



ĐẠO HÀM

BÀI: ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA ĐẠO HÀM

ĐỀ TEST SỐ 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có $f'(2) = 5$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $M(2;1)$ là

- A. $y = 5x + 11$. B. $y = 5x - 9$. C. $y = 5x - 11$. D. $y = 5x + 3$.

Câu 2: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là **sai**?

- A. $(c)' = 0$ (với c là hằng số). B. $(2x)' = 2$.
C. $(x^6)' = 6x^5$. D. $(\sqrt{x})' = 2\sqrt{x}$ (với $x > 0$).

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2, & x > 0 \\ x + a, & x \leq 0 \end{cases}$. Khi hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 0$. Hãy tính

$$T = a + b.$$

- A. $T = -4$. B. $T = 0$. C. $T = 3$. D. $T = 4$.

Câu 4: Tính đạo hàm của hàm số $y = -x^2 + 2x$ tại $x_0 = 1$

- A. 2. B. -1. C. -2. D. 0.

Câu 5: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ tại $x_0 = 1$

- A. Không tồn tại. B. 0 C. -1. D. -3.

Câu 6: Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ trên $(0; +\infty)$ là

- A. $2\sqrt{x}$. B. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{x}}$. D. $\sqrt{x}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = x^3 + 1$ có đồ thị (C) . Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x = 1$ là:

- A. $f'(1) = 3$. B. $f'(1) = -3$. C. $f'(1) = 4$. D. $f'(1) = -4$.

Câu 8: Một chất điểm chuyển động có phương trình $S(t) = 4t^2 + 2$, với t tính bằng giây (s) và S là được tính bằng mét (m). Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 4(s)$.

- A. $v(4) = 32 \text{ m/s}$. B. $v(4) = 34 \text{ m/s}$. C. $v(4) = 36 \text{ m/s}$. D. $v(4) = 8 \text{ m/s}$.

- Câu 9:** Một chất điểm chuyển động có quãng đường được cho bởi phương trình $s(t) = \frac{1}{4}t^4 - t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 10t$, trong đó $t > 0$ với t tính bằng giây (s) và s tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của vật bằng bao nhiêu ?
- A. 13. B. 11. C. 10. D. 12.

- Câu 10:** Chuyển động của một vật có phương trình $s = 5 + \sin\left(0,8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, trong đó s tính bằng centimet và thời gian t tính bằng giây. Tính giá trị tuyệt đối của gia tốc của vật tại các thời điểm vận tốc bằng 0.
- A. $0,64\pi^2$. B. $10,64\pi^2$. C. $0,32\pi^2$. D. $0,14\pi^2$.

- Câu 11:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với đường thẳng $y = -2$.
- A. $y = -9x + 7$; $y = -2$. B. $y = -2$. C. $y = 9x + 7$; $y = -2$. D. $y = 9x + 7$; $y = 2$.

- Câu 12:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$.
- A. $y = 9x + 7$; $y = 9x - 25$. B. $y = 9x - 25$.
C. $y = 9x - 7$; $y = 9x + 25$. D. $y = 9x + 25$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

- Câu 1:** Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x) = x^2 + 2x$ tại điểm $x_0 = 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

b) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

c) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 4)$

d) $f'(1) = a \Rightarrow a > 5$

- Câu 2:** Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2x^3$. Khi đó:

a) Với bất kì x_0 : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

b) $f'(1) = -6$

c) $f'(0) = 0$

d) $f'(2) = 24$

- Câu 3:** Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3$ có đồ thị (C) và điểm M thuộc (C) có hoành độ $x_0 = -1$. Khi đó:
- Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M bằng 6
 - Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M đi qua điểm $A(0;4)$
 - Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M cắt đường thẳng $d: y = 3x$ tại điểm có hoành độ bằng 4
 - Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = -\frac{1}{6}x$
- Câu 4:** Viết được phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+9}{x+1}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x - 2y + 2 = 0$. Khi đó:
- Có hai phương trình tiếp tuyến thỏa mãn.
 - Hệ số góc của tiếp tuyến bằng -2
 - Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;5)$
 - Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $B(1;-7)$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

- Câu 1:** Tính đạo hàm (bằng định nghĩa) của hàm số $y = 2x^2 + x + 1$ tại $x_0 = 2$.
- Câu 2:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.
- Câu 3:** Cho chuyển động được xác định bởi phương trình $s = 2t^3 + 6t^2 - t$, trong đó t được tính bằng giây và s được tính bằng mét. Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 3s$ là:
- Câu 4:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung có dạng: $y = ax + b$. Tính $2a + 5b$
- Câu 5:** Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1;3)$ có dạng: $y = ax + b$. Tính $2a + 5b$
- Câu 6:** Một vật di chuyển theo phương thẳng đứng lên trên từ độ cao $20m$ so với mặt đất với vận tốc ban đầu là $15m/s$. Độ cao s của nó tính bằng mét sau t giây kể từ khi bắt đầu chuyển động $t = 0$ được cho bởi công thức $s = 20 + 15t - 5t^2$. Tìm vận tốc của vật khi nó chạm đất.

PHẦN IV. Tự luận

- Câu 1:** Tìm tham số thực b để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ -\frac{x^2}{2} + bx - 6 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 2$.
- Câu 2:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} mx^2 + 2x + 2 & \text{khi } x > 0 \\ nx + 1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số m, n sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

- Câu 3:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$.
- Câu 4:** Một viên đạn được bắn lên cao theo phương trình $s(t) = 196t - 4,9t^2$ trong đó $t > 0$, t tính bằng giây kể từ thời điểm viên đạn được bắn lên cao và $s(t)$ là khoảng cách của viên đạn so với mặt đất được tính bằng mét. Tại thời điểm vận tốc của viên đạn bằng 0 thì viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét?
- Câu 5:** Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Hỏi tại thời điểm nào thì vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất?
- Câu 6:** Một bình nuôi cấy vi sinh vật được giữ ở nhiệt độ 0°C . Tại thời điểm $t = 0$ (giây) người ta cung cấp nhiệt cho nó. Nhiệt độ tăng lên và được ước tính bởi hàm số $y = f(t) = t^2 + t + 1$ ($^\circ\text{C}$) với $f(t)$ là nhiệt độ của bình nuôi cấy ở thời điểm t . Hãy tính tốc độ tăng của bình tại thời điểm $t = 5$ giây.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có $f'(2) = 5$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $M(2;1)$ là

- A.** $y = 5x + 11$. **B.** $y = 5x - 9$. **C.** $y = 5x - 11$. **D.** $y = 5x + 3$.

Lời giải

Ta có: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 5 \cdot (x - 2) + 1 = 5x - 9$.

Câu 2: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là **sai**?

- A.** $(c)' = 0$ (với c là hằng số). **B.** $(2x)' = 2$.
C. $(x^6)' = 6x^5$. **D.** $(\sqrt{x})' = 2\sqrt{x}$ (với $x > 0$).

Lời giải

Ta có: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (với $x > 0$).

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 2, & x > 0 \\ x + a, & x \leq 0 \end{cases}$. Khi hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 0$. Hãy tính

$T = a + b$.

- A.** $T = -4$. **B.** $T = 0$. **C.** $T = 3$. **D.** $T = 4$.

Lời giải

Ta có: $f(0) = a$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax^2 + bx + 2) = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + a) = a.$$

Để hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ thì hàm số phải liên tục tại $x_0 = 0$ nên

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0). \text{ Suy ra } a = 2.$$

$$\text{Khi đó } f(x) = \begin{cases} 2x^2 + bx + 2, & x > 0 \\ x + 2, & x \leq 0 \end{cases}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + bx + 2 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + b) = b.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + 2 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1) = 1.$$

Hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ thì $b = 1$.

Vậy với $a = 2, b = 1$ thì hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ khi đó $T = 3$.

Câu 4: Tính đạo hàm của hàm số $y = -x^2 + 2x$ tại $x_0 = 1$

- A.** 2. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 0.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 2x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x^2 - 2x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} [-(x - 1)] = 0 \\ \text{Vậy } f'(1) &= 0. \end{aligned}$$

Câu 5: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ tại $x_0 = 1$

- A. Không tồn tại. B. 0 C. -1. D. -3.

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x+1}{x-2} + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{x-2} = -3. \text{ Vậy } f'(1) = -3$$

Câu 6: Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ trên $(0; +\infty)$ là

- A. $2\sqrt{x}$. B. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{x}}$. D. $\sqrt{x}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = f(x) = \sqrt{x}$$

Xét Δx là số gia của đối số tại điểm x

Khi đó hàm số có số gia tương ứng:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = x^3 + 1$ có đồ thị (C) . Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x = 1$ là:

- A. $f'(1) = 3$. B. $f'(1) = -3$. C. $f'(1) = 4$. D. $f'(1) = -4$.

Lời giải

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

Câu 8: Một chất điểm chuyển động có phương trình $S(t) = 4t^2 + 2$, với t tính bằng giây (s) và S là được tính bằng mét (m). Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 4(s)$.

- A. $v(4) = 32 m/s$. B. $v(4) = 34 m/s$. C. $v(4) = 36 m/s$. D. $v(4) = 8 m/s$.

Lời giải

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t_0 = 4(s)$ là

$$v(4) = S'(4) = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{S(t) - S(4)}{t - 4} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{4t^2 + 2 - 66}{t - 4} = \lim_{t \rightarrow 4} \frac{4(t^2 - 16)}{t - 4} = \lim_{t \rightarrow 4} 4(t + 4) = 32.$$

- Câu 9:** Một chất điểm chuyển động có quãng đường được cho bởi phương trình $s(t) = \frac{1}{4}t^4 - t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 10t$, trong đó $t > 0$ với t tính bằng giây (s) và s tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của vật bằng bao nhiêu ?
- A.** 13. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải

Vận tốc của chuyển động là: $v(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 10$.

Gia tốc của chuyển động là $a(t) = 3t^2 - 6t + 5$.

Dễ thấy: $a(t) = 3t^2 - 6t + 5 = 3(t - 1)^2 + 2 \geq 2$ với mọi t . Dấu “=” xảy ra khi $t = 1$.

Khi đó, vận tốc của chuyển động là $v(1) = 13$ (m/s).

- Câu 10:** Chuyển động của một vật có phương trình $s = 5 + \sin\left(0,8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, trong đó s tính bằng centimet và thời gian t tính bằng giây. Tính giá trị tuyệt đối của gia tốc của vật tại các thời điểm vận tốc bằng 0.
- A.** $0,64\pi^2$. **B.** $10,64\pi^2$. **C.** $0,32\pi^2$. **D.** $0,14\pi^2$.

Lời giải

Ta có $v = s' = 0,8\pi \cos\left(0,8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$ và $a = v' = -0,64\pi^2 \sin\left(0,8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$.

Thời điểm vận tốc bằng 0 tương đương với $\cos\left(0,8\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \left|\sin\left(0,8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\right| = 1$.

Khi đó, $|a| = 0,64\pi^2 \left|\sin\left(0,8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\right| = 0,64\pi^2$.

- Câu 11:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với đường thẳng $y = -2$.
- A.** $y = -9x + 7$; $y = -2$. **B.** $y = -2$. **C.** $y = 9x + 7$; $y = -2$. **D.** $y = 9x + 7$; $y = 2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm : $y = x^3 - 3x^2 + 2 = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Với $x = -1 \rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ k = y'(-1) = 9 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 9x + 7$.

Với $x = 2 \rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ k = y'(2) = 0 \end{cases}$. suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -2$.

- Câu 12:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$.
- A.** $y = 9x + 7$; $y = 9x - 25$. **B.** $y = 9x - 25$.

C. $y = 9x - 7; y = 9x + 25.$

D. $y = 9x + 25.$

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta tính được $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$. Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$ nên có

$$k = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}.$$

Với $x_0 = -1 \rightarrow \begin{cases} y_0 = -2 \\ k = 9 \end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 9x + 7$ (loại) (vì trùng với đường thẳng đã cho).

