản phẩm/ngày.
- b) Lợi nhuận tối đa theo ngày mà cửa hàng thu được là 4000 (nghìn đồng).
- c) Lợi nhuận theo ngày của cửa hàng khi chưa giảm giá sản phẩm là 2 880 000 đồng.
- d) Gọi x (nghìn đồng) là giá tiền mà cửa hàng dự định bán sản phẩm đó ($15 \leq x \leq 39$), khi đó lợi nhuận theo ngày của cửa hàng được xác định bởi hàm số $f(x) = -15x^2 + 945x - 10800$.

Bài 47. Trong hệ trục Oxy đường biên của một hòn đảo được mô hình hóa bởi hàm số $f(x) = \frac{-x^2 + 10x - 12}{x}$ ($x > 0$) (đơn vị mỗi trục là 100 m). Ban quản lý hòn đảo muốn quay một vùng tam giác an toàn để người dân có thể vui chơi và tắm biển ở khu vực đó. Đặt cố định một điểm ngoài biển tọa độ $I(2; 8)$ sau đó căng hai tấm lưới bảo vệ IA, IB với hai điểm A, B ($x_A > x_B > 0$) nằm trên đường biên và luôn thỏa mãn $AB \parallel Ox$.



- a) Đỉnh cao nhất của hòn đảo (điểm cực đại của đồ thị hàm số) cách I một khoảng 514 m (làm tròn đến hàng đơn vị).
- b) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{-x^2 + 10x - 12}{x}$ là điểm $M(0; 10)$.
- c) Quãng đường ngắn nhất từ hòn đảo đến điểm I là 510 m (làm tròn đến hàng đơn vị).
- d) Nếu điều chỉnh dây phao sao cho khoảng cách từ trạm I đến dây phao AB bằng đúng chiều dài dây phao AB thì diện tích vùng an toàn $\triangle IAB$ là 605 000 m².

Bài 48. Khối lượng q (kg) của một mặt hàng mà cửa tiệm bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán p (nghìn đồng/kg) theo công thức $p = 15 - \frac{1}{2}q$.

- a) Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của cửa tiệm được tính theo công thức $R = pq$.
- b) Hàm doanh thu theo biến p là $R(p) = 30 - 2p$.
- c) Nếu cửa hàng bán giá mỗi kilogam sản phẩm là 7,5 nghìn thì lợi nhuận của hàng cao nhất.
- d) Lợi nhuận cao nhất của cửa hàng là 112,5 nghìn đồng.

Bài 49. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 9t^2 + 21t + 9$ với t tính bằng giây (s) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S tính bằng mét (m) là quãng đường vật đi trong thời gian đó.

- a) Vận tốc của chất điểm chuyển động tại thời điểm t (giây) là $v(t) = -3t^2 + 18t + 21$.
- b) Vận tốc của chất điểm tại giây thứ 2 là 45 m/s.
- c) Quãng đường chất điểm đi được từ lúc bắt đầu đến lúc dừng hẳn là 255 (m).
- d) Vận tốc chuyển động của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm $t = 3$ (s).

Bài 50. Một cửa hàng bán cam canh Cao Phong với giá là 40000 đồng/ 1 kg. Giá nhập vào là 24000 đồng/ 1 kg. Với giá bán này cửa hàng bán được 100 kg / ngày. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính cứ giảm 1000 đồng/ 1 kg thì số cam canh Cao Phong bán được sẽ tăng thêm là 10 kg.

- a) Nếu giữ nguyên giá bán đầu, lợi nhuận theo ngày của cửa hàng là 1500000 đồng.
- b) Nếu giá bán là 35000 đồng/ 1 kg, khi đó cửa hàng bán được 150 kg/ 1 ngày.
- c) Nếu giá bán là 30000 đồng/ 1 kg, khi đó lợi nhuận theo ngày của cửa hàng là 1300000 đồng.
- d) Lợi nhuận tối đa theo ngày của cửa hàng là 1690000 đồng.

Bài 51. Một cơ sở sản xuất có thể cung cấp 1000 sản phẩm A trong 1 tháng. Qua khảo sát thì thấy rằng nếu sản phẩm A bán với giá 100 nghìn đồng thì có 290 người mua, nếu cứ giảm 10 nghìn đồng thì lại có thêm 50 người mua. Gọi p là giá bán sản phẩm A (nghìn đồng) và $R(p)$ là hàm doanh thu trong 1 tháng (nghìn đồng).

- a) Số sản phẩm bán ra là $790 - 5p$.
- b) Hàm doanh thu $R(p) = 1000 - 790p + 5p^2$.
- c) Phương trình $R'(p) = 0$ có nghiệm là $p = 79$.
- d) Doanh thu lớn nhất trong 1 tháng là 31.205.000 đồng.

Bài 52. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 8t + 1$, trong đó t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét.

- a) Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3$ (s) bằng 8 m/s.
- b) Tại thời điểm mà chất điểm di chuyển được 13 m, vận tốc khi đó bằng 8 m/s.
- c) Vận tốc nhỏ nhất của chất điểm là 5 m/s.
- d) Gia tốc tại thời điểm đạt vận tốc nhỏ nhất bằng 2 m/s².

Bài 53. Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery.

Chương 2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0(s)$ cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t = 126(s)$, cho bởi hàm số sau: $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083$ (v được tính bằng feet/s, 1 feet = 0,3048 m).

a) Vận tốc của tàu con thoi luôn tăng trong khoảng thời gian từ lúc cất cánh đến khi tên lửa đẩy được phóng đi.

b) Gia tốc lớn nhất mà tàu con thoi có thể đạt được trong lúc thực hiện sứ mệnh trên (làm tròn đến hàng phần trăm) là 62,87 feet/ s^2 .

c) Gia tốc của tàu con thoi tăng trong khoảng thời gian từ lúc cất cánh đến thời điểm $t = 23(s)$.

d) Gia tốc của tàu con thoi tăng trong khoảng thời gian từ $t = 21,5(s)$ đến $t = 126(s)$.

Bài 54. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố ven biển A trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{180}(t - 70) \right] + 10$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Cánh đồng muối B (thuộc địa phận của thành phố A) có thể hoạt động nếu trong ngày nắng nhiều hơn 10 giờ.

a) Ngày có nhiều giờ ánh sáng nhất là 13 giờ.

b) Số giờ có ánh sáng giảm liên tục trong tháng 7.

c) Cánh đồng muối B có thể hoạt động 213 ngày mỗi năm.

d) Ngày thứ 70 trong năm, thành phố có 10 giờ có ánh sáng.

Bài 55. Theo báo cáo của một cơ sở sản xuất nước tinh khiết, nếu mỗi ngày cơ sở này sản xuất $x(m^3)$ nước tinh khiết thì phải chi phí các khoản sau: 3 triệu đồng chi phí cố định; 0,15 triệu đồng cho mỗi mét khối sản phẩm; $0,0003x^2$ chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết công suất tối đa mỗi ngày của cơ sở này là $200 m^3$. Gọi $C(x)$ là chi phí sản xuất $x(m^3)$ sản phẩm mỗi ngày và $\bar{c}(x)$ là chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm. Khi đó, mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Chi phí sản xuất $100 m^3$ nước tinh khiết là 20 triệu đồng.

b) $\bar{c}(x) = 0,0003x + 0,15 + \frac{3}{x}$.

c) Chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm thấp nhất khi sản lượng nước tinh khiết trong ngày là $100 m^3$.

d) $C(x) = 0,0003x^2 + 0,15x + 5$.

Bài 56. Một công ty tiến hành khai thác 17 giếng dầu trong khu vực được chỉ định. Trung bình mỗi giếng dầu chiết xuất được 245 thùng dầu mỗi ngày. Công ty có thể khai thác nhiều hơn 17 giếng dầu nhưng cứ khai thác thêm một giếng thì lượng dầu mỗi giếng chiết xuất được hàng ngày giảm 9 thùng. Để giám đốc công ty có thể quyết định số giếng cần thêm cho phù hợp với tài chính, hãy chỉ ra số giếng công ty có thể khai thác thêm để sản lượng dầu chiết xuất tăng lên. Gọi số lượng giếng dầu mỗi ngày khai thác là x và y là sản lượng dầu chiết được. Khi đó:

a) Khi đó $y = -9x^2 + 398x, x > 17$.

b) Khi công ty khai thác thêm 6 giếng dầu, thì sản lượng dầu chiết được tăng lên.

c) Công ty có thể khai thác từ 17 đến 22 giếng dầu mỗi ngày để sản lượng dầu chiết tăng.

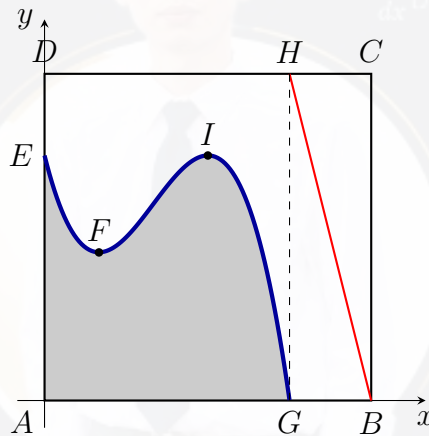
d) Sản lượng dầu giảm khi công ty khai thác quá 22 giếng dầu mỗi ngày.

Bài 57. Quan sát quá trình sinh trưởng và phát triển của một giống cà chua mới trong 18 tuần kể từ khi trồng, các kĩ sư thuộc một trung tâm giống cây trồng nhận thấy: chiều cao thân cây sau

t tuần kể từ khi trồng được tính xấp xỉ bởi hàm số $h(t) = 40 \log_3(2t + 1) + 12$ (đơn vị: centimet, $0 \leq t \leq 18$). Sau 9 tuần kể từ khi trồng, hoa bắt đầu kết trái. Kể từ đó, đường kính trái cà chua ở tuần thứ t xấp xỉ bởi hàm số $d(t) = 3^{\frac{2t-17}{t-8}} - 3$ (đơn vị: centimet, $9 \leq t \leq 18$).

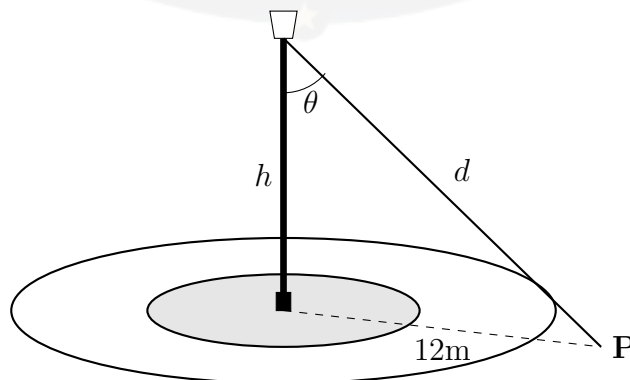
- Tốc độ tăng trưởng chiều cao của thân cây cà chua ở tuần thứ 7 (làm tròn đến hàng phần trăm) xấp xỉ bằng 4,85 (cm/tuần).
- Khi được 4 tuần tuổi, chiều cao của thân cây cà chua là 92 cm.
- Chiều cao của thân cây cà chua liên tục tăng trong suốt 18 tuần.
- Sau 4 tuần, kể từ khi kết trái, đường kính trái cà chua lớn hơn 12 cm.

Bài 58. Ông An có một mảnh đất hình vuông $ABCD$ có cạnh $AB = 12$ m. Ông làm một hồ bơi dạng hình thang cong (phần tô đậm) và một lối đi là đoạn thẳng HB . Nếu đặt hệ trục tọa độ có gốc tại A như hình vẽ, độ dài đơn vị là 1 m, thì đường cong $EFIG$ là một phần đồ thị của một hàm số bậc ba $y = f(x)$ có F là điểm cực tiểu và I là điểm cực đại. Biết $CH = DE = GB = 3$ m và các điểm F, I cách cạnh AD lần lượt là 2 m và 6 m.



- Phương trình của đường thẳng HB là $y = -4x + 48$.
- Tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f'(x) = a(x + 2)(x + 6)$.
- Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 7 song song với đường thẳng HB .
- Ông An cần đặt một cái thang lên xuống hồ bơi tại một điểm trên đường cong $EFIG$ sao cho khoảng cách từ điểm đặt thang đến lối đi là ngắn nhất, khoảng cách đó bằng 2,56 m.

Bài 59. Một chiếc đèn được đặt trên đỉnh của một cột đèn cao h (m) để chiếu sáng một vòng xuyến giao thông đông đúc có bán kính 12 m. Cường độ ánh sáng I tại một điểm P trên vòng xuyến tỉ lệ thuận với cosin của góc θ và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách d (m) từ nguồn sáng đến điểm P (xem hình dưới đây).



Chương 2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

- a) Nếu $I = f(h)$ thì $f'(h) = k \frac{-2h^2 + 144}{(h^2 + 144)^2 \sqrt{(h^2 + 144)^3}}$.
- b) Để cường độ ánh sáng I lớn nhất thì cột đèn phải cao $6\sqrt{2} \text{ m}$.
- c) $\cos \theta = \frac{12}{\sqrt{h^2 + 144}}$.
- d) $I = k \frac{\cos \theta}{d^2}$ (với k là hằng số dương).



Bài 1 (Mã 101 THPTQG2026). Một công ty nông sản có công suất chế biến không quá 180 tấn nguyên liệu một tháng. Nếu công ty chế biến x tấn nguyên liệu trong một tháng ($1 \leq x \leq 180$) thì chi phí sản xuất và doanh thu lần lượt là $C(x) = 0,002x^3 + 30x + 20$ (triệu đồng) và $R(x) = 90x$ (triệu đồng). Lợi nhuận lớn nhất mà công ty đạt được trong một tháng là bao nhiêu triệu đồng?

Bài 2 (Mã 102 THPTQG2026). Một công ty nông sản có công suất chế biến không quá 200 tấn nguyên liệu một tháng. Nếu công ty chế biến x tấn nguyên liệu trong một tháng ($1 \leq x \leq 200$) thì chi phí sản xuất và doanh thu lần lượt là $C(x) = 0,001x^3 + 30x + 10$ (triệu đồng) và $R(x) = 60x$ (triệu đồng). Lợi nhuận lớn nhất mà công ty đạt được trong một tháng là bao nhiêu triệu đồng?

Bài 3 (Mã 103 THPTQG2026). Một công ty nông sản có công suất chế biến không quá 200 tấn nguyên liệu một tháng. Nếu công ty chế biến x tấn nguyên liệu trong một tháng ($1 \leq x \leq 200$) thì chi phí sản xuất và doanh thu lần lượt là $C(x) = 0,001x^3 + 30x + 10$ (triệu đồng) và $R(x) = 60x$ (triệu đồng). Lợi nhuận lớn nhất mà công ty đạt được trong một tháng là bao nhiêu triệu đồng?

Bài 4 (101 THPTQG2025). Nếu một doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm trong một tháng ($x \in \mathbb{N}^*, 1 \leq x \leq 4500$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = -0,01x^2 + 300x$ (nghìn đồng),

trong khi chi phí sản xuất bình quân cho mỗi sản phẩm là $G(x) = \frac{30000}{x} + 200$ (nghìn đồng).

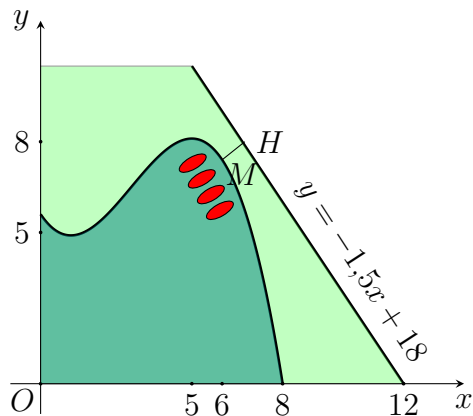
Giả sử số sản phẩm sản xuất ra luôn được bán hết. Trong một tháng, doanh nghiệp đó cần sản xuất ít nhất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được lớn hơn 100 triệu đồng?

Bài 5. Một sợi dây có chiều dài là 6 m, được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất?



Chương 3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

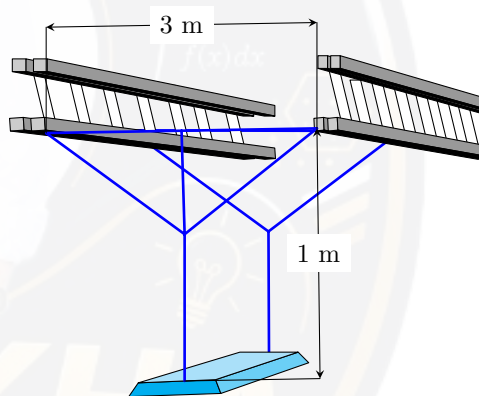
Bài 6. Một hồ nước nhân tạo được xây dựng trong một công viên giải trí. Trong mô hình minh họa bên, nó được giới hạn bởi các trục tọa độ và đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$. Đơn vị độ dài trên mỗi trục là 100 m (*Nguồn: A. Bigalke et al, Mathematik, Grundkurs ma-I, Cornelsen 2016*).



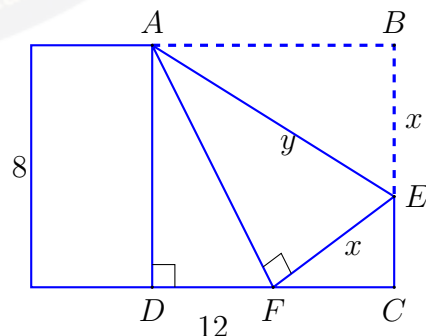
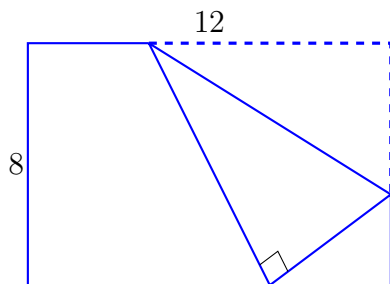
Trong công viên có một con đường chạy dọc theo đồ thị hàm số $y = -1,5x + 18$. Người ta dự định xây dựng trên bờ hồ một bến thuyền đạp nước sao cho khoảng cách từ bến thuyền đến con đường này là ngắn nhất. Hoành độ của điểm để xây dựng bến thuyền này bằng bao nhiêu?

Bài 7. Một trung tâm thương mại bán 2500 ti vi mỗi năm. Chi phí gửi trong kho là 100 000 đồng một cái ti vi mỗi năm. Để đặt hàng, chi phí cố định cho mỗi lần đặt là 200 000 đồng cộng thêm 90 000 đồng mỗi cái ti vi. Trung tâm nên đặt hàng n lần trong mỗi năm và mỗi lần m cái để chi phí hàng tồn kho là ít nhất. Biết rằng mỗi lần đặt hàng về chỉ có một nửa trong số đó được trưng bày ở cửa hàng. Tính giá trị biểu thức $T = 20 \cdot m + 25 \cdot n$.

Bài 8. Trong một cửa hàng, nhà quản lý dự định treo một đồ trang trí trên cao. Vật trang trí được đặt trên giá đỡ nằm dưới thanh treo 1 m. Biết khoảng cách giữa hai thanh treo là 3 m. Biết tổng độ dài nhỏ nhất của các đoạn dây xích là $a + b\sqrt{c}$ (trong đó a, b, c là các số tự nhiên). Tính $a + b + c$.



Bài 9. Cho một tờ giấy hình chữ nhật với chiều dài 12 và chiều rộng 8. Gấp góc bên phải của tờ giấy sao cho sau khi gấp, đỉnh của góc đó chạm đáy dưới như hình vẽ (đỉnh B trùng đỉnh F). Để độ dài nếp gấp AE là nhỏ nhất thì giá trị nhỏ nhất đó là bao nhiêu (kết quả được làm tròn đến hàng phần chục)?

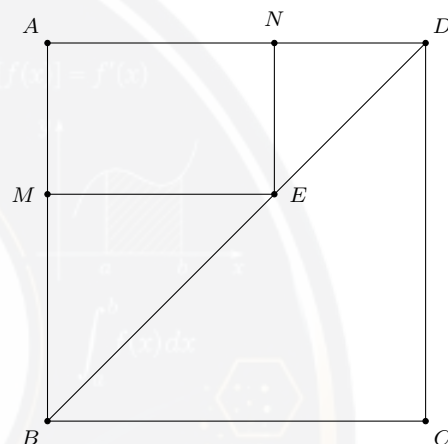


Bài 10. Một cơ sở sản xuất sữa hạt chất lượng cao có thể sản xuất được tối đa 300 lít mỗi ngày. Chi phí sản xuất x lít sữa mỗi ngày bao gồm: chi phí nhân công là 1 triệu đồng/ngày; chi phí nguyên vật liệu, đóng chai, bao bì là 35 nghìn đồng cho một lít sữa; chi phí bảo dưỡng máy móc

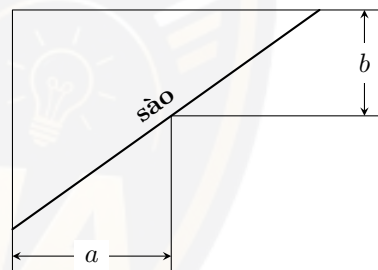
là $C_b(x) = 0,00001x^2$ (triệu đồng). Ngoài ra, nếu x lít sữa sản xuất mỗi ngày vượt 200 lít thì phát sinh thêm chi phí vận hành quá tải là $C_v(x) = 0,00003(x - 200)^3$ (triệu đồng). Giá bán mỗi lít sữa là 60 nghìn đồng. Biết cơ sở bán hết lượng sữa sản xuất trong ngày. Hỏi mỗi ngày cơ sở có lợi nhuận (đơn vị: triệu đồng) đạt được nhiều nhất là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Bài 11. Một công ty sản xuất đồ điện tử nhận được đơn đặt hàng sản xuất 5 000 chiếc tai nghe không dây. Công ty này sở hữu một số dây chuyền sản xuất tự động. Mỗi dây chuyền có thể sản xuất 25 chiếc tai nghe trong một giờ. Chi phí thiết lập (cài đặt, lập trình) mỗi dây chuyền là 150 nghìn đồng. Chi phí này chỉ trả một lần cho mỗi dây chuyền được sử dụng. Khi đã được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát của một kỹ thuật viên. Chi phí thuê kỹ thuật viên giám sát là 200 nghìn đồng mỗi giờ (tính cho toàn bộ quá trình sản xuất). Công ty nên sử dụng bao nhiêu dây chuyền sản xuất để tổng chi phí (chi phí thiết lập và chi phí giám sát) cho việc hoàn thành đơn hàng là thấp nhất?

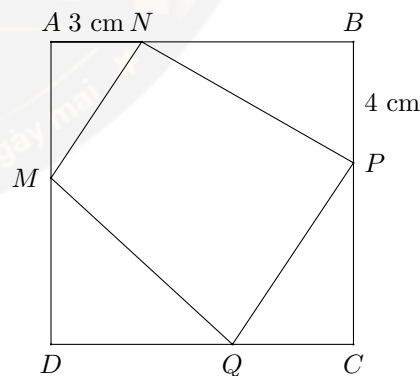
Bài 12. Bác An muốn xây một chiếc bể bơi cho trẻ em trong mảnh vườn hình vuông $ABCD$ có diện tích 144 m^2 . Biết bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có hai đỉnh đối diện của đáy là A và E , với E thuộc đường chéo BD ; độ sâu của bể bơi không đổi bằng $1,5 \text{ m}$ (tham khảo hình vẽ). Chi phí lát gạch cho nền bể là $1\,000\,000 \text{ VND/m}^2$ và chi phí lát gạch cho thành bể là $500\,000 \text{ VND/m}^2$. Hỏi khi diện tích đáy bể đạt giá trị lớn nhất thì chi phí phải bỏ ra để lát gạch cho nền và thành bể bơi này là bao nhiêu triệu đồng?



Bài 13. Để chặn đường hành lang hình chữ L, người ta dùng một que sào thẳng dài đặt kín những điểm chạm với hành lang (như hình vẽ). Biết $a = 24$ và $b = 3$. Hỏi que sào thỏa mãn điều kiện trên có chiều dài tối thiểu là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?



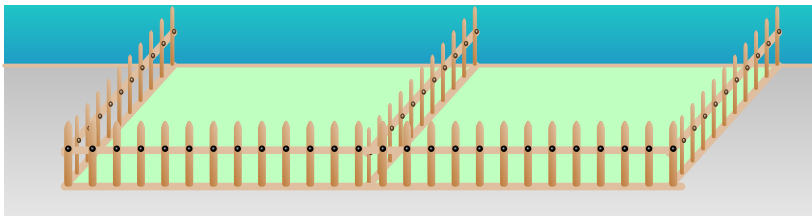
Bài 14. Một tấm bìa hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 10 cm . Bạn An muốn tạo thành 1 hình thang $MNPQ$ ($MN \parallel PQ$) biết M, N, P, Q lần lượt nằm trên các cạnh AD, AB, BC, CD như hình minh họa sao cho đoạn $AN = 3 \text{ cm}$, $BP = 4 \text{ cm}$. Tính diện tích hình thang $MNPQ$ nhỏ nhất bạn An có thể tạo được (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của cm^2).



Bài 15. Một tập đoàn dự định đầu tư tổng số vốn là 20 tỷ đồng để phát triển hai dự án công nghệ A và B. Biết rằng khoản chi phí cơ sở hạ tầng cố định ban đầu là 4 tỷ đồng. Số vốn còn lại được phân bổ cho hai dự án A và B. Lợi nhuận kỳ vọng của dự án A khi đầu tư x tỷ đồng là $L_A(x) = -x^2 + 12x$. Lợi nhuận kỳ vọng của dự án B khi đầu tư y tỷ đồng là $L_B(y) = -y^2 + 20y$. Để tổng lợi nhuận kỳ vọng đạt giá trị lớn nhất thì tập đoàn nên phân bổ vốn cho dự án A bao nhiêu tỷ đồng?

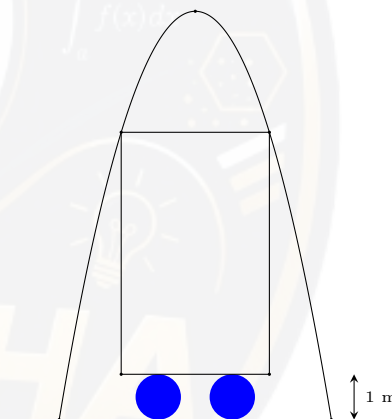
Chương 3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Bài 16. Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (Hình bên dưới). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song với nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.

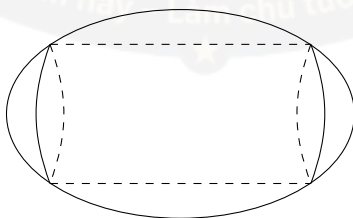


Bài 17. Công ty X cần vận chuyển một lượng lớn hàng hóa từ nhà kho A đến cửa hàng B, lượng hàng hóa chia ra thành nhiều chuyến đi bằng một xe tải có tải trọng tối đa là 50 tấn. Công ty cần tính toán để tối ưu hóa tốc độ vận chuyển hàng hóa của xe. Biết rằng để bốc xếp x tấn hàng hóa từ nhà kho A lên xe cần thời gian $\frac{x}{60-x}$ giờ. Sau khi xe đến B, để di chuyển mỗi tấn hàng từ xe xuống cửa hàng B cần thời gian 3 phút. Tổng thời gian trung bình di chuyển từ nhà kho A đến cửa hàng B và quay về A là 1,2 giờ. Em hãy cho biết trong mỗi chuyến đi, xe nên vận chuyển bao nhiêu tấn hàng để khối lượng hàng hóa được vận chuyển trung bình trên mỗi giờ là lớn nhất? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

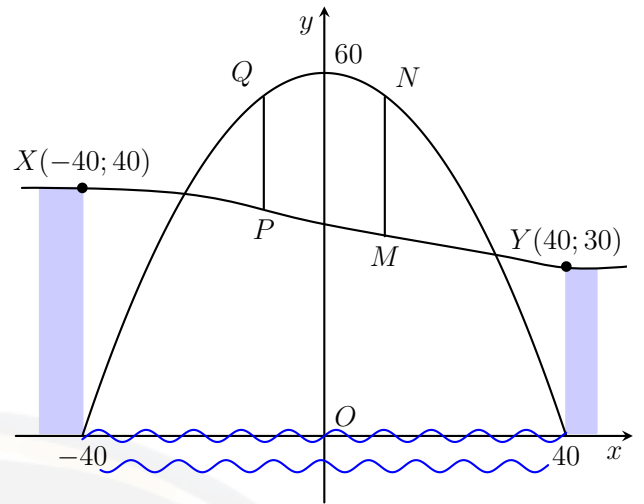
Bài 18. Một chiếc cổng hình Parabol có chiều cao 9 m, khoảng cách giữa hai chân cổng là 6 m. Để vận chuyển thùng hàng hình chữ nhật qua cổng, người ta dùng một xe kéo có chiều cao 1 m. Biết rằng mặt cắt của thùng hàng qua cổng là hình chữ nhật, hỏi diện tích hình chữ nhật đó lớn nhất là bao nhiêu m^2 để xe chở thùng hàng có thể đi qua cổng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Bài 19. Một quả trứng khủng long đồ chơi bằng nhựa có thiết diện qua trục lớn là một đường elip. Biết độ dài mỗi trục là 12 cm và 8 cm. Bên trong quả trứng người ta cần thiết kế một chiếc hộp hình trụ để đựng các đồ chơi trẻ con như bóng đèn xanh đỏ, kẹo v.v... Hỏi khối trụ như thế có thể tích tối đa bao nhiêu cm^3 (làm tròn đến hàng đơn vị).

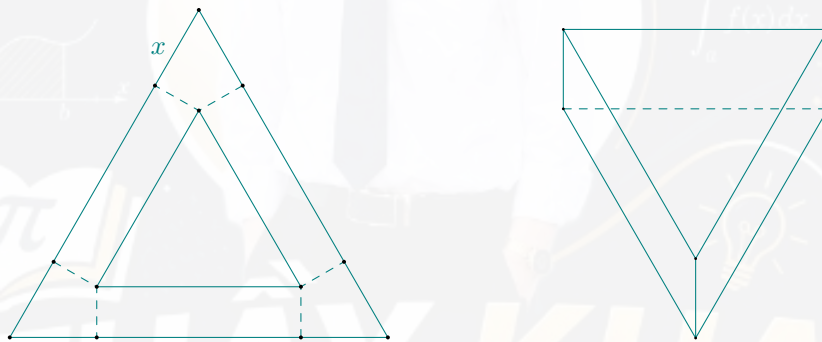


Bài 20. Một thành phố nằm trên một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang 80 m, một bên cao 40 m và một bên cao 30 m. Một cây cầu sẽ được xây dựng bắc qua sông và hẻm núi. Sơ đồ thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ dưới đây. Con đường XY xuyên qua hẻm núi được mô hình hóa bằng phương trình $y = \frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35$. Khung vòm của cầu là một Parabol có đỉnh tại $(0, 60)$ và chân tại hai điểm có hoành độ $x = -40$ và $x = 40$ trên trục hoành.

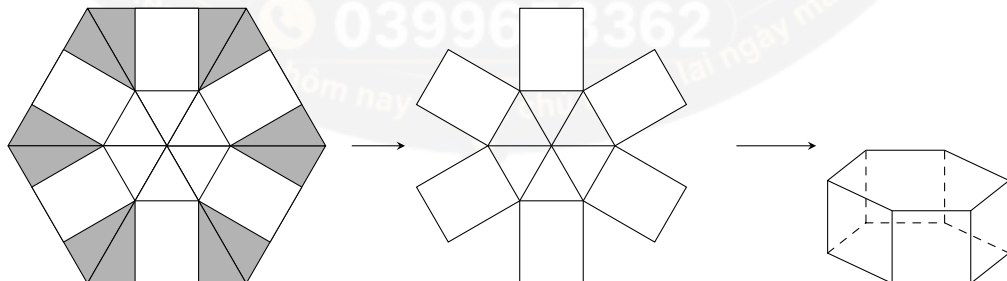


Hai cột đỡ dọc MN và PQ (song song với trục Oy) là đoạn nối giữa khung của Parabol và đường XY . Tính tổng độ dài đoạn MN và PQ biết rằng N và Q là hai điểm đối xứng qua Oy ; MN là đoạn có độ dài lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Bài 21. Một người muốn tạo một hộp đựng quà khối lăng trụ tam giác đều, không có nắp bằng cách cắt ba góc của một tam giác đều cạnh bằng a các đoạn bằng x , $\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$ như hình vẽ, rồi gấp lại tạo thành khối lăng trụ tam giác đều. Thể tích khối lăng trụ lớn nhất là $\frac{a^3}{b}$. Hỏi giá trị của b bằng bao nhiêu?



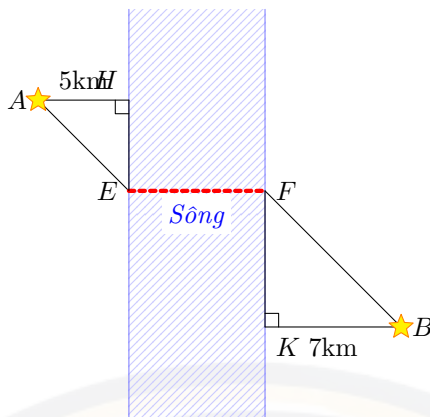
Bài 22. Cho một tấm nhôm hình lục giác đều cạnh 90 cm. Người ta cắt ở mỗi đỉnh của tấm nhôm hai hình tam giác vuông bằng nhau, biết cạnh góc vuông nhỏ bằng x (cm) (cắt phần tô đậm của tấm nhôm) rồi gấp tấm nhôm như hình vẽ để được một hình lăng trụ lục giác đều không nắp. Tìm x để thể tích của khối lăng trụ lục giác đều trên là lớn nhất.



Bài 23. Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là 5km và thành phố B cách con sông một khoảng là 7km (hình vẽ), biết $HE + KF = 24$ km và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu cách thành phố B là bao nhiêu để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất

Chương 3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

(đi theo đường $AEFB$)? (Kết quả làm tròn đến km)



Bài 24. Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 100000 con vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm người ta xác định được số lượng vi khuẩn N thay đổi theo thời gian bằng công thức $N(t) = 80t^3 - 3600t^2 + 48000t + 100000$ (thời gian t tính bằng giây $0 \leq t \leq 45$). Gọi $(a; b)$ là khoảng thời gian dài nhất để vi khuẩn tăng. Hiệu $a - b$ bằng bao nhiêu?

Bài 25. Một công ty sản xuất sản phẩm và doanh thu (đơn vị: triệu đồng) từ việc bán sản phẩm được mô tả bởi hàm số $R(x) = -2x^3 + 9x^2 + 12x + 100$. Trong đó, x là số lượng sản phẩm được bán ra (tính bằng ngàn sản phẩm). Hỏi số lượng sản phẩm tối thiểu phải bán ra để doanh thu bắt đầu tăng là bao nhiêu sản phẩm? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài 26. Trong một nghiên cứu tại Viện Sức khỏe Tâm thần Quốc gia, các nhà khoa học theo dõi độ dày vỏ não (cortex) của 307 trẻ em có IQ cao ($121 - 149$) qua tuổi t (tính bằng năm), với mô hình

$$S(t) = 0,000989t^3 - 0,0486t^2 + 0,7116t + 1,46, \quad 5 \leq t \leq 19.$$

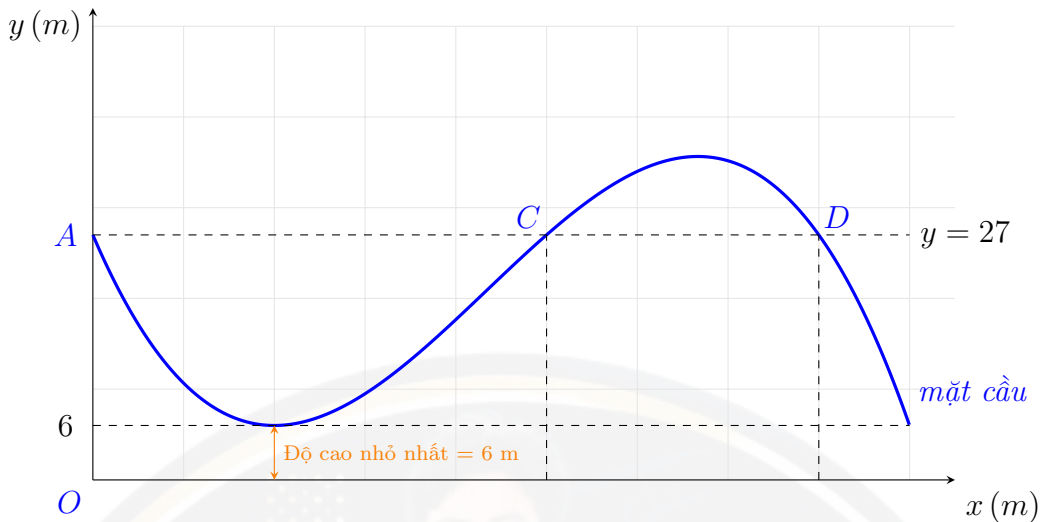
Hỏi vỏ não của trẻ có IQ siêu trí tuệ đạt độ dày cực đại vào khoảng bao nhiêu tuổi (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Bài 27. Định mức cầu mỗi tháng của đồng hồ đeo tay Peget phụ thuộc vào giá đơn vị p theo phương trình cầu $p = \frac{50}{0,01x^2 + 1}$, $0 \leq x \leq 20$ trong đó p tính bằng đô la và x tính bằng nghìn chiếc. Hỏi nhà sản xuất phải bán bao nhiêu nghìn chiếc để doanh thu $R = px$ đạt cực đại?

Bài 28. Trong khoảng thời gian từ ngày 01/01/2024 đến hết ngày 30/12/2024 nhóm nghiên cứu đã quan sát sự phát triển của một quần thể sinh vật X. Kết quả nghiên cứu chỉ ra rằng, tại ngày thứ t của năm 2024 (tính từ ngày 01/01/2024) số cá thể sinh vật X trong quần thể được ước lượng bởi hàm số $f(t) = -\frac{1}{300}t^3 + bt^2 + ct + 12000$ (con), $0 \leq t \leq 365$ và ngày 26/09/2024 là ngày có số lượng cá thể sinh vật X nhiều nhất với 55740 con. Ngày 25/11/2014 số lượng cá thể sinh vật X được ước lượng khoảng bao nhiêu nghìn con? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

Bài 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy (đơn vị trên mỗi trục là mét), mặt cắt dọc của một cầu đi bộ dạng sóng được mô phỏng bằng đồ thị của hàm bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,

($0 \leq x < 90$) (tham khảo hình vẽ).



Mặt cầu đi qua ba mốc $A(0; 27)$, $C(50; 27)$, $D(80; 27)$. Độ cao nhỏ nhất (khoảng cách thẳng đứng từ mặt cầu tới mặt đất $y = 0$) là 6 m. Hỏi độ cao lớn nhất của mặt cầu so với mặt đất bằng bao nhiêu (đơn vị: mét, làm tròn đến một chữ số thập phân)?

Bài 30. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in...) được cho bởi $C(x) = x^2 - 2000x + 10^8$ đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng (4000 đồng). $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường thẳng có phương trình dạng $y = ax + b$. Tính $P = 68a + 3b + 800$.

Bài 31. Giả sử dân số của một huyện sau t năm kể từ năm 2024 được mô tả bởi hàm số $f(t) = \frac{20t + 5}{t + 2}$, $t \geq 0$ (nghìn người). Dân số của huyện đó luôn tăng nhưng không vượt quá bao nhiêu nghìn người?

Bài 32. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(x) = \frac{50x}{x + 4}$ ($x \geq 0$) bộ phận mỗi ngày sau x ngày đào tạo. Xem $y = N(x)$ là một hàm số xác định trên $[0; +\infty)$, khi số ngày đào tạo tăng lên, hãy tính số bộ phận một nhân viên lắp ráp tối đa không vượt quá bao nhiêu?

Bài 33. Nồng độ thuốc trong máu của một bệnh nhân sau khi tiêm t giây là $P(t) \left(\frac{mg}{ml} \right)$. Với $P(t)$ cho bởi công thức $P(t) = \sqrt{0,09t^2 + 0,018t + 0,05} - 0,3t$. Nồng độ thuốc tồn dư, tức nồng độ thuốc vẫn còn trong cơ thể bệnh nhân trong dài hạn khi tiêm là bao nhiêu?

Bài 34. Một bể chứa 1 000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 15 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Biết rằng nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là một hàm số $f(t)$, thời gian t tính bằng phút. Phương trình tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ bằng là $y = a$, ($a \in \mathbb{R}$). Tìm a .

Bài 35. Số lượng sản phẩm bán được của một cửa hàng quần áo trong t (tháng) được cho bởi công thức: $S(t) = 200 \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{2 + t} \right)$ với $t \geq 1$. Xem $y = S(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $1; +\infty$, biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số có dạng $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) = 1$. Tính

Chương 3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

$$P = a - 2b.$$

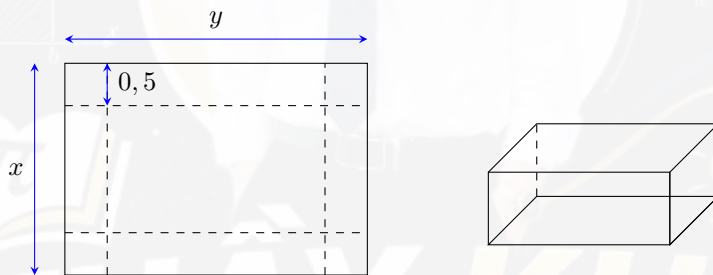
Bài 36. Người ta muốn làm một cái bể dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 1m^3 . Chiều cao của bể là 5dm , các kích thước khác là $x(\text{m})$, $y(\text{m})$ với $x > 0$ và $y > 0$. Diện tích toàn phần của bể (không kể nắp) là hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $S(x)$ là đường thẳng $y = ax + b$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

Bài 37. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng 144 m^2 . Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là $x(\text{m})$. Gọi $P(x)$ (mét) là biểu thức tính chu vi của mảnh vườn. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $P(x)$.

Bài 38. Một mảnh đất hình thang vuông có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ, có diện tích là $S = 24$ (m^2). Gọi $x(\text{m})$ là độ dài đáy nhỏ và $P(x)$ là chu vi mảnh đất đó. Tìm số tiệm cận của $P(x)$.

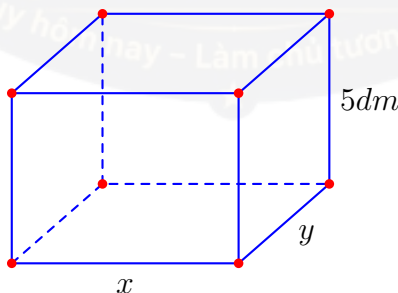
Bài 39. Số lượng sản phẩm bán được của một cửa hàng quần áo trong t (tháng) được cho bởi công thức: $S(t) = 200 \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{2+t} \right)$ với $t \geq 1$. Xem $y = S(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số có dạng $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) = 1$. Tính $P = a - 2b$.

Bài 40. Từ một tấm tôn hình chữ nhật có các kích thước là $x(\text{m})$, $y(\text{m})$ với $x > 1$ và $y > 1$ và diện tích bằng 4m^2 , người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gập thành một cái thùng dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có chiều cao bằng $0,5\text{m}$. Thể tích của thùng là hàm số $V(x)$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{V(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



Bài 41. Cho hàm số $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 - 3x}$. Tìm số đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Bài 42. Người ta muốn làm một cái bể dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có thể tích bằng 1m^3 . Chiều cao của bể là 5dm , các kích thước khác là $x(\text{m})$, $y(\text{m})$ với $x > 0$ và $y > 0$. Diện tích toàn phần của bể (không kể nắp) là hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $S(x)$ là đường thẳng $y = ax + b$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.



Bài 43. Giả sử dân số của một huyện sau t năm kể từ năm 2024 được mô tả bởi hàm số $f(t) = \frac{20t + 5}{t + 2}$, $t \geq 0$ (nghìn người). Dân số của huyện đó luôn tăng nhưng không vượt quá bao nhiêu nghìn người?

Bài 44. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước lượng chi phí cần bỏ ra là $C(x) = \frac{400x + 10}{100 - x}$ (triệu đồng), $0 < x < 100$. Tìm đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(x)$.

Bài 45. Một công ty sản xuất đồ chơi ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 2x^2 + x + 25$ (nghìn đồng). Gọi $f(x)$ là chi phí sản xuất trung bình mỗi sản phẩm. Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$ có dạng $y = ax + b$, coi $x \in [0; +\infty)$. Tính $T = a + 2b$.

Bài 46. Một bể chứa 6000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 25 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Giả sử sau t phút, tỉ số giữa khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể (đơn vị gam/lít) là một hàm $f(t)$. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$, coi $t \in [0; +\infty)$.

Bài 47. Một mảnh đất hình thang vuông có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ, có diện tích là $S = 24(m^2)$. Gọi $x(m)$ là độ dài đáy nhỏ và $P(x)$ là chu vi mảnh đất đó. Tìm số tiệm cận của $P(x)$.

Bài 48. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí được cho bởi $C(x) = x^2 - 2000x + 10^8$ đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường có phương trình dạng $y = ax + b$. Tính $T = 25a + b$.

Bài 49. Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t (giây) là khoảng thời gian từ lúc bắt đầu chuyển động và $s(t)$ (m) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vật chuyển động nhanh dần hay chậm dần?

Bài 50. Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm được tính theo công thức $V(t) = \frac{1}{100} \left(30t^3 - \frac{t^4}{4} \right)$ với $0 \leq t \leq 90$. Tốc độ bơm nước ở thời điểm t được tính theo công thức $v(t) = V'(t)$. Tìm thời điểm tốc độ bơm nước là lớn nhất và tính tốc độ bơm nước lớn nhất đó.

Bài 51. Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả số lượng cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ thuộc khoảng nào dưới đây để cân nặng trung bình của số cá đó tăng?

Bài 52. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$, $t = 0, 1, 2, \dots, 25$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0; 25]$ thì đạo hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Xác định khoảng thời gian mà tốc độ truyền bệnh giảm?

Bài 53. Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ của không khí vào khí quản. Tốc độ của không khí đi vào khí quản khi ho được cho bởi công thức

$$V = k(R - r)r^2 \text{ với } 0 \leq r < R,$$

trong đó k là hằng số, R là bán kính bình thường của khí quản, r là bán kính khí quản khi ho (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014). Hỏi bán kính của khí quản khi ho bằng bao nhiêu thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất?

Bài 54. Giám đốc một nhà hát A đang phân vân trong việc xác định mức giá vé xem các chương trình được trình chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng nó sẽ quyết định nhà hát thu được

Chương 3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

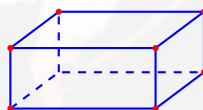
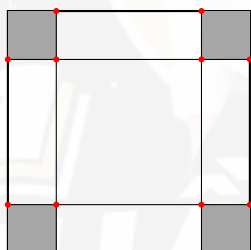
bao nhiêu lợi nhuận từ các buổi trình chiếu. Theo những cuốn sổ ghi chép của mình, ông ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 20 USD/người thì trung bình có 1000 người đến xem. Nhưng nếu tăng thêm 1 USD/người thì sẽ mất 100 khách hàng hoặc giảm đi 1 USD/người thì sẽ có thêm 100 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 2 USD lợi nhuận cho nhà hát trong các dịch vụ đi kèm. Hãy giúp giám đốc nhà hát này xác định xem cần tính giá vé vào cửa là bao nhiêu để thu nhập là lớn nhất.

Bài 55. Nhà sản xuất dự định sử dụng hết 6 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, có đáy là hình vuông (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Tìm các kích thước của bể cá để bể cá có dung tích là lớn nhất?

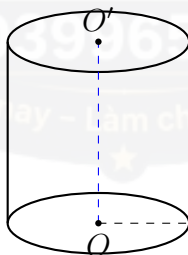
Bài 56. Một người bán gạo muốn đóng một thùng tôn đựng gạo có thể tích không đổi bằng 10 m^3 , thùng tôn hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông, không nắp. Trên thị trường, giá tôn làm đáy thùng là $90000/\text{m}^2$ và giá tôn làm thành xung quanh thùng là $40000/\text{m}^2$. Hỏi người bán gạo đó cần đóng thùng đựng gạo với cạnh đáy bằng bao nhiêu để chi phí mua nguyên liệu là nhỏ nhất?

Bài 57. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể sau t giờ được cho bởi công thức $c(t) = \frac{2t}{t^2 + 1} (mg/L)$. Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Bài 58. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 40 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất?

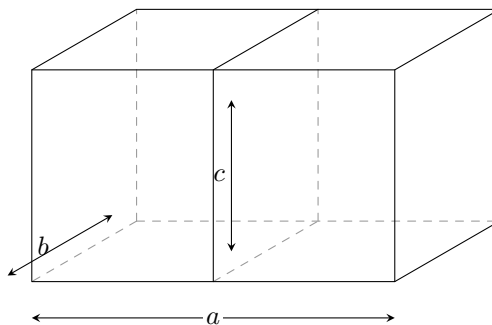


Bài 59. Khi sản xuất vỏ lon sữa bia hình trụ, các nhà sản xuất luôn đặt tiêu chí sao cho chi phí sản xuất vỏ lon là nhỏ nhất. Hỏi khi nhà sản xuất muốn thể tích của hộp sữa là $V\text{ cm}^3$, thì diện tích toàn phần của lon sữa nhỏ nhất bằng bao nhiêu?



Bài 60. Người ta cần làm một cái bể cá có hai ngăn, không có nắp ở phía trên với thể tích $1,296\text{ m}^3$. Người ta cắt các tấm kính ghép lại một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật (hình vẽ minh họa) với ba kích thước là a, b, c . Người ta phải thiết kế các kích thước là bao nhiêu để đỡ tốn kính

nhất (giả sử độ dày của kính không đáng kể). Khi đó hãy tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.



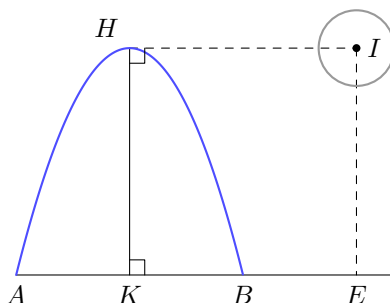
Bài 61. Công ty truyền hình cáp Vista hiện có 100 000 thuê bao. Mỗi thuê bao đang trả cước thuê bao 40\$/tháng. Một cuộc khảo sát cho thấy cứ mỗi lần giảm 0,25\$ cước thuê bao, công ty có thể có thêm 1 000 thuê bao. Để doanh thu thu được là tối đa, công ty cần xác định mức cước thuê bao mỗi tháng là bao nhiêu?

Bài 62. Một bài báo trong tạp chí xã hội học phát biểu rằng nếu một chương trình chăm sóc sức khỏe đặc biệt cho người già được khởi xướng, thì t năm sau khi nó được khởi động, n ngàn người già có thể trực tiếp nhận được các phúc lợi, trong đó $n = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 32t$ ($0 \leq t \leq 12$). Với giá trị nào của t thì số người nhận phúc lợi tối đa là bao nhiêu?

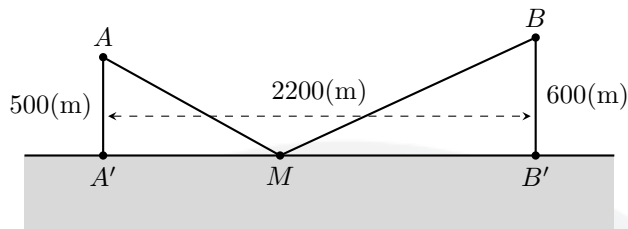
Bài 63. Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 8 000 quả bóng tennis. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ. Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí hoạt động là thấp nhất?

Bài 64. Công ty X cần vận chuyển hàng đến một địa điểm cách công ty 100 dặm. Chi phí trên mỗi chuyến hàng mà công ty phải trả bao gồm chi phí nhiên liệu và chi phí thuê tài xế. Khi xe chở hàng di chuyển với tốc độ x dặm/giờ thì chi phí nhiên liệu (tính bằng USD) trên mỗi dặm đường được cho bởi công thức $C(x) = \frac{1}{5} \left(\frac{64}{x} + \frac{9}{100}x \right)$. Ngoài ra, giá thuê tài xế là 16 USD mỗi giờ lái xe. Biết rằng tốc độ di chuyển của xe chở hàng không được phép vượt quá 50 dặm/giờ. Hỏi chi phí nhỏ nhất mà công ty đó phải trả trên mỗi chuyến hàng là bao nhiêu USD?

Bài 65. Khi dạo chơi trong một công viên bạn An đi chuyển trên cầu cong có hình parabol, bạn Lan đi chuyển trên bờ hồ đường tròn (minh họa bằng hình vẽ dưới đây). Khoảng cách giữa hai chân cầu parabol là $AB = 30$ m, đỉnh H của parabol cách đường thẳng AB một khoảng $HK = 30$ m, khoảng cách từ tâm I của đường tròn đến đường thẳng AB và HK lần lượt là $IE = 30$ m và $IH = 30$ m. Tính khoảng cách nhỏ nhất giữa hai bạn An và Lan, biết rằng đường tròn có bán kính bằng 3 m (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

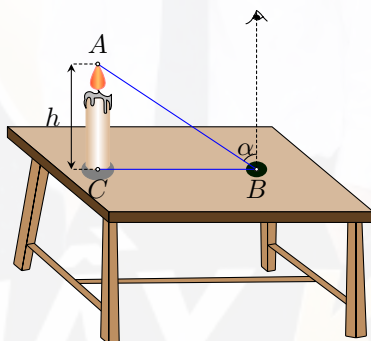


Bài 66. Có hai xã A, B cùng ở một bên bờ sông. Khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 500$ m, $BB' = 600$ m. Người ta đo được $A'B' = 2200$ m như hình vẽ dưới đây. Các kỹ sư muốn xây dựng một trạm cung cấp nước sạch nằm cạnh bên bờ sông cho người dân của hai xã sử dụng. Để tiết kiệm chi phí, các kỹ sư phải chọn một vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn $A'B'$ sao cho tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó.



Bài 67. Trong quang học, chúng ta biết định luật quang học về độ chiếu sáng. Nó được phát biểu như sau: Khi một nguồn sáng chiếu lên một mặt phẳng, độ chiếu sáng từ nguồn sáng A đến một điểm B cho bởi công thức $T = \frac{i \cos \alpha}{AB^2}$, trong đó i là độ phát sáng của nguồn A , α là góc phản xạ của ánh sáng lên người quan sát (coi rằng người quan sát nhìn thẳng xuống mặt bàn, tham khảo hình vẽ bên).

Một đồng xu được đặt cách ngọn nến một khoảng $BC = 30$ cm. Hỏi ngọn lửa của cây nến nên đặt ở độ cao h bằng bao nhiêu để chiếu sáng rõ nhất đồng tiền xu nằm trên bàn (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?

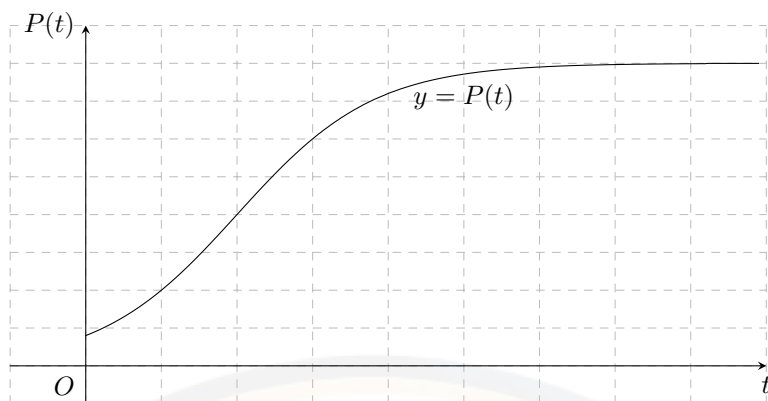


Bài 68. Bác An muốn xây dựng một chuồng nuôi chim bồ câu có dạng khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Từ số tiền đã chuẩn bị để mua vật liệu và dựa vào không gian sẵn có để xây dựng chuồng nuôi, bác An dự kiến xây dựng chuồng có tổng diện tích của tất cả các mặt là 36 m², độ dài đường chéo AC' bằng 6 m. Với những điều kiện đó, chuồng được xây dựng tối ưu nếu thể tích chuồng lớn nhất. Hãy giúp bác An tính xem giá trị tối ưu đó của thể tích chuồng nuôi đó bằng bao nhiêu mét khối (kết quả được làm tròn đến chữ số hàng phần chục)?

Bài 69. Anh Nam có một cái ao diện tích 50 m² để nuôi cá diêu hồng. Vụ vừa qua, anh nuôi với mật độ 40 con/m² và thu được 3 tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình anh thấy cứ thả giảm đi 8 con/m² thì mỗi con cá thành phẩm tăng thêm $0,5$ (kg). Để tổng năng suất cao nhất thì vụ tới anh Nam nên mua bao nhiêu cá giống để thả? (Giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi)

Bài 70. Một hồ nước ở Bắc Ontario đã phục hồi sau một vụ tràn axit khiến tất cả cá hồi ở đó chết. Một chương trình tái thả cá đã thả 800 con cá hồi vào hồ. Ba năm sau, số lượng được ước tính là 6000 con. Sức chứa của hồ được cho là 8000 con. Để đánh giá khả năng tăng trưởng, người ta mô phỏng số lượng cá trong hồ qua từng năm thông qua hàm số $P(t) = \frac{c}{1 + a \cdot b^{-t}}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$)

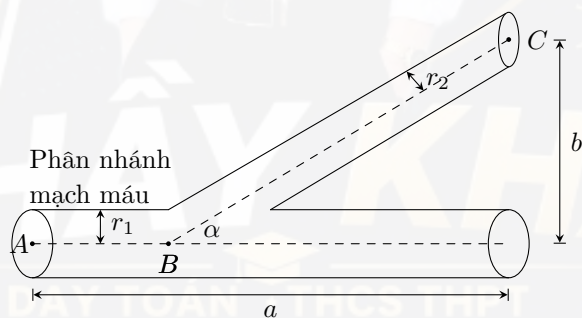
có đồ thị như hình vẽ bên dưới (trong đó t tính theo năm kể từ lúc bắt đầu thả cá vào hồ).



Sử dụng mô hình trên hãy tính tốc độ tăng trưởng tối đa (đơn vị con/năm) của đàn cá. Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.

Bài 71. Trong khoảng thời gian từ ngày 01/01/2024 đến hết ngày 30/12/2024 nhóm nghiên cứu đã quan sát sự phát triển của một quần thể sinh vật X. Kết quả nghiên cứu chỉ ra rằng, tại ngày thứ t của năm 2024 (tính từ ngày 01/01/2024) số cá thể sinh vật X trong quần thể được ước lượng bởi hàm số $f(t) = -\frac{1}{300}t^3 + bt^2 + ct + 12000$ (con), $0 \leq t \leq 365$ và ngày 26/09/2024 là ngày có số lượng cá thể sinh vật X nhiều nhất với 55740 con. Ngày 25/11/2024 số lượng cá thể sinh vật X được ước lượng khoảng bao nhiêu nghìn con? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Bài 72. Hệ thống mạch máu chứa các mạch máu gồm động mạch chính, động mạch con, mao mạch và tĩnh mạch để giúp đưa máu từ tim đến các cơ quan và ngược lại. Hệ thống hoạt động để tối ưu hoá (tối thiểu) năng lượng mà tim sử dụng trong quá trình bơm máu. Đặc biệt năng lượng này giảm khi sức cản của máu giảm. Hình vẽ dưới đây minh hoạ một mạch máu chính có bán kính r_1 phân nhánh với một góc α° tạo thành một mạch máu nhỏ hơn với bán kính r_2 .



Sử dụng mô tả Định luật Poiseuille, người ta đã chứng minh được sức cản của máu theo con đường ABC là

$$R(\alpha) = C \left(\frac{a - b \cot \alpha}{r_1^4} + \frac{b}{r_2^4 \sin \alpha} \right)$$

với C, a, b là các hằng số. Khi bán kính mạch máu nhỏ bằng $\frac{2}{3}$ bán kính mạch máu chính. Xác định α để sức cản này là nhỏ nhất. (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bài 73. Một chiếc phà chạy giữa đất liền và đảo Dedlos. Phà có công suất tối đa là 1 000 xe hơi mỗi chuyến, nhưng việc tải gần hết công suất rất tốn thời gian. Biết rằng số lượng xe hơi đưa lên phà mỗi chuyến là $f(t) = \frac{2000t}{2t+1}$ và mất một khoảng thời gian là 1 giờ. Mỗi xe cần trung bình 3,6 giây để dỡ xuống khi đến điểm đích. Thời gian di chuyển đến đảo và thời gian vòng về đều mất 1,28 giờ. Nên tải bao nhiêu xe lên phà cho mỗi chuyến đi để lượng xe trung bình di chuyển qua lại đảo mỗi giờ đạt lớn nhất? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bài 74. Một thí sinh dành 40 phút để làm 21 câu hỏi mức độ vận dụng và vận dụng cao trong đề thi tốt nghiệp THPT Quốc Gia môn Toán bao gồm: 14 câu hỏi vận dụng và 07 câu hỏi vận dụng cao. Nếu dành x phút cho các câu hỏi vận dụng thì tổng điểm thí sinh đạt được cho nhóm câu hỏi vận dụng là $\frac{14x}{5(x+1)}$ còn nếu dành y phút cho các câu hỏi vận dụng cao thì tổng điểm thí sinh đạt được cho nhóm câu hỏi vận dụng cao là $\frac{14y}{5(3y+1)}$. Hỏi thí sinh này nên dành bao nhiêu phút cho nhóm câu hỏi vận dụng cao để tổng điểm cho 21 câu hỏi mức độ vận dụng và vận dụng cao là lớn nhất?

Bài 75. Một doanh nghiệp sản xuất thiết bị điện tử thông minh có quy trình vận hành và chính sách thuế như sau: Trong mỗi tháng, doanh nghiệp phải chi trả một khoản chi phí cố định 200 triệu đồng, khoản chi phí này không phụ thuộc vào số lượng sản phẩm sản xuất. Ngoài ra, để hoàn thiện mỗi sản phẩm, doanh nghiệp phải chịu chi phí biến đổi 1 triệu đồng cho mỗi sản phẩm. Mỗi sản phẩm được bán ra thị trường với giá 3 triệu đồng một sản phẩm. Nhằm khuyến khích gia tăng quy mô sản xuất, cơ quan quản lý áp dụng chính sách thuế tính theo tổng doanh thu trong tháng, với mức thuế suất giảm dần theo sản lượng. Nếu doanh nghiệp bán dưới 100 sản phẩm trong tháng, thuế suất là 10% tổng doanh thu. Nếu bán từ 100 đến dưới 300 sản phẩm, thuế suất là 8% tổng doanh thu. Nếu bán từ 300 sản phẩm trở lên, thuế suất là 5% tổng doanh thu. Gọi x là số lượng sản phẩm doanh nghiệp sản xuất và bán ra trong một tháng ($x \in \mathbb{N}^*$). Giả sử số sản phẩm doanh nghiệp sản xuất trong tháng được bán hết. Hỏi doanh nghiệp cần sản xuất tối thiểu bao nhiêu sản phẩm để bắt đầu có lãi?

Bài 76. Công ty chứng khoán VNStock cần xử lý 18 000 lệnh giao dịch trong một ngày làm việc (8 giờ). Hệ thống gồm các máy chủ xử lý với thông số như sau

- ◇ Năng suất 250 lệnh/giờ/máy.
- ◇ Chi phí triển khai 15 triệu đồng/máy (cài đặt ban đầu).
- ◇ Chi phí vận hành điện và bảo trì 120 000 đồng/giờ/máy.
- ◇ Chi phí nhân viên giám sát 8 triệu đồng/giờ (trả theo giờ làm việc thực tế).

Tìm chi phí thấp nhất mà công ty phải bỏ ra để thực hiện số lượng giao dịch nói trên (làm tròn đến hàng đơn vị của triệu đồng).

Bài 77. Để hạn chế vi phạm thời gian làm việc đối với công nhân, giám đốc công ty quyết định xử lý bằng cách phạt tiền. Nhờ sự giám sát chặt chẽ của quản đốc, giám đốc công ty biết được trong một tháng, giữa tỉ lệ công nhân vi phạm đúng k lần ($1 \leq k \leq 2$) là $t_k = \frac{N_k}{N}$ (trong đó N_k là số công nhân vi phạm đúng k lần, N là tổng số công nhân) và mức phạt mỗi lần vi phạm có mối liên hệ như sau: Nếu mỗi công nhân nộp phạt x nghìn đồng ($60 \leq x \leq 300$) khi vi phạm lần thứ nhất và nộp phạt $x - 20$ nghìn đồng khi vi phạm lần thứ hai thì $t_1 = \frac{36}{x+10}$ và $t_2 = \frac{4}{x-30}$ (không có công nhân nào vi phạm quá hai lần). Biết rằng N không đổi và bằng 2 400. Tổng số tiền nộp phạt trong một tháng ít nhất là bao nhiêu triệu đồng? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Bài 78. Trong Vật lý, một dao động điều hòa là dao động có phương trình chuyển động được cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó A là biên độ của dao động, ω (rad/s) là tần số góc và φ (rad) là pha ban đầu. Trong Vật lý, động năng (Tiếng Anh: *kinetic energy*) của một vật là năng lượng mà nó có được từ chuyển động của nó. Được xác định bởi công thức $W = \frac{1}{2}m \cdot v^2(t)$ trong đó m (kg) là khối lượng của vật và $v(t)$ (m/s) là vận tốc của vật tại thời điểm t (s). Giả sử một vật có khối lượng $m = 100$ (gam) dao động điều hòa với phương trình chuyển động:

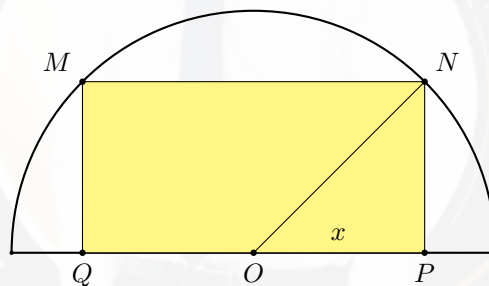
$x = 40 \cos \left(200\pi t - \frac{\pi}{3} \right)$ (cm). Khi đó động năng vật đó đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu (J)? (Làm tròn đến hàng phần chục).

Bài 79. Giả sử doanh số bán hàng (đơn vị triệu đồng) của một sản phẩm mới trong vòng một số năm nhất định tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t) = 500(t^2 + me^{-t})$, với $t \geq 0$ là thời gian tính bằng năm kể từ khi phát hành sản phẩm mới, $m \leq 0$ là tham số. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Biết rằng tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm, khi đó giá trị nhỏ nhất của m bằng bao nhiêu?

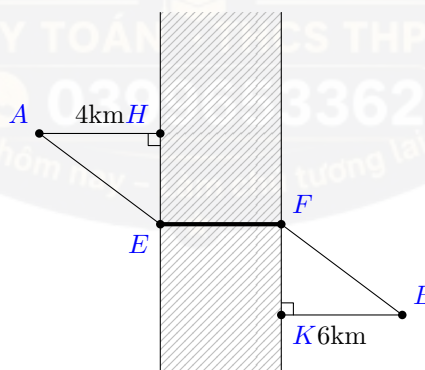
Bài 80. Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Cứ sau mỗi vụ, người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá cân nặng $P(n) = 540 - 18n$ (gam). Vậy thả cá từ bao nhiêu con trở đi trên một đơn vị diện tích của mặt hồ thì sản lượng cá giảm?

Bài 81. Một công ty bất động sản có 150 căn hộ cho thuê, biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng mỗi tháng thì mỗi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 5 căn hộ bị bỏ trống. Thu nhập của công ty bắt đầu giảm từ lần tăng giá thứ mấy?

Bài 82. Từ một miếng tôn dạng nửa hình tròn có bán kính $R = 4$ dm, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật. Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có thể cắt được là bao nhiêu?



Bài 83. Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là 4 km và thành phố B cách con sông một khoảng là 6 km (hình vẽ), biết $HE + KF = 20$ km và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu cách thành phố A là bao nhiêu km để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường AEFB)? (kết quả làm tròn đến phần chục)

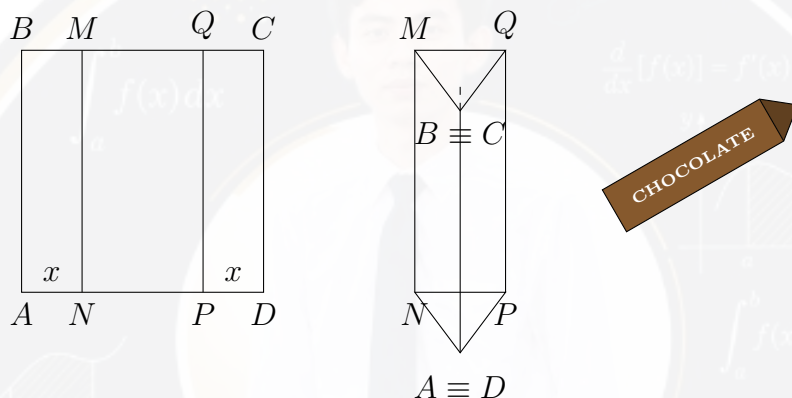


Bài 84. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có lợi nhuận cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu (đơn vị tính bằng triệu đồng và làm tròn kết quả tới hàng phần trăm)?

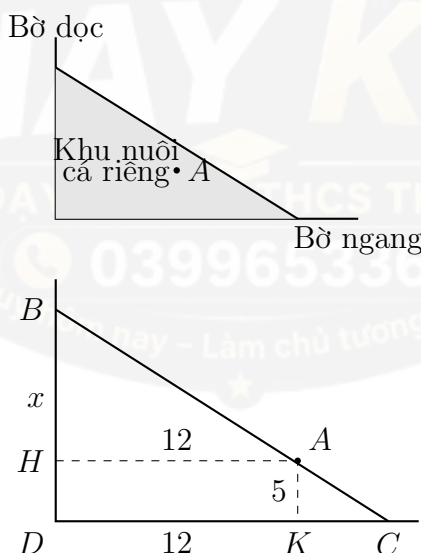
Chương 3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Bài 85. Hằng ngày mực nước của một hồ thủy điện lên và xuống theo lượng nước mưa, và các suối nước đổ về hồ. Độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo thời gian trong ngày sau t (giờ) (kể từ 8h sáng) được cho bởi công thức $h(t) = 24t + 5t^2 - \frac{t^3}{3}$. Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước quy định trước 5 tiếng đồng hồ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước mấy giờ, biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước?

Bài 86. Để tạo ra phần xung quanh của một hộp kẹo sôcôla có dạng hình lăng trụ đứng (không tính hai đáy), người ta dùng một tờ giấy bìa hình vuông $ABCD$ có cạnh là 15 cm. Ta gấp tấm bìa theo hai cạnh MN và PQ vào phía trong cho đến khi AB và CD trùng nhau như hình vẽ để được hình lăng trụ đứng khuyết hai đáy. Khi đó ta có thể tạo được hộp kẹo sôcôla có thể tích lớn nhất là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) centimet khối, biết thể tích của khối lăng trụ bằng diện tích đáy nhân với chiều cao?

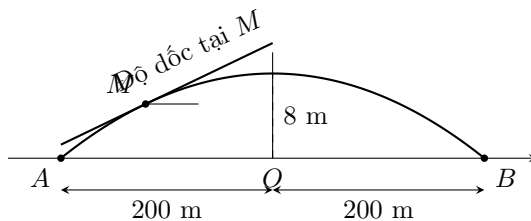


Bài 87. Người ta giăng lưới để nuôi riêng một loại cá trên một góc hồ. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một vị trí trên bờ ngang đến một vị trí trên bờ dọc và phải đi qua một cái cọc đã cắm sẵn ở vị trí A . Diện tích nhỏ nhất có thể giăng lưới là bao nhiêu mét vuông, biết rằng khoảng cách từ cọc đến bờ ngang là 5 m và khoảng cách từ cọc đến bờ dọc là 12 m.



Bài 88. Hình vẽ dưới đây mô tả một cây cầu vượt có mặt cắt đứng là một phần parabol nối hai điểm A, B và nhận đường trung trực của đoạn AB làm trục đối xứng, $AB = 400m$. Khoảng cách từ đỉnh cây cầu đến AB bằng $8m$. Xét tiếp tuyến Δ tại điểm M trên mặt cầu, người ta quy ước $\tan(\Delta, d)$ là độ dốc tại M của mặt cầu, với d là đường thẳng đi qua hai điểm A, B . Độ dốc

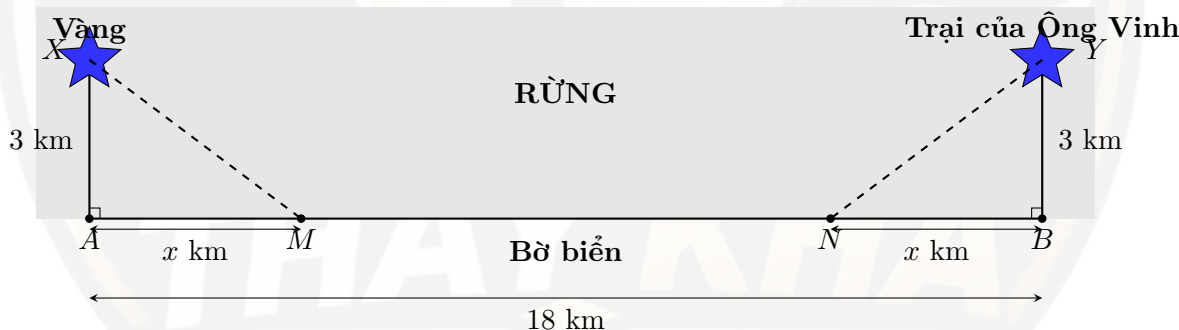
lớn nhất của mặt cầu là bao nhiêu?



Bài 89. Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Giả sử khi sản xuất và bán hết x sản phẩm đó ($0 < x \leq 2000$), tổng số tiền doanh nghiệp thu được (đơn vị: chục nghìn đồng) là $f(x) = 2000x - x^2$ và tổng chi phí (đơn vị: chục nghìn đồng) doanh nghiệp chi ra là $g(x) = x^2 + 1440x + 50$. Giả sử mức thuế phụ thu trên một đơn vị sản phẩm bán được là t (chục nghìn đồng) ($0 < t < 300$). Mức thuế phụ thu t (trên một đơn vị sản phẩm) sao cho nhà nước nhận được số tiền thuế phụ thu lớn nhất và doanh nghiệp cũng thu được lợi nhuận lớn nhất theo mức thuế phụ thu đó là bao nhiêu triệu đồng?

Bài 90. Một công ty nông sản có công suất chế biến không quá 200 tấn nguyên liệu một tháng. Nếu công ty chế biến x tấn nguyên liệu trong một tháng ($1 \leq x \leq 200$) thì chi phí sản xuất và doanh thu lần lượt là $C(x) = 0,001x^3 + 30x + 10$ (triệu đồng) và $R(x) = 60x$ (triệu đồng). Lợi nhuận lớn nhất mà công ty đạt được trong một tháng là bao nhiêu triệu đồng?

Bài 91. Ông Vinh đang ở trong rừng để đào vàng. Ông ta tìm thấy vàng ở X , cách điểm A là 3 km. Điểm A nằm trên đường bờ biển (đường bờ biển là đường thẳng). Trại của ông Vinh nằm ở Y , cách điểm B là 3 km. Điểm B cũng thuộc đường bờ biển. Biết rằng $AB = 18$ km, $AM = NB = x$ km và XA vuông góc với bờ biển, YB vuông góc với bờ biển. (Như hình vẽ sau)



Khi đang đào vàng, Ông Vinh bị rắn cắn, chất độc lan vào máu. Sau khi bị cắn, nồng độ chất độc trong máu tăng theo thời gian được tính theo phương trình $y = 50 \log(t + 2)$. Trong đó, y là nồng độ, t là thời gian tính bằng giờ sau khi bị rắn cắn. Ông Vinh cần quay trở lại trại để lấy thuốc giải độc. Ông ấy chạy trong rừng và trên bãi biển với vận tốc lần lượt là 5 km/h và 13 km/h. Để về đến trại Ông Vinh cần chạy từ trong rừng qua điểm M , N trên bãi biển. Tính nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi ông Vinh về đến trại (làm tròn đáp án đến hàng phần chục).

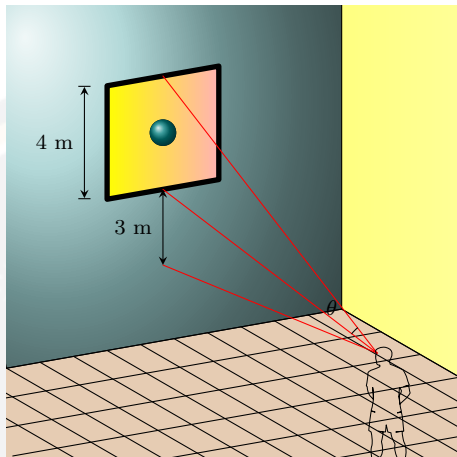
Bài 92. Một bể chứa 1 000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 15 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Biết rằng nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là một hàm số $f(t)$, thời gian t tính bằng phút. Phương trình tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ bằng $y = a$, ($a \in \mathbb{R}$). Tìm a .

Bài 93. Một kỹ sư đang thiết kế viên (biên dạng) của một chi tiết kỹ thuật cần phải chịu lực nén tối ưu. Viên này được mô hình hóa trên mặt phẳng tọa độ Oxy . Biên dạng cong của chi tiết

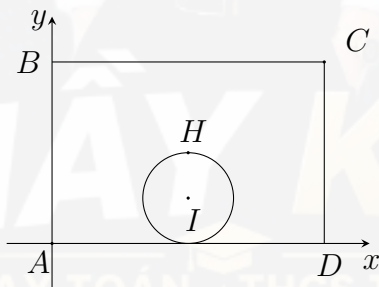
Chương 3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

được mô tả bởi đồ thị (C) của một hàm số phân thức bậc hai trên bậc một, có dạng tổng quát là $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$, với $m = 1$. Biết đồ thị (C) này cắt Oy tại điểm $A(0; 1)$, qua điểm $B(-1; \frac{1}{2})$, có đường tiệm cận đứng $x = 1$ và có một điểm cực trị là $C(2; 5)$. Khi đó, $a + b - n$ bằng bao nhiêu?

Bài 94. Một bức tranh cao 4 m được treo trên tường có mép dưới cao hơn tầm mắt người quan sát 3 m (như hình vẽ). Người quan sát phải đứng cách tường bao nhiêu mét để có được tầm nhìn thuận lợi nhất (tức là, có góc nhìn θ lớn nhất)?

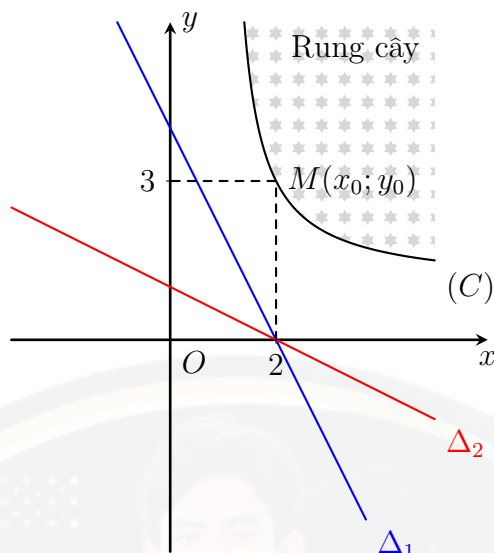


Bài 95. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có một cạnh nằm trên trục hoành và hai đỉnh $A(0; 0)$, $C(6; 4)$. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AC . Đường tròn (C) có tâm $I(3; 1)$ và đi qua H . Người ta muốn thiết kế một dải LED bắt đầu từ điểm A và kết thúc tại C . Dải LED có hình dạng là một phần của đồ thị hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Biết dải LED tiếp xúc với đường tròn (C) tại H , tính $27a + 3b + c + 9d$.

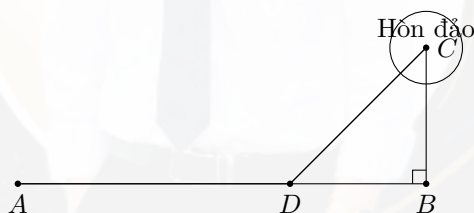


Bài 96. Mảnh đất vườn của nhà anh Điệp có một phần ranh giới cũng là một phần đường cong $(C): y = \frac{x+a}{x+b}$, bao quanh nó là sông nước. Với hệ trục tọa độ Oxy thích hợp, đơn vị trên mỗi trục là 10 mét thì đường cong (C) đi qua điểm $(2; 3)$ và có đường tiệm cận đứng $x = 1$. Hàng ngày anh Điệp phải dùng thuyền máy để vận chuyển trái cây từ khu vườn của mình đến hai tuyến đường $\Delta_1: 2x + y - 4 = 0$ và $\Delta_2: x + 2y - 2 = 0$ cho những người lái buôn từ nơi khác đến. Anh Điệp cần xác định một vị trí $M(x_0; y_0)$ thuộc khu vườn của mình để tổng khoảng cách từ vị trí M đó đến hai tuyến đường Δ_1, Δ_2 là bé nhất. Hỏi khoảng cách từ vị trí được chọn làm gốc tọa độ

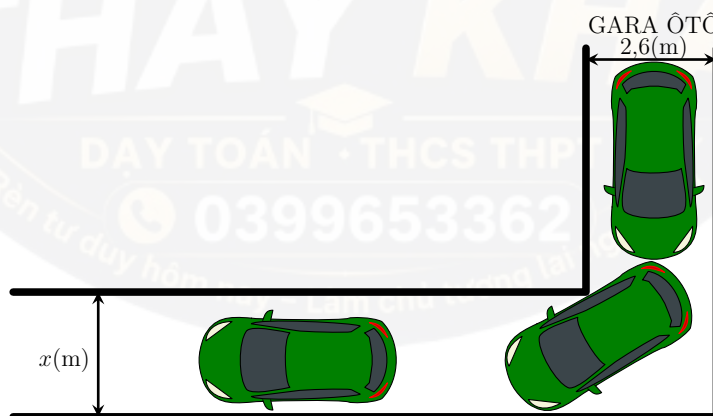
đến điểm M là bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần chục)?



Bài 97. Một người cần đi từ khách sạn A bên bờ biển đến hòn đảo C . Biết rằng khoảng cách từ đảo C đến bờ biển là 10 km, khoảng cách từ khách sạn A đến điểm B trên bờ gần đảo C nhất là 40 km. Người đó có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy (như hình vẽ bên). Biết kinh phí đi đường thủy bằng thuyền là 5 USD/km, đi đường bộ bằng xe taxi là 3 USD/km. Hỏi người đó phải đi đường bộ một khoảng bao nhiêu để kinh phí nhỏ nhất? (Kết quả ghi dưới dạng thập phân)



Bài 98. Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA ÔTÔ của bác An.

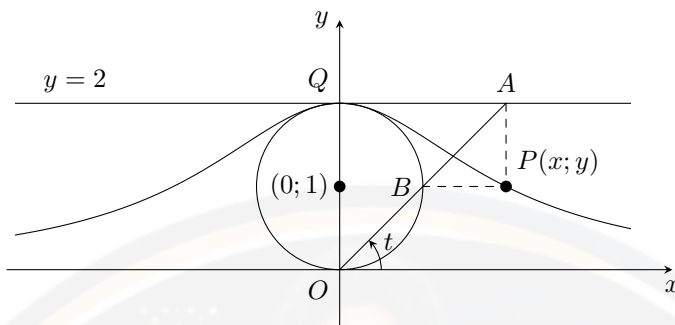


Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng x (m), đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng 2,6 (m). Biết kích thước xe ô tô là $5 \times 1,9$ m (chiều dài $\times$ chiều rộng). Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô, người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài là 5 (m), chiều rộng 1,9 (m). Tìm chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên để ô tô có thể đi vào GARA được? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười; giả thiết ô tô không đi ra ngoài đường, không đi nghiêng và ô tô không bị biến dạng).

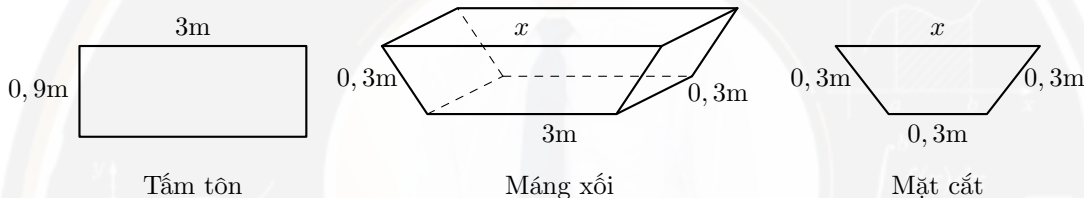
Bài 99. Hình vẽ sau mô tả một đường cong Agnesi và được xây dựng trong hệ tọa độ Oxy như

Chương 3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

sau: vẽ một đường tròn có tâm $I(0; 1)$ và bán kính bằng 1, từ điểm O kẻ một đường thẳng cắt đường tròn tại điểm thứ 2 là điểm B và cắt đường thẳng $y = 2$ tại điểm A . Gọi P là giao điểm của đường thẳng qua A và vuông góc với Ox và đường thẳng qua B vuông góc với Oy . Tập hợp các điểm P tạo thành một đường cong $y = f(x)$ gọi là đường cong Agnesi. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hệ số góc lớn nhất bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

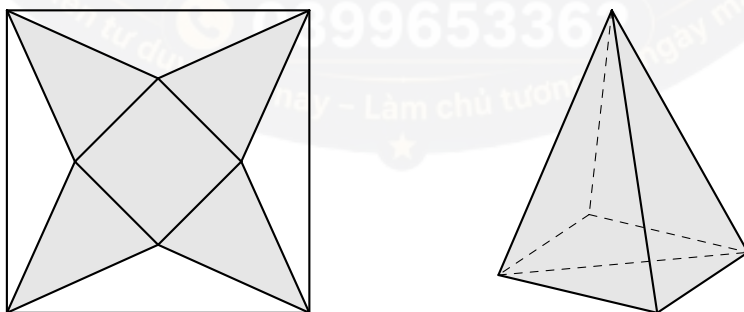


Bài 100. Để làm một máng xối nước có dạng hình lăng trụ, từ một tấm tôn kích thước $0,9\text{m} \times 3\text{m}$ người ta gấp tấm tôn đó như hình vẽ dưới. Biết mặt cắt của máng xối là một hình thang cân. Hỏi x (m) bằng bao nhiêu thì thể tích máng xối lớn nhất?



Bài 101. Tại một công ty sản xuất đồ chơi an toàn cho trẻ em, công ty phải chi 34 567 USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi X , công ty phải trả 8 USD cho nguyên liệu ban đầu và nhân công. Gọi x ($x \geq 1$) là số đồ chơi X mà công ty đã sản xuất và $C(x)$ (đơn vị: USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi X . Khi đó chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi X là hàm số $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$ xác định trên $[1; +\infty)$. Khi số đồ chơi sản xuất tăng lên thì chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi X giảm xuống nhưng không xuống dưới mức tối thiểu là bao nhiêu USD?

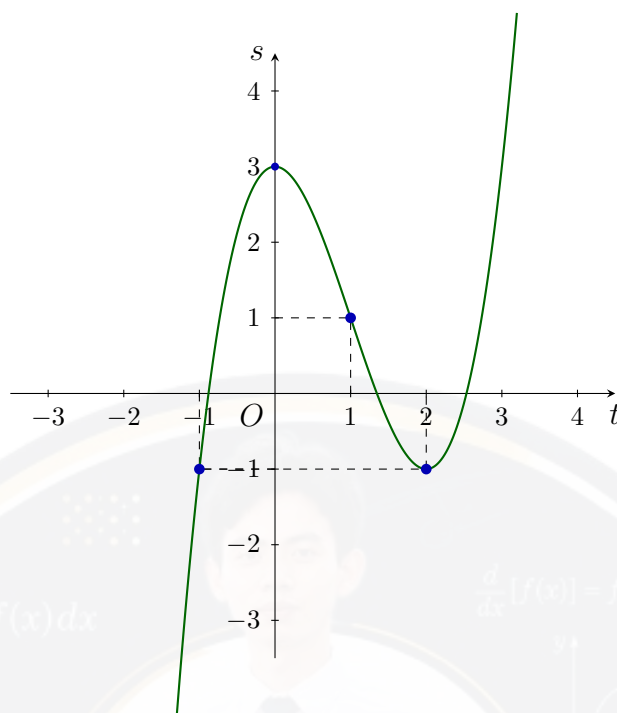
Bài 102. Từ một tấm bìa mỏng hình vuông cạnh 6 dm, cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy là cạnh của hình vuông ban đầu và đỉnh là đỉnh của một hình vuông nhỏ phía trong rồi gấp lên, ghép lại tạo thành một khối chóp tứ giác đều như hình sau.



Thể tích của khối chóp có giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu decimét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?

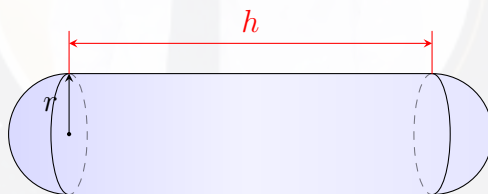
Bài 103. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Biết rằng đồ thị của hàm số $S(t)$ là đường cong như

hình bên dưới:



Tính vận tốc (m/s) của chuyển động tại thời điểm gia tốc bằng 12 m/s^2 .

Bài 104. Một thùng chứa nhiên liệu gồm phần ở giữa là một hình trụ có chiều dài h mét ($h > 0$) và hai đầu là các nửa hình cầu bán kính r ($r > 0$) (hình vẽ).



Biết rằng thể tích của thùng chứa là $144\,000\pi \text{ m}^3$. Để sơn mặt ngoài của phần hình cầu cần 20 000 đồng cho 1 m^2 , còn sơn mặt ngoài cho phần hình trụ cần 10 000 đồng cho 1 m^2 . Xác định r để chi phí cho việc sơn diện tích mặt ngoài thùng chứa (bao gồm diện tích xung quanh hình trụ và diện tích hai nửa hình cầu) là nhỏ nhất, biết rằng bán kính r không được vượt quá 50 m.

Bài 105. Một công ty sản xuất và bán ra 100 sản phẩm mỗi ngày với chi phí sản xuất là 1 triệu đồng/sản phẩm. Công ty phân phối số sản phẩm này đến hai cửa hàng bán lẻ. Do sự khác biệt về vị trí, nhu cầu, mặt bằng,... nên mỗi cửa hàng có chi phí vận hành và doanh thu khác nhau theo số lượng sản phẩm bán ra.

Tại cửa hàng thứ nhất, chi phí vận hành cho mỗi sản phẩm là 14 nghìn đồng. Doanh thu từ việc bán x_1 sản phẩm tại cửa hàng này ($0 \leq x_1 \leq 100, x_1 \in \mathbb{N}$) được mô tả bởi hàm số

$$R_1(x_1) = -6x_1^2 + 2000x_1 \quad (\text{nghìn đồng}).$$

Tại cửa hàng thứ hai, chi phí vận hành cho mỗi sản phẩm là 30 nghìn đồng. Doanh thu từ việc bán x_2 sản phẩm tại cửa hàng này ($0 \leq x_2 \leq 100, x_2 \in \mathbb{N}$) được mô tả bởi hàm số

$$R_2(x_2) = -6x_2^2 + 1800x_2 \quad (\text{nghìn đồng}).$$

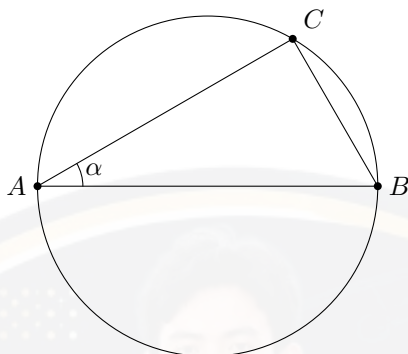
(Chi phí vận hành bao gồm các khoản chi phí dùng cho quảng cáo, vận tải,...). Lợi nhuận của công ty là tổng lợi nhuận từ việc bán sản phẩm từ hai cửa hàng.

Hỏi lợi nhuận lớn nhất mà công ty đạt được là bao nhiêu triệu đồng? (giả sử số sản phẩm ở

Chương 3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

cả hai cửa hàng đều được bán hết mỗi ngày và kết quả được làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

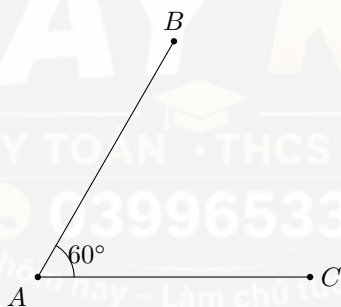
Bài 106. Một bờ hồ hình tròn có bán kính bằng 2 km, đường kính AB (tham khảo hình vẽ). Từ điểm A anh Tài chèo một chiếc thuyền với vận tốc 3 km/h đến điểm C trên hồ, rồi chạy dọc theo thành hồ đến vị trí B với vận tốc 6 km/h (C không trùng với A và B).



