

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NGÃI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HSG CẤP TỈNH
THÀNH LẬP ĐỘI TUYỂN THAM DỰ
KỲ THI CHỌN HSG QUỐC GIA THPT
NĂM HỌC 2024-2025

Ngày thi: 24/9/2024

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1 (5,0 điểm). Cho dãy số thực (u_n) được xác định bởi $u_1 = 3$ và $u_{n+1} = \sqrt{u_n + \frac{1}{n}}$

với mọi $n \geq 1$.

a) Chứng minh rằng (u_n) là dãy số giảm.

b) Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} n(u_n - 1)$.

Bài 2 (5,0 điểm). Đa thức $f(x)$ hệ số thực được gọi là “đẹp” nếu nó có thể được biểu diễn thành dạng $f(x) = (P(x))^2 - (Q(x))^3$ (*) với $P(x), Q(x)$ là các đa thức hệ số thực. Chứng minh rằng:

a) $-2024x^2 + 2025$ là một đa thức “đẹp”.

b) Nếu $f(x) = 1$ thì $P(x), Q(x)$ phải là các đa thức hằng để đẳng thức (*) xảy ra.

Bài 3 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân. Gọi (I) là đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC và D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn (I) với các cạnh BC, CA, AB . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC , K là chân đường cao kẻ từ D của tam giác DEF , L là điểm đối xứng của I qua EF .

a) Chứng minh rằng các điểm H, K, L có cùng phương tích đối với đường tròn đường kính BE và đường tròn đường kính CF .

b) Đường thẳng DK cắt AH tại M . Chứng minh rằng đường tròn tâm H , bán kính HM đi qua trực tâm của tam giác DME .

Bài 4 (5,0 điểm). Cho một dãy gồm 30 chữ số 1 như bên dưới

111111111111111111111111111111

a) Có bao nhiêu cách thêm 5 chữ số 0 vào dãy đã cho để tạo thành một xâu kí tự sao cho giữa hai chữ số 0 nào cũng có ít nhất 4 chữ số 1?

b) Có bao nhiêu cách điền một hoặc nhiều dấu cộng (+) vào giữa các chữ số 1 trong dãy đã cho ban đầu sao cho tổng thu được chia hết cho 30?

HẾT

Ghi chú: Giám thị không giải thích gì thêm.

Ngày thi: 25/9/2024

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 5 (6,0 điểm). Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ khác hằng và thỏa mãn

$$2(x+1)f(x-1)f(y) = 2xf(xy) - f(2y) \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Chứng minh rằng $f(xy) = f(x)f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn điều kiện bài toán.

Bài 6 (7,0 điểm). Với mỗi số nguyên dương k , kí hiệu $S(k)$ là tổng các chữ số của k viết trong hệ thập phân.

a) Tính $S(1) - S(2) + S(3) - S(4) + \dots + S(2023) - S(2024) + S(2025)$.

b) Xét các số $m = n^2 + n + 1$ với $n \in \mathbb{Z}^+$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S(m)$.

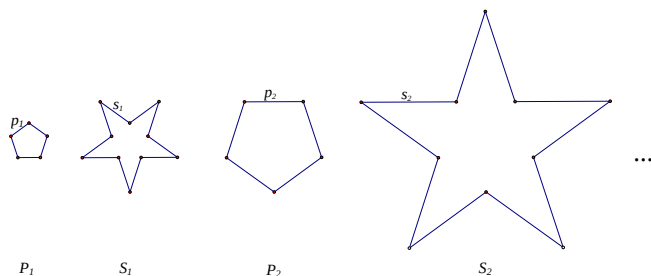
c) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ bậc nhất, hệ số nguyên không âm sao cho

$$S(P(n)) = P(S(n)), \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Bài 7 (7,0 điểm).

a) Cho ngũ giác đều P_1 . Chứng minh rằng không thể chọn một hệ trục tọa độ trên mặt phẳng chứa P_1 sao cho tất cả các đỉnh của ngũ giác đã cho đều có tọa độ nguyên.

b) Kéo dài các cạnh của ngũ giác đều P_1 cắt nhau tạo ra hình sao S_1 . Nối các đỉnh kề nhau của S_1 , ta nhận được ngũ giác đều mới P_2 , và lại kéo dài các cạnh của P_2 tạo ra hình sao mới S_2 . Lặp lại quá trình ấy ta thu được dãy vô hạn các hình ngũ giác đều và hình sao $P_1, S_1, P_2, S_2, P_3, S_3, \dots$. Kí hiệu độ dài cạnh của các ngũ giác đều $P_1, P_2, P_3, \dots$ là $p_1, p_2, p_3, \dots$ và độ dài cạnh của các hình sao $S_1, S_2, S_3, \dots$ là $s_1, s_2, s_3, \dots$



Xét dãy số (u_n) : $p_1, s_1, p_2, s_2, p_3, s_3, \dots$. Chứng minh rằng kể từ số hạng thứ ba, mỗi số hạng của dãy bằng tổng của hai số hạng đứng ngay trước nó.

c) Hỏi trong dãy $P_1, S_1, P_2, S_2, P_3, S_3, \dots$, tồn tại hay không hình ngũ giác và hình sao mà độ dài cạnh của hình sao gấp 2024 lần độ dài cạnh của hình ngũ giác? Vì sao?

HẾT

Ghi chú: Giám thị không giải thích gì thêm.