Với $x_0 = 3 \rightarrow \begin{cases} y_0 = 2 \\ k = 9 \end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 9x - 25$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x) = x^2 + 2x$ tại điểm $x_0 = 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

b) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

c) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 4)$

d) $f'(1) = a \Rightarrow a > 5$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 3) = 4$$

Vậy $f'(1) = 4$.

a) Đúng: $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

b) Đúng: $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

c) Sai: $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 3)$

d) Sai: $f'(1) = a \Rightarrow a < 5$

Câu 2: Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2x^3$. Khi đó:

a) Với bất kì x_0 : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

b) $f'(1) = -6$

c) $f'(0) = 0$

d) $f'(2) = 24$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

Với bất kì x_0 ta có: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^3 - 2x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2(x - x_0)(x^2 + x.x_0 + x_0^2)}{x - x_0}$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2(x^2 + x.x_0 + x_0^2)}{1} = 6x_0^2$$

Vậy $f'(x) = (2x^3)' = 6x^2$ trên $\mathbb{R}$.

a) Đúng: Với bất kì x_0 : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

b) Sai: $f'(1) = 6$

c) Đúng: $f'(0) = 0$

d) Đúng: $f'(2) = 24$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3$ có đồ thị (C) và điểm M thuộc (C) có hoành độ $x_0 = -1$. Khi đó:

a) Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M bằng 6

b) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M đi qua điểm $A(0;4)$

c) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M cắt đường thẳng $d: y = 3x$ tại điểm có hoành độ bằng 4

d) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = -\frac{1}{6}x$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

Ta có: $f'(x) = (2x^3)' = 6x^2$ nên tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc là:

$$f'(-1) = 6.(-1)^2 = 6; f(-1) = -2$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là:

$$y - f(-1) = 6(x + 1) \Leftrightarrow y + 2 = 6(x + 1) \Leftrightarrow y = 6x + 4$$

a) Đúng: Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M bằng 6

b) Đúng: Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M đi qua điểm $A(0;4)$

c) Sai: Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M cắt đường thẳng $d: y = 3x$ tại điểm có hoành độ bằng $-\frac{4}{3}$

d) Đúng: Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = -\frac{1}{6}x$

- Câu 4:** Viết được phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+9}{x+1}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d : x - 2y + 2 = 0$. Khi đó:
- Có hai phương trình tiếp tuyến thỏa mãn.
 - Hệ số góc của tiếp tuyến bằng -2
 - Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;5)$
 - Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $B(1;-7)$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------	---------	---------	---------

Đường thẳng $d : x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$ nên đường thẳng d có hệ số góc là $k_d = \frac{1}{2}$.

Tiếp tuyến cần tìm có hệ số góc k vuông góc với đường thẳng d

$$\Rightarrow k \cdot k_d = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{k_d} = -2.$$

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $y' = k \Rightarrow \frac{-8}{(x+1)^2} = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$.

Với $x = 1$, phương trình tiếp tuyến là $y = -2x + 7$.

Với $x = -3$, phương trình tiếp tuyến là $y = -2x - 9$.

Vậy có hai phương trình tiếp tuyến thỏa mãn là $d_1 : y = -2x + 7; y = -2x - 9$.

- Đúng: Có hai phương trình tiếp tuyến thỏa mãn.
- Đúng: Hệ số góc của tiếp tuyến bằng -2
- Đúng: Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;5)$
- Đúng: Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $B(1;-7)$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

- Câu 1:** Tính đạo hàm (bằng định nghĩa) của hàm số $y = 2x^2 + x + 1$ tại $x_0 = 2$.

Lời giải

Ta có: $f(x) - f(x_0) = f(x) - f(2) = 2x^2 + x + 1 - 11 = 2x^2 + x - 10$

$$\text{Khi đó: } \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{2x^2 + x - 10}{x - 2} = \frac{2(x-2)\left(x + \frac{5}{2}\right)}{x - 2} = 2x + 5$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 5) = 9$. Vậy $f'(2) = 9$

- Câu 2:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Xét } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3 - \sqrt{4-x}}{4} - \frac{1}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 - \sqrt{4-x})(2 + \sqrt{4-x})}{4x(2 + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4x(2 + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4(2 + \sqrt{4-x})} = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Câu 3: Cho chuyển động được xác định bởi phương trình $s = 2t^3 + 6t^2 - t$, trong đó t được tính bằng giây và s được tính bằng mét. Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 3s$ là:

Lời giải

Ta có $v(t) = S'(t) = 6t^2 + 12t - 1$.

Vận tốc tức thời của chuyển động khi $t = 3s$ là: $v(3) = 6 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 1 = 89(m/s)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung có dạng: $y = ax + b$. Tính $2a + 5b$

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$.

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $A(x_0; y_0) \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$.

Gọi tiếp tuyến (d) tiếp xúc đồ thị hàm số tại điểm $A(0;1)$

$\Rightarrow$ Hệ số góc $k = y'(x_0) = y'(0) = -3$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến (d) : $y = -3(x - 0) + 1 \Leftrightarrow y = -3x + 1$.

Câu 5: Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1;3)$ có dạng: $y = ax + b$. Tính $2a + 5b$

Lời giải

Ta có: $y' = 4x^3 + 4x \Rightarrow y'(1) = 8$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1;3)$ là $y = 8(x - 1) + 3 \Leftrightarrow y = 8x - 5$.

Câu 6: Một vật di chuyển theo phương thẳng đứng lên trên từ độ cao $20m$ so với mặt đất với vận tốc ban đầu là $15m/s$. Độ cao s của nó tính bằng mét sau t giây kể từ khi bắt đầu chuyển động $t = 0$ được cho bởi công thức $s = 20 + 15t - 5t^2$. Tìm vận tốc của vật khi nó chạm đất.

Lời giải

Vận tốc của vật tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = 15 - 10t$

Khi vật chạm đất thì $s = 0 \Rightarrow 20 + 15t - 5t^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 4 \end{cases}$

Vật sau khi chuyển động sẽ chạm đất khi $t = 4$

Vậy vận tốc của vật khi nó chạm đất là $v(4) = s'(4) = 15 - 10 \cdot 4 = -25(m/s)$.

Vận tốc độ khi vật chạm đất là $-25(m/s)$.

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Tìm tham số thực b để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ -\frac{x^2}{2} + bx - 6 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 2$.

Lời giải

Để hàm số có đạo hàm tại $x = 2$ trước tiên hàm số phải liên tục tại $x = 2$, tức là

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(-\frac{x^2}{2} + bx - 6 \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 \Leftrightarrow -2 + 2b - 6 = 4 \Leftrightarrow b = 6.$$

Thử lại với $b = 6$, ta có

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-\frac{x^2}{2} + 6x - 10}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-\frac{x^2}{2} + 6x - 10}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(10 - x)}{2(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{10 - x}{2} = 4; \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ nên hàm số có đạo hàm tại $x = 2$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} mx^2 + 2x + 2 & \text{khi } x > 0 \\ nx + 1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số m, n sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(0) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{mx^2 + 2x + 2 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{mx^2 + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (mx + 2) = 2. \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{nx + 2 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{nx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} n = n \end{cases}$$

Hàm số có đạo hàm tại $x = 0$ khi và chỉ khi tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow n = 2.$$

Câu 3: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$.

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$ nên

$$f'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}.$$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2$. Phương trình tiếp tuyến là $y = 9(x+1) - 2 \Leftrightarrow y = 9x + 7$ (Loại)

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 2$. Phương trình tiếp tuyến là $y = 9(x-3) + 2 \Leftrightarrow y = 9x - 25$ (thỏa mãn).

Câu 4: Một viên đạn được bắn lên cao theo phương trình $s(t) = 196t - 4,9t^2$ trong đó $t > 0$, t tính bằng giây kể từ thời điểm viên đạn được bắn lên cao và $s(t)$ là khoảng cách của viên đạn so với mặt đất được tính bằng mét. Tại thời điểm vận tốc của viên đạn bằng 0 thì viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét?

Lời giải

Ta tính được $s'(t) = 196 - 9,8t$.

Vận tốc của viên đạn $v(t) = s'(t) = 196 - 9,8t \Rightarrow v(t) = 0 \Leftrightarrow 196 - 9,8t = 0 \Leftrightarrow t = 20$.

Khi đó viên đạn cách mặt đất một khoảng $h = s(20) = 196 \cdot 20 - 4,9 \cdot 20^2 = 1960\text{m}$.

Câu 5: Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Hỏi tại thời điểm nào thì vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất?

Lời giải

Ta tính được $s'(t) = 3t^2 - 6t + 9$.

Vận tốc của chất điểm $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 9 = 3(t-1)^2 + 6 \geq 6$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t = 1$.

Câu 6: Một bình nuôi cấy vi sinh vật được giữ ở nhiệt độ 0°C . Tại thời điểm $t = 0$ (giây) người ta cung cấp nhiệt cho nó. Nhiệt độ tăng lên và được ước tính bởi hàm số $y = f(t) = t^2 + t + 1$ ($^\circ\text{C}$) với $f(t)$ là nhiệt độ của bình nuôi cấy ở thời điểm t . Hãy tính tốc độ tăng của bình tại thời điểm $t = 5$ giây.

Lời giải

Gọi Δt là số gia của biến số tại t_0

$$\Delta y = \left((t_0 + \Delta t)^2 + (t_0 + \Delta t) + 1 \right) - (t_0^2 + t_0 + 1)$$

$$= t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2 + t_0 + \Delta t + 1 - t_0^2 - t_0 - 1 = 2t_0\Delta t + \Delta t^2 + \Delta t$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = 2t_0 + \Delta t + 1.$$

$$f'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2t_0 + \Delta t + 1) = 2t_0 + 1 \text{ (}^\circ\text{C/s)}$$

Tốc độ tăng nhiệt tại thời điểm $t = 5$ giây là $f'(5) = 2 \cdot 5 + 1 = 11 \text{ (}^\circ\text{C/s)}$.



ĐẠO HÀM

BÀI: ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA ĐẠO HÀM

ĐỀ TEST SỐ 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Nếu $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 7$ thì ta kết luận

- A. $f'(3) = 3$. B. $f'(7) = 0$. C. $f'(7) = 3$. D. $f'(3) = 7$.

Câu 2: Hàm số $f(x) = x^2 - 5x$ có đạo hàm tại $x = 2$ là

- A. $f'(2) = -1$. B. $f'(2) = 9$. C. $f'(2) = -6$. D. $f'(2) = 10$.

Câu 3: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^3 + 1$ tại $x_0 = 2$

- A. 12. B. 13. C. 24. D. 9.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{4 - \sqrt{9 - x}}{2} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{16}$. C. $\frac{1}{32}$. D. $\frac{1}{12}$.

Câu 5: Đạo hàm của hàm số $y = 1$ là

- A. 1. B. 0. C. -1. D. Không xác định.

Câu 6: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{x+1}$ trên tập xác định là

- A. $-\frac{1}{(x+1)^2}$. B. $\frac{1}{x+1}$. C. $\frac{x}{x+1}$. D. $\frac{x}{(x+1)^2}$.

Câu 7: Đạo hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5$ trên tập $\mathbb{R}$ là

- A. $f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$. B. $f'(x) = x^2 + 3x + 1$.
C. $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$. D. $f'(x) = 9x + 1$.

Câu 8: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$ trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$ là

- A. $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$. B. $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{(x - 1)^2}$. C. $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$. D. $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$.

Câu 9: Cho hàm số $y = -x^3 + 2x^2 + 1$. Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $x_0 = -1$ của hàm số là

- A. 7. B. 1. C. -1. D. -7.

Câu 10: Một vật chuyển động xác định bởi phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 3$ bằng bao nhiêu?

- A. $4m/s$. B. $1m/s$. C. $3m/s$. D. $2m/s$.

Câu 11: Phương trình tiếp tuyến của hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là

- A. $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$. B. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$. C. $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$. D. $y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \sqrt{x-1}$. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ là?