Thời gian ngắn nhất mà anh Tài di chuyển từ A đến B là bao nhiêu (thời gian tính bằng giờ, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

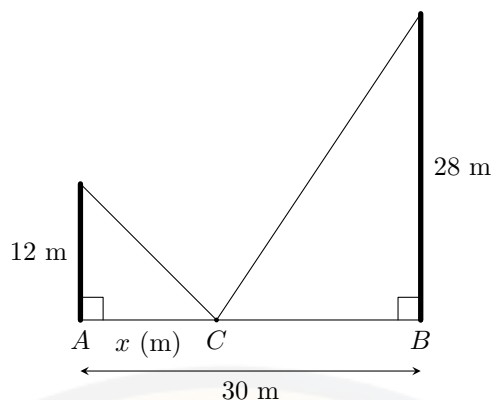
Bài 107. Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ mg/l của thuốc trong máu sau x phút (kể từ khi bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức $C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$. Để đưa ra những lời khuyên và cách xử lý phù hợp cho bệnh nhân, ta cần tìm khoảng thời gian mà nồng độ của thuốc trong máu đang tăng. Hãy cho biết hàm nồng độ thuốc trong máu $C(x)$ đạt giá trị cực đại là bao nhiêu trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

Bài 108. Vào lúc 12 giờ 7 phút anh Hùng chạy xe xuất phát từ điểm A và đi đến điểm C với vận tốc là 60 (km/h). Biết rằng 7 phút trước đó anh Quang chạy xe xuất phát từ điểm B với vận tốc là 30 (km/h) sao cho hai quãng đường của hai xe hợp nhau một góc 60° như hình vẽ dưới đây. Cho biết $AB = 42$ (km) và vào lúc a giờ b phút thì anh Quang và anh Hùng ở vị trí có cực li gần nhất để vẫy tay chào nhau ($a, b \in \mathbb{N}^*$). Tính $a + b$? Xem như hai xe đều chuyển động đều và không có tác dụng ngoại lực hay yếu tố nào khác.



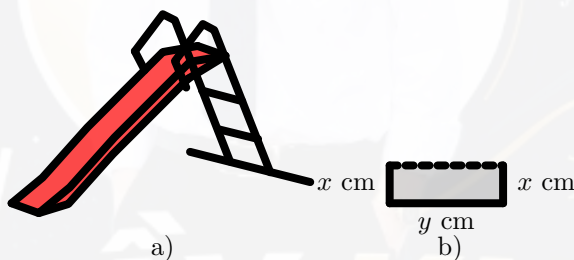
Bài 109. Có hai cây cột, một cây cao 12 m và một cây cao 28 m đứng cách nhau 30 m. Chúng được giữ bằng hai sợi dây gắn vào một cọc duy nhất nổi từ mặt đất đến đỉnh mỗi cột. Tổng chiều

dài ngắn nhất của hai sợi dây là bao nhiêu mét?



Bài 110. Một đại lý nhập khẩu trái cây tươi để phân phối cho các cửa hàng. Mỗi lần nhập khẩu trái cây, khoảng chi phí vận chuyển (không đổi) là 25 triệu đồng. Chi phí bảo quản mỗi tạ trái cây trong kho là 80 nghìn đồng/ngày. Thời gian bảo quản tối đa 10 ngày. Biết rằng, kể từ ngày đầu tiên nhập hàng, đại lý sẽ phân phối tới các cửa hàng 25 tạ trái cây mỗi ngày. Mỗi lần nhập hàng, đại lý phải nhập đủ trái cây cho bao nhiêu ngày phân phối để chi phí trung bình cho mỗi ngày thấp nhất (bao gồm chi phí vận chuyển và chi phí bảo quản trong kho)?

Bài 111. Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em (Hình a) được uốn từ một tấm kim loại có bề rộng 80 cm, mặt cắt được mô tả ở Hình b. Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích mặt cắt càng lớn thì càng đảm bảo an toàn cho trẻ em. Với x đạt giá trị bằng bao nhiêu thì mức độ đảm bảo an của cầu trượt đạt cực đại?



Bài 112. Công ty chứng khoán VNStock cần xử lý 18 000 lệnh giao dịch trong một ngày làm việc (8 giờ). Hệ thống gồm các máy chủ xử lý với thông số như sau

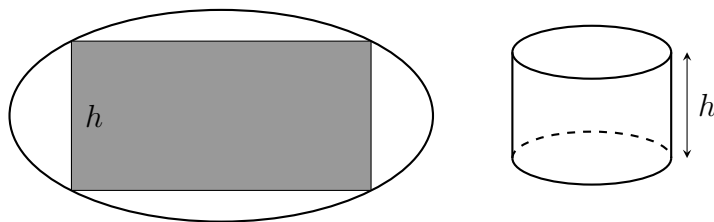
- ◇ Năng suất 250 lệnh/giờ/máy.
- ◇ Chi phí triển khai 15 triệu đồng/máy (cài đặt ban đầu).
- ◇ Chi phí vận hành điện và bảo trì 120 000 đồng/giờ/máy.
- ◇ Chi phí nhân viên giám sát 8 triệu đồng/giờ (trả theo giờ làm việc thực tế).

Tìm chi phí thấp nhất mà công ty phải bỏ ra để thực hiện số lượng giao dịch nói trên (làm tròn đến hàng đơn vị của triệu đồng).

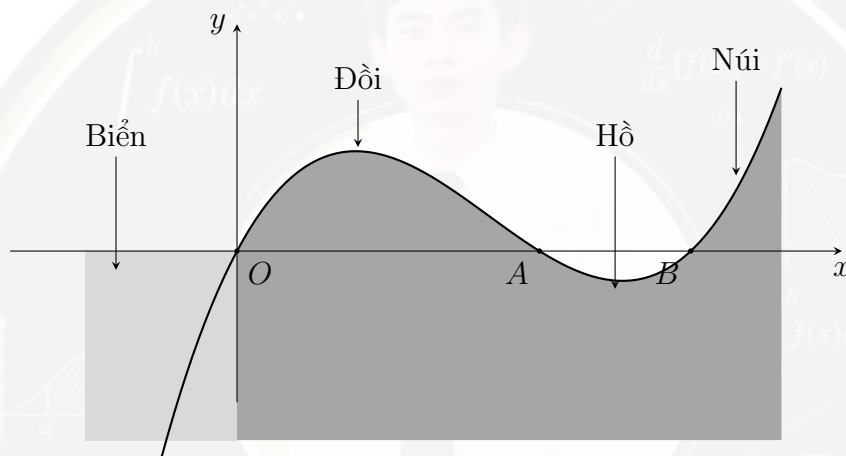
Bài 113. Người ta cần cắt một tấm tôn có hình dạng là một elip với độ dài trục lớn bằng 8, độ dài trục bé bằng 4 để được một tấm tôn hình chữ nhật nội tiếp elip. Người ta gò tấm tôn hình chữ nhật thu được một hình trụ không có đáy (như hình bên). Tính thể tích lớn nhất có thể thu

Chương 3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

được của khối trụ đó. (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Bài 114. Hình vẽ sau mô phỏng một mặt cắt ngang của một phần hòn đảo X , trên hòn đảo X có một lớp đất cạnh một bờ biển, phần nhô lên cao là đỉnh của một quả đồi và phần trũng tạo thành một hồ nước tự nhiên. Trên hệ tọa độ Oxy , đường cong $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mô phỏng độ cao của lớp đất bên cạnh bờ biển với trục Ox là mực nước biển, đơn vị trên các hệ trục là một kilômét. Biết khoảng cách giữa hai bên chân đồi là $OA = 2$ km, chiều dài của hồ là $AB = 1$ km và ngọn đồi cao 528 m.



Độ sâu của hồ tại điểm sâu nhất xấp xỉ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị)

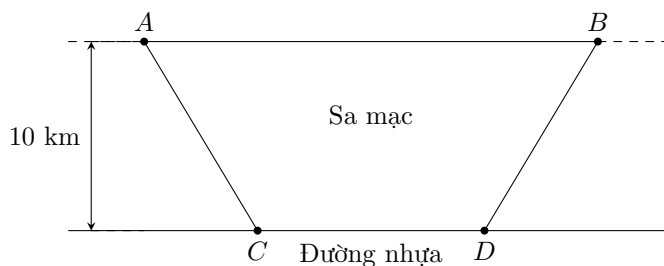
Bài 115. Các nhà tâm lý học sử dụng mô hình hàm số mũ để mô phỏng quá trình học tập của một học sinh như sau: $f(t) = c(1 - e^{-kt})$, trong đó c là tổng số đơn vị kiến thức học sinh phải học, k (kiến thức/ngày) là tốc độ tiếp thu của học sinh, t (ngày) là thời gian học và $f(t)$ là số đơn vị kiến thức học sinh đã học được.

(Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson).

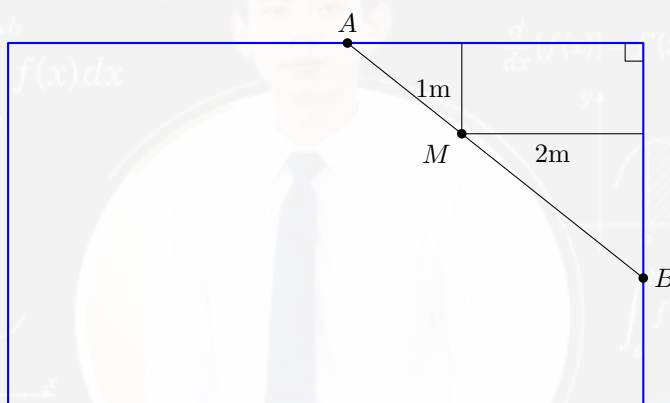
Giả sử một em học sinh phải tiếp thu 25 đơn vị kiến thức mới. Biết rằng tốc độ tiếp thu của em học sinh là $k = 0,2$. Hỏi em học sinh sẽ học được (khoảng) bao nhiêu đơn vị kiến thức mới sau 8 ngày (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Bài 116. Một nhà địa chất học đang ở địa điểm A trên sa mạc. Anh ta muốn đến điểm B (cũng ở trên sa mạc) và cách A một khoảng bằng 70 km. Trong sa mạc, xe anh ta chỉ có thể di chuyển với vận tốc 30 km/h. Nhà địa chất phải đến được điểm B sau 2 giờ, vì vậy nếu anh ta đi thẳng từ A đến B sẽ không thể đến đúng giờ được. Rất may, có một con đường nhựa song song với đường nối A và B và cách AB một đoạn 10 km (tham khảo hình vẽ). Trên đường nhựa đó, xe nhà địa chất có thể di chuyển với vận tốc 50 km/h. Thời gian ngắn nhất để nhà địa chất di chuyển từ A

đến B là bao nhiêu phút?



Bài 117. Nhân dịp Noel, gia đình bạn An cùng nhau trang trí nhà cửa. Tại góc phòng khách, bạn An dự kiến để một cây thông Noel ở vị trí M cách hai bức tường lần lượt là 1m ; 2m . Để cho căn phòng sáng hơn, bạn An sẽ lắp thêm dây đèn led AB dưới sàn nhà, đi qua vị trí đặt cây thông, hai đầu dây đèn chạm vào tường. Hỏi độ dài dây đèn ngắn nhất bạn An cần dùng là bao nhiêu mét? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Bài 118. Một doanh nghiệp sản xuất thiết bị điện tử thông minh có quy trình vận hành và chính sách thuế như sau: Trong mỗi tháng, doanh nghiệp phải chi trả một khoản chi phí cố định 200 triệu đồng, khoản chi phí này không phụ thuộc vào số lượng sản phẩm sản xuất. Ngoài ra, để hoàn thiện mỗi sản phẩm, doanh nghiệp phải chịu chi phí biến đổi 1 triệu đồng cho mỗi sản phẩm. Mỗi sản phẩm được bán ra thị trường với giá 3 triệu đồng một sản phẩm. Nhằm khuyến khích gia tăng quy mô sản xuất, cơ quan quản lý áp dụng chính sách thuế tính theo tổng doanh thu trong tháng, với mức thuế suất giảm dần theo sản lượng. Nếu doanh nghiệp bán dưới 100 sản phẩm trong tháng, thuế suất là 10% tổng doanh thu. Nếu bán từ 100 đến dưới 300 sản phẩm, thuế suất là 8% tổng doanh thu. Nếu bán từ 300 sản phẩm trở lên, thuế suất là 5% tổng doanh thu. Gọi x là số lượng sản phẩm doanh nghiệp sản xuất và bán ra trong một tháng ($x \in \mathbb{N}^*$). Tìm số sản phẩm tối thiểu để doanh nghiệp bắt đầu có lãi.

Bài 119. Trong ngành hàng hải, lượng nhiên liệu tiêu thụ của một con tàu trong một đơn vị thời gian xấp xỉ tỷ lệ thuận với lập phương vận tốc của nó. Một tàu chở hàng xuất phát từ cảng Singapore đi đến cảng Tiên Sa cách 1000 hải lý. Gọi v (hải lý/giờ) là vận tốc của tàu ($v > 0$). Dữ liệu kỹ thuật cho thấy chi phí nhiên liệu vận hành của con tàu là $0,02 \cdot v^3$ (USD/giờ). Các chi phí vận hành cố định khác như lương thuyền viên, khấu hao, bảo hiểm,... không phụ thuộc vào vận tốc tàu là 625 USD/giờ. Hỏi thuyền trưởng cần duy trì vận tốc trung bình là bao nhiêu hải lý/giờ để tổng chi phí cho toàn bộ chuyến đi là thấp nhất?

Bài 120. Một đội CSGT đường thủy sử dụng một chiếc ca nô chuyên dụng để tuần tra trên một đoạn sông dài 60 km. Chuyến tuần tra bao gồm đi ngược dòng từ vị trí xuất phát A đến B dài 60 km, sau đó ngay lập tức quay về xuôi dòng từ B về lại A . Lượng xăng tiêu thụ của động cơ (tính bằng lít) được xác định theo công thức: $L = k \cdot v^2 \cdot t$ trong đó k là một hằng số phụ thuộc

Chương 3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

vào đặc tính của động cơ, v là tốc độ của động cơ (tốc độ của ca nô so với mặt nước) có đơn vị là km/h và t là thời gian động cơ hoạt động tính bằng giờ. Biết rằng vận tốc của dòng nước trên cả đoạn sông là 5 km/h. Để xác định hằng số k thì các kỹ thuật viên đã chạy thử ca nô trong điều kiện mặt nước yên tĩnh. Kết quả cho thấy động cơ tiêu thụ 10 lít xăng mỗi giờ nếu chạy với tốc độ ổn định là 20 km/h. Hỏi để hoàn thành cả chuyến tuần tra với lượng xăng tiêu thụ ít nhất thì người lái ca nô phải cài đặt tốc độ v của ca nô bằng bao nhiêu km/h? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 121. Trong kế hoạch khai thác tuyến ca nô cao tốc phục vụ du lịch sinh thái trên vùng lòng hồ Thủy điện Sơn La (từ bến Mường La đi Quỳnh Nhai) có chiều dài 100 km. Ban quản lý cần xác định vận tốc khai thác v (km/h) cho ca nô ($30 \leq v \leq 70$) để đạt lợi nhuận kinh tế cao nhất. Các thông số được xác định như sau: Công suất tiêu thụ điện của động cơ ca nô là $P(v) = 10v^3$ (W). Giá điện kinh doanh tại bến sặc là 2000 đồng/kWh. Chi phí vận hành cố định: Bao gồm nhân lực lái tàu, khấu hao và bến bãi, được tính là 2500000 đồng cho mỗi giờ ca nô hoạt. Số lượng khách mua vé cho mỗi chuyến phụ thuộc vào vận tốc khai thác theo hàm số: $N(v) = \frac{v}{5} + 20$ (hành khách). Giá vé bình quân cho tuyến này là 500000 đồng/khách. Hãy xác định vận tốc khai thác v để lợi nhuận ròng của mỗi chuyến ca nô trên tuyến này là lớn nhất. (Biết công thức tính điện lượng tiêu thụ là $A = P(v)t$).

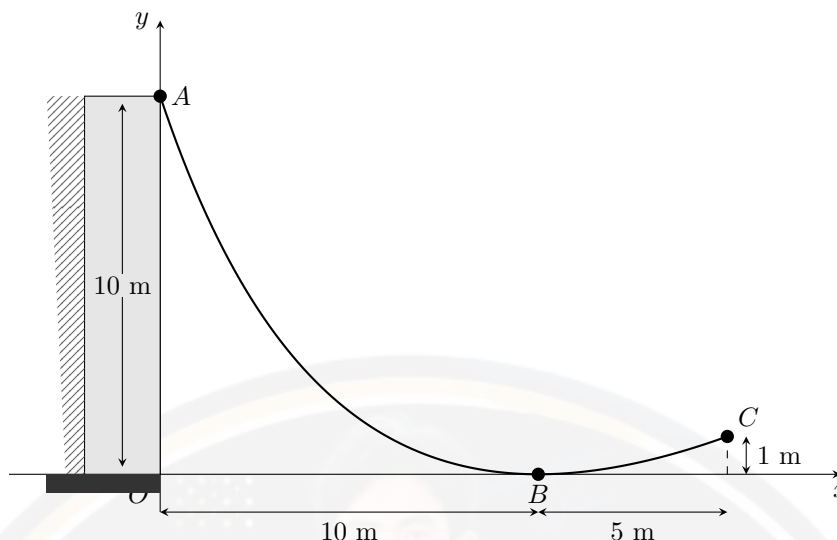
Bài 122. Sau khi một loại thuốc kháng sinh được tiêm vào cơ thể thì nồng độ của thuốc trong máu sẽ giảm dần theo thời gian do quá trình chuyển hóa. Nồng độ thuốc trong máu sau t giờ kể từ khi tiêm được mô hình hóa bởi công thức $C(t) = C_0 \cdot e^{-rt}$ (mg/lít). Trong đó:

- ◇ C_0 là nồng độ thuốc trong máu ngay sau khi tiêm.
- ◇ r là hằng số dương đo tốc độ phân hủy của thuốc.
- ◇ $e \approx 2,718$.

Biết rằng ngay sau khi tiêm, nồng độ thuốc trong máu là 15 mg/lít và sau đó 4 giờ nồng độ thuốc giảm còn 10 mg/lít. Để đạt hiệu quả điều trị, bác sĩ sẽ tiêm lại một liều mới khi nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân giảm xuống và còn ít nhất 6 mg/lít. Theo mô hình trên, để đạt hiệu quả điều trị thì khoảng thời gian nhiều nhất giữa hai lần tiêm thuốc là bao nhiêu giờ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

Bài 123. Trong hệ trục tọa độ Oxy , đơn vị mỗi trục là mét, một đường trượt mới sẽ được xây dựng theo bản thiết kế đã trình bày như hình vẽ. Thanh trượt bắt đầu từ A và kết thúc tại C , đường cong của thanh trượt là một phần của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$, biết đồ thị hàm

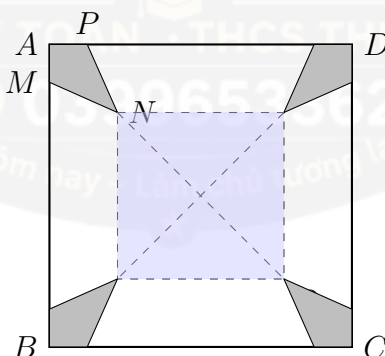
số $f(x)$ tiếp xúc với trục Ox tại điểm B .



Bạn Nam bắt đầu trượt từ điểm A , hỏi khi Nam cách vị trí ban đầu theo phương ngang một khoảng 5 mét thì Nam cách mặt đất bao nhiêu mét, biết trục Ox nằm trên mặt đất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 124. Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Giả sử khi sản xuất và bán hết x sản phẩm đó ($0 < x \leq 2000$), tổng số tiền doanh nghiệp thu được (đơn vị: chục nghìn đồng) là $f(x) = 2000x - x^2$ và tổng chi phí (đơn vị: chục nghìn đồng) doanh nghiệp chi ra là $g(x) = x^2 + 1440x + 50$. Giả sử mức thuế phụ thu trên một đơn vị sản phẩm bán được là t (chục nghìn đồng) ($0 < t < 300$). Mức thuế phụ thu t (trên một đơn vị sản phẩm) sao cho nhà nước nhận được số tiền thuế phụ thu lớn nhất và doanh nghiệp cũng thu được lợi nhuận lớn nhất theo mức thuế phụ thu đó là bao nhiêu đồng?

Bài 125. Từ một tấm nhôm hình vuông có cạnh bằng 8 dm, người ta cắt bỏ bốn tứ giác bằng nhau (cùng bằng tứ giác $AMNP$) ở bốn góc của tấm nhôm đó, biết $AM = AP = 1$ dm và điểm N thuộc đường chéo AC . Với phần còn lại của tấm nhôm sau khi đã cắt bỏ đi 4 tứ giác nói trên, người ta đã gập các đoạn MN trùng với PN rồi dán kĩ bằng keo, làm tương tự cho 3 cặp đoạn còn lại, người ta thu được chậu nước hình chóp cụt tứ giác đều. Sức chứa lớn nhất của chậu nước hình chóp cụt tứ giác đều này là bao nhiêu lít (làm tròn đến hàng đơn vị, bỏ qua độ dày tấm nhôm)?



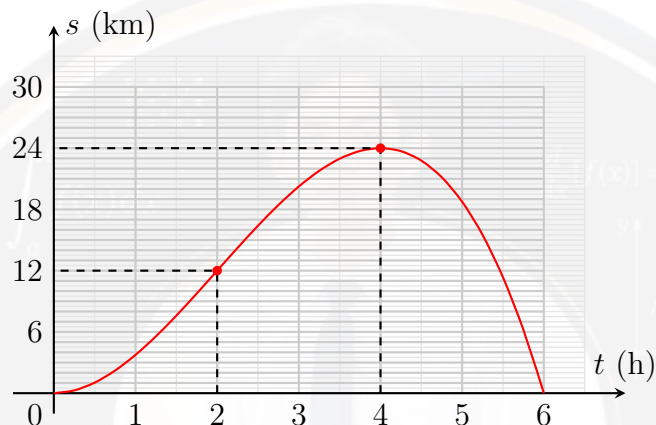
Bài 126. Khu trò chơi trẻ em Gấu Misa hiện có khách lượng ổn định mỗi ngày là 1.000 khách. Mỗi khách vào cổng mua vé giá 40.000 đồng. Một cuộc khảo sát cho thấy cứ mỗi lần giảm 2.000 đồng giá vé, khu trò chơi có thể có thêm 100 khách. Để doanh thu thu được là tối đa, khu trò chơi nên bán vé với giá là bao nhiêu nghìn đồng?

Bài 127. Một bảo tàng khoa học muốn lắp đặt một cửa sổ trang trí lớn hình parabol trên bức

Chương 3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

tường phía tây của tòa nhà. Cửa sổ này có đỉnh cao nhất cách sàn nhà 15 mét. Một điểm trên khung cửa sổ được đo là cách trục đối xứng 5 mét và có độ cao 10 mét so với sàn nhà. Bên trong khung cửa sổ, người thiết kế muốn đặt một tấm kính màu hình chữ nhật, với hai đỉnh trên của tấm kính nằm trên đường cong của khung cửa sổ và hai đỉnh dưới của tấm kính nằm trên một thanh ngang cố định cách sàn nhà 3 mét (song song với sàn nhà). Diện tích lớn nhất của tấm kính màu là bao nhiêu mét vuông? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Bài 128. Thầy An tham dự giải “Đi bộ trực tuyến Ngành Giáo dục và Đào tạo Edu Run – HCMC” năm 2024. Quãng đường thầy An đi được biểu diễn bằng hàm số $s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ (với $a \neq 0$) có đồ thị như hình bên (trong đó t là thời gian tính bằng giờ, s là quãng đường tính bằng km). Khi đó, vận tốc tối đa của thầy An đạt được là bao nhiêu?

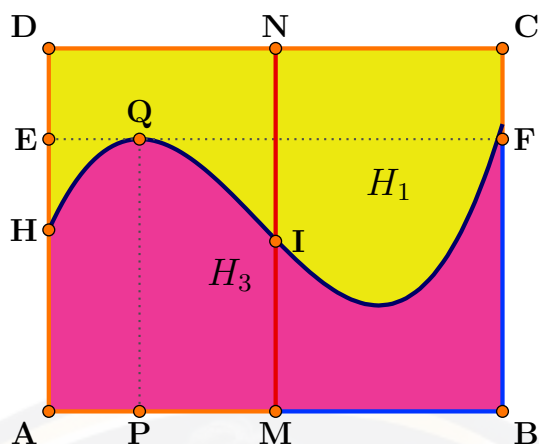


Bài 129. Công ty Apple đề xuất giá bán mỗi chiếc iPhone 17 Pro Max 1TB cho đại lý tại Việt Nam khi đại lý này nhập x chiếc là $P(x) = 50.000.000 - 5000x$ (VND). Hỏi doanh thu tối đa mà công ty Apple nhận được từ đại lý này là bao nhiêu? (Đơn vị tỷ VND, kết quả làm tròn đến hàng phần nguyên).

Bài 130. Khuôn viên của một công viên có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 100\text{ m}$; $AD = 80\text{ m}$. Người ta muốn chia công viên thành hai khu, một khu dành cho trẻ em, một khu dành cho người lớn. Để tạo thiết kế độc đáo và lạ mắt, người ta dùng một đường cong chia khuôn viên thành hai phần H_1 (tô màu xanh) dành cho người lớn và H_3 (tô màu hồng) dành cho trẻ em như hình vẽ bên với $AH = 40\text{ m}$; $AE = 60\text{ m}$; $AP = 20\text{ m}$ và $EF \parallel AB$; $PQ \parallel AD$.

Biết rằng khi xét trong một hệ tọa độ Oxy , đường cong trong hình là một phần của đồ thị hàm số bậc ba. Phần chính giữa công viên người ta muốn mắc dây đèn trang trí dọc đoạn thẳng MN như hình. Biết giá tiền mỗi mét dây trang trí của phần dành cho trẻ em là 140 nghìn đồng và phần dành cho người lớn là 180 nghìn đồng. Tổng số tiền mắc dây đèn trang trí trên đoạn MN

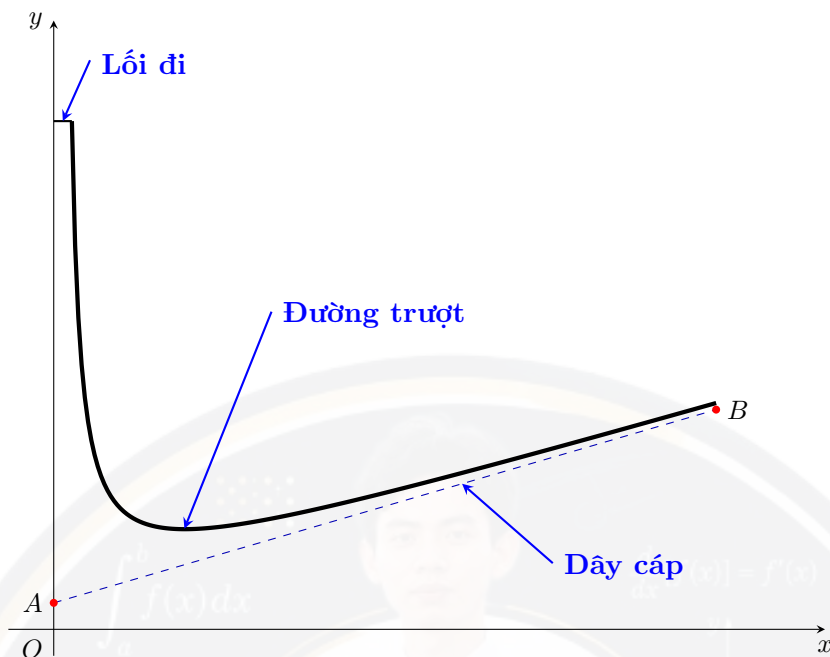
là bao nhiêu triệu đồng?



Bài 131. Một nhà hàng có tổng cộng 30 nhân viên và chi trả mức lương cố định cho mỗi nhân viên thường xuyên tăng ca là 400 USD/tháng. Vì nhà hàng liên tục đón những đoàn khách với số lượng lớn nhưng không thể thuê thêm nhân viên nên chủ nhà hàng này muốn khuyến khích nhân viên của mình tăng ca. Ông chủ quyết định cứ một nhân viên quyết định tăng ca thì mức lương của tất cả nhân viên tăng ca trong nhà hàng đều được tăng thêm 2%. Tương tự, nếu k nhân viên tăng ca thì lương cho mỗi người sẽ tăng $2k\%$. Bên cạnh tiền lương cho nhân viên thì tiền điện nước và duy trì cơ sở vật chất là cố định 8000 USD/tháng. Doanh thu trung bình từ khách hàng là 10000 USD/tháng và mỗi nhân viên tăng ca trung bình sẽ được khách hàng tip 800 USD/tháng (Tiền tip phải được nộp lại cho chủ cửa hàng và tính vào doanh thu). Xác định số nhân viên tăng ca cần có để lợi nhuận của nhà hàng đạt lớn nhất.

Bài 132. Tại một khu vui chơi giải trí, người ta thiết kế một đường trượt Zipline, xét mặt phẳng Oxy với trục Ox nằm ngang (đơn vị: m). Đường trượt được mô tả bằng một phần của đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 1}$, ($a \neq 0$) với chiều dài theo phương nằm ngang là 71 m. Ở điểm đầu của đường trượt, có một bục xuất phát song song với Ox , xuất phát từ một điểm thuộc Oy , dài 2 m và cao 19,2 m so với trục Ox . Để gia cố an toàn, người ta dùng một dây cáp AB với $A(0; 1)$ và đường thẳng AB là tiệm cận xiên của đồ thị. Tại điểm cuối của đường trượt, khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đường trượt và dây cáp là 0,25 m. Hỏi điểm thấp nhất của đường trượt

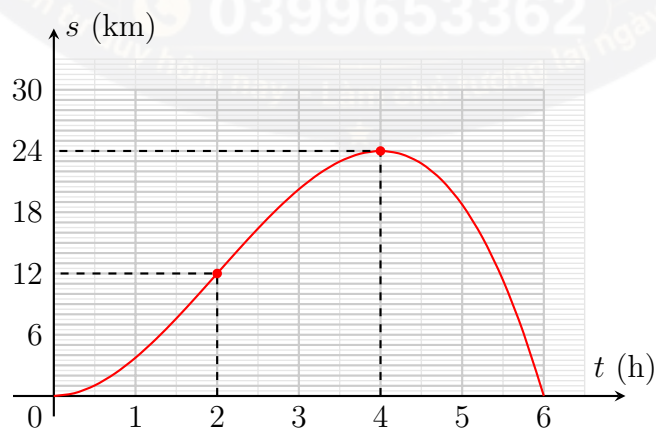
cao bao nhiêu mét? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Bài 133. Khu trò chơi trẻ em Gấu Misa hiện có khách lượng ổn định mỗi ngày là 1.000 khách. Mỗi khách vào cổng mua vé giá 40.000 đồng. Một cuộc khảo sát cho thấy cứ mỗi lần giảm 2.000 đồng giá vé, khu trò chơi có thể có thêm 100 khách. Để doanh thu thu được là tối đa, khu trò chơi nên bán vé với giá là bao nhiêu nghìn đồng?

Bài 134. Một bảo tàng khoa học muốn lắp đặt một cửa sổ trang trí lớn hình parabol trên bức tường phía tây của tòa nhà. Cửa sổ này có đỉnh cao nhất cách sàn nhà 15 mét. Một điểm trên khung cửa sổ được đo là cách trục đối xứng 5 mét và có độ cao 10 mét so với sàn nhà. Bên trong khung cửa sổ, người thiết kế muốn đặt một tấm kính màu hình chữ nhật, với hai đỉnh trên của tấm kính nằm trên đường cong của khung cửa sổ và hai đỉnh dưới của tấm kính nằm trên một thanh ngang cố định cách sàn nhà 3 mét (song song với sàn nhà). Diện tích lớn nhất của tấm kính màu là bao nhiêu mét vuông? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Bài 135. Thầy An tham dự giải “Đi bộ trực tuyến Ngành Giáo dục và Đào tạo Edu Run – HCMC” năm 2024. Quảng đường thầy An đi được biểu diễn bằng hàm số $s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ (với $a \neq 0$) có đồ thị như hình bên (trong đó t là thời gian tính bằng giờ, s là quãng đường tính bằng km). Khi đó, vận tốc tối đa của thầy An đạt được là bao nhiêu?

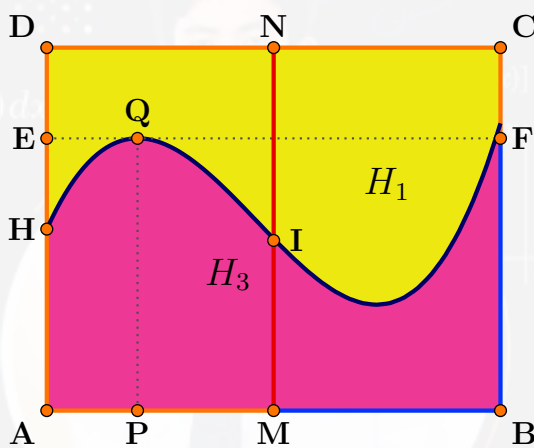


Bài 136. Công ty Apple đề xuất giá bán mỗi chiếc iPhone 17 Pro Max 1TB cho đại lý tại Việt Nam khi đại lý này nhập x chiếc là $P(x) = 50.000.000 - 5000x$ (VND). Hỏi doanh thu tối đa mà

công ty Apple nhận được từ đại lý này là bao nhiêu? (Đơn vị tỷ VND, kết quả làm tròn đến hàng phần nguyên).

Bài 137. Khuôn viên của một công viên có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 100\text{ m}$; $AD = 80\text{ m}$. Người ta muốn chia công viên thành hai khu, một khu dành cho trẻ em, một khu dành cho người lớn. Để tạo thiết kế độc đáo và lạ mắt, người ta dùng một đường cong chia khuôn viên thành hai phần H_1 (tô màu xanh) dành cho người lớn và H_3 (tô màu hồng) dành cho trẻ em như hình vẽ bên với $AH = 40\text{ m}$; $AE = 60\text{ m}$; $AP = 20\text{ m}$ và $EF \parallel AB$; $PQ \parallel AD$.

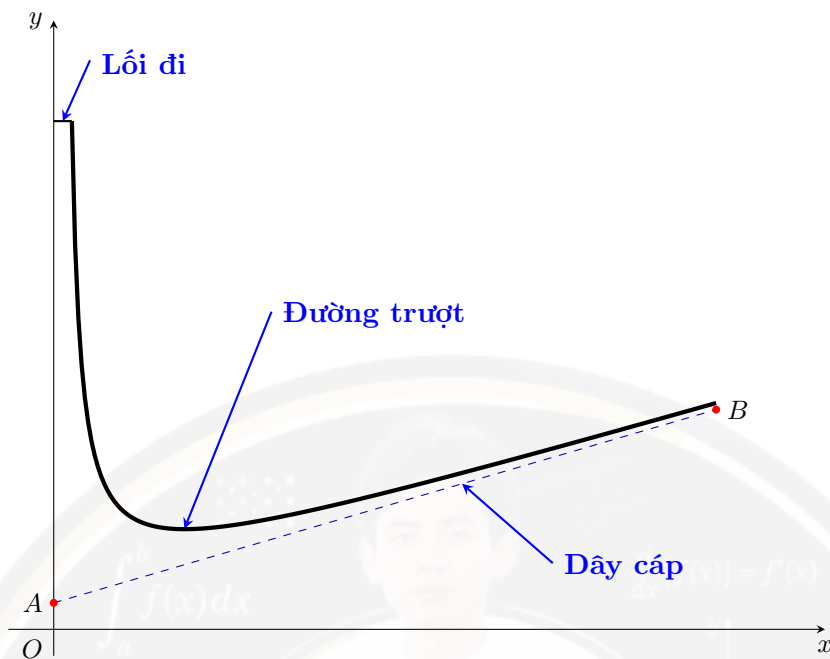
Biết rằng khi xét trong một hệ tọa độ Oxy , đường cong trong hình là một phần của đồ thị hàm số bậc ba. Phần chính giữa công viên người ta muốn mắc dây đèn trang trí dọc đoạn thẳng MN như hình. Biết giá tiền mỗi mét dây trang trí của phần dành cho trẻ em là 140 nghìn đồng và phần dành cho người lớn là 180 nghìn đồng. Tổng số tiền mắc dây đèn trang trí trên đoạn MN là bao nhiêu triệu đồng?



Bài 138. Một nhà hàng có tổng cộng 30 nhân viên và chi trả mức lương cố định cho mỗi nhân viên thường xuyên tăng ca là 400 USD/tháng. Vì nhà hàng liên tục đón những đoàn khách với số lượng lớn nhưng không thể thuê thêm nhân viên nên chủ nhà hàng này muốn khuyến khích nhân viên của mình tăng ca. Ông chủ quyết định cứ một nhân viên quyết định tăng ca thì mức lương của tất cả nhân viên tăng ca trong nhà hàng đều được tăng thêm 2%. Tương tự, nếu k nhân viên tăng ca thì lương cho mỗi người sẽ tăng $2k\%$. Bên cạnh tiền lương cho nhân viên thì tiền điện nước và duy trì cơ sở vật chất là cố định 8000 USD/tháng. Doanh thu trung bình từ khách hàng là 10000 USD/tháng và mỗi nhân viên tăng ca trung bình sẽ được khách hàng tip 800 USD/tháng (Tiền tip phải được nộp lại cho chủ cửa hàng và tính vào doanh thu). Xác định số nhân viên tăng ca cần có để lợi nhuận của nhà hàng đạt lớn nhất.

Bài 139. Tại một khu vui chơi giải trí, người ta thiết kế một đường trượt Zipline, xét mặt phẳng Oxy với trục Ox nằm ngang (đơn vị: m). Đường trượt được mô tả bằng một phần của đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 1}$, ($a \neq 0$) với chiều dài theo phương nằm ngang là 71 m. Ở điểm đầu của đường trượt, có một bục xuất phát song song với Ox , xuất phát từ một điểm thuộc Oy , dài 2 m và cao 19,2 m so với trục Ox . Để gia cố an toàn, người ta dùng một dây cáp AB với $A(0; 1)$ và đường thẳng AB là tiệm cận xiên của đồ thị. Tại điểm cuối của đường trượt, khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đường trượt và dây cáp là 0,25 m. Hỏi điểm thấp nhất của đường trượt

cao bao nhiêu mét? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Bài 140. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe Honda Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 (triệu đồng) và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất?

Bài 141. Hiện tại, mỗi tháng một cửa hàng đồ lưu niệm bán được 100 sản phẩm A. Với mỗi sản phẩm A bán được, cửa hàng thu được 20 nghìn đồng lợi nhuận. Qua khảo sát, người ta thấy rằng với mỗi nghìn đồng giảm giá, cửa hàng bán thêm được 10 sản phẩm A. Cửa hàng nên giảm giá bao nhiêu cho mỗi sản phẩm A để thu được lợi nhuận lớn nhất từ việc bán sản phẩm này? Tính lợi nhuận lớn nhất đó.

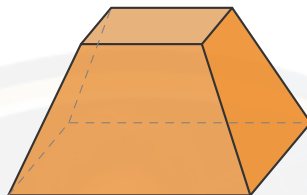
Bài 142. Một chủ nhà hàng kinh doanh phần ăn uống đồng giá có chiến lược kinh doanh như sau: Phí cố định được ước tính trong một năm là 55 triệu đồng. Chi phí một phần ăn ước tính khoảng 22 nghìn đồng. Giá niêm yết trên thực đơn là 30 nghìn đồng. Giả định rằng tất cả các phần ăn chế biến sẵn đều được bán hết và kí hiệu x là số phần ăn trong một năm, giả sử x là số nguyên thuộc $[5000; 25000]$. Mục tiêu của chủ nhà hàng là tạo ra lợi nhuận ít nhất là 135 triệu đồng mỗi năm. Biết rằng nhà hàng mở cửa 300 ngày một năm, hỏi trung bình mỗi ngày nhà hàng phải phục vụ ít nhất bao nhiêu phần ăn để đạt mục tiêu trên?

Bài 143. (Bài 24) Trận bóng đá giao hữu giữa đội tuyển Việt Nam và Singapore ở sân vận động Mỹ Đình có sức chứa 60.000 khán giả. Ban tổ chức bán vé với giá mỗi vé là 100 nghìn đồng, số khán giả trung bình đến sân xem bóng đá là 24.000 người. Qua thăm dò dư luận, người ta thấy rằng mỗi khi giá vé giảm thêm 10 nghìn đồng, sẽ có thêm khoảng 3000 khán giả. Hỏi ban tổ chức nên đặt giá vé là bao nhiêu để doanh thu từ tiền bán vé là lớn nhất?

Bài 144. Năm 2025, một cửa hàng cần nhập về tổng cộng 600 chiếc điện thoại. Cửa hàng sẽ nhận theo nhiều lô hàng, mỗi lô hàng chứa số điện thoại bằng nhau. Chi phí vận chuyển là 50 USD cho mỗi lô hàng, cộng thêm một loại phí vận chuyển là 3 USD cho mỗi chiếc điện thoại và phí này

cả năm chỉ tính cho lần vận chuyển đầu tiên. Hỏi cửa hàng đó nên nhập mỗi lô hàng bao nhiêu chiếc điện thoại để chi phí vận chuyển cả năm 2025 thấp nhất?

Bài 145. Một xưởng thủ công mỹ nghệ sản xuất loại chụp đèn trang trí dạng hình chóp cụt tứ giác đều. Gọi x là độ dài cạnh đáy lớn (đơn vị: dm). Tính toán cho thấy tổng chi phí vật liệu (tính bằng nghìn đồng) cho một chụp đèn là: $C(x) = x^2 + 27$ (nghìn đồng). Thời gian sản xuất cho một chụp đèn được xác định là: $T(x) = x + 3$ (giờ). Xưởng muốn xác định kích thước x để chi phí vật liệu trung bình trên một giờ sản xuất là thấp nhất, nhằm tối ưu hóa hiệu quả sử dụng thời gian và vật liệu. Hãy tìm giá trị của x .



Bài 146. Một cửa hàng phân phối gạo với chi phí mua vào là 30 nghìn đồng/kg, bán ra là 35 nghìn đồng/kg. Với giá bán này thì số gạo bán được trong một tháng là 12000 kg. Để đẩy mạnh hơn nữa doanh số tiêu thụ gạo trong một tháng, cửa hàng dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 nghìn đồng/kg thì số lượng gạo bán ra trong một tháng sẽ tăng thêm 4000 kg. Cửa hàng phải định giá bán gạo mới là bao nhiêu nghìn đồng một kilôgam thì lợi nhuận thu được trong tháng cao nhất?

Bài 147. Một đại lý nhập khẩu trái cây tươi để phân phối cho các cửa hàng. Mỗi lần nhập khẩu trái cây, khoảng chi phí vận chuyển (không đổi) là 25 triệu đồng. Chi phí bảo quản mỗi tạ trái cây trong kho là 80 nghìn đồng/ngày. Thời gian bảo quản tối đa 10 ngày. Biết rằng, kể từ ngày đầu tiên nhập hàng, đại lý sẽ phân phối tới các cửa hàng 25 tạ trái cây mỗi ngày. Mỗi lần nhập hàng, đại lý phải nhập đủ trái cây cho bao nhiêu ngày phân phối để chi phí trung bình cho mỗi ngày thấp nhất (bao gồm chi phí vận chuyển và chi phí bảo quản trong kho)?

Bài 148. Chi phí về nhiên liệu của một con tàu được chia làm hai phần. Phần chi phí thứ nhất không phụ thuộc vào tốc độ tàu và bằng 480 nghìn đồng mỗi giờ. Chi phí phần thứ hai trên 1 km đường tỉ lệ thuận với lập phương của tốc độ tàu, khi tốc độ bằng 20 km/h thì chi phí phần thứ hai bằng 100 nghìn đồng mỗi giờ. Giả sử con tàu đó luôn giữ nguyên tốc độ di chuyển, để tổng chi phí nhiên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất thì tốc độ của con tàu đó bằng bao nhiêu km/h? (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

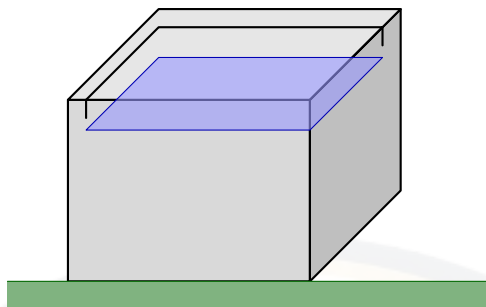
Bài 149. Một khu vui chơi giải trí dành cho trẻ em đang có kế hoạch điều chỉnh giá vé để tăng lợi nhuận. Sau khi khảo sát thị trường, người ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 50.000/người thì trung bình có 500 người đến. Nhưng nếu tăng thêm 1.000/người thì sẽ mất 10 khách hàng hoặc giảm đi 1.000/người thì sẽ có thêm 10 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 5.000 lợi nhuận trong các dịch vụ đi kèm. Hỏi giá vé vào cửa là bao nhiêu nghìn đồng để thu nhập là lớn nhất?

Bài 150. Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 300 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($1 \leq x \leq 300$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = -2x^2 + 1312x$ (nghìn đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là $G(x) = x^2 - 77x + 1000 + \frac{40000}{x}$ (nghìn đồng). Lợi nhuận thu được của doanh nghiệp (tính theo đơn vị triệu đồng) đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bài 151. Để tích trữ nước ngọt sinh hoạt chuẩn bị cho mùa hạn mặn ở Đồng bằng sông Cửu

Chương 3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

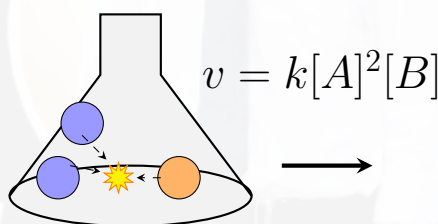
Long, một hộ dân muốn xây một bể nước không nắp dạng khối hộp chữ nhật có thể tích bằng 200 m^3 . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Biết chi phí xây bể là 850 nghìn đồng/ m^2 . Hãy tính chi phí thấp nhất mà hộ gia đình cần bỏ ra để xây dựng bể chứa nước ngọt dự trữ (làm tròn đến đơn vị triệu đồng).



Bài 152. Trong một phản ứng hóa học, tốc độ phản ứng v được biểu diễn theo công thức: $v = k \cdot [A]^2 \cdot [B]$, trong đó:

- ◇ v là tốc độ phản ứng (mol/l/s),
- ◇ $k = 0,1$ là hằng số tốc độ phản ứng,
- ◇ $[A]$ và $[B]$ lần lượt là nồng độ của hai chất phản ứng (mol/l).

Giả sử tổng nồng độ ban đầu của $[A]$ và $[B]$ là $C = 2 \text{ mol/l}$, tức là $[A] + [B] = 2$. Hãy tìm nồng độ của $[A]$ tại đó tốc độ phản ứng v đạt cực đại.



Bài 153. Một bể ban đầu chứa 10 gallon dung dịch muối với 2 lb (pound) muối. Dung dịch vào có nồng độ $1,5 \text{ lb/gallon}$ chảy vào với tốc độ 3 gallon/phút , và hỗn hợp trong bể chảy ra với tốc độ 4 gallon/phút . Người ta cho biết lượng muối trong bể sau t phút là m (pound), với:

$$m = f(t) = 1,5(10 - t) - 0,0013(10 - t)^4, \quad 0 \leq t \leq 10.$$

Hỏi lượng muối tối đa có thể có trong bể tại một thời điểm nào đó là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Bài 154. Khi chất thải hữu cơ được đổ vào một cái ao, quá trình ôxy hóa xảy ra sẽ làm giảm hàm lượng ôxy trong nước. Tuy nhiên, theo thời gian, tự nhiên sẽ phục hồi lại mức ôxy về giá trị bình thường. Trong đồ thị kèm theo, $P(t)$ cho biết phần trăm hàm lượng ôxy (so với mức bình thường) sau t ngày kể từ khi chất thải được đổ vào ao.

Giả sử hàm số biểu thị hàm lượng ôxy là $P(t) = 100 \frac{t^2 + 10t + 100}{t^2 + 20t + 100}$ (% mức bình thường), $t \geq 0$.

Tìm thời điểm mà hàm lượng ôxy thấp nhất.

Bài 155. Một cầu thủ thực hiện cú sút bóng xoáy (banana kick), làm bóng bay theo đường cong hình bậc ba thay vì một parabol thông thường. Quỹ đạo bóng trong hệ trục tọa độ Oxy được mô tả bởi phương trình $y = \frac{x^3}{100} - \frac{x^2}{10} + \frac{253x}{100}$, với y là độ cao của bóng (m). Biết chiều cao chuẩn của khung thành là $2,44 \text{ m}$. Khi bóng chạm xà ngang thì góc lệch của bóng và mặt đất là bao nhiêu? Biết góc lệch của bóng và mặt đất là góc của đường tiếp tuyến với đồ thị hàm số

$y = \frac{x^3}{100} - \frac{x^2}{10} + \frac{253x}{100}$ tại điểm chạm xà ngang và trục Ox (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Chương IV

LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

❖ **Câu 1.** Một vật có phương trình quỹ đạo tính theo thời gian là $s(t) = 5 + 8t - 2t^2$. Tại thời điểm nào, vật cách mốc tính quỹ đạo khoảng lớn nhất?

- (A) 1 giây. (B) 2 giây. (C) 3 giây. (D) 4 giây.

➤ *Hướng dẫn giải.* Do $v(t) = s'(t) = 8 - 4t = 0 \iff 8 - 4t \iff t = 2$

Dễ dàng vẽ được BBT và kết luận tại thời điểm 2 giây vật cách mốc tính quỹ đạo khoảng lớn nhất $\Rightarrow$ **Chọn B**

❖ **Câu 2.** Một vật dao động có phương trình là $x(t) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$ cm, t có đơn vị là giây. Mệnh đề nào sau đây đúng? Trong khoảng 2 giây đến 3 giây, vận tốc của vật tăng hay giảm?

- (A) Trong khoảng 2 giây đến 3 giây, vận tốc của vật không đổi.
(B) Trong khoảng 2 giây đến 3 giây, vận tốc của vật luôn tăng.
(C) Trong khoảng 2 giây đến 3 giây, vận tốc của vật luôn giảm.
(D) Trong khoảng 2 giây đến 3 giây, vận tốc của vật giảm, sau đó tăng..

➤ *Hướng dẫn giải.* Vận tốc của vật là:

$$v(t) = x'(t) = \left(2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)\right)' = \pi \cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$$

Gia tốc của chuyển động là:

$$a(t) = v'(t) = \left(\pi \cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)\right)' = -\frac{\pi^2}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{Với } 2 \leq t \leq 3 \Rightarrow \frac{2\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{6}$$

Khi đó $\sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right) < 0$ trong khoảng $\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3} < \pi$ và $\sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3}\right) > 0$ khi $\pi < \frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{6}$

$$\text{Do đó } a(t) < 0 \text{ khi } \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3} < \pi \text{ và } a(t) > 0 \text{ khi } \pi < \frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{6}$$

$\Rightarrow$ **Chọn: D**

❖ **Câu 3.** Một chất điểm chuyển động với vận tốc được cho bởi công thức $v(t) = -3t^2 + 12t + 1$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động. Hỏi sau bao lâu khi chất điểm chuyển động thì đạt được vận tốc lớn nhất?

- (A) 2 (s). (B) 1 (s). (C) 13 (s). (D) 4 (s).

Hướng dẫn giải. Ta có: $v(t) = -3t^2 + 12t + 1 \Rightarrow v'(t) = -6t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$

BBT

t	0	2	$+\infty$
$v'(t)$	+	0	-
$v(t)$	1	13	$-\infty$

$\Rightarrow$ Chọn A

Câu 4. Để thiết kế một chiếc bể cá hình hộp chữ nhật có chiều cao là 60 cm, thể tích 96000 cm³. Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70000 VNĐ/m² và loại kính để làm mặt đáy có giá thành 100000 VNĐ/m². Tính chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá.

- (A) 81200 VNĐ. (B) 80200 VNĐ. (C) 82200 VNĐ. (D) 83200 VNĐ.

Hướng dẫn giải. Gọi x, y ($x > 0, y > 0$, đơn vị m) là chiều dài và chiều rộng của đáy bể.

Khi đó theo đề bài, suy ra $0,6xy = 0,096 \Leftrightarrow y = \frac{0,16}{x}$.

Giá thành của bể cá được xác định theo hàm số sau:

$$f(x) = 2 \cdot 0,6 \left(x + \frac{0,16}{x} \right) \cdot 70000 + 100000 \cdot x \cdot \frac{0,16}{x} \Leftrightarrow f(x) = 84000 \left(x + \frac{0,16}{x} \right) + 16000.$$

Ta có: $f'(x) = 84000 \left(1 - \frac{0,16}{x^2} \right) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$ với $x \in (0; +\infty)$.

BBT

x	0	0,4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$f(0,4)$	

Dựa vào BBT suy ra chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là $f(0,4) = 83200$ VNĐ $\Rightarrow$ Chọn D.

Câu 5. Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- (A) 243 (m/s). (B) 27 (m/s). (C) 144 (m/s). (D) 36 (m/s).

Hướng dẫn giải. Ta có: $v(t) = s'(t) = -t^2 + 12t$; $v'(t) = -2t + 12$; $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

BBT

t	0	6	9
$v'(t)$	+	0	-
$v(t)$	0	36	27

Nhìn BBT ta thấy vận tốc đạt giá trị lớn nhất khi $t = 6$.

Giá trị lớn nhất là $v(6) = 36 \text{ m/s} \Rightarrow$ Chọn D

❖ **Câu 6.** Tại một công ty sản xuất đồ chơi A, công ty phải chi 50000 USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi A, công ty phải chi trả 5 USD cho nguyên liệu thô và nhân công. Gọi $x(x \geq 1)$ là số đồ chơi A mà công ty đã sản xuất và $T(x)$ (đơn vị USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải trả khi sản xuất x đồ chơi A. Người ta xác định chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A là $M(x) = \frac{T(x)}{x}$. Khi x đủ lớn ($x \rightarrow +\infty$) thì chi phí trung bình USD cho mỗi sản phẩm đồ chơi A gần nhất với kết quả nào sau đây?

- (A) 50000. (B) 50005. (C) 10. (D) 5.

➤ *Hướng dẫn giải.* Gọi $T(x)$ (đơn vị USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải trả khi sản xuất x đồ chơi A thì $T(x) = 50000 + 5x$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{T(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{50000}{x} + 5 \right) = 5 \Rightarrow$ Chọn D

❖ **Câu 7.** Một bể chứa ban đầu có 100 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 20 lít nước, đồng thời cho vào bể 10 gam chất khử trùng (hòa tan). Hàm số $f(t)$ thể hiện nồng độ chất khử trùng (gam/lít) trong bể sau t phút là:

- (A) $f(t) = \frac{20t + 100}{10t}$. (B) $f(t) = 20t + 100$.
(C) $f(t) = \frac{10t}{20t + 100}$. (D) $f(t) = 20,02 + 100$.

➤ *Hướng dẫn giải.* Hàm số $f(t)$ thể hiện nồng độ chất khử trùng (gam/lít) trong bể sau t phút là:

$f(t) = \frac{10t}{20t + 100} = \frac{t}{2t + 10} \Rightarrow$ Chọn C

❖ **Câu 8.** Hồ nuôi tôm giống của một anh nông dân chứa 30 khối nước, cứ mỗi giờ máy bơm nước sẽ bơm thêm vào hồ 4 khối nước, đồng thời anh ta cũng thêm vào 3 kg bột xử lý nước. Nồng độ (kg/khối) của bột xử lý nước trong hồ không bao giờ vượt qua

- (A) 12 (kg/khối). (B) 1,33 (kg/khối).
(C) 0,75 (kg/khối). (D) 0,05 (kg/khối).

➤ *Hướng dẫn giải.* Số khối nước tại thời điểm t là $4t + 30$.

Số kg bột có được tại thời điểm t là $3t$.

Nồng độ bột xử lý nước có trong hồ tại thời điểm t là $f(t) = \frac{3t}{4t + 30}$ với $t \geq 0$.

Khảo sát hàm số $f(t) = \frac{3t}{4t + 30}$ có $f'(t) = \frac{90}{(4t + 30)^2} > 0$ với mọi $t \geq 0$, nên hàm số $f(t)$ đồng

biến trên $[0; +\infty)$.

Khi đó $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3t}{4t+30} = \frac{3}{4} = 0,75$.

❖ **Câu 9.** Một công ty xác định tổng chi phí để sản xuất x đơn vị sản phẩm là $C(x) = x^2 + 40x + 2500$. Chi phí trung bình cho mỗi đơn vị sản phẩm là $M(x) = \frac{C(x)}{x}$. Chi phí trung bình thấp nhất khi số lượng sản phẩm sản xuất là

(A) $x = 40$.

(B) $x = 50$.

(C) $x = 60$.

(D) $x = 100$.

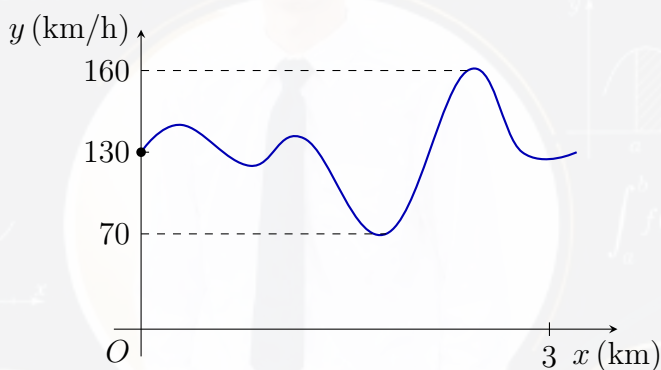
➤ **Hướng dẫn giải.** Ta có hàm chi phí trung bình: $M(x) = \frac{x^2 + 40x + 2500}{x} = x + 40 + \frac{2500}{x}$ (với $x > 0$).

Đạo hàm: $M'(x) = 1 - \frac{2500}{x^2}$.

$M'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2500 \Leftrightarrow x = 50$ (do $x > 0$).

Lập bảng biến thiên, ta thấy $M(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 50$.

❖ **Câu 10.** Đồ thị bên dưới là tốc độ của chiếc xe đua trên đoạn đường đua bằng phẳng dài 3 km



Tốc độ nhỏ nhất của xe đua trên đoạn đường này bằng

(A) 3 (km/h).

(B) 160 (km/h).

(C) 130 (km/h).

(D) 70 (km/h).

➤ **Hướng dẫn giải.** Dựa vào đồ thị hàm số, ta quan sát trục tung (y) để tìm giá trị thấp nhất của đường biểu diễn tốc độ.

Điểm thấp nhất của đồ thị tương ứng với giá trị $y = 70$ (km/h).

❖ **Câu 11.** Một vật được phóng thẳng đứng lên từ mặt đất với tốc độ ban đầu là 32,5 m/s (bỏ qua sức cản của không khí), độ cao (tính bằng mét) của vật sau t giây được cho bởi công thức $h(t) = 32,5t - 4,9t^2$. Vận tốc của vật sau 3 giây bằng

(A) 53,4 (m/s).

(B) 32,5 (m/s).

(C) 3,1 (m/s).

(D) 4,9 (m/s).

➤ **Hướng dẫn giải.** Ta có vận tốc của vật tại thời điểm t là đạo hàm của hàm độ cao theo thời gian:

$$v(t) = h'(t) = (32,5t - 4,9t^2)' = 32,5 - 9,8t \text{ (m/s)}.$$

Vận tốc của vật sau 3 giây là:

$$v(3) = 32,5 - 9,8 \cdot 3 = 32,5 - 29,4 = 3,1 \text{ (m/s)}.$$

❖ **Câu 12.** Một công ty sản xuất một sản phẩm. Bộ phận tài chính của công ty đưa ra hàm giá bán là $p(x) = 1000 - 25x$ trong đó $p(x)$ (triệu đồng) là giá bán của mỗi sản phẩm mà tại giá bán này có x sản phẩm được bán ra. Khi đó hàm doanh thu của công ty là

Chương 4. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

(A) $f(x) = 1000x - 25x^2$.

(B) $f(x) = 1000x + 25x^2$.

(C) $f(x) = 25x^2 - 1000x$.

(D) $f(x) = 1000 - 25x^2$.

Hướng dẫn giải. Ta có khi có x sản phẩm được bán ra thì giá bán là $p(x) = 1000 - 25x$, do đó doanh thu của cửa hàng bán ra x sản phẩm là $f(x) = x \cdot p(x) = 1000x - 25x^2 \Rightarrow$ **Chọn A**

Câu 13. Giả sử tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình v (km/h) theo công thức $C(v) = \frac{5400}{v} + \frac{3}{2}v$ ($0 < v \leq 120$). Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu để tiết kiệm tiền xăng nhất?

(A) 30.

(B) 60.

(C) 90.

(D) 120.

Hướng dẫn giải. Tập xác định $D = (0; 120]$.

Sự biến thiên: $C'(v) = -\frac{5400}{v^2} + \frac{3}{2} = \frac{3(v-60)(v+60)}{2v^2}$; $C' = 0 \iff v = -60$ (loại) hoặc $v = 60$ (nhận).

Ta thấy trên $(0; 60)$, $C'(v) < 0$; trên $(60; 120)$, $C'(v) > 0$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $v = 60$, $C_{CT} = C(60) = 180$.

Như vậy để tiết kiệm tiền xăng nhất, tài xế nên chạy xe với tốc độ trung bình là 60 (km/h) $\Rightarrow$ **Chọn B**

Câu 14. Dân số của Việt Nam sau t năm tính từ năm 2023 được dự đoán theo công thức với $N(t)$ tính theo đơn vị triệu người: $N(t) = 100 \cdot e^{0,012t}$, $0 < t \leq 50$. Biết rằng đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ gia tăng dân số của Việt Nam (đơn vị là triệu người/năm). Vào năm nào thì tốc độ gia tăng dân số hơn 2 triệu người/năm?

(A) 2063.

(B) 2064.

(C) 2065.

(D) 2066.

Hướng dẫn giải. Tập xác định: $D = (0; 50]$.

Đạo hàm $N'(t) = 1,2e^{0,012t} = 2 \Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{2}{1,2}\right)}{0,012} \approx 42,57$.

Vào năm $2023 + 42,57 \approx 2065,57$, tức là trong năm 2066 thì tốc độ gia tăng dân số hơn 2 triệu người/năm. $\Rightarrow$ **Chọn D**

Câu 15. Giả sử hàm cầu đối với một loại hàng hóa được cho bởi công thức $p = \frac{354}{1 + 0,01x}$, $x \geq 0$.

Trong đó p là giá bán (nghìn đồng) của mỗi đơn vị sản phẩm và x là số lượng đơn vị sản phẩm đã bán. Số lượng đơn vị sản phẩm bán được sẽ thay đổi như thế nào khi giá bán tăng?

(A) Tăng lên.

(B) Giảm đi.

(C) Không thay đổi.

(D) Không xác định được.

Hướng dẫn giải. Ta có $p'(x) = \frac{-3,54}{(1 + 0,01x)^2} < 0$ nên hàm số p nghịch biến.

Do đó, khi số lượng x tăng thì giá bán p giảm và ngược lại, nếu giá bán tăng thì số lượng đơn vị sản phẩm bán được giảm đi. $\Rightarrow$ **Chọn B**

Câu 16. Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được $s(t)$ (km) là hàm phụ thuộc theo biến t (giây) theo quy tắc sau: $s(t) = e^{t^2+3} + 2t \cdot e^{3t+1}$ (km). Hỏi vận tốc của tên lửa sau 1 giây là bao nhiêu (biết hàm biểu thị vận tốc là đạo hàm của hàm biểu thị quãng đường theo thời gian).

(A) $5e^4$ (km/s).

(B) $3e^4$ (km/s).

(C) $9e^4$ (km/s).

(D) $10e^4$ (km/s).

Hướng dẫn giải. Ta có công thức vận tốc là đạo hàm của quãng đường theo thời gian:

$$v(t) = s'(t) = (e^{t^2+3})' + (2t \cdot e^{3t+1})'$$

Áp dụng quy tắc đạo hàm hàm hợp $(e^u)' = u'e^u$ và đạo hàm tích $(uv)' = u'v + uv'$, ta có:

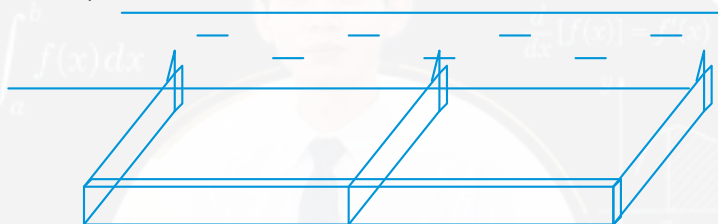
$$v(t) = 2t \cdot e^{t^2+3} + (2 \cdot e^{3t+1} + 2t \cdot 3 \cdot e^{3t+1}) = 2t \cdot e^{t^2+3} + (6t + 2)e^{3t+1}$$

Tại thời điểm $t = 1$ (giây), vận tốc của tên lửa là:

$$v(1) = 2 \cdot 1 \cdot e^{1^2+3} + (6 \cdot 1 + 2)e^{3 \cdot 1+1} = 2e^4 + 8e^4 = 10e^4 \text{ (km/s)}.$$

Vậy đáp án đúng là **D**.

❖ Câu 17. Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng mỗi mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng mỗi mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được.



(A) 6250 m².

(B) 1250 m².

(C) 3125 m².

(D) 50 m².

Hướng dẫn giải. Phân tích ta đặt các kích thước của hàng rào như hình vẽ:

❖ Gọi x (m) là độ dài của 3 đoạn hàng rào song song nhau (vuông góc với bờ sông).

❖ Gọi y (m) là độ dài mỗi đoạn của hàng rào song song với bờ sông. Tổng chiều dài đoạn này là $2y$ (m).

Từ đề bài, tổng chi phí nguyên vật liệu là 15 000 000 đồng, ta có mối quan hệ:

$$3x \cdot 50\,000 + 2y \cdot 60\,000 = 15\,000\,000 \iff 15x + 12y = 1500 \iff y = \frac{500 - 5x}{4}$$

Diện tích của khu vườn sau khi rào được tính bằng công thức:

$$f(x) = 2x \cdot y = 2x \cdot \frac{500 - 5x}{4} = \frac{1}{2}(-5x^2 + 500x)$$

Xét hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0; 100)$:

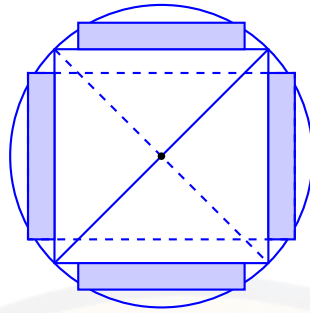
$$f'(x) = \frac{1}{2}(-10x + 500); \quad f'(x) = 0 \iff x = 50$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	50	100
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	6250	0

Dựa vào bảng biến thiên, diện tích lớn nhất đạt được là 6250 m² khi $x = 50$.

❖ **Câu 18.** Từ một khúc gỗ tròn hình trụ có đường kính bằng 40 cm, cần xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và bốn miếng phụ được tô màu xanh như hình vẽ dưới đây. Tìm chiều rộng x của miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất.



(A) $x = \frac{3\sqrt{34} - 17\sqrt{2}}{2}$ (cm).

(B) $x = \frac{3\sqrt{34} - 19\sqrt{2}}{2}$ (cm).

(C) $x = \frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2}$ (cm).

(D) $x = \frac{5\sqrt{34} - 13\sqrt{2}}{2}$ (cm).

➤ **Hướng dẫn giải.** Diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là $S = S_{MNPQ} + 4xy$.

Cạnh hình vuông $MN = \frac{MP}{\sqrt{2}} = \frac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}$ (cm).

$\Rightarrow S_{MNPQ} = (20\sqrt{2})^2 = 800 \Rightarrow S = 800 + 4xy$.

Ta có $2x = AB - MN = AB - 20\sqrt{2}$. Vì $AB < BD = 40$ nên $0 < x < 20 - 10\sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông có cạnh huyền là đường kính khúc gỗ (40 cm), ta có mối quan hệ giữa x và y :

$$(2x + 20\sqrt{2})^2 + y^2 = 40^2 = 1600 \Rightarrow y = \sqrt{800 - 80\sqrt{2}x - 4x^2}$$

Thế vào công thức diện tích:

$$S = 800 + 4x\sqrt{800 - 80\sqrt{2}x - 4x^2} = 800 + 4\sqrt{800x^2 - 80\sqrt{2}x^3 - 4x^4}$$

Xét hàm số $f(x) = 800x^2 - 80\sqrt{2}x^3 - 4x^4$ với $x \in (0; 20 - 10\sqrt{2})$:

$$f'(x) = 1600x - 240\sqrt{2}x^2 - 16x^3 = 16x(100 - 15\sqrt{2}x - x^2).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 15\sqrt{2}x - 100 = 0 \text{ (do } x > 0 \text{)}.$$

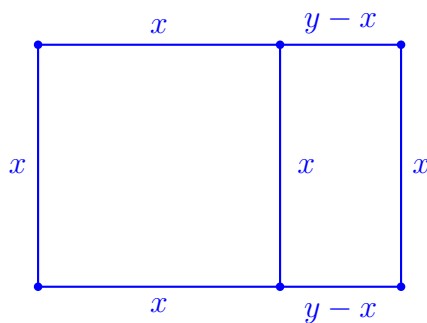
Giải phương trình bậc hai ta được: $x = \frac{-15\sqrt{2} + \sqrt{(15\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-100)}}{2} = \frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2}$.

Giá trị này thỏa mãn điều kiện $x \in (0; 20 - 10\sqrt{2})$. Vậy diện tích lớn nhất khi $x = \frac{5\sqrt{34} - 15\sqrt{2}}{2}$.

C

❖ **Câu 19.** Kỳ thi THPT Quốc gia năm 2016 vừa kết thúc, Nam đỗ vào trường Đại học Bách Khoa Hà Nội. Kỳ I của năm nhất gần qua, kỳ II sắp đến. Hoàn cảnh không được tốt nên gia đình rất lo lắng về việc đóng học phí cho Nam, kỳ I đã khó khăn, kỳ II càng khó khăn hơn. Gia đình đã quyết định bán một phần mảnh đất hình chữ nhật có chu vi 50 m, lấy tiền lo cho việc học của Nam cũng như tương lai của em. Mảnh đất còn lại sau khi bán là một hình vuông cạnh bằng chiều rộng của mảnh đất hình chữ nhật ban đầu. Tìm số tiền lớn nhất mà gia đình Nam nhận được khi

bán đất, biết giá tiền 1 m² đất khi bán là 1.500.000 VN đồng.



(A) 112.687.500 VN đồng.

(B) 114.187.500 VN đồng.

(C) 115.687.500 VN đồng.

(D) 117.187.500 VN đồng.

Hướng dẫn giải. Diện tích đất bán ra càng lớn thì số tiền bán được càng cao.

Gọi chiều rộng và chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật ban đầu lần lượt là x, y (m) ($x, y > 0$).

Chu vi mảnh đất hình chữ nhật ban đầu bằng 50 m $\Rightarrow 2(x + y) = 50 \Leftrightarrow y = 25 - x$.

Phần đất được bán là một hình chữ nhật (phần còn lại sau khi trừ đi hình vuông cạnh x) có diện tích là:

$$S = x(y - x) = x(25 - x - x) = 25x - 2x^2$$

Biến đổi về hằng đẳng thức để tìm GTLN:

$$S = -2 \left(x^2 - \frac{25}{2}x \right) = -2 \left(x\sqrt{2} - \frac{25}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{625}{8} \leq \frac{625}{8} = 78,125$$

Dấu "=" xảy ra khi $x\sqrt{2} - \frac{25}{2\sqrt{2}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{25}{4} = 6,25 \Rightarrow y = 18,75$.

Như vậy, diện tích đất bán ra lớn nhất là 78,125 m².

Khi đó số tiền lớn nhất mà gia đình Nam nhận được là:

$$78,125 \times 1.500.000 = 117.187.500 \text{ (VN đồng)}.$$

❖ Câu 20. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ tăng thêm giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng một tháng thì sẽ có 2 căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng?

(A) 2.225.000 đồng.

(B) 2.100.000 đồng.

(C) 2.200.000 đồng.

(D) 2.250.000 đồng.

Hướng dẫn giải. Gọi số căn hộ bị bỏ trống là x ($x \in [0; 50]$ và x là số chẵn). Khi đó số căn hộ được thuê là $50 - x$.

Cứ 2 căn hộ bỏ trống thì giá tăng 100.000, vậy nếu x căn hộ bỏ trống thì giá thuê tăng lên là $\frac{x}{2} \cdot 100.000 = 50.000x$ (đồng).

Giá thuê mỗi căn hộ lúc này là: $2.000.000 + 50.000x$.

Tổng số tiền thu được trong 1 tháng là:

$$f(x) = (2.000.000 + 50.000x)(50 - x) = -50.000x^2 + 500.000x + 100.000.000$$

Đây là hàm bậc hai có đỉnh tại $x = \frac{-500.000}{2 \cdot (-50.000)} = 5$.

Tuy nhiên x phải là số chẵn, ta so sánh $f(4)$ và $f(6)$ (hoặc xét thực tế tăng giá từng nấc). Khảo sát hàm số liên tục ta thấy số tiền lớn nhất đạt được khi $x = 5$ (tương đương tăng 5 nấc giá 50.000).

Chương 4. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Giá thuê mỗi tháng để thu nhập cao nhất là: $2.000.000 + 50.000 \cdot 5 = 2.250.000$ đồng.

❖ **Câu 21.** Người ta muốn sơn một cái hộp không nắp, đáy hộp là hình vuông và có thể tích là 4 (đơn vị thể tích). Tìm kích thước của hộp để dùng lượng nước sơn tiết kiệm nhất. Giả sử độ dày của lớp sơn tại mọi nơi trên hộp là như nhau.

- (A) Cạnh ở đáy là 2, chiều cao là 1.
- (B) Cạnh ở đáy là $\sqrt{2}$, chiều cao là 2.
- (C) Cạnh ở đáy là $2\sqrt{2}$, chiều cao là 0,5.
- (D) Cạnh ở đáy là 1, chiều cao là 2.

➤ *Hướng dẫn giải.* Gọi x, l lần lượt là độ dài cạnh ở đáy và chiều cao của hộp ($x > 0, l > 0$).

Vì hộp không nắp nên tổng diện tích cần sơn (diện tích toàn phần bỏ 1 đáy) là:

$$S(x) = 4xl + x^2 \quad (1)$$

Thể tích của hộp là $V = x^2l = 4 \Rightarrow l = \frac{4}{x^2} \quad (2)$.

Thay (2) vào (1) ta được:

$$S(x) = 4x \cdot \frac{4}{x^2} + x^2 = x^2 + \frac{16}{x}$$

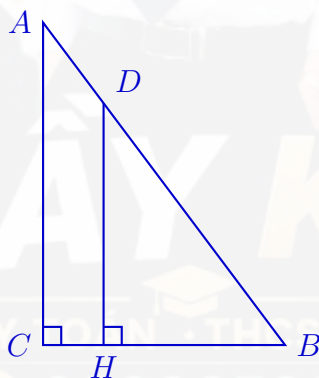
Xét hàm số $S(x)$ trên $(0; +\infty)$: $S'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2}$.

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2.$$

Lập bảng biến thiên ta thấy $S(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$. Khi đó $l = \frac{4}{2^2} = 1$.

Vậy kích thước hộp để tiết kiệm sơn nhất là cạnh đáy bằng 2 và chiều cao bằng 1.

❖ **Câu 22.** Chiều dài bé nhất của cái thang AB để nó có thể tựa vào tường AC và mặt đất BC , ngang qua cột đỡ DH cao 4 m, song song và cách tường $CH = 0,5$ m là:



- (A) Xấp xỉ 5,602.
- (B) Xấp xỉ 6,5902.
- (C) Xấp xỉ 5,4902.
- (D) Xấp xỉ 5,5902.

➤ *Hướng dẫn giải.* Đặt $BH = x$ ($x > 0$). Ta có $DH = 4$, $CH = 0,5$.

Xét tam giác vuông BHD , ta có: $BD = \sqrt{DH^2 + BH^2} = \sqrt{x^2 + 16}$.

Vì $DH \parallel AC$ nên theo định lý Ta-lét, ta có:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BH} = \frac{x + 0,5}{x} = 1 + \frac{1}{2x}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{x^2 + 16} \cdot \left(1 + \frac{1}{2x}\right) = \sqrt{x^2 + 16} + \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{2x}$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 16} + \frac{\sqrt{x^2 + 16}}{2x}$ trên $(0; +\infty)$.

Đạo hàm:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} + \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+16}} \cdot 2x - 2\sqrt{x^2+16}}{4x^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} + \frac{2x^2 - 2(x^2+16)}{4x^2\sqrt{x^2+16}}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} - \frac{32}{4x^2\sqrt{x^2+16}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} - \frac{8}{x^2\sqrt{x^2+16}} = \frac{x^3 - 8}{x^2\sqrt{x^2+16}}$$

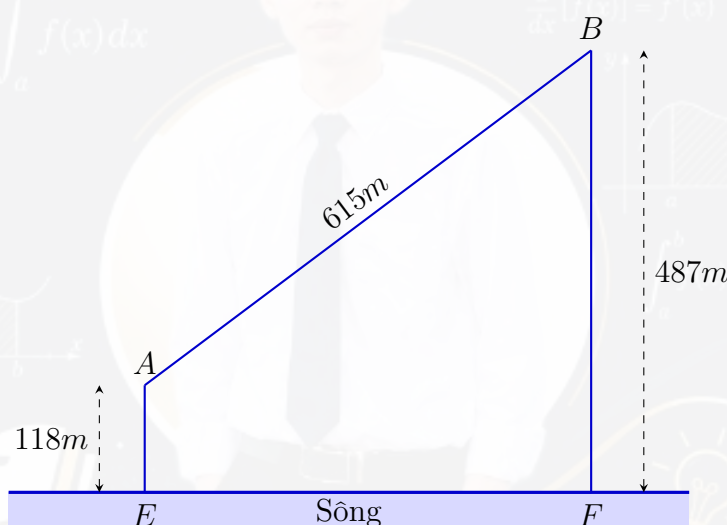
Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên cho thấy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 2$. Khi đó:

$$\min AB = f(2) = \sqrt{2^2+16} + \frac{\sqrt{2^2+16}}{2 \cdot 2} = \sqrt{20} + \frac{\sqrt{20}}{4} = \frac{5\sqrt{20}}{4} = \frac{10\sqrt{5}}{4} = \frac{5\sqrt{5}}{2} \approx 5,5901699$$

Vậy chiều dài bé nhất của cái thang xấp xỉ 5,5902 m. $\Rightarrow$ **Chọn D.**

❖ **Câu 23.** Cho hai vị trí A, B cách nhau 615 m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118 m và 487 m. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B . Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là:



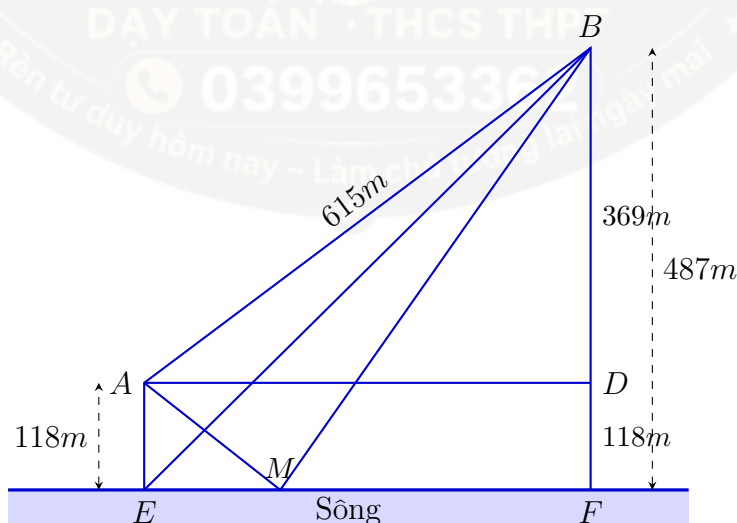
(A) 596,5 m.

(B) 671,4 m.

(C) 779,8 m.

(D) 741,2 m.

➡ **Hướng dẫn giải.** Giả sử người đó đi từ A đến M trên bờ sông để lấy nước và đi từ M về B .



Dễ dàng tính được $BD = 487 - 118 = 369$ (m).

Chương 4. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác vuông ADB , ta có: $EF = AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{615^2 - 369^2} = 492$ (m).

Ta đặt $EM = x$ ($0 \leq x \leq 492$), khi đó ta được: $MF = 492 - x$, $AM = \sqrt{x^2 + 118^2}$, $BM = \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}$.

Như vậy ta có hàm số $f(x)$ được xác định bằng tổng quãng đường AM và MB :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 118^2} + \sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} \text{ với } x \in [0; 492]$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ để có được quãng đường ngắn nhất:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} - \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 118^2}} = \frac{492 - x}{\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2}}$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{(492 - x)^2 + 487^2} = (492 - x)\sqrt{x^2 + 118^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2[(492 - x)^2 + 487^2] = (492 - x)^2(x^2 + 118^2)$$

$$\Leftrightarrow (487x)^2 = [118(492 - x)]^2 \Leftrightarrow 487x = 118(492 - x) \Leftrightarrow 605x = 58056 \Leftrightarrow x = \frac{58056}{605}.$$

So sánh các giá trị $f(0)$, $f\left(\frac{58056}{605}\right)$, $f(492)$ ta có giá trị nhỏ nhất là:

$$f\left(\frac{58056}{605}\right) = \sqrt{(118 + 487)^2 + 492^2} = \sqrt{605^2 + 492^2} \approx 779,8 \text{ (m)}.$$

Vậy quãng đường ngắn nhất xấp xỉ 779,8 m.

❖ **Câu 24.** Thể tích V (đơn vị: cm^3) của 1 kg nước tại nhiệt độ T (đơn vị: $^{\circ}\text{C}$) được tính bởi hàm số $V(T)$, $T \in [0; 30]$. Biết hàm số $V(T)$ có bảng biến thiên như sau:

T	0	T_1	30
$V'(T)$	-	0	+
$V(T)$	$V(0)$	$V(T_1)$	$V(30)$

Với $T_1 \approx 3,97^{\circ}\text{C}$. Hỏi thể tích $V(T)$ giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

- (A) (0; 3,97). (B) (0; 5). (C) (0; 10). (D) (0; 30).

➤ **Hướng dẫn giải.** Từ bảng biến thiên (BBT) ta suy ra, thể tích $V(T)$ giảm trong khoảng nhiệt độ từ 0 đến 3,97 $^{\circ}\text{C}$ (ứng với khoảng đạo hàm mang dấu âm).

Chọn A.

❖ **Câu 25.** Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hóa bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2$, $0 \leq t \leq 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần). Hỏi số người bị nhiễm bệnh tăng trong khoảng thời gian nào?

- (A) (0; 10). (B) (0; 8). (C) (8; 10). (D) (8; 12).

➤ **Hướng dẫn giải.** Ta có: $N'(t) = -3t^2 + 24t$.

$$N'(t) = 0 \Leftrightarrow -3t(t - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 8 \end{cases}$$

BBT:

t	0	8	12
$N'(t)$	+	0	-
$N(t)$	0 256 0		

Từ BBT ta thấy số người bị nhiễm bệnh tăng trong khoảng thời gian $(0; 8)$ (ứng với khoảng đạo hàm dương).

Chọn B.

❖ **Câu 26.** Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = t^2 - \frac{1}{6}t^3$ (m). Tìm thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

- (A) $t = 2$. (B) $t = 0, 5$. (C) $t = 2, 5$. (D) $t = 1$.

➤ *Hướng dẫn giải.* Ta có vận tốc: $v(t) = s'(t) = 2t - \frac{1}{2}t^2$.

Để tìm vận tốc lớn nhất, ta xét $v'(t) = 2 - t$.

$$v'(t) = 0 \iff t = 2.$$

BBT:

t	2		
$v'(t)$	+	0	-
$v(t)$	2		

Vậy chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm $t = 2$ (giây).

Chọn A.

❖ **Câu 27.** Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin 12V được cho bởi công thức $P = 12I - 0,5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Tìm công suất tối đa của mạch điện.

- (A) 72. (B) 12. (C) $-\frac{1}{192}$. (D) $\frac{23}{2}$.

➤ *Hướng dẫn giải.* Xét hàm số $P = 12I - 0,5I^2$ với $I \geq 0$ có đạo hàm $P' = 12 - I$; $P' = 0 \iff I = 12$.

BBT

I	0	12	$+\infty$
$P'(I)$	+	0	-
$P(I)$	0 72 0		

Chương 4. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Công suất tối đa của mạch điện là $72(W)$ đạt được khi cường độ dòng điện là $12(A) \Rightarrow$ **Chọn B**

❖ **Câu 28.** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- (A) 289 (m/s). (B) 105 (m/s). (C) 111 (m/s). (D) 487 (m/s).

🔪 *Hướng dẫn giải.* Ta có: $v(t) = s' = -6t^2 + 48t + 9$. Xét hàm số $v(t) = -6t^2 + 48t + 9, t \in [0; 10]$

Ta có: $v'(t) = -12t + 48 = 0 \iff t = 4$ (Nhận).

$$\text{Ta có } \begin{cases} v(0) = 9 \\ v(4) = 105 \\ v(10) = -111 \end{cases}$$

$\Rightarrow \max v(t) = v(4) = 105 \Rightarrow$ **Chọn B**

❖ **Câu 29.** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $G(x) = 0,25x^2(30 - x)$ trong đó x (mg) và $x > 0$ là lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng bao nhiêu?

- (A) 15 mg. (B) 30 mg. (C) 40 mg. (D) 20 mg.

🔪 *Hướng dẫn giải.* Ta có: $G(x) = 0,25x^2(30 - x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{40}x^3$

$$G'(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{40}x^2; G'(x) = 0 \iff \frac{3}{2}x - \frac{3}{40}x^2 = 0 \iff \begin{cases} x = 0(l) \\ x = 20(n) \end{cases}$$

BBT

x	0	20	$+\infty$
$G'(x)$	+	0	-
$G(x)$		100	

Dựa vào BBT thì bệnh nhân cần tiêm một lượng thuốc 20 mg $\Rightarrow$ **Chọn D**

❖ **Câu 30.** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $G(t) = 45t^2 - t^3$, (kết quả khảo sát được trong 10 tháng vừa qua). Nếu xem $G'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ

- (A) 25. (B) 30. (C) 20. (D) 15.

🔪 *Hướng dẫn giải.* Ta có: $G'(t) = 90t - 3t^2; G''(t) = 90 - 6t = 0 \iff t = 15$

t	0	15	$+\infty$
$G''(t)$	+	0	-
$G'(t)$	675 ↗ ↘		

Vậy tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ 15 $\Rightarrow$ **Chọn D**

❖ **Câu 31.** Hằng ngày mực nước của con kênh xuống theo thủy triều, độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (h) trong ngày cho bởi công thức $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$. Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

- (A) $t = 10$ (h). (B) $t = 14$ (h). (C) $t = 15$ (h). (D) $t = 22$ (h).

➤ *Hướng dẫn giải.* Vì $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Rightarrow 9 \leq 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12 \leq 15$

Vậy để h lớn nhất thì $\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \iff \frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3} = k2\pi \iff t = -2 + 12k, (k \in \mathbb{Z}_+)$

Vậy h đạt giá trị lớn nhất khi $t = 10$ (h) $\Rightarrow$ **Chọn A**

❖ **Câu 32.** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$ (kết quả khảo sát được trong 8 tháng vừa qua). Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ mấy?

- (A) 12. (B) 30. (C) 20. (D) 15.

➤ *Hướng dẫn giải.* Tốc độ truyền bệnh là $v(t) = f'(t) = 90t - 3t^2$.

Để tốc độ truyền bệnh lớn nhất, ta xét đạo hàm của $v(t)$: $v'(t) = f''(t) = 90 - 6t$.

Cho $v'(t) = 0 \iff 90 - 6t = 0 \iff t = 15$.

Dựa vào bảng biến thiên hoặc tính chất hàm bậc hai, ta thấy $f'(t)$ đạt giá trị lớn nhất khi $t = 15$.

❖ **Câu 33.** Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ tăng thêm giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng một tháng thì sẽ có 2 căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng?

- (A) 2.225.000. (B) 2.100.000. (C) 2.200.000. (D) 2.250.000.

➤ *Hướng dẫn giải.* Gọi số căn hộ bị bỏ trống là x ($x \in [0; 50]$ và x chẵn).

Số căn hộ được thuê là $50 - x$.

Vì cứ tăng 100.000 thì trống 2 căn, nên nếu trống x căn thì giá thuê đã tăng: $\frac{x}{2} \cdot 100.000 = 50.000x$ (đồng).

Giá thuê mỗi căn hộ là: $2.000.000 + 50.000x$.

Doanh thu một tháng là: $f(x) = (2.000.000 + 50.000x)(50 - x) = -50.000x^2 + 500.000x + 100.000.000$.

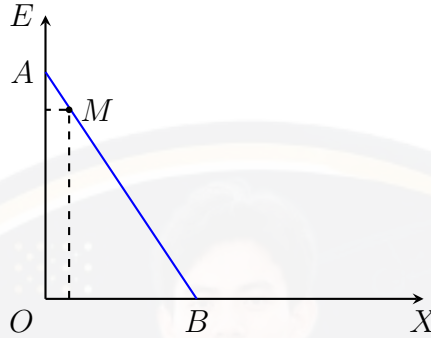
Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = \frac{-500.000}{2 \cdot (-50.000)} = 5$.

Tuy nhiên x phải nguyên chẵn, ta kiểm tra $x = 4$ và $x = 6$ cho cùng kết quả doanh thu lớn nhất.

Chương 4. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Khi đó giá thuê tương ứng là $2.000.000 + 50.000 \cdot 5 = 2.250.000$ đồng.

❖ **Câu 34.** Trên một đoạn đường giao thông có 2 con đường vuông góc với nhau tại O như hình vẽ. Một địa danh lịch sử có vị trí đặt tại M , vị trí M cách đường OE 125 m và cách đường OX 1 km. Vì lý do thực tiễn người ta muốn làm một đoạn đường thẳng AB đi qua vị trí M , biết rằng giá để làm 100 m đường là 150 triệu đồng. Chọn vị trí của A và B để hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất. Hỏi chi phí thấp nhất là bao nhiêu?



(A) 1,9063 tỷ đồng.

(B) 2,3965 tỷ đồng.

(C) 2,0963 tỷ đồng.

(D) 3 tỷ đồng.

➤ **Hướng dẫn giải.** Đổi $125 \text{ m} = \frac{1}{8} \text{ km}$. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $M\left(\frac{1}{8}; 1\right)$.

Gọi $B(m; 0)$ và $A(0; n)$ với $m, n > 0$. Phương trình đường thẳng AB là: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$.

Do AB qua $M \Rightarrow \frac{1}{8m} + \frac{1}{n} = 1 \Rightarrow n = \frac{8m}{8m-1}$ (với $m > 1/8$).

Độ dài con đường: $AB^2 = m^2 + n^2 = m^2 + \left(\frac{8m}{8m-1}\right)^2$.

Xét hàm $f(m) = m^2 + \left(\frac{8m}{8m-1}\right)^2$, đạo hàm $f'(m) = 2m + 2\left(\frac{8m}{8m-1}\right) \cdot \frac{-8}{(8m-1)^2}$.

$f'(m) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{64}{(8m-1)^3} = 0 \Leftrightarrow (8m-1)^3 = 64 \Leftrightarrow 8m-1 = 4 \Leftrightarrow m = \frac{5}{8}$.

Khi đó $AB = \sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{8} \text{ (km)}$.

Chi phí: $\frac{5\sqrt{5}}{8} \cdot 1,5 \approx 2,0963$ tỷ đồng.

❖ **Câu 35.** Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = -t^3 + 9t^2 + t + 10$, trong đó t tính bằng (s) và S tính bằng (m). Thời gian vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất là:

(A) $t = 5 \text{ s}$.

(B) $t = 6 \text{ s}$.

(C) $t = 2 \text{ s}$.

(D) $t = 3 \text{ s}$.

➤ **Hướng dẫn giải.** Vận tốc là đạo hàm của quãng đường: $v(t) = S' = -3t^2 + 18t + 1$.

Xét $v'(t) = -6t + 18$. Cho $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

Bảng biến thiên:

t	0	3	$+\infty$
v'	+	0	-
v	1	28	$-\infty$

Suy ra vận tốc đạt giá trị lớn nhất tại $t = 3$ s.