- A. $k = \frac{1}{4}$. B. $k = 2$. C. $k = \frac{1}{2}$. D. $k = \frac{1}{3}$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{1-x}$ với $x \neq 1$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Với bất kì $x_0 \neq 1$, ta có: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2}{(1-x)(1-x_0)}$		
b)	$f'(2) = 2$		
c)	$f'(3) = \frac{1}{3}$		
d)	$f'(2) + f'(3) = \frac{3}{2}$		

Câu 2: Cho hàm số $y = x^2 + 3x + 1$ có đồ thị (C). Viết được phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

- a) Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến bằng 3.
 b) Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;3)$
 c) Phương trình tiếp tuyến cắt đường thẳng $y = 2x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng 0
 d) Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + 1$

Câu 3: Viết được phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

- a) Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến bằng 1.
 b) Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1;2)$
 c) Phương trình tiếp tuyến cắt đường thẳng $y = 2x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng $\frac{4}{3}$

d) Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = x + 1$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{2}{1-x}$ có đồ thị (C) và điểm $M(3; -1) \in (C)$. Khi đó:

a) Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M bằng $\frac{1}{2}$

b) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

c) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M vuông với đường thẳng $y = -2x - \frac{5}{2}$

d) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M đi qua điểm $A\left(0; -\frac{5}{2}\right)$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Giá trị $f'(0)$ bằng

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

Câu 3: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ tại $x = 0$.

Câu 4: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ có dạng: $y = ax + b$. Tính $2a + 5b$

Câu 5: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ có dạng: $y = ax + b$. Tính $2a + 5b$

Câu 6: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính quãng đường vật đi được từ lúc $t = 0$ đến lúc chuyển động có vận tốc bằng không.

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Tìm a, b để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 1$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số a, b sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 1$.

Câu 3: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ có đồ thị là (C) . Số tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 4x + 5$ của đồ thị hàm số là

Câu 4: Một chất điểm chuyển động có quãng đường được cho bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 10$,

trong đó $t > 0$ với t tính bằng giây (s) và s tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì quãng đường vật đi được bằng bao nhiêu?

- Câu 5.** Quãng đường đi được của một chất điểm chuyển động thẳng là một hàm số của thời gian t được cho bởi phương trình $s(t) = -t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{7}{2}t + 23$ trong đó s tính bằng mét, t tính bằng giây. Trong 1 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, chất điểm đạt vận tốc lớn nhất bằng bao nhiêu (m/s)?

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Nếu $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 7$ thì ta kết luận

- A.** $f'(3) = 3$. **B.** $f'(7) = 0$. **C.** $f'(7) = 3$. **D.** $f'(3) = 7$.

Lời giải

Vì $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 7$ nên $f'(3) = 7$.

Câu 2: Hàm số $f(x) = x^2 - 5x$ có đạo hàm tại $x = 2$ là

- A.** $f'(2) = -1$. **B.** $f'(2) = 9$. **C.** $f'(2) = -6$. **D.** $f'(2) = 10$.

Lời giải

Ta có: $f(x) - f(2) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

Với $x \neq 2$, $\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 2} = x - 3$

Tính giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 3) = -1$

Vậy $f'(2) = -1$.

Câu 3: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^3 + 1$ tại $x_0 = 2$

- A.** 12. **B.** 13. **C.** 24. **D.** 9.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 1 - 9}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12$

Vậy $f'(2) = 12$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{4 - \sqrt{9 - x}}{2} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?

- A.** $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{16}$. **C.** $\frac{1}{32}$. **D.** $\frac{1}{12}$.

Lời giải

Với $x \neq 0$ xét:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{4 - \sqrt{9 - x}}{2} - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9 - x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 - (9 - x)}{2x(3 + \sqrt{9 - x})}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(3 + \sqrt{9 - x})} = \frac{1}{12}$

$$\text{Vậy } f'(0) = \frac{1}{12}$$

Câu 5: Đạo hàm của hàm số $y = 1$ là

A. 1.

B. 0.

C. -1.

D. Không xác định.

Lời giải

Ta có: $y = f(x) = x$. Lấy x_0 bất kì thuộc $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 - 1}{x - x_0} = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

Vậy $y' = 0$.

Câu 6: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{x+1}$ trên tập xác định là

A. $-\frac{1}{(x+1)^2}$.

B. $\frac{1}{x+1}$.

C. $\frac{x}{x+1}$.

D. $\frac{x}{(x+1)^2}$.

Lời giải

$$y = f(x) = \frac{1}{x+1}. \text{ TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Xét Δx là số gia của đối số tại điểm x

Khi đó hàm số có số gia tương ứng:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x + 1} - \frac{1}{x + 1} \\ &= -\frac{\Delta x}{(x + \Delta x + 1)(x + 1)} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{(x + \Delta x + 1)(x + 1)}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x + \Delta x + 1)(x + 1)} = -\frac{1}{(x + 1)^2} \Rightarrow y' = -\frac{1}{(x + 1)^2}.$$

Câu 7: Đạo hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5$ trên tập $\mathbb{R}$ là

A. $f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$.

B. $f'(x) = x^2 + 3x + 1$.

C. $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

D. $f'(x) = 9x + 1$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \forall x_0 \in \mathbb{R}, \text{ ta có: } f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 + 3x^2 + x - x_0^3 - 3x_0^2 - x_0}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + x_0x + x_0^2 + 3x + 3x_0 + 1)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + x_0x + x_0^2 + 3x + 3x_0 + 1) = 3x_0^2 + 6x_0 + 1. \end{aligned}$$

Vậy $f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$.

Câu 8: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$ trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$ là

A. $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$. **B.** $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{(x - 1)^2}$. **C.** $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$. **D.** $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$.

Lời giải

Ta có: $f(x) = x - 1 - \frac{4}{x-1}$.

$\forall x_0 \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, ta có:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - \frac{4}{x-1} - x_0 + \frac{4}{x_0-1}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{4}{(x-1)(x_0-1)} \right) \\ &= 1 + \frac{4}{(x_0-1)^2} = \frac{x_0^2 - 2x_0 + 5}{(x_0-1)^2}. \end{aligned}$$

Vậy $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{(x-1)^2}$.

- Câu 9:** Cho hàm số $y = -x^3 + 2x^2 + 1$. Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $x_0 = -1$ của hàm số là
A. 7. **B.** 1. **C.** -1. **D.** -7.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^3 + 2x^2 - 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(-x^2 + 3x - 3)}{x + 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} (-x^2 + 3x - 3) = -7$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $x_0 = -1$ có hệ số góc: -7

- Câu 10:** Một vật chuyển động xác định bởi phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 3$ bằng bao nhiêu?
A. $4m/s$. **B.** $1m/s$. **C.** $3m/s$. **D.** $2m/s$.

Lời giải

$$v(3) = S'(3) = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{S(t) - S(3)}{t - 3} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{3}t^3 - t^2 - 0}{t - 3} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{3}t^3 - t^2}{t - 3} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{3}t^2(t-3)}{t-3} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{1}{3}t^2 = 3.$$

Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 3$ bằng: $v(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 = 3 (m/s)$.

- Câu 11:** Phương trình tiếp tuyến của hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là

A. $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$. **B.** $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$. **C.** $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$. **D.** $y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x+1}{2x-1} - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x + 2}{(x-2)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(2x-1)} - \frac{1}{3}$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 2$ là $-\frac{1}{3}$; $y(2) = 1$.

Phương trình tiếp tuyến của hàm số tại điểm có hoành độ $x = 2$ là:

$$y = -\frac{1}{3}(x-2) + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}.$$

Câu 12: Cho hàm số $y = \sqrt{x-1}$. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ là?

A. $k = \frac{1}{4}$.

B. $k = 2$.

C. $k = \frac{1}{2}$.

D. $k = \frac{1}{3}$.

Lời giải

$$\text{Xét } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(\sqrt{x-1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x-1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Vậy hệ số góc của tiếp tuyến là $k = \frac{1}{2}$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{1-x}$ với $x \neq 1$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Với bất kì $x_0 \neq 1$, ta có: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2}{(1-x)(1-x_0)}$		
b)	$f'(2) = 2$		
c)	$f'(3) = \frac{1}{3}$		
d)	$f'(2) + f'(3) = \frac{3}{2}$		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

a) Đúng

$$\text{Với bất kì } x_0 \neq 1, \text{ ta có: } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2}{(1-x)(1-x_0)}$$

Với bất kì $x_0 \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{2}{1-x} - \frac{2}{1-x_0}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2(x - x_0)}{(1-x)(1-x_0)(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2}{(1-x)(1-x_0)} = \frac{2}{(1-x_0)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } f'(x_0) = \frac{2}{(1-x_0)^2}$$

$$\text{Vậy } f'(x) = \left(\frac{2}{1-x} \right)' = \frac{2}{(1-x)^2} \text{ trên các khoảng } (-\infty; 1) \text{ và } (1; +\infty).$$

b) Đúng $f'(2) = 2$

Với $x = 2 \rightarrow f'(2) = \frac{2}{(1-2)^2} = 2$

c) Sai

$$f'(3) = \frac{1}{3}$$

Với $x = 3 \rightarrow f'(3) = \frac{2}{(1-3)^2} = \frac{1}{2}$

d) Sai

$$f'(2) + f'(3) = \frac{3}{2}$$

$$f'(2) + f'(3) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Câu 2: Cho hàm số $y = x^2 + 3x + 1$ có đồ thị (C). Viết được phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

- a) Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến bằng 3.
- b) Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;3)$
- c) Phương trình tiếp tuyến cắt đường thẳng $y = 2x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng 0
- d) Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + 1$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$

Ta có $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 3) = 3$

Vậy phương trình tiếp tuyến là: $y = 3x + 1$

- a) Đúng: Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến bằng 3.
- b) Sai: Phương trình tiếp tuyến không đi qua điểm $A(1;3)$
- c) Đúng: Phương trình tiếp tuyến cắt đường thẳng $y = 2x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng 0
- d) Đúng: Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + 1$

Câu 3: Viết được phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

- a) Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến bằng 1.
- b) Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1;2)$
- c) Phương trình tiếp tuyến cắt đường thẳng $y = 2x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng $\frac{4}{3}$
- d) Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = x + 1$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

Ta có: $y' = -\frac{4}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(-1) = -1$.

Vì $x_0 = -1$ nên $y_0 = -2 \Rightarrow$ Tiếp điểm $M(-1; -2)$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(-1; -2)$ là $y = -x - 3$.

a) Sai: Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến bằng -1 .

b) Sai: Phương trình tiếp tuyến không đi qua điểm $M(-1; 2)$

c) Đúng: Phương trình tiếp tuyến cắt đường thẳng $y = 2x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng $\frac{4}{3}$

d) Đúng: Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = x + 1$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{2}{1-x}$ có đồ thị (C) và điểm $M(3; -1) \in (C)$. Khi đó:

a) Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M bằng $\frac{1}{2}$

b) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

c) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M vuông với đường thẳng $y = -2x - \frac{5}{2}$

d) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M đi qua điểm $A\left(0; -\frac{5}{2}\right)$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

Ta có: $f'(x) = \left(\frac{2}{1-x}\right)' = \frac{2}{(1-x)^2}$ nên tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc là:

$$f'(3) = \frac{2}{(1-3)^2} = \frac{1}{2}.$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là: $y - (-1) = \frac{1}{2}(x - 3) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$.

a) Đúng: Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M bằng $\frac{1}{2}$

b) Sai:

c) Đúng: Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M vuông với đường thẳng $y = -2x - \frac{5}{2}$

d) Đúng: Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M đi qua điểm $A\left(0; -\frac{5}{2}\right)$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Giá trị $f'(0)$ bằng

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{x^2(\sqrt{4x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{\sqrt{4x^2 + 1} + 1} = 2$$

Vậy $f'(0) = 2$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Xét } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x^2(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Câu 3: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ tại $x = 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có : } f(0) = 0, \text{ do đó: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } f'(0) = \frac{1}{2}.$$

Câu 4: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ có dạng: $y = ax + b$. Tính $2a + 5b$

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = 12x^2 - 12x \Rightarrow y'(1) = 0.$$

$$\text{Ta có } x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -1.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là $y = -1$.

Câu 5: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ có dạng: $y = ax + b$. Tính $2a + 5b$

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = -3x^2 + 3; y'(2) = -3 \cdot 2^2 + 3 = -9; y(2) = -2^3 + 3 \cdot 2 - 2 = -4$$

$$\text{Tiếp tuyến có dạng: } y = -9(x - 2) + 4 = -9x + 22.$$

Câu 6: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính quãng đường vật đi được từ lúc $t = 0$ đến lúc chuyển động có vận tốc bằng không.

Lời giải

Vận tốc của chuyển động chính là đạo hàm của quãng đường $v(t) = s'(t) = -t^2 + 8t + 9$

Vận tốc bằng không khi: $v(t) = s'(t) = -t^2 + 8t + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1(ktm) \\ t = 9(tm) \end{cases}$

Quãng đường vật chuyển động được đến thời điểm $t = 9$ là: $s(t) = -\frac{1}{3}.9^3 + 4.9^2 + 9.9 = 162(m)$

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Tìm a, b để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 1$.

Lời giải

Điều kiện cần: $f(1) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b$

Để hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$ thì $f(x)$ liên tục tại $x = 1$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + b = 2$$

Điều kiện đủ: $f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 2) = 3$

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - (a + b)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax - a}{x - 1} = a$$

Để hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$ thì $f'(1^+) = f'(1^-) \Leftrightarrow a = 3 \Rightarrow b = -1$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số a, b sao cho

$f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 1$.

Lời giải

Hàm số có đạo hàm tại $x = 1$, do đó hàm số liên tục tại $x = 1 \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}$. (1)

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - (a + b)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} a = a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x + 1)(x - 1)}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x + 1)}{2} = 1 \end{cases}.$$

Hàm số có đạo hàm tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow a = 1$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $a = 1, b = -\frac{1}{2}$.

Câu 3: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ có đồ thị là (C) . Số tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 4x + 5$ của đồ thị hàm số là

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x + 4$ suy ra hệ số góc của tiếp tuyến $y(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 + 4$.

Theo đề bài, ta có $3x_0^2 + 6x_0 + 4 = 4 \Leftrightarrow x_0^2 + 2x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1 \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -3 \end{cases}$.

Với $M(0; 1)$, phương trình tiếp tuyến là $y = 4x + 1$ (nhận).

Với $M(-2; -3)$, phương trình tiếp tuyến là $y = 4x + 5$ (loại).

Vậy có một tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) song song với đường thẳng $d: y = 4x + 5$.

Câu 4: Một chất điểm chuyển động có quãng đường được cho bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 10$, trong đó $t > 0$ với t tính bằng giây (s) và s tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì quãng đường vật đi được bằng bao nhiêu?

Lời giải

Vận tốc của chuyển động là: $v(t) = 3t^2 - 6t + 5$. Dễ thấy: $v(t) = 3t^2 - 6t + 5 = 3(t-1)^2 + 2 \geq 2$ với mọi t .

Dấu “=” xảy ra khi $t = 1$. Khi đó, vận tốc của chuyển động là $s(1) = 13$ m.

Câu 5. Quãng đường đi được của một chất điểm chuyển động thẳng là một hàm số của thời gian t được cho bởi phương trình $s(t) = -t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{7}{2}t + 23$ trong đó s tính bằng mét, t tính bằng giây. Trong 1 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, chất điểm đạt vận tốc lớn nhất bằng bao nhiêu (m/s)?

Lời giải

Phân giải chi tiết

Phương trình vận tốc của chất điểm tại thời điểm t là:

$$v(t) = s'(t) = -3t^2 + 3t + \frac{7}{2} \quad (m/s)$$

Yêu cầu bài toán trở thành: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $v(t) = -3t^2 + 3t + \frac{7}{2}$ trên $[0; 1]$. Ta có bảng biến thiên như sau:

t	0	$\frac{1}{2}$	1
$v(t)$	$\frac{7}{2}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{7}{2}$

Vậy vận tốc lớn nhất của chất điểm trong 1 giây đầu tiên kể từ khi bắt đầu chuyển động là $4,25 \text{ (m/s)}$.



ĐẠO HÀM

BÀI: CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

ĐỀ TEST SỐ 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Hàm số $y = 2^x$ xác định trên $\mathbb{R}$ có công thức đạo hàm

- A. $y' = 2^x$. B. $y' = 2^x \ln 2$. C. $y' = \frac{2^x}{\ln 2}$. D. $y' = 2x \ln 2$.

Câu 2: Hàm số $y = e^{2x}$ có đạo hàm là

- A. $y' = e^{2x}$. B. $y' = 2e^{2x}$. C. $y' = \frac{1}{2}e^{2x}$. D. $y' = \frac{1}{2}e^x$.

Câu 3: Với mọi x dương, hàm số $y = \ln 3x$ có đạo hàm là

- A. $y' = 3x$. B. $y' = 3 \ln x$. C. $y' = \frac{1}{x}$. D. $y' = \frac{1}{3x}$.

Câu 4: Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$ bằng

- A. $\frac{3}{2}(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$. B. $\frac{3}{4}x^{\frac{1}{4}}$. C. $\frac{3}{2}(2x)^{\frac{1}{2}}$. D. $3x(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$.

Câu 5: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{-5x^2 + 14x - 9}$ là

- A. $\frac{1}{\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}}$. B. $\frac{-5x + 7}{2\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}}$. C. $\frac{-5x + 7}{\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}}$. D. $\frac{1}{2\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}}$.

Câu 6: Cho hàm số $y = 2x^4 + x^2 - 1$. Chọn đáp án đúng?

- A. $y' = 8x^2$. B. $y' = 2x^3 + 2x - 1$.
C. $y' = 2x^3 + x$. D. $y' = 8x^3 + 2x$.

Câu 7: Vị trí của một vật chuyển động thẳng được cho bởi hàm số $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây là

- A. 6 m/s. B. 7 m/s. C. 8 m/s. D. 9 m/s.

Câu 8: Hàm số $y = 2 \cos(x^2)$ có đạo hàm là

- A. $-4x \sin(x^2)$. B. $-4x \cos x^2$. C. $-2x \sin x^2$. D. $-2 \sin x^2$.

Câu 9: Tính đạo hàm $y = \sqrt{\cos 6x}$

A. $y' = \frac{3 \sin 6x}{2\sqrt{\sin 6x}}$. B. $y' = \frac{-3 \sin 6x}{\sqrt{\sin 6x}}$.
 C. $y' = \frac{3 \sin 6x}{\sqrt{\sin 6x}}$. D. $y' = \frac{-3 \sin 6x}{2\sqrt{\sin 6x}}$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = 2^x$ và $A = 3f'(0) + \ln 2$. Giá trị của A bằng

- A. $\ln 2$. B. $2 \ln 2$. C. $3 \ln 2$. D. $4 \ln 2$.

Câu 11: Một chuyển động theo qui luật là $s = -\frac{1}{2}t^3 + 3t^2 + 20$ với t giây là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Quãng đường vật đi được bắt đầu từ lúc vật chuyển động tới thời điểm vật đạt được vận tốc lớn nhất bằng

- A. $20m$. B. $28m$. C. $32m$. D. $36m$.

Câu 12: Một con lắc lò xo chuyển động điều hòa theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát, có phương trình chuyển động $x = 2 \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) - 5$, trong đó t tính bằng giây (s) và x tính bằng centimet (cm). Tìm thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc lò xo bằng 0?

- A. $t = \frac{1}{3} + k(s); (k \in \mathbb{Z})$. B. $t = 2 + k(s); (k \in \mathbb{Z})$.
 C. $t = \frac{2}{3} + k(s); (k \in \mathbb{Z})$. D. $t = \frac{5}{3} + k(s); (k \in \mathbb{Z})$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = -\cos x + \sin x - \cos 2x$

- a) Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.
 b) Có $f'(x) = -\sin x + \cos x - 2 \sin 2x$.
 c) Có $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}+1}{2}$.
 d) Có $-\sqrt{2} \leq f'(x) - 2 \sin 2x \leq 2$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = \ln \frac{x}{x+1} - 2025$.

- a) Tập xác định của hàm số là $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

- b) Đạo hàm của hàm số là $y' = -\frac{1}{x^2 + x}$.

- c) Giá trị $y'(3)$ bằng $\frac{13}{12}$.

- d) Tổng $T = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2025)$ bằng $\frac{2025}{2026}$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số có đạo hàm là $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$.		
b)	$f'(3) = 6$		
c)	$f'(4) < f'(5)$		
d)	$f'(2) + f'(-2) = 0$		

Câu 4: Một chất điểm chuyển động với phương trình chuyển động $s(t) = \frac{t^4}{12} - \frac{2t^3}{3} + 4t^2 + 5t + 2$ (m).

a) Phương trình vận tốc của chất điểm là: $v(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 8t + 5$ (m/s).

b) Phương trình gia tốc của chất điểm là: $a(t) = t^2 - 4t + 8$ (m/s²).

c) Gia tốc của chất điểm lớn nhất khi: $t = 3$.

d) Khi gia tốc chất điểm đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của chất điểm bằng 20 (m/s).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Đạo hàm của hàm số $y = x^5$ tại điểm $x = 2$ là:

Câu 2: Đạo hàm của hàm số $y = \ln x$ tại điểm $x = \frac{1}{3}$ là:

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = e^x + e^{2x}$. Chọn khẳng định đúng

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \log_2(x^2 + 1)$, tính $f'(1)$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x^2}{2x+1}$. Biết rằng $y' = \frac{ax^2 + bx}{(2x+1)^2}$; giá trị của $a + b + ab$ bằng

Câu 6: Cân nặng trung bình của một em bé trong độ tuổi từ 0 đến 36 tháng có thể được tính gần đúng bởi hàm số $w(t) = 0,00076t^3 - 0,06t^2 + 1,8t + 8,2$, trong đó t được tính bằng tháng và w được tính bằng pound. Tính tốc độ thay đổi cân nặng của em bé đó tại thời điểm 15 tháng tuổi. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \tan\left(2x^2 + \frac{\pi}{3}\right)$.

Câu 2: Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = 2e^{2x-1}$;

Câu 3: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số sau: $y = 2\sin x - \ln x$;

Câu 4: Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = 3\ln(x^2 + 1)$;

Câu 5: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số sau: $y = -\log_2 x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$.

Câu 6: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số sau: $y = x^3 - x - 3$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$;

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Hàm số $y = 2^x$ xác định trên $\mathbb{R}$ có công thức đạo hàm

- A.** $y' = 2^x$. **B.** $y' = 2^x \ln 2$. **C.** $y' = \frac{2^x}{\ln 2}$. **D.** $y' = 2x \ln 2$.

Lời giải

Theo bảng đạo hàm trong SGK.

Câu 2: Hàm số $y = e^{2x}$ có đạo hàm là

- A.** $y' = e^{2x}$. **B.** $y' = 2e^{2x}$. **C.** $y' = \frac{1}{2}e^{2x}$. **D.** $y' = \frac{1}{2}e^x$.

Lời giải

Ta có: $y' = (e^{2x})' = (2x)' e^{2x} = 2e^{2x}$.

Câu 3: Với mọi x dương, hàm số $y = \ln 3x$ có đạo hàm là

- A.** $y' = 3x$. **B.** $y' = 3 \ln x$. **C.** $y' = \frac{1}{x}$. **D.** $y' = \frac{1}{3x}$.

Lời giải

Ta có: $y' = (\ln 3x)' = \frac{(3x)'}{3x} = \frac{1}{x}$.

Câu 4: Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$ bằng

- A.** $\frac{3}{2}(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$. **B.** $\frac{3}{4}x^4$. **C.** $\frac{3}{2}(2x)^{\frac{1}{2}}$. **D.**

$3x(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$.

Lời giải

Ta có: $y' = \left[(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]' = \frac{3}{2}(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot (x^2 + 1)' = 3x(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$.

Câu 5: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{-5x^2 + 14x - 9}$ là

- A.** $\frac{1}{\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}}$. **B.** $\frac{-5x + 7}{2\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}}$. **C.** $\frac{-5x + 7}{\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}}$. **D.** $\frac{1}{2\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \left[1; \frac{9}{5} \right]$.

Ta có $f(x) = \sqrt{-5x^2 + 14x - 9} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-5x^2 + 14x - 9)'}{2\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{-10x + 14}{2\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}} = \frac{-5x + 7}{\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}}, \forall x \in \left[1; \frac{9}{5} \right]$.

Câu 6: Cho hàm số $y = 2x^4 + x^2 - 1$. Chọn đáp án đúng?

- A. $y' = 8x^2$. B. $y' = 2x^3 + 2x - 1$.
C. $y' = 2x^3 + x$. D. $y' = 8x^3 + 2x$.