❖ **Câu 36.** Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm tính theo công thức $V(t) = \frac{1}{100}(30t^3 - \frac{t^4}{4})(0 \leq t \leq 90)$. Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $v(t) = V'(t)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng

- (A) Tốc độ bơm giảm từ phút 60 đến phút thứ 90.
- (B) Tốc độ bơm luôn giảm.
- (C) Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75.
- (D) cả ba đáp án đều sai.

➤ **Hướng dẫn giải.** Xét hàm $V' = \frac{9}{10}t^2 - \frac{1}{100}t^3 (0 \leq t \leq 90)$; $V'' = \frac{9}{5}t - \frac{3}{100}t^2 \Rightarrow V'' = 0$ khi $t = 0, t = 60$.

Dễ dàng vẽ BBT ta có V' đồng biến trên $(0; 60)$ và nghịch biến trên $(60; 90) \Rightarrow$ **Chọn A**

❖ **Câu 37.** Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã nhận thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $P(n) = 480 - 20n$ (g). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

- (A) 14.
- (B) 13.
- (C) 12.
- (D) 11.

➤ **Hướng dẫn giải.** Gọi $F(n)$ là tổng cân nặng của n con cá sau vụ thu hoạch trên một đơn vị diện tích.

Ta có: $F(n) = (480 - 20n) \cdot n = 480n - 20n^2$.

Để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất thì $F(n)$ phải đạt giá trị lớn nhất.

Xét $F'(n) = 480 - 40n$; $F'(n) = 0 \iff 480 - 40n = 0 \iff n = 12$.

Dựa vào BBT của hàm bậc hai, ta kết luận phải thả 12 con cá trên một đơn vị diện tích. $\Rightarrow$ **Chọn C**

❖ **Câu 38.** Để giảm nhiệt độ trong phòng từ $28^\circ C$, một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị $^\circ C$) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1; 10]$. Tìm nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động.

- (A) $27,832^\circ C$.
- (B) $18,4^\circ C$.
- (C) $26,2^\circ C$.
- (D) $25,312^\circ C$.

➤ **Hướng dẫn giải.** Xét hàm số $T(t) = -0,008t^3 - 0,16t + 28$ với $t \in [1; 10]$.

$T'(t) = -0,024t^2 - 0,16 < 0, \forall t \in [1; 10]$ suy ra hàm số $T(t)$ nghịch biến trên đoạn $[1; 10]$.

Do đó nhiệt độ thấp nhất đạt được tại $t = 10$: $T_{\min} = T(10) = 18,4^\circ C \Rightarrow$ **Chọn B**

❖ **Câu 39.** Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ

Chương 4. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

- (A) 2.250.000. (B) 2.350.000. (C) 2.450.000. (D) 2.550.000.

Hướng dẫn giải. Gọi x là giá thuê thực tế của mỗi căn hộ (đơn vị: đồng), với $x \geq 2.000.000$.

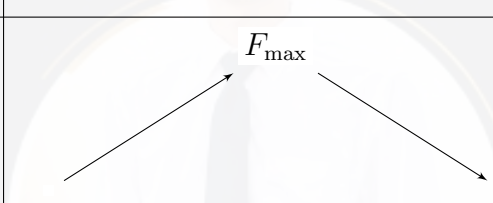
Số tiền tăng thêm so với mức giá cũ là $x - 2.000.000$.

Số căn hộ bị bỏ trống là: $\frac{x - 2.000.000}{100.000} \cdot 2 = \frac{x - 2.000.000}{50.000}$.

Số căn hộ có người thuê là: $50 - \frac{x - 2.000.000}{50.000} = -\frac{x}{50.000} + 90$.

Tổng lợi nhuận: $F(x) = x \left(-\frac{x}{50.000} + 90 \right) = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$.

Đạo hàm: $F'(x) = -\frac{1}{25.000}x + 90$; $F'(x) = 0 \iff x = 2.250.000$.

x	2.000.000	2.250.000	$+\infty$
$F'(x)$	+	0	-
$F(x)$			

Vậy giá thuê tối ưu là 2.250.000 đồng $\Rightarrow$ **Chọn A**

Câu 40. Một cửa hàng bán bưởi Doan Hùng với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng thì chỉ bán được khoảng 40 quả. Nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5.000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Biết giá nhập vào là 30.000 đồng/quả. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

- (A) 44.000đ. (B) 43.000đ. (C) 42.000đ. (D) 41.000đ.

Hướng dẫn giải. Gọi x là giá bán mỗi quả bưởi ($30.000 \leq x \leq 50.000$).

Số tiền giảm giá: $50.000 - x$.

Số quả bán thêm được: $\frac{50.000 - x}{5.000} \cdot 50 = \frac{1}{100}(50.000 - x)$.

Tổng số quả bán được: $40 + \frac{50.000 - x}{100} = -\frac{1}{100}x + 540$.

Lợi nhuận trên một quả: $x - 30.000$.

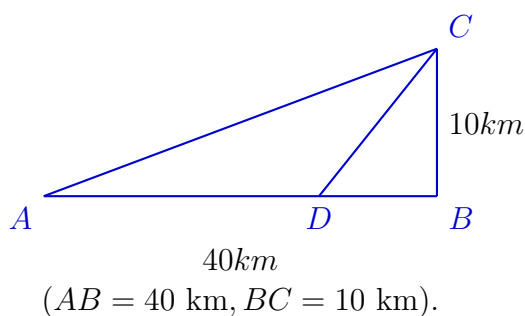
Tổng lợi nhuận: $F(x) = \left(-\frac{1}{100}x + 540 \right) (x - 30.000) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16.200.000$.

$F'(x) = -\frac{1}{50}x + 840$; $F'(x) = 0 \iff x = 42.000$.

Giá bán 42.000 đồng cho lợi nhuận tối đa. $\Rightarrow$ **Chọn C**

Câu 41. Một người cần đi từ khách sạn A bên bờ biển đến hòn đảo C. Biết rằng khoảng cách từ đảo C đến bờ biển là 10 km, khoảng cách từ khách sạn A đến điểm B trên bờ gần đảo C nhất là 40 km. Người đó có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy (như hình vẽ dưới đây). Biết kinh phí đi đường thủy là 5 USD/km, đi đường bộ là 3 USD/km. Hỏi người đó phải đi

đường bộ một khoảng bao nhiêu để kinh phí nhỏ nhất?



Ⓐ $\frac{15}{2}$ km.

Ⓑ $\frac{65}{2}$ km.

Ⓒ 10 km.

Ⓓ 40 km.

Hướng dẫn giải.

Giả sử người đó đi đường bộ từ A đến một điểm D nào đó trên đoạn AB, sau đó đi đường thủy từ D đến C.

Đặt $DB = x$ (km), điều kiện $0 \leq x \leq 40$.

Khi đó, quãng đường đi bộ là $AD = AB - DB = 40 - x$ (km).

Quãng đường đi thủy là $DC = \sqrt{DB^2 + BC^2} = \sqrt{x^2 + 10^2} = \sqrt{x^2 + 100}$ (km).

Tổng chi phí người đó phải trả là hàm số $f(x)$ theo x :

$$f(x) = 3(40 - x) + 5\sqrt{x^2 + 100} = 120 - 3x + 5\sqrt{x^2 + 100}$$

Để tìm chi phí nhỏ nhất, ta tính đạo hàm $f'(x)$:

$$f'(x) = -3 + 5 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 100}} = \frac{5x - 3\sqrt{x^2 + 100}}{\sqrt{x^2 + 100}}$$

$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x = 3\sqrt{x^2 + 100} \Leftrightarrow 25x^2 = 9(x^2 + 100) \Leftrightarrow 16x^2 = 900 \Leftrightarrow x^2 = \frac{225}{4}.$$

$$\text{Vì } x \geq 0 \text{ nên } x = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ (km).}$$

Lập bảng biến thiên hoặc kiểm tra các giá trị biên, ta thấy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 7,5$.

Vậy quãng đường người đó phải đi bộ là: $AD = 40 - 7,5 = 32,5 = \frac{65}{2}$ (km).

❖ Câu 42. Có hai chiếc cọc cao 10 m và 30 m lần lượt đặt tại hai vị trí A, B. Biết khoảng cách giữa hai cọc bằng 24 m. Người ta chọn một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất nằm giữa hai chân cọc để giăng dây nối đến hai đỉnh C và D của cọc (như hình vẽ). Hỏi ta phải đặt chốt ở vị trí nào trên mặt đất để tổng độ dài của hai sợi dây đó là ngắn nhất?

Ⓐ $AM = 6\text{m}, BM = 18\text{ m}.$

Ⓑ $AM = 7\text{m}, BM = 17\text{ m}.$

Ⓒ $AM = 4\text{m}, BM = 20\text{ m}.$

Ⓓ $AM = 12\text{m}, BM = 12\text{ m}.$

Hướng dẫn giải. Đặt $AM = x$ ($0 < x < 24$), khi đó $MB = 24 - x$.

Tổng độ dài hai sợi dây là $f(x) = \sqrt{10^2 + x^2} + \sqrt{30^2 + (24 - x)^2}$.

Áp dụng phương pháp đạo hàm hoặc tính chất hình học (lấy đối xứng), ta tìm được $x = 6$.

Vậy $AM = 6\text{ m}$ và $BM = 18\text{ m}$.

❖ Câu 43. Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm tính theo công thức $V(t) = \frac{1}{100} \left(30t^3 - \frac{t^4}{4} \right)$

($0 \leq t \leq 90$). Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $v(t) = V'(t)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

Ⓐ Tốc độ bơm giảm từ phút thứ 60 đến phút thứ 90..

- (B) Tốc độ luôn bơm giảm..
 (C) Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75..
 (D) Cả A, B, C đều sai..

Hướng dẫn giải. Tốc độ bơm nước là $v(t) = V'(t) = \frac{1}{100}(90t^2 - t^3)$.

Xét gia tốc bơm nước $a(t) = v'(t) = \frac{1}{100}(180t - 3t^2)$.

$v'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t(60 - t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = 60$.

Trên khoảng $(60; 90)$, $v'(t) < 0$ nên tốc độ bơm giảm. Vậy khẳng định A đúng.

❖ Câu 44. Một sợi dây kim loại dài 60 cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a , đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r . Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỷ số $\frac{a}{r}$ nào sau đây đúng?

- (A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 1.

Hướng dẫn giải. Tổng độ dài sợi dây là chu vi hình vuông cộng chu vi đường tròn: $4a + 2\pi r = 60 \Rightarrow 2a + \pi r = 30 \Rightarrow r = \frac{30 - 2a}{\pi}$.

Tổng diện tích hai hình: $S = a^2 + \pi r^2 = a^2 + \pi \left(\frac{30 - 2a}{\pi} \right)^2 = a^2 + \frac{(30 - 2a)^2}{\pi}$.

Xét đạo hàm $S'(a) = 2a + \frac{2(30 - 2a)(-2)}{\pi} = 2a - \frac{4(30 - 2a)}{\pi}$.

Cho $S'(a) = 0 \Leftrightarrow 2a\pi - 120 + 8a = 0 \Leftrightarrow a(2\pi + 8) = 120 \Leftrightarrow a = \frac{60}{\pi + 4}$.

Thay vào biểu thức r , ta tìm được $r = \frac{30}{\pi + 4}$.

Vậy tỷ số $\frac{a}{r} = \frac{60}{\pi + 4} : \frac{30}{\pi + 4} = 2$. A

❖ Câu 45. Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

- (A) 10. (B) 12. (C) 16. (D) 24.

Hướng dẫn giải. Gọi n là số con cá trên một đơn vị diện tích hồ ($n > 0$).

Tổng cân nặng cá thu hoạch được trên một đơn vị diện tích là:

$$f(n) = n \cdot P(n) = n(480 - 20n) = 480n - 20n^2 \text{ (gam)}.$$

Xét hàm số $f(n) = 480n - 20n^2$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(n) = 480 - 40n$.

Cho $f'(n) = 0 \Leftrightarrow n = 12$.

Lập bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $n = 12$. Vậy cần thả 12 con.

❖ Câu 46. Một cửa hàng bán lẻ bán 2500 cái ti vi mỗi năm. Chi phí gửi trong kho là 10\$ một cái mỗi năm. Để đặt hàng chi phí cố định cho mỗi lần đặt là 20\$ cộng thêm 9\$ mỗi cái. Cửa hàng nên đặt hàng bao nhiêu lần trong mỗi năm và mỗi lần bao nhiêu cái để chi phí hàng tồn kho là nhỏ nhất?

- (A) Đặt hàng 25 lần, mỗi lần 100 cái ti vi.
 (B) Đặt hàng 20 lần, mỗi lần 100 cái ti vi.
 (C) Đặt hàng 25 lần, mỗi lần 90 cái ti vi.

Ⓓ Đặt hàng 20 lần, mỗi lần 90 cái ti vi.

Hướng dẫn giải. Gọi x là số ti vi mà cửa hàng đặt mỗi lần ($x \in [1; 2500]$).

Số lượng ti vi trung bình gửi trong kho là $\frac{x}{2}$ nên chi phí lưu kho tương ứng là $10 \cdot \frac{x}{2} = 5x$.

Số lần đặt hàng mỗi năm là $\frac{2500}{x}$ và chi phí đặt hàng là $\frac{2500}{x}(20 + 9x)$.

Khi đó tổng chi phí của hàng phải trả là:

$$C(x) = \frac{2500}{x}(20 + 9x) + 5x = 5x + \frac{50000}{x} + 22500.$$

$$\text{Xét } C'(x) = 5 - \frac{50000}{x^2} = \frac{5x^2 - 50000}{x^2}.$$

$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 10000 \Leftrightarrow x = 100.$$

Số lần đặt hàng là $2500/100 = 25$ lần. Chi phí nhỏ nhất $C_{\min} = C(100) = 23500$.

❖ Câu 47. Người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 180 mét thẳng hàng rào. Ở đó người ta tận dụng một bờ giậu có sẵn để làm một cạnh của hàng rào và rào thành mảnh đất hình chữ nhật. Hỏi mảnh đất hình chữ nhật được rào có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Ⓐ $S_{\max} = 3600 \text{ m}^2$.

Ⓑ $S_{\max} = 4000 \text{ m}^2$.

Ⓒ $S_{\max} = 8100 \text{ m}^2$.

Ⓓ $S_{\max} = 4050 \text{ m}^2$.

Hướng dẫn giải. Gọi x là chiều dài cạnh song song với bờ giậu và y là chiều dài cạnh vuông góc với bờ giậu ($x, y > 0$).

Theo bài ra ta có: $x + 2y = 180 \Rightarrow x = 180 - 2y$.

Diện tích của miếng đất là $S = xy = y(180 - 2y) = 180y - 2y^2$.

Xét hàm $S(y) = -2y^2 + 180y$ có $S'(y) = -4y + 180$. $S'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 45$.

Khi đó $x = 180 - 2(45) = 90$.

Diện tích lớn nhất $S_{\max} = 90 \cdot 45 = 4050 \text{ m}^2$. D

❖ Câu 48. Một lão nông chia đất cho con trai để người con canh tác riêng, biết người con sẽ được chọn miếng đất hình chữ nhật có chu vi bằng 800 (m). Hỏi anh ta chọn mỗi kích thước của nó bằng bao nhiêu để diện tích canh tác lớn nhất?

Ⓐ $200 \text{ m} \times 200 \text{ m}$.

Ⓑ $300 \text{ m} \times 100 \text{ m}$.

Ⓒ $250 \text{ m} \times 150 \text{ m}$.

Ⓓ Đáp án khác.

Hướng dẫn giải. Gọi chiều dài và chiều rộng của miếng đất lần lượt là x, y (m) ($x, y > 0$).

Chu vi miếng đất: $2(x + y) = 800 \Rightarrow x + y = 400 \Rightarrow y = 400 - x$.

Diện tích miếng đất: $S = x \cdot y = x(400 - x) = -x^2 + 400x$.

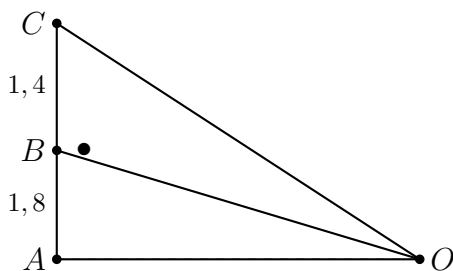
Đạo hàm $S'(x) = -2x + 400$. Cho $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 200$.

Khi $x = 200$ thì $y = 400 - 200 = 200$.

Vậy diện tích lớn nhất khi miếng đất là hình vuông cạnh $200 \text{ m} \times 200 \text{ m}$.

❖ Câu 49. Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4 mét và đặt ở độ cao 1,8 mét so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đó? Biết rằng góc BOC là

góc nhọn.



(A) $AO = 2,4m$.

(B) $AO = 2m$.

(C) $AO = 2,6m$.

(D) $AO = 3m$.

Hướng dẫn giải. Đặt độ dài cạnh $AO = x$ m ($x > 0$). Suy ra: $BO = \sqrt{3,24 + x^2}$, $CO = \sqrt{10,24 + x^2}$

Ta sử dụng định lý cosin trong tam giác BOC ta có:

$$\cos BOC = \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2 \cdot OB \cdot OC} = \frac{(3,24 + x^2) + (10,24 + x^2) - 1,96}{2\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}} = \frac{5,76 + x^2}{\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}}$$

Vì góc BOC là góc nhọn nên bài toán trở thành tìm x để $F(x) = \frac{5,76 + x^2}{\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Đặt $(3,24 + x^2) = t$, ($t > 3,24$) suy ra: $F(t) = \frac{t + 63}{25\sqrt{t(t+7)}} = \frac{25t + 63}{25\sqrt{t(t+7)}}$

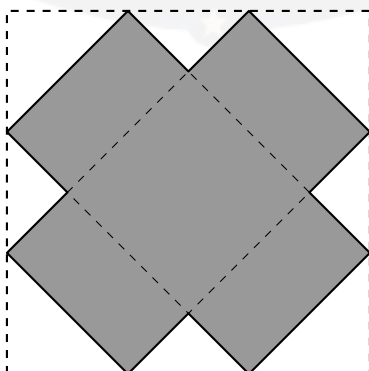
Tính đạo hàm và giải phương trình $F'(t) = 0$, ta tìm được $t = 9$.

t	3,24	9	$+\infty$
$F'(t)$	-	0	+
$F(t)$			

Thay vào đặt ta có $3,24 + x^2 = 9 \iff x^2 = 5,76 \iff x = 2,4$ m.

Vậy để nhìn rõ nhất thì $AO = 2,4m \Rightarrow$ **Chọn A.**

Câu 50. Từ hình vuông có cạnh bằng 6 người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó người ta gấp thành hình hộp chữ nhật không nắp. Tính thể tích lớn nhất của khối hộp.



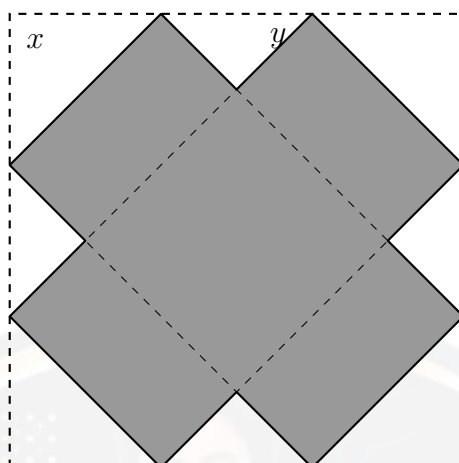
(A) $8\sqrt{2}$.

(B) $10\sqrt{2}$.

(C) $9\sqrt{2}$.

(D) $11\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải.



Đặt kích thước các cạnh như hình vẽ: cạnh đáy của hộp là x , chiều cao hộp là $y/\sqrt{2}$.

Ta có $\frac{x}{\sqrt{2}} + y\sqrt{2} + \frac{x}{\sqrt{2}} = 6 \Leftrightarrow x + y = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow y = 3\sqrt{2} - x$ với $0 < x < 3\sqrt{2}$.

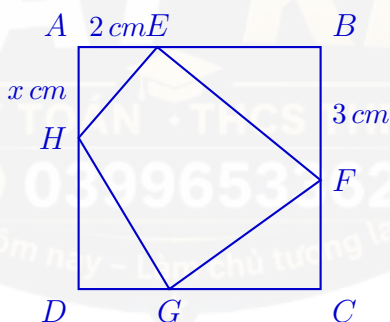
Thể tích của khối hộp tạo thành là $V = x^2y = x^2(3\sqrt{2} - x)$.

Ta có: $V' = 3x(2\sqrt{2} - x) = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$.

x	0	$2\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$
$V'(x)$		+	0
$V(x)$			$8\sqrt{2}$

Vậy $\max V = 8\sqrt{2}$ khi $x = 2\sqrt{2}$, $y = \sqrt{2} \Rightarrow$ **Chọn A.**

⇒ Câu 51. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tính tổng $x + y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.



(A) 7.

(B) 5.

(C) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

(D) $4\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải. Ta có S_{EFGH} nhỏ nhất $\Leftrightarrow S = S_{AEH} + S_{BEF} + S_{CGF} + S_{DGH}$ lớn nhất.

Tính được $2S = 2x + 3(6 - 2) + (6 - x)(6 - y) + \dots$ biến đổi dẫn đến:

$2S = xy - 4x - 3y + 36$ (1).

Mặt khác $\triangle AEH \sim \triangle CGF$ nên $\frac{AE}{CG} = \frac{AH}{CF} \Rightarrow xy = 6$ (2).

Chương 4. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

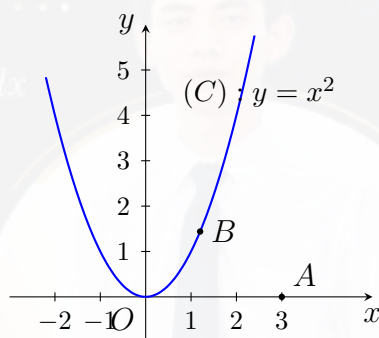
Từ (1) và (2) suy ra $2S = 42 - \left(4x + \frac{18}{x}\right)$.

Ta có $2S$ lớn nhất khi và chỉ khi $4x + \frac{18}{x}$ nhỏ nhất.

Áp dụng BĐT Cô-si: $4x = \frac{18}{x} \Rightarrow x^2 = \frac{18}{4} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó $y = 2\sqrt{2}$. Vậy $x + y = \frac{7\sqrt{2}}{2}$. Chọn C.

❖ **Câu 52.** Trên sân bay một máy bay cất cánh trên đường băng d (từ trái sang phải) và bắt đầu rời mặt đất tại điểm O . Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với mặt đất và cắt mặt đất theo giao tuyến là đường băng d . Dọc theo đường băng d cách vị trí O một khoảng 300 m về phía bên phải có người quan sát A . Biết máy bay chuyển động trong mặt phẳng (P) và độ cao y của máy bay xác định bởi $y = x^2$ (với x là độ dài máy bay dọc theo đường thẳng d tính từ O). Khoảng cách ngắn nhất từ người A đến máy bay là:



- (A) 300 (m). (B) $100\sqrt{5}$ (m). (C) 200 (m). (D) $100\sqrt{3}$ (m).

➤ **Hướng dẫn giải.** Xét hệ trục Oxy với đơn vị 1 đơn vị = 100 m. Người A có tọa độ $A(3;0)$.

Máy bay B nằm trên đồ thị (C) nên $B(t; t^2)$ với $t \geq 0$.

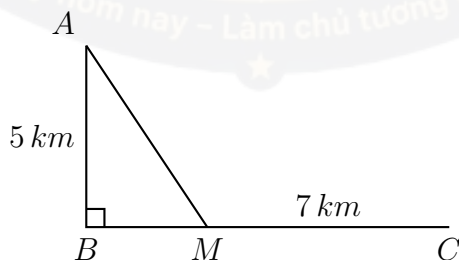
Khoảng cách $d^2 = AB^2 = (t - 3)^2 + (t^2)^2 = t^4 + t^2 - 6t + 9 = f(t)$.

$f'(t) = 4t^3 + 2t - 6$. Ta thấy $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Lập BBT, ta thấy d^2 đạt GTNN bằng 5 khi $t = 1$.

Vậy khoảng cách nhỏ nhất là $\sqrt{5} \times 100 = 100\sqrt{5}$ (m). B

❖ **Câu 53.** Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển $AB = 5$ km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng 7 km. Người canh hải đăng chèo đò từ A đến M trên bờ với vận tốc 4 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h. Vị trí điểm M cách B bao nhiêu để người đó đến kho nhanh nhất?



- (A) 0 km. (B) 7 km.
(C) $2\sqrt{5}$ km. (D) $\frac{14 + 5\sqrt{5}}{12}$ km.

Hướng dẫn giải. Đặt $BM = x$ (km) $\Rightarrow MC = 7 - x$ (km), ($0 < x < 7$).

Thời gian chèo đò $A \rightarrow M$: $t_{AM} = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4}$ (h).

Thời gian đi bộ $M \rightarrow C$: $t_{MC} = \frac{7-x}{6}$ (h).

Tổng thời gian $t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 25}}{4} + \frac{7-x}{6}$.

Đạo hàm $t'(x) = \frac{x}{4\sqrt{x^2 + 25}} - \frac{1}{6}$.

$t'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 4\sqrt{x^2 + 25} \Leftrightarrow 36x^2 = 16(x^2 + 25) \Leftrightarrow 20x^2 = 400 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}$.

Lập BBT, thời gian đến kho nhanh nhất khi $x = 2\sqrt{5}$ km.

❖ Câu 54. Có một tấm gỗ hình vuông cạnh 200 cm. Cắt một tấm gỗ có hình tam giác vuông, có tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng hằng số 120 cm từ tấm gỗ trên sao cho tấm gỗ hình tam giác vuông có diện tích lớn nhất. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ này là bao nhiêu?

- (A) 40 cm. (B) $40\sqrt{3}$ cm. (C) 80 cm. (D) $40\sqrt{2}$ cm.

Hướng dẫn giải. Kí hiệu cạnh góc vuông $AB = x$ ($0 < x < 60$).

Khi đó cạnh huyền $BC = 120 - x$.

Cạnh góc vuông còn lại là $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(120 - x)^2 - x^2} = \sqrt{14400 - 240x}$.

Diện tích tam giác ABC là: $S(x) = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{14400 - 240x}$.

Xét hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; 60)$, ta có đạo hàm:

$$S'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{14400 - 240x} + \frac{1}{2}x \cdot \frac{-240}{2\sqrt{14400 - 240x}} = \frac{14400 - 360x}{2\sqrt{14400 - 240x}}$$

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow 14400 - 360x = 0 \Leftrightarrow x = 40$.

Lập bảng biến thiên:

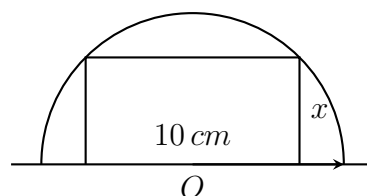
x	0	40	60	
$S'(x)$		+	0	−
$S(x)$			$S(40)$	

Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi $x = 40$. Khi đó cạnh huyền $BC = 120 - 40 = 80$ cm.

❖ Câu 55. Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính 10 cm, biết một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc trên đường kính của đường tròn.

- (A) 80 cm^2 . (B) 100 cm^2 . (C) 160 cm^2 . (D) 200 cm^2 .

Hướng dẫn giải.



Gọi x (cm) là độ dài cạnh hình chữ nhật vuông góc với đường kính ($0 < x < 10$).

Độ dài cạnh nằm dọc trên đường kính là $2\sqrt{10^2 - x^2}$.

Chương 4. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Diện tích hình chữ nhật: $S = 2x\sqrt{100 - x^2} = \sqrt{4x^2(100 - x^2)}$.

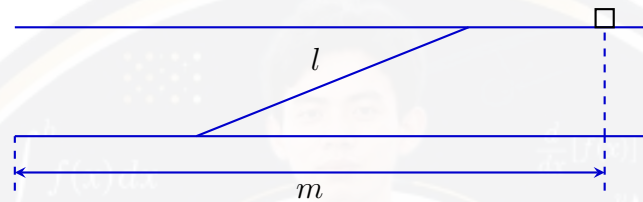
Theo BĐT AM-GM: $4x^2(100 - x^2) \leq \left(\frac{4x^2 + 4(100 - x^2)}{2}\right)^2$ không tối ưu trực tiếp.

$$\text{Xét } S' = 2\sqrt{100 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{200 - 4x^2}{\sqrt{100 - x^2}}.$$

$$S' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}.$$

$$\text{Diện tích lớn nhất: } S = 2(5\sqrt{2})\sqrt{100 - 50} = 10\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2} = 100 \text{ cm}^2.$$

❖ **Câu 56.** Trong bài thực hành quân sự, một chiến sĩ phải bơi qua một con sông rộng 100 m để tấn công mục tiêu ở bờ bên kia. Vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một nửa vận tốc chạy bộ. Biết dòng sông thẳng, mục tiêu cách vị trí xuất phát 1 km theo đường chim bay. Chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến mục tiêu nhanh nhất?



(A) $\frac{400}{3}$.

(B) $\frac{40}{33}$.

(C) $\frac{100}{3}$.

(D) $\frac{200}{\sqrt{3}}$.

➤ **Hướng dẫn giải.** Vấn đề là chọn thời gian bơi và thời gian đi bộ sao cho "tối ưu". Giả sử độ dài đoạn bơi là l và tốc độ bơi của chiến sĩ là v . Ký hiệu m là độ dài đoạn sông kể từ người chiến sĩ đến đồn địch, khi ấy tổng thời gian bơi và chạy bộ của người chiến sĩ là $t = \frac{l}{v} + \frac{m - \sqrt{l^2 - 100^2}}{2v}$.

Do m, v là cố định nên thời gian đạt cực tiểu khi hàm số $f(l) = \frac{l}{v} - \frac{\sqrt{l^2 - 100^2}}{2v} = \frac{2l - \sqrt{l^2 - 100^2}}{2v}$ đạt cực tiểu và cũng tức là khi hàm $g(l) = 2l - \sqrt{l^2 - 100^2}$ đạt cực tiểu. Điều này xảy ra khi $2 - \frac{l}{\sqrt{l^2 - 100^2}} = 0$, hay $l = 2\sqrt{l^2 - 100^2}$, tức là $l = 400/3 = 133,3$ (met).

❖ **Câu 57.** Để thiết kế một chiếc bể cá hình chữ nhật có chiều cao là 60 cm, thể tích là 96.000 cm³, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70.000 đồng/m² và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/m². Chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là

(A) 83.200, 000 đồng.

(B) 382.000 đồng.

(C) 83.200 đồng.

(D) 8.320.000 đồng.

➤ **Hướng dẫn giải.** Diện tích của đáy hộp là: $S = \frac{V}{h} = \frac{96.000}{60} = 1600 \text{ cm}^2 = 0,16 \text{ m}^2$.

Gọi chiều dài cạnh đáy của hộp là x ($x > 0$, m), chiều rộng của hộp là $\frac{0,16}{x}$.

Gọi $F(x)$ là hàm chi phí để làm bể cá.

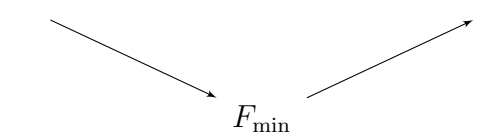
Chi phí để hoàn thành bể cá là:

$$F(x) = 0,16 \cdot 100.000 + 2 \cdot 0,6 \cdot x \cdot 70.000 + 2 \cdot 0,6 \cdot \frac{0,16}{x} \cdot 70.000 = 16.000 + 84.000x + \frac{13.440}{x}$$

Bài toán trở thành tìm x để $F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$F'(x) = 84.000 - \frac{13.440}{x^2}; F'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0,16 \Leftrightarrow x = 0,4.$$

Bảng biến thiên:

x	0	0,4	$+\infty$
$F'(x)$	–	0	+
$F(x)$			

Vậy chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là $F(0,4) = 83.200$ đồng $\Rightarrow$ **Chọn C**

❖ **Câu 58.** Ông Nam cần xây dựng một bể nước mưa có thể tích $V = 8 \text{ (m}^3\text{)}$ dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp $\frac{4}{3}$ lần chiều rộng, đáy và nắp đổ bê tông, cốt thép; xung quanh xây bằng gạch và xi măng. Biết rằng chi phí trung bình là 980.000 đ/m^2 và ở bể nắp để hở một khoảng hình vuông có diện tích bằng $\frac{2}{9}$ diện tích nắp bể. Tính chi phí thấp nhất mà ông Nam phải chi trả (làm tròn đến hàng nghìn đồng)

- (A) 22.770.000. (B) 27.657.000đ. (C) 20.965.000đ. (D) 23.235.000đ.

➤ **Hướng dẫn giải.** Gọi chiều rộng của bể là $3x \text{ (m)}$. Ta có chiều dài bể là $4x \text{ (m)}$ và chiều cao của bể là $h = \frac{V}{S_{\text{đáy}}} = \frac{8}{3x \cdot 4x} = \frac{2}{3x^2}$.

Khi đó tổng diện tích của bề mặt xây dựng (bao gồm đáy, nắp hở và diện tích xung quanh) là:

$$T = (3x + 4x) \cdot 2 \cdot \frac{2}{3x^2} + 3x \cdot 4x + \left(3x \cdot 4x - \frac{2}{9} \cdot 3x \cdot 4x\right) = \frac{28}{3x} + \frac{64x^2}{3}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si:

$$T = \frac{14}{3x} + \frac{14}{3x} + \frac{64x^2}{3} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{14}{3x} \cdot \frac{14}{3x} \cdot \frac{64x^2}{3}} = \frac{32\sqrt[3]{7}}{3} \approx 28,22 \text{ (m}^2\text{)}$$

Chi phí C (tính theo đồng) xây dựng là:

$$C = T \cdot 980.000 \geq \frac{32\sqrt[3]{7}}{3} \cdot 980.000 \approx 27.657.000 \text{ (đồng)} \Rightarrow \text{Chọn B}$$

❖ **Câu 59.** Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách 300km. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v \text{ (km/h)}$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là hằng số và E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên nằm ở khoảng nào thì năng lượng tiêu hao của cá giảm?

- (A) (6; 10). (B) (6; 12). (C) (6; 9). (D) (9; 20).

➤ **Hướng dẫn giải.** Khi bơi ngược dòng vận tốc của cá là: $v - 6 \text{ (km/h)}$

Thời gian để cá vượt khoảng cách 300 km là $t = \frac{300}{v-6} \text{ (v > 6)}$

Năng lượng tiêu hao của cá khi vượt khoảng cách 300 km là: $E(v) = cv^3 \frac{300}{v-6} = 300c \frac{v^3}{v-6}$

$$E'(v) = 600cv^2 \frac{v-9}{(v-6)^2}; E'(v) = 0 \iff v = 9 \text{ (do } v > 6\text{)}$$

BBT

v	6	9	$+\infty$
$E'(v)$		– 0 +	
$E(v)$			

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy vận tốc bơi của cá nằm trong khoảng $(6; 9)$ thì năng lượng tiêu hao của cá giảm $\Rightarrow$ **Chọn C**

❖ **Câu 60.** Một cửa hàng trung bình bán được 100 cái Tivi mỗi tháng với giá 14 triệu đồng một cái. Chủ cửa hàng nhận thấy rằng, nếu giảm giá bán mỗi cái 500 ngàn đồng thì số lượng tivi bán ra sẽ tăng thêm 10 cái mỗi tháng. Hỏi cửa hàng nên bán với giá bao nhiêu để doanh thu của cửa hàng là lớn nhất?

- (A) 8,5 triệu đồng.
(C) 10,5 triệu đồng.

- (B) 9,5 triệu đồng.
(D) 11,5 triệu đồng.

➤ *Hướng dẫn giải.*

Giả sử cần giảm giá bán mỗi cái tivi là x triệu đồng ($x < 14$)

Do giảm giá bán mỗi cái 500 ngàn đồng thì số lượng tivi bán ra sẽ tăng thêm 10 cái mỗi tháng nên số lượng tivi bán ra tăng lên bấy giờ là: $\frac{10x}{0,5} = 20x$

Khi đó doanh thu một tháng của cửa hàng là $(100 + 20x)(14 - x) = -20x^2 + 180x + 1400$

Xét hàm số $f(x) = -20x^2 + 180x + 1400$ ($x < 14$)

Ta có $f'(x) = -40x + 180$; $f'(x) = 0 \iff x = 4,5$

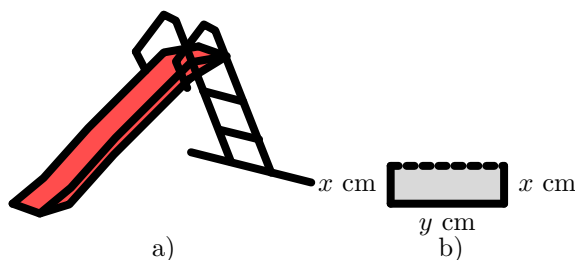
BBT

x	$-\infty$	4,5	14
$f'(x)$		+ 0 –	
$f(x)$			

Từ BBT để doanh thu đạt cao nhất thì giá bán mỗi cái tivi là $14 - 4,5 = 9,5$ triệu đồng $\Rightarrow$ **Chọn B**

❖ **Câu 61.** Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em được uốn từ một tấm kim loại có bề rộng 80cm, mặt cắt được mô tả ở hình 2. Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích của mặt cắt càng lớn thì

càng đảm bảo an toàn cho trẻ em.



Gọi S là diện tích mặt cắt. Với x đạt giá trị bằng bao nhiêu thì cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em?

(A) 18.

(B) 19.

(C) 20.

(D) 21.

Hướng dẫn giải.

Do tấm kim loại có bề rộng 80cm nên ta có: $2x + y = 80 \iff y = 80 - 2x$

Để có thiết kế được máng trượt thì $y > 0 \iff 80 - 2x > 0 \iff x < 40$. Suy ra $0 < x < 40$

Diện tích của mặt cắt máng trượt là: $S = xy = x(80 - 2x) = -2x^2 + 80x$

Ta có: $S(x) = -2x^2 + 80x$ với $x \in (0; 40)$

$S'(x) = -4x + 80$; $S'(x) = 0 \iff -4x + 80 = 0 \iff x = 20$

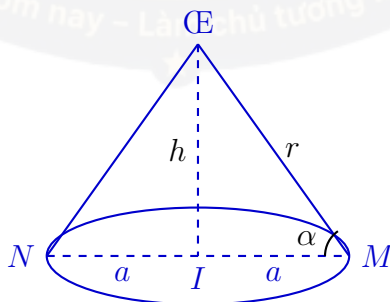
BBT

x	0	20	40
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$	0	800	0

Do đó, hàm số $S(x)$ đạt cực đại tại $x = 20$ và $S_{CD} = 800$.

Vậy với $x = 20$ thì máng trượt an toàn nhất. $\Rightarrow$ **Chọn C**

❖ Câu 62. Cần phải đặt một ngọn điện ở phía trên và chính giữa một cái bàn hình tròn có bán kính a . Hỏi phải treo ở độ cao bao nhiêu để mép bàn được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C được biểu thị bởi công thức $C = k \frac{\sin \alpha}{r^2}$ (α là góc nghiêng giữa tia sáng và mép bàn, k là hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng).



(A) $h = \frac{3a}{2}$.

(B) $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

(C) $h = \frac{a}{2}$.

(D) $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chương 4. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Hướng dẫn giải. Ta có: $r^2 = a^2 + h^2$ (Định lý Py-ta-go).

$$\sin \alpha = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \Rightarrow C = k \cdot \frac{\sin \alpha}{r^2} = k \cdot \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}(a^2 + h^2)} = k \cdot \frac{h}{(a^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Xét hàm $f(h) = \frac{h}{(a^2 + h^2)^{3/2}}$ ($h > 0$), ta có:

$$f'(h) = \frac{(a^2 + h^2)^{3/2} - 3h^2 \cdot \sqrt{a^2 + h^2}}{(a^2 + h^2)^3}; f'(h) = 0 \Leftrightarrow a^2 + h^2 = 3h^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Dựa vào bảng biến thiên, $f(h)_{\max}$ khi $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

❖ Câu 63. Nhà Nam có một chiếc bàn tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$ m. Nam muốn mắc một bóng điện ở phía trên và chính giữa chiếc bàn sao cho mép bàn nhận được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C của bóng điện được biểu thị bởi công thức $C = c \frac{\sin \alpha}{l^2}$ (α là góc tạo bởi tia sáng tới mép bàn và mặt bàn, c - hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng, l khoảng cách từ mép bàn tới bóng điện). Khoảng cách Nam cần treo bóng điện tính từ mặt bàn là

- (A) 1 m. (B) 1,2 m. (C) 1,5 m. (D) 2 m.

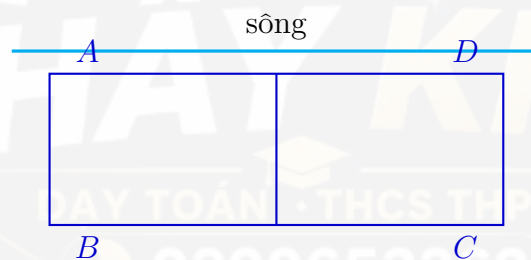
Hướng dẫn giải. Gọi h là độ cao của bóng điện so với mặt bàn ($h > 0$). $\mathcal{E}$ là bóng điện, I là hình chiếu của $\mathcal{E}$ lên mặt bàn. MN là đường kính của mặt bàn.

Ta có $\sin \alpha = \frac{h}{l}$ và $h^2 = l^2 - 2$, suy ra cường độ sáng là: $C(l) = c \cdot \frac{\sqrt{l^2 - 2}}{l^3}$ ($l > \sqrt{2}$).

$$C'(l) = c \cdot \frac{6 - l^2}{l^4 \cdot \sqrt{l^2 - 2}}; C'(l) = 0 \Leftrightarrow l = \sqrt{6} \Rightarrow h = \sqrt{6 - 2} = 2 \text{ m (có thể có sai số trong tính toán)}$$

của ảnh gốc, tuy nhiên áp dụng công thức $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ với $a = \sqrt{2}$ ta được $h = 1$ m). $\Rightarrow$ **Chọn A.**

❖ Câu 64. Một chủ trang trại nuôi gia súc muốn rào thành hai chuồng hình chữ nhật sát nhau và sát một con sông, một chuồng cho cừu, một chuồng cho gia súc. Đã có sẵn 240 m hàng rào. Hỏi diện tích lớn nhất có thể bao quanh là bao nhiêu?



- (A) 4000 m². (B) 8400 m². (C) 4800 m². (D) 2400 m².

Hướng dẫn giải. Gọi x là chiều rộng của mỗi chuồng (đoạn vuông góc với sông), y là chiều dài tổng cộng song song với sông.

$$\text{Tổng chiều dài hàng rào: } 3x + y = 240 \Rightarrow y = 240 - 3x.$$

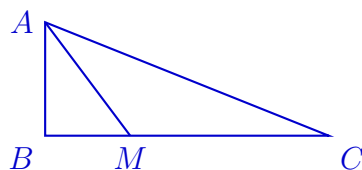
$$\text{Diện tích: } S = x \cdot y = x(240 - 3x) = -3x^2 + 240x.$$

$$S' = -6x + 240 = 0 \Leftrightarrow x = 40 \Rightarrow y = 120.$$

$$\text{Diện tích lớn nhất: } S = 40 \cdot 120 = 4800 \text{ m}^2. \Rightarrow \text{Chọn C.}$$

❖ Câu 65. Nhà của 3 bạn A, B, C nằm ở 3 vị trí tạo thành một tam giác vuông tại B , $AB = 10$ km; $BC = 25$ km và 3 bạn tổ chức họp mặt ở nhà bạn C . Bạn B hẹn chờ bạn A tại vị trí M trên đoạn đường BC . Từ nhà, bạn A đi xe buýt đến điểm hẹn M với tốc độ 30 km/h và từ M hai bạn

A, B di chuyển đến nhà bạn C bằng xe máy với tốc độ 50 km/h. Hỏi điểm hẹn M cách nhà bạn B bao nhiêu km để bạn A đến nhà bạn C nhanh nhất?



- (A) 5 km. (B) 7,5 km. (C) 10 km. (D) 12,5 km.

Hướng dẫn giải. Đặt $BM = x$ (km), $x \geq 0$.

Thời gian di chuyển: $t(x) = \frac{\sqrt{100 + x^2}}{30} + \frac{25 - x}{50}$.

$$t'(x) = \frac{x}{30\sqrt{100 + x^2}} - \frac{1}{50}.$$

$$t'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x = 3\sqrt{100 + x^2} \Leftrightarrow 25x^2 = 9(100 + x^2) \Leftrightarrow 16x^2 = 900 \Leftrightarrow x = 7,5 \text{ km.}$$

Dựa vào BBT, $t(x)$ nhỏ nhất khi $x = 7,5$. $\Rightarrow$ **Chọn B.**

Câu 66. Một cửa hàng bán thú kiểng cần làm một chuồng thú hình chữ nhật sao cho phần cần làm hàng rào là 20 m. Chú ý rằng, hình chữ nhật này có hai cạnh trùng với mép của hai bức tường trong góc nhà nên không cần rào. Các cạnh cần rào của hình chữ nhật là bao nhiêu để diện tích của nó là lớn nhất?

- (A) Mỗi cạnh là 10 m. (B) Mỗi cạnh là 9 m.
(C) Mỗi cạnh là 12 m. (D) Mỗi cạnh là 5 m.

Hướng dẫn giải. Gọi độ dài hai cạnh của hình chữ nhật cần rào là x và y ($x, y > 0$).

Theo đề bài, tổng chiều dài phần hàng rào là $x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x$.

Diện tích của chuồng thú là: $S = x \cdot y = x(20 - x) = -x^2 + 20x$.

Xét hàm số $f(x) = -x^2 + 20x$ trên $(0; 20)$.

Đạo hàm $f'(x) = -2x + 20$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$.

Khi $x = 10$ thì $y = 10$. Vậy diện tích lớn nhất khi mỗi cạnh cần rào dài 10 m.

Câu 67. Giám đốc của nhà hát A đang phân vân trong việc xác định giá vé xem các chương trình được chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng, nó sẽ quyết định nhà hát thu được lợi nhuận hay bị tổn thất. Theo những cuốn sổ ghi chép, ông ta xác định rằng: Nếu giá vé vào cửa là 20\$ thì trung bình có 1000 người đến xem. Nhưng nếu tăng tiền vé lên 1\$ mỗi người thì sẽ mất 100 khách hàng trong số trung bình. Trung bình mỗi khách hàng dành 1,8\$ cho việc uống nước trong nhà hát. Hãy giúp giám đốc nhà hát này xác định xem cần tính giá vé vào cửa bao nhiêu để tổng thu nhập lớn nhất.

- (A) giá vé là 14,1. (B) giá vé là 14.
(C) giá vé là 12,1. (D) giá vé là 15.

Hướng dẫn giải. Gọi x là số tiền vé tăng thêm (x có thể âm). Giá vé mới là $20 + x$ ($x > -20$).

Số lượng khán giả tương ứng là: $1000 - 100x$.

Tổng thu nhập của nhà hát gồm tiền vé và tiền nước:

$$f(x) = (20 + x)(1000 - 100x) + 1,8(1000 - 100x)$$

$$f(x) = (21,8 + x)(1000 - 100x) = -100x^2 - 1180x + 21800$$

Xét hàm bậc hai trên, đỉnh của parabol tại $x = \frac{-b}{2a} = \frac{1180}{-200} = -5,9$.

Chương 4. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Giá vé tối ưu là: $20 + (-5, 9) = 14, 1\$$.

❖ **Câu 68.** Bác Tôm có cái ao có diện tích 50 m^2 để nuôi cá. Vụ vừa qua bác nuôi với mật độ 20 con/m^2 và thu được $1,5$ tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình, bác thấy cứ thả giảm đi 8 con/m^2 thì mỗi con cá thành phẩm thu được tăng thêm $0,5 \text{ kg}$. Vậy vụ tới bác phải mua bao nhiêu con cá giống để đạt được tổng năng suất cao nhất? (Giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi).

- (A) 488 con. (B) 512 con. (C) 1000 con. (D) 215 con.

➤ *Hướng dẫn giải.* Số cá bác đã thả trong vụ vừa qua là: $20 \cdot 50 = 1000$ con.

Khối lượng trung bình mỗi con cá ban đầu: $1500/1000 = 1,5 \text{ kg/con}$.

Gọi x là số lượng cá giảm đi ($x < 1000$).

Mật độ giảm đi là $x/50 \text{ con/m}^2$. Cứ giảm 8 con/m^2 thì tăng $0,5 \text{ kg}$, vậy giảm 1 con/m^2 tăng $0,0625 \text{ kg}$.

Khối lượng tăng thêm của mỗi con cá là: $a = \frac{x}{50} \cdot \frac{0,5}{8} \cdot 50 = 0,0625x \text{ kg}$.

Tổng sản lượng vụ tới: $f(x) = (1000 - x)(1,5 + 0,0625x) = -0,0625x^2 + 61x + 1500$.

Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = \frac{-61}{2 \cdot (-0,0625)} = 488$.

Số cá giống cần mua là: $1000 - 488 = 512$ con.

❖ **Câu 69.** Từ một tấm bìa cứng hình vuông cạnh a , người ta cắt bốn góc bốn hình vuông bằng nhau rồi gấp lại tạo thành một hình hộp không nắp. Tìm cạnh của hình vuông bị cắt để thể tích hình hộp lớn nhất.

- (A) $\frac{a}{2}$. (B) $\frac{a}{8}$. (C) $\frac{a}{3}$. (D) $\frac{a}{6}$.

➤ *Hướng dẫn giải.* Gọi độ dài cạnh hình vuông bị cắt là x ($0 < x < a/2$).

Chiều cao của hình hộp là x , đáy là hình vuông cạnh $a - 2x$.

Thể tích hình hộp: $V(x) = x(a - 2x)^2$.

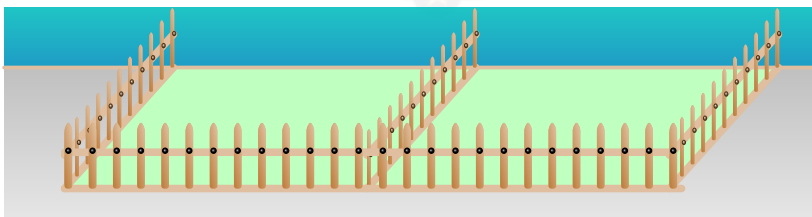
Xét hàm $V(x)$ trên $(0; a/2)$:

$$V'(x) = (a - 2x)^2 + x \cdot 2(a - 2x)(-2) = (a - 2x)(a - 2x - 4x) = (a - 2x)(a - 6x).$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{6} \text{ (nhận) hoặc } x = \frac{a}{2} \text{ (loại)}.$$

Vậy thể tích lớn nhất khi cạnh hình vuông bị cắt bằng $a/6$.

❖ **Câu 70.** Một người nông dân có $15\,000\,000$ đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (Hình 35). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là $60\,000$ đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là $50\,000$ đồng/mét, mặt giáp bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



- (A) 6250 m^2 . (B) 6520 m^2 . (C) 6052 m^2 . (D) 6205 m^2 .

➤ *Hướng dẫn giải.* Gọi chiều dài và chiều rộng mảnh vườn lần lượt là y và x ($x > 0, y > 0$).

Diện tích mảnh vườn là $S = xy$.

Chi phí để rào mảnh vườn theo chữ E là: $T = 3x \cdot 50000 + y \cdot 60000 = 15000000$

$$\Leftrightarrow 15x + 6y = 1500 \Leftrightarrow 5x + 2y = 500 \Rightarrow y = \frac{500 - 5x}{2} \quad (x < 100).$$

$$\Rightarrow S = x \left(\frac{500 - 5x}{2} \right) = \frac{1}{2}(500x - 5x^2).$$

Ta có: $S' = 250 - 5x$; $S' = 0 \Leftrightarrow x = 50$.

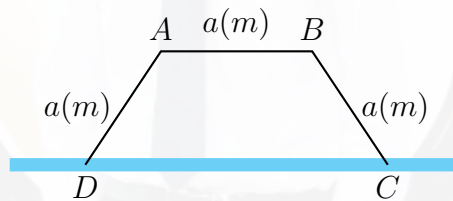
BBT:

x	0	50	100
S'	+	0	-
S		6250	

Diện tích mảnh vườn thu được sau khi rào lớn nhất thì $x = 50 \Rightarrow y = 125$.

Vậy diện tích lớn nhất của mảnh vườn là $6250m^2 \Rightarrow$ **Chọn A.**

❖ **Câu 71.** Một bác nông dân có ba tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $a(m)$ và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như Hình 36 (bờ sông là đường thẳng CD không phải rào).

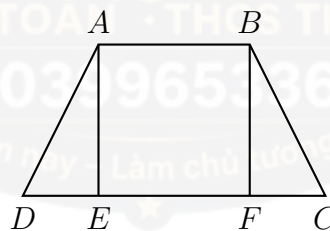


Hình 36

Hỏi bác có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?

- Ⓐ $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $\frac{5a^2\sqrt{3}}{4}$. Ⓒ $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. Ⓓ $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

➤ *Hướng dẫn giải.*



Dựng các đường cao AE và BF của hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ trên.

Vì $ABCD$ là hình thang cân nên $DE = FC$ và $EF = AB = a$.

Đặt $DE = FC = x(m)$ ($x > 0$).

Ta có $DC = DE + EF + FC = x + a + x = 2x + a$.

Theo định lý Pythagore, ta suy ra $AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{a^2 - x^2}(m)$.

Rõ ràng x phải thỏa mãn điều kiện $0 < x < a$.

Diện tích của hình thang cân $ABCD$ là:

$$S = \frac{1}{2}(AB + CD)AE = \frac{1}{2}(a + 2x + a)\sqrt{a^2 - x^2} = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}(m^2).$$

Chương 4. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Xét hàm số $S(x) = (a+x)\sqrt{a^2-x^2}$ với $x \in (0; a)$.

$$\text{Ta có } S'(x) = \frac{-2x^2 - ax + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}; S'(x) = 0 \iff \begin{cases} x = -a \text{ (loại)} \\ x = \frac{a}{2} \text{ (nhận)} \end{cases}$$

Khi đó trên khoảng $(0; a)$, $S'(x) = 0$ khi $x = \frac{a}{2}$.

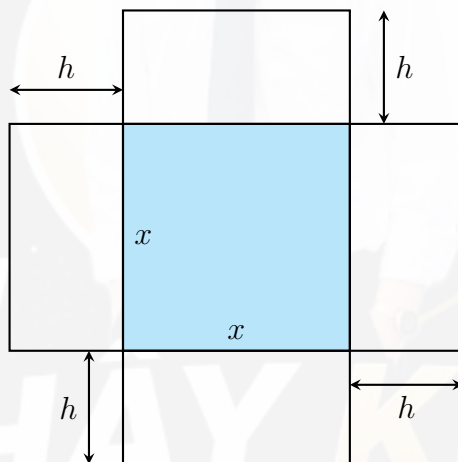
BBT:

x	0	$\frac{a}{2}$	a
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$	a^2	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$	0

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ tại $x = \frac{a}{2} \Rightarrow$

Chọn C.

❖ **Câu 72.** Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo mẫu như hình vẽ. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x cm, chiều cao h cm và có thể tích 500 cm^3 .



Giá trị của x để diện tích các mảnh tông nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

- (A) 8. (B) 7. (C) 9. (D) 10.

➤ **Hướng dẫn giải.** Thể tích của hộp là: $V = x^2 \cdot h = 500 \text{ cm}^3$. Do đó $h = \frac{500}{x^2}$ ($x > 0$).

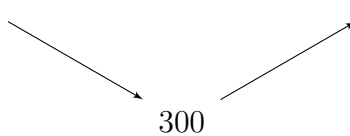
Diện tích của mảnh các tông dùng làm hộp (diện tích đáy và 4 mặt bên) là:

$$S(x) = x^2 + 4xh = x^2 + 4x \cdot \frac{500}{x^2} = x^2 + \frac{2000}{x} \quad (x > 0)$$

$$\text{Ta có: } S'(x) = 2x - \frac{2000}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1000)}{x^2}.$$

$$S'(x) = 0 \iff x^3 = 1000 \iff x = 10.$$

Bảng biến thiên:

x	0	10	$+\infty$
$S'(x)$	–	0	+
$S(x)$			

Dựa vào BBT, diện tích nhỏ nhất khi $x = 10$.

❖ **Câu 73.** Một thùng chứa nhiên liệu gồm phần ở giữa là một hình trụ có chiều dài h mét ($h > 0$) và hai đầu là các nửa hình cầu bán kính r ($r > 0$). Biết rằng thể tích của thùng chứa là $144000\pi \text{ m}^3$. Để sơn mặt ngoài của phần hình cầu cần 20000 đồng cho 1 m^2 , còn sơn mặt ngoài cho phần hình trụ cần 10000 đồng cho 1 m^2 . Để chi phí cho việc sơn diện tích mặt ngoài thùng chứa là nhỏ nhất thì r bằng bao nhiêu (biết bán kính r không được vượt quá 50 m)?

- (A) $r = 25$. (B) $r = 26,5$. (C) $r = 27,8$. (D) $r = 37,8$.

➤ **Hướng dẫn giải.** Thể tích của thùng nước là:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h = 144000\pi \quad (0 < r \leq 50)$$

$$\Rightarrow h = \frac{144000\pi - \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2} = \frac{144000}{r^2} - \frac{4}{3}r$$

Chi phí sơn bề mặt bên ngoài (diện tích cầu $4\pi r^2$ và diện tích xung quanh trụ $2\pi r h$) là:

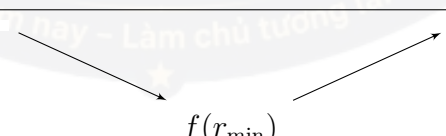
$$f(r) = 4\pi r^2 \cdot 20000 + 2\pi r h \cdot 10000 = 80000\pi r^2 + 20000\pi r \left(\frac{144000}{r^2} - \frac{4}{3}r \right)$$

$$f(r) = 80000\pi r^2 + \frac{2880000000\pi}{r} - \frac{80000}{3}\pi r^2 = \frac{160000}{3}\pi r^2 + \frac{2880000000\pi}{r}$$

Ta có: $f'(r) = \frac{320000}{3}\pi r - \frac{2880000000\pi}{r^2}$.

$$f'(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{320000}{3}r^3 = 2880000000 \Leftrightarrow r^3 = 27000 \Leftrightarrow r = 30\sqrt[3]{2} \approx 37,8 \text{ m.}$$

Bảng biến thiên:

r	0	$30\sqrt[3]{2}$	50
$f'(r)$	–	0	+
$f(r)$			

Vậy chi phí nhỏ nhất khi $r \approx 37,8 \text{ m} \Rightarrow$ **Chọn D.**

❖ **Câu 74.** Một thùng chứa nhiên liệu gồm phần ở giữa là một hình trụ có chiều dài h mét ($h > 0$) và hai đầu là các nửa hình cầu bán kính r ($r > 0$). Biết rằng thể tích của thùng chứa là $144000\pi \text{ m}^3$. Để sơn mặt ngoài của phần hình cầu cần 20000 đồng cho 1 m^2 , còn sơn mặt ngoài cho phần hình trụ cần 10000 đồng cho 1 m^2 . Để chi phí cho việc sơn diện tích mặt ngoài thùng chứa là nhỏ nhất thì r bằng bao nhiêu (biết bán kính r không được vượt quá 50 m)?

Chương 4. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

(A) $r = 25$.

(B) $r = 26,5$.

(C) $r = 27,8$.

(D) $r = 37,8$.

Hướng dẫn giải. Thể tích của thùng nước là:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h = 144000\pi \quad (0 < r \leq 50)$$

$$\Rightarrow h = \frac{144000\pi - \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2} = \frac{144000}{r^2} - \frac{4}{3}r$$

Chi phí sơn bề mặt bên ngoài (diện tích cầu $4\pi r^2$ và diện tích xung quanh trụ $2\pi r h$) là:

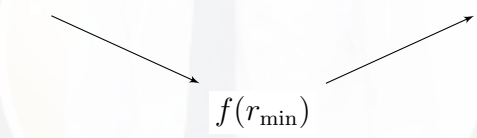
$$f(r) = 4\pi r^2 \cdot 20000 + 2\pi r h \cdot 10000 = 80000\pi r^2 + 20000\pi r \left(\frac{144000}{r^2} - \frac{4}{3}r \right)$$

$$f(r) = 80000\pi r^2 + \frac{2880000000\pi}{r} - \frac{80000}{3}\pi r^2 = \frac{160000}{3}\pi r^2 + \frac{2880000000\pi}{r}$$

Ta có: $f'(r) = \frac{320000}{3}\pi r - \frac{2880000000\pi}{r^2}$.

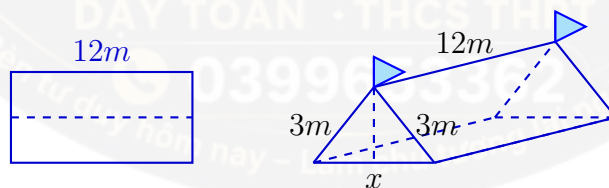
$$f'(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{320000}{3}r^3 = 2880000000 \Leftrightarrow r^3 = 27000 \Leftrightarrow r = 30\sqrt[3]{2} \approx 37,8 \text{ m.}$$

Bảng biến thiên:

r	0	$30\sqrt[3]{2}$	50
$f'(r)$	—	0	+
$f(r)$			

Vậy chi phí nhỏ nhất khi $r \approx 37,8 \text{ m} \Rightarrow$ **Chọn D.**

❖ Câu 75. Trong đợt chào mừng ngày 26/03/2016, trường THPT Lương Tài số 2 có tổ chức cho học sinh các lớp tham quan dã ngoại ngoài trời, trong số đó có lớp 12A11. Để có thể có chỗ nghỉ ngơi trong quá trình tham quan dã ngoại, lớp 12A11 đã dựng trên mặt đất bằng phẳng 1 chiếc lều bằng bạt từ một tấm bạt hình chữ nhật có chiều dài là 12 m và chiều rộng là 6 m bằng cách: Gập đôi tấm bạt lại theo đoạn nối trung điểm hai cạnh là chiều rộng của tấm bạt sao cho hai mép chiều dài còn lại của tấm bạt sát đất và cách nhau x m (xem hình vẽ). Tìm x để khoảng không gian phía trong lều là lớn nhất?



(A) $x = 4$.

(B) $x = 3$.

(C) $x = 3\sqrt{3}$.

(D) $x = 3\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải. Tấm bạt có chiều rộng 6 m, khi gập đôi lại thì mỗi bên mái lều có độ dài là 3 m.

Không gian phía trong lều là một hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác cân (cạnh bên bằng 3 m, cạnh đáy bằng x m) và chiều dài lăng trụ là $L = 12 \text{ m}$.

Chiều cao của tam giác đáy lều là: $h = \sqrt{3^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}} \text{ (m)}.$

Diện tích tam giác đáy là: $S_{\text{đáy}} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{4}x\sqrt{36 - x^2}$.

Thể tích không gian trong lều là: $V = S_{\text{đáy}} \cdot L = \frac{1}{4}x\sqrt{36 - x^2} \cdot 12 = 3x\sqrt{36 - x^2}$.

Để V lớn nhất thì $f(x) = x\sqrt{36 - x^2}$ lớn nhất (với $0 < x < 6$).

Ta có $f(x) = \sqrt{x^2(36 - x^2)}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM: $x^2(36 - x^2) \leq \left(\frac{x^2 + 36 - x^2}{2}\right)^2 = 18^2 = 324$.

Dấu "=" xảy ra khi $x^2 = 36 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 = 18 \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2}$ (m).

❖ **Câu 76.** Một ca sĩ có buổi biểu diễn âm nhạc với giá vé đã thông báo là 600 đô la thì sẽ có 1000 người đặt vé. Tuy nhiên sau khi đã có 1000 người đặt vé với giá 600 đô la thì nhà quản lý kinh doanh của ca sĩ này nhận thấy, cứ với mỗi 20 đô la giảm giá vé thì sẽ thu hút được thêm 100 người mua vé nên ông quyết định mở ra một chương trình giảm giá vé. Tìm giá vé phù hợp để có được số tiền vé thu vào là cao nhất và số tiền đó là bao nhiêu?

- (A) 400 đô la/vé, số tiền thu vào là 800.000 đô la.
- (B) 400 đô la/vé, số tiền thu vào là 640.000 đô la.
- (C) 100 đô la/vé, số tiền thu vào là 11.000 đô la.
- (D) 100 đô la/vé, số tiền thu vào là 110.000 đô la.

➤ **Hướng dẫn giải.** Gọi x là số lần giảm bớt đi 20 đô la trong giá vé ($x \geq 0$).

Khi đó, giá vé sau khi giảm là: $600 - 20x$ (đô la/người).

Số lượng người mua vé sẽ là: $1000 + 100x$ (người).

Hàm số biểu diễn tổng số tiền thu được là:

$$f(x) = (600 - 20x)(1000 + 100x) = -2000x^2 + 40000x + 600000$$

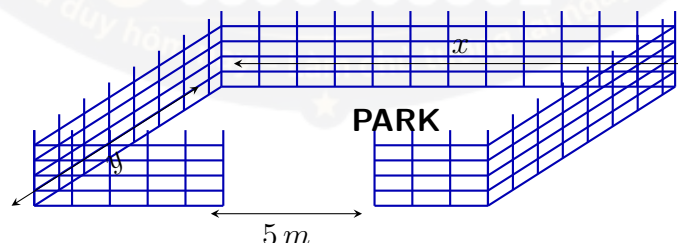
Đây là hàm số bậc hai có hệ số $a = -2000 < 0$, nên hàm số đạt giá trị lớn nhất tại đỉnh parabol:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-40000}{2 \cdot (-2000)} = 10$$

Với $x = 10$, giá vé phù hợp là: $600 - 20 \cdot 10 = 400$ (đô la).

Số tiền thu vào cao nhất là: $f(10) = 800.000$ (đô la).

❖ **Câu 77.** Chủ của một nhà hàng muốn làm tường rào bao quanh 600 m^2 đất để làm bãi đỗ xe. Ba cạnh của khu đất sẽ được rào bằng một loại thép với chi phí 14.000 đồng một mét, riêng mặt thứ tư do tiếp giáp với mặt bên của nhà hàng nên được xây bằng tường gạch xi măng với chi phí là 28.000 đồng mỗi mét. Biết rằng cổng vào của khu đỗ xe là 5 m (nằm ở phía rào thép). Tìm chu vi của khu đất sao cho chi phí nguyên liệu bỏ ra là ít nhất, chi phí đó là bao nhiêu?



- (A) 100 m, 1.610.000 đồng.
- (B) 100 m, 1.680.000 đồng.
- (C) 50 m, 1.610.000 đồng.
- (D) 50 m, 1.680.000 đồng.

➤ **Hướng dẫn giải.** Gọi x là chiều dài cạnh của bãi đỗ xe (phía tiếp giáp tường gạch và phía có cổng), y là chiều rộng (hai cạnh bên rào thép). ĐK: $x > 5$.

Diện tích khu đất: $xy = 600 \Rightarrow y = \frac{600}{x}$.

Chương 4. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Chi phí nguyên vật liệu được tính bằng công thức:

$$f(x) = \underbrace{28000 \cdot x}_{\text{Tường gạch}} + \underbrace{14000 \cdot (x - 5)}_{\text{Cạnh đối diện có cổng}} + \underbrace{14000 \cdot 2y}_{\text{2 cạnh bên thép}}$$

$$f(x) = 28000x + 14000x - 70000 + 28000 \cdot \frac{600}{x} = 42000x + \frac{16800000}{x} - 70000$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy (AM-GM) cho hai số dương $42000x$ và $\frac{16800000}{x}$:

$$42000x + \frac{16800000}{x} \geq 2\sqrt{42000x \cdot \frac{16800000}{x}} = 2\sqrt{705600000000} = 1.680.000$$

Khi đó chi phí thấp nhất là: $f(x) \geq 1.680.000 - 70.000 = 1.610.000$ (đồng).

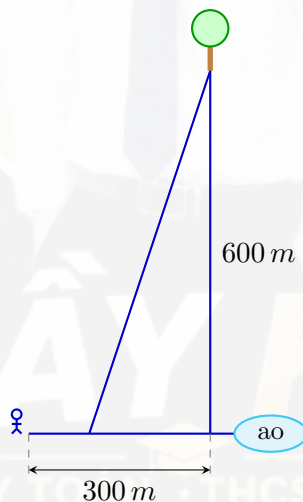
Dấu "=" xảy ra khi: $42000x = \frac{16800000}{x} \Rightarrow x^2 = 400 \Rightarrow x = 20$ m.

Suy ra $y = \frac{600}{20} = 30$ m.

Chu vi khu đất là: $P = 2(x + y) = 2(20 + 30) = 100$ m.

Vậy chu vi là 100 m và chi phí là 1.610.000 đồng.

❖ **Câu 78.** Một người phải đi đến cái cây quý trong rừng càng nhanh càng tốt. Con đường mòn chính mà người ta hay đi được miêu tả như sau: Từ vị trí người đó đi thẳng 300 m gặp một cái ao nên không đi tiếp được nữa, rẽ trái đi thẳng 600 m đường rừng sẽ đến cái cây đó. Biết rằng nếu đi đường mòn thì anh ta có thể chạy với tốc độ 160 m/phút, còn khi qua rừng anh ta chỉ có thể đi với tốc độ 70 m/phút.



- (A) Đi thẳng từ vị trí người đó đứng đến cái cây..
- (B) Đi theo đường mòn 292 m rồi rẽ trái đi đến cái cây..
- (C) Đi theo cách truyền thống ở trên..
- (D) Đi thẳng 8 m rồi rẽ trái đi đến cái cây..

🔗 **Hướng dẫn giải.** Ta có hình vẽ:

Kí hiệu như hình vẽ trên ta có tổng thời gian người đó đi đến cái cây được tính theo công thức:

$$f(x) = \frac{300 - x}{160} + \frac{\sqrt{600^2 + x^2}}{70} \text{ với } 0 \leq x \leq 300$$

Đến đây công việc của ta là đi tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên $[0; 300]$. Ta lần lượt làm theo các bước:

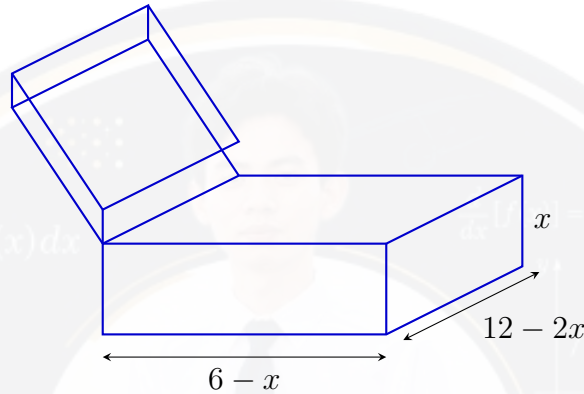
$$f'(x) = -\frac{1}{160} + \frac{1}{70} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{600^2 + x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 16x = 7\sqrt{600^2 + x^2} \Leftrightarrow 256x^2 = 49(600^2 + x^2)$$

$$\Leftrightarrow 207x^2 = 49 \cdot 600^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{49 \cdot 600^2}{207} \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 600}{\sqrt{207}} \approx 292 \text{ m}$$

Nhìn kĩ thì thấy D mới đúng, vì theo miêu tả thì người đó sẽ đi $300 - x = 300 - 292 = 8$ mét sau đó thì đi thẳng đến cái cây.

❖ **Câu 79.** Một hộp đựng chocolate bằng kim loại có hình dạng lúc mở nắp như hình vẽ dưới đây. Một phần tứ thể tích phía trên của hộp được rải một lớp bơ sữa ngọt, phần còn lại phía dưới chứa đầy chocolate nguyên chất. Với kích thước như hình vẽ, gọi $x = x_0$ là giá trị làm cho hộp kim loại có thể tích lớn nhất, khi đó thể tích chocolate nguyên chất có giá trị là V_0 . Tìm V_0 .



(A) 48 dvtt.

(B) 16 dvtt.

(C) 64 dvtt.

(D) $\frac{64}{3}$ dvtt.

➤ **Hướng dẫn giải.** Trước tiên ta nhận thấy thể tích của hộp là:

$$V = (6 - x)(12 - 2x)x = 2x(6 - x)^2 = 2x(x^2 - 12x + 36) = 2x^3 - 24x^2 + 72x$$

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 24x^2 + 72x$ trên khoảng $(0; 6)$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 6x^2 - 48x + 72; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 2 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $x = 2$. Khi đó $\max_{(0;6)} f(x) = f(2) = 2(2)^3 - 24(2)^2 + 72(2) = 64$ dvtt.

Đề bài yêu cầu tìm thể tích chocolate nguyên chất (V_0), phần này chiếm $\frac{3}{4}$ thể tích hộp (vì lớp bơ chiếm $\frac{1}{4}$ phía trên).

$$\text{Vậy } V_0 = \frac{3}{4} \cdot 64 = 48 \text{ dvtt.} \Rightarrow \text{Chọn A.}$$

❖ **Câu 80.** Tính thể tích khối rubic mini (mỗi mặt của rubic có 9 ô vuông), biết chu vi mỗi ô (ô hình vuông trên một mặt) là 4 cm.

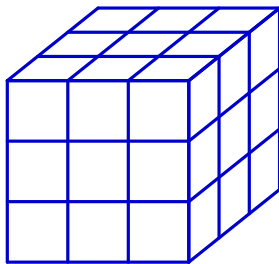
(A) 27 cm^3 .

(B) 1728 cm^3 .

(C) 1 cm^3 .

(D) 9 cm^3 .

Hướng dẫn giải. Ta có khối rubic mini được tạo thành từ $3 \times 3 \times 3 = 27$ khối lập phương nhỏ.



Chu vi của một ô nhỏ (hình vuông) là 4 cm nên độ dài mỗi cạnh nhỏ là $4 : 4 = 1$ cm. Khối rubic có mỗi cạnh gồm 3 ô nhỏ, do đó độ dài cạnh của khối rubic là $a = 3 \cdot 1 = 3$ cm. Thể tích khối rubic là: $V = a^3 = 3^3 = 27 \text{ cm}^3$.

Các hướng sai lầm cần tránh:

- Hướng sai 1: Nghĩ mỗi cạnh ô vuông là 4 $\Rightarrow a = 12 \Rightarrow V = 1728 \text{ cm}^3 \Rightarrow$ Chọn B.
- Hướng sai 2: Nhầm chu vi là tổng 12 cạnh khối lập phương nhỏ $\Rightarrow a = 1/3 \dots$
- Hướng sai 3: Nhầm công thức thể tích sang diện tích $\Rightarrow$ Chọn D.

$\Rightarrow$ Chọn A.

❖ Câu 81. Do nhu cầu sử dụng các nguyên liệu thân thiện với môi trường. Một công ty sản xuất bóng tennis muốn thiết kế một hộp làm bằng giấy cứng để đựng 4 quả bóng tennis có bán kính bằng r , hộp đựng có dạng hình hộp chữ nhật theo 2 cách như sau:

Cách 1: Mỗi hộp đựng 4 quả bóng tennis được đặt dọc, đáy là hình vuông cạnh $2r$, cạnh bên bằng $8r$.

Cách 2: Mỗi hộp đựng 4 quả bóng tennis được xếp theo một hình vuông, đáy của hộp là hình vuông cạnh bằng $4r$, cạnh bên bằng $2r$.

Gọi S_1 là diện tích toàn phần của hộp theo cách 1, S_2 là diện tích toàn phần của hộp theo cách 2.

Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

(A) $\frac{9}{8}$.

(B) 1.

(C) 2.

(D) $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải. Hộp theo cách 1 có các kích thước: $2r, 2r, 8r$.

Diện tích toàn phần hộp 1: $S_1 = 2(2r \cdot 2r + 2r \cdot 8r + 2r \cdot 8r) = 2(4r^2 + 16r^2 + 16r^2) = 72r^2$.

Hộp theo cách 2 có các kích thước: $4r, 4r, 2r$.

Diện tích toàn phần hộp 2: $S_2 = 2(4r \cdot 4r + 4r \cdot 2r + 4r \cdot 2r) = 2(16r^2 + 8r^2 + 8r^2) = 64r^2$.

Tỉ số: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{72r^2}{64r^2} = \frac{9}{8}$.

❖ Câu 82. Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chở tối đa được 60 hành khách một chuyến. Nếu một chuyến chở được m hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính là $(30 - \frac{5m}{2})^2$ đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗi chuyến xe là lớn nhất.

(A) 30.

(B) 40.

(C) 50.

(D) 60.

Hướng dẫn giải. Gọi x là số hành khách trên mỗi chuyến xe để số tiền thu được là lớn nhất, với $0 < x \leq 60$.

Gọi $F(x)$ là số tiền thu được (đồng).

Khi đó $F(x) = \left(300 - \frac{5x}{2}\right)^2 x = 90000x - 1500x^2 + \frac{25}{4}x^3$.

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $F(x)$ trên đoạn $[0; 60]$.

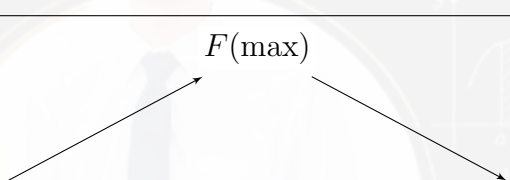
Ta có $F'(x) = 90000 - 3000x + \frac{75}{4}x^2$.

Giải phương trình $F'(x) = 0$: $90000 - 3000x + \frac{75}{4}x^2 = 0 \Leftrightarrow 75x^2 - 12000x + 360000 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 160x + 4800 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40, \\ x = 120. \end{cases}$$

Do $0 < x \leq 60$ nên chỉ nhận $x = 40$.

Bảng biến thiên:

x	0	40	60
$F'(x)$	+	0	-
$F(x)$			

Vậy để số tiền thu được trên mỗi chuyến xe là lớn nhất thì mỗi chuyến xe cần chở 40 hành khách.

❖ Câu 83. Một cửa hàng bán bưởi Doan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5.000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

(A) 44.000đ.

(B) 43.000đ.

(C) 42.000đ.

(D) 41.000đ.

➤ Hướng dẫn giải. Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Doan Hùng, (x : đồng; $30.000 \leq x \leq 50.000$ đồng).

Ta có thể lập luận như sau:

❖ Giá 50.000 đồng thì bán được 40 quả bưởi.

❖ Giảm giá 5.000 đồng thì bán được thêm 50 quả.

❖ Giảm giá $50.000 - x$ thì bán được thêm bao nhiêu quả?

Theo quy tắc tam xuất số quả bán thêm được là: $(50.000 - x) \cdot \frac{50}{5.000} = \frac{1}{100}(50.000 - x)$.

Do đó số quả bưởi bán được tương ứng với giá bán x là: $40 + \frac{1}{100}(50.000 - x) = -\frac{1}{100}x + 540$.

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($F(x)$: đồng).

Ta có: $F(x) = \left(-\frac{1}{100}x + 540\right) \cdot (x - 30.000) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16.200.000$.

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$F(x) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16.200.000$, điều kiện: $30.000 \leq x \leq 50.000$.

Chương 4. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

$$F'(x) = -\frac{1}{50}x + 840; F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{50}x + 840 = 0 \Leftrightarrow x = 42.000.$$

Vì hàm $F(x)$ liên tục trên $[30.000; 50.000]$ nên ta có:

$$F(30.000) = 0; F(42.000) = 1.440.000; F(50.000) = 800.000.$$

Vậy với $x = 42.000$ thì $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

❖ **Câu 84.** Công ty du lịch Ban Mê dự định tổ chức một tua xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tua là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tua 100 ngàn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất.

- (A) 1375000. (B) 3781250. (C) 2500000. (D) 3000000.

➤ *Hướng dẫn giải.* Gọi x (triệu đồng) là giá tua.

Giá đã giảm so với ban đầu là $2 - x$.

Số người tham gia tăng thêm nếu giá bán x là: $\frac{(2-x)20}{0,1} = 400 - 200x$.

Số người sẽ tham gia nếu bán giá x là: $150 + (400 - 200x) = 550 - 200x$.

Tổng doanh thu là: $f(x) = x(550 - 200x) = -200x^2 + 550x$;

$$f'(x) = -400x + 550 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{8}.$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{11}{8}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$\frac{3025}{8}$	
	$\nearrow$		$\searrow$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{11}{8} = 1,375$.

Vậy công ty cần đặt giá tua 1375000 đồng thì tổng doanh thu sẽ cao nhất là 378125000 đồng.

❖ **Câu 85.** Một doanh nghiệp bán xe gắn máy trong đó có loại xe A bán ế nhất với giá mua vào mỗi chiếc xe là 26 triệu VND và bán ra 30 triệu VND, với giá bán này thì số lượng bán một năm là 600 chiếc. Cửa hàng cần đẩy mạnh việc bán được loại xe này nên đã đưa ra chiến lược kinh doanh giảm giá bán và theo tính toán của CEO nếu giảm 1 triệu VND mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi cửa hàng định giá bán loại xe đó bao nhiêu thì doanh thu loại xe đó của cửa hàng đạt lớn nhất.

- (A) 29 triệu VND. (B) 27,5 triệu VND.
(C) 29,5 triệu VND. (D) 27 triệu VND.

➤ *Hướng dẫn giải.* Gọi x (triệu VND) là số tiền cần giảm cho mỗi chiếc xe ($0 \leq x \leq 4$).

Số lượng xe bán ra được trong một năm sau khi giảm giá là: $x \cdot 200 + 600$ (chiếc).

Số lợi nhuận thu được từ việc bán xe trong một năm sau khi giảm giá là: $(x \cdot 200 + 600)(4 - x)$.

Xét hàm số $f(x) = (x \cdot 200 + 600)(4 - x) = 200(-x^2 + x + 12)$ ($0 \leq x \leq 4$) đạt giá trị lớn nhất là 2450 khi $x = \frac{1}{2}$.

Vậy giá bán cần đặt là $30 - 0,5 = 29,5$ triệu VND.

Bài 1. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$.

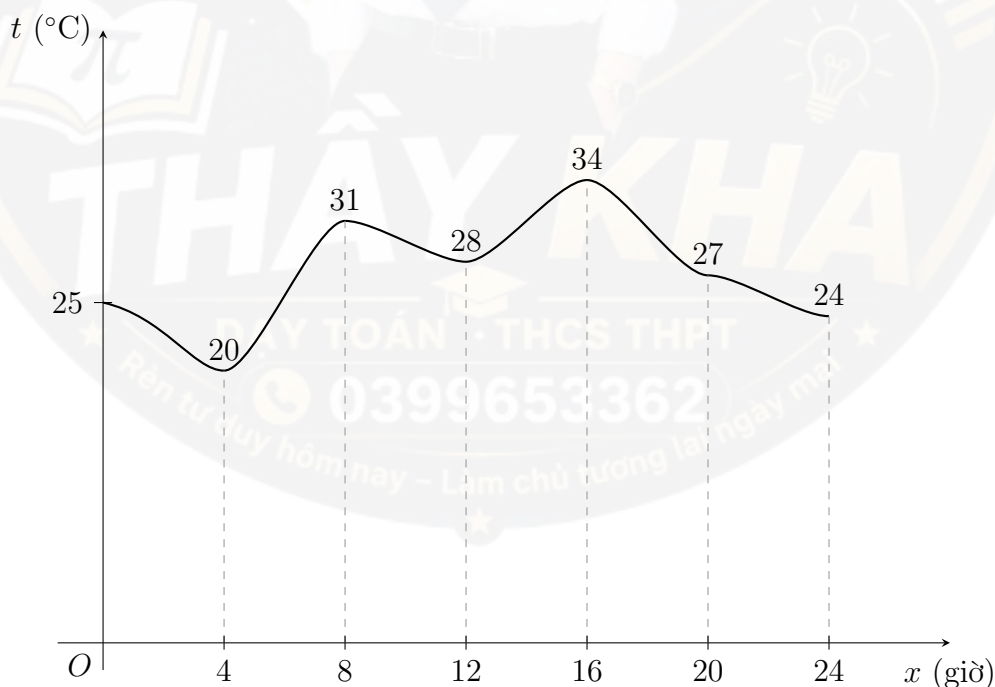
- a) Phương trình vận tốc là $v(t) = 3t^2 - 6t + 9$.
- b) Phương trình hàm gia tốc là $a(t) = 6t - 12$.
- c) Vận tốc của chất điểm tăng khi $t \in (0; 1) \cup (3; +\infty)$.
- d) Vận tốc của chất điểm giảm khi $t \in (1; 3)$.

Hướng dẫn giải. $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$. $a(t) = 6t - 12$.

Vận tốc tăng khi $a(t) > 0 \Leftrightarrow t > 2$.

Vậy: a) Sai. b) Đúng. c) Sai. d) Sai.

Bài 2. Hình bên cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày.



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là 28°C .
- b) Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là 20°C .
- c) Thời điểm nhiệt độ cao nhất trong ngày là lúc 16 giờ.

Chương 5. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

d) Thời điểm nhiệt độ thấp nhất trong ngày là lúc 4 giờ.

 **Hướng dẫn giải.** a) **Sai:** Nhìn vào đồ thị, điểm cao nhất có tung độ là 34, vậy nhiệt độ cao nhất là 34°C .

b) **Đúng:** Điểm thấp nhất của đồ thị có tung độ là 20, ứng với 20°C .

c) **Đúng:** Giá trị cực đại 34°C đạt được tại hoành độ $x = 16$.

d) **Đúng:** Giá trị cực tiểu 20°C đạt được tại hoành độ $x = 4$.

 **Bài 3.** Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng được tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức:

$$V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4 \text{ với } 0 \leq t \leq 0,5$$

Gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \leq t \leq 0,5$.

a) Lượng xăng ban đầu trong bình xăng là 1 lít.

b) Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là 41,5 lít.

c) $V'(t) = 300(2t - 3t^2) + 4$, với $0 \leq t \leq 0,5$.

d) Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất.

 **Hướng dẫn giải.** a) **Sai:** Số xăng trong bình ban đầu là $V(0) = 300(0^2 - 0^3) + 4 = 4$ lít.

b) **Đúng:** Xét $V(t)$ trên $[0; 0,5]$. $V'(t) = 300(2t - 3t^2)$.

$$V'(t) = 0 \Leftrightarrow 300t(2 - 3t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ hoặc } t = 2/3 \text{ (loại vì } 2/3 > 0,5).$$

Trên $[0; 0,5]$, $V'(t) > 0$ nên hàm số đồng biến. Giá trị lớn nhất là $V(0,5) = 300(0,5^2 - 0,5^3) + 4 = 41,5$ lít.

c) **Sai:** Đạo hàm của hàm hằng bằng 0, nên $V'(t) = [300(t^2 - t^3) + 4]' = 300(2t - 3t^2)$.

d) **Đúng:** Xét tốc độ tăng thể tích $f(t) = V'(t) = 300(2t - 3t^2)$ trên $[0; 0,5]$.

$$f'(t) = 300(2 - 6t); f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1/3 \in [0; 0,5].$$

$$\text{So sánh các giá trị: } f(0) = 0; f(1/3) = 300(2/3 - 3/9) = 100; f(0,5) = 300(1 - 3/4) = 75.$$

 **Bài 4.** Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000 đồng.

a) Nếu cơ sở bán mỗi chiếc khăn với giá 37.000 đồng thì số tiền lãi sau 1 tháng là 44 triệu đồng.

b) Sau khi cơ sở tăng giá mỗi chiếc khăn thêm x (nghìn đồng) thì tổng số lợi nhuận một tháng của cơ sở được tính theo công thức $f(x) = -100x^2 + 1800x + 36000$.

c) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì số khăn bán ra giảm 800 chiếc.

d) Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần bán với giá 39.000 đồng.

 **Hướng dẫn giải.** Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là x (nghìn đồng).

Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm 100 chiếc nên tăng x (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm $100x$ chiếc.

Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là: $3000 - 100x$ (chiếc).

Lúc đầu bán với giá 30 nghìn đồng, mỗi chiếc khăn lãi 12 nghìn đồng. Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là: $12 + x$ (nghìn đồng).

Tổng lợi nhuận một tháng thu được là: $f(x) = (3000 - 100x)(12 + x) = -100x^2 + 1800x + 36000$ (nghìn đồng) $\Rightarrow$ **b) Đúng**.

Xét hàm số trên $(0; 30)$, ta có: $f'(x) = -200x + 1800 = 0 \Leftrightarrow x = 9$.

Lập bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất khi $x = 9$.

- Với $x = 9$, giá bán mới là $30 + 9 = 39$ nghìn đồng $\Rightarrow$ **d) Đúng**.

- Số khăn giảm đi là $100 \times 9 = 900$ chiếc $\Rightarrow$ **c) Sai**.

- Với giá bán 37.000 đồng $\Rightarrow x = 7$, $f(7) = -100(7)^2 + 1800(7) + 36000 = 43.700$ (nghìn đồng) $= 43,7$ triệu $\Rightarrow$ **a) Sai**.

Bài 5. Ông Thanh nuôi cá chim ở một cái ao có diện tích là 50m^2 . Vụ trước ông nuôi với mật độ là 20 con/ m^2 và thu được $1,5$ tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi 8 con/ m^2 thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên $0,5$ kg. Giả sử không có hao hụt khi nuôi.

- Số cá giống mà ông Thanh đã thả trong vụ vừa qua là 1500 con.
- Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phẩm trong vụ vừa qua là $1,5$ (kg).
- Tổng trọng lượng cá thu được ở vụ này là $F(x) = -0,0652x^2 + 16x + 1500$ (kg).
- Vụ tới ông Thanh phải thả 488 con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất.

Hướng dẫn giải.

- Sai:** Số cá giống mà ông thanh đã thả trong vụ vừa qua là $50 \cdot 20 = 1000$ con.
- Đúng:** Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phẩm trong vụ vừa qua là: $\frac{1500}{1000} = 1,5$ (kg).
- Sai:** Gọi số cá giống cần thả ít đi trong vụ này là: x (con), $(x > 0)$.

Theo đề bài cứ giảm 8 con thì mỗi con tăng thêm $0,5$ (kg/con). Suy ra giảm 1 con thì mỗi con tăng thêm $0,5 : 8 = 0,0625$ (kg/con).

Vậy giảm x con thì mỗi con tăng thêm $0,0625x$ (kg/con).

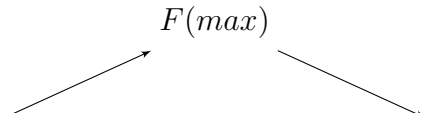
Tổng số lượng cá thu được ở vụ này được tính bằng công thức:

$$F(x) = (1000 - x)(1,5 + 0,0625x) = -0,0625x^2 + 61x + 1500.$$

- Sai:** Bài toán trở thành tìm x để $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

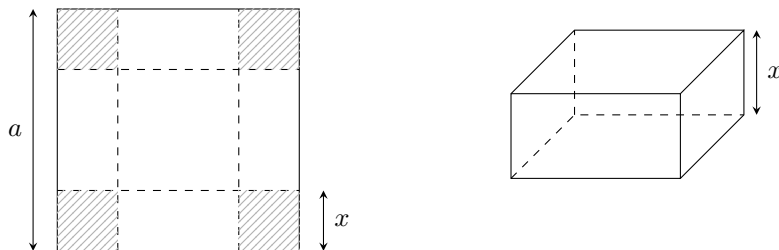
Ta có: $F'(x) = -0,125x + 61$. Cho $F'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,125x + 61 = 0 \Leftrightarrow x = 488$.

Bảng biến thiên:

x	0	488	1000
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$F(max)$ 		

Vậy ông Thanh phải thả số cá giống trong vụ tới là: $1000 - 488 = 512$ con.

Bài 6. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a . Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau, rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp.



- a) Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\frac{a}{12}$.
- b) Thể tích của khối hộp là lớn nhất khi cạnh của hình vuông bị cắt bằng $\frac{a}{6}$.
- c) Thể tích của khối hộp lớn nhất bằng $\frac{2a^3}{27}$.
- d) Thể tích hộp lớn nhất bằng $\frac{a^3}{27}$.

Hướng dẫn giải. Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông bị cắt ($0 < x < \frac{a}{2}$).

Thể tích của khối hộp là: $V(x) = x(a - 2x)^2$ với $0 < x < \frac{a}{2}$.

$$V'(x) = (a - 2x)^2 + x \cdot 2(a - 2x) \cdot (-2) = (a - 2x)(a - 2x - 4x) = (a - 2x)(a - 6x).$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a/2 \text{ (loại)} \\ x = a/6 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

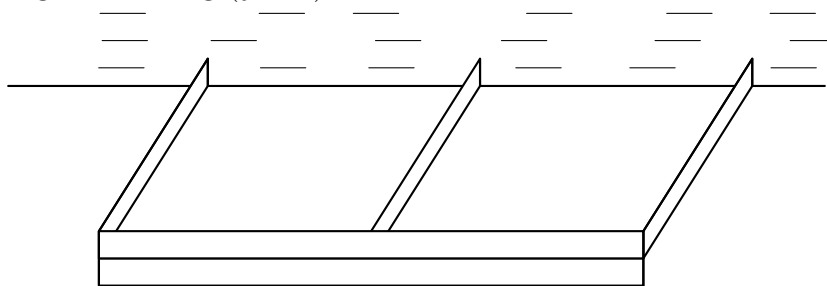
x	0	$a/6$	$a/2$	
$V'(x)$		+	0	−
$V(x)$	0	$\frac{2a^3}{27}$	0	

$$\text{Vậy } \max_{(0; a/2)} V(x) = V\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27}.$$

- ◇ a) **Sai:** $x = a/6$ mới làm cho thể tích lớn nhất.
- ◇ b) **Đúng:** Thể tích lớn nhất khi $x = a/6$.
- ◇ c) **Đúng:** Giá trị thể tích lớn nhất là $2a^3/27$.
- ◇ d) **Sai:** Kết quả đúng là $2a^3/27$.