Lời giải

$$y' = (2x^4 + x^2 - 1)' = 2.4x^3 + 2x = 8x^3 + 2x$$

Câu 7: Vị trí của một vật chuyển động thẳng được cho bởi hàm số $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây là

- A. 6 m/s. B. 7 m/s. C. 8 m/s. D. 9 m/s.

Lời giải

$$\text{Vận tốc tức thời của vật: } v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$$

$$\text{Vận tốc của vật tại thời điểm } t = 4 \text{ giây: } v(4) = 3.4^2 - 12.4 + 9 = 9 \text{ m/s}$$

Câu 8: Hàm số $y = 2 \cos(x^2)$ có đạo hàm là

- A. $-4x \sin(x^2)$. B. $-4x \cos x^2$. C. $-2x \sin x^2$. D. $-2 \sin x^2$.

Lời giải

$$y' = -2.2x \cdot \sin(x^2) = -4x \sin(x^2).$$

Câu 9: Tính đạo hàm $y = \sqrt{\cos 6x}$

- A. $y' = \frac{3 \sin 6x}{2\sqrt{\sin 6x}}$. B. $y' = \frac{-3 \sin 6x}{\sqrt{\sin 6x}}$. C. $y' = \frac{3 \sin 6x}{\sqrt{\sin 6x}}$. D. $y' = \frac{-3 \sin 6x}{2\sqrt{\sin 6x}}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y = \sqrt{\cos 6x} \Rightarrow y' = (\sqrt{\cos 6x})' = \frac{(\cos 6x)'}{2\sqrt{\cos 6x}} = \frac{-6 \sin 6x}{2\sqrt{\cos 6x}} = \frac{-3 \sin 6x}{\sqrt{\sin 6x}}$$

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = 2^x$ và $A = 3f'(0) + \ln 2$. Giá trị của A bằng

- A. $\ln 2$. B. $2 \ln 2$. C. $3 \ln 2$. D. $4 \ln 2$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = 2^x \ln 2 \Rightarrow f'(0) = \ln 2.$$

$$\text{Suy ra } A = 3f'(0) + \ln 2 = 3 \ln 2 + \ln 2 = 4 \ln 2.$$

Câu 11: Một chuyển động theo qui luật là $s = -\frac{1}{2}t^3 + 3t^2 + 20$ với t giây là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Quãng đường vật đi được bắt đầu từ lúc vật chuyển động tới thời điểm vật đạt được vận tốc lớn nhất bằng

- A. 20m. B. 28m. C. 32m. D. 36m.

Lời giải

$$s = -\frac{1}{2}t^3 + 3t^2 + 20$$

$$v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 6t$$

$$v(t) = s'(t) = \frac{-3}{2}(t^2 - 4t + 4 - 4) = \frac{-3}{2}[(t-2)^2 - 4] = \frac{-3}{2}(t-2)^2 + 6 \leq 6$$

Vậy vận tốc đạt được giá trị lớn nhất tại thời điểm $t = 2(s)$.

Khi đó quãng đường vật đi được là: $s = s(2) = -4 + 12 + 20 = 28(m)$.

Câu 12: Một con lắc lò xo chuyển động điều hòa theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát, có phương trình chuyển động $x = 2 \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) - 5$, trong đó t tính bằng giây (s) và x tính bằng centimet (cm). Tìm thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc lò xo bằng 0?

A. $t = \frac{1}{3} + k(s); (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $t = 2 + k(s); (k \in \mathbb{Z})$.

C. $t = \frac{2}{3} + k(s); (k \in \mathbb{Z})$. **D.** $t = \frac{5}{3} + k(s); (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải

Vận tốc tức thời của con lắc: $v(t) = x' = -2\pi \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$.

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow -2\pi \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \pi t - \frac{\pi}{3} = k\pi; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{3} + k; (k \in \mathbb{Z}).$$

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = -\cos x + \sin x - \cos 2x$

a) Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

b) Có $f'(x) = -\sin x + \cos x - 2 \sin 2x$.

c) Có $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}+1}{2}$.

d) Có $-\sqrt{2} \leq f'(x) - 2 \cdot \sin 2x \leq 2$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

b) Sai

Ta có: $f'(x) = \sin x + \cos x - 2 \cos 2x$.

c) Đúng

$$\text{Ta có: } f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} + 2 \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}+1}{2}.$$

d) Sai

Ta có: $f'(x) = \sin x + \cos x + 2 \sin 2x \Leftrightarrow f'(x) - 2 \sin 2x = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Vì $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$. Vậy $-\sqrt{2} \leq f'(x) - 2 \sin 2x \leq \sqrt{2}$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = \ln \frac{x}{x+1} - 2025$.

a) Tập xác định của hàm số là $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

b) Đạo hàm của hàm số là $y' = -\frac{1}{x^2 + x}$.

c) Giá trị $y'(3)$ bằng $\frac{13}{12}$.

d) Tổng $T = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2025)$ bằng $\frac{2025}{2026}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) Đúng

Hàm số có nghĩa khi $\frac{x}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 0 \end{cases}$

Tập xác định của hàm số là $D = (-\infty - 1) \cup (0; +\infty)$

b) Sai

Ta có $y' = \frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \frac{x+1}{x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2 + x}$

c) Sai

Do $y' = \frac{1}{x^2 + x} \Rightarrow y'(3) = \frac{1}{12}$

d) Đúng

Ta có $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

Do đó

$$f'(1) = 1 - \frac{1}{2}; f'(2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \dots; f'(2025) = \frac{1}{2025} - \frac{1}{2026}$$

$$\text{Vậy } f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2025) = 1 - \frac{1}{2026} = \frac{2025}{2026}$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số có đạo hàm là $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$.		
b)	$f'(3) = 6$		
c)	$f'(4) < f'(5)$		
d)	$f'(2) + f'(-2) = 0$		

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng

Hàm số có đạo hàm là $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x)' = 3x^2 - 6x + 2$$

b) Sai

$$f'(3) = 6.$$

$$f'(3) = 3.3^2 - 6.3 + 2 = 11.$$

c) Đúng

$$f'(4) < f'(5)$$

$$\begin{cases} f'(4) = 3.4^2 - 6.4 + 2 = 26 \\ f'(5) = 3.5^2 - 6.5 + 2 = 47 \end{cases} \Rightarrow f'(4) < f'(5).$$

d) Sai

$$f'(2) + f'(-2) = 0.$$

$$\begin{cases} f'(2) = 3.2^2 - 6.2 + 2 = 2 \\ f'(-2) = 3.(-2)^2 - 6.(-2) + 2 = 26 \end{cases} \Rightarrow f'(2) + f'(-2) = 28.$$

Câu 4: Một chất điểm chuyển động với phương trình chuyển động $s(t) = \frac{t^4}{12} - \frac{2t^3}{3} + 4t^2 + 5t + 2$ (m).

a) Phương trình vận tốc của chất điểm là: $v(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 8t + 5$ (m/s).

b) Phương trình gia tốc của chất điểm là: $a(t) = t^2 - 4t + 8$ (m/s²).

c) Gia tốc của chất điểm lớn nhất khi: $t = 3$.

d) Khi gia tốc chất điểm đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của chất điểm bằng 20 (m/s).

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

● Ý a) đúng.

● Ý b) đúng.

● Ta có: $a(t) = t^2 - 4t + 8 = (t - 2)^2 + 4 \geq 4$.

Suy ra gia tốc chất điểm đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4 tại thời điểm $t = 2$.

● Khi đó vận tốc chất điểm là $v(2) = \frac{47}{3} (m/s)$ (đơn vị vận tốc).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Đạo hàm của hàm số $y = x^5$ tại điểm $x = 2$ là:

Lời giải

Ta có: $y' = (x^5)' = 5x^4$.

Từ đó $y'(2) = 5 \cdot 2^4 = 80$.

Câu 2: Đạo hàm của hàm số $y = \ln x$ tại điểm $x = \frac{1}{3}$ là:

Lời giải

Ta có: $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Từ đó $y'\left(\frac{1}{3}\right) = 3$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = e^x + e^{2x}$. Chọn khẳng định đúng

Lời giải

Ta có: $f'(x) = (e^x + e^{2x})' = e^x + 2e^{2x} \Rightarrow f'(0) = 3$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \log_2(x^2 + 1)$, tính $f'(1)$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1) \cdot \ln 2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{\ln 2}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x^2}{2x+1}$. Biết rằng $y' = \frac{ax^2 + bx}{(2x+1)^2}$; giá trị của $a + b + ab$ bằng

Lời giải

Ta có $y = \frac{x^2}{2x+1}$ nên $y' = \frac{2x(2x+1) - 2x^2}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x}{(2x+1)^2}$.

Do đó $a = 2$ và $b = 2$; suy ra $a + b + ab = 8$.

Câu 6: Cân nặng trung bình của một em bé trong độ tuổi từ 0 đến 36 tháng có thể được tính gần đúng bởi hàm số $w(t) = 0,00076t^3 - 0,06t^2 + 1,8t + 8,2$, trong đó t được tính bằng tháng và w được tính bằng pound. Tính tốc độ thay đổi cân nặng của em bé đó tại thời điểm 15 tháng tuổi. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

$$\text{Ta có: } w'(t) = \frac{57}{25000}t^2 - \frac{3}{25}t + 1,8.$$

Tốc độ thay đổi cân nặng của em bé đó tại thời điểm 15 tháng tuổi là:

$$w'(15) = \frac{57}{25000} \cdot 15^2 - \frac{3}{25} \cdot 15 + 1,8 = 0,51 \text{ (pound/tháng)}$$

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \tan\left(2x^2 + \frac{\pi}{3}\right)$.

Lời giải

$$y' = \left(\tan\left(2x^2 + \frac{\pi}{3}\right) \right)' = \frac{\left(2x^2 + \frac{\pi}{3}\right)'}{\cos^2\left(2x^2 + \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{4x}{\cos^2\left(2x^2 + \frac{\pi}{3}\right)}$$

Câu 2: Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = 2e^{2x-1}$;

Lời giải

$$y' = \left(2e^{2x-1}\right)' = 2 \cdot (2x-1)' e^{2x-1} = 4e^{2x-1}$$

Câu 3: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số sau: $y = 2\sin x - \ln x$;

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = (2\sin x - \ln x)' = 2\cos x - \frac{1}{x};$$

$$y'' = \left(2\cos x - \frac{1}{x}\right)' = 2(\cos x)' - \left(\frac{1}{x}\right)' = -2\sin x + \frac{1}{x^2}$$

Câu 4: Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = 3\ln(x^2 + 1)$;

Lời giải

$$y' = \left(3\ln(x^2 + 1)\right)' = 3 \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{6x}{x^2 + 1}$$

Câu 5: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số sau: $y = -\log_2 x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$.

Lời giải

Theo giả thiết, ta có: $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -1$, gọi điểm $M(2; -1)$ là toạ độ tiếp điểm.

Ta có: $y' = (-\log_2 x)' = -\frac{1}{x \ln 2}$ nên tiếp tuyến của đồ thị tại điểm M có hệ số góc là

$$y'(2) = \frac{-1}{2 \ln 2}.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị đã cho tại điểm M là:

$$y+1=\frac{-1}{2\ln 2}(x-2)\Leftrightarrow y=\frac{-1}{2\ln 2}x+\frac{1}{\ln 2}-1.$$

Câu 6: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số sau: $y = x^3 - x - 3$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$;

Lời giải

Theo giả thiết, ta có: $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 3$, gọi điểm $M(2;3)$ là toạ độ tiếp điểm.

Ta có: $y' = (x^3 - x - 3)' = 3x^2 - 1$ nên tiếp tuyến của đồ thị tại điểm M có hệ số góc là

$$y'(2) = 11.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị đã cho tại điểm M là:

$$y - 3 = 11(x - 2) \Leftrightarrow y = 11x - 19.$$



ĐẠO HÀM

BÀI: CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

ĐỀ TEST SỐ 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{4-x}$ là

A. $\frac{1}{2\sqrt{4-x}}$.

B. $\sqrt{4-x}$.

C. $\frac{-1}{\sqrt{4-x}}$.

D. $\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}$.

Câu 2: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x^{2024}$

A. $f'(x) = 2024x^{2024}$.

B. $f'(x) = x^{2023}$.

C. $f'(x) = 2024x^{2023}$.

D. $f'(x) = 2023x^{2023}$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) < 0$ là

A. $(-1; 1)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(-1; 2)$.

D. $(-\infty; 1)$.

Câu 4: Với $x > 0$, đạo hàm của hàm số $y = 2^x + \log_5 x$ là:

A. $y' = 2^x \cdot \ln 2 + \frac{1}{x \cdot \ln 2}$.

B. $y' = 2^x + \frac{1}{x \cdot \ln 5}$.

C. $y' = 2^x \cdot \ln 2 + \frac{1}{\ln 5}$.

D. $y' = 2^x \cdot \ln 2 + \frac{1}{x \cdot \ln 5}$.

Câu 5: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2 \sin 3x + \cos 2x$.

A. $y' = 6 \cos 3x - 2 \sin 2x$.

B. $y' = 2 \cos 3x + \sin 2x$.

C. $y' = -6 \cos 3x + 2 \sin 2x$.

D. $y' = 2 \cos 3x - \sin 2x$.

Câu 6: Đạo hàm của hàm số $y = x \cdot e^x$ bằng:

A. $y' = (1+x)e^x$.

B. $y' = e^x$.

C. $y' = x \cdot e^x$.

D. $y' = (1-x)e^x$.

Câu 7: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x+1}{1-x}$ bằng:

A. $y' = \frac{-2}{(1-x)^2}$

B. $y' = \frac{3}{(1-x)^2}$

C. $y' = -2$

D. $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$

Câu 8: Hàm số $y = \sin^2 x \cdot \cos x$ có đạo hàm là:

A. $y' = \sin x \cdot (3 \cos^2 x - 1)$.

B. $y' = \sin x \cdot (3 \cos^2 x + 1)$.

C. $y' = \sin x \cdot (\cos^2 x + 1)$.

D. $y' = \sin x \cdot (\cos^2 x - 1)$.

Câu 9: Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = -150x^2 + 24000x - 35000$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1000 sản phẩm.

- A. 20000 . B. 22500 . C. 21000 . D. 24000 .

Câu 10: Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$ bằng

- A. $\frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$. B. $(x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} \ln(x^2 + 1)$.
C. $\frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$. D. $\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$.

Câu 11: Hàm số $y = 2x + \ln(x^2 - x + 1)$ có đạo hàm là

- A. $y' = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$. B. $y' = \frac{2x^2 + 2}{x^2 - x + 1}$.
C. $y' = \frac{x^2 + x}{x^2 - x + 1}$. D. $y' = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$.

Câu 12: Tính đạo hàm của hàm số hợp $y = \sqrt{x + 3}$

- A. $y' = \frac{1}{\sqrt{x + 3}}$. B. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x + 3}}$.
C. $y' = \frac{3}{2\sqrt{x + 3}}$. D. $y' = -\frac{1}{\sqrt{x + 3}}$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = -4x^3 + \frac{x^2}{2} - 2x + 3$, biết $y' = ax^2 + bx + c$.

- a) $a + b + c = -10$
b) Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt
c) Đồ thị hàm số y' cắt trục tung tại điểm $(0; -2)$
d) Đồ thị hàm số y' cắt đường thẳng $y = 3$ tại hai điểm phân biệt

Câu 2: Xét hàm số $f(x) = \sqrt[3]{\cos 2x}$.

- a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.
b) $f'(x) = \frac{-2 \sin 2x}{3\sqrt[3]{\cos^2 2x}}$.
c) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
d) $3.y^2.y' + 2 \sin 2x = 0$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ và $g(x) = x \ln x$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$		
b)	Hàm số $g(x)$ có đạo hàm là $g'(x) = \ln x + 1$.		
c)	$f'(-1) - g'(e) = 2$		
d)	Phương trình $(x+2)^2 f'(x) = g'(x)$ có hai nghiệm.		

Câu 4: Cho hàm số $y = (x-2)\sqrt{x^2+m}$ với m là tham số.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + m}{\sqrt{x^2 + m}}$.		
b)	$f'(0) = \sqrt{m}$		
c)	Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $x_0 = 1$ là $\frac{m}{\sqrt{m+1}}$.		
d)	Để phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt thì $m < \frac{1}{2}$.		

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

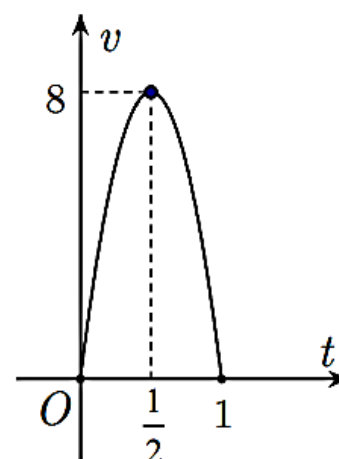
Câu 1: Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = (x+2)(x^2+1)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ bằng

Câu 2: Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + 3t - 4$, (t được tính bằng giây, s tính bằng mét). Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ là

Câu 3: Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Câu 4: Một vật chuyển động trong 1 giờ với vận tốc v phụ thuộc vào thời gian t có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(\frac{1}{2}; 8)$ và trục đối xứng song song với trục tung.

Tính gia tốc của vật lúc $t = 0,25(h)$



- Câu 5:** Một vật chuyển động theo quy luật $s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc nhỏ nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?
- Câu 6:** Một chuyển động theo qui luật là $s = -\frac{1}{2}t^3 + 3t^2 + 20$ với t giây là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Quãng đường vật đi được bắt đầu từ lúc vật chuyển động tới thời điểm vật đạt được vận tốc lớn nhất bằng.

PHẦN IV. Tự luận

- Câu 1:** Đạo hàm của hàm số $y = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x}$ tại điểm $x = \frac{\pi}{6}$
- Câu 2:** Tính đạo hàm cấp hai của hàm số sau: $y = x \sin x$.
- Câu 3:** Nhiệt độ cơ thể của một người trong thời gian bị bệnh được cho bởi công thức $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$, trong đó T là nhiệt độ (tính theo đơn vị đo Fahrenheit) tại thời điểm t (tính theo ngày). Tìm tốc độ thay đổi nhiệt độ ở thời điểm $t = 2$.
- Câu 4:** Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát, có phương trình chuyển động $x = 4 \cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) + 4(cm)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tìm thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc bằng $0(cm/s)$.
- Câu 5:** Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 10 + t + 9t^2 - t^3$ trong đó s tính bằng mét, t tính bằng giây. Tính thời gian để vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất (tính từ thời điểm ban đầu)?
- Câu 6:** Dân số (tính theo nghìn người) của một thành phố được cho bởi công thức $f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$, trong đó t (được tính bằng năm) là khoảng thời gian kể từ năm 2015. Tìm tốc độ tăng dân số trong năm 2025 của thành phố đó.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{4-x}$ là

- A.** $\frac{1}{2\sqrt{4-x}}$. **B.** $\sqrt{4-x}$. **C.** $\frac{-1}{\sqrt{4-x}}$. **D.** $\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = (\sqrt{4-x})' = \frac{(4-x)'}{2\sqrt{4-x}} = \frac{-1}{2\sqrt{4-x}}.$$

Câu 2: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x^{2024}$

- A.** $f'(x) = 2024x^{2024}$. **B.** $f'(x) = x^{2023}$. **C.** $f'(x) = 2024x^{2023}$. **D.** $f'(x) = 2023x^{2023}$.

Lời giải

$$y' = (x^{2024})' = 2024.x^{2023}$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) < 0$ là

- A.** $(-1; 1)$. **B.** $(1; 2)$. **C.** $(-1; 2)$. **D.** $(-\infty; 1)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = 3(x^2 - 1).$$

$$\text{Ta có } f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 1).$$

Câu 4: Với $x > 0$, đạo hàm của hàm số $y = 2^x + \log_5 x$ là:

- A.** $y' = 2^x \cdot \ln 2 + \frac{1}{x \cdot \ln 2}$. **B.** $y' = 2^x + \frac{1}{x \cdot \ln 5}$.
C. $y' = 2^x \cdot \ln 2 + \frac{1}{\ln 5}$. **D.** $y' = 2^x \cdot \ln 2 + \frac{1}{x \cdot \ln 5}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = (2^x + \log_5 x)' = (2^x)' + (\log_5 x)' = 2^x \cdot \ln 2 + \frac{1}{x \cdot \ln 5}.$$

Câu 5: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2 \sin 3x + \cos 2x$.

- A.** $y' = 6 \cos 3x - 2 \sin 2x$. **B.** $y' = 2 \cos 3x + \sin 2x$.
C. $y' = -6 \cos 3x + 2 \sin 2x$. **D.** $y' = 2 \cos 3x - \sin 2x$.

Lời giải

Ta có:

$$y' = (2 \cos 3x) \cdot 3 - (\sin 2x) \cdot 2 = 6 \cos 3x - 2 \sin 2x.$$

Câu 6: Đạo hàm của hàm số $y = x.e^x$ bằng:

- A.** $y' = (1+x)e^x$. **B.** $y' = e^x$. **C.** $y' = x.e^x$. **D.** $y' = (1-x)e^x$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = x'.e^x + x.(e^x)' = e^x + x.e^x = (1+x)e^x.$$

Câu 7: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x+1}{1-x}$ bằng:

A. $y' = \frac{-2}{(1-x)^2}$

B. $y' = \frac{3}{(1-x)^2}$

C. $y' = -2$

D. $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$

Lời giải

Ta có:

$$y' = \frac{(2x+1)' \cdot (1-x) - (1-x)' \cdot (2x+1)}{(1-x)^2} = \frac{2(1-x) - (-1)(2x+1)}{(1-x)^2} = \frac{2-2x+2x+1}{(1-x)^2} = \frac{3}{(1-x)^2}.$$

Câu 8: Hàm số $y = \sin^2 x \cdot \cos x$ có đạo hàm là:

A. $y' = \sin x \cdot (3 \cos^2 x - 1)$.

B. $y' = \sin x \cdot (3 \cos^2 x + 1)$.

C. $y' = \sin x \cdot (\cos^2 x + 1)$.

D. $y' = \sin x \cdot (\cos^2 x - 1)$.

Lời giải

Ta có: $y' = (\sin^2 x)' \cdot \cos x + \sin^2 x \cdot (\cos x)'$

$$y' = 2 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos x + \sin^2 x \cdot (-\sin x)$$

$$y' = 2 \sin x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x$$

$$y' = \sin x \cdot (2 \cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$y' = \sin x \cdot (3 \cos^2 x - 1).$$

Câu 9: Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = -150x^2 + 24000x - 35000$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1000 sản phẩm.

A. 20000 .

B. 22500 .

C. 21000 .

D. 24000 .

Lời giải

Ta có: $P'(x) = -300x + 24000$

Tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1000 sản phẩm là

$$P'(10) = -300 \cdot 10 + 24000 = 21000.$$

Câu 10: Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x^2+1}$ bằng

A. $\frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$.

B. $(x^2+1)^{\frac{1}{3}} \ln(x^2+1)$.

C. $\frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$.

D. $\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = \left[(x^2+1)^{\frac{1}{3}} \right]' = \frac{1}{3} 2x \cdot (x^2+1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}.$$

Câu 11: Hàm số $y = 2x + \ln(x^2 - x + 1)$ có đạo hàm là

A. $y' = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$. **B.** $y' = \frac{2x^2 + 2}{x^2 - x + 1}$. **C.** $y' = \frac{x^2 + x}{x^2 - x + 1}$. **D.** $y' = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$.

Lời giải

Ta có: $y' = (2x + \ln(x^2 - x + 1))' = 2 + \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$.

Câu 12: Tính đạo hàm của hàm số hợp $y = \sqrt{x + 3}$

A. $y' = \frac{1}{\sqrt{x + 3}}$. **B.** $y' = \frac{1}{2\sqrt{x + 3}}$. **C.** $y' = \frac{3}{2\sqrt{x + 3}}$. **D.** $y' = -\frac{1}{\sqrt{x + 3}}$.

Lời giải

Với $u = u(x) = x + 3$, ta có $y' = (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$. Suy ra

$$y' = (\sqrt{x + 3})' = \frac{(x + 3)'}{2\sqrt{x + 3}} = \frac{1}{2\sqrt{x + 3}}.$$

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = -4x^3 + \frac{x^2}{2} - 2x + 3$, biết $y' = ax^2 + bx + c$.