Bài 7. Một người nông dân có 15.000.000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50000 đồng một mét. Gọi x là chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E (trong ba mặt song song, $x > 0$). Gọi y là chiều dài mặt hàng rào

hình chữ E song song với bờ sông ($y > 0$).



- a) Số tiền phải làm là: $x \cdot 60000 + y \cdot 3 \cdot 50000 = 15000000$ đồng.
 b) Diện tích đất: $S = x \cdot y = x \cdot \frac{500 - 5x}{2} = 250x - \frac{5}{2}x^2$.
 c) Diện tích lớn nhất của đất rào thu được $\max_{(0;+\infty)} S = 6250$ (m^2).
 d) Diện tích lớn nhất của đất rào thu được khi chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E là 50 m.

Hướng dẫn giải.

- a) **Sai:** Tổng số tiền chi trả cho vật liệu là chi phí của 3 đoạn hàng rào độ dài x và 1 đoạn hàng rào độ dài y :

$$x \cdot 3 \cdot 50000 + y \cdot 60000 = 15.000.000 \Leftrightarrow 15x + 6y = 1500 \Leftrightarrow y = \frac{500 - 5x}{2}.$$

- b) **Đúng:** Diện tích khu đất là: $S = x \cdot y = x \cdot \frac{500 - 5x}{2} = 250x - \frac{5}{2}x^2$.

- c) **Đúng:** Xét hàm số $S(x) = 250x - \frac{5}{2}x^2$ trên $(0; 100)$.

Ta có: $S'(x) = 250 - 5x$. Cho $S'(x) = 0 \Leftrightarrow 250 - 5x = 0 \Leftrightarrow x = 50$.

Bảng biến thiên:

x	0	50	$+\infty$
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$	0	6250	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, diện tích lớn nhất là 6250 m^2 tại $x = 50$.

- d) **Đúng:** Từ bảng biến thiên có $\max_{(0;+\infty)} S = 6250$ (m^2) khi $x = 50$ (m).

Bài 8. Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian t cho bởi công thức $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$, với y được tính theo mg/l và t được tính theo giờ, $t \geq 0$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số $y(t)$ có một đường tiệm cận ngang và một đường tiệm cận xiên.
 b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = 5$.
 c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = \frac{1}{3}$.

Chương 5. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

d) Sau một thời gian đủ dài, nồng độ oxygen trong hồ sẽ bão hòa và đạt ngưỡng 5 mg/l .

 **Hướng dẫn giải.** Ta có $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1} = \frac{45t^2 + 5 - 15t}{9t^2 + 1} = \frac{45t^2 - 15t + 5}{9t^2 + 1}$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{45t^2 - 15t + 5}{9t^2 + 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{45 - \frac{15}{t} + \frac{5}{t^2}}{9 + \frac{1}{t^2}} = \frac{45 - 0 + 0}{9 + 0} = 5$$

a) Đồ thị hàm số $y(t)$ có một đường tiệm cận ngang và một đường tiệm cận xiên.

Đồ thị hàm số $y(t)$ có một đường tiệm cận ngang là $y = 5$ và không có tiệm cận xiên. Chọn SAI.

b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = 5$.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 5 \Rightarrow y = 5$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn ĐÚNG.

c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = \frac{1}{3}$.

$$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{3}} y(t) = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{45t^2 - 15t + 5}{9t^2 + 1} = \frac{45 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 15 \cdot \frac{1}{3} + 5}{9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ không phải là đường}$$

tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chọn SAI.

d) Sau một thời gian đủ dài, nồng độ oxygen trong hồ sẽ bão hòa và đạt ngưỡng 5 mg/l . Ta nhận thấy $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 5$ điều này chứng tỏ rằng khi thời gian đủ dài, nồng độ oxygen trong hồ sẽ bão hòa và đạt ngưỡng 5 mg/l . Chọn ĐÚNG.

 **Bài 9.** Dân số của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức

$$f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5} \quad (f(t) \text{ tính bằng nghìn người})$$

- a) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người
- b) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 23 nghìn người
- c) Xét f là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, vậy hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$
- d) Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Vào năm 1998 thì tốc độ tăng dân số là 0,125 nghìn người/năm

 **Hướng dẫn giải.**

a) Vào đầu năm 1980, $t = 10 \Rightarrow f(10) = 18$.

Vậy số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người.

b) Vào đầu năm 1995, $t = 25 \Rightarrow f(25) = 22$.

Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 22 nghìn người.

c) $f'(t) = \frac{120}{(t+5)^2} > 0, \forall t > 0; f(t)$ liên tục trên $[0; +\infty)$ vì liên tục trên khoảng $(-5; +\infty)$.

Hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$.

d) Tốc độ tăng dân số vào năm 1990:

$$f'(20) = \frac{120}{(20+5)^2} = \frac{120}{625} = 0,192 \text{ do } t = 1990 - 1970 = 20.$$

Tốc độ tăng dân số được dự kiến vào năm 2008 của thị trấn là

$$f'(38) = \frac{120}{43^2} \approx 0,065 \text{ do } t = 2008 - 1970 = 38.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 0,125 \Rightarrow \frac{120}{(t+5)^2} = 0,125 \Rightarrow t+5 = \sqrt{\frac{120}{0,125}} \approx 31 \Rightarrow t \approx 26.$$

Vậy vào năm 1996, tốc độ tăng dân số của thị trấn là 0,125.

Bài 10. Dân số của một quốc gia sau t (năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức: $N(t) = 100e^{0,012t}$, $N(t)$ được tính bằng triệu người và $0 \leq t \leq 50$.

- Dân số của quốc gia vào năm 2030 là 108,763 (triệu người)
- Dân số của quốc gia vào năm 2035 là 125,488 (triệu người)
- Xem $N(t)$ là hàm số của biến t xác định trên đoạn $[0; 50]$. Khi đó hàm số $N(t)$ đồng biến trên đoạn $[0; 50]$
- Đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Vậy vào năm 2040 thì tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm

Hướng dẫn giải.

- Dân số năm 2030 ứng với $t = 7 \Rightarrow N(7) = 100e^{0,012 \cdot 7} = 100e^{0,084} \approx 108,763$ triệu người.
- Dân số năm 2035 ứng với $t = 12 \Rightarrow N(12) = 100e^{0,012 \cdot 12} = 100e^{0,144} \approx 115,488$, không phải 125,488.
- Trên đoạn $[0; 50]$, ta có đạo hàm: $N'(t) = 0,012 \cdot 100e^{0,012t} = 1,2e^{0,012t} > 0, \forall t \in [0; 50]$. Do đó, hàm số $N(t)$ đồng biến trên đoạn $[0; 50]$.
- Ta có: $N'(t) = 1,2e^{0,012t}$.

Với tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm ta có:

$$1,2e^{0,012t} = 1,6 \Rightarrow e^{0,012t} = \frac{4}{3} \Rightarrow t = \frac{\ln \frac{4}{3}}{0,012} \approx 23,97$$

Vậy vào năm 2046 thì tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm.

Bài 11. Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y = t^3 - 12t + 3, t \geq 0$.

- Hàm gia tốc của vật là $a = y'$.
- Hàm vận tốc của vật là $v(t) = 3t^2 - 12$.
- Tại thời điểm $t = 1$ thì hạt đang chuyển động lên trên.
- Trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 3$ thì quãng đường mà hạt đi là 23 m.

Hướng dẫn giải.

- Sai:** Nếu y là hàm số biểu thị cho chuyển động của hạt thì y' là hàm vận tốc v .
- Đúng:** Ta có $y = t^3 - 12t + 3 \Rightarrow y' = v = 3t^2 - 12$.
- Sai:** Dựa vào hàm vận tốc $v(t) = 3t^2 - 12$ thì hạt đi lên khi $v > 0$ và xuống khi $v < 0$. Do đó, vật đi lên khi $t \in (2; +\infty)$ và đi xuống khi $t \in (0; 2)$.

Vậy tại thời điểm $t = 1$ thì hạt đang chuyển động đi xuống.

- d) **Đúng:** Từ $t = 0$ tới $t = 2$, vật chuyển động từ tọa độ $y = 3$ đến tọa độ $y = -13$, tức là vật đi được quãng đường 16 đơn vị độ dài.

Từ $t = 2$ tới $t = 3$, vật chuyển động từ tọa độ $y = -13$ đến tọa độ $y = -6$, tức là vật đi được quãng đường 7 đơn vị độ dài.

Kết luận quãng đường vật đi chuyển trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 3$ là $16 + 7 = 23$ đơn vị độ dài.

Bài 12. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B . Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm được biểu diễn bởi công thức: $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ triệu đồng (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

- Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.
- Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 600 triệu đồng.
- Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm ($0 \leq x \leq 100$) cho B được biểu diễn bởi công thức $H(x) = -0,001x^3 + 15x - 100$.
- Bên A bán cho B khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

Hướng dẫn giải.

- a) **Đúng:** Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là $C(10) = 100 + 30 \cdot 10 = 400$ triệu đồng.

- b) **Sai:** Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là

$$R(10) = 10 \cdot P(10) = 10 \cdot (45 - 0,001 \cdot 10^2) = 449 \text{ triệu đồng.}$$

- c) **Đúng:** Lợi nhuận mà A thu được là: $H(x) = R(x) - C(x) = x \cdot P(x) - C(x)$

$$\Rightarrow H(x) = x(45 - 0,001x^2) - (100 + 30x) = -0,001x^3 + 15x - 100.$$

- d) **Đúng:** Xét hàm số $H(x) = -0,001x^3 + 15x - 100$, ($0 \leq x \leq 100$).

$$\text{Ta có: } H'(x) = -0,003x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5000 \Rightarrow x = 50\sqrt{2} \approx 70,7 \text{ (tấn).}$$

Bảng biến thiên cho thấy tại $x = 50\sqrt{2}$ hàm số đạt giá trị lớn nhất.

Vậy bán khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất bằng $H(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100$.

Bài 13. Tại một cơ sở sản xuất nước tinh khiết, nhân viên phụ trách sản xuất cho biết, nếu mỗi ngày cơ sở này sản xuất x (m^3) nước tinh khiết thì phải chi phí các khoản sau: 5 triệu đồng chi phí cố định; 0,15 triệu đồng cho mỗi mét khối sản phẩm; $0,0005x^2$ chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết công suất tối đa mỗi ngày của cơ sở này là $200m^3$. Gọi $C(x)$ là chi phí sản xuất x (m^3) sản phẩm mỗi ngày và $\bar{c}(x)$ là chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm. Khi đó:

- $C(x) = 0,0005x^2 + 0,15x + 5$.
- Chi phí sản xuất $100m^3$ nước tinh khiết là 20 triệu đồng.
- $\bar{c}(x) = 0,0005x + 0,15 + \frac{5}{x}$.
- Chi phí trung bình giảm xuống khi sản lượng nước tinh khiết trong ngày không vượt quá $100m^3$.

 Hướng dẫn giải.

a) **Đúng:** Chi phí mỗi ngày là tổng các khoản chi phí nên $C(x) = 0,0005x^2 + 0,15x + 5$ (triệu đồng).

b) **Sai:** Khi $x = 100$, ta có $C(100) = 0,0005 \cdot 100^2 + 0,15 \cdot 100 + 5 = 25$ triệu đồng.

c) **Sai:** Chi phí trung bình trên mỗi khối sản phẩm là:

$$\bar{c}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{0,0005x^2 + 0,15x + 5}{x} = 0,0005x + 0,15 + \frac{5}{x}.$$

d) **Đúng:** Xét hàm số $\bar{c}(x) = 0,0005x + 0,15 + \frac{5}{x}$ trên $(0; 200]$.

$$\text{Ta có } \bar{c}'(x) = 0,0005 - \frac{5}{x^2}.$$

$$\bar{c}'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 10000 \Leftrightarrow x = 100.$$

Vẽ bảng biến thiên, chi phí trung bình giảm khi hàm số $\bar{c}(x)$ nghịch biến, tức là $x \in (0; 100)$.

 **Bài 14.** Tại một cơ sở sản xuất nước tinh khiết, nhân viên phụ trách sản xuất cho biết, nếu mỗi ngày cơ sở này sản xuất x (m^3) nước tinh khiết thì phải chi phí các khoản sau: 5 triệu đồng chi phí cố định; 0,15 triệu đồng cho mỗi mét khối sản phẩm; $0,0005x^2$ chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết công suất tối đa mỗi ngày của cơ sở này là $200m^3$. Gọi $C(x)$ là chi phí sản xuất x (m^3) sản phẩm mỗi ngày và $\bar{c}(x)$ là chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm. Khi đó

a) $C(x) = 0,0005x^2 + 0,15x + 5$.

b) Chi phí sản xuất $100m^3$ nước tinh khiết là 20 triệu đồng.

c) $\bar{c}(x) = 0,0005x + 0,15 + \frac{5}{x}$.

d) Chi phí trung bình giảm xuống khi sản lượng nước tinh khiết trong ngày không vượt quá $100m^3$.

 *Hướng dẫn giải.* a) **Đúng.** Chi phí mỗi ngày là tổng các chi phí nên $C(x) = 0,0005x^2 + 0,15x + 5$ (triệu đồng).

b) **Sai.** Khi $x = 100$, ta có $C(100) = 0,0005 \cdot 100^2 + 0,15 \cdot 100 + 5 = 25$ (triệu đồng).

c) **Sai.** Chi phí trung bình trên mỗi khối sản phẩm là $\bar{c}(x) = \frac{0,0005x^2 + 0,15x + 5}{x} = 0,0005x + 0,15 + \frac{5}{x}$.

d) **Đúng.** Xét hàm số $\bar{c}(x) = 0,0005x + 0,15 + \frac{5}{x}$ với $0 < x \leq 200$.

$$\text{Ta có } \bar{c}'(x) = 0,0005 - \frac{5}{x^2} = \frac{5}{10^4} - \frac{5}{x^2}.$$

$$\bar{c}'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 10^4 \Rightarrow x = 100 \text{ (do } x \in (0; 200]).$$

Chương 5. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Bảng biến thiên:

x	0	100	200
$c'(x)$	–	0	+
$\bar{c}(x)$	$+\infty$	0,25	0,275

Vậy chi phí trung bình giảm khi hàm số $\bar{c}(x)$ nghịch biến, tức là $x \in (0; 100)$.

Bài 15. Khi nuôi tôm thả trong ao, một kỹ sư thủy sản đã thống kê được nếu mỗi mét vuông mặt ao thả x con tôm giống thì cuối mỗi vụ con tôm có cân nặng trung bình là $108 - x^2$ (gam).

- Sau mỗi vụ khối lượng tôm trung bình trong mỗi mét vuông mặt ao là $(108 - x^2)x$.
- Khi thả 10 con tôm giống/ m^2 thì lượng tôm thu được là $0,8 \text{ kg}/m^2$.
- Để sản lượng tôm lớn nhất thì nên thả 6 con tôm/ m^2 .
- Để lượng tôm thu được tăng lên thì mật độ tôm giống thả vào ao là từ 6 đến 10 con/ m^2 .

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.** Khối lượng tôm trung bình trong mỗi mét vuông ao nuôi là $M(x) = (108 - x^2)x$.

b) **Sai.** Khi $x = 10$, $M(10) = (108 - 10^2) \cdot 10 = 80$ (gam) = $0,08 \text{ kg}$.

c) **Đúng.** Để tôm phát triển được, $x > 0$; $x^2 \leq 108 \Rightarrow 0 < x \leq 10,39$.

Xét hàm số $M(x) = (108 - x^2)x = -x^3 + 108x$.

Có $M'(x) = -3x^2 + 108 = -3(x^2 - 36)$; $M'(x) = 0 \Rightarrow x = 6$. Bảng biến thiên:

x	0	6	10,39
$M'(x)$	+	0	–
$M(x)$	0	432	0

Để sản lượng tôm lớn nhất thì nên thả 6 con tôm/ m^2 .

d) **Sai.** Lượng tôm thu được tăng lên khi hàm số $M(x)$ đồng biến. Dựa vào bảng biến thiên ta có $x \in (0; 6)$, hay mật độ tôm không quá 6 con/ m^2 .

Bài 16. Một vật chuyển động theo hàm số $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t$ (m), với $t \geq 0$ và t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và $s(t)$ là vị trí của vật tại thời điểm t .

- Quãng đường mà vật chuyển động được tại thời điểm $t = 3(s)$ là $27(m)$.
- Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 1(s)$ là $6(m/s)$.
- Tại thời điểm vật đạt vận tốc $v(t) = 18(m/s)$ thì quãng đường đi được từ khi bắt đầu chuyển động là $6(m)$.
- Vận tốc của vật tăng trong khoảng thời gian từ $t = 0(s)$ đến $t = 1(s)$.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.** Tại thời điểm $t = 3(s)$ thì quãng đường $s(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 27(m)$.

b) **Đúng.** Ta có $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 9$. Tại $t = 1(s)$ thì $v(1) = 3(1)^2 - 6(1) + 9 = 6(m/s)$.

c) **Sai.** Khi $v(t) = 3t^2 - 6t + 9 = 18 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 3$ (do $t \geq 0$). Tại thời điểm $t = 3(s)$ thì quãng đường $s(3) = 27(m)$.

d) **Sai.** Xét hàm $v(t) = 3t^2 - 6t + 9 \Rightarrow v'(t) = 6t - 6$; $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Bảng biến thiên:

t	0	1	$+\infty$
$v'(t)$		-	0 +
$v(t)$	9		$+\infty$
		6	

Dựa vào bảng biến thiên ta có vận tốc $v(t)$ giảm trong khoảng thời gian từ $0(s)$ đến $1(s)$.

Bài 17. Ông M mua tặng vợ món quà đặt trong chiếc hộp chữ nhật thể tích 32 (đvtt) có đáy là hình vuông và không nắp. Ông quyết định mạ vàng chiếc hộp, độ dày lớp mạ không đổi. Gọi h và x lần lượt là chiều cao và cạnh đáy.

a) Công thức tính thể tích chiếc hộp là $V = x^2h$.

b) Diện tích các mặt ngoài của chiếc hộp là $S = 2x^2 + 4xh$.

c) Diện tích tất cả các mặt được mạ vàng là $S_{MV} = 2x^2 + 4xh$.

d) Khi cạnh đáy của chiếc hộp $x > 4$ thì x càng lớn, lượng vàng được mạ càng tăng.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.** Thể tích khối hộp chữ nhật $V = x \cdot x \cdot h = x^2h$.

b) **Sai.** Chiếc hộp có 1 mặt đáy hình vuông cạnh x và 4 mặt bên hình chữ nhật kích thước x và h . Vậy diện tích các mặt ngoài là $S_{xq} = x^2 + 4xh$.

c) **Sai.** Vì mạ vàng trên mọi điểm của chiếc hộp nên mạ cả mặt trong và mặt ngoài. Vậy $S_{MV} = 2S_{xq} = 2(x^2 + 4xh) = 2x^2 + 8xh$.

d) **Đúng.** Ta có $V = x^2h = 32 \Rightarrow h = \frac{32}{x^2}$.

Phần mạ vàng của chiếc hộp: $S(x) = 2x^2 + 8x \cdot \frac{32}{x^2} = 2x^2 + \frac{256}{x}$.

Xét $f(x) = 2x^2 + \frac{256}{x}$ với $x > 0$. Ta có $f'(x) = 4x - \frac{256}{x^2} = \frac{4x^3 - 256}{x^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$. Bảng biến thiên:

x	0	4	$+\infty$
$f'(x)$		-	0 +
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$
		96	

Chương 5. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy khi $x > 4$ hàm số $f(x)$ tăng. Vậy lượng vàng được mạ càng tăng.

Bài 18. Giả sử chi phí tiền xăng C nghìn đồng khi xe đi được 100 km phụ thuộc vào tốc độ trung bình v (km/h) trên cả đoạn đường theo công thức $C(v) = \frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v$, với $0 < v \leq 120$.

- a) Nếu tài xế lái xe với tốc độ trung bình 40 km/h thì chi phí là 500 nghìn đồng.
- b) $C'(v) = -\frac{16000}{v^2} + \frac{5}{2}$ với $0 < v < 120$.
- c) Nếu tốc độ càng lớn thì chi phí càng giảm.
- d) Chi phí tối thiểu trên đoạn đường tối đa 50 km/h là 445 nghìn đồng.

Hướng dẫn giải.

- ◇ a) $C(40) = \frac{16000}{40} + \frac{5}{2} \cdot 40 = 400 + 100 = 500$. Đây là khẳng định đúng.
- ◇ b) Đạo hàm $C'(v) = -\frac{16000}{v^2} + \frac{5}{2}$. Đây là khẳng định đúng.
- ◇ c) $C'(v) = 0 \Leftrightarrow v^2 = 6400 \Leftrightarrow v = 80$. Chi phí giảm khi $v < 80$ và tăng khi $v > 80$. Đây là khẳng định sai.
- ◇ d) Trên khoảng $(0; 50]$, $C'(v) < 0$ nên hàm số nghịch biến. Chi phí tối thiểu đạt tại $v = 50$, $C(50) = 320 + 125 = 445$. Đây là khẳng định đúng.

Bài 19. Một công ty phát hành một video quảng cáo trên mạng xã hội. Số lượng người xem tích lũy $P(t)$ (đơn vị: người) sau thời gian t (đơn vị: ngày) được mô hình hóa bởi hàm số: $P(t) = \frac{100000}{1+999e^{-0,5t}}$. Số lượng người xem tối đa dự kiến trong tệp khách hàng tiềm năng là 100000 người. Tốc độ lan truyền video tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $P'(t)$.

- a) Tại thời điểm $t = 0$, đã có 100 người xem video này.
- b) Để đạt được 90000 người xem, công ty cần khoảng 18 ngày.
- c) Sau 10 ngày, tổng số lượng người xem video đạt hơn 15000 người.
- d) Tại thời điểm $t = 5$, tốc độ lan truyền của video vẫn đang trên đà tăng.

Hướng dẫn giải.

- ◇ a) $P(0) = \frac{100000}{1+999} = 100$. Đây là khẳng định đúng.
- ◇ b) $P(t) = 90000 \Rightarrow 1 + 999e^{-0,5t} = 10/9 \Rightarrow e^{0,5t} = 8991 \Rightarrow t \approx 18,2$. Làm tròn là 18. Đây là khẳng định đúng.
- ◇ c) $P(10) = \frac{100000}{1+999e^{-5}} \approx \frac{100000}{1+6,73} \approx 12936 < 15000$. Đây là khẳng định sai.
- ◇ d) Tốc độ lan truyền $P'(t)$ đạt cực đại tại $P(t) = 50000$. Khi đó $1 + 999e^{-0,5t} = 2 \Rightarrow t = 2 \ln 999 \approx 13,8$. Vì $5 < 13,8$ nên tốc độ vẫn đang tăng. Đây là khẳng định đúng.

Bài 20. Một thùng trộn tại một nhà máy sản xuất kem hiện chứa 2000 lít nước, trong đó có 5 kg đường đã được trộn. Một vòi nước sẽ được mở với tốc độ 50 lít mỗi phút vào thùng, cùng lúc đường được đổ vào thùng với tốc độ 1 kg mỗi phút.

- a) Khối lượng đường sau t phút là $1000t + 5000$ gam.
- b) Nồng độ đường trong thùng luôn tăng khi sản xuất trong thời gian dài liên tục.

c) Nồng độ đường sau t phút là $f(t) = \frac{1000t + 5000}{50t + 2000}$.

d) Tiêu chuẩn không quá 20gam/lt . Nhà máy không thể sản xuất liên tục trong một thời gian dài.

 *Hướng dẫn giải.*

◇ a) Đúng ($5\text{kg} = 5000\text{g}$, $1\text{kg} = 1000\text{g}$).

◇ b) Đúng vì nồng độ ban đầu là $2,5\text{g/L}$ và nồng độ thêm vào là 20g/L .

◇ c) Đúng.

◇ d) $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 1000/50 = 20$. Nồng độ tiến dần đến 20 từ dưới lên, nên luôn đạt yêu cầu. Nhà máy có thể sản xuất lâu dài. Khẳng định sai.

 **Bài 21.** Một đại lý xăng dầu cần làm một bồn chứa dầu hình trụ bằng tôn thể tích $V = 54\pi$ (m^3). Gọi r, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của cái bồn dầu.

a) Công thức để tính thể tích bồn chứa dầu là $V = \pi r^2 h$.

b) Để diện tích toàn phần nhỏ nhất thì bán kính $r = 3(\text{m})$.

c) Diện tích toàn phần của bồn chứa dầu theo bán kính r là $S(r) = 2\pi \left(\frac{54}{r} + r^2 \right)$.

d) Biết chi phí vật liệu tôn là 500.000 đồng/ m^2 . Khi đó, số tiền ít nhất để mua nguyên vật liệu làm bồn chứa dầu là khoảng $84,8$ triệu đồng.

 *Hướng dẫn giải.*

◇ a) Đúng.

◇ b) $h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{54}{r^2}$. $S_{tp} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{108\pi}{r}$. $S' = 4\pi r - \frac{108\pi}{r^2} = 0 \Leftrightarrow r^3 = 27 \Leftrightarrow r = 3$. Đây là khẳng định đúng.

◇ c) $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{108\pi}{r} = 2\pi(r^2 + 54/r)$. Đây là khẳng định đúng.

◇ d) $S(3) = 2\pi(9 + 18) = 54\pi \approx 169,646\text{m}^2$. Số tiền $= 169,646 \cdot 500000 \approx 84,823,000$ đồng $\approx 84,8$ triệu. Đây là khẳng định đúng.

 **Bài 22.** GigaCloud dịch vụ lưu trữ. Giá cước x (triệu đồng), khách hàng $S(x) = \sqrt{45-x}$ (nghìn). Chi phí cố định 10 tỷ đồng, chi phí biến đổi $C_v = 3S^2$ tỷ đồng.

a) Giá cước 36 triệu đồng/tháng thì công ty GigaCloud đạt lợi nhuận ròng hằng tháng cao nhất.

b) Doanh thu của công ty GigaCloud là $R(x) = xS(x) = x\sqrt{45-x}$ tỷ đồng.

c) Chi phí cố định của công ty là $C_f = 10$ tỷ đồng mỗi tháng.

d) Lợi nhuận của công ty được biểu diễn bởi hàm số $L(x) = x\sqrt{45-x} + 3x - 145$.

 *Hướng dẫn giải.* Đổi đơn vị: x triệu $\times S$ nghìn khách hàng $= xS$ triệu triệu đồng $= xS$ tỷ đồng.

Doanh thu $R(x) = x\sqrt{45-x}$. Tổng chi phí $C(x) = 10 + 3(\sqrt{45-x})^2 = 10 + 3(45-x) = 145 - 3x$. Lợi nhuận $L(x) = R(x) - C(x) = x\sqrt{45-x} + 3x - 145$.

◇ a) $L'(x) = \sqrt{45-x} - \frac{x}{2\sqrt{45-x}} + 3 = \frac{90-3x}{2\sqrt{45-x}} + 3$. $L'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 90 = 6\sqrt{45-x} \Leftrightarrow x - 30 = 2\sqrt{45-x}$. Bình phương ($x \geq 30$): $x^2 - 60x + 900 = 180 - 4x \Leftrightarrow x^2 - 56x + 720 = 0 \Leftrightarrow x = 36$ hoặc $x = 20$ (loại). Khẳng định đúng.

- ◇ b) Đúng.
- ◇ c) Đúng.
- ◇ d) Đúng.

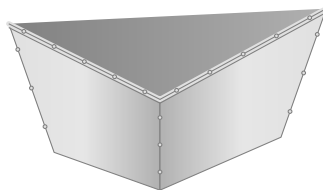
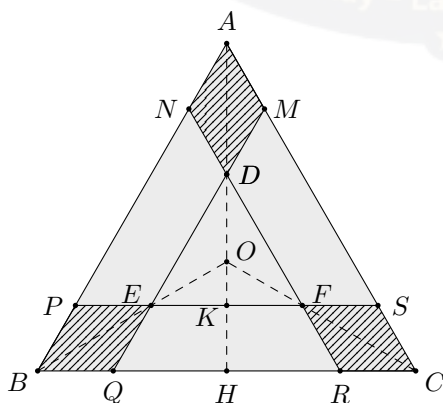
Bài 23. Chi phí nhiên liệu của một chiếc tàu chạy trên sông được chia làm hai phần. Phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghìn đồng/giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v = 10$ (km/giờ) thì phần thứ hai bằng 30 nghìn đồng/giờ.

- a) Khi vận tốc $v = 10$ (km/giờ) thì chi phí nguyên liệu cho phần thứ nhất trên 1 km đường sông là 48000 đồng.
- b) Hàm số xác định tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường sông với vận tốc x (km/h) là $f(x) = \frac{480}{x} + 0,03x^2$.
- c) Khi vận tốc $v = 30$ (km/giờ) thì tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường sông là 43000 đồng.
- d) Vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường sông nhỏ nhất là $v = 20$ (km/giờ).

Hướng dẫn giải.

- a) **Đúng:** Thời gian đi 1 km là $t = \frac{1}{10}$ giờ. Chi phí phần 1: $\frac{1}{10} \cdot 480.000 = 48.000$ đồng.
- b) **Đúng:** Chi phí phần 1 trên 1 km là $\frac{480}{x}$. Chi phí phần 2 trên 1 giờ là $0,03x^3$, nên trên 1 km là $\frac{1}{x} \cdot 0,03x^3 = 0,03x^2$. Tổng chi phí: $f(x) = \frac{480}{x} + 0,03x^2$ (nghìn đồng).
- c) **Đúng:** $f(30) = \frac{480}{30} + 0,03 \cdot 30^2 = 16 + 27 = 43$ nghìn đồng.
- d) **Đúng:** Sử dụng BDT Cauchy: $f(x) = \frac{240}{x} + \frac{240}{x} + 0,03x^2 \geq 3\sqrt{\frac{240}{x} \cdot \frac{240}{x} \cdot 0,03x^2} = 36$.
Dấu "=" xảy ra khi $\frac{240}{x} = 0,03x^2 \Leftrightarrow x^3 = 8000 \Leftrightarrow x = 20$.

Bài 24. Anh Việt có một tấm tôn hình tam giác đều ABC với cạnh bằng 6 (dm). Bên trong tấm nhôm này anh vẽ thêm tam giác đều DEF sao cho hai tam giác có cùng trọng tâm, đồng thời các cạnh tương ứng song song nhau. Anh Việt muốn làm một chậu đựng nước dạng hình chóp cụt tam giác đều với đáy nhỏ là DEF và đáy lớn để hở. Anh cắt bỏ ba hình bình hành ở ba góc của tam giác ABC là $AMDN$, $BPEQ$, $CSFR$ (như hình vẽ). Kẻ đường cao AH và gọi O là trọng tâm tam giác ABC . Đặt $x = DN = DM$, ($0 < x < 2$).



- a) $NP = QR = SM = 6 - 2x$ (dm).
 b) $AH = 3\sqrt{3}$ (dm) và $OA = 2\sqrt{3}$ (dm).
 c) $AD = x\sqrt{3}$ (dm) và $DE = 6 - 3x$ (dm).
 d) Sau khi gập hình vuông và dùng keo dán kín các đoạn gập vào với nhau gồm DM và DN , EP với EQ , FS với FR , sức chứa tối đa của chậu xấp xỉ 4,54 (lít).

Hướng dẫn giải. a) Vì cạnh $AB = BC = CA = 6$ (dm), cắt bỏ ở hai đầu một đoạn bằng cạnh của hình thoi có cạnh bằng x (dm).

Do đó ta có $NP = QR = SM = 6 - 2x$ (dm).

b) Vì AH là đường cao của tam giác đều ABC .

Suy ra

$$AH = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ (dm)}.$$

Vì O là trọng tâm của tam giác đều ABC .

$$\text{Suy ra } OA = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ (dm)}.$$

c) Vì $\triangle ABC$ đều nên $AMDN$ là hình thoi cạnh x (dm) và góc $\widehat{MAN} = 60^\circ$.

$$\text{Suy ra } AD = 2 \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3} \text{ (dm)}, DO = AO - AD = 2\sqrt{3} - x\sqrt{3} = (2 - x)\sqrt{3} \text{ (dm)}.$$

Mà $\triangle DEF$ đều, có O là trọng tâm.

$$\text{Suy ra } DO = \frac{DE\sqrt{3}}{3} \Rightarrow DE = \frac{3DO}{\sqrt{3}} = 3(2 - x) = 6 - 3x \text{ (dm)}.$$

d) Vì $DO = 6 - 3x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

Theo đề bài ta có

$$\diamond \text{ Diện tích đáy lớn là } S = \frac{(6 - 2x)^2 \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}(3 - x)^2.$$

$$\diamond \text{ Diện tích đáy nhỏ là } S' = \frac{(6 - 3x)^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Gọi O' là trọng tâm của đáy lớn, H là hình chiếu của D lên MO' .

$$\text{Ta có } MH = MO' - DO = \frac{(6 - 2x)\sqrt{3}}{3} - (2 - x)\sqrt{3} = \frac{x\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Chiều cao của chậu là } h = \sqrt{DM^2 - MH^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{x\sqrt{6}}{3}.$$

Thể tích của chậu là

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}h \left(S + S' + \sqrt{S \cdot S'} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{x\sqrt{6}}{3} \cdot \left(\sqrt{3}(3 - x)^2 + \frac{(6 - 3x)^2 \sqrt{3}}{4} + \sqrt{\sqrt{3}(3 - x)^2 \cdot \frac{(6 - 3x)^2 \sqrt{3}}{4}} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{x\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{19\sqrt{3}x^2 - 90\sqrt{3}x + 108\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$$= \frac{57\sqrt{2}x^3 - 270\sqrt{2}x^2 + 324\sqrt{2}x}{36}.$$

$$\text{Ta có } V' = \frac{171\sqrt{2}x^2 - 540\sqrt{2}x + 324\sqrt{2}}{36}.$$

$$\text{Khi đó } V' = 0 \Leftrightarrow 171\sqrt{2}x^2 - 540\sqrt{2}x + 324\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{30 - 6\sqrt{6}}{19} \approx 0,805 \text{ (nhận)} \\ x = \frac{30 + 6\sqrt{6}}{19} \approx 2,352 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên hàm số $V(x)$ trên khoảng $(0; 2)$.

x	0	0,805	2	
V'		+	0	-
V			4,54	

Từ bảng biến thiên suy ra thể tích lớn nhất của chậu là xấp xỉ 4,54 (lít).

Bài 25. Đậu đỗ là một loại thực phẩm quen thuộc trong bữa ăn của người Việt Nam. Ngoài giá trị dinh dưỡng cao, đậu đỗ còn có nhiều công dụng tuyệt vời cho sức khỏe và sắc đẹp như: chống oxy hóa, giúp cơ bắp con người khỏe mạnh, tăng cường sức khỏe cho tim mạch con người, lợi ích cho hệ tiêu hóa, bổ thận, cung cấp vitamin bổ dưỡng cho cơ thể, đào thải độc tố, giải độc, tốt cho hệ miễn dịch, giúp huyết áp ổn định, da đẹp. Cây đậu đỗ khi trồng có chiều cao 6 cm. Khảo sát cho thấy độ cao tính bằng centimet của cây đậu đỗ tại thời điểm t kể từ khi được trồng được cho bởi hàm số $h(t) = -0,005t^4 + bt^3 + c$ (trong đó $b, c \in \mathbb{R}$), với t tính theo tuần. Giả sử $h'(t)$ là tốc độ tăng chiều cao của cây đậu đỗ sau khi trồng (đơn vị của $h'(t)$: cm/tuần). Biết $h'(5) = 5$.

- Hàm số $h(t)$ có công thức $h(t) = -0,005t^4 + 0,1t^3$.
- Giai đoạn tăng trưởng của cây đậu đỗ đó kéo dài 15 tuần.
- Chiều cao tối đa của cây đậu đỗ đó là 90 cm.
- Vào thời điểm cây đậu đỗ đó phát triển nhanh nhất thì chiều cao của cây là 56 cm.

Hướng dẫn giải. a) Cây đậu đỗ khi trồng có chiều cao 6 cm tức là $h(0) = 6 \Rightarrow c = 6$.

b) Với $c = 6$, ta có $h(t) = -0,005t^4 + bt^3 + 6 \Rightarrow h'(t) = -0,02t^3 + 3bt^2$.
Mà $h'(5) = 5 \Rightarrow h'(5) = -0,02 \cdot 5^3 + 3b \cdot 5^2 = 5 \Rightarrow b = 0,1$.
Vậy $h(t) = -0,005t^4 + 0,1t^3 + 6$.

$$\text{Khi đó } h'(t) = -0,02t^3 + 0,3t^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 15. \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

t	0	15	$+\infty$
$h'(t)$	+	0	-
$h(t)$	6 $\nearrow$ $90,375$ $\searrow$ $-\infty$		

Giai đoạn tăng trưởng của cây đậu đỗ đó kéo dài 15 tuần.

c) Chiều cao tối đa của cây đậu đỗ đó là

$$h(15) = -0,005 \cdot (15)^4 + 0,1 \cdot (15)^3 + 6 = 90,375.$$

d) Vào thời điểm cây đậu đỗ đó phát triển nhanh nhất.

$$\text{Ta có } h''(t) = -0,06t^2 + 0,6t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 10. \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

t	0	15	$+\infty$
$h''(t)$		+	0
$h'(t)$	0	10	$-\infty$

Thời điểm cây đậu đỗ đó phát triển nhanh nhất là tuần thứ 10 khi đó chiều cao cây đậu đỗ là

$$h(10) = -0,005 \cdot (10)^4 + 0,1 \cdot (10)^3 + 6 = 56.$$

Bài 26. Ta coi Trái Đất là hình cầu hoàn hảo với bán kính $R = 6370$ (km) và diện tích toàn phần là $S = 4\pi R^2$. Các phi hành gia từ tàu vũ trụ chỉ có thể nhìn thấy một phần bề mặt Trái Đất. Ở độ cao h , phần diện tích Trái Đất các phi hành gia có thể nhìn thấy sẽ được tính theo công thức $S_T = 2\pi R^2 \left(1 - \frac{R}{R+h}\right)$, trong đó R là bán kính Trái Đất. Gọi K là tỉ số diện tích bề mặt Trái Đất nhìn thấy được ở độ cao h với diện tích toàn phần của Trái Đất.



- Công thức tính K là $K = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{h}{R+h}\right)$
- Trong một chuyến bay của tàu con thoi, các phi hành gia đã thực hiện một hoạt động ngoài tàu ở độ cao 280 km. Có 2,5% (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) diện tích bề mặt Trái Đất có thể nhìn thấy ở độ cao đó
- Muốn nhìn thấy $\frac{1}{4}$ diện tích bề mặt Trái Đất, các phi hành gia cần đưa tàu con thoi đạt đến độ cao 6470 km
- Khi độ cao h càng tăng lên thì K càng tăng nhưng không vượt quá 50%

Hướng dẫn giải. a) Ta có tỷ số K là diện tích nhìn thấy được chia cho diện tích toàn phần

$$K = \frac{S_T}{S} = \frac{2\pi R^2 \left(1 - \frac{R}{R+h}\right)}{4\pi R^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R}{R+h}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{R+h}.$$

Chương 5. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

b) Với bán kính $R = 6\,370$ km và chiều cao $h = 280$ km thì tỷ số K tại độ cao h là

$$K = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{R+h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{280}{6\,370+280} = \frac{2}{95} \approx 0,021 \approx 2,1\%.$$

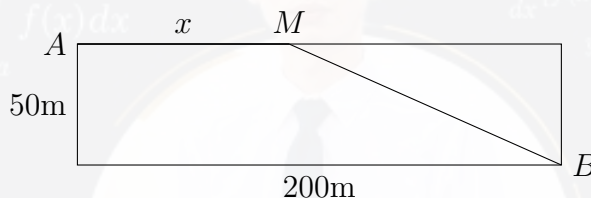
c) Với $K = \frac{1}{4}$ thì

$$K = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{R+h} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{6\,370+h} \Leftrightarrow h = 6\,370 \text{ (km)}.$$

d) Khi h càng lớn ta có

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} K = \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{h}{R+h} = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{R}{h} + 1} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%.$$

Bài 27. Có một bể bơi hình chữ nhật rộng 50 m, dài 200 m. Một vận động viên xuất phát từ điểm A , chạy đến điểm M trên cạnh dài và bơi từ M đến điểm B ở góc đối diện. Biết vận tốc chạy 4,8 m/s, vận tốc bơi 2,4 m/s. Gọi x (m) là khoảng cách từ A đến M ($0 < x < 200$).



a) Thời gian vận động viên chạy từ A đến M là: $\frac{x}{4,8}$ giây.

b) Thời gian vận động viên bơi từ M đến B là: $\frac{\sqrt{(200-x)^2 + 50^2}}{2,4}$ giây.

c) Nếu $AM = 100$ m thì tổng thời gian di chuyển từ A đến B ít hơn 1 phút.

d) Vận động viên chọn điểm M cách A khoảng 171 mét thì đến B nhanh nhất.

Hướng dẫn giải.

♦ a) **Đúng.** Thời gian = Quãng đường / Vận tốc = $x/4,8$.

♦ b) **Đúng.** Quãng đường bơi $MB = \sqrt{MC^2 + CB^2} = \sqrt{(200-x)^2 + 50^2}$. Thời gian bơi là $MB/2,4$.

♦ c) **Sai.** Với $x = 100$, $t = \frac{100}{4,8} + \frac{\sqrt{100^2 + 50^2}}{2,4} \approx 20,83 + 46,59 = 67,42$ giây > 60 giây.

♦ d) **Đúng.** Xét hàm $t(x) = \frac{x}{4,8} + \frac{\sqrt{(200-x)^2 + 2500}}{2,4}$. Đạo hàm $t'(x) = \frac{1}{4,8} - \frac{200-x}{2,4\sqrt{(200-x)^2 + 2500}}$.

$$\text{Giải } t'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{(200-x)^2 + 2500} = 2(200-x) \Rightarrow (200-x)^2 + 2500 = 4(200-x)^2 \Rightarrow 3(200-x)^2 = 2500 \Rightarrow 200-x \approx 28,87 \Rightarrow x \approx 171,13.$$

Bài 28. Một công ty du lịch in tạp chí. Chi phí xuất bản x cuốn là $C(x) = x^2 - 2000x + 10^7$ (đồng). Chi phí phát hành mỗi cuốn là 4000 (đồng).

a) Chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí là: $f(x) = \frac{x^2 - 2000x + 10^7}{x} + 4000$ (đồng).

b) Chi phí xuất bản và phát hành 5000 cuốn tạp chí là 45 triệu đồng.

c) Chi phí trung bình mỗi cuốn bắt đầu tăng khi số lượng đạt từ 3163 cuốn trở lên.

d) Chi phí trung bình thấp nhất là 3162 đồng.

Hướng dẫn giải.

- ♦ a) **Đúng.** Chi phí trung bình = (Chi phí xuất bản / x) + Chi phí phát hành mỗi cuốn.
- ♦ b) **Đúng.** $f(5000) = \frac{5000^2 - 2000 \cdot 5000 + 10^7}{5000} + 4000 = 9000$ đồng/cuốn. Tổng chi phí = $9000 \cdot 5000 = 45.000.000$ đồng.
- ♦ c) **Đúng.** Xét $f(x) = x - 2000 + \frac{10^7}{x} + 4000 = x + \frac{10^7}{x} + 2000$. Đạo hàm $f'(x) = 1 - \frac{10^7}{x^2}$.
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 10^7 \Rightarrow x \approx 3162,27$. Vậy từ cuốn thứ 3163 chi phí trung bình bắt đầu tăng.
- ♦ d) **Sai.** Giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ đạt tại $x \approx 3162$. $f(3162) \approx 3162 + \frac{10^7}{3162} + 2000 \approx 8324,5$ đồng. Con số 3162 đồng là sai.

 **Bài 29.** Một công ty bất động sản có 150 căn hộ cho thuê, biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng mỗi tháng thì mỗi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 5 căn hộ bị bỏ trống. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- a) Khi giá cho thuê mỗi căn hộ là 2.200.000 đồng thì có 10 căn hộ bị trống.
- b) Khi giá cho thuê mỗi căn hộ là 2.700.000 đồng thì thu nhập của công ty cao nhất.
- c) Thu nhập cao nhất của công ty đạt được là 312.500.000 đồng.
- d) Khi thu nhập công ty cao nhất thì số căn hộ có người thuê là 125 căn hộ.

Hướng dẫn giải.

Gọi số lần tăng giá tiền cho thuê mỗi căn hộ một tháng là x (lần), ($0 \leq x \leq 30$).

Mỗi lần tăng 100.000 đồng tương ứng với $\frac{1}{10}$ triệu đồng.

Số tiền cho thuê mỗi căn hộ là: $2 + 0,1x$ (triệu đồng).

Số căn hộ có người thuê là: $150 - 5x$ (căn hộ).

Thu nhập của công ty là: $f(x) = (2 + 0,1x)(150 - 5x)$.

Đạo hàm:

$$f'(x) = 0,1(150 - 5x) - 5(2 + 0,1x) = 15 - 0,5x - 10 - 0,5x = 5 - x$$

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

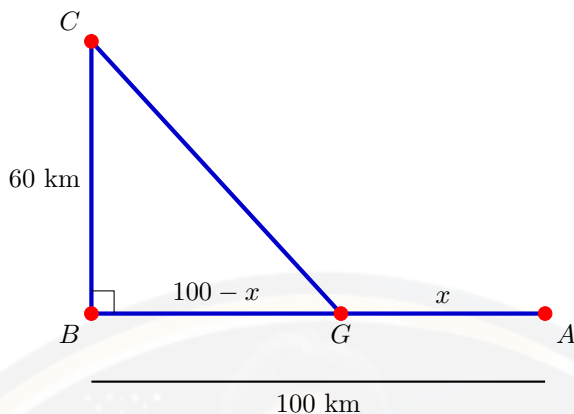
Ta có bảng biến thiên hoặc tính các giá trị tại biên:

$$f(0) = 300; \quad f(5) = 312,5; \quad f(30) = 0$$

Suy ra $\max_{x \in [0;30]} f(x) = f(5) = 312,5$ (triệu đồng) khi $x = 5$.

- Với $x = 5$, thu nhập cao nhất là 312,5 triệu đồng = 312.500.000 đồng $\Rightarrow$ c) **đúng**.
- Giá thuê để thu nhập cao nhất là $2 + 0,1 \cdot 5 = 2,5$ triệu = 2.500.000 đồng $\Rightarrow$ b) **sai**.
- Số căn hộ thuê khi thu nhập cao nhất là $150 - 5 \cdot 5 = 125$ căn hộ $\Rightarrow$ d) **đúng**.
- Khi giá thuê là 2.200.000 đồng = 2,2 triệu đồng, ta có $2 + 0,1x = 2,2 \Rightarrow x = 2$. Số căn hộ trống là $5 \cdot 2 = 10$ căn hộ $\Rightarrow$ a) **đúng**.

Bài 30. Đường dây điện 110KV kéo từ trạm phát (điểm A) trong đất liền ra Côn Đảo (điểm C). Biết $BC = 60\text{km}$, $AB = 100\text{km}$, góc $\widehat{ABC} = 90^\circ$, như hình vẽ. Mỗi km dây điện dưới nước chi phí là 5000USD, chi phí cho mỗi km dây điện trên bờ là 3000USD. Đặt $x = AG$.



- Khi $x = 20\text{km}$ thì đường dây điện nối từ C về G dài 100km.
- Khi $x = 20\text{km}$ thì tổng chi phí mắc điện là 560.000USD.
- Tổng chi phí mắc điện nhỏ nhất khi $x = 50\text{km}$.
- Tổng chi phí mắc điện nhỏ nhất là 540.000USD.

Hướng dẫn giải.

- Có $AG = x \Rightarrow BG = 100 - x$ với $0 \leq x \leq 100$.

Xét tam giác CBG vuông tại B có $CG = \sqrt{CB^2 + BG^2} = \sqrt{3600 + (100 - x)^2}$.

Khi $x = 20\text{km} \Rightarrow CG = \sqrt{3600 + (100 - 20)^2} = \sqrt{3600 + 6400} = 100\text{km}$.

Vậy a) **ĐÚNG**.

- Chi phí tiền mắc điện là $f(x) = 3000x + 5000\sqrt{3600 + (100 - x)^2}$.

Khi $x = 20\text{km} \Rightarrow CG = 100\text{km}$ và tổng chi phí mắc điện là:

$T = f(20) = 3000 \cdot 20 + 5000 \cdot 100 = 560.000\text{USD}$. Vậy b) **ĐÚNG**.

- Để chi phí mắc điện ít nhất thì $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $f'(x) = 3000 - 5000 \cdot \frac{(100 - x)}{\sqrt{3600 + (100 - x)^2}}$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3000 = 5000 \cdot \frac{(100 - x)}{\sqrt{3600 + (100 - x)^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 55 \\ x = 145 (l) \end{cases}$$

Ta có: $f(0) \approx 583095,1895\text{USD}$

$f(55) = 540.000\text{USD}$

$f(100) = 600.000\text{USD}$

Vậy chi phí mắc điện nhỏ nhất khi $x = 55\text{km}$. Do đó c) **SAI**.

- Chi phí mắc điện nhỏ nhất là $f(55) = 540.000\text{USD}$.

Vậy d) **ĐÚNG**.

Bài 31. Một cửa hàng bán vải thiều với giá bán là 30000 đồng/kg. Giá nhập vào là 16000 đồng/kg. Với giá này cửa hàng ước chừng bán được 100 kg/ngày. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính cứ giảm 1000 đồng/kg thì số vải thiều bán được sẽ tăng thêm là 10 kg.

- Nếu giữ nguyên giá ban đầu, lợi nhuận theo ngày của cửa hàng là 1400000 đồng.
- Nếu giá bán là 20000 đồng/kg, cửa hàng bán được 250 kg/ngày.
- Gọi x (nghìn đồng) là giá tiền mà cửa hàng dự định bán ($16 < x < 30$), khi đó lợi nhuận theo ngày của cửa hàng được xác định bởi hàm số $f(x) = (x - 16)(400 - 10x)$.
- Lợi nhuận tối đa theo ngày của cửa hàng là 1600000 đồng.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng**

Lợi nhuận theo ngày của cửa hàng là $(30000 - 16000) \cdot 100 = 1400000$ đồng.

b) **Sai**

Với giá bán 20000 đồng/kg, tức là đã giảm 10000 đồng so với giá cũ, khi đó số vải thiều bán được tăng thêm $10 \cdot 10 = 100$ kg, nên cửa hàng bán được $100 + 100 = 200$ kg/ngày.

c) **Đúng**

Gọi x (nghìn đồng) là giá tiền mà cửa hàng dự định bán ($16 < x < 30$).

Khi đó số kg vải thiều bán được sẽ là $100 + (30 - x) \cdot 10 = 400 - 10x$ (kg).

Lợi nhuận thu được theo ngày là: $f(x) = (x - 16)(400 - 10x)$ (nghìn đồng).

d) **Sai**

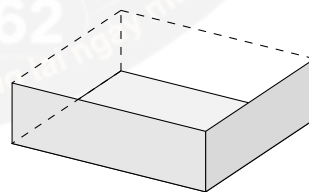
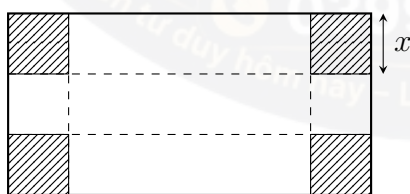
Xét hàm số $f(x) = (x - 16)(400 - 10x) = -10x^2 + 560x - 6400$ với $16 < x < 30$.

Đây là hàm số bậc hai với $a = -10 < 0$ nên có:

$$\max_{(16;30)} f(x) = f(28) = -\frac{\Delta}{4a} = 1440 \text{ khi } x = -\frac{b}{2a} = 28 \text{ (thỏa mãn } 16 < x < 30).$$

Vậy lợi nhuận tối đa là 1440 nghìn đồng/ngày = 1.440.000 đồng khi giá bán là 28 nghìn đồng/kg.

Bài 32. Một tấm kim loại hình chữ nhật có kích thước $3\text{m} \times 8\text{m}$. Người ta cắt mỗi góc một hình vuông có cạnh là x (m) để tạo ra hình hộp chữ nhật không nắp. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:



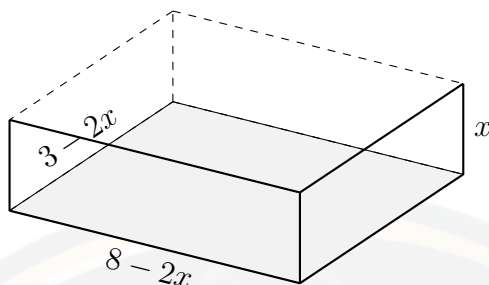
- Hình vuông được cắt ra ở mỗi góc có cạnh x thỏa $0 < x < \frac{3}{2}$ (m).
- Diện tích mặt đáy của chiếc hộp là $S = (8 - 2x)(3 - 2x)$ (m²).
- Thể tích của chiếc hộp là $V = 4x^3 + 22x^2 + 24x$ (m³).
- Chiếc hộp có thể tích lớn nhất bằng $\frac{2}{3}$ (m³).

Hướng dẫn giải.

a) Đúng

Do chiều rộng của tấm kim loại hình chữ nhật là 3 (m) và phải cắt ra 2 hình vuông có cạnh x (m) dọc theo chiều rộng này nên ta có $0 < 2x < 3 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{3}{2}$.

b) Đúng



Ta có chiều dài, chiều rộng, chiều cao của chiếc hộp lần lượt là $8 - 2x, 3 - 2x, x$ (m).

Đáy của chiếc hộp là hình chữ nhật có diện tích là $S = (8 - 2x)(3 - 2x)$ (m²).

c) Sai

Thể tích của chiếc hộp là: $V = x(8 - 2x)(3 - 2x) = 4x^3 - 22x^2 + 24x$ (m³).

d) Sai

Xét hàm số: $V(x) = 4x^3 - 22x^2 + 24x$ trên $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

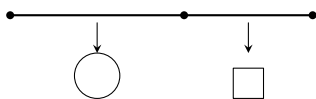
$$\text{Ta có: } V'(x) = 12x^2 - 44x + 24; V'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 & (l) \\ x = \frac{2}{3} & (n) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	
$V'(x)$		+	0	−
$V(x)$			$V_{\max}$	

Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất của $V(x)$ trên $\left(0; \frac{3}{2}\right)$ là $V\left(\frac{2}{3}\right) \approx 7,41$ (m³).

Bài 33. Một sợi dây kim loại dài a (cm). Người ta cắt đoạn dây đó thành hai đoạn: đoạn có độ dài x (cm) được uốn thành đường tròn và đoạn còn lại được uốn thành hình vuông ($a > x > 0$).



a) Bán kính đường tròn: $r = \frac{x}{\pi}$.

b) Diện tích hình vuông: $\left(\frac{a-x}{4}\right)^2$.

c) Tổng diện tích hai hình: $\frac{(4 + \pi)x^2 - 2a\pi x + \pi a^2}{16\pi}$.

d) Khi $x = \frac{a\pi}{2 + \pi}$ thì hình vuông và hình tròn tương ứng có tổng diện tích nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải. a) Sai

Chu vi đường tròn: $2\pi r = x \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$.

b) Đúng

Do x là độ dài của đoạn dây uốn thành hình tròn nên chiều dài đoạn còn lại là $a - x$.

Suy ra cạnh hình vuông là $\frac{a - x}{4}$. Diện tích hình vuông: $\left(\frac{a - x}{4}\right)^2$.

c) Đúng

Diện tích hình tròn: $\pi r^2 = \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi}$.

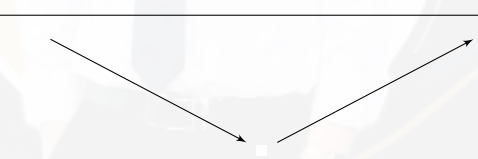
Tổng diện tích hai hình: $S = \frac{x^2}{4\pi} + \left(\frac{a - x}{4}\right)^2 = \frac{4x^2 + (a - x)^2\pi}{16\pi} = \frac{(4 + \pi)x^2 - 2a\pi x + \pi a^2}{16\pi}$.

d) Sai

Xét hàm số $S(x) = \frac{(4 + \pi)x^2 - 2a\pi x + \pi a^2}{16\pi}$ với $0 < x < a$.

Ta có $S'(x) = \frac{(4 + \pi)x - a\pi}{8\pi}$; $S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a\pi}{4 + \pi}$.

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{a\pi}{4 + \pi}$	a
$S'(x)$	—	0	+
$S(x)$			

Hàm số $S(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $(0; a)$ tại $x = \frac{a\pi}{4 + \pi}$.

Bài 34. Một vật được làm nóng đến $u_0 = 100^\circ\text{C}$ và sau đó được làm mát trong phòng có nhiệt độ không khí là $T = 30^\circ\text{C}$. Nhiệt độ của vật được làm mát tại thời điểm t (tính bằng phút) có thể được mô hình hóa bằng công thức sau: $u(t) = T + (u_0 - T)e^{kt}$ với k là hằng số.

a) Nhiệt độ $u(t)$ của vật tại thời điểm t là $u(t) = 30 + 70e^{kt}$.

b) Nếu hằng số $k = -0,05$ thì nhiệt độ của vật sau 10 phút gần bằng 60°C .

c) Nếu nhiệt độ của vật là 80°C sau 5 phút thì hằng số k có giá trị gần bằng $-0,0673$.

d) Nếu nhiệt độ của vật là 80°C sau 5 phút thì nhiệt độ của vật sau 18 phút gần bằng 51°C .

Hướng dẫn giải. a) Đúng

Ta có $u(t) = T + (u_0 - T)e^{kt} = 30 + (100 - 30)e^{kt} = 30 + 70e^{kt}$.

b) Sai

Với $k = -0,05$, ta có $u(10) = 30 + 70e^{-0,05 \cdot 10} \approx 72^\circ\text{C}$.

c) Đúng

Ta có $u(5) = 80 \Leftrightarrow 30 + 70e^{5k} = 80 \Leftrightarrow e^{5k} = \frac{5}{7} \Leftrightarrow 5k = \ln \frac{5}{7} \Leftrightarrow k = \frac{1}{5} \ln \frac{5}{7} \approx -0,0673$.

d) Đúng

Nhiệt độ của vật sau 18 phút là: $u(18) = 30 + 70e^{18 \cdot \frac{1}{5} \ln \frac{5}{7}} \approx 51^\circ\text{C}$.

Bài 35. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh

Chương 5. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$ (mg/L).

a) $c'(t) = \frac{t^2 + 1}{(t^2 + 1)^2}$.

b) $c'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in (0; +\infty) \\ t = -1 \notin (0; +\infty) \end{cases}$.

c) Nồng độ thuốc trong máu tăng trong 2 giờ đầu tiên sau khi tiêm.

d) Sau khi tiêm thuốc 1 giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất.

 **Hướng dẫn giải.** a) Sai.

Ta có $c'(t) = \frac{(t)'(t^2 + 1) - t(t^2 + 1)'}{(t^2 + 1)^2} = \frac{t^2 + 1 - 2t^2}{(t^2 + 1)^2} = \frac{1 - t^2}{(t^2 + 1)^2}$.

b) Đúng.

Ta có $c'(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \in (0; +\infty) \\ t = -1 \notin (0; +\infty) \end{cases}$.

c) Sai.

Bảng biến thiên của hàm số $c(t)$ trên khoảng $(0; +\infty)$:

t	0	1	$+\infty$
$c'(t)$	+	0	-
$c(t)$	0	$\frac{1}{2}$	0

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $c(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$, tức là nồng độ thuốc trong máu tăng trong 1 giờ đầu tiên sau khi tiêm.

d) Đúng.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\max_{(0; +\infty)} c(t) = \frac{1}{2}$ khi $t = 1$.

Vậy sau khi tiêm thuốc 1 giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất.

 **Bài 36.** Một công ty sản xuất sản phẩm. Bộ phận tài chính của công ty đưa ra hàm số biểu diễn giá bán mỗi sản phẩm khi có x sản phẩm được bán ra là $p(x) = 1000 - 25x$ (nghìn đồng).

a) Hàm số doanh thu của công ty khi bán được x sản phẩm là $f(x) = x \cdot p(x)$ (nghìn đồng).

b) Doanh thu của công ty khi bán được 10 sản phẩm là 7,5 triệu đồng.

c) Phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm là $x = 2$.

d) Doanh thu công ty lớn nhất là 10 triệu đồng khi bán được 20 sản phẩm.

 **Hướng dẫn giải.** a) Đúng

Bán x sản phẩm với giá mỗi sản phẩm là $p(x) = 1000 - 25x$ (nghìn đồng) nên ta có doanh thu của công ty là $f(x) = x \cdot p(x)$ (nghìn đồng).

b) Đúng

Doanh thu khi bán được 10 sản phẩm là:

$$f(10) = 10 \cdot p(10) = 10 \cdot (1000 - 25 \cdot 10) = 7500 \text{ nghìn đồng} = 7,5 \text{ triệu đồng.}$$

c) Sai

$$\text{Ta có } f(x) = x(1000 - 25x) = -25x^2 + 1000x.$$

$$\text{Khi đó } f'(x) = -50x + 1000; f'(x) = 0 \Leftrightarrow -50x + 1000 = 0 \Leftrightarrow x = 20.$$

Vậy $f'(x) = 0$ có nghiệm là $x = 20$.

d) Đúng

Bảng biến thiên:

x	0	20	$+\infty$
$y'(x)$		+	0 -
y	0	10000	$-\infty$

Hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất là 10000 tại $x = 20$. Vậy doanh thu lớn nhất là 10 triệu đồng, khi đó có 20 sản phẩm được bán ra.

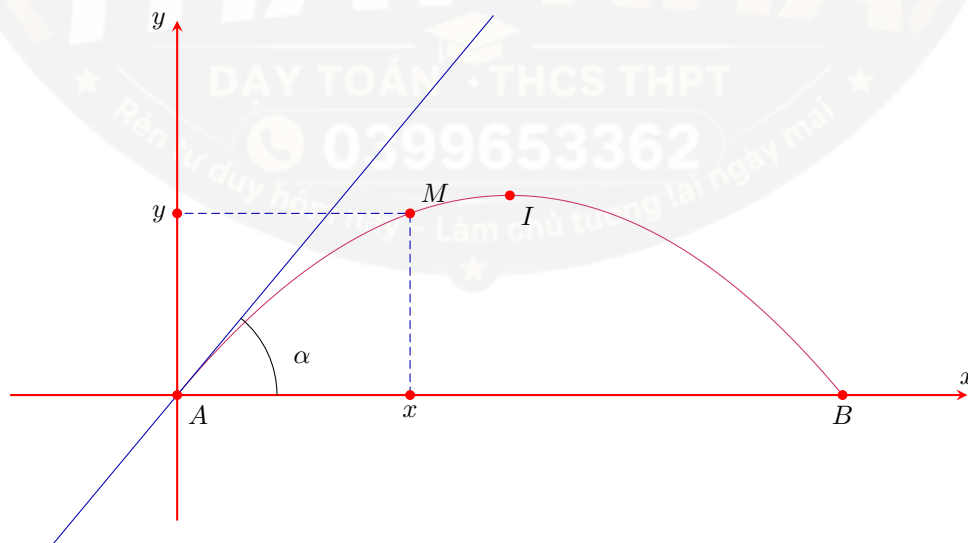
Bài 37. Xét chuyển động của một tàu lượn trên đoạn đường ray có hình dạng một phần đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{135x - x^2 - x^3}{200}$ ($x \geq 0$), trong đó x là khoảng cách theo phương ngang kể từ điểm A, y là độ cao tương ứng của tàu lượn so với phương ngang AB. Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục là 10 m). Các kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị.

a) Độ dài đoạn AB bằng 111 m.

b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x_0 = \frac{\sqrt{406} - 1}{3}$.

c) Độ cao lớn nhất của tàu lượn so với phương ngang AB là 64 m.

d) Khi tàu lượn đi qua điểm A, tiếp tuyến của quỹ đạo tại A hợp với phương ngang AB một góc $\alpha \approx 34^\circ$.



Hướng dẫn giải. a) Điểm B là giao điểm của đồ thị hàm số với phần dương của trục hoành.

$$\text{Xét phương trình hoành độ giao điểm } \frac{135x - x^2 - x^3}{200} = 0 \Rightarrow x(135 - x - x^2) = 0.$$

Chương 5. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Vì $x_B > 0$ nên $x^2 + x - 135 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{541}}{2} \approx 11,13$.

Thực tế nên độ dài đoạn AB là $11,13 \cdot 10 = 111,3 \text{ m} \approx 111 \text{ m}$.

b) Ta có $y' = f'(x) = \frac{135 - 2x - 3x^2}{200}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 2x + 135 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{406}}{3} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{406}}{3} \end{cases} \text{ (loại vì } x \geq 0 \text{)}.$$

Vậy hàm số đạt cực trị tại $x_0 = \frac{\sqrt{406} - 1}{3}$.

c) Hàm số đạt cực đại tại $x_0 = \frac{\sqrt{406} - 1}{3} \approx 6,38$.

Giá trị cực đại của hàm số là $y_{\max} = f(x_0) = \frac{135x_0 - x_0^2 - x_0^3}{200} \approx 2,8$.

Độ cao lớn nhất của tàu lượn trong thực tế là $2,8 \cdot 10 = 28 \text{ m}$.

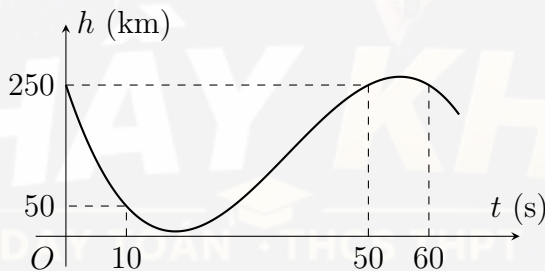
d) Hệ số góc của tiếp tuyến tại $A (x = 0)$ là $k = f'(0) = \frac{135}{200} = 0,675$.

Vì cả hai trục cùng có đơn vị 10 m nên tỷ lệ là $\frac{1}{1}$. Khi đó $\tan \alpha = k = 0,675 \Rightarrow \alpha \approx 34,02^\circ \approx 34^\circ$.

Bài 38. Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng. Trong khoảng 70 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính bởi hàm $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và h tính bằng kilômét.

a) Trong 50 giây đầu tiên thì tại thời điểm $t \approx 18$ giây thì con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng và khoảng cách nhỏ nhất này khoảng 8,08 km.

b) Đồ thị của hàm số $y = h(t)$ với $0 \leq t \leq 70$ như sau:



c) Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $0 \leq t \leq 50$. Vận tốc tức thời của con tàu tại thời điểm $t = 25$ là 5,25 km/s.

d) Tại thời điểm $t = 25$, vận tốc tức thời của con tàu vẫn đang tăng.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng**

Xét hàm số $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$ với $t \in [0; 50]$.

Ta có $h'(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30$; $h'(t) = 0 \Leftrightarrow -0,03t^2 + 2,2t - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 18 \text{ (nhận)} \\ t \approx 55 \text{ (loại)} \end{cases}$

Khi đó $h(0) = 250$; $h(18) \approx 8,08$; $h(50) = 250$.

Do đó, $\min_{[0;50]} h(t) \approx 8,08$ tại $t \approx 18$.

Vậy tại thời điểm $t \approx 18$ giây thì con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt Mặt Trăng là khoảng 8,08 km.

b) Đúng

Xét hàm số $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$ với $t \in [0; 70]$.

Ta có $h'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 18 \\ t \approx 55 \end{cases}$

Dễ dàng vẽ bảng biến thiên, đồ thị có hình dạng như hình vẽ trong đề bài.

c) Sai

Ta có $v(t) = h'(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30$ với $t \in [0; 50]$.

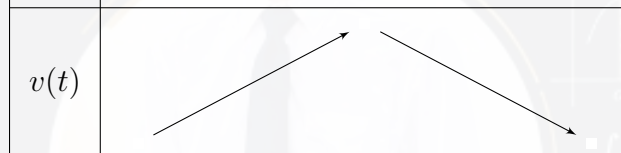
Khi đó $v(25) = -0,03 \cdot 25^2 + 2,2 \cdot 25 - 30 = 6,25$ km/s. (Đề bài ghi 5, 25 là sai).

d) Đúng

Xét hàm vận tốc $v(t) = -0,03t^2 + 2,2t - 30$ với $t \in [0; 50]$.

Ta có $v'(t) = -0,06t + 2,2$; $v'(t) = 0 \Leftrightarrow -0,06t + 2,2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{110}{3} \approx 36,67$.

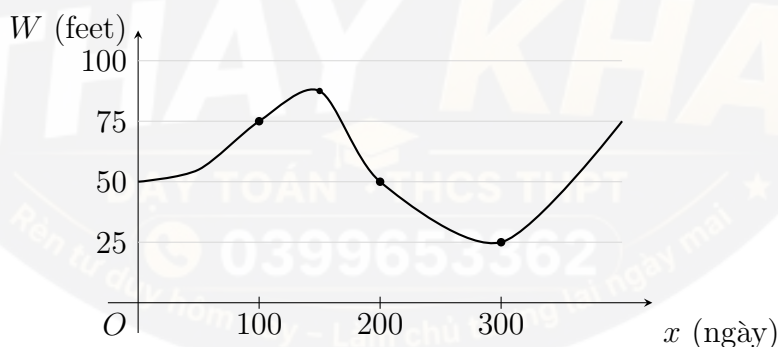
Bảng biến thiên của $v(t)$:

t	0	$\frac{110}{3}$	50
$v'(t)$	+	0	-
$v(t)$			

Hàm số $v(t)$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{110}{3}\right)$.

Vì $25 \in \left(0; \frac{110}{3}\right)$ nên tại thời điểm $t = 25$, vận tốc của con tàu đang tăng.

Bài 39. Biểu đồ mực nước của một hồ chứa trong năm được mô tả bằng một hàm số W tính bằng feet với x là số ngày được tính từ đầu năm (hình vẽ bên). Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:



- Trong khoảng từ ngày thứ 150 đến ngày thứ 300 thì mực nước trong hồ giảm
- Mực nước trong hồ chứa đạt cực đại được vào ngày 100
- Mực nước trong hồ chứa đạt cực tiểu bằng 25 feet
- Mực nước trong hồ giảm đi 50 feet từ ngày thứ 100 đến ngày thứ 300.

Hướng dẫn giải. Dựa vào đồ thị hàm số, ta có các nhận xét sau:

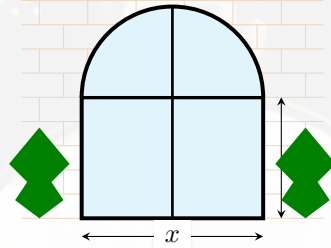
- Đúng:** Quan sát đồ thị, từ khoảng ngày thứ 150 (vị trí đỉnh cao nhất) đến ngày thứ 300 (vị trí thấp nhất), đường biểu diễn đi xuống. Do đó mực nước trong hồ giảm.

Chương 5. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

- b) **Sai:** Tại ngày thứ 100, mực nước là 75 feet. Tuy nhiên, mực nước tiếp tục tăng và đạt đỉnh cao nhất (cực đại) vào khoảng ngày thứ 150 (với giá trị $W > 75$).
- c) **Đúng:** Điểm thấp nhất của đồ thị nằm tại vị trí ngày thứ 300, dóng sang trục W ta thấy giá trị tương ứng là 25 feet.
- d) **Đúng:**

- ◇ Tại ngày thứ 100 ($x = 100$): Mực nước $W(100) = 75$ feet.
- ◇ Tại ngày thứ 300 ($x = 300$): Mực nước $W(300) = 25$ feet.
- ◇ Lượng giảm: $W(100) - W(300) = 75 - 25 = 50$ feet.

Bài 40. Để làm một cửa sổ có dạng một hình bán nguyệt và một hình chữ nhật ghép lại như hình vẽ bên dưới, người ta dùng 8 m dây thép để làm các đường viền. Gọi x, y là độ dài cạnh của khung hình chữ nhật.



- a) Chiều dài dây để uốn ra bán nguyệt là $\frac{\pi x}{2}$.
- b) Giá trị của y tính theo x là $4 - \frac{x(4 + \pi)}{4}$.
- c) Diện tích của cửa sổ là $S = 4x - x^2$.
- d) Khi diện tích của cửa sổ lớn nhất thì $y = \frac{16}{8 + \pi}$.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.** Bán kính của hình bán nguyệt là $R = \frac{x}{2}$, nên nửa chu vi bán nguyệt là $L = \pi R = \frac{\pi x}{2}$.

b) **Đúng.** Tổng độ dài các đường viền bao gồm chu vi hình chữ nhật và nửa chu vi đường tròn:

$$2(x + y) + \frac{\pi x}{2} = 8 \Leftrightarrow 2y = 8 - 2x - \frac{\pi x}{2} \Leftrightarrow y = 4 - x - \frac{\pi x}{4} \Leftrightarrow y = 4 - \frac{x(4 + \pi)}{4}.$$

c) **Sai.** Diện tích của cửa sổ là tổng diện tích hình chữ nhật và nửa diện tích hình tròn:

$$S = xy + \frac{1}{2}\pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x \left(4 - x - \frac{\pi x}{4}\right) + \frac{\pi x^2}{8} = 4x - x^2 - \frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi x^2}{8} = 4x - x^2 - \frac{\pi x^2}{8}.$$

d) **Đúng.** $S = 4x - \left(1 + \frac{\pi}{8}\right)x^2$ là hàm bậc hai, đạt cực đại tại:

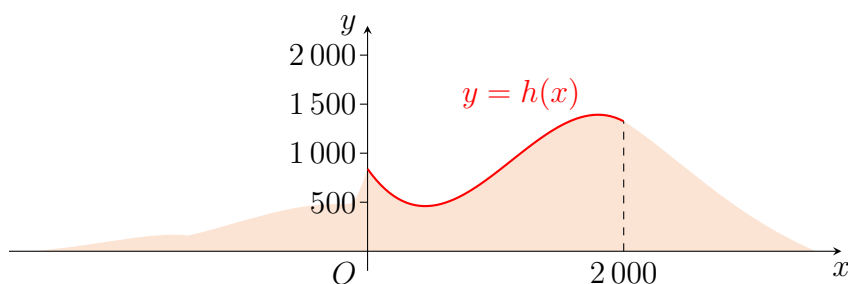
$$x = \frac{-4}{2 \left[-\left(1 + \frac{\pi}{8}\right) \right]} = \frac{2}{1 + \frac{\pi}{8}} = \frac{16}{8 + \pi}.$$

Thay vào công thức tính y :

$$y = 4 - \frac{16}{8 + \pi} - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{16}{8 + \pi} = 4 - \frac{16 + 4\pi}{8 + \pi} = \frac{32 + 4\pi - 16 - 4\pi}{8 + \pi} = \frac{16}{8 + \pi}.$$

Bài 41. Một phần lát cắt của dãy núi có độ cao tính bằng mét được mô tả bởi hàm số

$$y = f(x) = -\frac{1}{1320000}x^3 + \frac{9}{3520}x^2 - \frac{81}{44}x + 840 \text{ với } 0 \leq x \leq 2000.$$



- a) Độ cao thấp nhất của dãy núi là 460 m.
b) Độ cao cao nhất của dãy núi là 1392 m.
c) Trong khoảng $(a; b)$ ($b - a$ lớn nhất) độ cao của dãy núi tăng dần khi đó kết quả $5a - b = 450$.
d) Trong khoảng $(0; c)$, (c lớn nhất) độ cao của dãy núi giảm dần khi đó diện tích toàn phần của khối lập phương cạnh c là $S = 810\,000$.

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $f(x) = -\frac{1}{1320000}x^3 + \frac{9}{3520}x^2 - \frac{81}{44}x + 840$ trên $[0; 2000]$.

Đạo hàm: $f'(x) = -\frac{1}{440000}x^2 + \frac{9}{1760}x - \frac{81}{44}$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{440000}x^2 + \frac{9}{1760}x - \frac{81}{44} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 450 \\ x = 1800 \end{cases}$ (đều thuộc $[0; 2000]$).

- ♦ **a) Đúng.** Giá trị cực tiểu tại $x = 450$ là $f(450) \approx 460,2$ m (độ cao thấp nhất).
♦ **b) Đúng.** Giá trị cực đại tại $x = 1800$ là $f(1800) \approx 1392,3$ m. Kiểm tra biên $f(0) = 840$, $f(2000) \approx 1324,7$, vậy độ cao cao nhất là 1392 m.
♦ **c) Đúng.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(450; 1800)$. Khi đó $a = 450, b = 1800$. Ta có $5a - b = 5(450) - 1800 = 2250 - 1800 = 450$.
♦ **d) Sai.** Hàm số nghịch biến trên $(0; 450)$ nên $c = 450$. Diện tích toàn phần khối lập phương là $S = 6c^2 = 6 \cdot 450^2 = 1\,215\,000 \neq 810\,000$. (Giá trị 810 000 tương ứng với diện tích xung quanh $4c^2$).

Bài 42. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Gọi giá bán mới là x (triệu đồng) với $x \in [27; 31]$.

Xét tính đúng sai của các phát biểu sau.

- a) Với giá bán mới là 30 triệu thì số xe bán ra là 200 chiếc.
b) Lợi nhuận thu được được biểu thị qua hàm số $f(x) = -200 \left(x - \frac{61}{2}\right)^2 + 2450$.
c) Với giá bán mới là 30 triệu thì lợi nhuận thu được là 24000 (triệu đồng).
d) Giá bán mới là 30,5 triệu đồng thì lợi nhuận thu được là lớn nhất.

Hướng dẫn giải. Gọi $Q(x)$ là số lượng xe bán ra trong một năm ứng với giá bán mới x (triệu đồng).

- ♦ Mức giảm giá bán so với giá cũ là: $31 - x$ (triệu đồng).

Chương 5. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

- ◇ Số lượng xe tăng thêm tương ứng là: $200(31 - x)$ (chiếc).
- ◇ Tổng số lượng xe bán ra là: $Q(x) = 600 + 200(31 - x) = 6800 - 200x$ (chiếc).
- ◇ Lợi nhuận thu được trên mỗi chiếc xe là: $x - 27$ (triệu đồng).
- ◇ Hàm lợi nhuận tổng cộng trong một năm là:

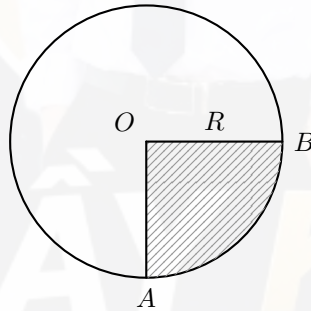
$$f(x) = (x - 27) \cdot Q(x) = (x - 27)(6800 - 200x) = -200x^2 + 12200x - 183600.$$

Biến đổi về dạng bình phương thiếu:

$$f(x) = -200(x^2 - 61x + 918) = -200 \left[\left(x - \frac{61}{2} \right)^2 - \frac{3721}{4} + 918 \right] = -200 \left(x - \frac{61}{2} \right)^2 + 2450.$$

- ◇ a) **Sai.** Với $x = 30$, số xe bán ra là $Q(30) = 6800 - 200(30) = 800$ chiếc.
- ◇ b) **Đúng.** Theo công thức $f(x)$ đã thiết lập ở trên.
- ◇ c) **Sai.** Với $x = 30$, lợi nhuận là $f(30) = -200(30 - 30,5)^2 + 2450 = 2400$ triệu đồng (đề bài ghi 24000 là sai một chữ số 0).
- ◇ d) **Đúng.** Vì hàm số $f(x)$ là một parabol có bề lõm hướng xuống, đỉnh của parabol có hoành độ $x = \frac{61}{2} = 30,5$. Giá trị này thuộc khoảng $[27; 31]$, nên lợi nhuận lớn nhất đạt được khi giá bán là 30,5 triệu đồng.

Bài 43. An có một tấm bìa hình tròn như hình vẽ có bán kính $R = 12$ cm, An muốn tạo một cái phễu hình nón từ tấm bìa đó. Khi đó An phải cắt bỏ hình quạt tròn AOB rồi dán OA, OB lại với nhau. Gọi x rad là góc ở tâm của hình quạt tròn AOB và r là bán kính đường tròn đáy của hình nón, với $r > 0$.



- a) Diện tích xung quanh của hình phễu là $S_{xq} = 12\pi r$.
- b) Diện tích hình quạt sau khi cắt bỏ hình quạt AOB là $S = 144x\pi$.
- c) $V = \frac{1}{3}\pi\sqrt{r^4 \cdot R^2 - r^6}$ là thể tích của phễu.
- d) Khi $x = 1,15$ rad thì thể tích phễu lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải. Tấm bìa hình tròn có bán kính $R = 12$. Khi tạo thành phễu hình nón, độ dài đường sinh của hình nón chính bằng bán kính tấm bìa: $l = R = 12$.

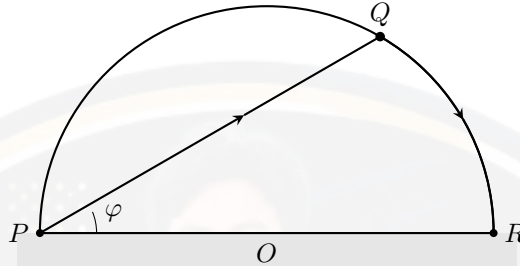
- a) **Đúng.** Diện tích xung quanh của hình nón được tính theo công thức: $S_{xq} = \pi rl = \pi \cdot r \cdot 12 = 12\pi r$.
- b) **Sai.** Diện tích tấm bìa ban đầu là $S_0 = \pi R^2 = 144\pi$. Hình quạt bị cắt bỏ có diện tích là $S_{\text{cắt}} = \frac{1}{2}R^2x = 72x$. Vậy diện tích phần còn lại là $S = 144\pi - 72x$.
- c) **Đúng.** Chiều cao của hình nón là $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - r^2}$.
Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{1}{3}\pi \sqrt{r^4(R^2 - r^2)} = \frac{1}{3}\pi \sqrt{r^4 R^2 - r^6}$.
- d) **Đúng.** Để thể tích V lớn nhất thì hàm số $f(r) = R^2 r^4 - r^6$ phải đạt giá trị lớn nhất trên $(0; R)$.
Ta có $f'(r) = 4R^2 r^3 - 6r^5$. Cho $f'(r) = 0 \Leftrightarrow r^2 = \frac{2}{3}R^2 \Leftrightarrow r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Chu vi đáy hình nón bằng độ dài cung tròn còn lại của tấm bìa:

$$2\pi r = R(2\pi - x) \Rightarrow 2\pi \left(R\sqrt{\frac{2}{3}} \right) = R(2\pi - x) \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} = 2\pi - x.$$

$$\text{Suy ra } x = 2\pi \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \approx 1,1528 \approx 1,15 \text{ rad.}$$

Bài 44. Cho một bờ hồ hình bán nguyệt có bán kính bằng 2 km, đường kính PR như hình vẽ sau.



Từ điểm P anh Tài chèo một chiếc thuyền với vận tốc 3 km/h đến điểm Q trên bờ hồ, rồi chạy bộ dọc theo thành hồ đến vị trí R với vận tốc 6 km/h. Đặt $\widehat{QPR} = \varphi$ (rad), khi đó

- Thời gian anh Tài chèo từ P đến Q là $\frac{4 \cos \varphi}{3}$ (giờ).
- Tổng thời gian anh Tài di chuyển từ P đến R là $t = \frac{4 \cos \varphi}{3} + \frac{2\varphi}{3}$ với $\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \right)$.
- Khi $0 < \varphi < \frac{\pi}{6}$ thì thời gian di chuyển của anh Tài tăng.
- Thời gian chậm nhất mà anh Tài di chuyển từ P đến R là 2 (giờ).

Hướng dẫn giải. Tam giác PQR có PR là đường kính nên $\widehat{PQR} = 90^\circ$. Bán kính $R = 2 \Rightarrow PR = 4$.

♦ **a) Đúng.** Trong tam giác vuông PQR , ta có $PQ = PR \cdot \cos \varphi = 4 \cos \varphi$.

$$\text{Thời gian chèo thuyền từ } P \text{ đến } Q \text{ là } t_1 = \frac{PQ}{v_{\text{chèo}}} = \frac{4 \cos \varphi}{3} \text{ (giờ).}$$

♦ **b) Đúng.** Góc ở tâm ứng với cung QR là $\alpha = \widehat{QOR} = 2\widehat{QPR} = 2\varphi$.

$$\text{Độ dài cung } QR = \text{Bán kính} \cdot \alpha = 2 \cdot 2\varphi = 4\varphi.$$

$$\text{Thời gian chạy bộ từ } Q \text{ đến } R \text{ là } t_2 = \frac{QR}{v_{\text{chạy}}} = \frac{4\varphi}{6} = \frac{2\varphi}{3} \text{ (giờ).}$$

$$\text{Tổng thời gian là } t(\varphi) = \frac{4 \cos \varphi}{3} + \frac{2\varphi}{3} \text{ (giờ).}$$

♦ **c) Đúng.** Xét hàm số $t(\varphi) = \frac{4}{3} \cos \varphi + \frac{2}{3} \varphi$ trên $\left(0; \frac{\pi}{2} \right)$.

$$\text{Đạo hàm } t'(\varphi) = -\frac{4}{3} \sin \varphi + \frac{2}{3}.$$

$$t'(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \sin \varphi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Với $0 < \varphi < \frac{\pi}{6}$ thì $\sin \varphi < \frac{1}{2} \Rightarrow t'(\varphi) > 0$. Hàm số đồng biến, do đó thời gian tăng.

♦ **d) Sai.** Thời gian chậm nhất (lớn nhất) đạt được khi $\varphi = \frac{\pi}{6}$:

$$t_{\max} = t\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4 \cdot \cos(\pi/6)}{3} + \frac{2 \cdot (\pi/6)}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{9} \approx 1,5 \text{ giờ} \neq 2 \text{ giờ.}$$

Bài 45. Một nhà máy sản xuất thuốc nhuộm hoạt động tại khu vực gần một dòng sông lớn.

Chương 5. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Trong quá trình sản xuất, nhà máy này thải ra một lượng chất ô nhiễm đáng kể vào môi trường, gây ảnh hưởng nghiêm trọng đến chất lượng nước và sức khỏe cộng đồng. Để cải thiện tình hình và tuân thủ các quy định về bảo vệ môi trường, nhà máy đã quyết định đầu tư vào một hệ thống xử lý nước thải hiện đại. Chi phí để loại bỏ $x\%$ chất ô nhiễm từ nguồn nước thải được mô hình hóa bởi hàm số phân thức sau: $C(x) = \frac{2x+1}{1-0,01x}$ triệu đồng, $0 \leq x < 100$. Mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Nếu nhà máy giảm từ 20% chất ô nhiễm trở lên thì doanh thu sẽ tăng lên nhờ vào việc nâng cao uy tín và hình ảnh thương hiệu, được biểu diễn bởi hàm $R(x) = 12x - 240$ triệu đồng. Khi đó lợi nhuận cho việc loại bỏ chất ô nhiễm có thể đạt hơn 177 triệu đồng.
- b) Không thể loại bỏ 100% chất ô nhiễm.
- c) Chi phí để loại bỏ 20% chất ô nhiễm là 51,52 triệu đồng.
- d) Để chi phí không quá 200 triệu đồng thì nhà máy chỉ có thể xử lý tối đa 49,75% chất ô nhiễm.

 **Hướng dẫn giải.** a) **Đúng.** Xét hàm lợi nhuận $P(x) = R(x) - C(x) = (12x - 240) - \frac{2x+1}{1-0,01x}$ với $20 \leq x < 100$.

Bằng cách khảo sát hàm số, ta thấy $P(x)$ đạt giá trị lớn nhất xấp xỉ 177,8 triệu đồng tại $x \approx 59,1$. Do đó, lợi nhuận có thể đạt hơn 177 triệu đồng.

b) **Đúng.** Khi $x \rightarrow 100$, mẫu số $1 - 0,01x \rightarrow 0$, do đó $\lim_{x \rightarrow 100^-} C(x) = +\infty$. Nghĩa là chi phí để loại bỏ 100% chất ô nhiễm là vô cùng lớn, không thể thực hiện được.

c) **Sai.** Với $x = 20$, ta có chi phí là:

$$C(20) = \frac{2(20) + 1}{1 - 0,01(20)} = \frac{41}{0,8} = 51,25 \text{ triệu đồng.}$$

Giá trị 51,52 trong đề bài là không chính xác.

d) **Đúng.** Ta giải bất phương trình $C(x) \leq 200$:

$$\frac{2x+1}{1-0,01x} \leq 200 \Leftrightarrow 2x+1 \leq 200(1-0,01x) \Leftrightarrow 2x+1 \leq 200-2x \Leftrightarrow 4x \leq 199 \Leftrightarrow x \leq 49,75.$$

Vậy nhà máy chỉ có thể xử lý tối đa 49,75% chất ô nhiễm để chi phí không quá 200 triệu đồng.

 **Bài 46.** Một cửa hàng bán đồ thủ công với giá bán một sản phẩm là 40 000 đồng/sản phẩm. Giá nhập vào của sản phẩm đó là 15 000 đồng/sản phẩm. Với giá này cửa hàng ước chừng bán được 120 sản phẩm/ngày. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính cứ giảm 1 000 đồng/sản phẩm thì số sản phẩm bán được sẽ tăng thêm là 15 sản phẩm.

- a) Nếu giá bán là 25 000 đồng/sản phẩm, khi đó cửa hàng bán được 345 sản phẩm/ngày.
- b) Lợi nhuận tối đa theo ngày mà cửa hàng thu được là 4000 (nghìn đồng).
- c) Lợi nhuận theo ngày của cửa hàng khi chưa giảm giá sản phẩm là 2 880 000 đồng.
- d) Gọi x (nghìn đồng) là giá tiền mà cửa hàng dự định bán sản phẩm đó ($15 \leq x \leq 39$), khi đó lợi nhuận theo ngày của cửa hàng được xác định bởi hàm số $f(x) = -15x^2 + 945x - 10800$.

 **Hướng dẫn giải.** Đơn vị tính: nghìn đồng.

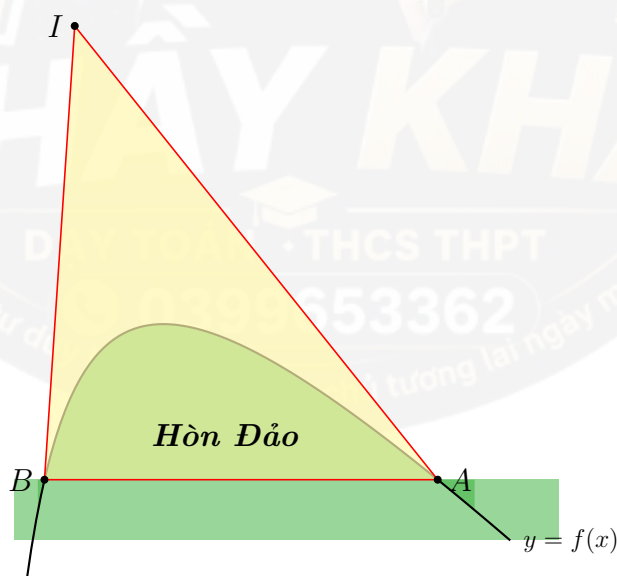
- ◇ Giá nhập vào: 15 (nghìn đồng/sản phẩm).
- ◇ Giá bán ban đầu: 40 (nghìn đồng/sản phẩm).
- ◇ Số lượng bán ban đầu: 120 (sản phẩm/ngày).
- ◇ Gọi x là giá bán mới của sản phẩm ($15 \leq x \leq 40$).

- ◇ Số tiền giảm giá là: $40 - x$ (nghìn đồng).
- ◇ Số sản phẩm bán được tăng thêm là: $15(40 - x)$ (sản phẩm).
- ◇ Tổng số sản phẩm bán được trong một ngày là: $Q(x) = 120 + 15(40 - x) = 120 + 600 - 15x = 720 - 15x$ (sản phẩm).
- ◇ Lợi nhuận trên một sản phẩm là: $x - 15$ (nghìn đồng).
- ◇ Hàm lợi nhuận theo ngày là: $f(x) = (720 - 15x)(x - 15) = -15x^2 + 225x + 720x - 10800 = -15x^2 + 945x - 10800$.

Xét các phát biểu:

- ◇ **a) Đúng:** Nếu giá bán là 25 000 đồng thì $x = 25$.
Số sản phẩm bán được là $Q(25) = 720 - 15 \cdot 25 = 345$.
- ◇ **b) Sai:** Hàm số $f(x) = -15x^2 + 945x - 10800$ đạt cực đại tại $x = \frac{-945}{2 \cdot (-15)} = 31,5$.
Lợi nhuận tối đa là $f(31,5) = -15(31,5)^2 + 945(31,5) - 10800 = 4083,75$ (nghìn đồng).
- ◇ **c) Sai:** Khi chưa giảm giá ($x = 40$), lợi nhuận là $f(40) = (720 - 15 \cdot 40)(40 - 15) = 120 \cdot 25 = 3000$ (nghìn đồng) = 3 000 000 đồng.
- ◇ **d) Đúng:** Theo tính toán ở trên, hàm lợi nhuận là $f(x) = -15x^2 + 945x - 10800$.
Khoảng $15 \leq x \leq 39$ ứng với việc cửa hàng thực hiện giảm giá ít nhất 1 000 đồng.

Bài 47. Trong hệ trục Oxy đường biên của một hòn đảo được mô hình hóa bởi hàm số $f(x) = \frac{-x^2 + 10x - 12}{x}$ ($x > 0$) (đơn vị mỗi trục là 100 m). Ban quản lí hòn đảo muốn quây một vùng tam giác an toàn để người dân có thể vui chơi và tắm biển ở khu vực đó. Đặt cố định một điểm ngoài biển tọa độ $I(2; 8)$ sau đó căng hai tấm lưới bảo vệ IA, IB với hai điểm A, B ($x_A > x_B > 0$) nằm trên đường biên và luôn thỏa mãn $AB \parallel Ox$.



- a) Đỉnh cao nhất của hòn đảo (điểm cực đại của đồ thị hàm số) cách I một khoảng 514 m (làm tròn đến hàng đơn vị).
- b) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{-x^2 + 10x - 12}{x}$ là điểm $M(0; 10)$.
- c) Quãng đường ngắn nhất từ hòn đảo đến điểm I là 510 m (làm tròn đến hàng đơn vị).

Chương 5. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

- d) Nếu điều chỉnh dây phao sao cho khoảng cách từ trạm I đến dây phao AB bằng đúng chiều dài dây phao AB thì diện tích vùng an toàn ΔIAB là $605\,000\text{ m}^2$.

 **Hướng dẫn giải.** Ta có $f(x) = -x + 10 - \frac{12}{x}$ với $x > 0$. Đạo hàm $f'(x) = -1 + \frac{12}{x^2} = \frac{12 - x^2}{x^2}$.
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3}$ (do $x > 0$).

◇ a) **ĐÚNG:** Điểm cực đại (đỉnh cao nhất) của đảo là $D(2\sqrt{3}; 10 - 4\sqrt{3})$.

Khoảng cách $ID = \sqrt{(2 - 2\sqrt{3})^2 + (8 - (10 - 4\sqrt{3}))^2} = \sqrt{(2 - 2\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{3} - 2)^2} \approx 5,14$ (đơn vị trục).

Khoảng cách thực tế là $5,14 \times 100 \approx 514\text{ m}$.

◇ b) **ĐÚNG:** Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 0$ và tiệm cận xiên là $y = -x + 10$.

Giao điểm của hai đường tiệm cận là $M(0; 10)$, đây chính là tâm đối xứng của đồ thị.

◇ c) **SAI:** Gọi $N(x; f(x))$ là một điểm bất kỳ trên đường biên. Khoảng cách IN ngắn nhất tương đương với IN^2 nhỏ nhất.

$$IN^2 = g(x) = (x - 2)^2 + \left(-x + 10 - \frac{12}{x} - 8\right)^2 = (x - 2)^2 + \left(2 - x - \frac{12}{x}\right)^2.$$

$$\text{Xét } g'(x) = 2(x - 2) + 2\left(2 - x - \frac{12}{x}\right)\left(-1 + \frac{12}{x^2}\right) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^3 + 12x - 72 = 0.$$

Giải phương trình ta được $x \approx 3,13 \Rightarrow IN \approx 5,09$ (đơn vị trục).

Khoảng cách thực tế xấp xỉ 509 m . Vậy phát biểu nói 510 m là sai.

◇ d) **ĐÚNG:** Vì $AB \parallel Ox$ nên A, B có cùng tung độ y_0 . Khi đó x_A, x_B là nghiệm của phương trình:

$$y_0 = \frac{-x^2 + 10x - 12}{x} \Leftrightarrow x^2 + (y_0 - 10)x + 12 = 0.$$

Theo định lý Vi-et: $x_A + x_B = 10 - y_0$ và $x_A \cdot x_B = 12$.

$$\text{Độ dài } AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2} = \sqrt{(x_A + x_B)^2 - 4x_A x_B} = \sqrt{(10 - y_0)^2 - 48}.$$

Khoảng cách từ $I(2; 8)$ đến AB là $h = |8 - y_0|$. Vì trạm I nằm cao hơn đảo nên $h = 8 - y_0$ ($y_0 < 8$).

$$\text{Theo giả thiết } h = AB \Rightarrow (8 - y_0)^2 = (10 - y_0)^2 - 48 \Leftrightarrow 64 - 16y_0 + y_0^2 = 100 - 20y_0 + y_0^2 - 48.$$

Giải ra $y_0 = -3 \Rightarrow h = 11$ và $AB = 11$.

Diện tích ΔIAB là $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 11 = 60,5$ (đơn vị diện tích).

Diện tích thực tế: $60,5 \times 100^2 = 605\,000\text{ m}^2$.

 **Bài 48.** Khối lượng q (kg) của một mặt hàng mà cửa tiệm bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán p (nghìn đồng/kg) theo công thức $p = 15 - \frac{1}{2}q$.

a) Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của cửa tiệm được tính theo công thức $R = pq$.

b) Hàm doanh thu theo biến p là $R(p) = 30 - 2p$.

c) Nếu cửa hàng bán giá mỗi kilogam sản phẩm là $7,5$ nghìn thì lợi nhuận của hàng cao nhất.

d) Lợi nhuận cao nhất của cửa hàng là $112,5$ nghìn đồng.

 **Hướng dẫn giải.** a) Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của cửa tiệm được tính theo công thức $R = pq$.

Đây là công thức định nghĩa doanh thu cơ bản. Vậy phát biểu này **Đúng**.

$$\text{b) Ta có } p = 15 - \frac{1}{2}q \Rightarrow q = 2(15 - p) = 30 - 2p.$$

Khi đó $R = pq = p(30 - 2p) = 30p - 2p^2$ với $p > 0$.

Phát biểu b) ghi $R(p) = 30 - 2p$ là sai. Vậy phát biểu này **Sai**.

c) Ta có $R'(p) = 30 - 4p$; $R'(p) = 0 \Leftrightarrow p = 7,5$.

Bảng biến thiên:

x	0	7,5	$+\infty$	
y'		+	0	-
y	0	112,5	$-\infty$	

Dựa vào BBT, ta có $\max_{(0;+\infty)} R = R(7,5) = 112,5$.

Vậy nếu giá bán mỗi kilôgam sản phẩm là 7,5 nghìn đồng/kg thì sẽ đạt được doanh thu cao nhất là 112,5 nghìn đồng. (Trong đề bài dùng từ "lợi nhuận" thay cho "doanh thu"). Phát biểu này **Đúng**.

d) Lợi nhuận cao nhất của cửa hàng là 112,5 nghìn đồng.

Theo kết quả tính toán ở câu c, giá trị lớn nhất là 112,5. Vậy phát biểu này **Đúng**.

Bài 49. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 9t^2 + 21t + 9$ với t tính bằng giây (s) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S tính bằng mét (m) là quãng đường vật đi trong thời gian đó.

- Vận tốc của chất điểm chuyển động tại thời điểm t (giây) là $v(t) = -3t^2 + 18t + 21$.
- Vận tốc của chất điểm tại giây thứ 2 là 45 m/s.
- Quãng đường chất điểm đi được từ lúc bắt đầu đến lúc dừng hẳn là 255 (m).
- Vận tốc chuyển động của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm $t = 3$ (s).

Hướng dẫn giải. a) Ta có $v(t) = s'(t) = (-t^3 + 9t^2 + 21t + 9)' = -3t^2 + 18t + 21$. Phát biểu này **Đúng**.

b) Tại $t = 2$, $v(2) = -3(2)^2 + 18(2) + 21 = -12 + 36 + 21 = 45$ m/s. Phát biểu này **Đúng**.

c) Chất điểm dừng hẳn khi $v(t) = 0 \Leftrightarrow -3t^2 + 18t + 21 = 0 \Leftrightarrow t = 7$ (s) hoặc $t = -1$ (loại).

Quãng đường đi được từ $t = 0$ đến $t = 7$ là: $s(7) - s(0) = (-7^3 + 9 \cdot 7^2 + 21 \cdot 7 + 9) - 9 = 245$ (m). Phát biểu này **Sai**.

d) Xét $v(t) = -3t^2 + 18t + 21$ trên $[0; 7]$. Đồ thị là parabol có đỉnh tại $t = \frac{-18}{2(-3)} = 3$ (s).

Giá trị vận tốc lớn nhất tại $t = 3$. Phát biểu này **Đúng**.

Bài 50. Một cửa hàng bán cam canh Cao Phong với giá là 40000 đồng/ 1 kg. Giá nhập vào là 24000 đồng/ 1 kg. Với giá bán này cửa hàng bán được 100 kg / ngày. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính cứ giảm 1000 đồng/ 1 kg thì số cam canh Cao Phong bán được sẽ tăng thêm là 10 kg.

- Nếu giữ nguyên giá bán đầu, lợi nhuận theo ngày của cửa hàng là 1500000 đồng.
- Nếu giá bán là 35000 đồng/ 1 kg, khi đó cửa hàng bán được 150 kg/ 1 ngày.
- Nếu giá bán là 30000 đồng/ 1 kg, khi đó lợi nhuận theo ngày của cửa hàng là 1300000 đồng.

Chương 5. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

d) Lợi nhuận tối đa theo ngày của cửa hàng là 16900000 đồng.

 **Hướng dẫn giải.** a) Sai

Nếu giữ nguyên giá bán 40000 đồng/ 1 kg thì doanh thu theo ngày của cửa hàng là: $40000 \cdot 100 = 4000000$ đồng.

Chi phí nhập 100 kg/ 1 ngày là: $24000 \cdot 100 = 2400000$ (đồng).

Lợi nhuận theo ngày của cửa hàng là: $4000000 - 2400000 = 1600000$ (đồng).

b) Đúng

Gọi x (nghìn đồng) là giá mà cửa hàng định bán ($24 \leq x \leq 40$).

Số giá đã giảm là: $40 - x$ (nghìn đồng).

Theo bài ra, ta có số cam bán được theo ngày là $100 + (40 - x) \cdot 10$ (kg).

Khi $x = 35$, số cam bán được theo ngày là: $100 + 5 \cdot 10 = 150$ kg.

c) Sai

Doanh thu của cửa hàng khi bán được $100 + (40 - x) \cdot 10$ kg là:

$T(x) = [100 + (40 - x) \cdot 10] \cdot x = (500 - 10x)x$ (nghìn đồng).

Chi phí để nhập số cam đó là: $C(x) = [100 + (40 - x) \cdot 10] \cdot 24 = (500 - 10x) \cdot 24$ (nghìn đồng).

Lợi nhuận theo ngày của cửa hàng là:

$L(x) = T(x) - C(x) = (500 - 10x)x - (500 - 10x)24 = -10x^2 + 740x - 12000$.

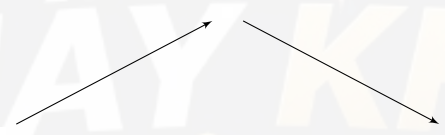
Nếu giá bán là 30000 đồng/ 1 kg thì lợi nhuận theo ngày của cửa hàng là:

$L(30) = -10 \cdot 30^2 + 740 \cdot 30 - 12000 = 1200$ (nghìn đồng) = 1200000 đồng.

d) Đúng

Ta có: $L'(x) = -20x + 740$; $L'(x) = 0 \Rightarrow x = 37$.

Bảng biến thiên:

x	24	37	40
$L'(x)$	+	0	-
$L(x)$			

Dựa vào BBT ta thấy tại $x = 37$, thì lợi nhuận của cửa hàng đạt tối đa. Lợi nhuận tối đa là:

$L(37) = 1690$ (nghìn đồng) = 1690000 đồng.

 **Bài 51.** Một cơ sở sản xuất có thể cung cấp 1000 sản phẩm A trong 1 tháng. Qua khảo sát thì thấy rằng nếu sản phẩm A bán với giá 100 nghìn đồng thì có 290 người mua, nếu cứ giảm 10 nghìn đồng thì lại có thêm 50 người mua. Gọi p là giá bán sản phẩm A (nghìn đồng) và $R(p)$ là hàm doanh thu trong 1 tháng (nghìn đồng).

a) Số sản phẩm bán ra là $790 - 5p$.

b) Hàm doanh thu $R(p) = 1000 - 790p + 5p^2$.

c) Phương trình $R'(p) = 0$ có nghiệm là $p = 79$.

d) Doanh thu lớn nhất trong 1 tháng là 31.205.000 đồng.

 **Hướng dẫn giải.** a) Gọi $p = ax + b$ (*), x là số sản phẩm bán ra.

Vì sản phẩm A bán với giá 100 nghìn đồng thì có 290 người mua nên ta có $p = 100$ và $x = 290$ thay vào phương trình (*) ta có $290a + b = 100$ (1)

Vì cứ giảm 10 nghìn đồng thì lại có thêm 50 người mua nên ta có $p = 90, x = 340$ thay vào phương trình (*) ta có $340a + b = 90$ (2)

Từ (1), (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 290a + b = 100 \\ 340a + b = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = 158 \end{cases}$$

Ta có $p = -\frac{1}{5}x + 158 \Leftrightarrow x = 790 - 5p$.

Vậy số sản phẩm bán ra là $790 - 5p$. Nên suy ra mệnh đề **đúng**.

b) Ta có doanh thu của cơ sở sản xuất là $R(p) = (790 - 5p) \cdot p = -5p^2 + 790p$.

Nên suy ra mệnh đề **sai**.

c) Ta có $R(p) = -5p^2 + 790p$ nên $R'(p) = -10p + 790$.

$R'(p) = 0 \Leftrightarrow -10p + 790 = 0 \Leftrightarrow p = 79$.

Nên suy ra mệnh đề **đúng**.

d) Ta có bảng biến thiên:

p	0	79	$+\infty$
$R'(p)$	+	0	-
$R(p)$		31205	

Doanh thu lớn nhất trong tháng là $R(79) = 31205$ nghìn đồng = 31.205.000 đồng.

Nên suy ra mệnh đề **đúng**.

Bài 52. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 8t + 1$, trong đó t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét.

a) Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3$ (s) bằng 8 m/s.

b) Tại thời điểm mà chất điểm di chuyển được 13 m, vận tốc khi đó bằng 8 m/s.

c) Vận tốc nhỏ nhất của chất điểm là 5 m/s.

d) Gia tốc tại thời điểm đạt vận tốc nhỏ nhất bằng 2 m/s².

Hướng dẫn giải. Phương trình vận tốc của chất điểm tại thời điểm t là: $v(t) = [s(t)]' = 3t^2 - 6t + 8$ (m/s).

Phương trình gia tốc của chất điểm tại thời điểm t là: $a(t) = [v(t)]' = 6t - 6$ (m/s²).

a) **Sai:** Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3$ (s) bằng:

$$v(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = 17 \text{ (m/s)}.$$

b) **Đúng:** Tại thời điểm mà chất điểm di chuyển được 13 m, vận tốc khi đó bằng 8 m/s.

Chất điểm di chuyển được 13 m có phương trình là: $13 = t^3 - 3t^2 + 8t + 1 \Leftrightarrow t = 2$.

Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 2$ (s) bằng $v(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 8 = 8$ (m/s).

c) **Đúng:** Vận tốc nhỏ nhất của chất điểm là 5 m/s.

Ta có: $v(t) = [s(t)]' = 3t^2 - 6t + 8 = 3(t - 1)^2 + 5 \geq 5 \forall t$.

Do đó vận tốc nhỏ nhất của chất điểm là 5 m/s tại $t = 1$ (s).

d) **Sai:** Gia tốc tại thời điểm đạt vận tốc nhỏ nhất bằng 2 m/s².

Vận tốc nhỏ nhất của chất điểm là 5 m/s tại $t = 1$ (s). Khi đó, gia tốc tại thời điểm $t = 1$ (s) bằng: $a(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$ (m/s²).

Chương 5. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Vận gia tốc tại thời điểm đạt vận tốc nhỏ nhất bằng 0 m/s^2 .

Bài 53. Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery.

Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0(s)$ cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t = 126(s)$, cho bởi hàm số sau: $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083$ (v được tính bằng feet/s, $1 \text{ foot} = 0,3048 \text{ m}$).

a) Vận tốc của tàu con thoi luôn tăng trong khoảng thời gian từ lúc cất cánh đến khi tên lửa đẩy được phóng đi.

b) Gia tốc lớn nhất mà tàu con thoi có thể đạt được trong lúc thực hiện sứ mệnh trên (làm tròn đến hàng phần trăm) là $62,87 \text{ feet/s}^2$.

c) Gia tốc của tàu con thoi tăng trong khoảng thời gian từ lúc cất cánh đến thời điểm $t = 23(s)$.

d) Gia tốc của tàu con thoi tăng trong khoảng thời gian từ $t = 21,5(s)$ đến $t = 126(s)$.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.** Ta có: $v'(t) = 3,906 \cdot 10^{-3}t^2 - 0,18058t + 23,61 > 0, \forall t \in (0; 126)$.

Suy ra vận tốc của tàu con thoi luôn tăng trong khoảng thời gian từ lúc cất cánh đến khi tên lửa đẩy được phóng đi.

b) **Đúng.** Gia tốc $a(t) = v'(t) = 3,906 \cdot 10^{-3}t^2 - 0,18058t + 23,61$. Ta có: $a'(t) = 7,812 \cdot 10^{-3}t - 0,18058 = 0 \Rightarrow t \approx 23,11$. Bảng biến thiên của $a(t)$:

t	0	23.11	126
$a'(t)$		—	+
$a(t)$	23.6	21.52	62.87

Dựa vào BBT thì gia tốc lớn nhất mà tàu con thoi có thể đạt được trong lúc thực hiện sứ mệnh trên (làm tròn đến hàng phần trăm) là $62,87 \text{ feet/s}^2$.

c) **Sai.** Dựa vào BBT ta thấy gia tốc giảm trong khoảng thời gian từ lúc cất cánh đến thời điểm $t = 23(s)$ (vì hàm nghịch biến trên $(0; 23,11)$).

d) **Sai.** Dựa vào BBT ta thấy gia tốc vừa giảm vừa tăng trong khoảng thời gian từ $t = 21,5(s)$ đến $t = 126(s)$.

Bài 54. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố ven biển A trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{180}(t - 70) \right] + 10$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Cánh đồng muối B (thuộc địa phận của thành phố A) có thể hoạt động nếu trong ngày nắng nhiều hơn 10 giờ.

a) Ngày có nhiều giờ ánh sáng nhất là 13 giờ.

b) Số giờ có ánh sáng giảm liên tục trong tháng 7.

c) Cánh đồng muối B có thể hoạt động 213 ngày mỗi năm.

d) Ngày thứ 70 trong năm, thành phố có 10 giờ có ánh sáng.

Hướng dẫn giải. a) Ta có: $-1 \leq \sin \left[\frac{\pi}{180}(t - 70) \right] \leq 1 \Leftrightarrow 7 \leq 3 \sin \left[\frac{\pi}{180}(t - 70) \right] + 10 \leq 13$.

$$d(t) = 13 \text{ khi } \sin \left[\frac{\pi}{180}(t - 70) \right] = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{180}(t - 70) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = 160 + 360k.$$

Mà $0 < t \leq 365$ nên $t = 160$ ($k = 0$).

Vậy ngày thứ 160 trong năm có nhiều giờ ánh sáng nhất là 13 giờ. Kết luận a) **đúng**.

$$\text{b) Hàm } d(t) \text{ nghịch biến khi } \frac{\pi}{2} + k2\pi < \frac{\pi}{180}(t - 70) < \frac{3\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow 160 < t < 340.$$

Tháng 7 năm không nhuận bắt đầu từ ngày thứ 182 đến 212. Khoảng này nằm trong khoảng nghịch biến (160; 340). Vậy kết luận b) **đúng**.

$$\text{c) Theo đề bài ta có: } d(t) > 10 \Leftrightarrow 3 \sin \left[\frac{\pi}{180}(t - 70) \right] + 10 > 10 \Leftrightarrow \sin \left[\frac{\pi}{180}(t - 70) \right] > 0. \\ \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{180}(t - 70) < \pi \Leftrightarrow 70 < t < 250.$$

Số ngày là $250 - 70 - 1 = 179$ ngày. Kết luận c) **sai**.

d) Khi $t = 70$ thì $d(70) = 3 \sin(0) + 10 = 10$. Kết luận d) **đúng**.

Bài 55. Theo báo cáo của một cơ sở sản xuất nước tinh khiết, nếu mỗi ngày cơ sở này sản xuất $x(m^3)$ nước tinh khiết thì phải chi phí các khoản sau: 3 triệu đồng chi phí cố định; 0,15 triệu đồng cho mỗi mét khối sản phẩm; 0,0003 x^2 chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết công suất tối đa mỗi ngày của cơ sở này là 200 m^3 . Gọi $C(x)$ là chi phí sản xuất $x(m^3)$ sản phẩm mỗi ngày và $\bar{c}(x)$ là chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm. Khi đó, mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Chi phí sản xuất 100 m^3 nước tinh khiết là 20 triệu đồng.

$$\text{b) } \bar{c}(x) = 0,0003x + 0,15 + \frac{3}{x}.$$

c) Chi phí trung bình mỗi mét khối sản phẩm thấp nhất khi sản lượng nước tinh khiết trong ngày là 100 m^3 .

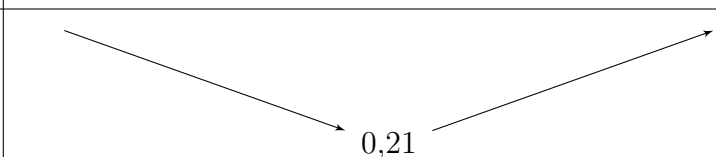
$$\text{d) } C(x) = 0,0003x^2 + 0,15x + 3.$$

Hướng dẫn giải. Từ dữ kiện bài toán, ta có hàm tổng chi phí: $C(x) = 0,0003x^2 + 0,15x + 3$ (triệu đồng). Chi phí trung bình: $\bar{c}(x) = \frac{C(x)}{x} = 0,0003x + 0,15 + \frac{3}{x}$ ($0 < x \leq 200$).

a) **Sai**. Chi phí sản xuất 100 m^3 là: $C(100) = 0,0003 \cdot 100^2 + 0,15 \cdot 100 + 3 = 3 + 15 + 3 = 21$ (triệu đồng).

$$\text{b) Đúng. Ta tìm được } \bar{c}(x) = \frac{3}{x} + 0,15 + 0,0003x.$$

c) **Đúng**. Đặt $f(x) = \bar{c}(x) = \frac{3}{x} + 0,15 + 0,0003x$. $f'(x) = -\frac{3}{x^2} + 0,0003$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{0,0003} = 10000 \Rightarrow x = 100 \in (0; 200]$. Bảng biến thiên:

x	0	100	200
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$			

Chương 5. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Dựa vào BBT chi phí trung bình thấp nhất khi sản lượng là 100 m^3 .

d) **Sai**. Hàm chi phí đúng phải là $C(x) = 0,0003x^2 + 0,15x + 3$.

Bài 56. Một công ty tiến hành khai thác 17 giếng dầu trong khu vực được chỉ định. Trung bình mỗi giếng dầu chiết xuất được 245 thùng dầu mỗi ngày. Công ty có thể khai thác nhiều hơn 17 giếng dầu nhưng cứ khai thác thêm một giếng thì lượng dầu mỗi giếng chiết xuất được hàng ngày giảm 9 thùng. Để giám đốc công ty có thể quyết định số giếng cần thêm cho phù hợp với tài chính, hãy chỉ ra số giếng công ty có thể khai thác thêm để sản lượng dầu chiết xuất tăng lên. Gọi số lượng giếng dầu mỗi ngày khai thác là x và y là sản lượng dầu chiết được. Khi đó:

- Khi đó $y = -9x^2 + 398x, x > 17$.
- Khi công ty khai thác thêm 6 giếng dầu, thì sản lượng dầu chiết được tăng lên.
- Công ty có thể khai thác từ 17 đến 22 giếng dầu mỗi ngày để sản lượng dầu chiết tăng.
- Sản lượng dầu giảm khi công ty khai thác quá 22 giếng dầu mỗi ngày.

Hướng dẫn giải.

a) Sản lượng dầu chiết được là $y = x[245 - 9(x - 17)] = x(245 - 9x + 153) = -9x^2 + 398x$.
Vậy a) **Đúng**.

b) Ta có $y' = -18x + 398 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{199}{9} \approx 22$.

Bảng biến thiên:

x	0	17	22	$+\infty$	
y'			+	0	-
y				•	

Từ bảng biến thiên, ta thấy khi công ty khai thác từ 17 đến 22 giếng dầu mỗi ngày thì sản lượng dầu chiết tăng, còn trên 22 giếng dầu thì sản lượng dầu chiết được giảm hay khai thác thêm từ 1 đến 5 giếng dầu thì sản lượng dầu chiết tăng và khai thác thêm hơn 5 giếng dầu thì sản lượng dầu chiết giảm.

Khi khai thác thêm 6 giếng dầu, tức $x = 17 + 6 = 23 > 22$, sản lượng giảm.

Do đó b) **SAI**.

c) Dựa vào bảng biến thiên, sản lượng tăng khi $x \in (17; 22)$. Vậy c) **Đúng**.

d) Dựa vào bảng biến thiên, sản lượng giảm khi $x > 22$. Vậy d) **Đúng**.

Bài 57. Quan sát quá trình sinh trưởng và phát triển của một giống cà chua mới trong 18 tuần kể từ khi trồng, các kỹ sư thuộc một trung tâm giống cây trồng nhận thấy: chiều cao thân cây sau t tuần kể từ khi trồng được tính xấp xỉ bởi hàm số $h(t) = 40 \log_3(2t + 1) + 12$ (đơn vị: centimet, $0 \leq t \leq 18$). Sau 9 tuần kể từ khi trồng, hoa bắt đầu kết trái. Kể từ đó, đường kính trái cà chua ở tuần thứ t xấp xỉ bởi hàm số $d(t) = 3^{\frac{2t-17}{t-8}} - 3$ (đơn vị: centimet, $9 \leq t \leq 18$).

- Tốc độ tăng trưởng chiều cao của thân cây cà chua ở tuần thứ 7 (làm tròn đến hàng phần trăm) xấp xỉ bằng 4,85 (cm/tuần).
- Khi được 4 tuần tuổi, chiều cao của thân cây cà chua là 92 cm.
- Chiều cao của thân cây cà chua liên tục tăng trong suốt 18 tuần.
- Sau 4 tuần, kể từ khi kết trái, đường kính trái cà chua lớn hơn 12 cm.

Hướng dẫn giải.

a) **Đúng.** Ta có: $h(t) = 40 \log_3(2t + 1) + 12 \Rightarrow h'(t) = 40 \cdot \frac{(2t + 1)'}{(2t + 1) \ln 3} = \frac{80}{(2t + 1) \ln 3}$.

Tốc độ tăng trưởng chiều cao của thân cây cà chua ở tuần thứ 7 là:

$$h'(7) = \frac{80}{(2 \cdot 7 + 1) \ln 3} = \frac{80}{15 \ln 3} \approx 4,85 \text{ (cm/tuần)}.$$

b) **Đúng.** Khi được 4 tuần tuổi ($t = 4$), chiều cao của thân cây cà chua là:

$$h(4) = 40 \log_3(2 \cdot 4 + 1) + 12 = 40 \log_3 9 + 12 = 40 \cdot 2 + 12 = 92 \text{ cm}.$$

c) **Đúng.** Ta có $h'(t) = \frac{80}{(2t + 1) \ln 3} > 0$ với mọi $0 \leq t \leq 18$.

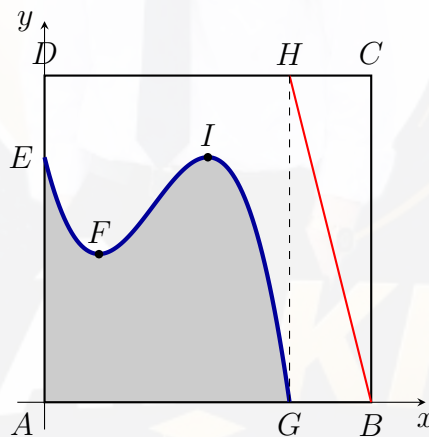
Vậy chiều cao của thân cây cà chua liên tục tăng trong suốt 18 tuần.

d) **Sai.** Sau 4 tuần kể từ khi kết trái tức tuần thứ $t = 9 + 4 = 13$, đường kính trái cà chua là:

$$d(13) = 3 \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 13 - 17}{13 - 8}} - 3 = 3 \sqrt[3]{\frac{9}{5}} - 3 \approx 7,22 - 3 = 4,22 < 12 \text{ cm}.$$

Vậy sau 4 tuần kể từ khi kết trái, đường kính trái cà chua lớn hơn 12 cm là sai.

Bài 58. Ông An có một mảnh đất hình vuông $ABCD$ có cạnh $AB = 12$ m. Ông làm một hồ bơi dạng hình thang cong (phần tô đậm) và một lối đi là đoạn thẳng HB . Nếu đặt hệ trục tọa độ có gốc tại A như hình vẽ, độ dài đơn vị là 1 m, thì đường cong $EFIG$ là một phần đồ thị của một hàm số bậc ba $y = f(x)$ có F là điểm cực tiểu và I là điểm cực đại. Biết $CH = DE = GB = 3$ m và các điểm F, I cách cạnh AD lần lượt là 2 m và 6 m.



a) Phương trình của đường thẳng HB là $y = -4x + 48$.

b) Tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f'(x) = a(x + 2)(x + 6)$.

c) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 7 song song với đường thẳng HB .

d) Ông An cần đặt một cái thang lên xuống hồ bơi tại một điểm trên đường cong $EFIG$ sao cho khoảng cách từ điểm đặt thang đến lối đi là ngắn nhất, khoảng cách đó bằng 2,56 m.

Hướng dẫn giải. a) **Đúng.**

Gọi phương trình đường thẳng HB là $y = ax + b$ ($a \neq 0$).

Đường thẳng HB đi qua $B(12; 0)$ và $H(9; 12)$ nên ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 0 = 12a + b \\ 12 = 9a + b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = -4 \\ b = 48 \end{cases}.$$

Vậy phương trình đường thẳng HB là $y = -4x + 48$.

b) **Sai.**

Hoành độ các điểm cực trị là $x_F = 2, x_I = 6$.

Vì F, I là các điểm cực trị của hàm bậc ba nên đạo hàm $f'(x)$ nhận $x = 2, x = 6$ làm nghiệm.

Do đó tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f'(x) = a(x - 2)(x - 6)$.

c) **Sai.**

Ta có: $f'(x) = a(x - 2)(x - 6) = a(x^2 - 8x + 12) \Rightarrow f(x) = a\left(\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x\right) + C$.

Dựa vào hình vẽ: $f(0) = 9$ (điểm E) và $f(9) = 0$ (điểm G).

$$\begin{cases} f(0) = 9 \\ f(9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 9 \\ a\left(\frac{9^3}{3} - 4 \cdot 9^2 + 12 \cdot 9\right) + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 9 \\ a = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Suy ra hàm số là: $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 4x + 9$. Đạo hàm: $f'(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - 4$.

Hệ số góc tiếp tuyến tại $x = 7$: $k = f'(7) = -\frac{1}{3}(7^2) + \frac{8}{3}(7) - 4 = -\frac{5}{3}$.

Vì $k = -\frac{5}{3} \neq -4$ (hệ số góc của HB) nên tiếp tuyến không song song với HB .

d) **Đúng.**

Khoảng cách từ $M(x_0; y_0) \in EFIG$ đến HB ngắn nhất khi tiếp tuyến tại M song song với HB .

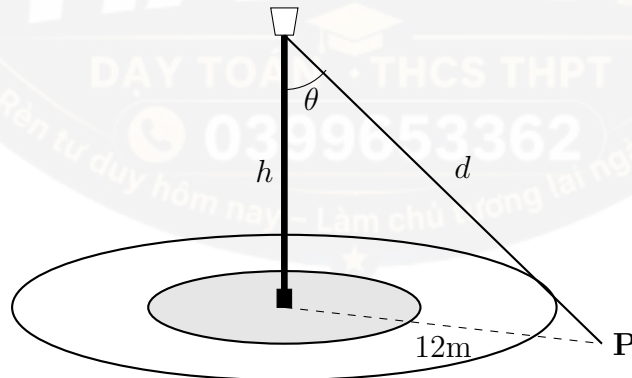
Hệ số góc tiếp tuyến: $f'(x_0) = -4 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x_0^2 + \frac{8}{3}x_0 - 4 = -4 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x_0^2 + \frac{8}{3}x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \text{ (loại)} \\ x_0 = 8 \end{cases}$

Với $x_0 = 8 \Rightarrow y_0 = f(8) = \frac{49}{9}$. Điểm đặt thang là $M\left(8; \frac{49}{9}\right)$.

Phương trình đường thẳng $HB: 4x + y - 48 = 0$.

Khoảng cách: $d(M, HB) = \frac{\left|4 \cdot 8 + \frac{49}{9} - 48\right|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{\frac{95}{9}}{\sqrt{17}} \approx 2,56 \text{ m}$.

Bài 59. Một chiếc đèn được đặt trên đỉnh của một cột đèn cao h (m) để chiếu sáng một vòng xuyên giao thông đông đúc có bán kính 12 m. Cường độ ánh sáng I tại một điểm P trên vòng xuyên tỉ lệ thuận với cosin của góc θ và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách d (m) từ nguồn sáng đến điểm P (xem hình dưới đây).



a) Nếu $I = f(h)$ thì $f'(h) = k \frac{-2h^2 + 144}{(h^2 + 144)^2 \sqrt{(h^2 + 144)^3}}$.

b) Để cường độ ánh sáng I lớn nhất thì cột đèn phải cao $6\sqrt{2} \text{ m}$.

c) $\cos \theta = \frac{12}{\sqrt{h^2 + 144}}$.

d) $I = k \frac{\cos \theta}{d^2}$ (với k là hằng số dương).

 *Hướng dẫn giải.* a) SAI

b) ĐÚNG

c) SAI

d) ĐÚNG

- ◇ Theo đề bài, cường độ ánh sáng I tỉ lệ thuận với $\cos \theta$ và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách d nên:

$$I = k \frac{\cos \theta}{d^2} \text{ (với } k \text{ là hằng số dương). Vậy d đúng.}$$

- ◇ Từ hình vẽ, áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có:

$$d = \sqrt{h^2 + 12^2} = \sqrt{h^2 + 144}$$

$$\cos \theta = \frac{h}{d} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + 144}}. \text{ Vậy c sai.}$$

- ◇ Thay các biểu thức của $\cos \theta$ và d^2 vào công thức tính I :

$$I = k \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + 144}} = k \cdot \frac{h}{(h^2 + 144)\sqrt{h^2 + 144}} = k \cdot \frac{h}{(h^2 + 144)^{\frac{3}{2}}} = f(h)$$

- ◇ Tính đạo hàm của hàm số $f(h)$:

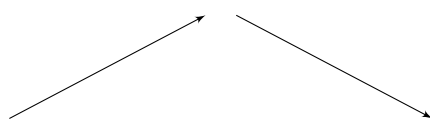
$$f'(h) = k \cdot \frac{1 \cdot (h^2 + 144)^{\frac{3}{2}} - h \cdot \frac{3}{2}(h^2 + 144)^{\frac{1}{2}} \cdot 2h}{\left((h^2 + 144)^{\frac{3}{2}}\right)^2} = k \cdot \frac{(h^2 + 144)^{\frac{1}{2}}(h^2 + 144 - 3h^2)}{(h^2 + 144)^3}$$

$$f'(h) = k \cdot \frac{144 - 2h^2}{(h^2 + 144)^{\frac{5}{2}}}$$

So sánh với biểu thức ở câu a, mẫu số ở đó là $(h^2 + 144)^2 \sqrt{(h^2 + 144)^3} = (h^2 + 144)^{\frac{7}{2}}$. Như vậy mẫu số trong biểu thức ở câu a bị sai. Vậy a sai.

- ◇ Xét $f'(h) = 0 \Leftrightarrow 144 - 2h^2 = 0 \Leftrightarrow h = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ (do $h > 0$).

- ◇ Bảng biến thiên:

h	0	$6\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(h)$	+	0	-
$f(h)$			

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $h = 6\sqrt{2} \text{ m}$. Vậy b đúng.

Bài 1 (Mã 101 THPTQG2026). Một công ty nông sản có công suất chế biến không quá 180 tấn nguyên liệu một tháng. Nếu công ty chế biến x tấn nguyên liệu trong một tháng ($1 \leq x \leq 180$) thì chi phí sản xuất và doanh thu lần lượt là $C(x) = 0,002x^3 + 30x + 20$ (triệu đồng) và $R(x) = 90x$ (triệu đồng). Lợi nhuận lớn nhất mà công ty đạt được trong một tháng là bao nhiêu triệu đồng?

Hướng dẫn giải. Hàm số biểu thị lợi nhuận của công ty trong một tháng là:

$$P(x) = R(x) - C(x) = 90x - (0,002x^3 + 30x + 20) = -0,002x^3 + 60x - 20 \text{ (triệu đồng)}.$$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của hàm số $P(x)$ trên đoạn $[1; 180]$.

$$\text{Đạo hàm: } P'(x) = -0,006x^2 + 60.$$

$$\text{Cho } P'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,006x^2 + 60 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 10000 \Leftrightarrow x = 100 \text{ (do } x \in [1; 180]).$$

Ta tính các giá trị của hàm số tại các điểm mút và điểm cực trị:

$$\diamond P(1) = -0,002(1)^3 + 60(1) - 20 = 39,998.$$

$$\diamond P(100) = -0,002(100)^3 + 60(100) - 20 = -2000 + 6000 - 20 = 3980.$$

$$\diamond P(180) = -0,002(180)^3 + 60(180) - 20 = -11664 + 10800 - 20 = -884.$$

So sánh các giá trị, ta thấy $\max_{[1;180]} P(x) = 3980$ khi $x = 100$.

Vậy lợi nhuận lớn nhất mà công ty đạt được trong một tháng là 3980 triệu đồng.

Bài 2 (Mã 102 THPTQG2026). Một công ty nông sản có công suất chế biến không quá 200 tấn nguyên liệu một tháng. Nếu công ty chế biến x tấn nguyên liệu trong một tháng ($1 \leq x \leq 200$) thì chi phí sản xuất và doanh thu lần lượt là $C(x) = 0,001x^3 + 30x + 10$ (triệu đồng) và $R(x) = 60x$ (triệu đồng). Lợi nhuận lớn nhất mà công ty đạt được trong một tháng là bao nhiêu triệu đồng?

Hướng dẫn giải. Lợi nhuận $P(x)$ bằng doanh thu trừ đi chi phí trên đoạn $[1; 200]$:

$$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow P(x) = 60x - (0,001x^3 + 30x + 10) \Rightarrow P(x) = -0,001x^3 + 30x - 10.$$

$$P'(x) = -0,003x^2 + 30.$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 0,003x^2 = 30 \Leftrightarrow x^2 = 10000. \text{ Vì } x \in [1; 200] \text{ nên lấy } x = 100.$$

$$P(1) = -0,001(1)^3 + 30(1) - 10 = 19,999.$$

$$P(100) = -0,001(100)^3 + 30(100) - 10 = 1990.$$

$$P(200) = -0,001(200)^3 + 30(200) - 10 = -2010.$$

Giá trị lớn nhất của hàm số là 1990.

Bài 3 (Mã 103 THPTQG2026). Một công ty nông sản có công suất chế biến không quá 200 tấn nguyên liệu một tháng. Nếu công ty chế biến x tấn nguyên liệu trong một tháng ($1 \leq x \leq 200$) thì chi phí sản xuất và doanh thu lần lượt là $C(x) = 0,001x^3 + 30x + 10$ (triệu đồng) và $R(x) = 60x$ (triệu đồng). Lợi nhuận lớn nhất mà công ty đạt được trong một tháng là bao nhiêu triệu đồng?

Hướng dẫn giải. Hàm lợi nhuận: $\pi(x) = R(x) - C(x) = 60x - (0,001x^3 + 30x + 10) = -0,001x^3 + 30x - 10$.

$$\text{Đạo hàm: } \pi'(x) = -0,003x^2 + 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \in [1; 200] \\ x = -100 \notin [1; 200] \end{cases}$$

Ta có: $\pi(1) = 19,999$; $\pi(100) = 1990$; $\pi(200) = -2010$.

Vậy lợi nhuận lớn nhất mà công ty đạt được trong một tháng là 1990 triệu đồng khi chế biến 100 tấn nguyên liệu.

Bài 4 (101 THPTQG2025). Nếu một doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm trong một tháng ($x \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq x \leq 4500$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = -0,01x^2 + 300x$ (nghìn đồng),

trong khi chi phí sản xuất bình quân cho mỗi sản phẩm là $G(x) = \frac{30000}{x} + 200$ (nghìn đồng).

Giả sử số sản phẩm sản xuất ra luôn được bán hết. Trong một tháng, doanh nghiệp đó cần sản xuất ít nhất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được lớn hơn 100 triệu đồng?

Hướng dẫn giải.

Tổng chi phí sản xuất x sản phẩm là $C(x) = xG(x) = x \left(\frac{30000}{x} + 200 \right) = 30000 + 200x$.

Lợi nhuận khi bán x sản phẩm là $P(x) = F(x) - C(x)$.

Suy ra $P(x) = -0,01x^2 + 300x - (30000 + 200x) = -0,01x^2 + 100x - 30000$.

Để lợi nhuận lớn hơn 100 triệu đồng thì $P(x) > 100000$.

Do đó $-0,01x^2 + 100x - 30000 > 100000$

$$\Leftrightarrow -0,01x^2 + 100x - 130000 > 0$$

$$\Leftrightarrow 1535,9 < x < 8464,1.$$

Kết hợp với điều kiện $x \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq x \leq 4500$ suy ra $1536 \leq x \leq 4500$.

Vậy doanh nghiệp cần sản xuất ít nhất 1536 sản phẩm để lợi nhuận thu được lớn hơn 100 triệu đồng.

Bài 5. Một sợi dây có chiều dài là 6 m, được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất?



Hướng dẫn giải. Gọi độ dài cạnh hình tam giác đều là x (m). Khi đó độ dài cạnh hình vuông là $\frac{6-3x}{4}$.

Tổng diện tích khi đó là $S = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \left(\frac{6-3x}{4} \right)^2 = \frac{1}{16} [(9+4\sqrt{3})x^2 - 36x + 36]$.

Xét hàm số $f(x) = (9+4\sqrt{3})x^2 - 36x + 36$, $x \in (0; 6)$.

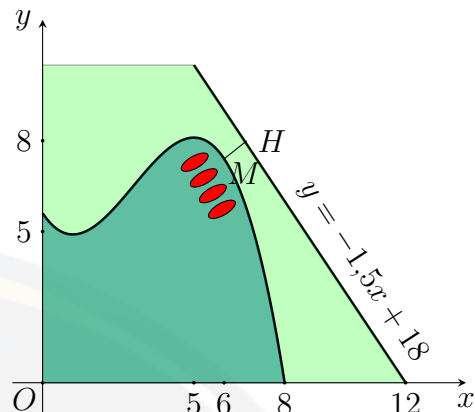
Ta có $f(x)$ là tam thức bậc 2 có $-\frac{b}{2a} = \frac{18}{9+4\sqrt{3}} \in (0; 6)$ và $a > 0$.

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

Suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{18}{9 + 4\sqrt{3}}$.

Vậy diện tích nhỏ nhất khi $x = \frac{18}{9 + 4\sqrt{3}}$ m.

Bài 6. Một hồ nước nhân tạo được xây dựng trong một công viên giải trí. Trong mô hình minh họa bên, nó được giới hạn bởi các trục tọa độ và đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$. Đơn vị độ dài trên mỗi trục là 100 m (*Nguồn: A. Bigalke et al, Mathematik, Grundkurs ma-I, Cornelsen 2016*).



Trong công viên có một con đường chạy dọc theo đồ thị hàm số $y = -1,5x + 18$. Người ta dự định xây dựng trên bờ hồ một bến thuyền đập nước sao cho khoảng cách từ bến thuyền đến con đường này là ngắn nhất. Hoàn hảo của điểm để xây dựng bến thuyền này bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Xét điểm $M(x; f(x))$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$ với $0 \leq x \leq 8$.

Khoảng cách từ điểm $M(x; f(x))$ đến đường thẳng $y = -1,5x + 18 \Leftrightarrow -1,5x - y + 18 = 0$ là

$$MH = \frac{\left| -1,5x - \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56) + 18 \right|}{\sqrt{(-1,5)^2 + 1}} = \frac{|x^3 - 9x^2 + 124|}{10\sqrt{3,25}}.$$

Ta khảo sát hàm số $h(x) = x^3 - 9x^2 + 124$ với $0 \leq x \leq 8$.

$$h'(x) = 3x^2 - 18x;$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 6.$$

Bảng biến thiên

x	0	6	8
$h'(x)$	0	-	0
$h(x)$	124	16	60

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta có $h(x) > 0$ với $0 \leq x \leq 8$;

$$\min_{[0;8]} h(x) = h(6) = 16 \text{ tại } x = 6.$$

Do đó, $\min MH = \min_{[0;8]} \frac{|x^3 - 9x^2 + 124|}{10\sqrt{3,25}} = \frac{1}{10\sqrt{3,25}} \cdot \min_{[0;8]} h(x) = \frac{1}{10\sqrt{3,25}} \cdot 16 \approx 0,8875$ và đạt được tại $x = 6$.

Bài 7. Một trung tâm thương mại bán 2500 ti vi mỗi năm. Chi phí gửi trong kho là 100 000 đồng một cái ti vi mỗi năm. Để đặt hàng, chi phí cố định cho mỗi lần đặt là 200 000 đồng cộng thêm 90 000 đồng mỗi cái ti vi. Trung tâm nên đặt hàng n lần trong mỗi năm và mỗi lần m cái để chi phí hàng tồn kho là ít nhất. Biết rằng mỗi lần đặt hàng về chỉ có một nửa trong số đó được

trung bày ở cửa hàng. Tính giá trị biểu thức $T = 20 \cdot m + 25 \cdot n$.

Hướng dẫn giải. Gọi x là số lượng ti vi mà trung tâm thương mại đặt mỗi lần ($x > 0$).

Số lần đặt hàng mỗi năm của trung tâm thương mại là $\frac{2500}{x}$.

Chi phí cho mỗi lần đặt hàng là $\frac{2500}{x} (200\,000 + 90\,000x)$ (đồng).

Số lượng ti vi trung bình gửi trong kho là $\frac{x}{2}$, chi phí lưu trong kho tương ứng $50\,000x$ (đồng/năm).

Gọi $F(x)$ là hàm chi phí mà trung tâm đó phải trả.

Ta có $F(x) = \text{Chi phí đặt hàng} + \text{Chi phí lưu kho}$.

$$F(x) = \frac{2500}{x} \cdot (200\,000 + 90\,000x) + 50\,000x$$

$$F(x) = \frac{500\,000\,000}{x} + 225\,000\,000 + 50\,000x.$$

Bài toán trở thành tìm $x > 0$ để $F(x)$ nhỏ nhất, $F'(x) = -\frac{500\,000\,000}{x^2} + 50\,000$.

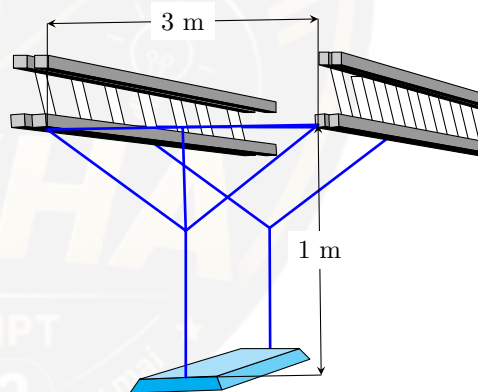
$$F'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{500\,000\,000}{x^2} + 50\,000 = 0 \Rightarrow x = 100.$$

x	0	100	$+\infty$
$F'(x)$	-	0	+
$F(x)$	$\swarrow$ $F_{\min}$ $\searrow$		

Vậy trung tâm phải đặt hàng $\frac{2500}{100} = 25$ lần, mỗi lần là $x = 100$ cái ti vi.

Ta có $m = 100$, $n = 25$, do đó $T = 20 \cdot m + 25 \cdot n = 2\,625$.

Bài 8. Trong một cửa hàng, nhà quản lý dự định treo một đồ trang trí trên cao. Vật trang trí được đặt trên giá đỡ nằm dưới thanh treo 1 m. Biết khoảng cách giữa hai thanh treo là 3 m. Biết tổng độ dài nhỏ nhất của các đoạn dây xích là $a + b\sqrt{c}$ (trong đó a, b, c là các số tự nhiên). Tính $a + b + c$.



Hướng dẫn giải.

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

Bài 8. Đặt $OH = x$ ($0 \leq x \leq 1$).

Khi đó $OA = OB = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + x^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + x^2}$ và

$OC = 1 - x$.

Tổng độ dài của dây xích là

$$L(x) = 2(OA + OB + OC) = 2\left(2\sqrt{\frac{9}{4} + x^2} + 1 - x\right).$$

Ta có $L'(x) = \frac{4x}{\sqrt{\frac{9}{4} + x^2}} - 2$.

Suy ra $L'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x}{\sqrt{\frac{9}{4} + x^2}} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{9}{4} + x^2} = 2x \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bảng biến thiên

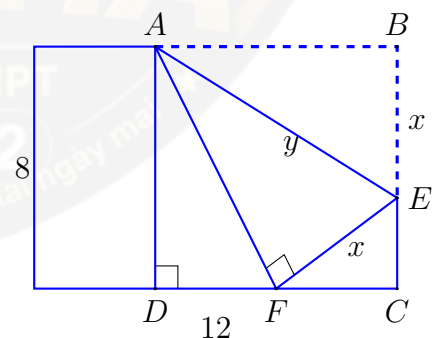
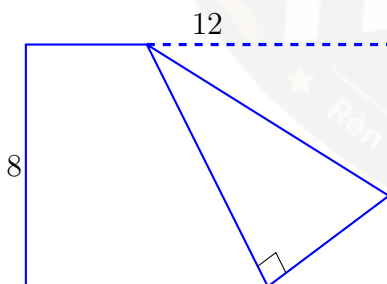
x	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$L'(x)$	-	0	+
$L(x)$	8	$2 + 3\sqrt{3}$	$2\sqrt{13}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy tổng độ dài nhỏ nhất của các đoạn dây xích là

$$L\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 3\sqrt{3}.$$

Suy ra $a = 2$, $b = 3$ và $c = 3$ do đó $a + b + c = 2 + 3 + 3 = 8$.

Bài 9. Cho một tờ giấy hình chữ nhật với chiều dài 12 và chiều rộng 8. Gấp góc bên phải của tờ giấy sao cho sau khi gấp, đỉnh của góc đó chạm đáy dưới như hình vẽ (đỉnh B trùng đỉnh F). Để độ dài nếp gấp AE là nhỏ nhất thì giá trị nhỏ nhất đó là bao nhiêu (kết quả được làm tròn đến hàng phần chục)?



Hướng dẫn giải. Đặt $BE = x$ ($0 < x < 8$), $EC = 8 - x \Rightarrow FC = \sqrt{x^2 - (8 - x)^2} = \sqrt{16x - 64}$.

Ta có $\triangle ADF \sim \triangle FCE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{EF}{AF} = \frac{CF}{AD} \Rightarrow AF = \frac{EF \cdot AD}{CF} = \frac{8x}{\sqrt{16x - 64}}$.

$$y = AE = \sqrt{AF^2 + EF^2} = \sqrt{\frac{64x^2}{16x - 64} + x^2} = \sqrt{\frac{16x^3}{16x - 64}}.$$

Gọi $f(x) = \frac{16x^3}{16x - 64}$ ($x \in (0; 8)$) $\Rightarrow f'(x) = \frac{48x^2(16x - 64) - 16 \cdot 16x^3}{(16x - 64)^2}$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 512x^3 - 3072x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 6. \end{cases}$$

x	0	6	8
$f'(x)$		–	+
$f(x)$			108

Vậy $y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow y_{\min} = \sqrt{108} \approx 10,4$.

Bài 10. Một cơ sở sản xuất sữa hạt chất lượng cao có thể sản xuất được tối đa 300 lít mỗi ngày. Chi phí sản xuất x lít sữa mỗi ngày bao gồm: chi phí nhân công là 1 triệu đồng/ngày; chi phí nguyên vật liệu, đóng chai, bao bì là 35 nghìn đồng cho một lít sữa; chi phí bảo dưỡng máy móc là $C_b(x) = 0,00001x^2$ (triệu đồng). Ngoài ra, nếu x lít sữa sản xuất mỗi ngày vượt 200 lít thì phát sinh thêm chi phí vận hành quá tải là $C_v(x) = 0,00003(x - 200)^3$ (triệu đồng). Giá bán mỗi lít sữa là 60 nghìn đồng. Biết cơ sở bán hết lượng sữa sản xuất trong ngày. Hỏi mỗi ngày cơ sở có lợi nhuận (đơn vị: triệu đồng) đạt được nhiều nhất là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Hướng dẫn giải. Đổi đơn vị tiền tệ sang triệu đồng:

- ◇ Giá bán: 0,06 triệu đồng/lít.
- ◇ Chi phí nguyên vật liệu: 0,035 triệu đồng/lít.
- ◇ Chi phí nhân công: 1 triệu đồng.

Doanh thu: $R(x) = 0,06x$. Tổng chi phí $C(x)$ phụ thuộc vào sản lượng x :

- ◇ Nếu $0 \leq x \leq 200$:

$$C(x) = 1 + 0,035x + 0,00001x^2$$

$$\text{Hàm lợi nhuận: } L(x) = R(x) - C(x) = -0,00001x^2 + 0,025x - 1.$$

Hàm số này đồng biến trên $[0; 200]$ nên đạt giá trị lớn nhất tại $x = 200$:

$$L(200) = -0,00001(200)^2 + 0,025(200) - 1 = -0,4 + 5 - 1 = 3,6 \text{ (triệu đồng)}.$$

- ◇ Nếu $200 < x \leq 300$:

$$C(x) = 1 + 0,035x + 0,00001x^2 + 0,00003(x - 200)^3$$

Hàm lợi nhuận:

$$\begin{aligned} L(x) &= 0,06x - (1 + 0,035x + 0,00001x^2 + 0,00003(x - 200)^3) \\ &= -0,00003(x - 200)^3 - 0,00001x^2 + 0,025x - 1. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L'(x) = -0,00009(x - 200)^2 - 0,0002x + 0,025.$$

$$\text{Cho } L'(x) = 0 \Leftrightarrow -9(x - 200)^2 - 2x + 2500 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 215,16 \\ x \approx 184,61 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$	184,61	215,16	$+\infty$
$L'(x)$		–	+	–

Vậy trên khoảng $200 < x \leq 300$ thì giá trị lợi nhuận cực đại đạt tại $x \approx 215,16$:

$$L(215,16) \approx 3,81 \text{ (triệu đồng)}.$$

So sánh hai trường hợp ta được lợi nhuận lớn nhất là 3,81 triệu đồng.

Bài 11. Một công ty sản xuất đồ điện tử nhận được đơn đặt hàng sản xuất 5 000 chiếc tai nghe không dây. Công ty này sở hữu một số dây chuyền sản xuất tự động. Mỗi dây chuyền có thể sản xuất 25 chiếc tai nghe trong một giờ. Chi phí thiết lập (cài đặt, lập trình) mỗi dây chuyền là 150 nghìn đồng. Chi phí này chỉ trả một lần cho mỗi dây chuyền được sử dụng. Khi đã được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát của một kỹ thuật viên. Chi phí thuê kỹ thuật viên giám sát là 200 nghìn đồng mỗi giờ (tính cho toàn bộ quá trình sản xuất). Công ty nên sử dụng bao nhiêu dây chuyền sản xuất để tổng chi phí (chi phí thiết lập và chi phí giám sát) cho việc hoàn thành đơn hàng là thấp nhất?

Hướng dẫn giải. Gọi x là số dây chuyền sản xuất cần sử dụng ($x \in \mathbb{N}^*$).

Số lượng tai nghe mỗi dây chuyền sản xuất trong một giờ là 25 (chiếc).

Tổng công suất sản xuất của x dây chuyền trong một giờ là $25x$ (chiếc).

Thời gian để hoàn thành 5 000 chiếc tai nghe là

$$t = \frac{5\,000}{25x} = \frac{200}{x} \text{ (giờ)}.$$

Chi phí thiết lập cho x dây chuyền là $150x$ (nghìn đồng).

Chi phí thuê kỹ thuật viên giám sát trong thời gian t là $200 \cdot \frac{200}{x} = \frac{40\,000}{x}$ (nghìn đồng).

Tổng chi phí sản xuất là

$$C(x) = 150x + \frac{40\,000}{x} \text{ (nghìn đồng)}.$$

Xét hàm số $f(x) = 150x + \frac{40\,000}{x}$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(x) = 150 - \frac{40\,000}{x^2}$.

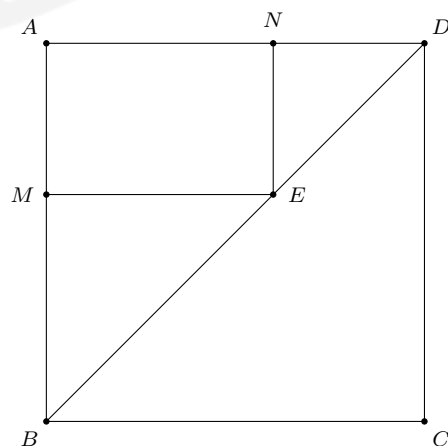
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 150x^2 = 40\,000 \Leftrightarrow x^2 = \frac{40\,000}{150} = \frac{800}{3}.$$

Suy ra $x = \sqrt{\frac{800}{3}} = \frac{20\sqrt{6}}{3}$. Ta có bảng biến thiên

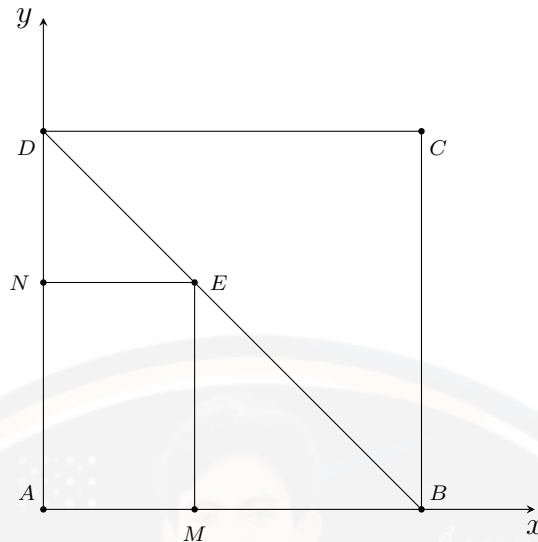
x	0	$\frac{20\sqrt{6}}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$+\infty$	$2000\sqrt{6}$	$+\infty$

Vậy công ty nên sử dụng 16 dây chuyền sản xuất để chi phí thấp nhất.

Bài 12. Bác An muốn xây một chiếc bể bơi cho trẻ em trong mảnh vườn hình vuông $ABCD$ có diện tích 144 m^2 . Biết bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có hai đỉnh đối diện của đáy là A và E , với E thuộc đường chéo BD ; độ sâu của bể bơi không đổi bằng $1,5 \text{ m}$ (tham khảo hình vẽ). Chi phí lát gạch cho nền bể là $1\,000\,000 \text{ VND/m}^2$ và chi phí lát gạch cho thành bể là $500\,000 \text{ VND/m}^2$. Hỏi khi diện tích đáy bể đạt giá trị lớn nhất thì chi phí phải bỏ ra để lát gạch cho nền và thành bể bơi này là bao nhiêu triệu đồng?



 Hướng dẫn giải.



Diện tích mảnh vườn hình vuông $ABCD$ là 144 m^2 nên $AB = 12 \text{ m}$.

Chọn hệ trục như hình vẽ.

Ta có $A(0;0)$, $B(12;0)$, $D(0;12)$, $C(12;12)$.

Khi đó đường chéo BD có phương trình $x + y = 12$.

Gọi $E(x; 12 - x)$ với $0 < x < 12$ là một điểm thuộc BD .

Đáy bể bơi là hình chữ nhật $AEMN$ có hai cạnh song song với các trục tọa độ nên $AM = x$, $AN = 12 - x$.

Diện tích đáy bể là $S(x) = AM \cdot AN = x(12 - x) = 12x - x^2$.

Ta có $S(x) = -x^2 + 12x$ là tam thức bậc hai đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{12}{2} = 6$.

Suy ra $S_{\max} = 6 \cdot 6 = 36 \text{ (m}^2\text{)}$.

Vậy khi diện tích đáy bể lớn nhất thì đáy bể là hình vuông cạnh 6 m .

Độ sâu của bể là $h = 1,5 \text{ m}$.

Chi phí lát nền bể

$$S_{\text{nền}} = 36 \text{ m}^2, \quad C_{\text{nền}} = 36 \cdot 1\,000\,000 = 36\,000\,000 \text{ (VND)}.$$

Chi phí lát thành bể

Chu vi đáy $P = 4 \cdot 6 = 24 \text{ m}$.

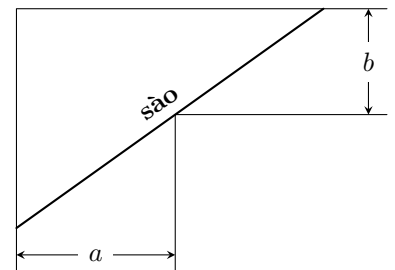
Diện tích thành bể là $S_{\text{thành}} = P \cdot h = 24 \cdot 1,5 = 36 \text{ m}^2$.

Chi phí

$$C_{\text{thành}} = 36 \cdot 500\,000 = 18\,000\,000 \text{ (VND)}.$$

Tổng chi phí là $C = 36\,000\,000 + 18\,000\,000 = 54\,000\,000 \text{ (VND)} = 54$ triệu đồng.

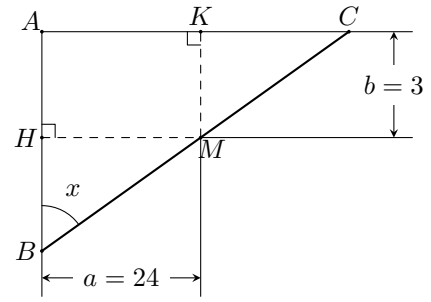
 **Bài 13.** Để chặn đường hành lang hình chữ L, người ta dùng một que sào thẳng dài đặt kín những điểm chạm với hành lang (như hình vẽ). Biết $a = 24$ và $b = 3$. Hỏi que sào thỏa mãn điều kiện trên có chiều dài tối thiểu là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?



 Hướng dẫn giải.

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

Bài 13. Gọi B, C là hai đầu thanh sào chạm vào cạnh hành lang, M là điểm góc trong.
 Độ dài sào là $L = BM + MC$.
 Kẻ $MH \perp AB$ tại H ($MH = a = 24$) và $MK \perp AC$ tại K ($MK = b = 3$).
 Đặt $\widehat{MBH} = x$ với $x \in (0^\circ; 90^\circ)$.



Trong $\triangle BHM$ vuông tại H , ta có $BM = \frac{MH}{\sin x} = \frac{24}{\sin x}$.

Vì $MK \parallel BH \Rightarrow \widehat{KMC} = \widehat{MBH} = x$ (đồng vị).

Trong $\triangle MKC$ vuông tại K , ta có $MC = \frac{MK}{\cos x} = \frac{3}{\cos x}$.

Độ dài thanh sào là $L(x) = \frac{24}{\sin x} + \frac{3}{\cos x}$.

Đạo hàm theo biến x là $L'(x) = -\frac{24 \cos x}{\sin^2 x} + \frac{3 \sin x}{\cos^2 x}$.

Ta có

$$L'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \sin^3(x) = 24 \cos^3(x)$$

$$\Leftrightarrow \tan^3(x) = 8$$

$$\Leftrightarrow \tan(x) = 2.$$

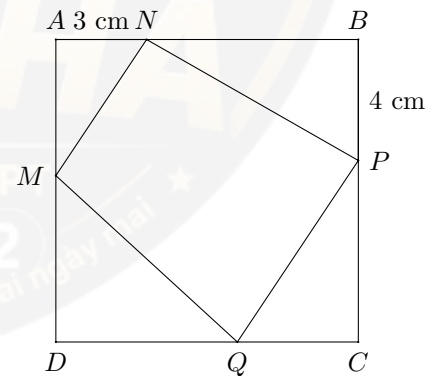
Khi $\tan(x) = 2$, ta có $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ và $\sin(x) = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Giá trị nhỏ nhất của L là

$$L_{\min} = \frac{24}{\frac{1}{\sqrt{5}}} + \frac{3}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = 12\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 15\sqrt{5} \approx 33,5.$$

Vậy độ dài tối thiểu của thanh sào là 33,5.

Bài 14. Một tấm bìa hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 10 cm. Bạn An muốn tạo thành 1 hình thang $MNPQ$ ($MN \parallel PQ$) biết M, N, P, Q lần lượt nằm trên các cạnh AD, AB, BC, CD như hình minh họa sao cho đoạn $AN = 3$ cm, $BP = 4$ cm. Tính diện tích hình thang $MNPQ$ nhỏ nhất bạn An có thể tạo được (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của cm^2).



Hướng dẫn giải. Đặt hệ trục tọa độ với $A(0; 10)$, $B(10; 10)$, $C(10; 0)$, $D(0; 0)$.

Khi đó $N(3; 10)$, $P(10; 6)$, đặt $M(0; m)$ với $0 \leq m \leq 10$ và $Q(q; 0)$ với $0 \leq q \leq 10$.

Điều kiện $MN \parallel PQ$ cho $\frac{10-m}{3} = \frac{-6}{q-10}$ nên $(10-m)(q-10) = -18$, suy ra $q = 10 - \frac{18}{10-m}$.

Do $q \geq 0$ nên $m \leq 8,2$.

Diện tích tứ giác $MNPQ$ là

$$S(m) = S_{ABCD} - (S_{AMN} + S_{BNP} + S_{CPQ} + S_{DMQ}) = \frac{7m^2 - 194m + 1312}{2(10-m)} \text{ với } 0 \leq m \leq 8,2.$$

Ta có $S'(m) = 0 \Leftrightarrow 7m^2 - 140m + 628 = 0 \Rightarrow m = \frac{70 - 6\sqrt{14}}{7}$.

Ta có $S(0) = 65,6$, $S\left(\frac{70 - 6\sqrt{14}}{7}\right) \approx 49,4$, $S(8,2) = 53,3$.

Khi đó $S_{\min} \approx 49,4$.

Bài 15. Một tập đoàn dự định đầu tư tổng số vốn là 20 tỷ đồng để phát triển hai dự án công nghệ A và B . Biết rằng khoản chi phí cơ sở hạ tầng cố định ban đầu là 4 tỷ đồng. Số vốn còn lại được phân bổ cho hai dự án A và B . Lợi nhuận kỳ vọng của dự án A khi đầu tư x tỷ đồng là $L_A(x) = -x^2 + 12x$. Lợi nhuận kỳ vọng của dự án B khi đầu tư y tỷ đồng là $L_B(y) = -y^2 + 20y$. Để tổng lợi nhuận kỳ vọng đạt giá trị lớn nhất thì tập đoàn nên phân bổ vốn cho dự án A bao nhiêu tỷ đồng?

Hướng dẫn giải. Số vốn còn lại để đầu tư vào hai dự án A và B là $20 - 4 = 16$ (tỷ đồng).

Gọi x (tỷ đồng) là số vốn đầu tư vào dự án A .

Khi đó, số vốn đầu tư vào dự án B là $16 - x$ (tỷ đồng).

Điều kiện $0 \leq x \leq 16$.

Tổng lợi nhuận kỳ vọng của tập đoàn là:

$$\begin{aligned} L(x) &= L_A(x) + L_B(16 - x) \\ &= (-x^2 + 12x) + [-(16 - x)^2 + 20(16 - x)] \\ &= -x^2 + 12x - (256 - 32x + x^2) + 320 - 20x \\ &= -2x^2 + 24x + 64. \end{aligned}$$

Ta có $L'(x) = -4x + 24$.

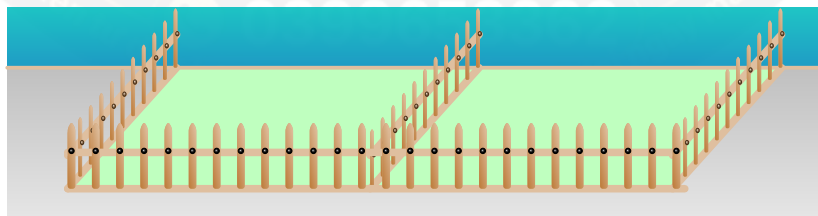
Cho $L'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 24 = 0 \Leftrightarrow x = 6 \in [0; 16]$.

Mà $L(0) = 64$, $L(16) = -64$, $L(6) = 136$.

Khi đó lợi nhuận lớn nhất là 136 tỷ đồng khi $x = 6$.

Vậy tập đoàn nên phân bổ cho dự án A số vốn là 6 tỷ đồng.

Bài 16. Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (Hình bên dưới). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song với nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



Hướng dẫn giải. Gọi x (m) là chiều dài của mặt hàng rào song song với bờ sông.

Chi phí làm mặt hàng rào song song với bờ sông là $60\,000x$.

Chi phí làm ba mặt hàng rào song song với nhau là $15\,000\,000 - 60\,000x$.

Chiều dài của một mặt hàng rào song song với nhau là $\frac{15\,000\,000 - 60\,000x}{3 \cdot 50\,000} = \frac{-2x + 500}{5}$.

Diện tích của khu đất là $S(x) = x \left(\frac{-2x + 500}{5} \right) = -\frac{2}{5}x^2 + 100x$ ($0 < x < 250$).

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

Xét hàm số $f(x) = -\frac{2}{5}x^2 + 100x$ trên khoảng $(0; 250)$.

$$f'(x) = -\frac{4}{5}x + 100, f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{5}x + 100 = 0 \Leftrightarrow x = 125.$$

Bảng biến thiên hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0; 250)$

x	0	125	250	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	6 250		0

Từ bảng biến thiên suy ra $\max_{(0;250)} f(x) = f(125) = 6\,250$.

Vậy bác nông dân có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất $6\,250 \text{ m}^2$. Với chiều dài mặt hàng rào song song với bờ sông là 125 m và chiều dài ba mặt song song là 50 m .

Bài 17. Công ty X cần vận chuyển một lượng lớn hàng hóa từ nhà kho A đến cửa hàng B, lượng hàng hóa chia ra thành nhiều chuyến đi bằng một xe tải có tải trọng tối đa là 50 tấn. Công ty cần tính toán để tối ưu hóa tốc độ vận chuyển hàng hóa của xe. Biết rằng để bốc xếp x tấn hàng hóa từ nhà kho A lên xe cần thời gian $\frac{x}{60-x}$ giờ. Sau khi xe đến B, để di chuyển mỗi tấn hàng từ xe xuống cửa hàng B cần thời gian 3 phút. Tổng thời gian trung bình di chuyển từ nhà kho A đến cửa hàng B và quay về A là $1,2$ giờ. Em hãy cho biết trong mỗi chuyến đi, xe nên vận chuyển bao nhiêu tấn hàng để khối lượng hàng hóa được vận chuyển trung bình trên mỗi giờ là lớn nhất? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

Hướng dẫn giải. Giả sử mỗi chuyến vận chuyển x tấn hàng hóa, điều kiện $0 < x \leq 50$.

Tổng thời gian vận chuyển của mỗi chuyến là $T(x) = \frac{x}{60-x} + \frac{3}{60}x + 1,2 = \frac{-x^2 + 56x + 1440}{20(60-x)}$ (giờ).

Khối lượng hàng hóa vận chuyển trung bình mỗi giờ là

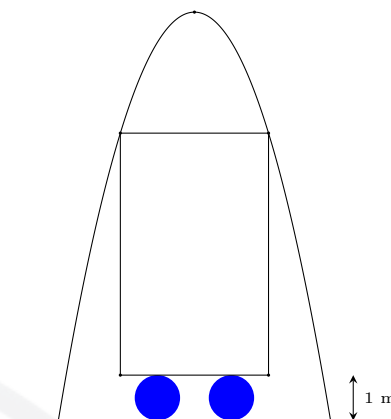
$$\begin{aligned} m(x) &= \frac{x}{T(x)} = \frac{20x \cdot (60-x)}{-x^2 + 56x + 1440} \\ \Rightarrow m'(x) &= \frac{20(4x^2 - 2880x + 86400)}{(-x^2 + 56x + 1440)^2} \\ \Leftrightarrow m'(x) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 31,4 & (\text{thoả mãn}) \\ x \approx 688,6 & (\text{loại}). \end{cases} \end{aligned}$$

Bảng biến thiên

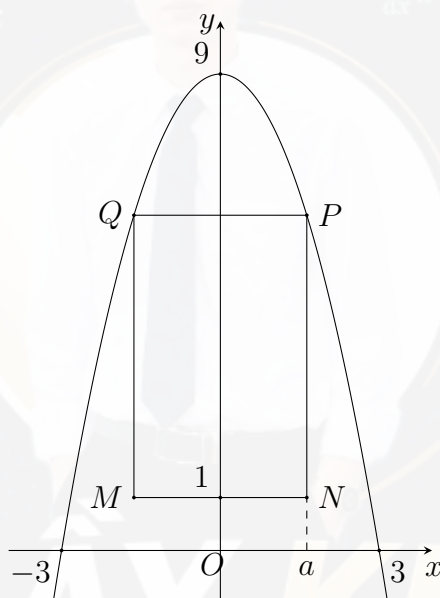
x	0	31,4	50	
$m'(x)$		+	0	-
$m(x)$		8,12		
	0			5,75

Từ bảng biến thiên để khối lượng hàng hóa vận chuyển trung bình mỗi giờ là lớn nhất thì mỗi xe nên vận chuyển 31,4 tấn hàng.

Bài 18. Một chiếc cổng hình Parabol có chiều cao 9 m, khoảng cách giữa hai chân cổng là 6 m. Để vận chuyển thùng hàng hình chữ nhật qua cổng, người ta dùng một xe kéo có chiều cao 1 m. Biết rằng mặt cắt của thùng hàng qua cổng là hình chữ nhật, hỏi diện tích hình chữ nhật đó lớn nhất là bao nhiêu m^2 để xe chở thùng hàng có thể đi qua cổng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Hướng dẫn giải.



Trong hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, chiếc cổng hình parabol có phương trình $y = -x^2 + 9$. Xe chở hàng có thể đi qua được cổng nếu điểm P thuộc parabol với hoành độ điểm P bằng a ,

$a \in (0; 3)$. Khi đó tung độ của điểm P bằng $-a^2 + 9$ và

$$\begin{cases} MN = 2a \\ NP = -a^2 + 9 - 1 = -a^2 + 8 \end{cases}$$

Diện tích của hình chữ nhật là $S = MN \cdot NP = 2a \cdot (-a^2 + 8) = -2a^3 + 16a$.

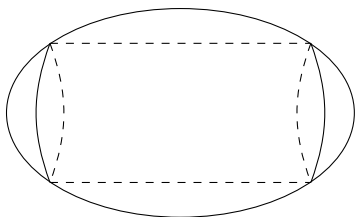
Ta có: $S' = -6a^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow a = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$. Do $a \in (0; 3)$ nên $a = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Bảng biến thiên của hàm số $S(a) = -2a^3 + 16a$.

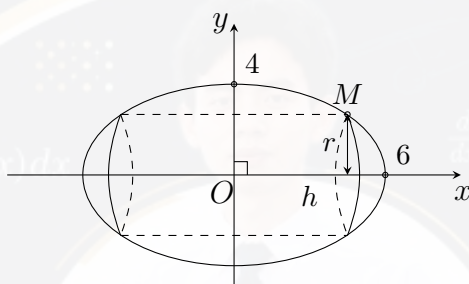
a	0	$\frac{2\sqrt{6}}{3}$	3
S'	+	0	-
S	$S\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$		

Khi đó $S_{\max} = S\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right) = 17,4 (m^2)$.

Bài 19. Một quả trứng khủng long đồ chơi bằng nhựa có thiết diện qua trục lớn là một đường elip. Biết độ dài mỗi trục là 12 cm và 8 cm. Bên trong quả trứng người ta cần thiết kế một chiếc hộp hình trụ để đựng các đồ chơi trẻ con như bóng đèn xanh đỏ, kẹo v.v... Hỏi khối trụ như thế có thể tích tối đa bao nhiêu cm^3 (làm tròn đến hàng đơn vị).



Hướng dẫn giải.



Gắn elip lên hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, elip có $2a = 12 \Rightarrow a = 6$; $2b = 8 \Rightarrow b = 4$. Phương trình chính tắc elip (E) : $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Đặt chiều cao và bán kính đáy hình trụ nội tiếp elip là h , r thì điểm tiếp xúc $M\left(\frac{h}{2}; r\right)$ với $0 < h < 12$; $0 < r < 4$.

Điểm M thuộc (E) : $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{36} + \frac{r^2}{16} = 1$

Hay $\frac{h^2}{144} + \frac{r^2}{16} = 1 \Rightarrow r^2 = 16\left(1 - \frac{h^2}{144}\right)$.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi 16\left(1 - \frac{h^2}{144}\right) \cdot h = \pi\left(16h - \frac{h^3}{9}\right)$.

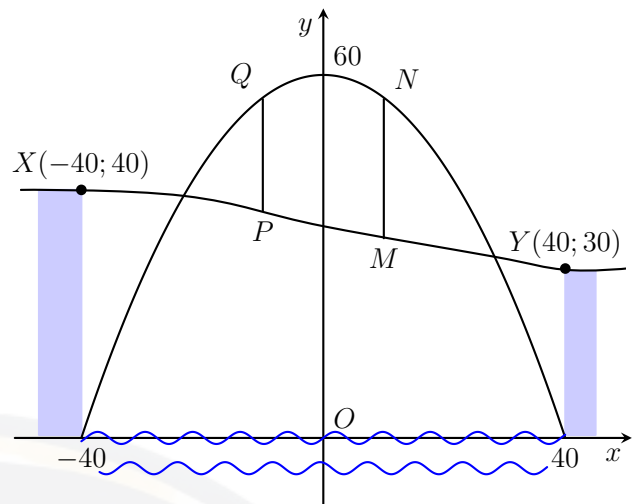
Ta có $V' = \pi\left(16 - \frac{h^2}{3}\right)$; $V' = 0 \Rightarrow 16 - \frac{h^2}{3} = 0 \Rightarrow h^2 = 48 \Rightarrow h = 4\sqrt{3} \in (0; 12)$.

h	0	$4\sqrt{3}$	12
V'	+	0	-
V		$V(4\sqrt{3})$	

Giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là

$$V_{\max} = V(4\sqrt{3}) = \pi\left(16 \cdot 4\sqrt{3} - \frac{(4\sqrt{3})^3}{9}\right) \approx 232 (\text{cm}^3).$$

Bài 20. Một thành phố nằm trên một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang 80 m, một bên cao 40 m và một bên cao 30 m. Một cây cầu sẽ được xây dựng bắc qua sông và hẻm núi. Sơ đồ thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ dưới đây. Con đường XY xuyên qua hẻm núi được mô hình hóa bằng phương trình $y = \frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35$. Khung vòm của cầu là một Parabol có đỉnh tại $(0, 60)$ và chân tại hai điểm có hoành độ $x = -40$ và $x = 40$ trên trục hoành.



Hai cột đỡ dọc MN và PQ (song song với trục Oy) là đoạn nối giữa khung của Parabol và đường XY . Tính tổng độ dài đoạn MN và PQ biết rằng N và Q là hai điểm đối xứng qua Oy ; MN là đoạn có độ dài lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Hướng dẫn giải. Theo bài ra ta có phương trình của Parabol là $y = 60 - \frac{3}{80}x^2$.

Giao điểm của parabol và đồ thị đường cong $y = \frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35$ là nghiệm của phương trình

$$\frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35 = 60 - \frac{3}{80}x^2.$$

Phương trình trên có hai nghiệm trong khoảng $(-40; 40)$ là $x_1 = -23,71$, $x_2 = 27,99$.

Khoảng cách giữa khung Parabol và đường xuyên núi là

$$d = 60 - \frac{3}{80}x^2 - \left(\frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35 \right) \text{ với } x \in (-23,71; 27,99)$$

$$\text{Xét } d' = -\frac{3}{40}x - \frac{3x^2}{25600} + \frac{3}{16} = 0 \Leftrightarrow x = 2,49.$$

Bảng biến thiên:

x	-23,71	2,49	27,99
d'	+	0	-
d	0	25,23	0

Dựa vào bảng biến thiên, MN là đoạn có độ dài lớn nhất khi $x = 2,49$ nên $MN = d(2,49) \approx 25,23$.

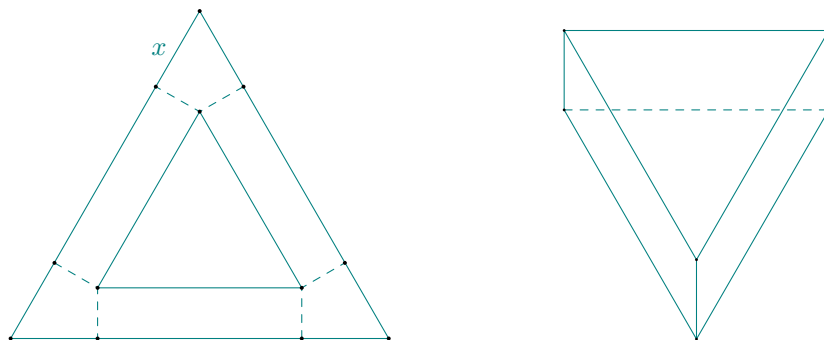
Vì N và Q là hai điểm đối xứng qua Oy nên P có hoành độ $-2,49$.

Suy ra $PQ = d(-2,49) \approx 24,3$.

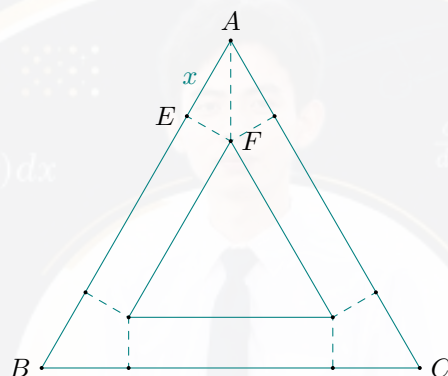
Tổng độ dài $MN + PQ = 49,5$.

Bài 21. Một người muốn tạo một hộp đựng quà khối lăng trụ tam giác đều, không có nắp bằng cách cắt ba góc của một tam giác đều cạnh bằng a các đoạn bằng x , $\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$ như hình vẽ, rồi gấp lại tạo thành khối lăng trụ tam giác đều. Thể tích khối lăng trụ lớn nhất là $\frac{a^3}{b}$. Hỏi giá trị

của b bằng bao nhiêu?



Hướng dẫn giải.



Tam giác AEF vuông tại E có $EF = AE \cdot \tan 30^\circ = \frac{x\sqrt{3}}{3}$.

Ta có EF cũng là đường cao của hình lăng trụ tam giác đều được tạo thành.

Lại có, đáy của hình lăng trụ được tạo thành là tam giác đều có cạnh bằng $a - 2x$.

Suy ra $S_{\text{đáy}} = \frac{(a - 2x)^2 \sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối lăng trụ là $V = \frac{(a - 2x)^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{3} = \frac{(a - 2x)^2 x}{4} \quad \left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$.

Ta có $V' = \frac{1}{4}(a - 2x)(a - 6x)$; $V' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{6}$.

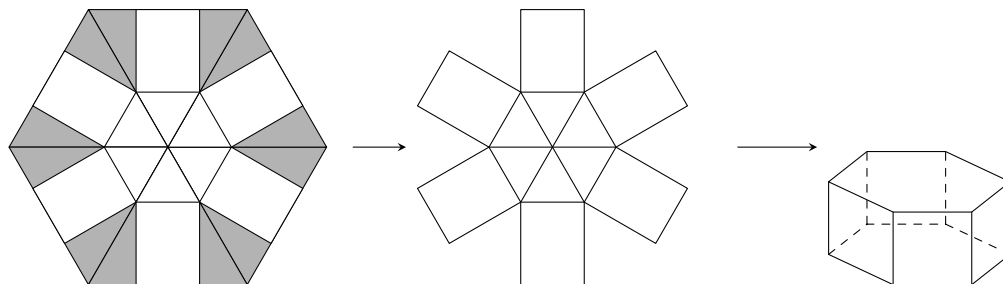
Bảng biến thiên

x	0	$\frac{a}{6}$	$\frac{a}{2}$	
V'		+	0	-
V	0	$\frac{a^3}{54}$	0	

Vậy thể tích khối lăng trụ lớn nhất là $\frac{a^3}{54}$. Nên $b = 54$.

Bài 22. Cho một tấm nhôm hình lục giác đều cạnh 90 cm. Người ta cắt ở mỗi đỉnh của tấm nhôm hai hình tam giác vuông bằng nhau, biết cạnh góc vuông nhỏ bằng x (cm) (cắt phần tô đậm của tấm nhôm) rồi gập tấm nhôm như hình vẽ để được một hình lăng trụ lục giác đều không có

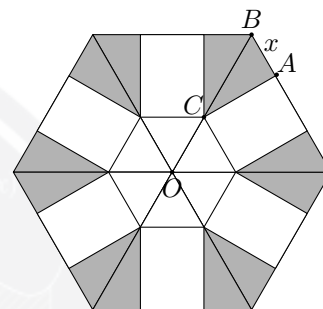
nắp. Tìm x để thể tích của khối lăng trụ lục giác đều trên là lớn nhất.



Hướng dẫn giải.

Lăng trụ có diện tích đáy bằng

$$\begin{aligned} S &= 6 \cdot \frac{OC^2 \sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot (OB - BC)^2 \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(OB - \frac{x}{\cos \widehat{ABC}} \right)^2 \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} (90 - 2x)^2 \\ &= 6\sqrt{3} (45 - x)^2. \end{aligned}$$



Chiều cao $h = AC = x \cdot \tan \widehat{ABC} = x\sqrt{3}$.

Thể tích lăng trụ $V = Sh = 18x(45 - x)^2 = 18(x^3 - 90x^2 + 45^2)$.

Xét hàm số $V = 18(x^3 - 90x^2 + 45^2)$ với $x > 0$.

Đạo hàm $V' = 18(3x^2 - 180x + 45^2)$.

Khi đó $V' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \Rightarrow y = 243\,000 \\ x = 45 \Rightarrow y = 0. \end{cases}$

Bảng biến thiên

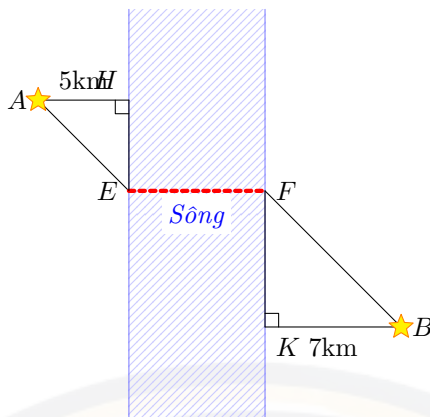
x	0	15	45		
$V'(x)$		+	0	-	0
$V(x)$		243 000			
	0				0

Dựa vào bảng biến thiên ta nhận $x = 15$.

Bài 23. Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là 5km và thành phố B cách con sông một khoảng là 7km (hình vẽ), biết $HE + KF = 24$ km và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu cách thành phố B là bao nhiêu để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

(đi theo đường $AEFB$)? (Kết quả làm tròn đến km)



Hướng dẫn giải. Đặt $HE = x$ và $FK = y$ ($x, y > 0$). Theo giả thiết $HE + KF = 24 \Rightarrow x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - x$.

Áp dụng định lý Pytago trong các tam giác vuông AHE và BKF :

$$AE = \sqrt{AH^2 + HE^2} = \sqrt{25 + x^2}$$

$$BF = \sqrt{BK^2 + FK^2} = \sqrt{49 + y^2} = \sqrt{49 + (24 - x)^2}$$

Vì độ dài cầu EF không đổi, quãng đường $AE + EF + FB$ ngắn nhất khi $AE + BF$ ngắn nhất.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 25} + \sqrt{(24 - x)^2 + 49}$ trên khoảng $(0; 24)$.

$$\text{Đạo hàm: } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} - \frac{24 - x}{\sqrt{(24 - x)^2 + 49}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} = \frac{24 - x}{\sqrt{(24 - x)^2 + 49}} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 + 25} = \frac{(24 - x)^2}{(24 - x)^2 + 49}$$

$$\Leftrightarrow 49x^2 = 25(24 - x)^2 \Leftrightarrow 7x = 5(24 - x) \Leftrightarrow 12x = 120 \Leftrightarrow x = 10.$$

Khi $x = 10$ thì $y = 14$.

Khoảng cách từ cây cầu đến thành phố B là độ dài đoạn BF :

$$BF = \sqrt{49 + 14^2} = \sqrt{245} = 7\sqrt{5} \approx 15,65 \text{ km}.$$

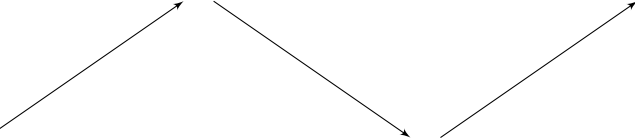
Làm tròn đến hàng đơn vị ta được 16 km.

Bài 24. Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 100000 con vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm người ta xác định được số lượng vi khuẩn N thay đổi theo thời gian bằng công thức $N(t) = 80t^3 - 3600t^2 + 48000t + 100000$ (thời gian t tính bằng giây $0 \leq t \leq 45$). Gọi $(a; b)$ là khoảng thời gian dài nhất để vi khuẩn tăng. Hiệu $a - b$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Ta có $N(t) = 80t^3 - 3600t^2 + 48000t + 100000 \Rightarrow N'(t) = 240t^2 - 7200t + 48000$.

$$N'(t) = 240t^2 - 7200t + 48000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \\ t = 20. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	10	20	45			
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$							

Vậy vi khuẩn tăng trong khoảng thời gian lâu nhất là $(20; 45) \Rightarrow \begin{cases} a = 20 \\ b = 45 \end{cases} \Rightarrow a - b = -25$.

Bài 25. Một công ty sản xuất sản phẩm và doanh thu (đơn vị: triệu đồng) từ việc bán sản phẩm được mô tả bởi hàm số $R(x) = -2x^3 + 9x^2 + 12x + 100$. Trong đó, x là số lượng sản phẩm được bán ra (tính bằng ngàn sản phẩm). Hỏi số lượng sản phẩm tối thiểu phải bán ra để doanh thu bắt đầu tăng là bao nhiêu sản phẩm? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn giải. Ta có $R(x) = -2x^3 + 9x^2 + 12x + 100$.

Tập xác định $\mathcal{D} = (0, +\infty)$.

$$\Rightarrow R'(x) = -6x^2 + 18x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \text{ hoặc } x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \approx 3,5616.$$

x	0	$\frac{3 + \sqrt{17}}{2}$	$+\infty$
$R'(x)$		- 0 +	
$R(x)$	0		$+\infty$

-14,16

Do vậy số lượng sản phẩm tối thiểu phải bán ra để doanh thu bắt đầu tăng là

$$3,5616 \cdot 1000 = 3561,6 \text{ hay } 3562 \text{ sản phẩm.}$$

Bài 26. Trong một nghiên cứu tại Viện Sức khỏe Tâm thần Quốc gia, các nhà khoa học theo dõi độ dày vỏ não (cortex) của 307 trẻ em có IQ cao (121 – 149) qua tuổi t (tính bằng năm), với mô hình

$$S(t) = 0,000989t^3 - 0,0486t^2 + 0,7116t + 1,46, \quad 5 \leq t \leq 19.$$

Hỏi vỏ não của trẻ có IQ siêu trí tuệ đạt độ dày cực đại vào khoảng bao nhiêu tuổi (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Hướng dẫn giải. Ta có $S'(t) = 3 \cdot 0,000989t^2 - 2 \cdot 0,0486t + 0,7116 = 0,002967t^2 - 0,0972t + 0,7116$.
Suy ra

$$S'(t) = 0 \Leftrightarrow 0,002967t^2 - 0,0972t + 0,7116 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t \approx 21,72(\text{loại}) \\ t \approx 11,04(\text{nhận}). \end{cases}$$

Bảng biến thiên

t	5	11,04	19
$S'(t)$		+ 0 -	
$S(t)$	3,93	4,72	4,22

Từ bảng biến thiên, ta thấy $S(t)$ đạt cực đại tại $t \approx 11,04$.