- a) $a + b + c = -10$
- b) Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt
- c) Đồ thị hàm số y' cắt trục tung tại điểm $(0; -2)$
- d) Đồ thị hàm số y' cắt đường thẳng $y = 3$ tại hai điểm phân biệt

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------------	---------------	----------------	---------------

$$y' = -4 \cdot 3 \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x - 2 + 0 = -12x^2 + x - 2$$

Câu 2: Xét hàm số $f(x) = \sqrt[3]{\cos 2x}$.

- a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.
- b) $f'(x) = \frac{-2 \sin 2x}{3 \sqrt[3]{\cos^2 2x}}$.
- c) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
- d) $3 \cdot y^2 \cdot y' + 2 \sin 2x = 0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
----------------	----------------	---------------	----------------

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{\cos 2 \cdot \frac{\pi}{2}} = -1.$$

$$y = \sqrt[3]{\cos 2x} \Rightarrow y^3 = \cos 2x \Rightarrow y' \cdot 3y^2 = -2 \sin 2x \Rightarrow y' = \frac{-2 \sin 2x}{3(\sqrt[3]{\cos 2x})^2}.$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$3 \cdot (\sqrt[3]{\cos 2x})^2 \cdot \frac{-2 \sin 2x}{3(\sqrt[3]{\cos 2x})^2} + 2 \sin 2x = -2 \sin 2x + 2 \sin 2x = 0.$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ và $g(x) = x \ln x$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$		
b)	Hàm số $g(x)$ có đạo hàm là $g'(x) = \ln x + 1$.		
c)	$f'(-1) - g'(e) = 2$		
d)	Phương trình $(x+2)^2 f'(x) = g'(x)$ có hai nghiệm.		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Đúng

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2}$.

Ta có: $f'(x) = \left(\frac{x-3}{x+2}\right)' = \frac{(x-3)' \cdot (x+2) - (x-3) \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x+3}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}.$

b) Đúng

Hàm số $g(x)$ có đạo hàm là $g'(x) = \ln x + 1$.

Ta có: $g'(x) = (x \ln x)' = x' \ln x + x \cdot (\ln x)' = \ln x + 1.$

c) Sai

$f'(-1) - g'(e) = 2.$

$$\begin{cases} f'(-1) = \frac{5}{(-1+2)^2} = 5 \\ g'(e) = \ln e + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow f'(-1) \neq g'(e)$$

d) Sai

Phương trình $(x+2)^2 f'(x) = g'(x)$ có hai nghiệm.

$$(x+2)^2 f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow (x+2)^2 \cdot \frac{5}{(x+2)^2} = \ln x + 1 \Leftrightarrow 5 = \ln x + 1 \Leftrightarrow \ln x = 4 \Leftrightarrow x = e^4.$$

Câu 4: Cho hàm số $y = (x-2)\sqrt{x^2+m}$ với m là tham số.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = \frac{x^2-2x+m}{\sqrt{x^2+m}}$.		
b)	$f'(0) = \sqrt{m}$		
c)	Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $x_0 = 1$ là $\frac{m}{\sqrt{m+1}}$.		
d)	Để phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt thì $m < \frac{1}{2}$.		

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

a) Sai

$$\text{Hàm số } f(x) \text{ có đạo hàm là } f'(x) = \frac{x^2-2x+m}{\sqrt{x^2+m}}.$$

$$\text{Ta có : } y' = (x-2)' \cdot \sqrt{x^2+m} + (x-2) \cdot (\sqrt{x^2+m})' = \sqrt{x^2+m} + \frac{x(x-2)}{\sqrt{x^2+m}} = \frac{2x^2-2x+m}{\sqrt{x^2+m}}$$

b) Đúng

$$f'(0) = \sqrt{m}.$$

$$f'(0) = \frac{2 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + m}{\sqrt{0^2+m}} = \sqrt{m}.$$

c) Đúng

$$\text{Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại } x_0 = 1 \text{ là } \frac{m}{\sqrt{m+1}}.$$

$$\text{Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại } x_0 = 1 \text{ là } k = f'(1) = \frac{2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + m}{\sqrt{1^2+m}} = \frac{m}{\sqrt{m+1}}.$$

d) Đúng

$$\text{Để phương trình } f'(x) = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt thì } m < \frac{1}{2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-2x+m}{\sqrt{x^2+m}} = 0 \Leftrightarrow 2x^2-2x+m = 0 \quad (1)$$

$$\text{Để phương trình } f'(x) = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - 2 \cdot m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = (x+2)(x^2+1)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ bằng

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = (x+2)'(x^2+1) + (x+2)(x^2+1)' = x^2+1+2x(x+2) = 3x^2+4x+1.$$

$$\text{Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ } x = 1 \text{ là } f'(1) = 8.$$

Câu 2: Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + 3t - 4$, (t được tính bằng giây, s tính bằng mét). Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ là

Lời giải

Ta có: $v(t) = s'(t) = 2t^2 - 2t + 3$

$$s'(5) = 2 \cdot 5^2 - 2 \cdot 5 + 3 = 43.$$

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ là: 43(m/s).

Câu 3: Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

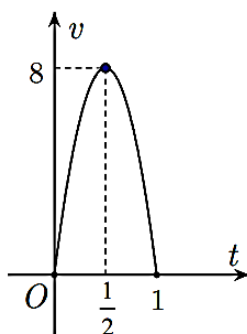
Lời giải

Vận tốc tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 18t$ với $t \in [0; 10]$.

Ta có: $v'(t) = -3t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

Suy ra: $v(0) = 0; v(10) = 30; v(6) = 54$. Vậy vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng 54 (m/s)

Câu 4: Một vật chuyển động trong 1 giờ với vận tốc v phụ thuộc vào thời gian t có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(\frac{1}{2}; 8)$ và trục đối xứng song song với trục tung. Tính gia tốc của vật lúc $t = 0,25(h)$



Lời giải

Gọi $v(t) = pt^2 + qt + r$ đi qua $O(0;0)$; $I(\frac{1}{2}; 8)$ và $M(1;0)$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} r = 0 \\ \frac{1}{4}p + \frac{1}{2}q + r = 8 \\ p + q + r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ q = 32 \\ p = -32 \end{cases} \text{ . Vậy } v(t) = -32t^2 + 32t$$

Gia tốc vật là $a = v'(t) = -64t + 32$

Lúc $t = 0,25(h)$ thì gia tốc là $a = 16(km / h^2)$.

Câu 5: Một vật chuyển động theo quy luật $s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc nhỏ nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Lời giải

Vận tốc v của vật được tính theo công thức: $v(t) = s'(t) = t^2 - 2t + 9$.

Ta có: $t^2 - 2t + 9 = (t-1)^2 + 8 \geq 8 \Rightarrow v \geq 8$.

Vậy vận tốc nhỏ nhất của vật là $8(m/s)$ đạt được tại thời điểm $t = 1$ (giây).

Câu 6: Một chuyển động theo qui luật là $s = -\frac{1}{2}t^3 + 3t^2 + 20$ với t giây là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Quãng đường vật đi được bắt đầu từ lúc vật chuyển động tới thời điểm vật đạt được vận tốc lớn nhất bằng.

Lời giải

Ta có: $s = -\frac{1}{2}t^3 + 3t^2 + 20 \Rightarrow v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 6t$

$$\Leftrightarrow v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}(t^2 - 4t + 4 - 4) = -\frac{3}{2}[(t-2)^2 - 4] = -\frac{3}{2}(t-2)^2 + 6 \leq 6$$

Vậy vận tốc đạt được giá trị lớn nhất tại thời điểm $t = 2(s)$.

Khi đó quãng đường vật đi được là: $s = s(2) = -4 + 12 + 20 = 28(m)$.

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x}$ tại điểm $x = \frac{\pi}{6}$

Lời giải

$$y = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = -2 \cot 2x$$

$$\Rightarrow y' = -2 \frac{-2}{\sin^2 2x} = \frac{4}{\sin^2 2x} \Rightarrow y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{16}{3}.$$

Câu 2: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số sau: $y = x \sin x$.

Lời giải

Ta có:

$$y' = (x \sin x)' = x' \cdot \sin x + (\sin x)' \cdot x = \sin x + x \cos x$$

$$\begin{aligned} y'' &= (\sin x + x \cos x)' = (\sin x)' + (x \cos x)' \\ &= \cos x + x' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot x = 2 \cos x - x \sin x \end{aligned}$$

Câu 3: Nhiệt độ cơ thể của một người trong thời gian bị bệnh được cho bởi công thức $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$, trong đó T là nhiệt độ (tính theo đơn vị đo Fahrenheit) tại thời điểm t (tính theo ngày). Tìm tốc độ thay đổi nhiệt độ ở thời điểm $t = 2$.

Lời giải

Đạo hàm của hàm số T biểu thị tốc độ thay đổi của nhiệt độ.

Ta có: $T'(t) = -0,2t + 1,2$.

Vậy tốc độ thay đổi nhiệt độ tại thời điểm $t = 2$ là:

$$T'(2) = -0,2 \cdot 2 + 1,2 = 0,8 (^\circ F / \text{ngày}).$$

Câu 4: Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát, có phương trình chuyển động $x = 4 \cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) + 4(\text{cm})$, trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tìm thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc bằng $0(\text{cm/s})$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } v(t) = x' = -4\pi \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right).$$

Thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc bằng 0 nghĩa là $v(t) = 0$

$$\Leftrightarrow -4\pi \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \pi t - \frac{2\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} + k (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy các thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc bằng 0 là:

$$t = \frac{2}{3} + k (k \in \mathbb{Z})(s)$$

Câu 5: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 10 + t + 9t^2 - t^3$ trong đó s tính bằng mét, t tính bằng giây. Tính thời gian để vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất (tính từ thời điểm ban đầu)?

Lời giải

$$\text{Ta có } v(t) = s'(t) = -3t^2 + 9t + 1 \text{ có đồ thị là Parabol, do đó } v(t)_{\max} \Leftrightarrow t = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}.$$

Câu 6: Dân số (tính theo nghìn người) của một thành phố được cho bởi công thức $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$, trong đó t (được tính bằng năm) là khoảng thời gian kể từ năm 2015. Tìm tốc độ tăng dân số trong năm 2025 của thành phố đó.

Lời giải

Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thành phố đó (tính bằng nghìn người/

$$\text{năm}), \text{ ta có: } f'(t) = \frac{120}{(t+5)^2}.$$

Từ năm 2015 đến năm 2025 nghĩa là $t = 10$.

Vậy tốc độ tăng dân số tại thời điểm $t = 10$ là:

$$f'(10) = \frac{120}{(10+5)^2} = \frac{8}{15} \approx 0,533 \text{ (nghìn người/năm)}$$



ĐẠO HÀM

BÀI: ĐẠO HÀM CẤP HAI

ĐỀ TEST SỐ 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \frac{1}{x}$ là

- A. $y'' = -\frac{1}{x^3}$. B. $y'' = -\frac{2}{x^3}$. C. $y'' = \frac{2}{x^3}$. D. $y'' = \frac{1}{x^3}$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Khi đó $y''\left(\frac{\pi}{6}\right)$ bằng:

- A. -2 . B. 2 . C. -1 . D. $-2\sqrt{3}$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ ($x > 0$). Tính $f''(4)$

- A. $f''(4) = -\frac{1}{16}$. B. $f''(4) = -\frac{1}{32}$. C. $f''(4) = \frac{1}{4}$. D. $f''(4) = -\frac{1}{32}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 5$. Tính đạo hàm cấp hai $f''(x)$

- A. $f''(x) = 36x^2 - 12x$. B. $f''(x) = 36x^2 - 12x + 1$.
C. $f''(x) = 12x^2 - 12x$. D. $f''(x) = 12x^2 - 6x$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \sin x$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là:

- A. $\cos x$. B. $-\sin x$. C. $-\cos x$. D. $\sin x$.

Câu 6: Cho hàm số $y = e^{2x}$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là:

- A. $4e^{2x}$. B. $2e^{2x}$. C. e^{2x} . D. e^x .