Vậy vỏ não của trẻ có IQ siêu trí tuệ đạt độ dày cực đại vào khoảng 11 tuổi.

Bài 27. Định mức cầu mỗi tháng của đồng hồ đeo tay Peget phụ thuộc vào giá đơn vị p theo

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

phương trình cầu $p = \frac{50}{0,01x^2 + 1}$, $0 \leq x \leq 20$ trong đó p tính bằng đô la và x tính bằng nghìn chiếc. Hỏi nhà sản xuất phải bán bao nhiêu nghìn chiếc để doanh thu $R = px$ đạt cực đại?

Hướng dẫn giải. Doanh thu mà nhà sản xuất đạt được khi bán x nghìn chiếc đồng hồ đeo tay Peget là

$$R(x) = p(x) \cdot x = \frac{50x}{0,01x^2 + 1} \text{ với } 0 \leq x \leq 20.$$

Ta có

$$R'(x) = \frac{50 \cdot (0,01x^2 + 1) - 50x \cdot 0,02x}{(0,01x^2 + 1)^2} = \frac{50(0,01x^2 + 1 - 0,02x^2)}{(0,01x^2 + 1)^2} = \frac{50(1 - 0,01x^2)}{(0,01x^2 + 1)^2}.$$

Suy ra

$$R'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{50(1 - 0,01x^2)}{(0,01x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - 0,01x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 (\text{nhận}) \\ x = -10 (\text{loại}). \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	10	20
$R'(x)$	+	0	-
$R(x)$	0	250	200

Từ bảng biến thiên, ta thấy $R(t)$ đạt cực đại tại $x = 10$.

Vậy để doanh thu $R = px$ đạt cực đại thì nhà sản xuất phải bán 10 nghìn chiếc đồng hồ đeo tay Peget.

Bài 28. Trong khoảng thời gian từ ngày 01/01/2024 đến hết ngày 30/12/2024 nhóm nghiên cứu đã quan sát sự phát triển của một quần thể sinh vật X. Kết quả nghiên cứu chỉ ra rằng, tại ngày thứ t của năm 2024 (tính từ ngày 01/01/2024) số cá thể sinh vật X trong quần thể được ước lượng bởi hàm số $f(t) = -\frac{1}{300}t^3 + bt^2 + ct + 12\,000$ (con), $0 \leq t \leq 365$ và ngày 26/09/2024 là ngày có số lượng cá thể sinh vật X nhiều nhất với 55 740 con. Ngày 25/11/2024 số lượng cá thể sinh vật X được ước lượng khoảng bao nhiêu nghìn con? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

Hướng dẫn giải. Năm 2024, tháng một có 31 ngày, tháng hai có 29 ngày, tháng ba có 31 ngày, tháng tư có 30 ngày, tháng năm có 31 ngày, tháng sáu có 30 ngày, tháng bảy có 31 ngày, tháng tám có 31 ngày, tháng chín có 30 ngày, tháng mười có 31 ngày, tháng mười một có 30 ngày.

Ta có $f(t) = -\frac{1}{300}t^3 + bt^2 + ct + 12\,000 \Rightarrow f'(t) = -\frac{1}{100}t^2 + 2bt + c$.

Ngày 26/09/2024 ứng với $t = 270$ là ngày có số lượng cá thể sinh vật X nhiều nhất với 55 740 con nên hàm số đạt cực đại tại $t = 270$. Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} f'(270) = 0 \\ f(270) = 55\,740 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{100}270^2 + 540b + c = 0 \\ -\frac{1}{300}270^3 + b \cdot 270^2 + 270 \cdot c + 12\,000 = 55\,740 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 540 \cdot b + c = 729 \\ 72\,900 \cdot b + 270 \cdot c = 109\,350 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{6}{5} \\ c = 81. \end{cases} \end{aligned}$$

Do đó, hàm số đã cho là $f(t) = -\frac{1}{300}t^3 + \frac{6}{5}t^2 + 81t + 12\,000$.

Thử lại $f'(t) = -\frac{1}{100}t^2 + \frac{12}{5}t + 81 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 270 \\ t = -30 \text{ (loại)} \end{cases}$.

Bảng biến thiên

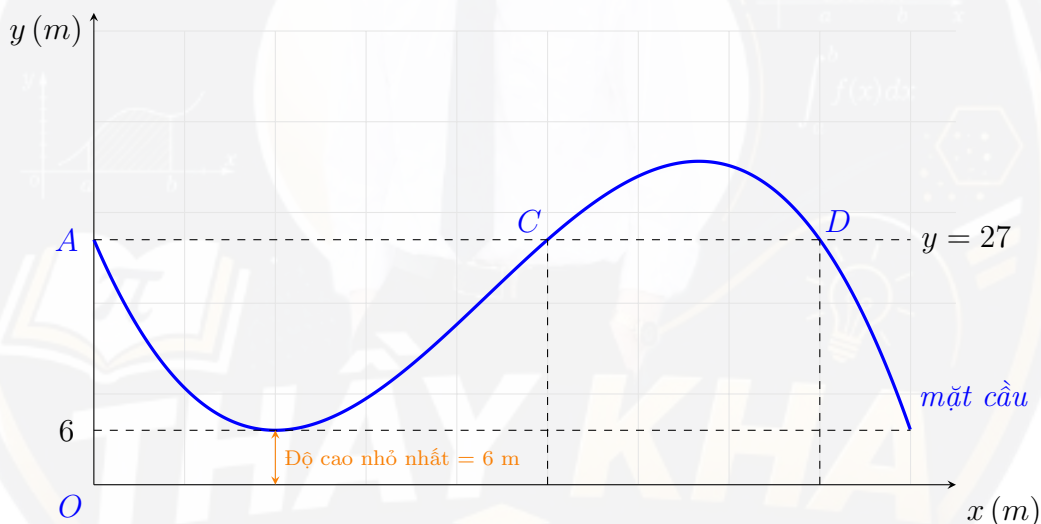
t	0	270	365	
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$			55 740	

Hàm số đạt cực đại tại $t = 270$.

Ngày 25/11/2014 ứng với $t = 330$, khi đó số lượng cá thể sinh vật X được ước lượng khoảng bằng

$$f(330) = -\frac{1}{300} \cdot 330^3 + \frac{6}{5} \cdot 330^2 + 81 \cdot 330 + 12\,000 = 49\,620 \text{ (con)}.$$

Bài 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy (đơn vị trên mỗi trục là mét), mặt cắt dọc của một cầu đi bộ dạng sóng được mô phỏng bằng đồ thị của hàm bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($0 \leq x < 90$) (tham khảo hình vẽ).



Mặt cầu đi qua ba mốc $A(0; 27)$, $C(50; 27)$, $D(80; 27)$. Độ cao nhỏ nhất (khoảng cách thẳng đứng từ mặt cầu tới mặt đất $y = 0$) là 6 m. Hỏi độ cao lớn nhất của mặt cầu so với mặt đất bằng bao nhiêu (đơn vị: mét, làm tròn đến một chữ số thập phân)?

Hướng dẫn giải. Vì $f(0) = f(50) = f(80) = 27$ nên tồn tại $k \neq 0$ sao cho

$$f(x) - 27 = kx(x - 50)(x - 80).$$

Đặt $h(x) = x(x - 50)(x - 80) = x^3 - 130x^2 + 4\,000x$. Khi đó

$$h'(x) = 3x^2 - 260x + 4\,000 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ x = \frac{200}{3} \end{cases}.$$

Từ đồ thị ta thấy $k < 0$, do đó

$$f_{\min} = f(20) = 27 + k \cdot h(20) \quad \text{và} \quad f_{\max} = f\left(\frac{200}{3}\right) = 27 + k \cdot h\left(\frac{200}{3}\right).$$

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

Lại có $h(20) = 20 \cdot (-30) \cdot (-60) = 36\,000$. Độ cao nhỏ nhất bằng 6 m dẫn tới

$$27 + k \cdot 36\,000 = 6 \Rightarrow k = -\frac{21}{36\,000} = -\frac{7}{12\,000}.$$

Lại có

$$h\left(\frac{200}{3}\right) = \frac{200}{3} \cdot \frac{50}{3} \cdot \left(-\frac{40}{3}\right) = -\frac{400\,000}{27}.$$

Suy ra

$$f_{\max} = 27 - \frac{7}{12\,000} \cdot \left(-\frac{400\,000}{27}\right) = 27 + \frac{700}{81} = \frac{2\,887}{81} \approx 35,6 \text{ (m)}.$$

Vậy cao độ lớn nhất (làm tròn một chữ số thập phân) là 35,6m.

Bài 30. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in...) được cho bởi $C(x) = x^2 - 2000x + 10^8$ đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng (4000 đồng). $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường thẳng có phương trình dạng $y = ax + b$. Tính $P = 68a + 3b + 800$.

Hướng dẫn giải. Theo giả thiết, ta có:

$$T(x) = C(x) + 4000x = x^2 - 2000x + 10^8 + 4000x = x^2 + 2000x + 10^8 \text{ (đồng)}.$$

$$M(x) = \frac{T(x)}{x} = \frac{x^2 + 2000x + 10^8}{x} = x + \frac{10^8}{x} + 2000.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [M(x) - (x + 2000)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + 2000 + \frac{10^8}{x} - (x + 2000) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10^8}{x} = 0.$$

Khi đó đồ thị hàm số $M(x) = x + 2000 + \frac{10^8}{x}$ có 1 tiệm cận xiên là $y = x + 2000$.

Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường thẳng $y = x + 2000$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = 1 \\ b = 2000. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } P = 68a + 3b + 800 = 68 \cdot 1 + 3 \cdot 2000 + 800 = 6868.$$

Bài 31. Giả sử dân số của một huyện sau t năm kể từ năm 2024 được mô tả bởi hàm số $f(t) = \frac{20t + 5}{t + 2}$, $t \geq 0$ (nghìn người). Dân số của huyện đó luôn tăng nhưng không vượt quá bao nhiêu nghìn người?

Hướng dẫn giải. Ta có $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20t + 5}{t + 2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20 + \frac{5}{t}}{1 + \frac{2}{t}} = 20$.

Vậy dân số của huyện đó không vượt quá 20 (nghìn người).

Bài 32. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(x) = \frac{50x}{x + 4}$ ($x \geq 0$) bộ phận mỗi ngày sau x ngày đào tạo. Xem $y = N(x)$ là một hàm số xác định trên $[0; +\infty)$, khi số ngày đào tạo tăng lên, hãy tính số bộ phận một nhân viên lắp ráp tối đa không vượt quá bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} N(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{50x}{x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{50}{1+\frac{4}{x}} = 50$. Vậy một nhân viên lắp ráp tối đa không vượt quá 50 bộ phận máy tính.

Bài 33. Nồng độ thuốc trong máu của một bệnh nhân sau khi tiêm t giây là $P(t) \left(\frac{mg}{ml}\right)$. Với $P(t)$ cho bởi công thức $P(t) = \sqrt{0,09t^2 + 0,018t + 0,05} - 0,3t$. Nồng độ thuốc tồn dư, tức nồng độ thuốc vẫn còn trong cơ thể bệnh nhân trong dài hạn khi tiêm là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Do đề bài cho nồng độ thuốc trong cơ thể bệnh nhân trong dài hạn nên $t \rightarrow +\infty$.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{0,09t^2 + 0,018t + 0,05} - 0,3t \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{0,09t^2 + 0,018t + 0,05 - (0,3t)^2}{\sqrt{0,09t^2 + 0,018t + 0,05} + 0,3t} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{0,018t + 0,05}{\sqrt{0,09t^2 + 0,018t + 0,05} + 0,3t} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t \left(0,018 + \frac{0,05}{t} \right)}{t \left(\sqrt{0,09 + \frac{0,018}{t} + \frac{0,05}{t^2}} + 0,3 \right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{0,018 + \frac{0,05}{t}}{\sqrt{0,09 + \frac{0,018}{t} + \frac{0,05}{t^2}} + 0,3} = \frac{0,018}{\sqrt{0,09} + 0,3} = 0,03. \end{aligned}$$

Vậy nồng độ thuốc tồn dư trong cơ thể bệnh nhân là $0,03 \left(\frac{mg}{ml}\right)$.

Bài 34. Một bể chứa 1 000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 15 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Biết rằng nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là một hàm số $f(t)$, thời gian t tính bằng phút. Phương trình tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ bằng là $y = a$, ($a \in \mathbb{R}$). Tìm a .

Hướng dẫn giải. Sau t phút, ta có khối lượng muối trong bể là $20 \cdot 15t = 300t$ (gam).

Thể tích của lượng nước trong bể sau t phút là $1\,000 + 20t$ (lít).

Do đó nồng độ muối sau t phút là $f(t) = \frac{300t}{1\,000 + 20t} = \frac{30t}{100 + 2t}$ (gam/lít).

Ta có $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{100 + 2t} = \frac{30}{2} = 15$ nên đồ thị hàm số $y = f(t)$ có phương trình tiệm cận ngang là $y = 15$.

Vậy $a = 15$.

Bài 35. Số lượng sản phẩm bán được của một cửa hàng quần áo trong t (tháng) được cho bởi công thức: $S(t) = 200 \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{2+t} \right)$ với $t \geq 1$. Xem $y = S(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $1; +\infty$, biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số có dạng $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) = 1$. Tính $P = a - 2b$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 200 \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{2+t} \right) = 200 \cdot \frac{2}{3} = \frac{400}{3}$. Suy ra $a = 400$, $b = 3$.

Vậy $P = a - 2b = 400 - 6 = 394$.

Bài 36. Người ta muốn làm một cái bể dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 1m^3 . Chiều cao của bể là 5dm , các kích thước khác là $x(\text{m})$, $y(\text{m})$ với $x > 0$ và $y > 0$. Diện tích toàn phần của bể (không kể nắp) là hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $S(x)$ là đường thẳng $y = ax + b$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

Hướng dẫn giải. Do thể tích của bể là 1m^3 nên $0,5xy = 1 \Leftrightarrow xy = 2$.

Diện tích toàn phần của bể là $S(x) = xy + 2 \cdot 0,5 \cdot x + 2 \cdot 0,5 \cdot y = 2 + x + \frac{2}{x}$, với $(x > 0)$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} (S(x) - (x + 2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$.

Suy ra đồ thị hàm số $S(x)$ có đường tiệm cận xiên là $y = x + 2 \Rightarrow a = 1; b = 2$.

Vậy $P = a^2 + b^2 = 5$.

Bài 37. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng 144m^2 . Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là $x(\text{m})$. Gọi $P(x)$ (mét) là biểu thức tính chu vi của mảnh vườn. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $P(x)$.

Hướng dẫn giải. Ta có độ dài một cạnh của mảnh vườn là $x(\text{m})$ nên độ dài cạnh còn lại của mảnh vườn là $\frac{144}{x}(\text{m})$.

Vậy chu vi của mảnh vườn là $P(x) = 2 \left(x + \frac{144}{x} \right) = 2x + \frac{72}{x}$.

◇ Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2x + \frac{72}{x} \right) = +\infty$.

Tương tự, $\lim_{x \rightarrow 0^-} P(x) = -\infty$.

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 0$.

◇ Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} [P(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{72}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [P(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{72}{x} = 0. \end{cases}$

Vậy đồ thị hàm số $P(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = 2x$.

Bài 38. Một mảnh đất hình thang vuông có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ, có diện tích là $S = 24$ (m^2). Gọi $x(\text{m})$ là độ dài đáy nhỏ và $P(x)$ là chu vi mảnh đất đó. Tìm số tiệm cận của $P(x)$.

Hướng dẫn giải. Gọi x là độ dài đáy nhỏ của hình thang ($x > 0$).

Ta có độ dài đáy lớn là $2x$.

Chiều cao của hình thang là $h = \frac{2S}{x + 2x} = \frac{16}{x}$.

Độ dài cạnh còn lại của hình thang là $\sqrt{x^2 + \left(\frac{16}{x} \right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}}$.

Khi đó $P(x) = x + \frac{16}{x} + 2x + \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} = 3x + \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} + \frac{16}{x}$ (tập xác định $\mathcal{D} = (0; +\infty)$).

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[3x + \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} + \frac{16}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[3 + \sqrt{1 + \frac{256}{x^4}} + \frac{16}{x^2} \right] = +\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} [3x^2 + \sqrt{x^4 + 256} + 16] = +\infty$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là trục Oy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (P(x) - 4x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} - x + \frac{16}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{256}{x^2 \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} + x} + \frac{16}{x^2} \right] = 0.$$

Khi đó đồ thị hàm số có 1 tiệm cận xiên $y = 4x$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

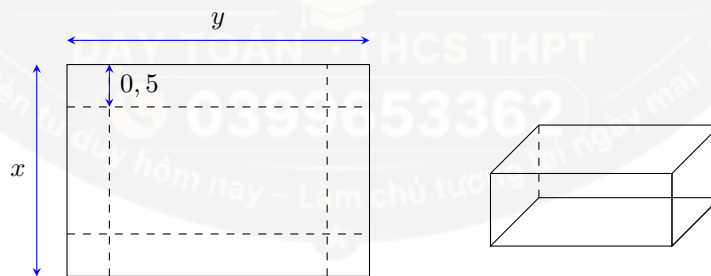
Bài 39. Số lượng sản phẩm bán được của một cửa hàng quần áo trong t (tháng) được cho bởi công thức: $S(t) = 200 \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{2+t} \right)$ với $t \geq 1$. Xem $y = S(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số có dạng $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) = 1$. Tính $P = a - 2b$.

Hướng dẫn giải.

$$\text{Ta có: } \lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 200 \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{2+t} \right) = 200 \cdot \frac{2}{3} = \frac{400}{3} \Rightarrow a = 400; b = 3.$$

$$\text{Vậy } P = a - 2b = 400 - 6 = 394.$$

Bài 40. Từ một tấm tôn hình chữ nhật có các kích thước là $x(m)$, $y(m)$ với $x > 1$ và $y > 1$ và diện tích bằng $4m^2$, người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gập thành một cái thùng dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có chiều cao bằng $0,5m$. Thể tích của thùng là hàm số $V(x)$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{V(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



Hướng dẫn giải.

$$\text{Do tấm tôn có diện tích bằng } 4m^2 \text{ nên } xy = 4 \Leftrightarrow y = \frac{4}{x}.$$

Thùng có chiều cao là $0,5m$ và các kích thước còn lại của thùng là: $x - 1$ và $y - 1$.

$$\text{Thể tích của thùng là } V(x) = 0,5 \cdot (x - 1)(y - 1) = \frac{1}{2}(x - 1) \left(\frac{4}{x} - 1 \right) = \frac{(x - 1)(4 - x)}{2x}.$$

Suy ra: $y = \frac{1}{V(x)} = \frac{2x}{(x-1)(4-x)}$.

Ta có:

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{V(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{(x-1)(4-x)} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{V(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{(x-1)(4-x)} = -\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{V(x)} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x}{(x-1)(4-x)} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{V(x)} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x}{(x-1)(4-x)} = +\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x = 4$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{V(x)}$ có 2 đường tiệm cận đứng.

Bài 41. Cho hàm số $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 - 3x}$. Tìm số đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Hướng dẫn giải.

Hàm số xác định và liên tục trên $D = (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$.

Ta có:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 - 3x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \sqrt{1 - \frac{3}{x}} \right) = 1.$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{x^2 - 3x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 3x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x + \sqrt{x^2 - 3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{1 + \sqrt{1 - \frac{3}{x}}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow y = x + \frac{3}{2}$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow +\infty$.

Mặt khác:

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 - 3x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \sqrt{1 - \frac{3}{x}} \right) = 3.$$

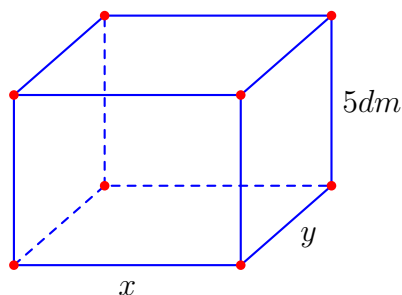
$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - \sqrt{x^2 - 3x} - 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - \sqrt{x^2 - 3x}) \\ &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 3x}) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x - \sqrt{x^2 - 3x}} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{1 + \sqrt{1 - \frac{3}{x}}} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow y = 3x - \frac{3}{2}$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow -\infty$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận xiên.

Bài 42. Người ta muốn làm một cái bể dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có thể tích bằng $1m^3$. Chiều cao của bể là $5dm$, các kích thước khác là $x(m), y(m)$ với $x > 0$ và $y > 0$. Diện tích toàn phần của bể (không kể nắp) là hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Đường tiệm cận

xiên của đồ thị hàm số $S(x)$ là đường thẳng $y = ax + b$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.



Hướng dẫn giải.

Đổi $5dm = 0,5m$.

Do thể tích của bể là $1m^3$ nên $0,5xy = 1 \Leftrightarrow xy = 2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{x}$.

Diện tích toàn phần của bể (không nắp) là:

$$S(x) = xy + 2 \cdot 0,5 \cdot x + 2 \cdot 0,5 \cdot y = 2 + x + \frac{2}{x}, \quad (x > 0)$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (S(x) - (x + 2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$.

Suy ra đồ thị hàm số $S(x)$ có đường tiệm cận xiên là $y = x + 2$.

Từ đó ta có $a = 1; b = 2$.

Vậy $P = a^2 + b^2 = 1^2 + 2^2 = 5$.

Bài 43. Giả sử dân số của một huyện sau t năm kể từ năm 2024 được mô tả bởi hàm số $f(t) = \frac{20t + 5}{t + 2}$, $t \geq 0$ (nghìn người). Dân số của huyện đó luôn tăng nhưng không vượt quá bao nhiêu nghìn người?

Hướng dẫn giải.

$$\text{Ta có } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20t + 5}{t + 2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20 + \frac{5}{t}}{1 + \frac{2}{t}} = 20.$$

Vậy dân số của huyện đó không vượt quá 20 (nghìn người).

Bài 44. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước lượng chi phí cần bỏ ra là $C(x) = \frac{400x + 10}{100 - x}$ (triệu đồng), $0 < x < 100$. Tìm đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(x)$.

Hướng dẫn giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 100^-} C(x) = \lim_{x \rightarrow 100^-} \frac{400x + 10}{100 - x} = +\infty.$$

Vậy đường thẳng $x = 100$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(x)$.

Bài 45. Một công ty sản xuất đồ chơi ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 2x^2 + x + 25$ (nghìn đồng). Gọi $f(x)$ là chi phí sản xuất trung bình mỗi sản phẩm. Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$ có dạng $y = ax + b$, coi $x \in [0; +\infty)$. Tính $T = a + 2b$.

Hướng dẫn giải.

Chi phí để sản xuất trung bình một sản phẩm là $f(x) = \frac{2x^2 + x + 25}{x} = 2x + 1 + \frac{25}{x}$ (nghìn đồng).

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{25}{x} = 0.$$

Vậy đường thẳng $y = 2x + 1$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$.

$$\Rightarrow a = 2, b = 1 \Rightarrow T = a + 2b = 2 + 2(1) = 4.$$

Bài 46. Một bể chứa 6000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 25 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Giả sử sau t phút, tỉ số giữa khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể (đơn vị gam/lít) là một hàm $f(t)$. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$, coi $t \in [0; +\infty)$.

Hướng dẫn giải.

Sau t phút khối lượng muối trong bể là $25 \cdot 20 \cdot t = 500t$ (gam).

Thể tích của bể sau t phút là $6000 + 20t$ (lít).

$$\text{Khi đó } f(t) = \frac{500t}{6000 + 20t} = \frac{25t}{300 + t} \text{ (gam/lít)}.$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25t}{300 + t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{\frac{300}{t} + 1} = 25.$$

Vậy đường thẳng $y = 25$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$.

Bài 47. Một mảnh đất hình thang vuông có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ, có diện tích là $S = 24(m^2)$. Gọi $x(m)$ là độ dài đáy nhỏ và $P(x)$ là chu vi mảnh đất đó. Tìm số tiệm cận của $P(x)$.

Hướng dẫn giải.

Gọi x là độ dài đáy nhỏ của hình thang ($x > 0$). Ta có đáy lớn là $2x$.

$$\text{Chiều cao của hình thang là } h = \frac{2S}{x + 2x} = \frac{48}{3x} = \frac{16}{x}.$$

$$\text{Độ dài cạnh còn lại của hình thang là } \sqrt{x^2 + \left(\frac{16}{x}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}}.$$

$$\text{Khi đó } P(x) = x + \frac{16}{x} + 2x + \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} = 3x + \frac{16}{x} + \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} \text{ (tập xác định } D = (0; +\infty)).$$

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[3x + \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} + \frac{16}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[3 + \sqrt{1 + \frac{256}{x^4}} + \frac{16}{x^2} \right] = +\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[3x + \sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} + \frac{16}{x} \right] = +\infty$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là trục Oy .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (P(x) - 4x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} - x + \frac{16}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\frac{256}{x^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{256}{x^2}} + x} + \frac{16}{x} \right] = 0.$$

Khi đó đồ thị hàm số có 1 tiệm cận xiên $y = 4x$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Bài 48. Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí được cho bởi $C(x) = x^2 - 2000x + 10^8$ đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường có phương trình dạng $y = ax + b$. Tính $T = 25a + b$.

Hướng dẫn giải.

Theo giả thiết, ta có:

$$T(x) = C(x) + 4000x = x^2 + 2000x + 10^8.$$

$$M(x) = \frac{T(x)}{x} = x + 2000 + \frac{10^8}{x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (M(x) - (x + 2000)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10^8}{x} = 0.$$

Khi đó đồ thị hàm số có 1 tiệm cận xiên $y = x + 2000$.

$$\Rightarrow a = 1, b = 2000.$$

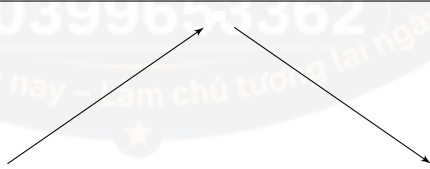
$$\text{Vậy } T = 25a + b = 25(1) + 2000 = 2025.$$

Bài 49. Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t (giây) là khoảng thời gian từ lúc bắt đầu chuyển động và $s(t)$ (m) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vật chuyển động nhanh dần hay chậm dần?

Hướng dẫn giải. Vận tốc chuyển động của vật được xác định theo công thức: $v(t) = s'(t) = -6t^2 + 48t + 9$.

Ta có $v'(t) = -12t + 48$; $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$.

Từ đó ta có bảng biến thiên:

t	0	4	10	
$v'(t)$		+	0	-
$v(t)$				

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy: Từ thời điểm bắt đầu chuyển động đến thời điểm $t = 4$ giây, vật chuyển động nhanh dần. Từ thời điểm $t = 4$ giây đến thời điểm $t = 10$ giây, vật chuyển động chậm dần.

Bài 50. Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm được tính theo công thức $V(t) = \frac{1}{100} \left(30t^3 - \frac{t^4}{4} \right)$ với $0 \leq t \leq 90$. Tốc độ bơm nước ở thời điểm t được tính theo công thức $v(t) = V'(t)$. Tìm thời điểm tốc độ bơm nước là lớn nhất và tính tốc độ bơm nước lớn nhất đó.

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

Hướng dẫn giải. Ta có $v(t) = V'(t) = \frac{1}{100}(90t^2 - t^3)$.

$$v'(t) = \frac{1}{100}(180t - 3t^2).$$

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 60 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

t	0	60	90	
$v'(t)$	0	+	0	-
$v(t)$	1080			

Từ bảng biến thiên ta thấy: Tốc độ bơm nước lớn nhất bằng 1080, tại thời điểm $t = 60$ phút.

Bài 51. Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả số lượng cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ thuộc khoảng nào dưới đây để cân nặng trung bình của số cá đó tăng?

Hướng dẫn giải. Sau một vụ, số cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ có cân nặng trung bình là:

$$f(n) = nP(n) = 480n - 20n^2 \text{ (gam)}.$$

$$f'(n) = 480 - 40n = 0 \Leftrightarrow n = 12.$$

Bảng biến thiên:

n	0	12	$+\infty$
$f'(n)$	+	0	-
$f(n)$	$f(12)$		
			

Từ bảng biến thiên, suy ra trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ, số cá cần thả trong khoảng $(0; 12)$.

Bài 52. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$, $t = 0, 1, 2, \dots, 25$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0; 25]$ thì đạo hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Xác định khoảng thời gian mà tốc độ truyền bệnh giảm?

Hướng dẫn giải. $f'(t) = 90t - 3t^2$; $f''(t) = 90 - 6t$, $f''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 15$.

Bảng biến thiên:

t	0	15	25
$f''(t)$	+	0	-
$f'(t)$	675		
	$\nearrow$		$\searrow$

Vậy khoảng thời gian $(15; 25)$ ngày thì tốc độ truyền bệnh giảm.

Bài 53. Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ của không khí vào khí quản. Tốc độ của

không khí đi vào khí quản khi ho được cho bởi công thức

$$V = k(R - r)r^2 \text{ với } 0 \leq r < R,$$

trong đó k là hằng số, R là bán kính bình thường của khí quản, r là bán kính khí quản khi ho (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014). Hỏi bán kính của khí quản khi ho bằng bao nhiêu thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất?

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $V(r) = k(R - r)r^2 = kRr^2 - kr^3$ với $0 \leq r < R$.

Ta có $V'(r) = 2kRr - 3kr^2$.

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow 2kRr - 3kr^2 = 0 \Leftrightarrow kr(2R - 3r) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \text{ (nhận)} \\ r = \frac{2}{3}R \text{ (nhận)} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $V(r)$ như sau:

r	0	$\frac{2R}{3}$	R
$V'(r)$	+	0	-
$V(r)$	0	$V\left(\frac{2R}{3}\right)$	0

Dựa vào bảng biến thiên trên, ta thấy hàm số $V(r)$ đạt giá trị lớn nhất tại $r = \frac{2}{3}R$.

Vậy khi $r = \frac{2}{3}R$ thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất.

Bài 54. Giám đốc một nhà hát A đang phân vân trong việc xác định mức giá vé xem các chương trình được trình chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng nó sẽ quyết định nhà hát thu được bao nhiêu lợi nhuận từ các buổi trình chiếu. Theo những cuốn sổ ghi chép của mình, ông ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 20 USD/người thì trung bình có 1000 người đến xem. Nhưng nếu tăng thêm 1 USD/người thì sẽ mất 100 khách hàng hoặc giảm đi 1 USD/người thì sẽ có thêm 100 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 2 USD lợi nhuận cho nhà hát trong các dịch vụ đi kèm. Hãy giúp giám đốc nhà hát này xác định xem cần tính giá vé vào cửa là bao nhiêu để thu nhập là lớn nhất.

Hướng dẫn giải. Gọi giá vé sau khi điều chỉnh là $20 + x$ (ĐK: $x > -20$).

Số khách là: $1000 - 100x$.

Tổng thu nhập:

$$f(x) = (20 + x + 2)(1000 - 100x) = (22 + x)(1000 - 100x) = -100x^2 - 1200x + 22000.$$

Bảng biến thiên:

x	-20	-6	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(-20)$	$f(-6)$	$-\infty$

$\max_{(-20; +\infty)} f(x) = f(-6)$. Suy ra giá vé là: $x + 20 = 20 - 6 = 14$ USD.

Bài 55. Nhà sản xuất dự định sử dụng hết 6 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

hộp chữ nhật không nắp, có đáy là hình vuông (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Tìm các kích thước của bể cá để bể cá có dung tích là lớn nhất?

Hướng dẫn giải. Gọi x, y lần lượt là cạnh đáy và chiều cao của bể cá (điều kiện $x, y > 0$).

Ta có thể tích bể cá $V = x^2 y$.

Theo đề bài ta có: $4xy + x^2 = 6 \Leftrightarrow y = \frac{6 - x^2}{4x}$ (Điều kiện $y > 0 \Leftrightarrow 6 - x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < \sqrt{6}$).

Khi đó: $V = x^2 \cdot \frac{6 - x^2}{4x} = \frac{6x - x^3}{4} \Rightarrow V' = \frac{6 - 3x^2}{4}$.

$V' = 0 \Leftrightarrow 6 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ (vì $x > 0$).

Ta có bảng biến thiên:

x	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$
V'	+	0	-
V	0	$\sqrt{2}$	0

Suy ra $V_{\max} = \sqrt{2}$ tại $x = \sqrt{2}; y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy bể cá có kích thước là cạnh đáy là $\sqrt{2}$, chiều cao là $\frac{1}{\sqrt{2}}$ thì dung tích là lớn nhất.

Bài 56. Một người bán gạo muốn đóng một thùng tôn đựng gạo có thể tích không đổi bằng $10 m^3$, thùng tôn hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông, không nắp. Trên thị trường, giá tôn làm đáy thùng là $90000/m^2$ và giá tôn làm thành xung quanh thùng là $40000/m^2$. Hỏi người bán gạo đó cần đóng thùng đựng gạo với cạnh đáy bằng bao nhiêu để chi phí mua nguyên liệu là nhỏ nhất?

Hướng dẫn giải. Gọi chiều dài cạnh đáy hình vuông và chiều cao của thùng đựng gạo lần lượt là $x, y (m); (x > 0, y > 0)$.

Ta có thể tích của thùng là: $V = x^2 y = 10 \Rightarrow y = \frac{10}{x^2}$.

Diện tích đáy hình hộp là x^2 và diện tích xung quanh là $4xy$ nên chi phí để làm thùng tôn là:

$$f(x) = 90000x^2 + 4 \cdot 40000xy = 90000x^2 + 160000x \cdot \frac{10}{x^2} = 90000x^2 + \frac{1600000}{x}.$$

Trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có $f'(x) = 180000x - \frac{1600000}{x^2}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 180000x^3 = 1600000 \Leftrightarrow x^3 = \frac{80}{9} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{9}}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	$\frac{2\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{9}}$	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$			$120000\sqrt[3]{900}$	$+\infty$

Vậy chi phí nhỏ nhất bằng $120000\sqrt[3]{900}$ đồng khi và chỉ khi cạnh đáy hình hộp bằng $\frac{2\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{9}}$.

Bài 57. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể sau t giờ được cho bởi công thức $c(t) = \frac{2t}{t^2 + 1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $c(t) = \frac{2t}{t^2 + 1}$, ($t > 0$).

$$c'(t) = \frac{2(t^2 + 1) - 2t(2t)}{(t^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2t^2}{(t^2 + 1)^2}.$$

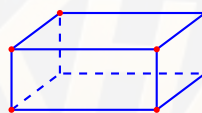
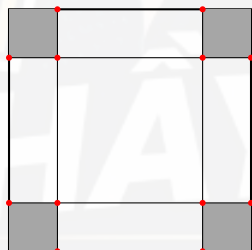
$$c'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

t	0	1	$+\infty$
$c'(t)$	+	0	-
$c(t)$	0	1	0

Sau 1 giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất.

Bài 58. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 40 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất?



Hướng dẫn giải. Ta có: $h = x$ (cm) là chiều cao của hình hộp.

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là: $40 - 2x$ (cm).

Vậy diện tích đáy hình hộp $S = (40 - 2x)^2$ (cm^2).

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x > 0 \\ 40 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 20 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 20).$$

Thể tích của hình hộp là: $V = S \cdot h = x \cdot (40 - 2x)^2$.

Xét hàm số: $y = x \cdot (40 - 2x)^2$ trên khoảng $(0; 20)$.

Ta có: $y' = (40 - 2x)^2 - 4x(40 - 2x) = (40 - 2x)(40 - 2x - 4x) = (40 - 2x)(40 - 6x)$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \text{ (L)} \\ x = \frac{20}{3} \text{ (N)} \end{cases}.$$

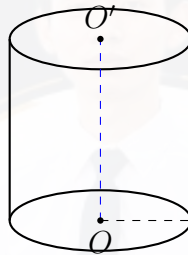
Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{20}{3}$	20
y'	+	0	-
y	0	$\frac{128000}{27}$	0

Vậy $x = \frac{20}{3}$ thì thể tích khối hộp là lớn nhất.

Bài 59. Khi sản xuất vỏ lon sữa bia hình trụ, các nhà sản xuất luôn đặt tiêu chí sao cho chi phí sản xuất vỏ lon là nhỏ nhất. Hỏi khi nhà sản xuất muốn thể tích của hộp sữa là $V \text{ cm}^3$, thì diện tích toàn phần của lon sữa nhỏ nhất bằng bao nhiêu?



Hướng dẫn giải. Ta có: $V = \pi r^2 h \Rightarrow h = l = \frac{V}{\pi r^2}$.

Diện tích toàn phần của lon sữa:

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{2d} = 2\pi r l + 2\pi r^2 = 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2.$$

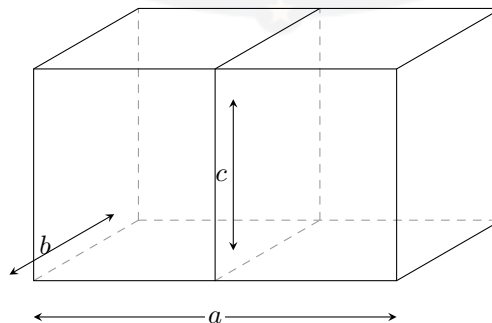
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si (AM-GM), ta có:

$$\frac{2V}{r} + 2\pi r^2 = \frac{V}{r} + \frac{V}{r} + 2\pi r^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r} \cdot 2\pi r^2} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2} = 6\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{4}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{V}{r} = 2\pi r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Vậy diện tích toàn phần của lon sữa nhỏ nhất bằng $6\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{4}}$ khi $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Bài 60. Người ta cần làm một cái bể cá có hai ngăn, không có nắp ở phía trên với thể tích $1,296 \text{ m}^3$. Người ta cắt các tấm kính ghép lại một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật (hình vẽ minh họa) với ba kích thước là a, b, c . Người ta phải thiết kế các kích thước là bao nhiêu để đỡ tốn kính nhất (giả sử độ dày của kính không đáng kể). Khi đó hãy tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.



Hướng dẫn giải. Thể tích bể cá là $V = abc = 1,296$.

Kể cả miếng kính ở giữa, diện tích tổng các miếng kính là $S = ab + 2ac + 3bc$.

$$\text{Suy ra } \frac{S}{V} = \frac{S}{1,296} = \frac{ab + 2ac + 3bc}{abc} = \frac{1}{c} + \frac{2}{b} + \frac{3}{a}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 3 số $\frac{1}{c}; \frac{2}{b}; \frac{3}{a}$ ta có:

$$\frac{1}{c} + \frac{2}{b} + \frac{3}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{c} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{3}{a}} = 3\sqrt[3]{\frac{6}{1,296}} = 5$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$\begin{cases} abc = 1,296 \\ \frac{1}{c} = \frac{2}{b} = \frac{3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1,8 \\ b = 1,2 \\ c = 0,6 \end{cases}$$

Vậy để đỡ tốn kính nhất thì $a = 1,8\text{m}; b = 1,2\text{m}; c = 0,6\text{m}$.

Khi đó $T = a + b + c = 1,8 + 1,2 + 0,6 = 3,6$.

Bài 61. Công ty truyền hình cáp Vista hiện có 100 000 thuê bao. Mỗi thuê bao đang trả cước thuê bao 40\$/tháng. Một cuộc khảo sát cho thấy cứ mỗi lần giảm 0,25\$ cước thuê bao, công ty có thể có thêm 1 000 thuê bao. Để doanh thu thu được là tối đa, công ty cần xác định mức cước thuê bao mỗi tháng là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Gọi x là số lần giảm 0,25\$. Cước thuê bao hàng tháng lúc này là $40 - 0,25x$ với $0 \leq x \leq 160$ (do mức cước không thể âm), và số thuê bao mới là $1 000x$.

Do đó, tổng số thuê bao là $100 000 + 1 000x$.

Hàm doanh thu được cho bởi $R = (\text{số thuê bao}) \times (\text{cước mỗi thuê bao trả})$

$$R = (100 000 + 1 000x)(40 - 0,25x) = 1 000(100 + x)(40 - 0,25x) = 1 000(4 000 + 15x - 0,25x^2)$$

Đạo hàm $R' = 0$, ta được $R' = 1 000(15 - 0,5x) = 0 \Leftrightarrow x = 30$.

Vì tập xác định của R là khoảng đóng $[0; 160]$ nên R đạt cực đại tại $x = 30$ hoặc tại các điểm đầu mút của đoạn $[0; 160]$.

Ta có: $R(0) = 4 000 000$; $R(30) = 4 225 000$; $R(160) = 0$.

Vậy doanh thu tối đa khi $x = 30$. Điều này tương ứng với 30 lần giảm 0,25\$, tức là cước thuê bao hàng tháng là $40\$ - 7,5\$ = 32,5\$$.

Số thuê bao tại mức cước này là $100 000 + 30 \cdot (1 000) = 130 000$.

Bài 62. Một bài báo trong tạp chí xã hội học phát biểu rằng nếu một chương trình chăm sóc sức khỏe đặc biệt cho người già được khởi xướng, thì t năm sau khi nó được khởi động, n ngàn người già có thể trực tiếp nhận được các phúc lợi, trong đó $n = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 32t$ ($0 \leq t \leq 12$). Với giá trị nào của t thì số người nhận phúc lợi tối đa là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Đạo hàm $n'(t) = 0$ ta có $n'(t) = t^2 - 12t + 32 = 0 \Leftrightarrow (t-4)(t-8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = 8 \end{cases}$.

Vì tập xác định của n là một khoảng đóng $[0; 12]$ nên n đạt cực đại tuyệt đối tại $t = 0, t = 4, t = 8$ hoặc $t = 12$:

$$\diamond n(0) = \frac{0^3}{3} - 6(0^2) + 32 \cdot 0 = 0;$$

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

$$\diamond n(4) = \frac{4^3}{3} - 6(4^2) + 32 \cdot 4 = \frac{160}{3};$$

$$\diamond n(8) = \frac{8^3}{3} - 6(8^2) + 32 \cdot 8 = \frac{128}{3};$$

$$\diamond n(12) = \frac{12^3}{3} - 6(12^2) + 32 \cdot 12 = \frac{288}{3} = 96.$$

Do đó n đạt cực đại khi $t = 12$ (năm).

Bài 63. Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng tennis. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ. Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí hoạt động là thấp nhất?

Hướng dẫn giải. Gọi số máy móc công ty sử dụng để sản xuất là x ($x \in \mathbb{N}, x > 0$).

Thời gian cần để sản xuất hết 8000 quả bóng là: $\frac{8000}{30x}$.

Tổng chi phí để sản xuất là: $P(x) = 200x + \frac{8000}{30x} \cdot 192 = 200x + \frac{51200}{x}$.

Ta có: $P'(x) = 200 - \frac{51200}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 256 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16 \\ x = -16 \text{ (loại)} \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	0	16	$+\infty$
$P'(x)$		– 0 +	
$P(x)$	$+\infty$	6400	$+\infty$

Vậy công ty nên sử dụng 16 máy để chi phí hoạt động là thấp nhất.

Bài 64. Công ty X cần vận chuyển hàng đến một địa điểm cách công ty 100 dặm. Chi phí trên mỗi chuyến hàng mà công ty phải trả bao gồm chi phí nhiên liệu và chi phí thuê tài xế. Khi xe chở hàng di chuyển với tốc độ x dặm/giờ thì chi phí nhiên liệu (tính bằng USD) trên mỗi dặm đường được cho bởi công thức $C(x) = \frac{1}{5} \left(\frac{64}{x} + \frac{9}{100}x \right)$. Ngoài ra, giá thuê tài xế là 16 USD mỗi giờ lái xe. Biết rằng tốc độ di chuyển của xe chở hàng không được phép vượt quá 50 dặm/giờ. Hỏi chi phí nhỏ nhất mà công ty đó phải trả trên mỗi chuyến hàng là bao nhiêu USD?

Hướng dẫn giải. Gọi x là tốc độ di chuyển của xe chở hàng ($0 < x \leq 50$, dặm/giờ).

Thời gian để xe đi hết quãng đường 100 dặm là: $t = \frac{100}{x}$ (giờ).

Tổng chi phí thuê tài xế cho một chuyến hàng là: $16 \cdot \frac{100}{x} = \frac{1600}{x}$ (USD).

Tổng chi phí nhiên liệu cho quãng đường 100 dặm là:

$$100 \cdot C(x) = 100 \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{64}{x} + \frac{9}{100}x \right) = 20 \left(\frac{64}{x} + \frac{9}{100}x \right) = \frac{1280}{x} + \frac{9x}{5} \text{ (USD)}.$$

Tổng chi phí $f(x)$ mà công ty phải trả trên mỗi chuyến hàng là:

$$f(x) = \frac{1600}{x} + \frac{1280}{x} + \frac{9x}{5} = \frac{2880}{x} + \frac{9x}{5} \text{ với } x \in (0; 50].$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{2880}{x} + \frac{9x}{5}$ trên nửa khoảng $(0; 50]$:

$$f'(x) = -\frac{2880}{x^2} + \frac{9}{5}.$$

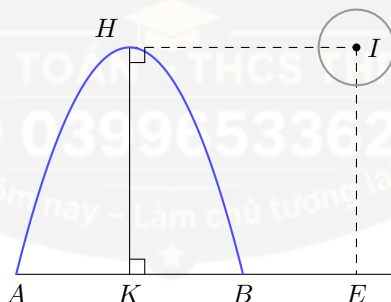
$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{5} = \frac{2880}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = 1600 \Leftrightarrow x = 40 \text{ (thỏa mãn } x \in (0; 50]).$$

Bảng biến thiên của hàm số trên $(0; 50]$:

x	0	40	50		
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$		144		147,6

Vậy chi phí nhỏ nhất mà công ty phải trả trên mỗi chuyến hàng là 144 USD khi xe di chuyển với tốc độ 40 dặm/giờ.

Bài 65. Khi dạo chơi trong một công viên bạn An đi chuyển trên cầu cong có hình parabol, bạn Lan đi chuyển trên bờ hồ đường tròn (minh họa bằng hình vẽ dưới đây). Khoảng cách giữa hai chân cầu parabol là $AB = 30$ m, đỉnh H của parabol cách đường thẳng AB một khoảng $HK = 30$ m, khoảng cách từ tâm I của đường tròn đến đường thẳng AB và HK lần lượt là $IE = 30$ m và $IH = 30$ m. Tính khoảng cách nhỏ nhất giữa hai bạn An và Lan, biết rằng đường tròn có bán kính bằng 3 m (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Hướng dẫn giải. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $K \equiv O(0; 0)$, AB nằm trên trục hoành, HK nằm trên trục tung.

Tọa độ các điểm khi đó là: $A(-15; 0)$, $B(15; 0)$, $H(0; 30)$, $K(0; 0)$.

Phương trình parabol (P) có đỉnh $H(0; 30)$ và đi qua điểm $B(15; 0)$ là:

$$y = ax^2 + 30 \Rightarrow 0 = a \cdot 15^2 + 30 \Rightarrow a = -\frac{2}{15}.$$

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

Vậy $(P) : y = -\frac{2}{15}x^2 + 30$ với $x \in [-15; 15]$.

Tâm đường tròn là $I(30; 30)$ (do $IH = 30$ m và $IE = 30$ m), bán kính $R = 3$ m.

Gọi $M(x; y) \in (P)$ là vị trí của bạn An và N là vị trí của bạn Lan trên đường tròn.

Khoảng cách nhỏ nhất giữa An và Lan là $d = \min(MI) - R$.

Ta có $MI^2 = (x - 30)^2 + (y - 30)^2 = (x - 30)^2 + \left(-\frac{2}{15}x^2\right)^2 = \frac{4}{225}x^4 + x^2 - 60x + 900$.

Đặt $f(x) = \frac{4}{225}x^4 + x^2 - 60x + 900$ trên đoạn $[-15; 15]$.

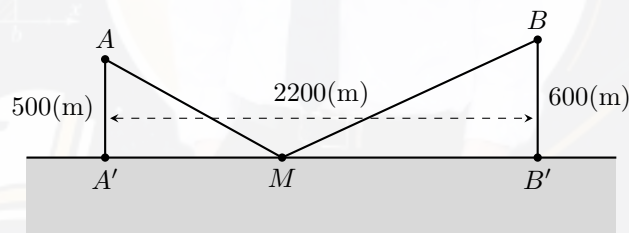
$$f'(x) = \frac{16}{225}x^3 + 2x - 60.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x^3 + 225x - 6750 = 0 \Leftrightarrow x \approx 8,44.$$

Khi đó $f(8,44) \approx 555,14 \Rightarrow MI \approx \sqrt{555,14} \approx 23,56$ m.

Vậy khoảng cách nhỏ nhất giữa hai bạn là: $d \approx 23,56 - 3 = 20,56 \approx 20,6$ m.

Bài 66. Có hai xã A, B cùng ở một bên bờ sông. Khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 500$ m, $BB' = 600$ m. Người ta đo được $A'B' = 2200$ m như hình vẽ dưới đây. Các kỹ sư muốn xây dựng một trạm cung cấp nước sạch nằm cạnh bên bờ sông cho người dân của hai xã sử dụng. Để tiết kiệm chi phí, các kỹ sư phải chọn một vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn $A'B'$ sao cho tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó.



Hướng dẫn giải. Đặt $A'M = x$ ($0 < x < 2200$), khi đó $B'M = 2200 - x$.

Ta có $AM = \sqrt{x^2 + 500^2}$, $BM = \sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}$.

Tổng khoảng cách là: $f(x) = \sqrt{x^2 + 500^2} + \sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}$.

$$\text{Đạo hàm: } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 500^2}} - \frac{2200 - x}{\sqrt{(2200 - x)^2 + 600^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 + 500^2} = \frac{(2200 - x)^2}{(2200 - x)^2 + 600^2} \Rightarrow x = 1000.$$

Bảng biến thiên:

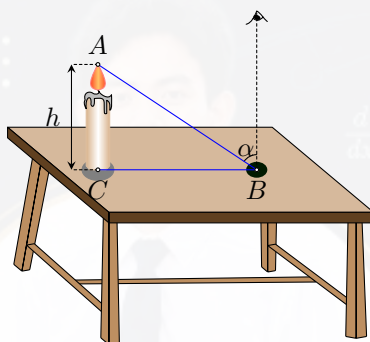
x	0	1000	2200
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	2780	2460	2856

Giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách là 2460 m khi M cách A' một đoạn 1000 m.

Bài 67.

Trong quang học, chúng ta biết định luật quang học về độ chiếu sáng. Nó được phát biểu như sau: Khi một nguồn sáng chiếu lên một mặt phẳng, độ chiếu sáng từ nguồn sáng A đến một điểm B cho bởi công thức $T = \frac{i \cos \alpha}{AB^2}$, trong đó i là độ phát sáng của nguồn A , α là góc phản xạ của ánh sáng lên người quan sát (coi rằng người quan sát nhìn thẳng xuống mặt bàn, tham khảo hình vẽ bên).

Một đồng xu được đặt cách ngọn nến một khoảng $BC = 30$ cm. Hỏi ngọn lửa của cây nến nên đặt ở độ cao h bằng bao nhiêu để chiếu sáng rõ nhất đồng tiền xu nằm trên bàn (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?



Hướng dẫn giải. Đặt $AC = h$ (là khoảng cách từ chỗ nến cháy đến mặt bàn).

$$\text{Suy ra } AB = \sqrt{h^2 + 30^2} = \sqrt{h^2 + 900}.$$

$$\cos \alpha = \frac{h}{AB} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + 900}}.$$

Khi đó độ chiếu sáng

$$T = \frac{i \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + 900}}}{h^2 + 900} = i \cdot \frac{h}{\sqrt{(h^2 + 900)^3}} = i \cdot f(h).$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số, ta được

$$h^2 + 900 = h^2 + 450 + 450 \geq 3\sqrt[3]{h^2 \cdot 450 \cdot 450} \Rightarrow (h^2 + 900) \geq 27h^2 \cdot 202500.$$

$$\text{Do đó } T \leq i \cdot \frac{h}{\sqrt{27h^2 \cdot 202500}} \Leftrightarrow T \leq \frac{i}{1350\sqrt{3}}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } h^2 = 450 \Leftrightarrow h = \sqrt{450} \approx 21,2.$$

Bài 68. Bác An muốn xây dựng một chuồng nuôi chim bồ câu có dạng khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Từ số tiền đã chuẩn bị để mua vật liệu và dựa vào không gian sẵn có để xây dựng chuồng nuôi, bác An dự kiến xây dựng chuồng có tổng diện tích của tất cả các mặt là 36 m^2 , độ dài đường chéo AC' bằng 6 m. Với những điều kiện đó, chuồng được xây dựng tối ưu nếu thể tích chuồng lớn nhất. Hãy giúp bác An tính xem giá trị tối ưu đó của thể tích chuồng nuôi đó bằng bao nhiêu mét khối (*kết quả được làm tròn đến chữ số hàng phần chục*)?

Hướng dẫn giải. Đặt a, b, c là kích thước của khối hộp thì ta có

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 36 \\ 2(ab + bc + ac) = 36 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 36 \\ 2(ab + bc + ac) = 36 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (a + b + c)^2 = 72 \\ ab + bc + ca = 18 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a + b + c = 6\sqrt{2} \\ ab + bc + ca = 18 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} b + c = 6\sqrt{2} - a \\ bc = 18 - a(b + c) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} b + c = 6\sqrt{2} - a \\ bc = 18 - a(6\sqrt{2} - a). \end{cases} \end{aligned}$$

Do $(b + c)^2 \geq 4bc$ nên suy ra

$$(6\sqrt{2} - a)^2 \geq 4[18 - a(6\sqrt{2} - a)] \Leftrightarrow 3a^2 - 12\sqrt{2}a \leq 0 \Rightarrow 0 < a \leq 4\sqrt{2}.$$

Do đó

$$V = abc = a[18 - a(6\sqrt{2} - a)] = a^3 - 6\sqrt{2}a^2 + 18a.$$

Xét hàm số $f(a) = a^3 - 6\sqrt{2}a^2 + 18a$ trên khoảng $(0; 4\sqrt{2}]$.

Ta có $f'(a) = 3a^2 - 12\sqrt{2}a + 18$.

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4\sqrt{2}a + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3\sqrt{2} \\ a = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

a	0	$\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$		
$f'(a)$		+	0	-	0	+
$f(a)$	0	$8\sqrt{2}$	0	$8\sqrt{2}$		

Dựa vào bảng biến thiên, giá trị lớn nhất của V là $8\sqrt{2}$ khi

$$\diamond a = \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} b + c = 5\sqrt{2} \\ bc = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \sqrt{2}; c = 4\sqrt{2} \\ b = 4\sqrt{2}; c = \sqrt{2}. \end{cases}$$

$$\diamond a = 4\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} b + c = 2\sqrt{2} \\ bc = 2 \end{cases} \Rightarrow b = c = \sqrt{2}.$$

Vậy thể tích chuồng nuôi lớn nhất là $V = 8\sqrt{2} \approx 11,3 \text{ m}^3$.

Bài 69. Anh Nam có một cái ao diện tích 50 m^2 để nuôi cá diêu hồng. Vụ vừa qua, anh nuôi với mật độ 40 con/m^2 và thu được 3 tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình anh thấy cứ thả giảm đi 8 con/m^2 thì mỗi con cá thành phẩm tăng thêm $0,5 \text{ (kg)}$. Để tổng năng suất cao nhất thì vụ tới anh Nam nên mua bao nhiêu cá giống để thả? (Giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi)

Hướng dẫn giải. Số cá anh Nam nuôi vụ vừa qua là: 2000 (con)

Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phẩm là $\frac{3000}{2000} = 1,5 \text{ (kg/con)}$

Gọi x ($x > 0$) (con/m^2) là số cá mà anh Nam thả ít đi trong vụ tới, ta thấy:

Giảm 8 (con/m^2) khối lượng cá thành phẩm tăng $0,5 \text{ kg/con}$

Giảm x (con/m^2) khối lượng cá thành phẩm tăng $0,0625x \text{ kg/con}$

Vậy tổng sản lượng cá thu được là: $f(x) = (2000 - 50x)(1,5 + 0,0625x)$

Khi đó, ta đi khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$

$$f(x) = 3000 + 125x - 75x - 3,125x^2 = -3,125x^2 + 50x + 3000$$

$$f'(x) = -6,25x + 50 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = -8(l) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

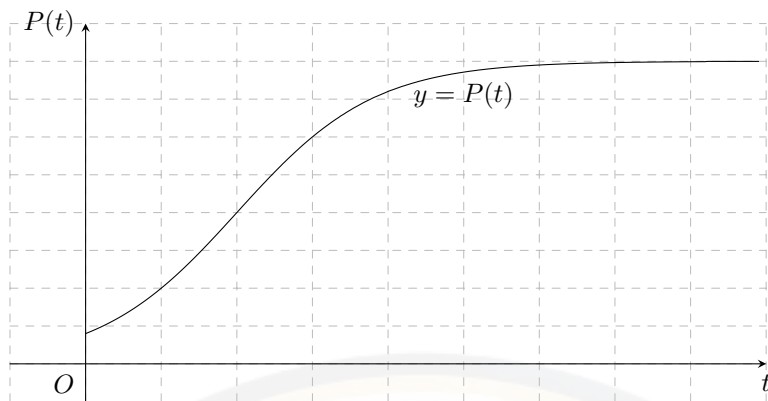
x	0	8	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$f(8)$	

Vậy để sản lượng cá thu được lớn nhất thì số cá cần thả của anh Nam là $2000 - 50 \cdot 8 = 1600$ (con).

Bài 70. Một hồ nước ở Bắc Ontario đã phục hồi sau một vụ tràn axit khiến tất cả cá hồi ở đó chết. Một chương trình tái thả cá đã thả 800 con cá hồi vào hồ. Ba năm sau, số lượng được ước tính là 6000 con. Sức chứa của hồ được cho là 8000 con. Để đánh giá khả năng tăng trưởng, người ta mô phỏng số lượng cá trong hồ qua từng năm thông qua hàm số $P(t) = \frac{c}{1 + a \cdot b^{-t}}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$)

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

có đồ thị như hình vẽ bên dưới (trong đó t tính theo năm kể từ lúc bắt đầu thả cá vào hồ).



Sử dụng mô hình trên hãy tính tốc độ tăng trưởng tối đa (đơn vị con/năm) của đàn cá. Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.

Hướng dẫn giải. Dựa vào dữ kiện bài toán ta có

$$\diamond P(0) = 800 \Leftrightarrow \frac{c}{1 + ab^{-0}} = 800 \Leftrightarrow \frac{c}{1 + a} = 800.$$

$$\diamond P(3) = 6000 \Leftrightarrow \frac{c}{1 + ab^{-3}} = 6000 \Leftrightarrow \frac{c}{1 + ab^{-3}} = 6000.$$

$$\diamond \text{Sức chứa của hồ là } 8000 \text{ con} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 8000.$$

$$\text{Khi } t \rightarrow +\infty \Rightarrow \begin{cases} b < 1 \Rightarrow b^{-t} \rightarrow +\infty (L) \\ b > 1 \Rightarrow b^{-t} \rightarrow 0 (TM) \end{cases} \Rightarrow P(t) \rightarrow c.$$

$$\text{Khi đó } \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = c = 8000.$$

$$\text{Mà } \frac{c}{1 + a} = 800 \Leftrightarrow \frac{8000}{1 + a} = 800 \Rightarrow a = 9.$$

Thay $c = 8000$ và $a = 9$ vào phương trình $\frac{c}{1 + ab^{-3}} = 6000$ ta được

$$\frac{8000}{1 + 9b^{-3}} = 6000 \Leftrightarrow 1 + 9b^{-3} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow b^{-3} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow b = 3.$$

$$\text{Suy ra } P(t) = \frac{8000}{1 + 9 \cdot 3^{-t}}.$$

$$\text{Hàm số } P'(t) = -8000 \cdot \frac{-9 \cdot 3^{-t} \cdot \ln 3}{(1 + 9 \cdot 3^{-t})^2} = 72000 \ln 3 \cdot \frac{3^{-t}}{(1 + 9 \cdot 3^{-t})^2}.$$

Để tìm max của $P(t)$ ta có hai cách làm như sau

$$\text{Cách 1: Tính } P''(t) = \frac{-72000 \ln^2 3 \cdot 3^{-t} \cdot (1 - 81 \cdot 3^{-2t})}{(1 + 9 \cdot 3^{-t})^2} \text{ Ta có } P''(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - 81 \cdot 3^{-2t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$t = 2.$$

Ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$	2	$+\infty$
$P''(t)$	+	0	-
$P'(t)$	$2000 \ln 3$		

Vậy tốc độ tăng trưởng tối đa là 2197 con.

Cách 2: Đặt $3^{-t} = a$ ($a > 0$).

$$\Rightarrow g(t) = \frac{a}{(1+9a)^2} = \frac{a}{1+18a+81a^2} = \frac{1}{\frac{1}{a}+18+81a}.$$

Nhận xét $g(t)$ max khi $\left(\frac{1}{a}+18+81a\right)$ min.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương $\frac{1}{a}$ và $81a$, ta có

$$\frac{1}{a}+81a \geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot 81a} \Leftrightarrow \frac{1}{a}+81a \geq 2\sqrt{81} = 18 \Rightarrow \frac{1}{a}+18+81a \geq 36.$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{a}+18+81a \leq \frac{1}{36}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \frac{1}{a} = 81a \Leftrightarrow a = \frac{1}{9}.$$

$$\text{Khi đó } P'(t)_{\max} = 72000 \ln 3 \cdot \frac{1}{36} \approx 2197.$$

Bài 71. Trong khoảng thời gian từ ngày 01/01/2024 đến hết ngày 30/12/2024 nhóm nghiên cứu đã quan sát sự phát triển của một quần thể sinh vật X. Kết quả nghiên cứu chỉ ra rằng, tại ngày thứ t của năm 2024 (tính từ ngày 01/01/2024) số cá thể sinh vật X trong quần thể được ước lượng bởi hàm số $f(t) = -\frac{1}{300}t^3 + bt^2 + ct + 12000$ (con), $0 \leq t \leq 365$ và ngày 26/09/2024 là ngày có số lượng cá thể sinh vật X nhiều nhất với 55740 con. Ngày 25/11/2024 số lượng cá thể sinh vật X được ước lượng khoảng bao nhiêu nghìn con? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Hướng dẫn giải. Năm 2024 là năm nhuận nên tháng hai có 29 ngày. Cụ thể: tháng một có 31 ngày, tháng hai có 29 ngày, tháng ba có 31 ngày, tháng tư có 30 ngày, tháng năm có 31 ngày, tháng sáu có 30 ngày, tháng bảy có 31 ngày, tháng tám có 31 ngày, tháng chín có 30 ngày, tháng mười có 31 ngày, tháng mười một có 30 ngày.

$$\text{Ta có } f(t) = -\frac{1}{300}t^3 + bt^2 + ct + 12000 \text{ có } f'(t) = -\frac{1}{100}t^2 + 2bt + c.$$

Ngày 26/09/2024 ứng với $t = 31 + 29 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 26 = 270$ là ngày có số lượng cá thể sinh vật X nhiều nhất với 55740 con nên hàm số đạt cực đại tại $t = 270$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f'(270) = 0 \\ f(270) = 55740 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{100} \cdot 270^2 + 540b + c = 0 \\ -\frac{1}{300} \cdot 270^3 + b \cdot 270^2 + 270c + 12000 = 55740 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 540b + c = 729 \\ 72900b + 270c = 109350 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{6}{5} \\ c = 81 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hàm số đã cho là $f(t) = -\frac{1}{300}t^3 + \frac{6}{5}t^2 + 81t + 12000$.

$$\text{Thử lại } f'(t) = -\frac{1}{100}t^2 + \frac{12}{5}t + 81, f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 270 \\ t = -30 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

Bảng biến thiên:

t	0	270	365
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	55740 ↗ ↘		

Hàm số đạt cực đại tại $t = 270$.

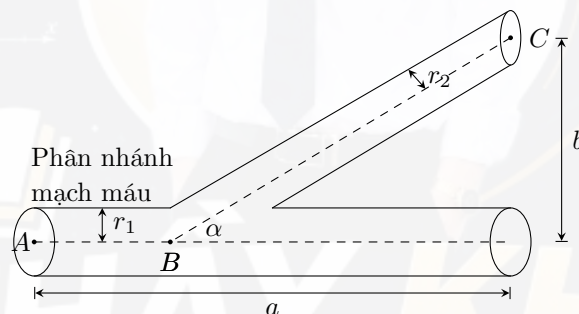
Ngày 25/11/2024 ứng với $t = 330$, khi đó số lượng cá thể sinh vật X được ước lượng khoảng bằng:

$$f(330) = -\frac{1}{300} \cdot 330^3 + \frac{6}{5} \cdot 330^2 + 81 \cdot 330 + 12000 = 49620 \text{ (con)}.$$

Đổi sang đơn vị nghìn con: 49,62 nghìn con.

Làm tròn kết quả đến hàng phần chục, ta được 49,6 nghìn con.

Bài 72. Hệ thống mạch máu chứa các mạch máu gồm động mạch chính, động mạch con, mao mạch và tĩnh mạch để giúp đưa máu từ tim đến các cơ quan và ngược lại. Hệ thống hoạt động để tối ưu hoá (tối thiểu) năng lượng mà tim sử dụng trong quá trình bơm máu. Đặc biệt năng lượng này giảm khi sức cản của máu giảm. Hình vẽ dưới đây minh hoạ một mạch máu chính có bán kính r_1 phân nhánh với một góc α° tạo thành một mạch máu nhỏ hơn với bán kính r_2 .



Sử dụng mô tả Định luật Poiseuille, người ta đã chứng minh được sức cản của máu theo con đường ABC là

$$R(\alpha) = C \left(\frac{a - b \cot \alpha}{r_1^4} + \frac{b}{r_2^4 \sin \alpha} \right)$$

với C, a, b là các hằng số. Khi bán kính mạch máu nhỏ bằng $\frac{2}{3}$ bán kính mạch máu chính. Xác định α để sức cản này là nhỏ nhất. (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn giải. Các hằng số C, a, b là các hằng số dương.

$$\text{Ta có } r_2 = \frac{2}{3}r_1 \Leftrightarrow r_2^4 = \frac{16}{81}r_1^4.$$

Khi đó

$$R(\alpha) = C \left(\frac{a - b \cot \alpha}{r_1^4} + \frac{81b}{16r_1^4 \sin \alpha} \right) = \frac{C}{r_1^4} \left(a - b \cot \alpha + \frac{81b}{16 \sin \alpha} \right).$$

Điều kiện xác định $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.

$$\text{Ta có } R'(\alpha) = \frac{Cb}{r_1^4} \cdot \frac{16 - 81 \cos \alpha}{16 \sin^2 \alpha}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} R'(\alpha) &= 0 \\ \Leftrightarrow 16 - 81 \cos \alpha &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \alpha &= \frac{16}{81} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \approx 79^\circ + k360^\circ \\ \alpha \approx -79^\circ + k360^\circ. \end{cases} \end{aligned}$$

Do $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ suy ra $\alpha \approx 79^\circ$.

Bảng biến thiên

α	0°	79°	180°
$R'(\alpha)$	—	0	+
$R(\alpha)$			

Từ bảng biến thiên, sức cản của mạch máu là nhỏ nhất đạt được khi $\alpha \approx 79^\circ$.

Bài 73. Một chiếc phà chạy giữa đất liền và đảo Dedlos. Phà có công suất tối đa là 1 000 xe hơi mỗi chuyến, nhưng việc tải gần hết công suất rất tốn thời gian. Biết rằng số lượng xe hơi đưa lên phà mỗi chuyến là $f(t) = \frac{2000t}{2t+1}$ và mất một khoảng thời gian là 1 giờ. Mỗi xe cần trung bình 3,6 giây để dỡ xuống khi đến điểm đích. Thời gian di chuyển đến đảo và thời gian vòng về đều mất 1,28 giờ. Nên tải bao nhiêu xe lên phà cho mỗi chuyến đi để lượng xe trung bình di chuyển qua lại đảo mỗi giờ đạt lớn nhất? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn giải. Để đưa được $f(t)$ xe lên phà cần t giờ.

Tổng thời gian đưa xe qua đảo hoặc từ đảo về là $t + \frac{3,6}{3600}f(t) + 1,28$ giờ.

Số xe di chuyển trung bình mỗi giờ là $g(t)$, với

$$g(t) = \frac{f(t)}{t + \frac{3,6}{3600}f(t) + 1,28} = \frac{\frac{2000t}{2t+1}}{t + \frac{3,6}{3600} \cdot \frac{2000t}{2t+1} + 1,28} = \frac{2000t}{2t^2 + 5,56t + 1,28} = \frac{2000}{2t + \frac{1,28}{t} + 5,56}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương $2t$ và $\frac{1,28}{t}$, ta có $2t + \frac{1,28}{t} \geq 2\sqrt{2t \cdot \frac{1,28}{t}}$.

$$\text{Suy ra } \frac{2000}{2t + \frac{1,28}{t} + 5,56} \leq \frac{2000}{2\sqrt{2t \cdot \frac{1,28}{t}} + 5,56} = \frac{50000}{219}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } 2t = \frac{1,28}{t} \Leftrightarrow t^2 = 0,64 \Leftrightarrow t = 0,8.$$

Vậy để lượng xe trung bình di chuyển qua lại đảo mỗi giờ đạt lớn nhất cần tải lên phà mỗi chuyến $f(0,8) \approx 615$ xe.

Bài 74. Một thí sinh dành 40 phút để làm 21 câu hỏi mức độ vận dụng và vận dụng cao trong đề thi tốt nghiệp THPT Quốc Gia môn Toán bao gồm: 14 câu hỏi vận dụng và 07 câu hỏi vận dụng cao. Nếu dành x phút cho các câu hỏi vận dụng thì tổng điểm thí sinh đạt được cho nhóm

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

câu hỏi vận dụng là $\frac{14x}{5(x+1)}$ còn nếu dành y phút cho các câu hỏi vận dụng cao thì tổng điểm thí sinh đạt được cho nhóm câu hỏi vận dụng cao là $\frac{14y}{5(3y+1)}$. Hỏi thí sinh này nên dành bao nhiêu phút cho nhóm câu hỏi vận dụng cao để tổng điểm cho 21 câu hỏi mức độ vận dụng và vận dụng cao là lớn nhất?

 **Hướng dẫn giải.** Điều kiện $0 \leq x, y \leq 40$. Tổng điểm thí sinh này đạt được là

$$S(x) = \frac{14x}{5(x+1)} + \frac{14y}{5(3y+1)} = \frac{14x}{5(x+1)} + \frac{14(40-x)}{5[3(40-x)+1]} = \frac{-56x^2 + 2240x + 560}{5(-3x^2 + 118x + 121)}.$$

$$\text{Ta có } S'(x) = \frac{112x^2 - 10192x + 204960}{5(-3x^2 + 118x + 121)^2}.$$

$$\text{Khi đó } S'(x) = 0 \Leftrightarrow 112x^2 - 10192x + 204960 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 61 \notin (0; 40) \\ x = 30 \in (0; 40). \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $S(x)$ là

x	0	30	40
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$	$\frac{112}{121}$	$\frac{112}{31}$	$\frac{112}{41}$

$$\text{Khi đó } \max_{(0;40)} S(x) = S(30) = \frac{121}{31}.$$

Vậy thí sinh này cần 30 phút cho câu hỏi vận dụng và 10 phút cho nhóm câu hỏi vận dụng cao để đạt được tổng điểm cao nhất.

 **Bài 75.** Một doanh nghiệp sản xuất thiết bị điện tử thông minh có quy trình vận hành và chính sách thuế như sau: Trong mỗi tháng, doanh nghiệp phải chi trả một khoản chi phí cố định 200 triệu đồng, khoản chi phí này không phụ thuộc vào số lượng sản phẩm sản xuất. Ngoài ra, để hoàn thiện mỗi sản phẩm, doanh nghiệp phải chịu chi phí biến đổi 1 triệu đồng cho mỗi sản phẩm. Mỗi sản phẩm được bán ra thị trường với giá 3 triệu đồng một sản phẩm. Nhằm khuyến khích gia tăng quy mô sản xuất, cơ quan quản lý áp dụng chính sách thuế tính theo tổng doanh thu trong tháng, với mức thuế suất giảm dần theo sản lượng. Nếu doanh nghiệp bán dưới 100 sản phẩm trong tháng, thuế suất là 10% tổng doanh thu. Nếu bán từ 100 đến dưới 300 sản phẩm, thuế suất là 8% tổng doanh thu. Nếu bán từ 300 sản phẩm trở lên, thuế suất là 5% tổng doanh thu. Gọi x là số lượng sản phẩm doanh nghiệp sản xuất và bán ra trong một tháng ($x \in \mathbb{N}^*$). Giả sử số sản phẩm doanh nghiệp sản xuất trong tháng được bán hết. Hỏi doanh nghiệp cần sản xuất tối thiểu bao nhiêu sản phẩm để bắt đầu có lãi?

 **Hướng dẫn giải.** Tổng chi phí là $C(x) = 200 + x$ (triệu đồng).

Tổng doanh thu là $R(x) = 3x$ (triệu đồng).

Lợi nhuận là $L(x) = R(x) - C(x) - \text{Thuế}$. Doanh nghiệp có lãi khi $L(x) > 0$.

Trường hợp 1. $x < 100$. Thuế = $0,1 \cdot 3x = 0,3x$.

$$\text{Khi đó } L(x) = 3x - (200 + x) - 0,3x = 1,7x - 200.$$

$$\text{Ta có } L(x) > 0 \Leftrightarrow x > 117,6 \text{ (loại vì đang xét } x < 100).$$

Trường hợp 2. $100 \leq x < 300$. Thuế = $0,08 \cdot 3x = 0,24x$.

Khi đó $L(x) = 3x - (200 + x) - 0,24x = 1,76x - 200$.

Ta có $L > 0 \Leftrightarrow x > 113,63$.

Vì $x \in \mathbb{N}^*$, giá trị tối thiểu là $x = 114$.

Trường hợp 3. $x \geq 300$. Thuế $= 0,05 \cdot 3x = 0,15x$.

Khi đó $L(x) = 3x - (200 + x) - 0,15x = 1,85x - 200$.

Ta có $L(x) > 0, \forall x \geq 3$ nên giá trị tối thiểu là $x = 300$.

Vậy doanh nghiệp cần bán tối thiểu 114 sản phẩm để bắt đầu có lãi.

Bài 76. Công ty chứng khoán VNStock cần xử lý 18 000 lệnh giao dịch trong một ngày làm việc (8 giờ). Hệ thống gồm các máy chủ xử lý với thông số như sau

- ◇ Năng suất 250 lệnh/giờ/máy.
- ◇ Chi phí triển khai 15 triệu đồng/máy (cài đặt ban đầu).
- ◇ Chi phí vận hành điện và bảo trì 120 000 đồng/giờ/máy.
- ◇ Chi phí nhân viên giám sát 8 triệu đồng/giờ (trả theo giờ làm việc thực tế).

Tìm chi phí thấp nhất mà công ty phải bỏ ra để thực hiện số lượng giao dịch nói trên (làm tròn đến hàng đơn vị của triệu đồng).

Hướng dẫn giải. Gọi x là số máy chủ cần dùng ($x \in \mathbb{N}$) và t là thời gian chạy máy ($0 < t \leq 8$).

Tổng số lệnh xử lý là $250 \cdot x \cdot t = 18\,000 \Rightarrow x \cdot t = 72 \Rightarrow t = \frac{72}{x}$.

Vì thời gian tối đa là 8 giờ nên $\frac{72}{x} \leq 8 \Rightarrow x \geq 9$.

Tiền thuê máy $15x$.

Tiền điện $0,12 \cdot x \cdot t = 0,12 \cdot 72 = 8,64$.

Tiền giám sát $8 \cdot t = 8 \cdot \frac{72}{x} = \frac{576}{x}$.

Tổng chi phí $f(x) = 15x + \frac{576}{x} + 8,64$.

Xét hàm $f(x)$ với $x \geq 9$, ta có đạo hàm $f'(x) = 15 - \frac{576}{x^2}$.

Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 38,4 \Rightarrow x = \frac{8\sqrt{15}}{5}$.

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{8\sqrt{15}}{5}$	9	$+\infty$
$f'(x)$		− 0 +	⋮	+
$f(x)$	$+\infty$	$\swarrow$ 194,5 $\searrow$		$+\infty$
				207,64 $\nearrow$

Vì $x \in \mathbb{N}$ nên chọn $x = 9$, ta có $f(9) = 15 \cdot 9 + \frac{576}{9} + 8,64 \approx 208$ (triệu đồng).

Bài 77. Để hạn chế vi phạm thời gian làm việc đối với công nhân, giám đốc công ty quyết định xử lý bằng cách phạt tiền. Nhờ sự giám sát chặt chẽ của quản đốc, giám đốc công ty biết được trong một tháng, giữa tỉ lệ công nhân vi phạm đúng k lần ($1 \leq k \leq 2$) là $t_k = \frac{N_k}{N}$ (trong đó N_k là số công nhân vi phạm đúng k lần, N là tổng số công nhân) và mức phạt mỗi lần vi phạm có mối liên hệ như sau: Nếu mỗi công nhân nộp phạt x nghìn đồng ($60 \leq x \leq 300$) khi vi phạm lần thứ nhất và nộp phạt $x - 20$ nghìn đồng khi vi phạm lần thứ hai thì $t_1 = \frac{36}{x + 10}$ và $t_2 = \frac{4}{x - 30}$ (không có công nhân nào vi phạm quá hai lần). Biết rằng N không đổi và bằng 2 400. Tổng số tiền nộp phạt trong một tháng ít nhất là bao nhiêu triệu đồng? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Hướng dẫn giải. Tổng số công nhân $N = 2\,400$.

Số công nhân vi phạm đúng 1 lần $N_1 = 2\,400 \cdot \frac{36}{x + 10}$, tỉ lệ $t_1 = \frac{36}{x + 10}$.

Số công nhân vi phạm đúng 2 lần $N_2 = 2\,400 \cdot \frac{4}{x - 30}$, tỉ lệ $t_2 = \frac{4}{x - 30}$.

Không có công nhân nào vi phạm quá 2 lần.

Tiền phạt mỗi lần vi phạm

◇ Lần 1: x (nghìn đồng), với $60 \leq x \leq 300$.

◇ Lần 2: $x - 20$ (nghìn đồng).

Tiền phạt công nhân vi phạm 1 lần x (nghìn đồng).

Tiền phạt công nhân vi phạm 2 lần $x + (x - 20) = 2x - 20$ (nghìn đồng).

Tổng tiền phạt hàm số theo x là

$$f(x) = N_1 \cdot x + N_2 \cdot (2x - 20) = \frac{86\,400x}{x + 10} + \frac{9\,600(2x - 20)}{x - 30}.$$

Tính đạo hàm ta được $f'(x) = \frac{864\,000}{(x + 10)^2} - \frac{384\,000}{(x - 30)^2}$. Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow \left(\frac{x + 10}{x - 30}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

Từ đó tìm được nghiệm $x = 110$ (thỏa mãn điều kiện $x \in [60; 300]$).

Ta có $f(110) = 103\,200$, $f(60) \approx 106\,057$, $f(300) \approx 104\,235$.

Giá trị nhỏ nhất đạt được tại $x = 110$, khi đó $f(110) = 103\,200$ (nghìn đồng).

Vậy tổng số tiền phạt ít nhất làm tròn đến hàng đơn vị là 103 triệu đồng.

Bài 78. Trong Vật lý, một dao động điều hòa là dao động có phương trình chuyển động được cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó A là biên độ của dao động, ω (rad/s) là tần số góc và φ (rad) là pha ban đầu. Trong Vật lý, động năng (Tiếng Anh: *kinetic energy*) của một vật là năng lượng mà nó có được từ chuyển động của nó. Được xác định bởi công thức $W = \frac{1}{2}m \cdot v^2(t)$ trong đó m (kg) là khối lượng của vật và $v(t)$ (m/s) là vận tốc của vật tại thời điểm t (s). Giả sử một vật có khối lượng $m = 100$ (gam) dao động điều hòa với phương trình chuyển động: $x = 40 \cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$ (cm). Khi đó động năng vật đó đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu (J)? (Làm tròn đến hàng phần chục).

Hướng dẫn giải. Đổi khối lượng: $m = 100$ gam = 0,1 kg.

Từ công thức $W = \frac{1}{2}m \cdot v^2(t)$, để động năng vật đó đạt giá trị lớn nhất thì $|v(t)|$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có phương trình vận tốc:

$$v(t) = (x(t))' = \left[40 \cos \left(200\pi t - \frac{\pi}{3} \right) \right]' = -40 \cdot 200\pi \sin \left(200\pi t - \frac{\pi}{3} \right) = -8000\pi \sin \left(200\pi t - \frac{\pi}{3} \right) \text{ (cm/s)}.$$

Đổi đơn vị sang m/s: $v(t) = -80\pi \sin \left(200\pi t - \frac{\pi}{3} \right) \text{ (m/s)}.$

Ta có $-80\pi \leq v(t) \leq 80\pi$ nên $|v(t)|$ đạt giá trị lớn nhất bằng $80\pi \text{ (m/s)}.$

Khi đó động năng lớn nhất của vật là:

$$W_{\max} = \frac{1}{2} m \cdot v_{\max}^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot (80\pi)^2 = 320\pi^2 \approx 3158,3 \text{ (J)}.$$

Bài 79. Giả sử doanh số bán hàng (đơn vị triệu đồng) của một sản phẩm mới trong vòng một số năm nhất định tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t) = 500(t^2 + me^{-t})$, với $t \geq 0$ là thời gian tính bằng năm kể từ khi phát hành sản phẩm mới, $m \leq 0$ là tham số. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Biết rằng tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm, khi đó giá trị nhỏ nhất của m bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Ta có $f'(t) = 500(2t - me^{-t})$.

Đạo hàm cấp hai: $f''(t) = 500(2 + me^{-t})$.

Tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm $\iff f'(t)$ là hàm số đồng biến trên $[0; 10] \iff f''(t) \geq 0, \forall t \in [0; 10]$

$$\iff 500(2 + me^{-t}) \geq 0, \forall t \in [0; 10] \iff 2 + me^{-t} \geq 0, \forall t \in [0; 10]$$

$$\iff me^{-t} \geq -2, \forall t \in [0; 10] \iff m \geq -2e^t, \forall t \in [0; 10]$$

$$\iff m \geq \max_{t \in [0; 10]} (-2e^t).$$

Xét hàm số $g(t) = -2e^t$ trên đoạn $[0; 10]$. Vì $g'(t) = -2e^t < 0, \forall t \in [0; 10]$ nên hàm số $g(t)$ nghịch biến trên $[0; 10]$.

Do đó $\max_{t \in [0; 10]} g(t) = g(0) = -2e^0 = -2$.

Suy ra $m \geq -2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của m là -2 .

Bài 80. Một hợp tác xã nuôi cá thí nghiệm trong hồ. Cứ sau mỗi vụ, người ta thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá cân nặng $P(n) = 540 - 18n$ (gam). Vậy thả cá từ bao nhiêu con trở đi trên một đơn vị diện tích của mặt hồ thì sản lượng cá giảm?

Hướng dẫn giải. Sau mỗi vụ, trung bình sản lượng cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ là $f(n) = n \cdot P(n) = 540n - 18n^2$ (gam).

Ta có $f'(n) = 540 - 36n = 0 \iff n = 15$.

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

Bảng biến thiên:

n	0	15	$+\infty$
$f'(n)$	+	0	-
$f(n)$	0	$f(15)$	

Từ bảng biến thiên ta thấy sản lượng cá $f(n)$ đạt cực đại tại $n = 15$ và nghịch biến khi $n > 15$.

Vậy thả cá từ 16 con trở đi trên một đơn vị diện tích của mặt hồ thì sản lượng cá giảm.

Bài 81. Một công ty bất động sản có 150 căn hộ cho thuê, biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng mỗi tháng thì mỗi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 5 căn hộ bị bỏ trống. Thu nhập của công ty bắt đầu giảm từ lần tăng giá thứ mấy?

Hướng dẫn giải. Gọi x (lần) là số lần tăng giá tiền cho thuê mỗi căn hộ một tháng ($0 \leq x \leq 30$; $x \in \mathbb{N}$).

Số tiền cho thuê mỗi căn hộ là $2 + 0,1x$ (triệu đồng).

Số căn hộ mỗi tháng được thuê là $150 - 5x$ (căn hộ).

Thu nhập của công ty đạt được là $f(x) = (2 + 0,1x)(150 - 5x)$ (triệu đồng).

Ta có $f'(x) = 0,1(150 - 5x) - 5(2 + 0,1x) = 15 - 0,5x - 10 - 0,5x = 5 - x$.

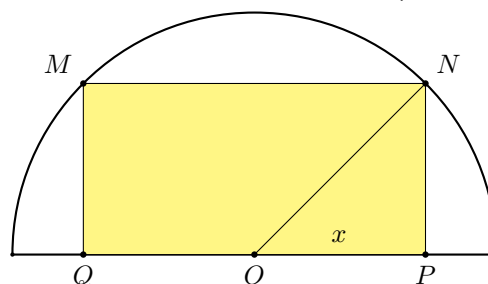
$f'(x) = 0 \iff x = 5$.

Bảng biến thiên:

x	0	5	30
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(0)$	$f(5)$	$f(30)$

Do hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 5)$ và nghịch biến trên khoảng $(5; 30)$, nên thu nhập của công ty đạt cực đại tại lần tăng giá thứ 5 và bắt đầu giảm từ lần tăng giá thứ 6.

Bài 82. Từ một miếng tôn dạng nửa hình tròn có bán kính $R = 4$ dm, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật. Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có thể cắt được là bao nhiêu?



Hướng dẫn giải. Gọi hình chữ nhật cần tính diện tích là $MNPQ$ có $OP = x$ ($0 < x < 4$), $ON = 4$.

Khi đó, xét tam giác vuông ONP tại P , ta có $NP = \sqrt{ON^2 - OP^2} = \sqrt{16 - x^2}$.

Chiều dài của hình chữ nhật là $MN = 2OP = 2x$.

Diện tích của hình chữ nhật $MNPQ$ là: $S = MN \cdot NP = 2x\sqrt{16 - x^2}$.

Xét hàm số: $f(x) = 2x\sqrt{16 - x^2}$ trên khoảng $(0; 4)$.

Ta có: $f'(x) = 2\sqrt{16 - x^2} + 2x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}} = 2\sqrt{16 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{32 - 4x^2}{\sqrt{16 - x^2}}$.

$$f'(x) = 0 \iff 32 - 4x^2 = 0 \iff x^2 = 8 \iff \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \in (0; 4) \\ x = -2\sqrt{2} \notin (0; 4) \end{cases}.$$

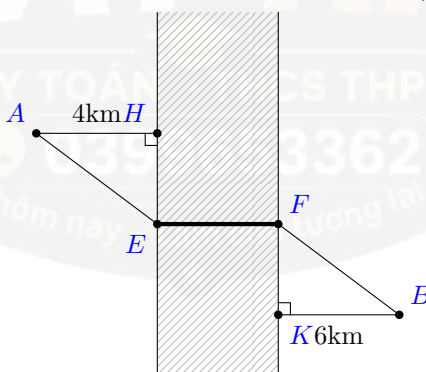
Bảng biến thiên:

x	0	$2\sqrt{2}$	4
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	16	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $\max_{(0;4)} f(x) = f(2\sqrt{2}) = 16$.

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có thể cắt được là $16 \text{ (dm}^2\text{)}$.

Bài 83. Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là 4 km và thành phố B cách con sông một khoảng là 6 km (hình vẽ), biết $HE + KF = 20 \text{ km}$ và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu cách thành phố A là bao nhiêu km để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$)? (kết quả làm tròn đến phần chục)



Hướng dẫn giải. Đặt $HE = x$, $FK = y$, với $x, y > 0$.

$$\text{Ta có: } HE + KF = 20 \Rightarrow x + y = 20, \begin{cases} AE = \sqrt{16 + x^2} \\ BF = \sqrt{36 + y^2} = \sqrt{36 + (20 - x)^2} \end{cases}$$

Nhận xét: Vì EF không đổi nên đường đi $AEFB$ ngắn nhất khi $AE + BF$ nhỏ nhất.

$$\text{Ta có } AE + BF = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{(20 - x)^2 + 36} = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 40x + 436} = f(x).$$

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} + \frac{x - 20}{\sqrt{x^2 - 40x + 436}}, \forall x \in (0; 20).$$

Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} = \frac{20 - x}{\sqrt{(20 - x)^2 + 36}} \Rightarrow 36x^2 = 16(20 - x)^2 \Rightarrow 6x = 4(20 - x) \Rightarrow x = 8.$

Bảng biến thiên:

x	0	8	20
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$			

Vậy quãng đường ngắn nhất khi $x = 8$, lúc đó khoảng cách từ thành phố A đến chân cầu E là:

$$AE = \sqrt{8^2 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \approx 8,94 \text{ km.}$$

Làm tròn đến phần chục, ta được kết quả: $AE \approx 8,9 \text{ km.}$

Bài 84. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có lợi nhuận cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu (đơn vị tính bằng triệu đồng và làm tròn kết quả tới hàng phần trăm)?

Hướng dẫn giải.

Gọi x là giá thuê thực tế của mỗi căn hộ (x : đồng; $x \geq 2.000.000$ đồng).

◆ Khi tăng giá 100.000 đồng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống.

◆ Tăng giá $x - 2.000.000$ đồng, ta có số căn hộ bị bỏ trống là $\frac{2(x - 2.000.000)}{100.000} = \frac{x - 2.000.000}{50.000}$.

◆ Khi cho thuê với giá x đồng thì số căn hộ cho thuê là: $50 - \frac{x - 2.000.000}{50.000} = -\frac{x}{50.000} + 90$.

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ ($F(x)$: đồng).

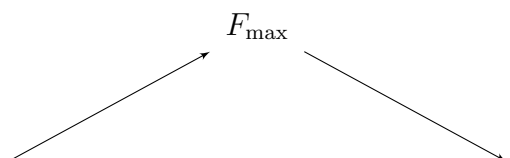
$$\text{Ta có: } F(x) = \left(-\frac{x}{50.000} + 90\right)x = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x.$$

Ta tìm giá trị lớn nhất (GTLN) của $F(x) = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$ với $x \geq 2.000.000$.

$$F'(x) = -\frac{1}{25.000}x + 90.$$

$$F'(x) = 0 \iff -\frac{1}{25.000}x + 90 = 0 \iff x = 2.250.000.$$

Bảng biến thiên:

X	2.000.000	2.250.000	$+\infty$
$F'(x)$	+	0	-
$F(x)$			

Suy ra $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2.250.000$ (đồng).

Đổi sang đơn vị triệu đồng: 2.250.000 đồng = 2,25 triệu đồng.

Vậy công ty phải cho thuê với giá 2,25 triệu đồng mỗi căn hộ thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

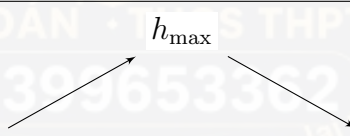
Bài 85. Hằng ngày mực nước của một hồ thủy điện lên và xuống theo lượng nước mưa, và các suối nước đổ về hồ. Độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo thời gian trong ngày sau t (giờ) (kể từ 8h sáng) được cho bởi công thức $h(t) = 24t + 5t^2 - \frac{t^3}{3}$. Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước quy định trước 5 tiếng đồng hồ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước mấy giờ, biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước?

Hướng dẫn giải.

Xét hàm số $h(t) = 24t + 5t^2 - \frac{t^3}{3}$ với $8 \leq t \leq 24$.

Ta có $h'(t) = 24 + 10t - t^2$; $h'(t) = 0 \Leftrightarrow 24 + 10t - t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 12 \text{ (n)} \\ t = -2 \text{ (l)} \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

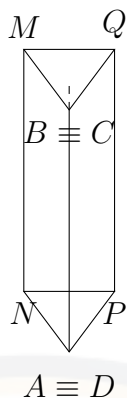
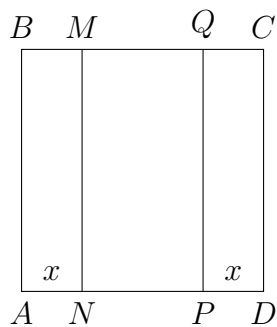
t	8	12	24
$h'(t)$	+	0	-
$h(t)$			

Vậy để mực nước lên cao nhất thì phải mất 12 giờ, tức là vào lúc 20 giờ. Vậy phải thông báo cho dân di dời vào 15 giờ chiều cùng ngày (vì $20 - 5 = 15$).

Bài 86. Để tạo ra phần xung quanh của một hộp kẹo sôcôla có dạng hình lăng trụ đứng (không tính hai đáy), người ta dùng một tờ giấy bìa hình vuông $ABCD$ có cạnh là 15 cm. Ta gấp tấm bìa theo hai cạnh MN và PQ vào phía trong cho đến khi AB và CD trùng nhau như hình vẽ để được hình lăng trụ đứng khuyết hai đáy. Khi đó ta có thể tạo được hộp kẹo sôcôla có thể tích lớn nhất là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) centimet khối, biết thể tích của khối lăng

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

trụ bằng diện tích đáy nhân với chiều cao?



Hướng dẫn giải.

Ta có một đáy của lăng trụ là tam giác cân ANP có cạnh bên bằng $AN = x$, cạnh đáy bằng $NP = 15 - 2x$ nên đường cao tam giác đó là $AH = \sqrt{AN^2 - NH^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{15 - 2x}{2}\right)^2} = \sqrt{15x - \frac{225}{4}}$.

Diện tích đáy là $S_{ANP} = \frac{1}{2}NP \cdot AH = \frac{1}{2}(15 - 2x) \cdot \sqrt{15x - \frac{225}{4}} = \frac{1}{4}(15 - 2x)\sqrt{60x - 225}$.

Xét hàm số $S(x) = \frac{1}{4}(15 - 2x)\sqrt{60x - 225}$ với $x \in \left(\frac{15}{4}; \frac{15}{2}\right)$.

Ta có $S'(x) = \frac{1}{4} \left[-2\sqrt{60x - 225} + (15 - 2x) \frac{30}{\sqrt{60x - 225}} \right]$.

$S'(x) = 0 \Leftrightarrow (15 - 2x) \frac{30}{\sqrt{60x - 225}} = 2\sqrt{60x - 225} \Leftrightarrow 450 - 60x = 2(60x - 225) \Leftrightarrow x = 5$ (nhận).

Bảng biến thiên:

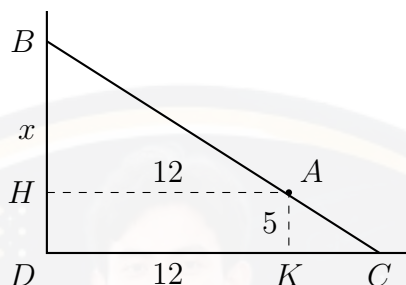
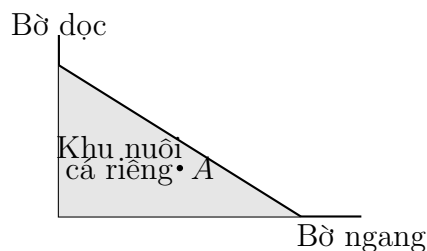
x	3,75	5	7,5
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$		$\frac{25\sqrt{3}}{4}$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy diện tích đáy lớn nhất là $\frac{25\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$ nên thể tích lớn nhất của lăng trụ là:

$$V = \frac{25\sqrt{3}}{4} \cdot 15 \approx 162 \text{ cm}^3.$$

 **Bài 87.** Người ta giăng lưới để nuôi riêng một loại cá trên một góc hồ. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một vị trí trên bờ ngang đến một vị trí trên bờ dọc và phải đi qua một cái cọc đã cắm sẵn ở vị trí A . Diện tích nhỏ nhất có thể giăng lưới là bao nhiêu mét vuông, biết

rằng khoảng cách từ cọc đến bờ ngang là 5 m và khoảng cách từ cọc đến bờ dọc là 12 m.



Hướng dẫn giải.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên BD và CD . Theo đề bài ta có $AH = 12$ m, $AK = 5$ m.

Suy ra $DK = AH = 12$ m, $DH = AK = 5$ m.

Đặt $BH = x$ (m) với $x > 0$.

Ta có $AH \parallel DC, AK \parallel DH$ nên $\frac{BH}{HD} = \frac{BA}{AC} = \frac{DK}{KC}$. Suy ra $KC = \frac{HD \cdot DK}{BH} = \frac{5 \cdot 12}{x} = \frac{60}{x}$ (m).

Diện tích khu nuôi cá riêng là: $S = \frac{1}{2}BD \cdot DC = \frac{1}{2}(x + 5) \left(\frac{60}{x} + 12 \right) = 6x + \frac{150}{x} + 60$ (m²).

Xét hàm số $S(x) = 6x + \frac{150}{x} + 60$ với $x \in (0; +\infty)$.

Ta có $S'(x) = 6 - \frac{150}{x^2} = \frac{6x^2 - 150}{x^2}$; $S'(x) = 0 \Rightarrow x = 5$.

Bảng biến thiên:

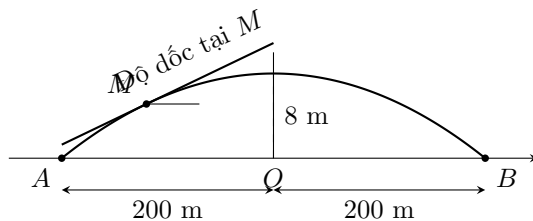
x	0	5	$+\infty$
$S'(x)$	—	0	+
$S(x)$	$+\infty$	120	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có $\min_{(0; +\infty)} S(x) = 120$ tại $x = 5$.

Vậy diện tích nhỏ nhất có thể giăng lưới là 120 m².

Bài 88. Hình vẽ dưới đây mô tả một cây cầu vượt có mặt cắt đứng là một phần parabol nối hai điểm A, B và nhận đường trung trực của đoạn AB làm trục đối xứng, $AB = 400$ m. Khoảng cách từ đỉnh cây cầu đến AB bằng 8 m. Xét tiếp tuyến Δ tại điểm M trên mặt cầu, người ta quy ước $\tan(\Delta, d)$ là độ dốc tại M của mặt cầu, với d là đường thẳng đi qua hai điểm A, B . Độ dốc

lớn nhất của mặt cầu là bao nhiêu?



Hướng dẫn giải. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho gốc tọa độ O là trung điểm của đoạn AB , trục Ox trùng với đường thẳng AB , trục Oy là trục đối xứng của parabol hướng lên trên.

- Theo giả thiết, ta có: $A(-200; 0)$ và $B(200; 0)$.
- Khoảng cách từ đỉnh cây cầu đến AB bằng $8m$ nên tọa độ đỉnh là $I(0; 8)$.

Phương trình của parabol có dạng: $y = ax^2 + 8$.

Vì parabol đi qua điểm $B(200; 0)$ nên ta có:

$$0 = a \cdot 200^2 + 8 \Leftrightarrow 40000a = -8 \Leftrightarrow a = -\frac{8}{40000} = -\frac{1}{5000}$$

Vậy phương trình mặt cắt của cây cầu là: $y = -\frac{1}{5000}x^2 + 8$ với $x \in [-200; 200]$.

Độ dốc của mặt cầu tại điểm $M(x_0; y_0)$ là trị tuyệt đối hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm đó:

$$\text{Độ dốc} = |y'(x_0)| = \left| -\frac{2}{5000}x_0 \right| = \frac{1}{2500}|x_0|$$

Vì $x_0 \in [-200; 200]$ nên độ dốc lớn nhất khi $|x_0|$ đạt giá trị lớn nhất, tức là tại hai đầu cầu A hoặc B ($|x_0| = 200$).

Độ dốc lớn nhất là:

$$\text{Max độ dốc} = \frac{1}{2500} \cdot 200 = \frac{200}{2500} = \frac{2}{25} = 0,08.$$

Độ dốc lớn nhất của mặt cầu là $0,08$.

Bài 89. Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Giả sử khi sản xuất và bán hết x sản phẩm đó ($0 < x \leq 2000$), tổng số tiền doanh nghiệp thu được (đơn vị: chục nghìn đồng) là $f(x) = 2000x - x^2$ và tổng chi phí (đơn vị: chục nghìn đồng) doanh nghiệp chi ra là $g(x) = x^2 + 1440x + 50$. Giả sử mức thuế phụ thu trên một đơn vị sản phẩm bán được là t (chục nghìn đồng) ($0 < t < 300$). Mức thuế phụ thu t (trên một đơn vị sản phẩm) sao cho nhà nước nhận được số tiền thuế phụ thu lớn nhất và doanh nghiệp cũng thu được lợi nhuận lớn nhất theo mức thuế phụ thu đó là bao nhiêu triệu đồng?

Hướng dẫn giải. Lợi nhuận của doanh nghiệp khi phải chịu mức thuế phụ thu t trên mỗi đơn vị sản phẩm được tính bằng doanh thu trừ đi tổng chi phí và tiền thuế:

$$P(x) = f(x) - g(x) - t \cdot x$$

$$P(x) = (2000x - x^2) - (x^2 + 1440x + 50) - t \cdot x$$

$$P(x) = -2x^2 + (560 - t)x - 50$$

Để doanh nghiệp đạt lợi nhuận lớn nhất (với mức thuế t cố định), ta tìm cực trị của hàm $P(x)$:

$$P'(x) = -4x + 560 - t = 0 \Leftrightarrow x = \frac{560 - t}{4} = 140 - \frac{t}{4}$$

Vì $0 < t < 300$ nên $65 < x < 140$, thỏa mãn điều kiện $0 < x \leq 2000$. Do đó, với mỗi mức thuế t , doanh nghiệp sẽ sản xuất số lượng sản phẩm là $x = 140 - \frac{t}{4}$.

Số tiền thuế phụ thu mà nhà nước nhận được là:

$$T(t) = t \cdot x = t \left(140 - \frac{t}{4} \right) = 140t - \frac{t^2}{4}$$

Để số tiền thuế nhà nước nhận được lớn nhất, ta xét hàm số $T(t)$ trên khoảng $(0; 300)$:

$$T'(t) = 140 - \frac{t}{2}$$

$$\text{Cho } T'(t) = 0 \Leftrightarrow 140 - \frac{t}{2} = 0 \Leftrightarrow t = 280.$$

Để thấy hàm số $T(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = 2,8$ (triệu đồng).

Bài 90. Một công ty nông sản có công suất chế biến không quá 200 tấn nguyên liệu một tháng. Nếu công ty chế biến x tấn nguyên liệu trong một tháng ($1 \leq x \leq 200$) thì chi phí sản xuất và doanh thu lần lượt là $C(x) = 0,001x^3 + 30x + 10$ (triệu đồng) và $R(x) = 60x$ (triệu đồng). Lợi nhuận lớn nhất mà công ty đạt được trong một tháng là bao nhiêu triệu đồng?

Hướng dẫn giải.

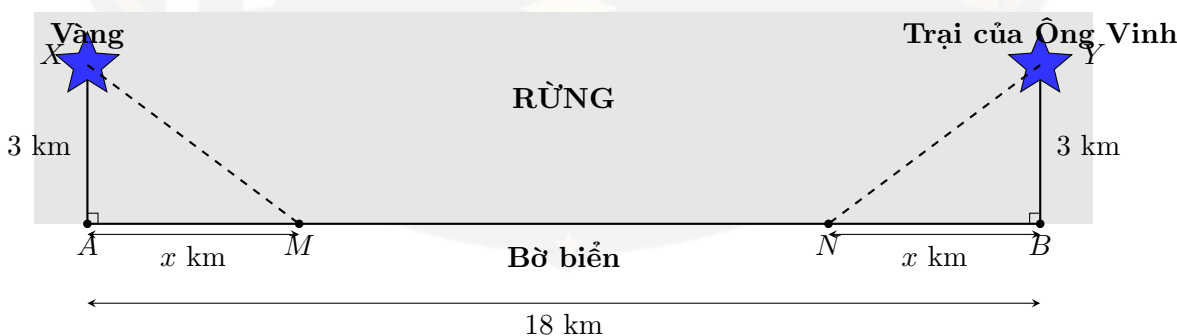
Hàm lợi nhuận: $\pi(x) = R(x) - C(x) = 60x - (0,001x^3 + 30x + 10) = -0,001x^3 + 30x - 10$.

$$\text{Đạo hàm: } \pi'(x) = -0,003x^2 + 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \in [1; 200] \\ x = -100 \notin [1; 200] \end{cases}.$$

Ta có: $\pi(1) = 19,999$; $\pi(100) = 1990$; $\pi(200) = -2010$.

Vậy lợi nhuận lớn nhất mà công ty đạt được trong một tháng là 1990 triệu đồng khi chế biến 100 tấn nguyên liệu.

Bài 91. Ông Vinh đang ở trong rừng để đào vàng. Ông ta tìm thấy vàng ở X , cách điểm A là 3 km. Điểm A nằm trên đường bờ biển (đường bờ biển là đường thẳng). Trại của ông Vinh nằm ở Y , cách điểm B là 3 km. Điểm B cũng thuộc đường bờ biển. Biết rằng $AB = 18$ km, $AM = NB = x$ km và XA vuông góc với bờ biển, YB vuông góc với bờ biển. (Như hình vẽ sau)



Khi đang đào vàng, Ông Vinh bị rắn cắn, chất độc lan vào máu. Sau khi bị cắn, nồng độ chất độc trong máu tăng theo thời gian được tính theo phương trình $y = 50 \log(t + 2)$. Trong đó, y là nồng độ, t là thời gian tính bằng giờ sau khi bị rắn cắn. Ông Vinh cần quay trở lại trại để lấy thuốc giải độc. Ông ấy chạy trong rừng và trên bãi biển với vận tốc lần lượt là 5 km/h và 13 km/h. Để về đến trại Ông Vinh cần chạy từ trong rừng qua điểm M , N trên bãi biển. Tính nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi ông Vinh về đến trại (làm tròn đáp án đến hàng phần chục).

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

 **Hướng dẫn giải.** Để nồng độ chất độc trong máu thấp nhất, thời gian di chuyển t về đến trại phải là thấp nhất (do hàm $y(t) = 50 \log(t + 2)$ là hàm đồng biến với $t > 0$).

Gọi x là độ dài quãng đường AM (km), với điều kiện $0 < x < 9$.

Quãng đường ông Vinh di chuyển gồm 3 đoạn: XM , MN , và NY .

Áp dụng định lý Pytago, ta có độ dài các quãng đường:

◇ Quãng đường trong rừng: $XM = NY = \sqrt{3^2 + x^2} = \sqrt{9 + x^2}$ (km).

◇ Quãng đường trên bờ biển: $MN = AB - AM - NB = 18 - x - x = 18 - 2x$ (km).

Thời gian di chuyển tổng cộng là

$$t(x) = (\text{thời gian đi } XM) + (\text{thời gian đi } MN) + (\text{thời gian đi } NY)$$

$$t(x) = \frac{\sqrt{9 + x^2}}{5} + \frac{18 - 2x}{13} + \frac{\sqrt{9 + x^2}}{5}$$

$$t(x) = \frac{2\sqrt{9 + x^2}}{5} + \frac{18 - 2x}{13}$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của hàm $t(x)$ trên khoảng $(0, 9)$.

Xét đạo hàm $t'(x)$:

$$t'(x) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{9 + x^2}} - \frac{2}{13} = \frac{2x}{5\sqrt{9 + x^2}} - \frac{2}{13}$$

Cho $t'(x) = 0$:

$$\frac{2x}{5\sqrt{9 + x^2}} = \frac{2}{13} \Leftrightarrow 13x = 5\sqrt{9 + x^2}$$

Bình phương hai vế (với $x > 0$):

$$169x^2 = 25(9 + x^2) \Leftrightarrow 169x^2 = 225 + 25x^2 \Leftrightarrow 144x^2 = 225 \Leftrightarrow x^2 = \frac{225}{144}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{225}{144}} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} \quad (\text{thỏa mãn } 0 < x < 9).$$

Bảng biến thiên của $t(x)$ trên khoảng $(0, 9)$:

x	0	$\frac{5}{4}$	9
$t'(x)$	—	0	+
$t(x)$	$\frac{168}{65}$	$\frac{162}{65}$	$\frac{6\sqrt{10}}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên, thời gian di chuyển nhỏ nhất là $t_{\min} = t\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{162}{65}$ giờ.

Vậy, nồng độ chất độc trong máu thấp nhất tương ứng là

$$y_{\min} = 50 \log(t_{\min} + 2) = 50 \log\left(\frac{162}{65} + 2\right) = 50 \log\left(\frac{292}{65}\right) \approx 32,6$$

Bài 92. Một bể chứa 1 000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 15 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Biết rằng nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là một hàm số $f(t)$, thời gian t tính bằng phút. Phương trình tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ bằng $y = a$, ($a \in \mathbb{R}$). Tìm a .

Hướng dẫn giải. Sau t phút, ta có khối lượng muối trong bể là $20 \cdot 15t = 300t$ (gam).

Thể tích của lượng nước trong bể sau t phút là $1\,000 + 20t$ (lít).

Do đó nồng độ muối sau t phút là $f(t) = \frac{300t}{1\,000 + 20t} = \frac{30t}{100 + 2t}$ (gam/lít).

Ta có $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{100 + 2t} = \frac{30}{2} = 15$ nên đồ thị hàm số $y = f(t)$ có phương trình tiệm cận ngang là $y = 15$.

Vậy $a = 15$.

Bài 93. Một kỹ sư đang thiết kế viên (biên dạng) của một chi tiết kỹ thuật cần phải chịu lực nén tối ưu. Viên này được mô hình hóa trên mặt phẳng tọa độ Oxy . Biên dạng cong của chi tiết được mô tả bởi đồ thị (C) của một hàm số phân thức bậc hai trên bậc một, có dạng tổng quát là $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$, với $m = 1$. Biết đồ thị (C) này cắt Oy tại điểm $A(0; 1)$, qua điểm $B(-1; \frac{1}{2})$, có đường tiệm cận đứng $x = 1$ và có một điểm cực trị là $C(2; 5)$. Khi đó, $a + b - n$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Hàm số có dạng $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + n}$ (do $m = 1$).

◇ Tiệm cận đứng $x = 1 \Rightarrow n = -1$.

◇ Đồ thị hàm số qua $A(0; 1) \Rightarrow \frac{c}{-1} = 1 \Rightarrow c = -1$.

◇ Đồ thị hàm số qua $B(-1; \frac{1}{2}) \Rightarrow \frac{a - b - 1}{-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a - b = 0$ (1).

◇ Đồ thị hàm số qua $C(2; 5) \Rightarrow \frac{4a + 2b - 1}{1} = 5 \Rightarrow 4a + 2b = 6$ (2).

Từ (1) và (2), ta có $a = 1$ và $b = 1$.

Lúc này đạo hàm của hàm số là $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$.

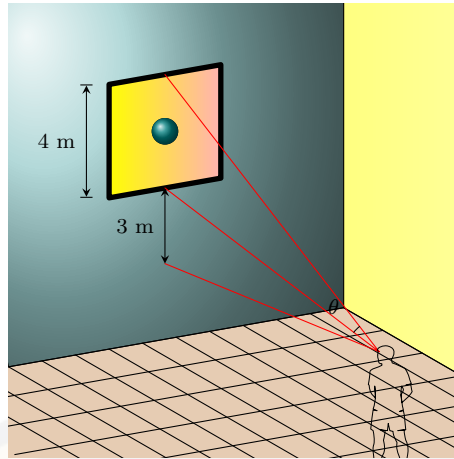
Với $x = 2$ thì $y' = 0$ (thỏa mãn).

Từ đó ta có $a + b - n = 1 + 1 - (-1) = 3$.

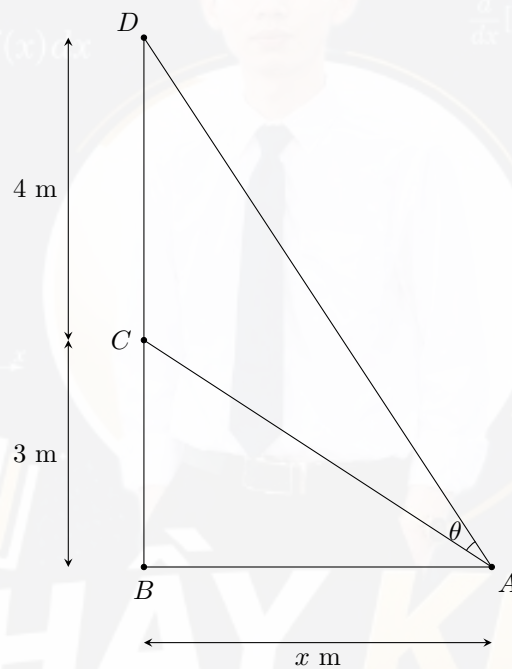
Bài 94. Một bức tranh cao 4 m được treo trên tường có mép dưới cao hơn tầm mắt người quan sát 3 m (như hình vẽ). Người quan sát phải đứng cách tường bao nhiêu mét để có được tầm nhìn

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

thuận lợi nhất (tức là, có góc nhìn θ lớn nhất)?



Hướng dẫn giải.



Đặt $BA = x$, ta có $AC = \sqrt{x^2 + 9}$. Khi đó $\sin D = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 49}}$.

Xét tam giác ACD , ta có

$$\frac{AC}{\sin D} = \frac{CD}{\sin DAC} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 49}}} = \frac{4}{\sin DAC} \Leftrightarrow \sin DAC = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 9} \cdot \sqrt{x^2 + 49}}.$$

Để có được tầm nhìn thuận lợi thì góc nhìn θ phải lớn nhất.

Xét hàm số

$$y = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 9} \cdot \sqrt{x^2 + 49}} = \frac{4x}{\sqrt{(x^2 + 9)(x^2 + 49)}} = \frac{4x}{\sqrt{x^4 + 58x^2 + 441}}, \quad x > 0.$$

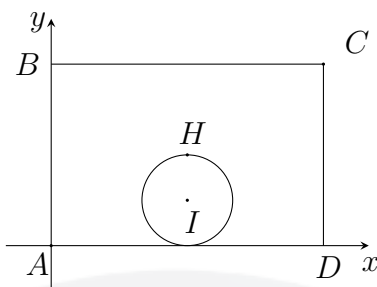
Ta có

$$y' = \frac{-4x^4 + 1764}{(x^4 + 58x^2 + 441)\sqrt{x^4 + 58x^2 + 441}} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{21} \approx 4,58.$$

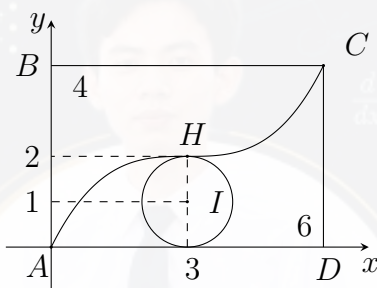
Vậy người đó phải đứng cách tường khoảng 4,58 m thì tầm nhìn là thuận lợi nhất.

Bài 95. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có một cạnh nằm trên trục hoành và hai đỉnh $A(0;0)$, $C(6;4)$. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AC . Đường tròn (C) có tâm $I(3;1)$ và đi qua H .

Người ta muốn thiết kế một dải LED bắt đầu từ điểm A và kết thúc tại C . Dải LED có hình dạng là một phần của đồ thị hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Biết dải LED tiếp xúc với đường tròn (C) tại H , tính $27a + 3b + c + 9d$.



Hướng dẫn giải.



Từ $A(0;0)$ và $C(6;4)$ suy ra trung điểm H là $H\left(\frac{0+6}{2}; \frac{0+4}{2}\right) = H(3;2)$.

Đường tròn (C) có tâm $I(3;1)$ và đi qua $H(3;2)$.

Vì $I(3;1)$ và $H(3;2)$ có cùng hoành độ $x = 3$, nên tiếp tuyến của đường tròn (C) tại H là đường thẳng vuông góc với đoạn IH .

Đoạn IH là đoạn thẳng đứng, song song với trục Oy .

Do đó, tiếp tuyến của (C) tại H là đường thẳng song song với trục Ox , có phương trình $y = 2$.

Độ dốc của tiếp tuyến tại H bằng 0, suy ra $f'(3) = 0$.

Dải LED đi qua A và C và tiếp xúc tại H nên ta có hệ điều kiện

$$\diamond f(0) = 0 \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0.$$

$$\diamond f(6) = 4 \Rightarrow 216a + 36b + 6c + d = 4.$$

$$\diamond f(3) = 2 \Rightarrow 27a + 9b + 3c + d = 2.$$

$$\diamond f'(3) = 0 \Rightarrow 27a + 6b + c = 0.$$

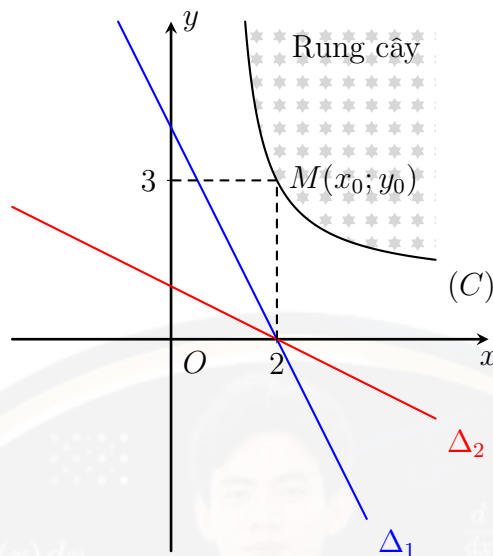
$$\text{Khi đó, ta có hệ } \begin{cases} 216a + 36b + 6c = 4 \\ 27a + 9b + 3c = 2 \\ 27a + 6b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{27} \\ b = -\frac{2}{3} \\ c = 2. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } 27a + 3b + c + 9d = 27\left(\frac{2}{27}\right) + 3\left(-\frac{2}{3}\right) + 2 + 9(0) = 2 + (-2) + 2 + 0 = 2.$$

Bài 96. Mảnh đất vườn của nhà anh Điệp có một phần ranh giới cũng là một phần đường cong $(C): y = \frac{x+a}{x+b}$, bao quanh nó là sông nước. Với hệ trục tọa độ Oxy thích hợp, đơn vị trên mỗi trục là 10 mét thì đường cong (C) đi qua điểm $(2;3)$ và có đường tiệm cận đứng $x = 1$. Hàng ngày anh Điệp phải dùng thuyền máy để vận chuyển trái cây từ khu vườn của mình đến hai tuyến đường $\Delta_1: 2x + y - 4 = 0$ và $\Delta_2: x + 2y - 2 = 0$ cho những người lái buôn từ nơi khác đến. Anh Điệp cần xác định một vị trí $M(x_0; y_0)$ thuộc khu vườn của mình để tổng khoảng cách từ vị trí M

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

đó đến hai tuyến đường Δ_1, Δ_2 là bé nhất. Hỏi khoảng cách từ vị trí được chọn làm gốc toạ độ đến điểm M là bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần chục)?



Hướng dẫn giải. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -b \Rightarrow b = -1$.

Khi đó đồ thị hàm số $y = \frac{x+a}{x+b}$ đi qua $(2; 3) \Rightarrow 3 = \frac{2+a}{2-1} \Rightarrow a = 1$.

Do đó đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x+1}{x-1}$.

Để khoảng cách từ điểm M thuộc khu vườn đến hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 là bé nhất thì điểm M phải thuộc đồ thị hàm số.

Gọi $M\left(x_0; \frac{x_0+1}{x_0-1}\right) \in (C)$ với $x_0 > 1$.

Tổng khoảng cách từ điểm M đến hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 là

$$d = d(M, \Delta_1) + d(M, \Delta_2) = \frac{\left|2x_0 + \frac{x_0+1}{x_0-1} - 4\right|}{\sqrt{5}} + \frac{\left|x_0 + 2 \cdot \frac{x_0+1}{x_0-1} - 2\right|}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5}d = \left|\frac{2x_0^2 - 5x_0 + 5}{x_0 - 1}\right| + \left|\frac{x_0^2 - x_0 + 4}{x_0 - 1}\right| = \frac{3x_0^2 - 6x_0 + 9}{x_0 - 1} \text{ vì } \begin{cases} 2x_0^2 - 5x_0 + 5 > 0 \\ x_0^2 - x_0 + 4 > 0 \\ x_0 - 1 > 0 \end{cases}, \forall x_0 > 1.$$

Đặt $g(x) = \frac{3x^2 - 6x + 9}{x - 1}$ với $x > 1$.

Ta có $g'(x) = \frac{3x^2 - 6x - 3}{(x-1)^2}$; $g'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 + \sqrt{2}$ vì $x > 1$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	1	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	—	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$6\sqrt{2}$	$+\infty$

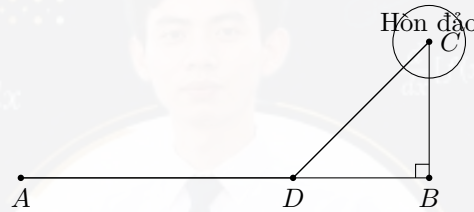
Từ bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ ta có $\min_{(1;+\infty)} g(x) = 6\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{5}d \geq 6\sqrt{2} \Rightarrow d \geq \frac{6\sqrt{10}}{5}$.

Dấu “=” xảy ra khi $x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow M(1 + \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$.

Khoảng cách OM thực tế là

$$10 \cdot \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 10(1 + \sqrt{2})\sqrt{2} \approx 34,1$$

Bài 97. Một người cần đi từ khách sạn A bên bờ biển đến hòn đảo C . Biết rằng khoảng cách từ đảo C đến bờ biển là 10 km, khoảng cách từ khách sạn A đến điểm B trên bờ gần đảo C nhất là 40 km. Người đó có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy (như hình vẽ bên). Biết kinh phí đi đường thủy bằng thuyền là 5 USD/km, đi đường bộ bằng xe taxi là 3 USD/km. Hỏi người đó phải đi đường bộ một khoảng bao nhiêu để kinh phí nhỏ nhất? (Kết quả ghi dưới dạng thập phân)



Hướng dẫn giải. Vì B là điểm trên bờ gần hòn đảo C nhất nên suy ra $BC \perp AB$.

Theo đề bài, ta có $AB = 40$ (km), $BC = 10$ (km).

Gọi D là điểm bất kì thuộc đoạn AB (D có thể trùng với A hoặc B).

Đặt $AD = x$ (km), $x \in [0; 40]$.

Ta có $BD = 40 - x \Rightarrow DC = \sqrt{(40 - x)^2 + 10^2} = \sqrt{x^2 - 80x + 1700}$.

Để đi từ A đến C , thì người đó có thể phải đi đường bộ trên đoạn AD và đi đường thủy trên đoạn DC .

Do đó tổng kinh phí đi từ A đến C là:

$$f(x) = 3x + 5\sqrt{(40 - x)^2 + 10^2} \Leftrightarrow f(x) = 3x + 5\sqrt{x^2 - 80x + 1700} \text{ (USD)}.$$

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = \mathbb{R}$, nhưng ta chỉ xét trên $[0; 40]$.

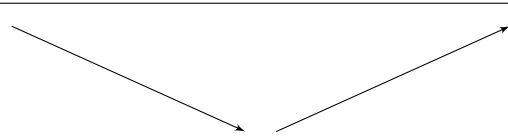
$$f'(x) = 3 + 5 \cdot \frac{2x - 80}{2\sqrt{x^2 - 80x + 1700}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{3\sqrt{x^2 - 80x + 1700} + 5x - 200}{\sqrt{x^2 - 80x + 1700}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 - 80x + 1700} = 200 - 5x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 200 - 5x \geq 0 \\ 9(x^2 - 80x + 1700) = (200 - 5x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 40 \\ 16x^2 - 1280x + 24700 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{95}{2} \text{ (loại)} \\ x = \frac{65}{2} \in [0; 40] \end{cases}.$$

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

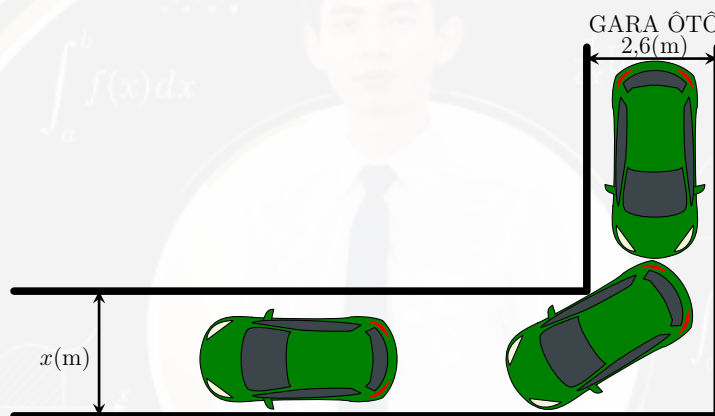
Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{65}{2}$	40
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0; 40]$ tại điểm $x = \frac{65}{2}$.

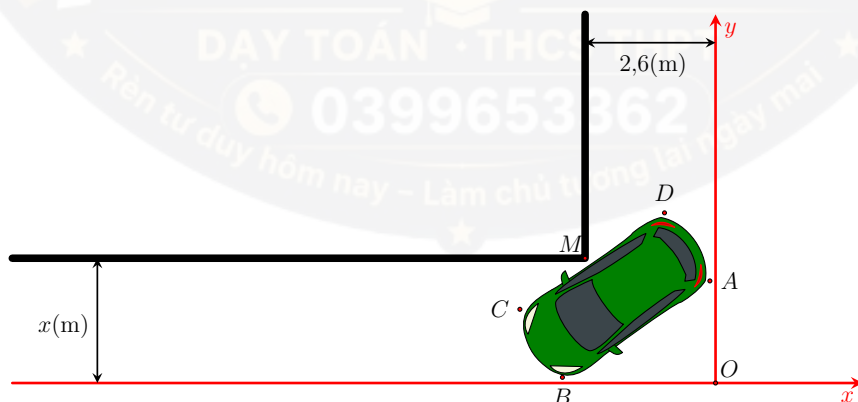
Vậy người đó phải đi đường bộ một khoảng $\frac{65}{2} = 32,5$ km để kinh phí nhỏ nhất.

Bài 98. Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA ÔTÔ của bác An.



Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng x (m), đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng 2,6 (m). Biết kích thước xe ô tô là $5 \times 1,9$ m (chiều dài $\times$ chiều rộng). Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô, người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài là 5 (m), chiều rộng 1,9 (m). Tìm chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên để ô tô có thể đi vào GARA được? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười; giả thiết ô tô không đi ra ngoài đường, không đi nghiêng và ô tô không bị biến dạng).

Hướng dẫn giải.



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ. Khi đó, $M(-2,6; m)$.

Gọi $B(-a; 0)$, suy ra $A(0; \sqrt{25 - a^2})$, $a > 0$.

Từ đó, phương trình của AB là

$$\frac{x}{-a} + \frac{y}{\sqrt{25 - a^2}} = 1.$$

Do $CD \parallel AB$ nên phương trình CD là

$$\frac{x}{-a} + \frac{y}{\sqrt{25-a^2}} - k = 0.$$

Khoảng cách giữa AB và CD là chiều rộng của ô tô và bằng 1,9 m nên

$$\frac{|k-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{25-a^2}}\right)^2}} = 1,9 \Leftrightarrow k = 1 + \frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}}.$$

Phương trình CD được viết lại là

$$\frac{x}{-a} + \frac{y}{\sqrt{25-a^2}} - 1 - \frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}} = 0.$$

Điều kiện để ô tô đi qua được là M và O nằm khác phía đối với đường thẳng CD .

Suy ra

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2,6}{a} + \frac{m}{\sqrt{25-a^2}} - 1 - \frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}} \right) \left(-1 - \frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}} \right) \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{2,6}{a} + \frac{m}{\sqrt{25-a^2}} - 1 - \frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & m \geq \sqrt{25-a^2} + \frac{9,5}{a} - \frac{2,6\sqrt{25-a^2}}{a} \quad (\text{đúng với mọi } a \in (0; 5]). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(a) = \sqrt{25-a^2} + \frac{9,5}{a} - \frac{2,6\sqrt{25-a^2}}{a}$ trên nửa khoảng $(0; 5]$.

Ta có $f'(a) = \frac{65 - 9,5\sqrt{25-a^2} - a^3}{a^2\sqrt{25-a^2}} \Rightarrow f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 3 \in (0; 5)$.

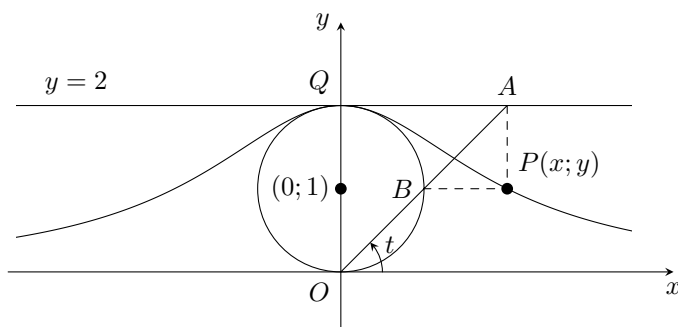
Bảng biến thiên

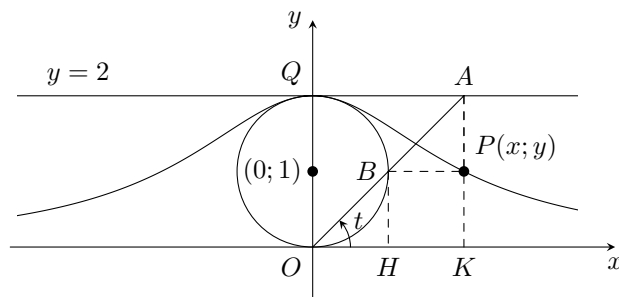
a	0	3	5
$f'(a)$	+	0	-
$f(a)$	$-\infty$	$\frac{37}{10}$	$\frac{19}{10}$

Do đó, $m \geq f(a), \forall a \in (0; 5] \Leftrightarrow m \geq \frac{37}{10} = 3,7$.

Vậy chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên bằng 3,7.

Bài 99. Hình vẽ sau mô tả một đường cong Agnesi và được xây dựng trong hệ tọa độ Oxy như sau: vẽ một đường tròn có tâm $I(0; 1)$ và bán kính bằng 1, từ điểm O kẻ một đường thẳng cắt đường tròn tại điểm thứ 2 là điểm B và cắt đường thẳng $y = 2$ tại điểm A . Gọi P là giao điểm của đường thẳng qua A và vuông góc với Ox và đường thẳng qua B vuông góc với Oy . Tập hợp các điểm P tạo thành một đường cong $y = f(x)$ gọi là đường cong Agnesi. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hệ số góc lớn nhất bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).





Tam giác AOQ vuông tại Q có QB là đường cao, $OA = \sqrt{OK^2 + AK^2} = \sqrt{x^2 + 4}$

Suy ra $OB \cdot OA = OQ^2 \Rightarrow OB = \frac{OQ^2}{OA} = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

$$\text{Ta có } \frac{BH}{AK} = \frac{OB}{OA} \Rightarrow BH = \frac{AK \cdot OB}{OA}.$$

Xét hàm số $y = \frac{2 \cdot \frac{4}{\sqrt{x^2+4}}}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{8}{x^2+4} \Rightarrow y' = \frac{-8 \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = -\frac{16x}{(x^2+4)^2}$.

$$\begin{aligned} y'' &= -16 \cdot \frac{(x^2 + 4)^2 - 2(x^2 + 4) \cdot 2x \cdot x}{(x^2 + 4)^4} \\ &= -16 \cdot \frac{(x^2 + 4)(x^2 + 4 - 4x^2)}{(x^2 + 4)^4} \\ &= -16 \cdot \frac{(x^2 + 4)(-3x^2 + 4)}{(x^2 + 4)^4} \\ &= -16 \cdot \frac{(-3x^2 + 4)}{(x^2 + 4)^3} . \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} y'' = 0 &\Leftrightarrow -16 \cdot \frac{-3x^2 + 4}{(x^2 + 4)^3} = 0 \\ &\Leftrightarrow -3x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \\ &\Leftrightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

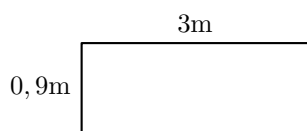
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{-2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y		$\frac{3\sqrt{3}}{8}$		$\frac{-3\sqrt{3}}{8}$	

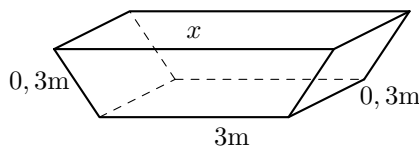
Dựa vào bảng biến thiên suy ra $y'_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0,6$.

Bài 100. Để làm một máng xối nước có dạng hình lăng trụ, từ một tấm tôn kích thước $0,9\text{m} \times 3\text{m}$

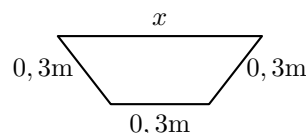
người ta gấp tấm tôn đó như hình vẽ dưới. Biết mặt cắt của máng xối là một hình thang cân. Hỏi x (m) bằng bao nhiêu thì thể tích máng xối lớn nhất?



Tấm tôn



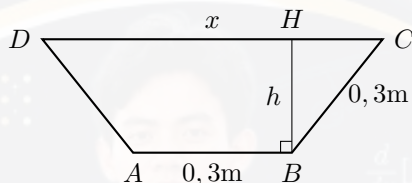
Máng xối



Mặt cắt

Hướng dẫn giải.

Gọi hình thang cân $ABCD$ là mặt cắt của máng xối và h (m) là chiều cao của hình thang cân.



Vì chiều cao bằng chiều dài tấm tôn nên thể tích máng xối lớn nhất khi diện tích hình thang cân lớn nhất.

$$\text{Ta có } S_{ABCD} = \frac{h}{2}(x + 0,3); \text{ Ta có } HC = \frac{DC - AB}{2} = \frac{x - 0,3}{2}.$$

$$\text{Suy ra } h = \sqrt{BC^2 - HC^2} = \sqrt{(0,3)^2 - \frac{(x - 0,3)^2}{4}} = \frac{\sqrt{-x^2 + 0,6x + 0,27}}{2}.$$

$$\text{Khi đó: } S_{ABCD} = \frac{\sqrt{-x^2 + 0,6x + 0,27}}{4}(x + 0,3).$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = S_{ABCD} = \frac{1}{4}(x + 0,3)\sqrt{-x^2 + 0,6x + 0,27} \text{ với } 0,3 < x < 0,9.$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{4}\sqrt{-x^2 + 0,6x + 0,27} + \frac{1}{4}(x + 0,3)\frac{-x + 0,3}{\sqrt{-x^2 + 0,6x + 0,27}} = \frac{1}{4}\frac{-2x^2 + 0,6x + 0,36}{\sqrt{-x^2 + 0,6x + 0,27}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 0,6x + 0,36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -0,3 \text{ (loại)} \\ x = 0,6 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0,3	0,6	0,9
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ lớn nhất khi $x = 0,6$.

Vậy thể tích máng xối lớn nhất khi $x = 0,6$ (m).

Bài 101. Tại một công ty sản xuất đồ chơi an toàn cho trẻ em, công ty phải chi 34 567 USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi X , công ty phải trả 8 USD cho nguyên liệu ban đầu và nhân công. Gọi x ($x \geq 1$) là số đồ chơi X mà công ty đã sản xuất và $C(x)$ (đơn vị: USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi X . Khi đó chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi X là hàm số $\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$ xác định trên $[1; +\infty)$. Khi số đồ chơi sản xuất tăng lên thì chi phí trung bình cho

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

mỗi sản phẩm đồ chơi X giảm xuống nhưng không xuống dưới mức tối thiểu là bao nhiêu USD?

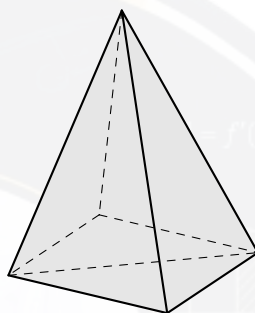
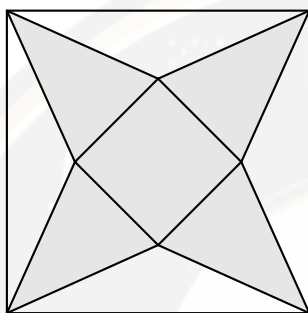
Hướng dẫn giải. Ta có $C(x) = 34\,567 + 8x$.

$$\text{Khi đó } \overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{34\,567 + 8x}{x} = 8 + \frac{34\,567}{x}.$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{C}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(8 + \frac{34\,567}{x} \right) = 8.$$

Mà $\overline{C}(x)$ là hàm nghịch biến trên $[1; +\infty)$ nên chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi X giảm xuống thấp nhất và không dưới 8 USD.

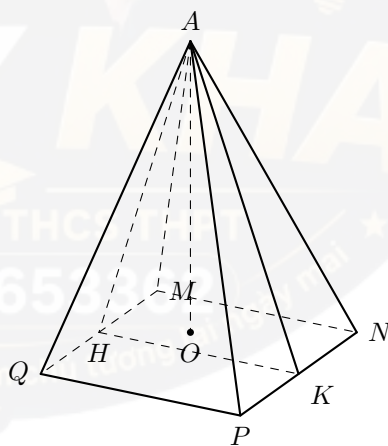
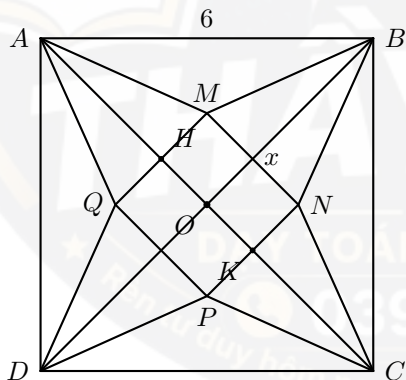
Bài 102. Từ một tấm bìa mỏng hình vuông cạnh 6 dm, cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy là cạnh của hình vuông ban đầu và đỉnh là đỉnh của một hình vuông nhỏ phía trong rồi gấp lên, ghép lại tạo thành một khối chóp tứ giác đều như hình sau.



Thể tích của khối chóp có giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu decimét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?

Hướng dẫn giải.

Tấm bìa hình vuông $ABCD$, sau khi gấp lên để A, B, C, D trùng nhau ta được hình chóp đều $A.MNPQ$ đáy là hình vuông $MNPQ$ tâm O có cạnh bằng x dm, đường cao $h = AO$ dm. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của MQ và NP .



Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 6 dm nên $AC = 6\sqrt{2}$ dm, $HK = x$ dm, $x > 0$.

$$\text{Ta có } AH = \frac{AC - HK}{2} = \frac{6\sqrt{2} - x}{2} = 3\sqrt{2} - \frac{x}{2} \text{ dm.}$$

$$\text{Khi đó } h = AO = \sqrt{AH^2 - OH^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{2} - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{18 - 3\sqrt{2}x} \text{ (dm).}$$

Thể tích của khối chóp là:

$$V = \frac{1}{3}x^2h = \frac{1}{3}x^2\sqrt{18 - 3\sqrt{2}x} = \frac{1}{3}\sqrt{x^4(18 - 3\sqrt{2}x)} \text{ dm}^3 \text{ (điều kiện: } 18 - 3\sqrt{2}x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3\sqrt{2}).$$

Xét hàm số $f(x) = x^4(18 - 3\sqrt{2}x)$ với $0 < x \leq 3\sqrt{2}$.

Ta có: $f'(x) = x^3(-15\sqrt{2}x + 72)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (loại) hoặc $x = \frac{12\sqrt{2}}{5}$ (nhận).

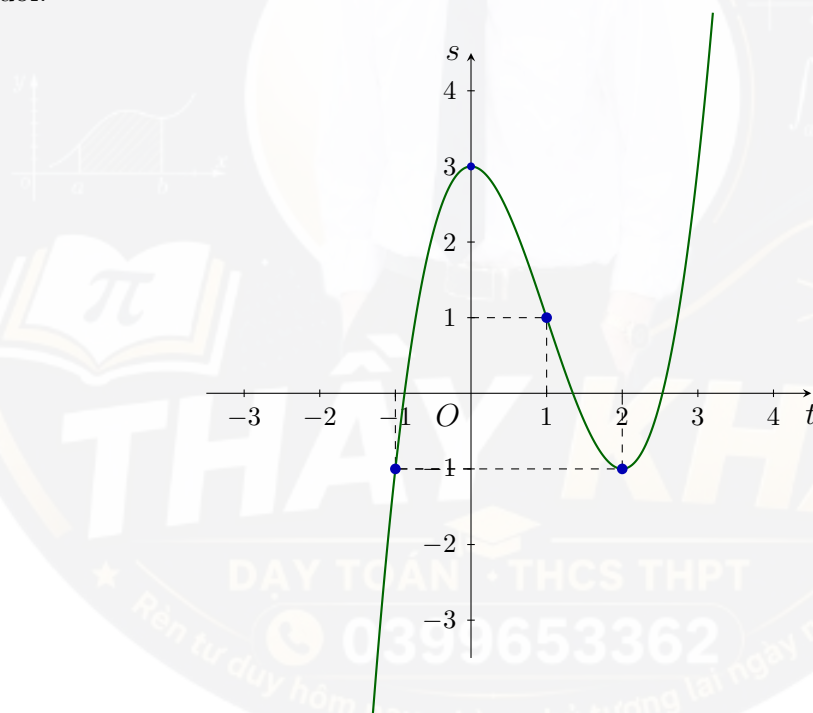
Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{12\sqrt{2}}{5}$	$3\sqrt{2}$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	$\nearrow \approx 478$	$\searrow 0$	

Từ bảng biến thiên, ta có $\max_{(0; 3\sqrt{2}]} f(x) = f\left(\frac{12\sqrt{2}}{5}\right) \approx 478$.

Vậy thể tích của khối chóp có giá trị lớn nhất bằng $V_{\max} = \frac{1}{3} \sqrt{f\left(\frac{12\sqrt{2}}{5}\right)} \approx 7,3 \text{ dm}^3$.

Bài 103. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Biết rằng đồ thị của hàm số $S(t)$ là đường cong như hình bên dưới:



Tính vận tốc (m/s) của chuyển động tại thời điểm gia tốc bằng 12 m/s^2 .

Hướng dẫn giải. Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(-1; -1)$, $B(0; 3)$, $C(1; 1)$, $D(2; -1)$ nên ta

có hệ phương trình:
$$\begin{cases} -a + b - c + d = -1 \\ d = 3 \\ a + b + c + d = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d = -1 \end{cases} \quad (*)$$

Giải hệ phương trình ta được $a = 1$; $b = -3$; $c = 0$; $d = 3$. Do đó $S = t^3 - 3t^2 + 3$.

Vận tốc của chuyển động là đạo hàm cấp một của quãng đường: $v = S' = 3t^2 - 6t$.

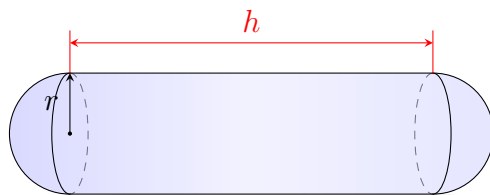
Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

Gia tốc của chuyển động là đạo hàm cấp hai của quãng đường: $a = S'' = 6t - 6$.

Theo đề bài: $a = 6t - 6 = 12 \Rightarrow t = 3$.

Khi đó vận tốc của chuyển động là $v(3) = S'(3) = 3(3)^2 - 6(3) = 27 - 18 = 9$ m/s.

Bài 104. Một thùng chứa nhiên liệu gồm phần ở giữa là một hình trụ có chiều dài h mét ($h > 0$) và hai đầu là các nửa hình cầu bán kính r ($r > 0$) (hình vẽ).



Biết rằng thể tích của thùng chứa là $144\,000\pi$ m³. Để sơn mặt ngoài của phần hình cầu cần 20\,000 đồng cho 1 m², còn sơn mặt ngoài cho phần hình trụ cần 10\,000 đồng cho 1 m². Xác định r để chi phí cho việc sơn diện tích mặt ngoài thùng chứa (bao gồm diện tích xung quanh hình trụ và diện tích hai nửa hình cầu) là nhỏ nhất, biết rằng bán kính r không được vượt quá 50 m.

Hướng dẫn giải. Thể tích của thùng chứa gồm thể tích hình trụ và thể tích của hai nửa hình cầu (tức là một hình cầu):

$$V = V_{\text{trụ}} + V_{\text{cầu}} = \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3 = 144\,000\pi \Rightarrow r^2 h = 144\,000 - \frac{4}{3}r^3$$

$$\text{Từ đó ta có chiều dài hình trụ: } h = \frac{144\,000}{r^2} - \frac{4r}{3}.$$

$$\text{Vì } h > 0 \text{ nên } 144\,000 - \frac{4}{3}r^3 > 0 \Leftrightarrow r < 30\sqrt[3]{4} \approx 47,6 \text{ m.}$$

$$\text{Diện tích mặt ngoài của phần hình cầu là: } S_1 = 4\pi r^2 \text{ (m}^2\text{).}$$

$$\text{Diện tích xung quanh của phần hình trụ là: } S_2 = 2\pi r h \text{ (m}^2\text{).}$$

Tổng chi phí sơn (đơn vị: đồng) là:

$$C(r) = 20\,000 \cdot S_1 + 10\,000 \cdot S_2 = 20\,000 \cdot (4\pi r^2) + 10\,000 \cdot (2\pi r h)$$

$$C(r) = 80\,000\pi r^2 + 20\,000\pi r \left(\frac{144\,000}{r^2} - \frac{4r}{3} \right)$$

$$C(r) = 80\,000\pi r^2 + \frac{2\,880\,000\,000\pi}{r} - \frac{80\,000\pi r^2}{3} = \frac{160\,000\pi r^2}{3} + \frac{2\,880\,000\,000\pi}{r}$$

Xét hàm số $C(r)$ trên khoảng $(0; 50]$, ta có đạo hàm:

$$C'(r) = \frac{320\,000\pi r}{3} - \frac{2\,880\,000\,000\pi}{r^2}$$

$$C'(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{320\,000\pi r}{3} = \frac{2\,880\,000\,000\pi}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = \frac{2\,880\,000\,000 \cdot 3}{320\,000} = 27\,000 \Leftrightarrow r = 30.$$

Bảng biến thiên:

r	0	30	50
$C'(r)$	—	0	+
$C(r)$	$+\infty$	$C(30)$	$C(50)$

Dựa vào bảng biến thiên, chi phí thấp nhất khi $r = 30$ m (giá trị này thỏa mãn điều kiện $r \leq 50$).

Bài 105. Một công ty sản xuất và bán ra 100 sản phẩm mỗi ngày với chi phí sản xuất là 1 triệu đồng/sản phẩm. Công ty phân phối số sản phẩm này đến hai cửa hàng bán lẻ. Do sự khác biệt về vị trí, nhu cầu, mặt bằng,... nên mỗi cửa hàng có chi phí vận hành và doanh thu khác nhau theo số lượng sản phẩm bán ra.

Tại cửa hàng thứ nhất, chi phí vận hành cho mỗi sản phẩm là 14 nghìn đồng. Doanh thu từ việc bán x_1 sản phẩm tại cửa hàng này ($0 \leq x_1 \leq 100, x_1 \in \mathbb{N}$) được mô tả bởi hàm số

$$R_1(x_1) = -6x_1^2 + 2000x_1 \quad (\text{nghìn đồng}).$$

Tại cửa hàng thứ hai, chi phí vận hành cho mỗi sản phẩm là 30 nghìn đồng. Doanh thu từ việc bán x_2 sản phẩm tại cửa hàng này ($0 \leq x_2 \leq 100, x_2 \in \mathbb{N}$) được mô tả bởi hàm số

$$R_2(x_2) = -6x_2^2 + 1800x_2 \quad (\text{nghìn đồng}).$$

(Chi phí vận hành bao gồm các khoản chi phí dùng cho quảng cáo, vận tải,...). Lợi nhuận của công ty là tổng lợi nhuận từ việc bán sản phẩm từ hai cửa hàng.

Hỏi lợi nhuận lớn nhất mà công ty đạt được là bao nhiêu triệu đồng? (giả sử số sản phẩm ở cả hai cửa hàng đều được bán hết mỗi ngày và kết quả được làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

Hướng dẫn giải. Gọi x_1 và x_2 lần lượt là số lượng sản phẩm phân phối cho cửa hàng thứ nhất và cửa hàng thứ hai.

Theo đề bài, ta có: $x_1 + x_2 = 100 \Rightarrow x_2 = 100 - x_1$ ($0 \leq x_1 \leq 100, x_1 \in \mathbb{N}$).

Đổi đơn vị: 1 triệu đồng = 1000 nghìn đồng.

Tổng chi phí của công ty bao gồm chi phí sản xuất và chi phí vận hành tại hai cửa hàng:

$$\begin{aligned} C &= 1000(x_1 + x_2) + 14x_1 + 30x_2 \\ &= 1000(100) + 14x_1 + 30(100 - x_1) \\ &= 100000 + 14x_1 + 3000 - 30x_1 \\ &= 103000 - 16x_1 \quad (\text{nghìn đồng}). \end{aligned}$$

Tổng doanh thu từ hai cửa hàng là:

$$\begin{aligned} R &= R_1(x_1) + R_2(x_2) \\ &= -6x_1^2 + 2000x_1 - 6(100 - x_1)^2 + 1800(100 - x_1) \\ &= -6x_1^2 + 2000x_1 - 6(10000 - 200x_1 + x_1^2) + 180000 - 1800x_1 \\ &= -12x_1^2 + 1400x_1 + 120000 \quad (\text{nghìn đồng}). \end{aligned}$$

Hàm lợi nhuận $P(x_1)$ của công ty là:

$$\begin{aligned} P(x_1) &= R - C \\ &= (-12x_1^2 + 1400x_1 + 120000) - (103000 - 16x_1) \\ &= -12x_1^2 + 1416x_1 + 17000 \quad (\text{nghìn đồng}). \end{aligned}$$

Xét hàm số $P(x_1)$ trên đoạn $[0; 100]$, ta có $P'(x_1) = -24x_1 + 1416$.

Cho $P'(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1416}{24} = 59$ (thỏa mãn).

Vì hệ số của x_1^2 âm nên đồ thị là parabol bề lõm hướng xuống, đạt giá trị lớn nhất tại đỉnh.

Lợi nhuận lớn nhất tại $x_1 = 59$:

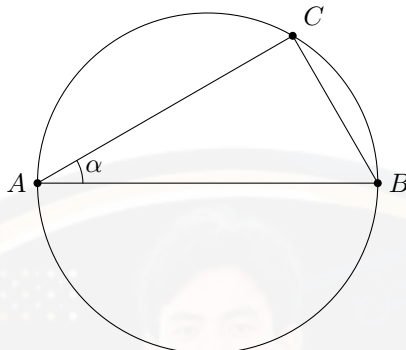
$$P(59) = -12(59)^2 + 1416(59) + 17000 = 58772 \quad (\text{nghìn đồng}).$$

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

Đổi sang đơn vị triệu đồng: 58,772 triệu đồng.

Làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất, ta được: 58,8

Bài 106. Một bờ hồ hình tròn có bán kính bằng 2 km, đường kính AB (tham khảo hình vẽ). Từ điểm A anh Tài chèo một chiếc thuyền với vận tốc 3 km/h đến điểm C trên hồ, rồi chạy dọc theo thành hồ đến vị trí B với vận tốc 6 km/h (C không trùng với A và B).



Thời gian ngắn nhất mà anh Tài di chuyển từ A đến B là bao nhiêu (thời gian tính bằng giờ, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn giải. Gọi $R = 2$ km là bán kính của hồ, suy ra đường kính $AB = 4$ km.

Gọi $\alpha = \angle CAB$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Vì AB là đường kính nên tam giác ABC vuông tại C .

Độ dài quãng đường chèo thuyền là: $AC = AB \cdot \cos \alpha = 4 \cos \alpha$ (km).

Góc ở tâm chắn cung BC là $\angle COB = 2\angle CAB = 2\alpha$ (đơn vị radian).

Độ dài quãng đường chạy bộ dọc theo bờ hồ (cung BC) là: $l_{BC} = R \cdot 2\alpha = 2 \cdot 2\alpha = 4\alpha$ (km).

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là:

$$f(\alpha) = \frac{AC}{3} + \frac{l_{BC}}{6} = \frac{4 \cos \alpha}{3} + \frac{4\alpha}{6} = \frac{4}{3} \cos \alpha + \frac{2}{3} \alpha \text{ (giờ)}.$$

Xét hàm số $f(\alpha)$ trên khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$:

$$f'(\alpha) = -\frac{4}{3} \sin \alpha + \frac{2}{3}.$$

$$\text{Cho } f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

Bảng biến thiên:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	
$f'(\alpha)$		+	0	−
$f(\alpha)$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{3}$	

Giá trị tại các đầu mút và điểm cực trị:

$$\diamond f(0) = \frac{4}{3} \approx 1,33.$$

$$\diamond f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{9} \approx 1,50.$$

$$\diamond f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \approx 1,047.$$

So sánh các giá trị, ta thấy thời gian ngắn nhất $f_{\min} \approx 1,047$ giờ.

Làm tròn đến hàng phần chục ta được kết quả là 1.

Bài 107. Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ mg/l của thuốc trong máu sau x phút (kể từ khi bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức $C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$. Để đưa ra những lời khuyên và cách xử lý phù hợp cho bệnh nhân, ta cần tìm khoảng thời gian mà nồng độ của thuốc trong máu đang tăng. Hãy cho biết hàm nồng độ thuốc trong máu $C(x)$ đạt giá trị cực đại là bao nhiêu trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

Hướng dẫn giải. Xét hàm số $C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$ trên đoạn $[0; 6]$.

$$\text{Đạo hàm: } C'(x) = \frac{30(x^2 + 2) - 30x(2x)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{60 - 30x^2}{(x^2 + 2)^2}.$$

$$\text{Cho } C'(x) = 0 \Leftrightarrow 60 - 30x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \approx 1,41 \text{ (nhận vì } x \in [0; 6]).$$

Ta có các giá trị biên và cực trị:

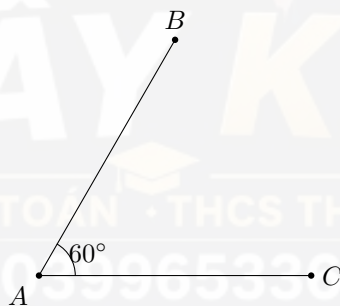
$$\diamond C(0) = 0.$$

$$\diamond C(\sqrt{2}) = \frac{30\sqrt{2}}{2 + 2} = 7,5\sqrt{2} \approx 10,6066.$$

$$\diamond C(6) = \frac{30 \cdot 6}{6^2 + 2} = \frac{180}{38} \approx 4,74.$$

Vậy giá trị cực đại của nồng độ thuốc trong khoảng 6 phút đầu là 10,6 mg/l.

Bài 108. Vào lúc 12 giờ 7 phút anh Hùng chạy xe xuất phát từ điểm A và đi đến điểm C với vận tốc là 60 (km/h). Biết rằng 7 phút trước đó anh Quang chạy xe xuất phát từ điểm B với vận tốc là 30 (km/h) sao cho hai quãng đường của hai xe hợp nhau một góc 60° như hình vẽ dưới đây. Cho biết $AB = 42$ (km) và vào lúc a giờ b phút thì anh Quang và anh Hùng ở vị trí có cực li gần nhất để vẫy tay chào nhau ($a, b \in \mathbb{N}^*$). Tính $a + b$? Xem như hai xe đều chuyển động đều và không có tác dụng ngoại lực hay yếu tố nào khác.



Hướng dẫn giải. Chọn mốc thời gian là 12 giờ 00 phút. Gọi t (giờ) là thời gian kể từ mốc này.

- Vị trí anh Quang: Lúc $t = 0$ đang ở B. Anh Quang đi từ B về A với vận tốc 30 km/h. Khoảng cách từ anh Quang đến A là $x = 42 - 30t$ (km).

- Vị trí anh Hùng: Anh Hùng xuất phát từ A lúc 12 giờ 7 phút (tức là $t = \frac{7}{60}$ giờ). Khoảng cách từ anh Hùng đến A là $y = 60(t - \frac{7}{60}) = 60t - 7$ (km).

Khoảng cách giữa hai xe là d , theo định lý hàm số cos trong tam giác: $d^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 60^\circ = x^2 + y^2 - xy$.

$$d^2 = (42 - 30t)^2 + (60t - 7)^2 - (42 - 30t)(60t - 7).$$

$$\text{Khai triển và rút gọn: } d^2 = 6300t^2 - 6090t + 2107.$$

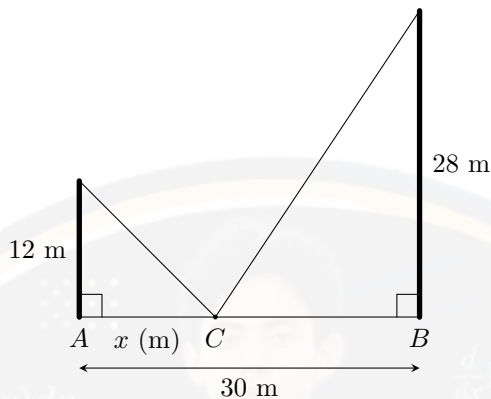
Đây là một parabol bề lõm hướng lên, đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = \frac{-(-6090)}{2 \cdot 6300} = \frac{6090}{12600} = \frac{29}{60}$ (giờ).

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

Đổi $t = \frac{29}{60}$ giờ = 29 phút.

Thời điểm đó là 12 giờ 29 phút. Suy ra $a = 12, b = 29$. Vậy $a + b = 12 + 29 = 41$.

Bài 109. Có hai cây cột, một cây cao 12 m và một cây cao 28 m đứng cách nhau 30 m. Chúng được giữ bằng hai sợi dây gắn vào một cọc duy nhất nổi từ mặt đất đến đỉnh mỗi cột. Tổng chiều dài ngắn nhất của hai sợi dây là bao nhiêu mét?



Hướng dẫn giải. Ta có $AC = x, BC = 30 - x$ với $x \in (0; 30)$.

Tổng chiều dài của hai sợi dây là

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^2 + 12^2} + \sqrt{(30 - x)^2 + 28^2} \\ &= \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{(30 - x)^2 + 784}. \end{aligned}$$

Ta có $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} - \frac{30 - x}{\sqrt{(30 - x)^2 + 784}}$. Khi đó

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} - \frac{30 - x}{\sqrt{(30 - x)^2 + 784}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} &= \frac{30 - x}{\sqrt{(30 - x)^2 + 784}} \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 + 144} &= \frac{(30 - x)^2}{(30 - x)^2 + 784} \\ \Leftrightarrow x^2(30 - x)^2 + 784x^2 &= x^2(30 - x)^2 + 144(30 - x)^2 \\ \Leftrightarrow 784x^2 &= 144(30 - x)^2 \\ \Leftrightarrow 28x &= 12(30 - x) \text{ (do } x \in (0; 30)) \\ \Leftrightarrow x &= 9 \text{ (nhận)}. \end{aligned}$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	0	9	30
$f'(x)$		0	+
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$\nearrow f(30)$
		50	

Vậy tổng chiều dài ngắn nhất của hai sợi dây là 50 m.

Bài 110. Một đại lý nhập khẩu trái cây tươi để phân phối cho các cửa hàng. Mỗi lần nhập khẩu trái cây, khoảng chi phí vận chuyển (không đổi) là 25 triệu đồng. Chi phí bảo quản mỗi tạ trái cây

trong kho là 80 nghìn đồng/ngày. Thời gian bảo quản tối đa 10 ngày. Biết rằng, kể từ ngày đầu tiên nhập hàng, đại lý sẽ phân phối tới các cửa hàng 25 tạ trái cây mỗi ngày. Mỗi lần nhập hàng, đại lý phải nhập đủ trái cây cho bao nhiêu ngày phân phối để chi phí trung bình cho mỗi ngày thấp nhất (bao gồm chi phí vận chuyển và chi phí bảo quản trong kho)?

Hướng dẫn giải. Gọi x là số ngày phân phối trái cây cho mỗi lần nhập hàng ($1 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{N}$).

Mỗi ngày phân phối 25 tạ, nên tổng khối lượng nhập mỗi lần là $25x$ (tạ).

- Chi phí vận chuyển cố định: 25 000 (nghìn đồng).
- Chi phí bảo quản:
- Ngày 1: Phân phối 25 tạ, còn lại $25(x-1)$ tạ cần bảo quản.
- Ngày 2: Phân phối 25 tạ, còn lại $25(x-2)$ tạ cần bảo quản.
- ...
- Ngày x : Phân phối hết, còn 0 tạ bảo quản.

Tổng chi phí bảo quản là: $80 \cdot [25(x-1) + 25(x-2) + \dots + 25 \cdot 1] = 80 \cdot 25 \cdot \frac{(x-1)x}{2} = 1000(x^2 - x)$ (nghìn đồng).

Tổng chi phí cho một lần nhập và phân phối trong x ngày là: $T(x) = 25\,000 + 1000x^2 - 1000x$ (nghìn đồng).

Chi phí trung bình mỗi ngày là: $f(x) = \frac{T(x)}{x} = \frac{25\,000}{x} + 1000x - 1000$ (nghìn đồng).

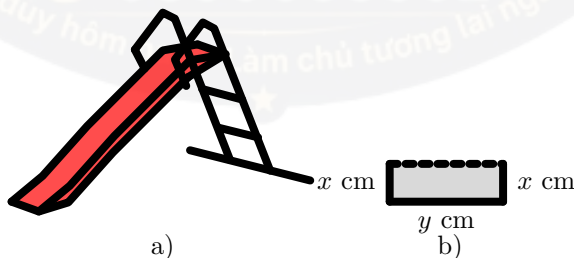
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\frac{25\,000}{x}$ và $1000x$:

$$f(x) \geq 2\sqrt{\frac{25\,000}{x} \cdot 1000x} - 1000 = 2 \cdot 5000 - 1000 = 9000.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{25\,000}{x} = 1000x \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 5$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy đại lý nên nhập hàng cho 5 ngày phân phối để chi phí trung bình mỗi ngày thấp nhất.

Bài 111. Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em (Hình a) được uốn từ một tấm kim loại có bề rộng 80 cm, mặt cắt được mô tả ở Hình b. Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích mặt cắt càng lớn thì càng đảm bảo an toàn cho trẻ em. Với x đạt giá trị bằng bao nhiêu thì mức độ đảm bảo an toàn của cầu trượt đạt cực đại?



Hướng dẫn giải. Do tấm kim loại có bề rộng 80 cm nên ta có: $2x + y = 80 \Leftrightarrow y = 80 - 2x$.

Để có thể thiết kế được máng trượt thì $y > 0 \Leftrightarrow 80 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 40$. Suy ra $0 < x < 40$.

Diện tích của mặt cắt máng trượt là: $S = xy = x(80 - 2x) = -2x^2 + 80x$.

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

Ta có:

$$S(x) = -2x^2 + 80x \text{ với } x \in (0; 40);$$

$$S'(x) = -4x + 80$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 80 = 0 \Leftrightarrow x = 20.$$

Bảng biến thiên của hàm số $S(x)$ như sau:

x	0	20	40
$S'(x)$		+	-
$S(x)$	0	800	0

Do đó, hàm số $S(x)$ đạt cực đại tại $x = 20$ và $S_{CD} = 800$.

Vậy mức độ đảm bảo an toàn của cầu trượt đạt cực đại thì $x = 20$ (cm).

Bài 112. Công ty chứng khoán VNStock cần xử lý 18 000 lệnh giao dịch trong một ngày làm việc (8 giờ). Hệ thống gồm các máy chủ xử lý với thông số như sau

- ◇ Năng suất 250 lệnh/giờ/máy.
- ◇ Chi phí triển khai 15 triệu đồng/máy (cài đặt ban đầu).
- ◇ Chi phí vận hành điện và bảo trì 120 000 đồng/giờ/máy.
- ◇ Chi phí nhân viên giám sát 8 triệu đồng/giờ (trả theo giờ làm việc thực tế).

Tìm chi phí thấp nhất mà công ty phải bỏ ra để thực hiện số lượng giao dịch nói trên (làm tròn đến hàng đơn vị của triệu đồng).

Hướng dẫn giải. Gọi x là số máy chủ cần dùng ($x \in \mathbb{N}$) và t là thời gian chạy máy ($0 < t \leq 8$).

$$\text{Tổng số lệnh xử lý là } 250 \cdot x \cdot t = 18\,000 \Rightarrow x \cdot t = 72 \Rightarrow t = \frac{72}{x}.$$

$$\text{Vì thời gian tối đa là 8 giờ nên } \frac{72}{x} \leq 8 \Rightarrow x \geq 9.$$

Tiền thuê máy $15x$.

$$\text{Tiền điện } 0,12 \cdot x \cdot t = 0,12 \cdot 72 = 8,64.$$

$$\text{Tiền giám sát } 8 \cdot t = 8 \cdot \frac{72}{x} = \frac{576}{x}.$$

$$\text{Tổng chi phí } f(x) = 15x + \frac{576}{x} + 8,64.$$

$$\text{Xét hàm } f(x) \text{ với } x \geq 9, \text{ ta có đạo hàm } f'(x) = 15 - \frac{576}{x^2}.$$

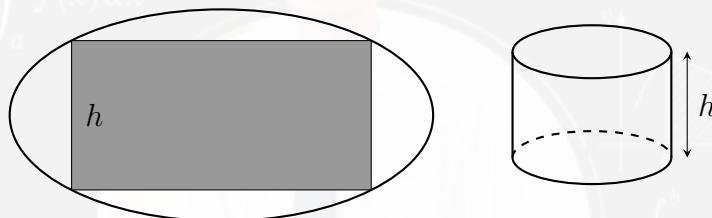
$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 38,4 \Rightarrow x = \frac{8\sqrt{15}}{5}.$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{8\sqrt{15}}{5}$			9	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+		+
$f(x)$		$+\infty$			207,64	$+\infty$
			194,5			

Vì $x \in \mathbb{N}$ nên chọn $x = 9$, ta có $f(9) = 15 \cdot 9 + \frac{576}{9} + 8,64 \approx 208$ (triệu đồng).

Bài 113. Người ta cần cắt một tấm tôn có hình dạng là một elip với độ dài trục lớn bằng 8, độ dài trục bé bằng 4 để được một tấm tôn hình chữ nhật nội tiếp elip. Người ta gò tấm tôn hình chữ nhật thu được một hình trụ không có đáy (như hình bên). Tính thể tích lớn nhất có thể thu được của khối trụ đó. (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hướng dẫn giải. Chọn hệ trục tọa độ sao cho elip có phương trình: $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Gọi kích thước của hình chữ nhật nội tiếp elip là $2x$ và $2y$ (với $x, y > 0$). Khi đó điểm $M(x, y)$ thuộc elip.

Dựa vào hình vẽ, chiều cao của khối trụ là $h = 2y \Rightarrow y = \frac{h}{2}$.

Chu vi đường tròn đáy của khối trụ bằng chiều dài cạnh còn lại của hình chữ nhật: $2\pi R = 2x \Rightarrow R = \frac{x}{\pi}$.

Từ phương trình elip ta có: $\frac{x^2}{16} + \frac{(h/2)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{h^2}{16} = 1 \Rightarrow x^2 = 16 - h^2$ (điều kiện $0 < h < 4$).

Thể tích khối trụ là: $V = \pi R^2 h = \pi \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 h = \frac{x^2 h}{\pi} = \frac{(16 - h^2)h}{\pi} = \frac{16h - h^3}{\pi}$.

Xét hàm số $f(h) = 16h - h^3$ trên khoảng $(0; 4)$, ta có $f'(h) = 16 - 3h^2$.

$f'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{4}{\sqrt{3}}$ (do $h > 0$).

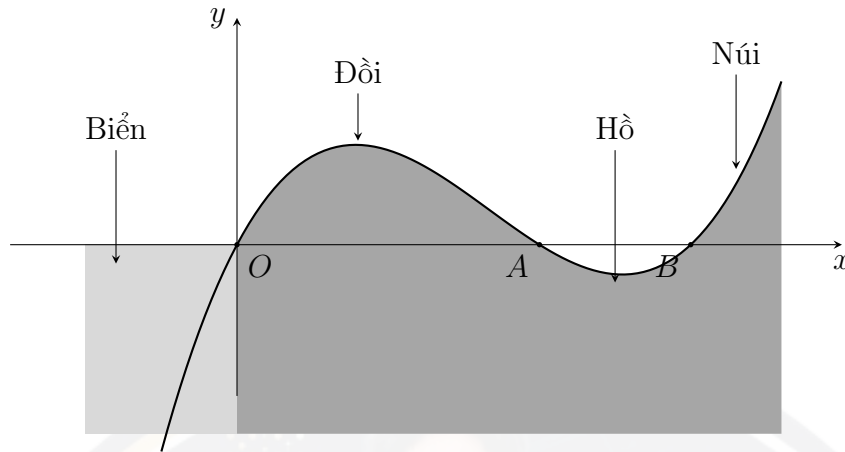
Bảng biến thiên cho thấy $f(h)$ đạt cực đại tại $h = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Giá trị thể tích lớn nhất là: $V_{\max} = \frac{f(4/\sqrt{3})}{\pi} = \frac{128}{3\pi\sqrt{3}} \approx 7,84$.

Bài 114. Hình vẽ sau mô phỏng một mặt cắt ngang của một phần hòn đảo X , trên hòn đảo X có một lớp đất cạnh một bờ biển, phần nhô lên cao là đỉnh của một quả đồi và phần trũng tạo thành một hồ nước tự nhiên. Trên hệ tọa độ Oxy , đường cong $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mô phỏng độ cao của lớp đất bên cạnh bờ biển với trục Ox là mực nước biển, đơn vị

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

trên các hệ trục là một kilômét. Biết khoảng cách giữa hai bên chân đồi là $OA = 2$ km, chiều dài của hồ là $AB = 1$ km và ngọn đồi cao 528 m.



Độ sâu của hồ tại điểm sâu nhất xấp xỉ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị)

Hướng dẫn giải. Theo giả thiết, đồ thị cắt trục Ox tại gốc tọa độ $O(0; 0)$, điểm chân đồi $A(2; 0)$ (vì $OA = 2$) và điểm cuối hồ $B(3; 0)$ (vì $AB = 1$). Do đó phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm $x = 0, x = 2, x = 3$.

Vì hàm số bậc ba có 3 nghiệm phân biệt nên $f(x) = ax(x - 2)(x - 3)$.

Ta có $f(x) = a(x^3 - 5x^2 + 6x)$. Đạo hàm $f'(x) = a(3x^2 - 10x + 6)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{3}$. Đỉnh đồi tương ứng với điểm cực đại $x_1 = \frac{5 - \sqrt{7}}{3} \approx 0,785$.

Theo đề bài, độ cao đỉnh đồi là $528 \text{ m} = 0,528 \text{ km}$. Ta có $f(x_1) = 0,528$.

$$f\left(\frac{5 - \sqrt{7}}{3}\right) = a \cdot \frac{20 + 14\sqrt{7}}{27} \approx 2,1126a.$$

$$\Rightarrow 2,1126a = 0,528 \Rightarrow a \approx 0,25.$$

Điểm sâu nhất của hồ tương ứng với điểm cực tiểu $x_2 = \frac{5 + \sqrt{7}}{3} \approx 2,549$.

Độ sâu $h = |f(x_2)| = |0,25 \cdot x_2(x_2 - 2)(x_2 - 3)|$.

$$h = |0,25 \cdot 2,549 \cdot 0,549 \cdot (-0,451)| \approx 0,1578 \text{ km} = 157,8 \text{ m}.$$

Giá trị $157,8 \text{ m}$ không xấp xỉ 142 m . Vậy mệnh đề d) sai

Bài 115. Các nhà tâm lí học sử dụng mô hình hàm số mũ để mô phỏng quá trình học tập của một học sinh như sau: $f(t) = c(1 - e^{-kt})$, trong đó c là tổng số đơn vị kiến thức học sinh phải học, k (kiến thức/ngày) là tốc độ tiếp thu của học sinh, t (ngày) là thời gian học và $f(t)$ là số đơn vị kiến thức học sinh đã học được.

(Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson).

Giả sử một em học sinh phải tiếp thu 25 đơn vị kiến thức mới. Biết rằng tốc độ tiếp thu của em học sinh là $k = 0,2$. Hỏi em học sinh sẽ học được (khoảng) bao nhiêu đơn vị kiến thức mới sau 8 ngày (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Hướng dẫn giải. Theo giả thiết của bài toán, ta có các thông số sau:

◇ Tổng số đơn vị kiến thức cần học: $c = 25$.

◇ Tốc độ tiếp thu: $k = 0,2$.

◇ Thời gian học: $t = 8$ ngày.

Thay các giá trị vào mô hình hàm số mũ $f(t) = c(1 - e^{-kt})$, ta được:

$$f(8) = 25 \cdot (1 - e^{-0,2 \cdot 8}) = 25 \cdot (1 - e^{-1,6})$$

Sử dụng máy tính bỏ túi để tính giá trị gần đúng:

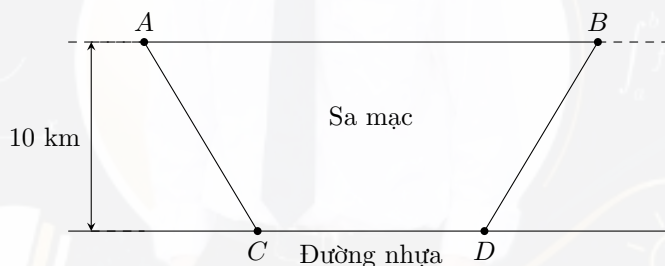
$$e^{-1,6} \approx 0,2018965$$

$$\Rightarrow f(8) \approx 25 \cdot (1 - 0,2018965) \approx 25 \cdot 0,7981035 \approx 19,9525$$

Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị, ta được $f(8) \approx 20$.

Vậy sau 8 ngày, em học sinh đó sẽ học được khoảng 20 đơn vị kiến thức mới.

Bài 116. Một nhà địa chất học đang ở địa điểm A trên sa mạc. Anh ta muốn đến điểm B (cũng ở trên sa mạc) và cách A một khoảng bằng 70 km. Trong sa mạc, xe anh ta chỉ có thể di chuyển với vận tốc 30 km/h. Nhà địa chất phải đến được điểm B sau 2 giờ, vì vậy nếu anh ta đi thẳng từ A đến B sẽ không thể đến đúng giờ được. Rất may, có một con đường nhựa song song với đường nối A và B và cách AB một đoạn 10 km (tham khảo hình vẽ). Trên đường nhựa đó, xe nhà địa chất có thể di chuyển với vận tốc 50 km/h. Thời gian ngắn nhất để nhà địa chất di chuyển từ A đến B là bao nhiêu phút?



Hướng dẫn giải. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên đường nhựa. Khi đó $HK = AB = 70$ km và $AH = BK = 10$ km.

Giả sử lộ trình di chuyển của nhà địa chất là $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$, trong đó C, D là hai điểm nằm trên đường nhựa (C nằm giữa H và D , D nằm giữa C và K).

Do tính chất đối xứng của bài toán, để thời gian di chuyển là ngắn nhất thì nhà địa chất sẽ đi từ A đến một điểm C , sau đó đi trên đường nhựa đến D rồi đi từ D đến B sao cho $AC = BD$.

Đặt $HC = KD = x$ (km), với $0 \leq x \leq 35$. Khi đó đoạn đường nhựa là $CD = 70 - 2x$ (km).

Độ dài quãng đường di chuyển trong sa mạc là:

$$AC = DB = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{x^2 + 10^2} = \sqrt{x^2 + 100} \text{ (km)}.$$

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B tính theo giờ là:

$$T(x) = \frac{AC + DB}{30} + \frac{CD}{50} = \frac{2\sqrt{x^2 + 100}}{30} + \frac{70 - 2x}{50} = \frac{\sqrt{x^2 + 100}}{15} + \frac{35 - x}{25}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 100}}{15} + \frac{35 - x}{25}$ trên đoạn $[0; 35]$.

$$f'(x) = \frac{x}{15\sqrt{x^2 + 100}} - \frac{1}{25}.$$

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

$$\text{Cho } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{15\sqrt{x^2 + 100}} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow 5x = 3\sqrt{x^2 + 100}$$

$$\Leftrightarrow 25x^2 = 9(x^2 + 100) \Leftrightarrow 16x^2 = 900 \Leftrightarrow x^2 = \frac{900}{16} \Leftrightarrow x = \frac{30}{4} = 7,5 \text{ (km)}.$$

Lập bảng biến thiên, ta thấy hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 7,5$.

Giá trị thời gian nhỏ nhất (tính theo giờ) là:

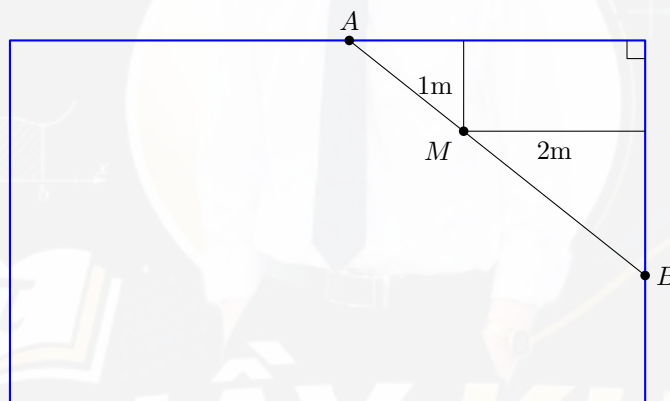
$$T(7,5) = \frac{\sqrt{7,5^2 + 100}}{15} + \frac{35 - 7,5}{25} = \frac{12,5}{15} + \frac{27,5}{25} = \frac{5}{6} + \frac{11}{10} = \frac{58}{30} = \frac{29}{15} \text{ (giờ)}.$$

Đổi sang đơn vị phút:

$$T = \frac{29}{15} \times 60 = 116 \text{ (phút)}.$$

Vậy thời gian ngắn nhất để nhà địa chất di chuyển từ A đến B là 116 phút.

Bài 117. Nhân dịp Noel, gia đình bạn An cùng nhau trang trí nhà cửa. Tại góc phòng khách, bạn An dự kiến để một cây thông Noel ở vị trí M cách hai bức tường lần lượt là 1m; 2m. Để cho căn phòng sáng hơn, bạn An sẽ lắp thêm dây đèn led AB dưới sàn nhà, đi qua vị trí đặt cây thông, hai đầu dây đèn chạm vào tường. Hỏi độ dài dây đèn ngắn nhất bạn An cần dùng là bao nhiêu mét? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Hướng dẫn giải. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho góc tường là gốc tọa độ $O(0;0)$, hai bức tường lần lượt nằm trên hai trục tọa độ Ox, Oy . Khi đó vị trí cây thông là điểm $M(2;1)$. Dây đèn led là đoạn thẳng AB đi qua M với $A \in Oy$ và $B \in Ox$. Gọi $A(0;a)$ và $B(b;0)$ với $a > 1, b > 2$. Phương trình đường thẳng AB có dạng đoạn chắn:

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1.$$

Vì đường thẳng AB đi qua $M(2;1)$ nên:

$$\frac{2}{b} + \frac{1}{a} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} = 1 - \frac{2}{b} = \frac{b-2}{b} \Rightarrow a = \frac{b}{b-2}.$$

Độ dài dây đèn AB là:

$$L = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{b-2}\right)^2 + b^2}.$$

Để L ngắn nhất thì $L^2 = f(b) = \frac{b^2}{(b-2)^2} + b^2$ phải nhỏ nhất với $b > 2$. Đạo hàm:

$$f'(b) = \frac{2b(b-2)^2 - 2(b-2)b^2}{(b-2)^4} + 2b = \frac{2b(b-2) - 2b^2}{(b-2)^3} + 2b = \frac{-4b}{(b-2)^3} + 2b.$$

Cho $f'(b) = 0 \Leftrightarrow 2b \left(1 - \frac{2}{(b-2)^3}\right) = 0$. Vì $b > 2$ nên $1 - \frac{2}{(b-2)^3} = 0 \Leftrightarrow (b-2)^3 = 2 \Leftrightarrow b = 2 + \sqrt[3]{2}$.

Khi đó $a = \frac{2 + \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4} + 1$. Độ dài dây đèn ngắn nhất là:

$$L_{\min} = \sqrt{(1 + \sqrt[3]{4})^2 + (2 + \sqrt[3]{2})^2} = (1^{2/3} + 2^{2/3})^{3/2} = (1 + \sqrt[3]{4})^{3/2}.$$

Tính toán giá trị xấp xỉ:

$$L_{\min} \approx (1 + 1,5874)^{1,5} \approx 2,5874^{1,5} \approx 4,1619 \text{ (m)}.$$

Làm tròn đến hàng phần chục, ta được kết quả là 4,2 mét.

Bài 118. Một doanh nghiệp sản xuất thiết bị điện tử thông minh có quy trình vận hành và chính sách thuế như sau: Trong mỗi tháng, doanh nghiệp phải chi trả một khoản chi phí cố định 200 triệu đồng, khoản chi phí này không phụ thuộc vào số lượng sản phẩm sản xuất. Ngoài ra, để hoàn thiện mỗi sản phẩm, doanh nghiệp phải chịu chi phí biến đổi 1 triệu đồng cho mỗi sản phẩm. Mỗi sản phẩm được bán ra thị trường với giá 3 triệu đồng một sản phẩm. Nhằm khuyến khích gia tăng quy mô sản xuất, cơ quan quản lý áp dụng chính sách thuế tính theo tổng doanh thu trong tháng, với mức thuế suất giảm dần theo sản lượng. Nếu doanh nghiệp bán dưới 100 sản phẩm trong tháng, thuế suất là 10% tổng doanh thu. Nếu bán từ 100 đến dưới 300 sản phẩm, thuế suất là 8% tổng doanh thu. Nếu bán từ 300 sản phẩm trở lên, thuế suất là 5% tổng doanh thu. Gọi x là số lượng sản phẩm doanh nghiệp sản xuất và bán ra trong một tháng ($x \in \mathbb{N}^*$). Tìm số sản phẩm tối thiểu để doanh nghiệp bắt đầu có lãi.

Hướng dẫn giải. Doanh thu của doanh nghiệp trong một tháng là: $R(x) = 3x$ (triệu đồng).

Tổng chi phí sản xuất trong một tháng là: $C(x) = 200 + 1 \cdot x = 200 + x$ (triệu đồng).

Tiền thuế doanh nghiệp phải trả dựa trên số lượng sản phẩm x là:

$$T(x) = \begin{cases} 10\% \cdot 3x = 0,3x & \text{nếu } 0 < x < 100 \\ 8\% \cdot 3x = 0,24x & \text{nếu } 100 \leq x < 300 \\ 5\% \cdot 3x = 0,15x & \text{nếu } x \geq 300 \end{cases}$$

Lợi nhuận của doanh nghiệp là: $P(x) = R(x) - C(x) - T(x)$.

Doanh nghiệp có lãi khi $P(x) > 0$. Ta xét các trường hợp sau:

♦ **Trường hợp 1:** $0 < x < 100$.

$$P(x) = 3x - (200 + x) - 0,3x = 1,7x - 200.$$

Để doanh nghiệp có lãi thì $1,7x - 200 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{200}{1,7} \approx 117,65$. Giá trị này không thỏa mãn điều kiện $x < 100$. Do đó, trong khoảng này doanh nghiệp không có lãi.

♦ **Trường hợp 2:** $100 \leq x < 300$.

$$P(x) = 3x - (200 + x) - 0,24x = 1,76x - 200.$$

Để doanh nghiệp có lãi thì $1,76x - 200 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{200}{1,76} \approx 113,64$.

Kết hợp với điều kiện $100 \leq x < 300$, ta được $113,64 < x < 300$.

Vì $x \in \mathbb{N}^*$ nên số sản phẩm tối thiểu trong trường hợp này là $x = 114$.

♦ **Trường hợp 3:** $x \geq 300$.

$$P(x) = 3x - (200 + x) - 0,15x = 1,85x - 200.$$

Để doanh nghiệp có lãi thì $1,85x - 200 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{200}{1,85} \approx 108,11$.

Kết hợp với điều kiện $x \geq 300$, ta thấy với mọi $x \geq 300$ doanh nghiệp đều có lãi.

So sánh các trường hợp, số sản phẩm tối thiểu để doanh nghiệp bắt đầu có lãi là 114 sản phẩm.

Bài 119. Trong ngành hàng hải, lượng nhiên liệu tiêu thụ của một con tàu trong một đơn vị thời gian xấp xỉ tỷ lệ thuận với lập phương vận tốc của nó. Một tàu chở hàng xuất phát từ cảng Singapore đi đến cảng Tiên Sa cách 1000 hải lý. Gọi v (hải lý/giờ) là vận tốc của tàu ($v > 0$). Dữ liệu kỹ thuật cho thấy chi phí nhiên liệu vận hành của con tàu là $0,02 \cdot v^3$ (USD/giờ). Các chi phí vận hành cố định khác như lương thuyền viên, khấu hao, bảo hiểm,... không phụ thuộc vào vận tốc tàu là 625 USD/giờ. Hỏi thuyền trưởng cần duy trì vận tốc trung bình là bao nhiêu hải lý/giờ để tổng chi phí cho toàn bộ chuyến đi là thấp nhất?

Hướng dẫn giải. Chi phí vận hành mỗi giờ là: $f(v) = 0,02v^3 + 625$ (USD/giờ).

Thời gian để tàu đi hết quãng đường 1000 hải lý là: $t = \frac{1000}{v}$ (giờ).

Tổng chi phí cho chuyến đi 1000 hải lý là:

$$C(v) = f(v) \cdot t = (0,02v^3 + 625) \cdot \frac{1000}{v} = 20v^2 + \frac{625000}{v}$$

Xét hàm $C(v)$ với $v > 0$, ta có:

$$C'(v) = 40v - \frac{625000}{v^2} = \frac{40v^3 - 625000}{v^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 40v^3 = 625000 \Leftrightarrow v^3 = 15625 \Leftrightarrow v = 25$$

Hàm số $C(v)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $v = 25$.

Vậy vận tốc cần duy trì là 25 hải lý/giờ.

Bài 120. Một đội CSGT đường thủy sử dụng một chiếc ca nô chuyên dụng để tuần tra trên một đoạn sông dài 60 km. Chuyến tuần tra bao gồm đi ngược dòng từ vị trí xuất phát A đến B dài 60 km, sau đó ngay lập tức quay về xuôi dòng từ B về lại A . Lượng xăng tiêu thụ của động cơ (tính bằng lít) được xác định theo công thức: $L = k \cdot v^2 \cdot t$ trong đó k là một hằng số phụ thuộc vào đặc tính của động cơ, v là tốc độ của động cơ (tốc độ của ca nô so với mặt nước) có đơn vị là km/h và t là thời gian động cơ hoạt động tính bằng giờ. Biết rằng vận tốc của dòng nước trên cả đoạn sông là 5 km/h. Để xác định hằng số k thì các kỹ thuật viên đã chạy thử ca nô trong điều kiện mặt nước yên tĩnh. Kết quả cho thấy động cơ tiêu thụ 10 lít xăng mỗi giờ nếu chạy với tốc độ ổn định là 20 km/h. Hỏi để hoàn thành cả chuyến tuần tra với lượng xăng tiêu thụ ít nhất thì người lái ca nô phải cài đặt tốc độ v của ca nô bằng bao nhiêu km/h? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải. Khi thử nghiệm chạy với vận tốc $v = 20$ (km/h) trong thời gian $t = 1$ giờ và hết $L = 10$ lít,

$$\text{Ta có: } L = k \cdot v^2 \cdot t \Rightarrow 10 = k \cdot 20^2 \cdot 1 \Rightarrow k = \frac{10}{20^2 \cdot 1} = \frac{1}{40}.$$

Khi ca nô đi ngược dòng từ A đến B thì vận tốc thực của ca nô là: $v_{\text{ngược}} = v - v_{\text{nước}} = v - 5$ (km/h).

$$\text{Lượng xăng ca nô tiêu thụ khi đi ngược dòng là: } L_1 = k \cdot v^2 \cdot t_{\text{ngược}} = \frac{1}{40} \cdot v^2 \cdot \left(\frac{60}{v-5} \right) = \frac{1,5v^2}{v-5}.$$

Khi ca nô đi xuôi dòng từ B về A thì vận tốc thực của ca nô là: $v_{\text{xuôi}} = v + v_{\text{nước}} = v + 5$ (km/h).

Lượng xăng ca nô tiêu thụ khi đi xuôi dòng là: $L_2 = k \cdot v^2 \cdot t_{\text{xuôi}} = \frac{1}{40} \cdot v^2 \cdot \left(\frac{60}{v+5} \right) = \frac{1,5v^2}{v+5}$.

Hàm tổng lượng xăng tiêu thụ cho cả chuyến tuần tra là:

$$L(v) = L_1 + L_2 = \frac{1,5v^2}{v-5} + \frac{1,5v^2}{v+5} = 1,5v^2 \left(\frac{2v}{v^2-25} \right) = \frac{3v^3}{v^2-25}.$$

Xét hàm số $L(v) = \frac{3v^3}{v^2-25}$ với $v \in (5; +\infty)$ có $L'(v) = \frac{3v^2(v^2-75)}{(v^2-25)^2} = 0 \Leftrightarrow v = 5\sqrt{3} \in (5; +\infty)$.

Vậy người lái ca nô cần cài đặt tốc độ động cơ là $v = 5\sqrt{3} \approx 8,66$ (km/h).

Bài 121. Trong kế hoạch khai thác tuyến ca nô cao tốc phục vụ du lịch sinh thái trên vùng lòng hồ Thủy điện Sơn La (từ bến Mường La đi Quỳnh Nhai) có chiều dài 100 km. Ban quản lý cần xác định vận tốc khai thác v (km/h) cho ca nô ($30 \leq v \leq 70$) để đạt lợi nhuận kinh tế cao nhất. Các thông số được xác định như sau: Công suất tiêu thụ điện của động cơ ca nô là $P(v) = 10v^3$ (W). Giá điện kinh doanh tại bến sặc là 2000 đồng/kWh. Chi phí vận hành cố định: Bao gồm nhân lực lái tàu, khấu hao và bến bãi, được tính là 2500000 đồng cho mỗi giờ ca nô chạy. Số lượng khách mua vé cho mỗi chuyến phụ thuộc vào vận tốc khai thác theo hàm số: $N(v) = \frac{v}{5} + 20$ (hành khách). Giá vé bình quân cho tuyến này là 500000 đồng/khách. Hãy xác định vận tốc khai thác v để lợi nhuận ròng của mỗi chuyến ca nô trên tuyến này là lớn nhất. (Biết công thức tính điện lượng tiêu thụ là $A = P(v)t$).

Hướng dẫn giải. Chiều dài tuyến là 100 km, vận tốc khai thác là v km/h, nên thời gian một chuyến là:

$$t = \frac{100}{v} \text{ (giờ)}.$$

Doanh thu

Số khách: $N(v) = \frac{v}{5} + 20$.

Giá vé bình quân 500000 đồng/khách nên doanh thu:

$$R(v) = 500000 \left(\frac{v}{5} + 20 \right) = 100000v + 10000000.$$

Chi phí điện

Công suất: $P(v) = 10v^3$ (W) = $0,01v^3$ (kW).

Điện lượng tiêu thụ: $A = P(v)t = 0,01v^3 \cdot \frac{100}{v} = v^2$ (kWh).

Tiền điện: $C_1(v) = 2000v^2$.

Chi phí vận hành cố định: $C_2(v) = 2500000 \cdot \frac{100}{v} = \frac{250000000}{v}$.

Lợi nhuận ròng:

$$L(v) = R(v) - C_1(v) - C_2(v) = 100000v + 10000000 - 2000v^2 - \frac{250000000}{v}.$$

Xét đạo hàm: $L'(v) = 100000 - 4000v + \frac{250000000}{v^2}$.

Giải $L'(v) = 0$, hay $100000 - 4000v + \frac{250000000}{v^2} = 0 \Leftrightarrow v^3 - 25v^2 - 62500 = 0 \Leftrightarrow v = 50$.

Lại có $L'(v) > 0$ khi $v < 50$ và $L'(v) < 0$ khi $v > 50$, nên lợi nhuận lớn nhất tại $v = 50$ km/h.

Bài 122. Sau khi một loại thuốc kháng sinh được tiêm vào cơ thể thì nồng độ của thuốc trong máu sẽ giảm dần theo thời gian do quá trình chuyển hóa. Nồng độ thuốc trong máu sau t giờ kể từ khi tiêm được mô hình hóa bởi công thức $C(t) = C_0 \cdot e^{-rt}$ (mg/lít). Trong đó:

◇ C_0 là nồng độ thuốc trong máu ngay sau khi tiêm.

◇ r là hằng số dương đo tốc độ phân hủy của thuốc.

◇ $e \approx 2,718$.

Biết rằng ngay sau khi tiêm, nồng độ thuốc trong máu là 15 mg/lít và sau đó 4 giờ nồng độ thuốc giảm còn 10 mg/lít. Để đạt hiệu quả điều trị, bác sĩ sẽ tiêm lại một liều mới khi nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân giảm xuống và còn ít nhất 6 mg/lít. Theo mô hình trên, để đạt hiệu quả điều trị thì khoảng thời gian nhiều nhất giữa hai lần tiêm thuốc là bao nhiêu giờ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

Hướng dẫn giải. Theo đề bài, ngay sau khi tiêm, nồng độ thuốc trong máu là 15 mg/lít.

Thay $t = 0$ vào hàm số $C(t)$, ta có: $C(0) = 15 \Leftrightarrow C_0 \cdot e^{-r \cdot 0} = 15 \Rightarrow C_0 = 15$.

(Lưu ý đề bài cho nồng độ thuốc trong máu ngay sau khi tiêm là 15 mg/lít nên suy ra $C_0 = 15$).

Khi đó, công thức nồng độ thuốc trở thành: $C(t) = 15e^{-rt}$.

Sau 4 giờ, nồng độ thuốc giảm còn 10 mg/lít.

Thay $t = 4$ vào hàm số $C(t)$, ta có:

$$15e^{-4r} = 10 \Leftrightarrow e^{-4r} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow -4r = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow r = -\frac{1}{4} \ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

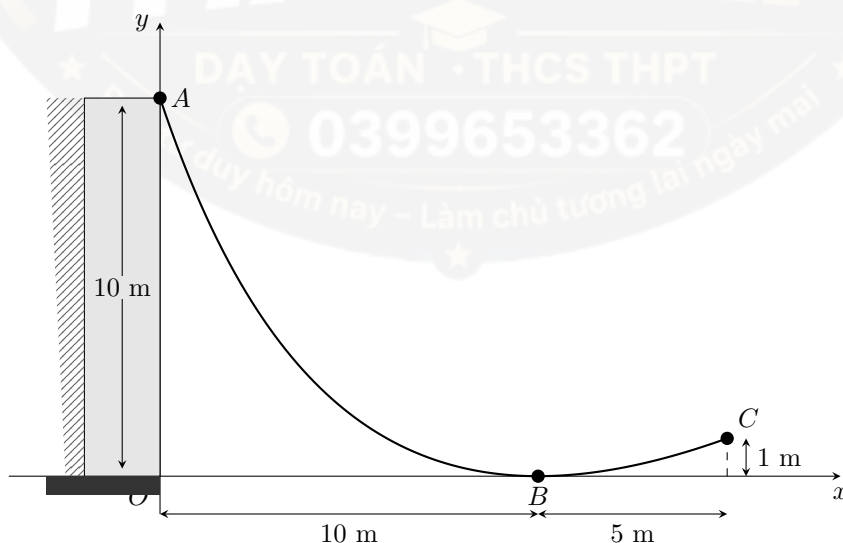
Bác sĩ sẽ tiêm liều mới khi nồng độ thuốc giảm xuống mức 6 mg/lít.

Cho $C(t) = 6$, ta có phương trình:

$$\begin{aligned} 15e^{-rt} = 6 &\Leftrightarrow e^{-rt} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow -rt = \ln\left(\frac{2}{5}\right) \Leftrightarrow -\left(-\frac{1}{4} \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right)t = \ln\left(\frac{2}{5}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{4} \ln\left(\frac{2}{3}\right)t = \ln\left(\frac{2}{5}\right) \\ &\Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}{\frac{1}{4} \ln\left(\frac{2}{3}\right)} \Rightarrow t \approx 9. \end{aligned}$$

Vậy để đạt hiệu quả điều trị thì khoảng thời gian nhiều nhất giữa hai lần tiêm thuốc là khoảng 9 giờ.

Bài 123. Trong hệ trục tọa độ Oxy , đơn vị mỗi trục là mét, một đường trượt mới sẽ được xây dựng theo bản thiết kế đã trình bày như hình vẽ. Thanh trượt bắt đầu từ A và kết thúc tại C , đường cong của thanh trượt là một phần của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$, biết đồ thị hàm số $f(x)$ tiếp xúc với trục Ox tại điểm B .



Bạn Nam bắt đầu trượt từ điểm A , hỏi khi Nam cách vị trí ban đầu theo phương ngang một khoảng 5 mét thì Nam cách mặt đất bao nhiêu mét, biết trục Ox nằm trên mặt đất (kết quả làm

tròn đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải. Ta có đồ thị hàm số $f(x)$ tiếp xúc với trục Ox tại điểm $B(10; 0)$ nên hàm số có dạng $f(x) = \frac{a(x-10)^2}{x+d}$.

$$\text{Đồ thị đi qua } A(0; 10) \Rightarrow 10 = \frac{a \cdot (0-10)^2}{0+d} \Rightarrow 10 = \frac{100a}{d} \Rightarrow d = 10a.$$

$$\text{Đồ thị đi qua } C(15; 1) \Rightarrow 1 = \frac{a(15-10)^2}{15+d} \Rightarrow 15+d = 25a.$$

Thay $d = 10a$ vào phương trình trên, ta được:

$$15 + 10a = 25a \Leftrightarrow 15a = 15 \Leftrightarrow a = 1.$$

$$\text{Với } a = 1 \Rightarrow d = 10. \text{ Do đó hàm số là } f(x) = \frac{(x-10)^2}{x+10}.$$

Khi Nam cách vị trí ban đầu theo phương ngang một khoảng 5 mét, tức là tại vị trí có hoành độ $x = 5$. Khi đó chiều cao của Nam so với mặt đất là:

$$y = f(5) = \frac{(5-10)^2}{5+10} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3} \approx 1,67 \text{ (m)}.$$

Vậy khi Nam cách vị trí ban đầu theo phương ngang một khoảng 5 mét thì Nam cách mặt đất 1,67 mét.

Bài 124. Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Giả sử khi sản xuất và bán hết x sản phẩm đó ($0 < x \leq 2000$), tổng số tiền doanh nghiệp thu được (đơn vị: chục nghìn đồng) là $f(x) = 2000x - x^2$ và tổng chi phí (đơn vị: chục nghìn đồng) doanh nghiệp chi ra là $g(x) = x^2 + 1440x + 50$. Giả sử mức thuế phụ thu trên một đơn vị sản phẩm bán được là t (chục nghìn đồng) ($0 < t < 300$). Mức thuế phụ thu t (trên một đơn vị sản phẩm) sao cho nhà nước nhận được số tiền thuế phụ thu lớn nhất và doanh nghiệp cũng thu được lợi nhuận lớn nhất theo mức thuế phụ thu đó là bao nhiêu đồng?

Hướng dẫn giải. Lợi nhuận doanh nghiệp thu được là $h(x) = (2000x - x^2) - (x^2 + 1440x + 50) - tx = -2x^2 + (560 - t)x - 50$ với ($0 < x \leq 2000$).

Xét hàm $h(x) = -2x^2 + (560 - t)x - 50$ với ($0 < x \leq 2000$).

$$\text{Ta có } h'(x) = -4x + 560 - t = 0 \Rightarrow x = \frac{560-t}{4} \in (0; 2000).$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{560-t}{4}$	2000
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	$h\left(\frac{560-t}{4}\right)$		
	$\nearrow \quad \searrow$		

Từ bảng biến thiên ta thấy lợi nhuận doanh nghiệp cao nhất tại $x = \frac{560-t}{4}$.

$$\text{Khi đó số tiền thuế thu được từ doanh nghiệp là } k(t) = \frac{560-t}{4} \cdot t = -\frac{t^2}{4} + \frac{560}{4}t \text{ với } 0 < t < 300.$$

Bảng biến thiên:

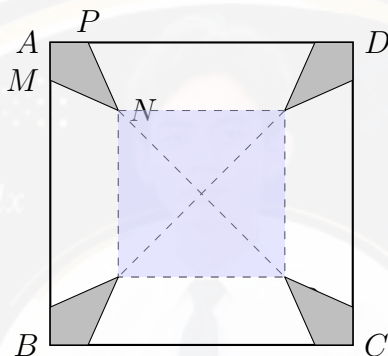
t	0	280	300
$k'(t)$	+	0	-
$k(t)$	19600		
	$\nearrow \quad \searrow$		

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

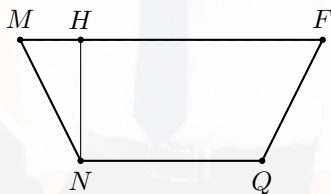
Từ bảng biến thiên ta thấy mức thuế phụ thu trên một đơn vị sản phẩm bán được là $t = 280 \Rightarrow x = 70$ sản phẩm.

Vậy mức thuế phụ thu là 2800 000 đồng/sản phẩm, doanh nghiệp sản xuất và bán hết 70 sản phẩm.

Bài 125. Từ một tấm nhôm hình vuông có cạnh bằng 8 dm, người ta cắt bỏ bốn tứ giác bằng nhau (cùng bằng tứ giác $AMNP$) ở bốn góc của tấm nhôm đó, biết $AM = AP = 1$ dm và điểm N thuộc đường chéo AC . Với phần còn lại của tấm nhôm sau khi đã cắt bỏ đi 4 tứ giác nói trên, người ta đã gấp các đoạn MN trùng với PN rồi dán kĩ bằng keo, làm tương tự cho 3 cặp đoạn còn lại, người ta thu được chậu nước hình chóp cụt tứ giác đều. Sức chứa lớn nhất của chậu nước hình chóp cụt tứ giác đều này là bao nhiêu lít (làm tròn đến hàng đơn vị, bỏ qua độ dày tấm nhôm)?



Hướng dẫn giải.



Gọi độ dài đoạn $AN = x$ (dm) (ĐK: $0 < x < 4\sqrt{2}$). Xét mặt cắt của chậu qua đường chéo là hình thang cân $MNQF$ (như hình vẽ). Kẻ $NH \perp MF$, ($H \in MF$).

Ta có tấm nhôm hình vuông có cạnh bằng 8 dm nên ta có đường chéo $AC = 8\sqrt{2}$ (dm), suy ra độ dài đường chéo đáy chậu là $NQ = 8\sqrt{2} - 2x$ (dm).

Ta có cạnh hình vuông sau khi cắt các góc là $8 - 1 - 1 = 6$ (dm), suy ra đường chéo miệng chậu $MF = 6\sqrt{2}$ (dm).

$$\text{Suy ra } MH = \frac{MF - NQ}{2} = \frac{6\sqrt{2} - (8\sqrt{2} - 2x)}{2} = x - \sqrt{2} \text{ (dm)}.$$

Xét $\triangle AMN$ có:

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2 \cdot AM \cdot AN \cdot \cos MAN = 1^2 + x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cdot \cos 45^\circ = x^2 - x\sqrt{2} + 1.$$

Xét $\triangle MNH$ vuông tại H có:

$$NH = \sqrt{MN^2 - MH^2} = \sqrt{x^2 - x\sqrt{2} + 1 - (x - \sqrt{2})^2} = \sqrt{x\sqrt{2} - 1} \text{ (dm)}.$$

Ta có thể tích chậu được tính bằng công thức:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}h \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}) = \frac{1}{3}\sqrt{x\sqrt{2} - 1} \cdot \left(\frac{1}{2}NQ^2 + \frac{1}{2}MF^2 + \sqrt{\frac{1}{2}NQ^2 \cdot \frac{1}{2}MF^2} \right) \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{x\sqrt{2} - 1} \cdot \left(\frac{1}{2}(8\sqrt{2} - 2x)^2 + \frac{1}{2}(6\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2}(8\sqrt{2} - 2x) \cdot (6\sqrt{2}) \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{x\sqrt{2}-1} \cdot (2x^2 - 22\sqrt{2}x + 148).$$

$$\text{Ta có: } V' = \frac{10\sqrt{2}x^2 - 140x + 192\sqrt{2}}{6\sqrt{x\sqrt{2}-1}}; V' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{530} + 35\sqrt{2}}{10} \text{ (KTM)} \\ x = \frac{-\sqrt{530} + 35\sqrt{2}}{10} \text{ (TM)} \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	$\frac{-\sqrt{530}+35\sqrt{2}}{10}$	$4\sqrt{2}$
V'	+	0	-
V		44	
		$\nearrow$	$\searrow$

Từ bảng biến thiên ta thấy sức chứa lớn nhất của chậu nước hình chóp cụt tứ giác đều này xấp xỉ 44 lít.

Bài 126. Khu trò chơi trẻ em Gấu Misa hiện có khách lượng ổn định mỗi ngày là 1.000 khách. Mỗi khách vào cổng mua vé giá 40.000 đồng. Một cuộc khảo sát cho thấy cứ mỗi lần giảm 2.000 đồng giá vé, khu trò chơi có thể có thêm 100 khách. Để doanh thu thu được là tối đa, khu trò chơi nên bán vé với giá là bao nhiêu nghìn đồng?

Hướng dẫn giải. Phương pháp giải

- ◆ Đặt biến: Gọi x là số lần giảm giá vé (đơn vị: nghìn đồng, vì giá vé ban đầu là 40.000 đồng, ta làm việc với đơn vị nghìn đồng).
- ◆ Thiết lập hàm giá vé $p(x)$ và hàm số lượng khách $Q(x)$ theo x .
- ◆ Thiết lập hàm doanh thu $R(x) = p(x) \cdot Q(x)$.
- ◆ Tìm giá trị lớn nhất của hàm $R(x)$ bằng cách giải $R'(x) = 0$.

Chi tiết lời giải

Gọi x là số lần giảm 2 nghìn đồng giá vé.

Khi đó: Giá vé lúc này là: $p(x) = 40 - 2x$, với $0 < x < 20$.

Số khách tăng thêm là $100x$.

Do đó, tổng số khách là $1000 + 100x$.

Hàm doanh thu thu được:

$$R(x) = (1000 + 100x)p(x) = (1000 + 100x)(40 - 2x) = -200x^2 + 2000x + 40000.$$

Xét hàm $R = R(x) = -200x^2 + 2000x + 40000$ trên khoảng $(0; 20)$.

$$R' = -400x + 2000; R' = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

Vì $R = R(x)$ là hàm số bậc hai có hệ số $a < 0$, nên: $\max_{(0;20)} R = R(5)$.

Vậy doanh thu đạt tối đa khi: $x = 5$.

Điều này tương ứng với 5 lần giảm 2.000, tức là giá vé cần bán ra là:

$$40000 - 5 \cdot 2000 = 30000.$$

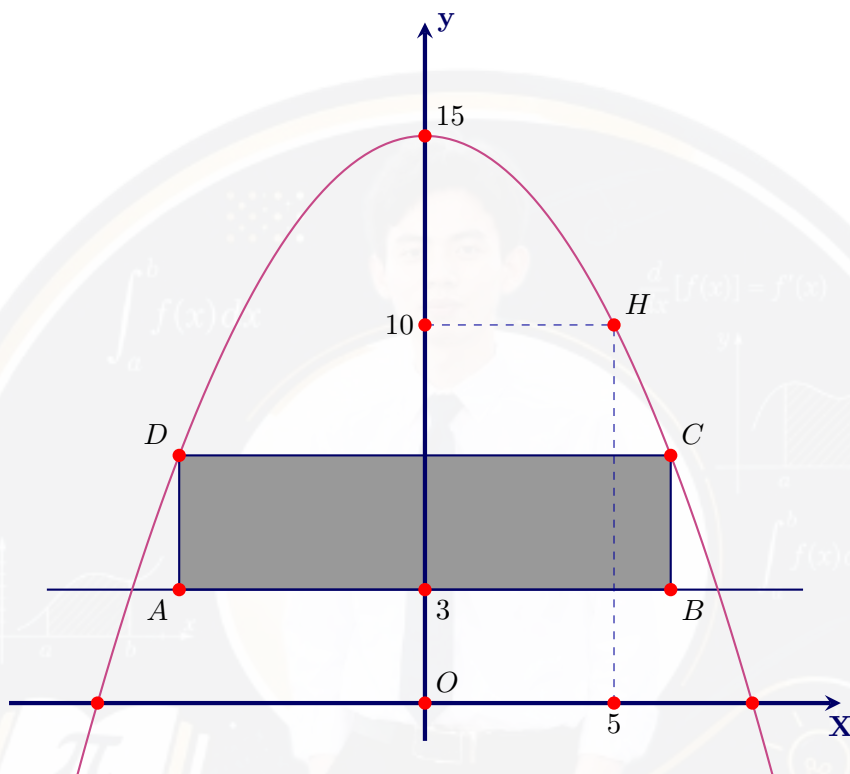
Vậy giá vé cần bán ra là 30 nghìn đồng.

Bài 127. Một bảo tàng khoa học muốn lắp đặt một cửa sổ trang trí lớn hình parabol trên bức

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

tường phía tây của tòa nhà. Cửa sổ này có đỉnh cao nhất cách sàn nhà 15 mét. Một điểm trên khung cửa sổ được đo là cách trục đối xứng 5 mét và có độ cao 10 mét so với sàn nhà. Bên trong khung cửa sổ, người thiết kế muốn đặt một tấm kính màu hình chữ nhật, với hai đỉnh trên của tấm kính nằm trên đường cong của khung cửa sổ và hai đỉnh dưới của tấm kính nằm trên một thanh ngang cố định cách sàn nhà 3 mét (song song với sàn nhà). Diện tích lớn nhất của tấm kính màu là bao nhiêu mét vuông? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

 *Hướng dẫn giải.* Gắn hệ toạ độ Oxy như hình vẽ.



Giả sử phương trình (P) có dạng $y = ax^2 + bx + c$.

Sử dụng giả thiết (P) có đỉnh $I(0; 15)$ và đi qua điểm $H(5; 10)$, ta tìm được phương trình của parabol là:

$$(P) : y = -\frac{1}{5}x^2 + 15$$

Gọi $C(c; -\frac{1}{5}c^2 + 15)$ là đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$ (điều kiện $0 < c < \sqrt{75}$).

Khi đó, các kích thước của hình chữ nhật là:

◇ Chiều rộng: $AB = 2c$.

◇ Chiều cao: $BC = y_C - 3 = (-\frac{1}{5}c^2 + 15) - 3 = -\frac{1}{5}c^2 + 12$.

Suy ra diện tích hình chữ nhật là:

$$S = 2c \cdot \left(-\frac{1}{5}c^2 + 15 - 3\right) = -\frac{2}{5}c^3 + 24c$$

Tính đạo hàm: $S' = -\frac{6}{5}c^2 + 24$.

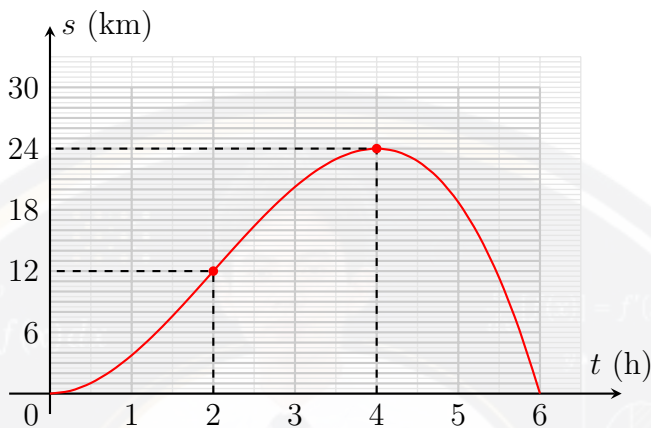
Xét $S' = 0 \Leftrightarrow -\frac{6}{5}c^2 + 24 = 0 \Leftrightarrow c^2 = 20 \Leftrightarrow c = 2\sqrt{5}$ (vì $c > 0$).

Qua bảng xét dấu, ta thấy S đạt giá trị lớn nhất tại $c = 2\sqrt{5}$.

Diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là:

$$S = -\frac{2}{5} \cdot (2\sqrt{5})^3 + 24 \cdot (2\sqrt{5}) = 32\sqrt{5} \approx 71,6 \text{ m}^2.$$

Bài 128. Thầy An tham dự giải “Đi bộ trực tuyến Ngành Giáo dục và Đào tạo Edu Run – HCMC” năm 2024. Quảng đường thầy An đi được biểu diễn bằng hàm số $s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ (với $a \neq 0$) có đồ thị như hình bên (trong đó t là thời gian tính bằng giờ, s là quãng đường tính bằng km). Khi đó, vận tốc tối đa của thầy An đạt được là bao nhiêu?



Hướng dẫn giải. Vận tốc của thầy An là đạo hàm của hàm quãng đường theo thời gian:

$$v(t) = s'(t) = 3at^2 + 2bt + c.$$

Quan sát hình vẽ, thấy đồ thị hàm số $s(t)$ đi qua các điểm có tọa độ $(0;0)$, $(2;12)$, $(4;24)$ nên ta có $s(0) = 0$, $s(2) = 12$, $s(4) = 24$.

Mặt khác, hàm số đạt cực trị tại $t = 4$ nên $s'(4) = 0$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} s(0) = 0 \\ s(2) = 12 \\ s(4) = 24 \\ s'(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 12 \\ a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + d = 24 \\ 3a \cdot 4^2 + 2b \cdot 4 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{9}{2} \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Suy ra $s(t) = -\frac{3}{4}t^3 + \frac{9}{2}t^2$; $v(t) = s'(t) = -\frac{9}{4}t^2 + 9t$.

Để tìm vận tốc tối đa thầy An đạt được, ta cần tìm giá trị lớn nhất của hàm số $v(t) = -\frac{9}{4}t^2 + 9t$.

Ta có $v'(t) = -\frac{9}{2}t + 9$.

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{2}t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Bảng biến thiên của hàm $v(t)$:

t	0	2	$+\infty$
$v'(t)$	+	0	-
$v(t)$	9		
	0	$\nearrow$	$\searrow$ $-\infty$

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

Dựa vào bảng biến thiên, vận tốc tối đa đạt được tại thời điểm $t = 2$ giờ.

Vậy vận tốc tối đa thầy An đạt được là $v(2) = 9$ km/h.

Bài 129. Công ty Apple đề xuất giá bán mỗi chiếc iPhone 17 Pro Max 1TB cho đại lý tại Việt Nam khi đại lý này nhập x chiếc là $P(x) = 50.000.000 - 5000x$ (VND). Hỏi doanh thu tối đa mà công ty Apple nhận được từ đại lý này là bao nhiêu? (Đơn vị tỷ VND, kết quả làm tròn đến hàng phần nguyên).

Hướng dẫn giải. Hàm số biểu diễn doanh thu thu được khi bán x chiếc điện thoại là:

$$R(x) = x \cdot P(x) = x(50.000.000 - 5000x) = -5000x^2 + 50.000.000x.$$

Đây là một hàm bậc hai có đồ thị hình parabol quay bề lõm xuống dưới, đạt giá trị lớn nhất tại đỉnh:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{50.000.000}{2 \cdot (-5000)} = 5000 \text{ (chiếc)}.$$

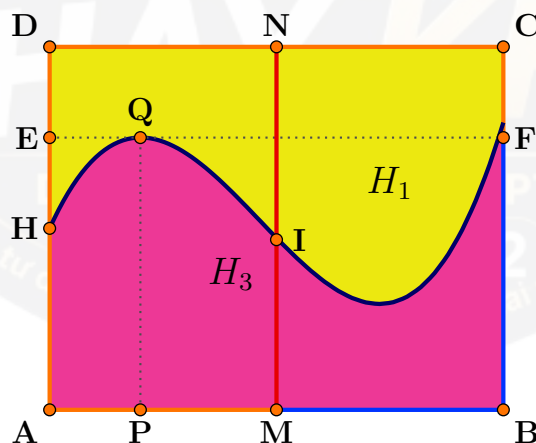
Giá trị doanh thu tối đa đạt được là:

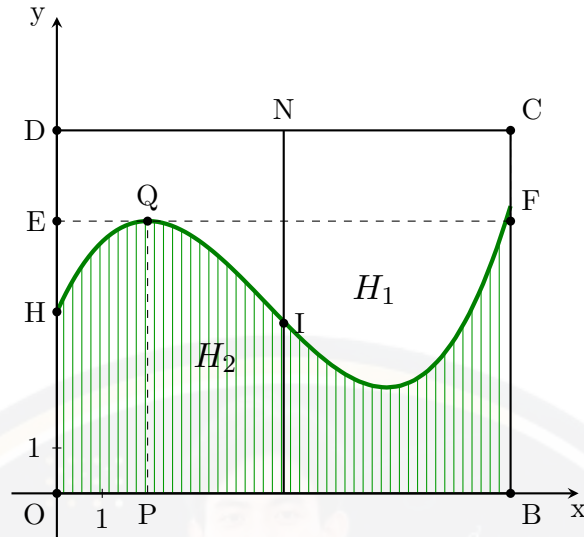
$$R(5000) = -5000 \cdot (5000)^2 + 50.000.000 \cdot 5000 = 125.000.000.000 \text{ VND}.$$

Đổi sang đơn vị tỷ VND, doanh thu tối đa là 125 tỷ VND.

Bài 130. Khuôn viên của một công viên có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 100$ m; $AD = 80$ m. Người ta muốn chia công viên thành hai khu, một khu dành cho trẻ em, một khu dành cho người lớn. Để tạo thiết kế độc đáo và lạ mắt, người ta dùng một đường cong chia khuôn viên thành hai phần H_1 (tô màu xanh) dành cho người lớn và H_3 (tô màu hồng) dành cho trẻ em như hình vẽ bên với $AH = 40$ m; $AE = 60$ m; $AP = 20$ m và $EF \parallel AB$; $PQ \parallel AD$.

Biết rằng khi xét trong một hệ tọa độ Oxy , đường cong trong hình là một phần của đồ thị hàm số bậc ba. Phần chính giữa công viên người ta muốn mắc dây đèn trang trí dọc đoạn thẳng MN như hình. Biết giá tiền mỗi mét dây trang trí của phần dành cho trẻ em là 140 nghìn đồng và phần dành cho người lớn là 180 nghìn đồng. Tổng số tiền mắc dây đèn trang trí trên đoạn MN là bao nhiêu triệu đồng?





Xét hệ trục tọa độ Oxy , với gốc tọa độ là điểm A (A trùng O). Tia Ox trùng với tia AB , tia Oy trùng với tia AD thì đường cong ranh giới giữa hai khu vực là đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Theo giả thiết đồ thị hàm số này đi qua các điểm $H(0; 40)$, $Q(20; 60)$, $F(100; 60)$ và có điểm cực trị là $Q(20; 60)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} d = 40 \\ a \cdot 20^3 + b \cdot 20^2 + c \cdot 20 + d = 60 \\ a \cdot 100^3 + b \cdot 100^2 + c \cdot 100 + d = 60 \\ 3a \cdot 100^2 + 2b \cdot 100 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 40 \\ 8000a + 400b + 20c + d = 60 \\ 1000000a + 10000b + 100c + d = 60 \\ 30000a + 200b + c = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $a = \frac{1}{10000}$; $b = \frac{-11}{500}$; $c = \frac{7}{5}$; $d = 40$.

Do M là trung điểm của AB nên $x_M = 50$. Thay vào hàm số ta tìm được tung độ điểm I :

$$y_I = \frac{1}{10000} \cdot 50^3 - \frac{11}{500} \cdot 50^2 + \frac{7}{5} \cdot 50 + 40 = 67,5.$$

Vậy tọa độ điểm I là $(50; 67,5)$.

Theo đề bài, H_3 là phần bên dưới (trẻ em), H_1 là phần bên trên (người lớn):

- ◇ Chiều dài đoạn dây thuộc phần trẻ em (MI): $67,5 \text{ m}$.
- ◇ Chiều dài đoạn dây thuộc phần người lớn (IN): $80 - 67,5 = 12,5 \text{ m}$.

Tổng số tiền mắc dây đèn là:

$$T = (67,5 \cdot 140) + (12,5 \cdot 180) = 9450 + 2250 = 11700 \text{ (nghìn đồng)}.$$

Đổi ra đơn vị triệu đồng: $11,7$ triệu đồng.

Bài 131. Một nhà hàng có tổng cộng 30 nhân viên và chi trả mức lương cố định cho mỗi nhân viên thường xuyên tăng ca là 400 USD/tháng. Vì nhà hàng liên tục đón những đoàn khách với số lượng lớn nhưng không thể thuê thêm nhân viên nên chủ nhà hàng này muốn khuyến khích nhân viên của mình tăng ca. Ông chủ quyết định cứ một nhân viên quyết định tăng ca thì mức lương của tất cả nhân viên tăng ca trong nhà hàng đều được tăng thêm 2%. Tương tự, nếu k nhân viên tăng ca thì lương cho mỗi người sẽ tăng $2k\%$. Bên cạnh tiền lương cho nhân viên thì tiền điện nước và duy trì cơ sở vật chất là cố định 8000 USD/tháng. Doanh thu trung bình từ khách hàng

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

là 10000 USD/tháng và mỗi nhân viên tăng ca trung bình sẽ được khách hàng tip 800 USD/tháng (Tiền tip phải được nộp lại cho chủ cửa hàng và tính vào doanh thu). Xác định số nhân viên tăng ca cần có để lợi nhuận của nhà hàng đạt lớn nhất.

Hướng dẫn giải. Gọi x là số nhân viên tăng ca ($0 \leq x \leq 30$) ca thì lương của mỗi nhân viên tăng ca là:

$$400(1 + 0,02x) \text{ USD/tháng}$$

Khi đó tổng lương của nhân viên tăng ca là: $400x(1 + 0,02x)$ USD/tháng và tổng tiền tip của x nhân viên tăng ca là: $800x$ USD/tháng.

Doanh thu của cửa hàng là: $10000 + 800x$.

Lợi nhuận của cửa hàng bằng doanh thu trừ đi chi phí nên ta có:

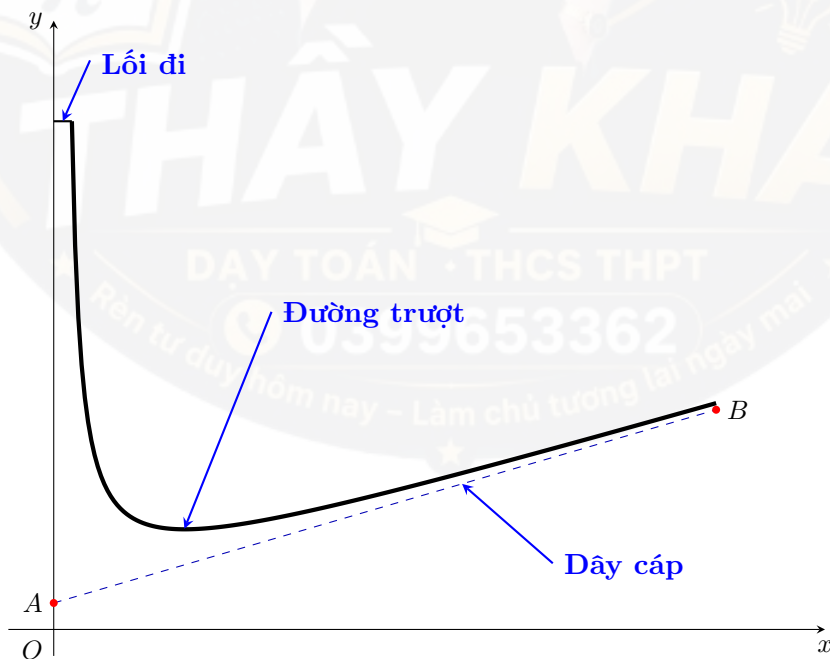
$$L(x) = 10000 + 800x - 400x(1 + 0,02x) - 8000 = 2000 + 400x - 8x^2$$

Ta có: $L'(x) = -16x + 400 = 0 \Leftrightarrow x = 25$

Hàm số $L(x)$ là một parabol có bề lõm hướng xuống nên $L(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 25$

Vậy số nhân viên tăng ca cần có để lợi nhuận của nhà hàng đạt lớn nhất là 25 người.

Bài 132. Tại một khu vui chơi giải trí, người ta thiết kế một đường trượt Zipline, xét mặt phẳng Oxy với trục Ox nằm ngang (đơn vị: m). Đường trượt được mô tả bằng một phần của đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 1}$, ($a \neq 0$) với chiều dài theo phương nằm ngang là 71 m. Ở điểm đầu của đường trượt, có một bục xuất phát song song với Ox , xuất phát từ một điểm thuộc Oy , dài 2 m và cao 19,2 m so với trục Ox . Để gia cố an toàn, người ta dùng một dây cáp AB với $A(0; 1)$ và đường thẳng AB là tiệm cận xiên của đồ thị. Tại điểm cuối của đường trượt, khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đường trượt và dây cáp là 0,25 m. Hỏi điểm thấp nhất của đường trượt cao bao nhiêu mét? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Hướng dẫn giải. Hàm số mô tả đường trượt: $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 1} = ax + (a+b) + \frac{a+b+c}{x-1}$.
Tiệm cận xiên của đồ thị là đường thẳng $d: y = ax + a + b$.

◇ Dây cáp AB đi qua $A(0; 1)$ và nằm trên tiệm cận xiên nên: $a \cdot 0 + a + b = 1 \Rightarrow a + b = 1$.

Khi đó $d: y = ax + 1$.

♦ Điểm đầu đường trượt tại $x = 2$ có độ cao 19,2 m: $f(2) = 19,2 \Leftrightarrow \frac{4a + 2b + c}{2 - 1} = 19,2 \Leftrightarrow 4a + 2b + c = 19,2$.

♦ Điểm cuối đường trượt tại $x = 2 + 71 = 73$. Khoảng cách thẳng đứng đến dây cáp: $f(73) - y_d(73) = 0,25 \Leftrightarrow \left(73a + 1 + \frac{a + b + c}{73 - 1}\right) - (73a + 1) = 0,25 \Leftrightarrow \frac{a + b + c}{72} = 0,25 \Rightarrow a + b + c = 18$.

Thay $a + b = 1$ vào $a + b + c = 18$ ta được $1 + c = 18 \Rightarrow c = 17$.

Thay $b = 1 - a$ và $c = 17$ vào $4a + 2b + c = 19,2$: $4a + 2(1 - a) + 17 = 19,2 \Leftrightarrow 2a + 19 = 19,2 \Leftrightarrow 2a = 0,2 \Rightarrow a = 0,1$.

Suy ra $b = 0,9$. Hàm số là $f(x) = 0,1x + 1 + \frac{18}{x - 1}$ (với $x \in [2; 73]$).

Điểm thấp nhất của đường trượt ứng với giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[2; 73]$.

$$f'(x) = 0,1 - \frac{18}{(x-1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 180 \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{180} = 1 + 6\sqrt{5} \approx 14,42 \in [2; 73].$$

Giá trị cực tiểu: $f(1 + 6\sqrt{5}) = 0,1(1 + 6\sqrt{5}) + 1 + \frac{18}{6\sqrt{5}} = 1,1 + \frac{6\sqrt{5}}{10} + \frac{3}{\sqrt{5}} = 1,1 + \frac{3\sqrt{5}}{5} + \frac{3\sqrt{5}}{5} = 1,1 + 1,2\sqrt{5} \approx 3,783$.

Vậy điểm thấp nhất của đường trượt cao khoảng 3,78 m.

Bài 133. Khu trò chơi trẻ em Gấu Misa hiện có khách lượng ổn định mỗi ngày là 1.000 khách. Mỗi khách vào cổng mua vé giá 40.000 đồng. Một cuộc khảo sát cho thấy cứ mỗi lần giảm 2.000 đồng giá vé, khu trò chơi có thể có thêm 100 khách. Để doanh thu thu được là tối đa, khu trò chơi nên bán vé với giá là bao nhiêu nghìn đồng?

Hướng dẫn giải. Phương pháp giải

- ♦ Đặt biến: Gọi x là số lần giảm giá vé (đơn vị: nghìn đồng, vì giá vé ban đầu là 40.000 đồng, ta làm việc với đơn vị nghìn đồng).
- ♦ Thiết lập hàm giá vé $p(x)$ và hàm số lượng khách $Q(x)$ theo x .
- ♦ Thiết lập hàm doanh thu $R(x) = p(x) \cdot Q(x)$.
- ♦ Tìm giá trị lớn nhất của hàm $R(x)$ bằng cách giải $R'(x) = 0$.

Chi tiết lời giải

Gọi x là số lần giảm 2 nghìn đồng giá vé.

Khi đó: Giá vé lúc này là: $p(x) = 40 - 2x$, với $0 < x < 20$.

Số khách tăng thêm là $100x$.

Do đó, tổng số khách là $1000 + 100x$.

Hàm doanh thu thu được:

$$R(x) = (1000 + 100x)p(x) = (1000 + 100x)(40 - 2x) = -200x^2 + 2000x + 40000.$$

Xét hàm $R = R(x) = -200x^2 + 2000x + 40000$ trên khoảng $(0; 20)$.

$$R' = -400x + 2000; R' = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

Vì $R = R(x)$ là hàm số bậc hai có hệ số $a < 0$, nên: $\max_{(0;20)} R = R(5)$.

Vậy doanh thu đạt tối đa khi: $x = 5$.

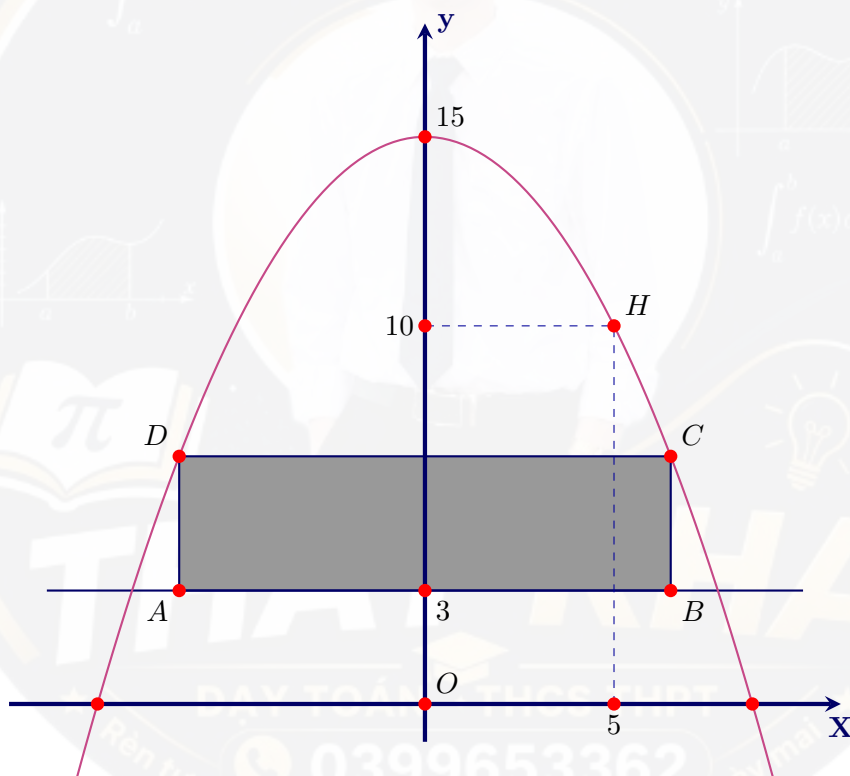
Điều này tương ứng với 5 lần giảm 2.000, tức là giá vé cần bán ra là:

$$40000 - 5 \cdot 2000 = 30000.$$

Vậy giá vé cần bán ra là 30 nghìn đồng.

Bài 134. Một bảo tàng khoa học muốn lắp đặt một cửa sổ trang trí lớn hình parabol trên bức tường phía tây của tòa nhà. Cửa sổ này có đỉnh cao nhất cách sàn nhà 15 mét. Một điểm trên khung cửa sổ được đo là cách trục đối xứng 5 mét và có độ cao 10 mét so với sàn nhà. Bên trong khung cửa sổ, người thiết kế muốn đặt một tấm kính màu hình chữ nhật, với hai đỉnh trên của tấm kính nằm trên đường cong của khung cửa sổ và hai đỉnh dưới của tấm kính nằm trên một thanh ngang cố định cách sàn nhà 3 mét (song song với sàn nhà). Diện tích lớn nhất của tấm kính màu là bao nhiêu mét vuông? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Hướng dẫn giải. Gắn hệ toạ độ Oxy như hình vẽ.



Giả sử phương trình (P) có dạng $y = ax^2 + bx + c$.

Sử dụng giả thiết (P) có đỉnh $I(0; 15)$ và đi qua điểm $H(5; 10)$, ta tìm được phương trình của parabol là:

$$(P) : y = -\frac{1}{5}x^2 + 15$$

Gọi $C(c; -\frac{1}{5}c^2 + 15)$ là đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$ (điều kiện $0 < c < \sqrt{75}$).

Khi đó, các kích thước của hình chữ nhật là:

◇ Chiều rộng: $AB = 2c$.

◇ Chiều cao: $BC = y_C - 3 = (-\frac{1}{5}c^2 + 15) - 3 = -\frac{1}{5}c^2 + 12$.

Suy ra diện tích hình chữ nhật là:

$$S = 2c \cdot \left(-\frac{1}{5}c^2 + 15 - 3 \right) = -\frac{2}{5}c^3 + 24c$$

Tính đạo hàm: $S' = -\frac{6}{5}c^2 + 24$.

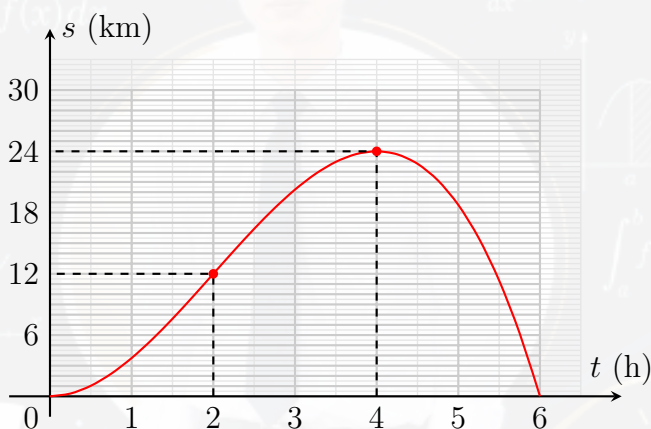
Xét $S' = 0 \Leftrightarrow -\frac{6}{5}c^2 + 24 = 0 \Leftrightarrow c^2 = 20 \Leftrightarrow c = 2\sqrt{5}$ (vì $c > 0$).

Qua bảng xét dấu, ta thấy S đạt giá trị lớn nhất tại $c = 2\sqrt{5}$.

Diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là:

$$S = -\frac{2}{5} \cdot (2\sqrt{5})^3 + 24 \cdot (2\sqrt{5}) = 32\sqrt{5} \approx 71,6 \text{ m}^2.$$

Bài 135. Thầy An tham dự giải “Đi bộ trực tuyến Ngành Giáo dục và Đào tạo Edu Run – HCMC” năm 2024. Quãng đường thầy An đi được biểu diễn bằng hàm số $s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ (với $a \neq 0$) có đồ thị như hình bên (trong đó t là thời gian tính bằng giờ, s là quãng đường tính bằng km). Khi đó, vận tốc tối đa của thầy An đạt được là bao nhiêu?



Hướng dẫn giải. Vận tốc của thầy An là đạo hàm của hàm quãng đường theo thời gian:

$$v(t) = s'(t) = 3at^2 + 2bt + c.$$

Quan sát hình vẽ, thấy đồ thị hàm số $s(t)$ đi qua các điểm có tọa độ $(0;0)$, $(2;12)$, $(4;24)$ nên ta có $s(0) = 0$, $s(2) = 12$, $s(4) = 24$.

Mặt khác, hàm số đạt cực trị tại $t = 4$ nên $s'(4) = 0$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} s(0) = 0 \\ s(2) = 12 \\ s(4) = 24 \\ s'(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0 \\ a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = 12 \\ a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + d = 24 \\ 3a \cdot 4^2 + 2b \cdot 4 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{9}{2} \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Suy ra $s(t) = -\frac{3}{4}t^3 + \frac{9}{2}t^2$; $v(t) = s'(t) = -\frac{9}{4}t^2 + 9t$.

Để tìm vận tốc tối đa thầy An đạt được, ta cần tìm giá trị lớn nhất của hàm số $v(t) = -\frac{9}{4}t^2 + 9t$.

Ta có $v'(t) = -\frac{9}{2}t + 9$.

$v'(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{2}t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

Bảng biến thiên của hàm $v(t)$:

t	0	2	$+\infty$
$v'(t)$	+	0	-
$v(t)$	0	9	$-\infty$
	$\nearrow$		$\searrow$

Dựa vào bảng biến thiên, vận tốc tối đa đạt được tại thời điểm $t = 2$ giờ.

Vậy vận tốc tối đa thầy An đạt được là $v(2) = 9$ km/h.

Bài 136. Công ty Apple đề xuất giá bán mỗi chiếc iPhone 17 Pro Max 1TB cho đại lý tại Việt Nam khi đại lý này nhập x chiếc là $P(x) = 50.000.000 - 5000x$ (VND). Hỏi doanh thu tối đa mà công ty Apple nhận được từ đại lý này là bao nhiêu? (Đơn vị tỷ VND, kết quả làm tròn đến hàng phần nguyên).

Hướng dẫn giải. Hàm số biểu diễn doanh thu thu được khi bán x chiếc điện thoại là:

$$R(x) = x \cdot P(x) = x(50.000.000 - 5000x) = -5000x^2 + 50.000.000x.$$

Đây là một hàm bậc hai có đồ thị hình parabol quay bề lõm xuống dưới, đạt giá trị lớn nhất tại đỉnh:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{50.000.000}{2 \cdot (-5000)} = 5000 \text{ (chiếc)}.$$

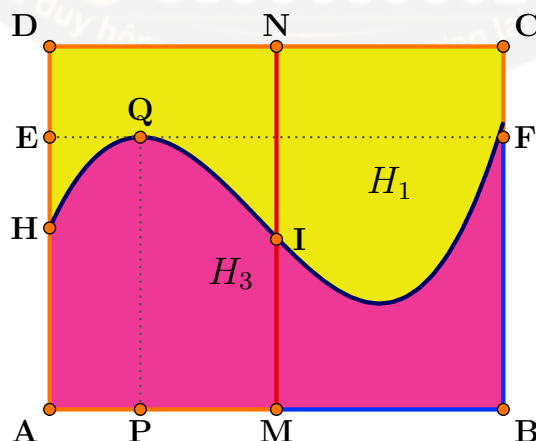
Giá trị doanh thu tối đa đạt được là:

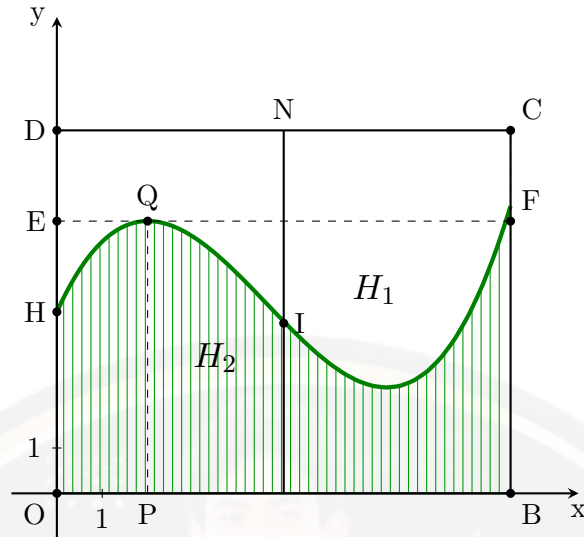
$$R(5000) = -5000 \cdot (5000)^2 + 50.000.000 \cdot 5000 = 125.000.000.000 \text{ VND}.$$

Đổi sang đơn vị tỷ VND, doanh thu tối đa là 125 tỷ VND.

Bài 137. Khuôn viên của một công viên có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 100$ m; $AD = 80$ m. Người ta muốn chia công viên thành hai khu, một khu dành cho trẻ em, một khu dành cho người lớn. Để tạo thiết kế độc đáo và lạ mắt, người ta dùng một đường cong chia khuôn viên thành hai phần H_1 (tô màu xanh) dành cho người lớn và H_3 (tô màu hồng) dành cho trẻ em như hình vẽ bên với $AH = 40$ m; $AE = 60$ m; $AP = 20$ m và $EF \parallel AB$; $PQ \parallel AD$.

Biết rằng khi xét trong một hệ tọa độ Oxy , đường cong trong hình là một phần của đồ thị hàm số bậc ba. Phần chính giữa công viên người ta muốn mắc dây đèn trang trí dọc đoạn thẳng MN như hình. Biết giá tiền mỗi mét dây trang trí của phần dành cho trẻ em là 140 nghìn đồng và phần dành cho người lớn là 180 nghìn đồng. Tổng số tiền mắc dây đèn trang trí trên đoạn MN là bao nhiêu triệu đồng?





Xét hệ trục tọa độ Oxy , với gốc tọa độ là điểm A (A trùng O). Tia Ox trùng với tia AB , tia Oy trùng với tia AD thì đường cong ranh giới giữa hai khu vực là đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Theo giả thiết đồ thị hàm số này đi qua các điểm $H(0; 40)$, $Q(20; 60)$, $F(100; 60)$ và có điểm cực trị là $Q(20; 60)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} d = 40 \\ a \cdot 20^3 + b \cdot 20^2 + c \cdot 20 + d = 60 \\ a \cdot 100^3 + b \cdot 100^2 + c \cdot 100 + d = 60 \\ 3a \cdot 100^2 + 2b \cdot 100 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 40 \\ 8000a + 400b + 20c + d = 60 \\ 1000000a + 10000b + 100c + d = 60 \\ 30000a + 200b + c = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $a = \frac{1}{10000}$; $b = -\frac{11}{500}$; $c = \frac{7}{5}$; $d = 40$.

Do M là trung điểm của AB nên $x_M = 50$. Thay vào hàm số ta tìm được tung độ điểm I :

$$y_I = \frac{1}{10000} \cdot 50^3 - \frac{11}{500} \cdot 50^2 + \frac{7}{5} \cdot 50 + 40 = 67,5.$$

Vậy tọa độ điểm I là $(50; 67,5)$.

Theo đề bài, H_3 là phần bên dưới (trẻ em), H_1 là phần bên trên (người lớn):

- ◇ Chiều dài đoạn dây thuộc phần trẻ em (MI): $67,5 \text{ m}$.
- ◇ Chiều dài đoạn dây thuộc phần người lớn (IN): $80 - 67,5 = 12,5 \text{ m}$.

Tổng số tiền mắc dây đèn là:

$$T = (67,5 \cdot 140) + (12,5 \cdot 180) = 9450 + 2250 = 11700 \text{ (nghìn đồng)}.$$

Đổi ra đơn vị triệu đồng: $11,7$ triệu đồng.

Bài 138. Một nhà hàng có tổng cộng 30 nhân viên và chi trả mức lương cố định cho mỗi nhân viên thường xuyên tăng ca là 400 USD/tháng. Vì nhà hàng liên tục đón những đoàn khách với số lượng lớn nhưng không thể thuê thêm nhân viên nên chủ nhà hàng này muốn khuyến khích nhân viên của mình tăng ca. Ông chủ quyết định cứ một nhân viên quyết định tăng ca thì mức lương của tất cả nhân viên tăng ca trong nhà hàng đều được tăng thêm 2%. Tương tự, nếu k nhân viên tăng ca thì lương cho mỗi người sẽ tăng $2k\%$. Bên cạnh tiền lương cho nhân viên thì tiền điện nước và duy trì cơ sở vật chất là cố định 8000 USD/tháng. Doanh thu trung bình từ khách hàng

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

là 10000 USD/tháng và mỗi nhân viên tăng ca trung bình sẽ được khách hàng tip 800 USD/tháng (Tiền tip phải được nộp lại cho chủ cửa hàng và tính vào doanh thu). Xác định số nhân viên tăng ca cần có để lợi nhuận của nhà hàng đạt lớn nhất.

Hướng dẫn giải. Gọi x là số nhân viên tăng ca ($0 \leq x \leq 30$) ca thì lương của mỗi nhân viên tăng ca là:

$$400(1 + 0,02x) \text{ USD/tháng}$$

Khi đó tổng lương của nhân viên tăng ca là: $400x(1 + 0,02x)$ USD/tháng và tổng tiền tip của x nhân viên tăng ca là: $800x$ USD/tháng.

Doanh thu của cửa hàng là: $10000 + 800x$.

Lợi nhuận của cửa hàng bằng doanh thu trừ đi chi phí nên ta có:

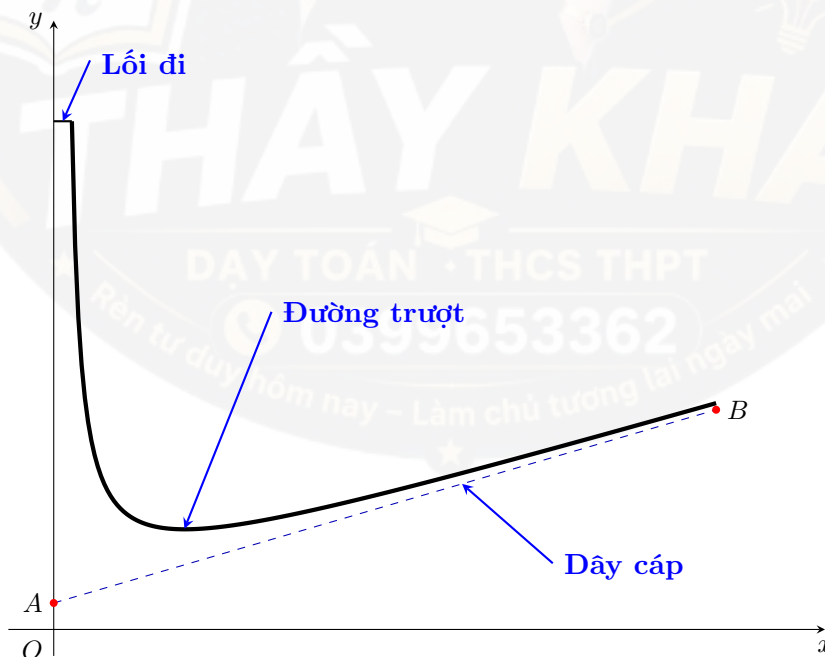
$$L(x) = 10000 + 800x - 400x(1 + 0,02x) - 8000 = 2000 + 400x - 8x^2$$

Ta có: $L'(x) = -16x + 400 = 0 \Leftrightarrow x = 25$

Hàm số $L(x)$ là một parabol có bề lõm hướng xuống nên $L(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 25$

Vậy số nhân viên tăng ca cần có để lợi nhuận của nhà hàng đạt lớn nhất là 25 người.

Bài 139. Tại một khu vui chơi giải trí, người ta thiết kế một đường trượt Zipline, xét mặt phẳng Oxy với trục Ox nằm ngang (đơn vị: m). Đường trượt được mô tả bằng một phần của đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 1}$, ($a \neq 0$) với chiều dài theo phương nằm ngang là 71 m. Ở điểm đầu của đường trượt, có một bục xuất phát song song với Ox , xuất phát từ một điểm thuộc Oy , dài 2 m và cao 19,2 m so với trục Ox . Để gia cố an toàn, người ta dùng một dây cáp AB với $A(0; 1)$ và đường thẳng AB là tiệm cận xiên của đồ thị. Tại điểm cuối của đường trượt, khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đường trượt và dây cáp là 0,25 m. Hỏi điểm thấp nhất của đường trượt cao bao nhiêu mét? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Hướng dẫn giải. Hàm số mô tả đường trượt: $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 1} = ax + (a + b) + \frac{a + b + c}{x - 1}$.

Tiệm cận xiên của đồ thị là đường thẳng $d: y = ax + a + b$.

◇ Dây cáp AB đi qua $A(0; 1)$ và nằm trên tiệm cận xiên nên: $a \cdot 0 + a + b = 1 \Rightarrow a + b = 1$.

Khi đó $d: y = ax + 1$.

◆ Điểm đầu đường trượt tại $x = 2$ có độ cao 19,2 m: $f(2) = 19,2 \Leftrightarrow \frac{4a+2b+c}{2-1} = 19,2 \Leftrightarrow 4a + 2b + c = 19,2$.

◆ Điểm cuối đường trượt tại $x = 2 + 71 = 73$. Khoảng cách thẳng đứng đến dây cáp: $f(73) - y_d(73) = 0,25 \Leftrightarrow (73a + 1 + \frac{a+b+c}{73-1}) - (73a + 1) = 0,25 \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{72} = 0,25 \Rightarrow a + b + c = 18$.

Thay $a + b = 1$ vào $a + b + c = 18$ ta được $1 + c = 18 \Rightarrow c = 17$.

Thay $b = 1 - a$ và $c = 17$ vào $4a + 2b + c = 19,2$: $4a + 2(1 - a) + 17 = 19,2 \Leftrightarrow 2a + 19 = 19,2 \Leftrightarrow 2a = 0,2 \Rightarrow a = 0,1$.

Suy ra $b = 0,9$. Hàm số là $f(x) = 0,1x + 1 + \frac{18}{x-1}$ (với $x \in [2; 73]$).

Điểm thấp nhất của đường trượt ứng với giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[2; 73]$.

$$f'(x) = 0,1 - \frac{18}{(x-1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 180 \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{180} = 1 + 6\sqrt{5} \approx 14,42 \in [2; 73].$$

Giá trị cực tiểu: $f(1 + 6\sqrt{5}) = 0,1(1 + 6\sqrt{5}) + 1 + \frac{18}{6\sqrt{5}} = 1,1 + \frac{6\sqrt{5}}{10} + \frac{3}{\sqrt{5}} = 1,1 + \frac{3\sqrt{5}}{5} + \frac{3\sqrt{5}}{5} = 1,1 + 1,2\sqrt{5} \approx 3,783$.

Vậy điểm thấp nhất của đường trượt cao khoảng 3,78 m.

Bài 140. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe Honda Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 (triệu đồng) và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất?

Hướng dẫn giải. Gọi x (triệu đồng) là số tiền giảm giá cho mỗi chiếc xe ($0 \leq x \leq 4$).

◆ Lợi nhuận thu được khi bán một chiếc xe máy sau khi giảm giá là: $31 - x - 27 = 4 - x$ (triệu đồng).

◆ Số lượng chiếc xe bán được trong một năm là: $600 + 200x$ (chiếc).

Hàm lợi nhuận $P(x)$ thu được trong một năm là:

$$P(x) = (600 + 200x)(4 - x) = -200x^2 + 200x + 2400 \text{ (triệu đồng)}.$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm $P(x)$ với $0 \leq x \leq 4$.

Ta có: $P'(x) = -400x + 200$. $P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,5$.

Xét các giá trị tại biên và điểm cực trị: $P(0) = 2400$; $P(0,5) = 2450$; $P(4) = 0$.

Suy ra 2450 là giá trị lớn nhất của hàm lợi nhuận, đạt được khi $x = 0,5$. Tức là mỗi chiếc xe nên giảm giá 0,5 triệu đồng.

Vậy doanh nghiệp nên định giá bán mới là $31 - 0,5 = 30,5$ triệu đồng để thu được lợi nhuận cao nhất.

Bài 141. Hiện tại, mỗi tháng một cửa hàng đồ lưu niệm bán được 100 sản phẩm A. Với mỗi sản phẩm A bán được, cửa hàng thu được 20 nghìn đồng lợi nhuận. Qua khảo sát, người ta thấy rằng với mỗi nghìn đồng giảm giá, cửa hàng bán thêm được 10 sản phẩm A. Cửa hàng nên giảm

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

giá bao nhiêu cho mỗi sản phẩm A để thu được lợi nhuận lớn nhất từ việc bán sản phẩm này? Tính lợi nhuận lớn nhất đó.

 **Hướng dẫn giải.** Gọi x ($x > 0$) (nghìn đồng) là mức giảm giá cho mỗi sản phẩm A.

◇ Số lượng sản phẩm bán được mỗi tháng là: $100 + 10x$.

◇ Lợi nhuận trên mỗi sản phẩm sau khi giảm giá là: $20 - x$ (nghìn đồng).

Hàm tổng lợi nhuận mỗi tháng là:

$$P(x) = (100 + 10x)(20 - x) = -10x^2 + 100x + 2000 \text{ (nghìn đồng)}.$$

Xét hàm số trên $(0; +\infty)$, ta có: $P'(x) = -20x + 100$. $P'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$. Bảng biến thiên:

x	0	5	$+\infty$	
y'		+	0	-
y	2000	2250	$-\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\max P(x) = 2250$ tại $x = 5$. Vậy cửa hàng nên giảm giá 5000 đồng cho mỗi sản phẩm A thì lợi nhuận thu được cao nhất là 2.250.000 đồng.

 **Bài 142.** Một chủ nhà hàng kinh doanh phần ăn uống đồng giá có chiến lược kinh doanh như sau: Phí cố định được ước tính trong một năm là 55 triệu đồng. Chi phí một phần ăn ước tính khoảng 22 nghìn đồng. Giá niêm yết trên thực đơn là 30 nghìn đồng. Giả định rằng tất cả các phần ăn chế biến sẵn đều được bán hết và kí hiệu x là số phần ăn trong một năm, giả sử x là số nguyên thuộc $[5000; 25000]$. Mục tiêu của chủ nhà hàng là tạo ra lợi nhuận ít nhất là 135 triệu đồng mỗi năm. Biết rằng nhà hàng mở cửa 300 ngày một năm, hỏi trung bình mỗi ngày nhà hàng phải phục vụ ít nhất bao nhiêu phần ăn để đạt mục tiêu trên?

 **Hướng dẫn giải.** Lợi nhuận mỗi năm của nhà hàng được tính theo công thức (đơn vị: nghìn đồng):

$$L(x) = 30x - (22x + 55000) = 8x - 55000.$$

Mục tiêu lợi nhuận ít nhất là 135 triệu đồng (135.000 nghìn đồng):

$$L(x) \geq 135000 \Leftrightarrow 8x - 55000 \geq 135000 \Leftrightarrow 8x \geq 190000 \Leftrightarrow x \geq 23750.$$

Giá trị này thuộc khoảng $[5000; 25000]$. Số phần ăn trung bình phục vụ mỗi ngày trong 300 ngày là:

$$\frac{x}{300} \geq \frac{23750}{300} \approx 79,17.$$

Vì số phần ăn phải là số nguyên, nên trung bình mỗi ngày nhà hàng phải phục vụ ít nhất 80 phần ăn.

 **Bài 143.** (Bài 24) Trận bóng đá giao hữu giữa đội tuyển Việt Nam và Singapore ở sân vận động Mỹ Đình có sức chứa 60.000 khán giả. Ban tổ chức bán vé với giá mỗi vé là 100 nghìn đồng, số khán giả trung bình đến sân xem bóng đá là 24.000 người. Qua thăm dò dư luận, người ta thấy rằng mỗi khi giá vé giảm thêm 10 nghìn đồng, sẽ có thêm khoảng 3000 khán giả. Hỏi ban tổ chức nên đặt giá vé là bao nhiêu để doanh thu từ tiền bán vé là lớn nhất?

 **Hướng dẫn giải.** Gọi x là số lần giảm giá vé thêm 10 nghìn đồng ($x > 0$ và giá vé $100 - 10x >$

$$0 \Rightarrow x < 10).$$

♦ Giá vé sau khi giảm là: $100 - 10x$ (nghìn đồng).

♦ Số lượng khán giả tương ứng là: $24000 + 3000x$ (người).

Hàm doanh thu từ việc bán vé là:

$$R(x) = (100 - 10x)(24000 + 3000x) = 3000000(10 - x)(8 + x) = 3000000(-x^2 + 2x + 80).$$

Ta có $R'(x) = 3000000(-2x + 2)$. $R'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Vì hàm $R(x)$ là hàm bậc hai có hệ số $a < 0$ nên đạt cực đại tại đỉnh $x = 1$. Giá vé tương ứng để doanh thu lớn nhất là: $100 - 10(1) = 90$ (nghìn đồng).

Bài 144. Năm 2025, một cửa hàng cần nhập về tổng cộng 600 chiếc điện thoại. Cửa hàng sẽ nhận theo nhiều lô hàng, mỗi lô hàng chứa số điện thoại bằng nhau. Chi phí vận chuyển là 50 USD cho mỗi lô hàng, cộng thêm một loại phí vận chuyển là 3 USD cho mỗi chiếc điện thoại và phí này cả năm chỉ tính cho lần vận chuyển đầu tiên. Hỏi cửa hàng đó nên nhập mỗi lô hàng bao nhiêu chiếc điện thoại để chi phí vận chuyển cả năm 2025 thấp nhất?

Hướng dẫn giải. Gọi x là số chiếc điện thoại trong mỗi lô hàng ($1 \leq x \leq 600, x \in \mathbb{N}$).

♦ Số lô hàng cần nhập trong năm là: $\frac{600}{x}$.

♦ Chi phí vận chuyển cho các lô hàng là: $\frac{600}{x} \cdot 50$ (USD).

♦ Phí vận chuyển cố định cho lần đầu là: $3x$ (USD).

Tổng chi phí vận chuyển cả năm là:

$$C(x) = \frac{30000}{x} + 3x \text{ (USD)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\frac{30000}{x}$ và $3x$:

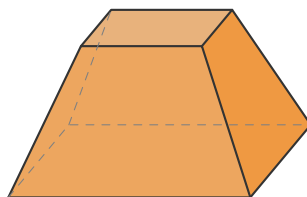
$$C(x) \geq 2\sqrt{\frac{30000}{x} \cdot 3x} = 2\sqrt{90000} = 2 \cdot 300 = 600.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\frac{30000}{x} = 3x \Leftrightarrow x^2 = 10000 \Leftrightarrow x = 100.$$

Vậy cửa hàng nên nhập mỗi lô hàng 100 chiếc điện thoại để chi phí vận chuyển thấp nhất.

Bài 145. Một xưởng thủ công mỹ nghệ sản xuất loại chụp đèn trang trí dạng hình chóp cụt tứ giác đều. Gọi x là độ dài cạnh đáy lớn (đơn vị: dm). Tính toán cho thấy tổng chi phí vật liệu (tính bằng nghìn đồng) cho một chụp đèn là: $C(x) = x^2 + 27$ (nghìn đồng). Thời gian sản xuất cho một chụp đèn được xác định là: $T(x) = x + 3$ (giờ). Xưởng muốn xác định kích thước x để chi phí vật liệu trung bình trên một giờ sản xuất là thấp nhất, nhằm tối ưu hóa hiệu quả sử dụng thời gian và vật liệu. Hãy tìm giá trị của x .



Hướng dẫn giải. Hàm chi phí vật liệu trung bình trên một giờ sản xuất được xác định bởi

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

công thức:

$$f(x) = \frac{C(x)}{T(x)} = \frac{x^2 + 27}{x + 3}, \quad \text{với } x > 0.$$

Ta có đạo hàm của hàm số:

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 27)'(x + 3) - (x^2 + 27)(x + 3)'}{(x + 3)^2} = \frac{2x(x + 3) - (x^2 + 27)}{(x + 3)^2} = \frac{x^2 + 6x - 27}{(x + 3)^2}.$$

Xét phương trình $f'(x) = 0$:

$$x^2 + 6x - 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 & (\text{thỏa mãn } x > 0) \\ x = -9 & (\text{loại}) \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên hoặc quan sát tính chất của hàm số, ta thấy hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 3$. Khi đó, giá trị thấp nhất của chi phí trung bình là:

$$f_{\min} = f(3) = \frac{3^2 + 27}{3 + 3} = \frac{36}{6} = 6 \text{ (nghìn đồng/giờ)}.$$

Vậy giá trị của x cần tìm là $x = 3$ dm.

Bài 146. Một cửa hàng phân phối gạo với chi phí mua vào là 30 nghìn đồng/1kg, bán ra là 35 nghìn đồng/1kg. Với giá bán này thì số gạo bán được trong một tháng là 12000 kg. Để đẩy mạnh hơn nữa doanh số tiêu thụ gạo trong một tháng, cửa hàng dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 nghìn đồng/1kg thì số lượng gạo bán ra trong một tháng sẽ tăng thêm 4000 kg. Cửa hàng phải định giá bán gạo mới là bao nhiêu nghìn đồng một kilôgam thì lợi nhuận thu được trong tháng cao nhất?

Hướng dẫn giải. Gọi x là số tiền giảm giá trên mỗi kilôgam gạo (đơn vị: nghìn đồng, $x \geq 0$).

Giá bán gạo mới là $35 - x$ (nghìn đồng/kg).

Số lượng gạo bán được trong một tháng tương ứng là $Q = 12000 + 4000x$ (kg).

Lợi nhuận thu được trên mỗi kilôgam gạo là $(35 - x) - 30 = 5 - x$ (nghìn đồng).

Tổng lợi nhuận thu được trong một tháng là:

$$L(x) = (5 - x)(12000 + 4000x) = 4000(5 - x)(3 + x) = 4000(-x^2 + 2x + 15).$$

Xét hàm số $f(x) = -x^2 + 2x + 15$ trên miền xác định hợp lý $[0; 5]$.

Ta có $f'(x) = -2x + 2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

x	0	1	5
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	15	16	0

Dựa vào bảng biến thiên, lợi nhuận đạt giá trị lớn nhất khi $x = 1$ (tương ứng giảm 1 nghìn đồng/kg).

Vậy cửa hàng nên định giá bán gạo mới là $35 - 1 = 34$ nghìn đồng/kg.

Bài 147. Một đại lý nhập khẩu trái cây tươi để phân phối cho các cửa hàng. Mỗi lần nhập khẩu trái cây, khoảng chi phí vận chuyển (không đổi) là 25 triệu đồng. Chi phí bảo quản mỗi tạ trái cây trong kho là 80 nghìn đồng/ngày. Thời gian bảo quản tối đa 10 ngày. Biết rằng, kể từ ngày đầu tiên nhập hàng, đại lý sẽ phân phối tới các cửa hàng 25 tạ trái cây mỗi ngày. Mỗi lần nhập hàng,

đại lý phải nhập đủ trái cây cho bao nhiêu ngày phân phối để chi phí trung bình cho mỗi ngày thấp nhất (bao gồm chi phí vận chuyển và chi phí bảo quản trong kho)?

Hướng dẫn giải. Gọi x là số ngày phân phối trái cây cho mỗi lần nhập hàng ($1 \leq x \leq 10, x \in \mathbb{N}$).

Số lượng trái cây nhập mỗi lần là $25x$ (tạ).

Chi phí vận chuyển cho mỗi lần nhập hàng là 25000 (nghìn đồng).

Giả sử đại lý phân phối trái cây vào đầu mỗi ngày, số lượng trái cây cần bảo quản trong kho tại mỗi ngày là:

◇ Ngày thứ 1 còn: $25(x-1)$ tạ.

◇ Ngày thứ 2 còn: $25(x-2)$ tạ.

◇ ...

◇ Ngày thứ x còn: 0 tạ.

Tổng chi phí bảo quản trong x ngày là:

$$C_{bq} = 80 \times [25(x-1) + 25(x-2) + \dots + 25 \times 1 + 0] = 80 \times 25 \times \frac{(x-1)x}{2} = 1000x(x-1).$$

Tổng chi phí cho một lần nhập hàng và bảo quản là: $C(x) = 25000 + 1000x(x-1) = 1000x^2 - 1000x + 25000$.

Chi phí trung bình cho mỗi ngày là: $f(x) = \frac{C(x)}{x} = 1000x - 1000 + \frac{25000}{x}$ (nghìn đồng).

Xét hàm số $f(x)$ trên miền $[1; 10]$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $1000x$ và $\frac{25000}{x}$:

$$1000x + \frac{25000}{x} \geq 2\sqrt{1000x \cdot \frac{25000}{x}} = 10000.$$

Suy ra $f(x) \geq 10000 - 1000 = 9000$.

Dấu "=" xảy ra khi $1000x = \frac{25000}{x} \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 5$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy đại lý nên nhập đủ trái cây cho 5 ngày phân phối để chi phí trung bình mỗi ngày là thấp nhất.

Bài 148. Chi phí về nhiên liệu của một con tàu được chia làm hai phần. Phần chi phí thứ nhất không phụ thuộc vào tốc độ tàu và bằng 480 nghìn đồng mỗi giờ. Chi phí phần thứ hai trên 1 km đường tỉ lệ thuận với lập phương của tốc độ tàu, khi tốc độ bằng 20 km/h thì chi phí phần thứ hai bằng 100 nghìn đồng mỗi giờ. Giả sử con tàu đó luôn giữ nguyên tốc độ di chuyển, để tổng chi phí nhiên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất thì tốc độ của con tàu đó bằng bao nhiêu km/h? (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Hướng dẫn giải. Gọi v là tốc độ của con tàu (đơn vị: km/h, $v > 0$).

Phần chi phí thứ nhất mỗi giờ là 480 nghìn đồng. Do đó, chi phí thứ nhất trên mỗi kilômét đường là $c_1(v) = \frac{480}{v}$ (nghìn đồng).

Gọi $c_2(v)$ là chi phí phần thứ hai trên mỗi kilômét đường. Theo đề bài, $c_2(v) = k \cdot v^3$. Chi phí phần thứ hai mỗi giờ là $C_2(v) = v \cdot c_2(v) = k \cdot v^4$.

Khi $v = 20$ km/h, chi phí phần thứ hai mỗi giờ là 100 nghìn đồng, ta có:

$$100 = k \cdot 20^4 \Rightarrow k = \frac{100}{160000} = \frac{1}{1600}.$$

Vậy chi phí phần thứ hai trên mỗi kilômét đường là $c_2(v) = \frac{v^3}{1600}$ (nghìn đồng).

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

Tổng chi phí nhiên liệu trên 1 km đường là: $f(v) = c_1(v) + c_2(v) = \frac{480}{v} + \frac{v^3}{1600}$ (nghìn đồng).

Xét hàm số $f(v)$ trên $(0; +\infty)$, ta có: $f'(v) = -\frac{480}{v^2} + \frac{3v^2}{1600} = \frac{3v^4 - 768000}{1600v^2}$.

$f'(v) = 0 \Leftrightarrow 3v^4 = 768000 \Leftrightarrow v^4 = 256000 \Leftrightarrow v = \sqrt[4]{256000} \approx 22,5$ (km/h).

Lập bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $v = \sqrt[4]{256000} \approx 22,5$.

Vậy tốc độ của con tàu để tổng chi phí trên 1 km đường nhỏ nhất là khoảng 22,5 km/h.

Bài 149. Một khu vui chơi giải trí dành cho trẻ em đang có kế hoạch điều chỉnh giá vé để tăng lợi nhuận. Sau khi khảo sát thị trường, người ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 50.000/người thì trung bình có 500 người đến. Nhưng nếu tăng thêm 1.000/người thì sẽ mất 10 khách hàng hoặc giảm đi 1.000/người thì sẽ có thêm 10 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 5.000 lợi nhuận trong các dịch vụ đi kèm. Hỏi giá vé vào cửa là bao nhiêu nghìn đồng để thu nhập là lớn nhất?

Hướng dẫn giải.

Gọi giá vé vào cửa sau khi điều chỉnh là $50 + x$ (nghìn đồng); điều kiện: $50 + x > 0 \Leftrightarrow x > -50$. Số khách hàng đến sau khi điều chỉnh giá vé là $500 - 10x$ (người).

Khi đó tổng thu nhập là:

$$\begin{aligned} f(x) &= (50 + x)(500 - 10x) + 5 \cdot (500 - 10x) \\ &= -10x^2 - 50x + 27500 \end{aligned}$$

Xét hàm số: $f(x) = -10x^2 - 50x + 27500$ trên $(-50; +\infty)$.

Bảng biến thiên:

x	-50	$-\frac{5}{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	5000	$\frac{55125}{2}$	$-\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = -\frac{5}{2}$.

Vậy để thu nhập lớn nhất thì giá vé vào cửa là $50 - \frac{5}{2} = 47,5$ (nghìn đồng).

Bài 150. Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 300 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($1 \leq x \leq 300$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = -2x^2 + 1312x$ (nghìn đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là $G(x) = x^2 - 77x + 1000 + \frac{40000}{x}$ (nghìn đồng). Lợi nhuận thu được của doanh nghiệp (tính theo đơn vị triệu đồng) đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn giải. Chi phí sản xuất cho x sản phẩm là $xG(x) = x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000$ (nghìn đồng).

Lợi nhuận thu được của doanh nghiệp:

$$h(x) = -2x^2 + 1312x - (x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000) = -x^3 + 75x^2 + 312x - 40000 \text{ (nghìn đồng)}.$$

Ta có: $h'(x) = -3x^2 + 150x + 312$.

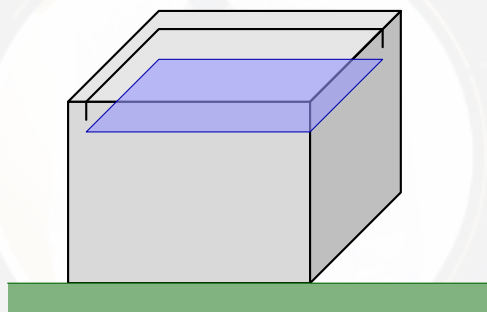
$$\text{Xét } h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 52 \\ x = -2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên trên đoạn $[1; 300]$:

x	1	52	300
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	38416		

Vậy lợi nhuận lớn nhất của doanh nghiệp khoảng 38 triệu đồng (đổi từ 38.416 nghìn đồng).

Bài 151. Để tích trữ nước ngọt sinh hoạt chuẩn bị cho mùa hạn mặn ở Đồng bằng sông Cửu Long, một hộ dân muốn xây một bể nước không nắp dạng khối hộp chữ nhật có thể tích bằng 200 m^3 . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Biết chi phí xây bể là 850 nghìn đồng/ m^2 . Hãy tính chi phí thấp nhất mà hộ gia đình cần bỏ ra để xây dựng bể chứa nước ngọt dự trữ (làm tròn đến đơn vị triệu đồng).



Hướng dẫn giải. Gọi x (m) là chiều rộng đáy bể ($x > 0$), chiều dài đáy bể là $2x$ (m).

Diện tích đáy bể: $S = 2x^2$. Thể tích bể chứa nước: $V = S \cdot h \Rightarrow h = \frac{200}{2x^2} = \frac{100}{x^2}$.

Diện tích xung quanh bể nước: $S_{xq} = 2(x + 2x) \cdot h = 6x \cdot \frac{100}{x^2} = \frac{600}{x}$.

Diện tích xây dựng: $S_{xd} = S_{\text{đáy}} + S_{xq} = 2x^2 + \frac{600}{x}$.

Chi phí xây dựng bể: $f(x) = 850 \cdot \left(2x^2 + \frac{600}{x} \right)$.

Ta có: $f'(x) = 850 \left(4x - \frac{600}{x^2} \right) = 850 \left(\frac{4x^3 - 600}{x^2} \right)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 600 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 150 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{150}$.

Bảng biến thiên:

x	0	$\sqrt[3]{150}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$f(\sqrt[3]{150})$		

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

Ta có: $f(\sqrt[3]{150}) = 850 \cdot \left(2(\sqrt[3]{150})^2 + \frac{600}{\sqrt[3]{150}} \right) \approx 143979$ (nghìn đồng).

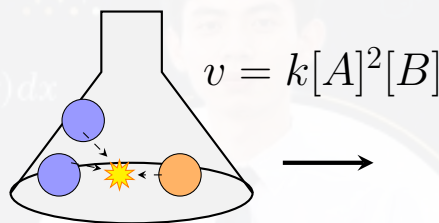
Đổi sang đơn vị triệu đồng và làm tròn: 143,979 triệu đồng $\approx$ 144 triệu đồng.

Vậy chi phí thấp nhất hộ gia đình cần bỏ ra để xây dựng bể là 144 triệu đồng.

Bài 152. Trong một phản ứng hóa học, tốc độ phản ứng v được biểu diễn theo công thức: $v = k \cdot [A]^2 \cdot [B]$, trong đó:

- ◇ v là tốc độ phản ứng (mol/l/s),
- ◇ $k = 0,1$ là hằng số tốc độ phản ứng,
- ◇ $[A]$ và $[B]$ lần lượt là nồng độ của hai chất phản ứng (mol/l).

Giả sử tổng nồng độ ban đầu của $[A]$ và $[B]$ là $C = 2$ mol/l, tức là $[A] + [B] = 2$. Hãy tìm nồng độ của $[A]$ tại đó tốc độ phản ứng v đạt cực đại.



Hướng dẫn giải.

Ta có $[B] = 2 - [A]$ nên thay vào công thức tốc độ phản ứng ta được:

$$v = 0,1 \cdot [A]^2 \cdot (2 - [A]) = 0,1 \cdot (2[A]^2 - [A]^3) \quad \text{với } 0 \leq [A] \leq 2.$$

Đạo hàm của v theo biến nồng độ $[A]$ là:

$$v' = 0,1 \cdot (4[A] - 3[A]^2).$$

$$\text{Xét } v' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} [A] = 0 \\ [A] = \frac{4}{3} \end{cases}$$

- ◇ Với $[A] = 0$ thì tốc độ phản ứng $v = 0$ (loại vì không có ý nghĩa thực tế).
 - ◇ Với $[A] = \frac{4}{3}$ thì $v = \frac{16}{135} \approx 0,1185$ (mol/l/s), đây là giá trị cực đại của hàm số trên đoạn $[0; 2]$.
- Vậy Với $[A] = \frac{4}{3} \approx 1,33$ (mol/l) thì tốc độ phản ứng v đạt cực đại.

Bài 153. Một bể ban đầu chứa 10 gallon dung dịch muối với 2 lb (pound) muối. Dung dịch vào có nồng độ 1,5 lb/gallon chảy vào với tốc độ 3 gallon/phút, và hỗn hợp trong bể chảy ra với tốc độ 4 gallon/phút. Người ta cho biết lượng muối trong bể sau t phút là m (pound), với:

$$m = f(t) = 1,5(10 - t) - 0,0013(10 - t)^4, \quad 0 \leq t \leq 10.$$

Hỏi lượng muối tối đa có thể có trong bể tại một thời điểm nào đó là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Hướng dẫn giải.

Ta có công thức lượng muối m (pound) trong bể sau t phút:

$$m = f(t) = 1,5(10 - t) - 0,0013(10 - t)^4; \quad 0 \leq t \leq 10$$

Đặt $u = 10 - t$. Khi t chạy từ 0 đến 10 thì u chạy từ 10 xuống 0.

Khi đó $m(u) = 1,5u - 0,0013u^4; \quad 0 \leq u \leq 10$

Tính đạo hàm theo u ta được: $m' = 1,5 - 0,0013 \cdot 4u^3 = 1,5 - 0,0052u^3$

$$\text{Xét } 1,5 - 0,0052u^3 = 0 \Rightarrow u^3 = \frac{1,5}{0,0052} \approx 288,46 \Rightarrow u \approx \sqrt[3]{288,46} \approx 6,62$$

Để dàng bằng xét dấu suy ra tại $u \approx 6,62$: $m_{C\text{E}} = 1,5 \cdot 6,62 - 0,0013 \cdot (6,62)^4 \approx 9,93 - 2,50 \approx 7,43$ lb.

Lượng muối trong bể đạt tối đa khoảng 7,43 lb tại thời điểm $t = 10 - u \approx 10 - 6,62 = 3,38$ phút.

Bài 154. Khi chất thải hữu cơ được đổ vào một cái ao, quá trình ôxy hóa xảy ra sẽ làm giảm hàm lượng ôxy trong nước. Tuy nhiên, theo thời gian, tự nhiên sẽ phục hồi lại mức ôxy về giá trị bình thường. Trong đồ thị kèm theo, $P(t)$ cho biết phần trăm hàm lượng ôxy (so với mức bình thường) sau t ngày kể từ khi chất thải được đổ vào ao.

Giả sử hàm số biểu thị hàm lượng ôxy là $P(t) = 100 \frac{t^2 + 10t + 100}{t^2 + 20t + 100}$ (% mức bình thường), $t \geq 0$.

Tìm thời điểm mà hàm lượng ôxy thấp nhất.

Hướng dẫn giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} P'(t) &= 100 \cdot \frac{(2t + 10)(t^2 + 20t + 100) - (2t + 20)(t^2 + 10t + 100)}{(t^2 + 20t + 100)^2} \\ &= 100 \cdot \frac{10t^2 - 1000}{(t^2 + 20t + 100)^2} \end{aligned}$$

Khi đó:

$$P'(t) = 0 \Rightarrow 10t^2 - 1000 = 0 \Rightarrow t^2 = 100 \Rightarrow t = 10 \quad (t \geq 0)$$

Lập bảng biến thiên, ta có: $t = 10$ là điểm cực tiểu của hàm số và giá trị cực tiểu là $P(10) = 75$.

Vậy thời điểm mà hàm lượng ôxy thấp nhất là $t = 10$ ngày.

Bài 155. Một cầu thủ thực hiện cú sút bóng xoáy (banana kick), làm bóng bay theo đường cong hình bậc ba thay vì một parabol thông thường. Quỹ đạo bóng trong hệ trục tọa độ Oxy được mô tả bởi phương trình $y = \frac{x^3}{100} - \frac{x^2}{10} + \frac{253x}{100}$, với y là độ cao của bóng (m). Biết chiều cao chuẩn của khung thành là 2,44 m. Khi bóng chạm xà ngang thì góc lệch của bóng và mặt đất là bao nhiêu? Biết góc lệch của bóng và mặt đất là góc của đường tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{100} - \frac{x^2}{10} + \frac{253x}{100}$ tại điểm chạm xà ngang và trục Ox (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn giải.

Ta có bóng chạm xà ngang nên ta có tung độ $y = 2,44$.

$$y = 2,44 \Leftrightarrow 2,44 = \frac{x^3}{100} - \frac{x^2}{10} + \frac{253x}{100} \Leftrightarrow x^3 - 10x^2 + 253x - 244 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Đạo hàm của hàm số: $y' = f'(x) = \frac{3x^2}{100} - \frac{2x}{10} + \frac{253}{100}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm chạm xà ngang ($x = 1$) là:

$$k_{tt} = f'(1) = \frac{3}{100} - \frac{1}{5} + \frac{253}{100} = \frac{236}{100} = \frac{59}{25}$$

Chương 6. LỜI GIẢI CHI TIẾT TRẢ LỜI NGẮN

Gọi α là góc của tiếp tuyến với trục Ox , ta có:

$$\tan \alpha = \frac{59}{25} \Rightarrow \alpha \approx 67^\circ$$