Câu 7: Cho hàm số $y = \log_2 x$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là:

- A. $\frac{1}{x \ln 2}$. B. $\frac{-1}{x^2 \ln 2}$. C. $\frac{-1}{x(\ln 2)^2}$. D. $\frac{1}{x(\ln 2)^2}$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{x}{x+1}$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là:

- A. $\frac{2}{(x+1)^3}$. B. $\frac{-2}{(x+1)^3}$. C. $\frac{2}{(x+1)^2}$. D. $\frac{-2}{(x+1)^2}$.

Câu 9: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1}$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là:

- A. $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^{3/2}}$. B. $\frac{-1}{(x^2+1)^{3/2}}$. C. $\frac{x^2-1}{(x^2+1)^{3/2}}$. D. $\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$.

Câu 10: Cho hàm số $y = 3 \cos(2x + \frac{\pi}{3})$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là:

- A. $12 \cos(2x + \frac{\pi}{3})$. B. $12 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$. C. $-12 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$. D. $-12 \cos(2x + \frac{\pi}{3})$.

Câu 11: Một vật dao động điều hòa với phương trình $x = 4 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ (cm), trong đó t tính bằng giây.

Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 1$ giây là:

- A. $2\sqrt{2}\pi^2 \text{ cm/s}^2$. B. $4\pi^2 \text{ cm/s}^2$. C. $-4\pi^2 \text{ cm/s}^2$. D. 0 cm/s^2 .

Câu 12: Một vật dao động điều hòa với phương trình $x = 10 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$ (cm), trong đó t tính bằng

giây. Gia tốc của vật tại thời điểm $t = \frac{1}{4}$ giây là:

- A. $-20\sqrt{3}\pi^2 \text{ cm/s}^2$. B. $40\pi^2 \text{ cm/s}^2$. C. $-40\pi^2 \text{ cm/s}^2$. D. 0 cm/s^2 .

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = \sin 2x$.

a) $y' = \cos 2x$.

b) Đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm $x = \frac{\pi}{4}$ là -4 .

c) $y \cdot y'' + (y')^2 = 4 \cos 4x$.

d) Đặt $g(x) = y' - 4x$. Phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả 3 nghiệm thuộc nửa khoảng $[0; 2\pi)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = \ln(2x - 4)$.

a) Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $D = [2; +\infty)$.

b) $y'' < 0 \forall x \in D$.

c) Tổng các nghiệm của phương trình $y'' = -1$ là 4.

d) Có 1 giá trị thực của tham số m để phương trình $y'' + y' + m - 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho tổng của chúng bằng 5.

Câu 3: Một vật chuyển động trên đường thẳng được xác định bởi công thức $s(t) = t^3 - 3t^2 + 7t - 2$, trong đó $t > 0$ và tính bằng giây và $s(t)$ là quãng đường chuyển động được của vật trong t giây tính bằng mét.

a) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ là 7 m/s.

b) Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ là 6 m/s^2 .

c) Gia tốc của vật tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng 16 m/s là 10 m/s^2 .

d) Vận tốc của chuyển động đạt giá trị nhỏ nhất tại thời điểm $t = 1$ (giây).

Câu 4: Một vật chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t$ trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 5s$ là $36m/s$.		
b)	Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3s$ là $6m/s^2$.		
c)	Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu là $12m/s^2$.		
d)	Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu là $12m/s$.		

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = x^3 + 2x$, giá trị của $f''(-1)$ bằng

Câu 2: Một vật chuyển động biến đổi đều với phương trình chuyển động $s = 2t^2 + 3t + 1$ (mét), trong đó t tính bằng giây. Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ là:

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = x^{2018} + x^{2017} + \dots + x^3 + x^2 + x + 1$, ($x \neq 1$). Biết $f'(2) = a.2^b + 1$, tính tổng $a + b$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{2mx}{x^2 + 5x + 6}$. Với m bằng bao nhiêu thì $y'(-1) = \frac{13}{4}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = e^{-x} \cdot \sin x$. Số nghiệm của phương trình $y'' + 2y' = 0$ trên đoạn $[0; 4\pi]$ là bao nhiêu?

Câu 6: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = \frac{1}{24}t^4 - t^3 + 10t^2 - 4t$, trong đó t tính bằng giây (s) và $s(t)$ tính bằng mét (m). Tại thời điểm gia tốc của chất điểm đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của chất điểm bằng bao nhiêu?

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho $f(x) = (x-3)^6$. Tính $f''(2)$.

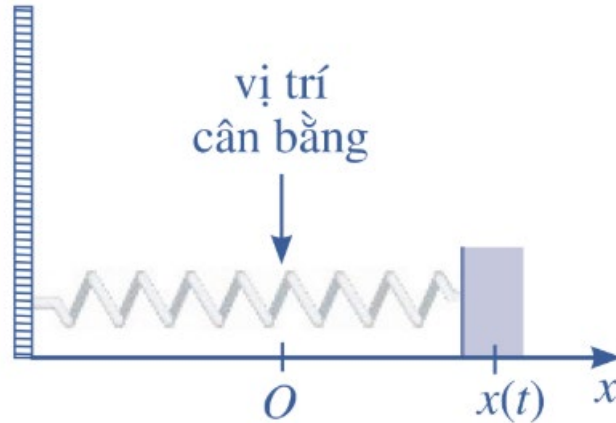
Câu 2: Cho $f(x) = \sin 3x$. Tính $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $f''(0)$, $f''\left(\frac{\pi}{18}\right)$.

Câu 3: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ là:

Câu 4: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

Câu 5: Một vật dao động điều hòa theo phương trình $x = 3 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 1$, với t tính bằng giây và x tính bằng centimet. Trong khoảng thời gian 3 giây, gia tốc của vật đạt giá trị lớn nhất bao nhiêu lần?

Câu 6: Một con lắc lò xo dao động điều hòa theo phương nằm ngang trên mặt phẳng không có ma sát như hình vẽ, có phương trình chuyển động $x(t) = 2\sin(at + b)$, với t tính bằng giây và x tính bằng centimet. Tại thời điểm $t = 4$ (s), người ta đo được quãng đường di chuyển của con lắc là $\sqrt{2}$ (cm), vận tốc của con lắc bằng $-0,6$ (cm/s). Hỏi tại thời điểm $t = 4$ (s), gia tốc của con lắc bằng bao nhiêu (đơn vị cm/s^2)? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)



----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \frac{1}{x}$ là

A. $y'' = -\frac{1}{x^3}$.

B. $y'' = -\frac{2}{x^3}$.

C. $y'' = \frac{2}{x^3}$.

D. $y'' = \frac{1}{x^3}$.

Lời giải

Ta có: $y' = -\frac{1}{x^2}$ nên $y'' = \left(\frac{x^2}{x^4}\right)' = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Khi đó $y''\left(\frac{\pi}{6}\right)$ bằng:

A. -2 .

B. 2 .

C. -1 .

D. $-2\sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có

$$y' = 2 \cos x \cdot (-\sin x) = -\sin 2x, \quad y'' = -2 \cos 2x \Rightarrow y''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2 \cos 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1.$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ ($x > 0$) Tính $f''(4)$

A. $f''(4) = -\frac{1}{16}$.

B. $f''(4) = -\frac{1}{32}$.

C. $f''(4) = \frac{1}{4}$.

D. $f''(4) = -\frac{1}{32}$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$ nên $f''(4) = -\frac{1}{32}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 5$. Tính đạo hàm cấp hai $f''(x)$

A. $f''(x) = 36x^2 - 12x$.

B. $f''(x) = 36x^2 - 12x + 1$.

C. $f''(x) = 12x^2 - 12x$.

D. $f''(x) = 12x^2 - 6x$.

Lời giải

Ta có:

$$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 1.$$

$$f''(x) = 36x^2 - 12x.$$

Câu 5: Cho hàm số $y = \sin x$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là:

A. $\cos x$.

B. $-\sin x$.

C. $-\cos x$.

D. $\sin x$.

Lời giải

Ta có: $y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x$.

Câu 6: Cho hàm số $y = e^{2x}$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là:

A. $4e^{2x}$.

B. $2e^{2x}$.

C. e^{2x} .

D. e^x .

Lời giải

Ta có: $y' = 2e^{2x}$, $y'' = 4e^{2x}$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \log_2 x$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là:

- A. $\frac{1}{x \ln 2}$. B. $\frac{-1}{x^2 \ln 2}$. C. $\frac{-1}{x(\ln 2)^2}$. D. $\frac{1}{x(\ln 2)^2}$.

Lời giải

Ta có: $y' = \frac{1}{x \ln 2}$; $y'' = \left(\frac{1}{x \ln 2} \right)' = -\frac{(x \ln 2)'}{(x \ln 2)^2} = \frac{-1}{x^2 \ln 2}$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{x}{x+1}$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là:

- A. $\frac{2}{(x+1)^3}$. B. $\frac{-2}{(x+1)^3}$. C. $\frac{2}{(x+1)^2}$. D. $\frac{-2}{(x+1)^2}$.

Lời giải

Ta có: $y' = \frac{1}{(x+1)^2}$, $y'' = -2(x+1)^{-3} = \frac{-2}{(x+1)^3}$.

Câu 9: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1}$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là:

- A. $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^{3/2}}$. B. $\frac{-1}{(x^2+1)^{3/2}}$. C. $\frac{x^2-1}{(x^2+1)^{3/2}}$. D. $\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$.

Lời giải

Ta có: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $y'' = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$.

Câu 10: Cho hàm số $y = 3 \cos(2x + \frac{\pi}{3})$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là:

- A. $12 \cos(2x + \frac{\pi}{3})$. B. $12 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$. C. $-12 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$. D. $-12 \cos(2x + \frac{\pi}{3})$.

Lời giải

Ta có: $y' = -3 \sin(2x + \frac{\pi}{3}) \cdot 2 = -6 \sin(2x + \frac{\pi}{3})$; $y'' = -6 \cos(2x + \frac{\pi}{3}) \cdot 2 = -12 \cos(2x + \frac{\pi}{3})$.

Câu 11: Một vật dao động điều hòa với phương trình $x = 4 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$ (cm), trong đó t tính bằng giây.

Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 1$ giây là:

- A. $2\sqrt{2}\pi^2 \text{ cm/s}^2$. B. $4\pi^2 \text{ cm/s}^2$. C. $-4\pi^2 \text{ cm/s}^2$. D. 0 cm/s^2 .

Lời giải

Vận tốc: $v(t) = x'(t) = -4\pi \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Gia tốc: $a(t) = v'(t) = x''(t) = -4\pi^2 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Tại thời điểm $t = 1$ giây: $a(1) = -4\pi^2 \cos\left(\pi \cdot 1 + \frac{\pi}{4}\right) = -4\pi^2 \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\pi^2 \text{ (cm/s}^2\text{)}.$

Câu 12: Một vật dao động điều hòa với phương trình $x = 10 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$ (cm), trong đó t tính bằng giây. Gia tốc của vật tại thời điểm $t = \frac{1}{4}$ giây là:

- A.** $-20\sqrt{3}\pi^2 \text{ cm/s}^2$. **B.** $40\pi^2 \text{ cm/s}^2$. **C.** $-40\pi^2 \text{ cm/s}^2$. **D.** 0 cm/s^2 .

Lời giải

Vận tốc: $v(t) = x'(t) = -20\pi \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$.

Gia tốc: $a(t) = v'(t) = x''(t) = -40\pi^2 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$.

Tại thời điểm $t = \frac{1}{4}$ giây: $a\left(\frac{1}{4}\right) = -40\pi^2 \cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = -20\sqrt{3}\pi^2 \text{ (cm/s}^2\text{)}.$

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = \sin 2x$.

a) $y' = \cos 2x$.

b) Đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm $x = \frac{\pi}{4}$ là -4 .

c) $y \cdot y'' + (y')^2 = 4 \cos 4x$.

d) Đặt $g(x) = y' - 4x$. Phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả 3 nghiệm thuộc nửa khoảng $[0; 2\pi)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------------	----------------	----------------	---------------

a) Sai

$y' = 2 \cos 2x$.

b) Đúng

$y'' = (2 \cos 2x)' = -4 \sin 2x \Rightarrow y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \sin \frac{\pi}{2} = -4$.

c) Đúng

$$y \cdot y'' + (y')^2 = \sin 2x \cdot (-4 \sin 2x) + (2 \cos 2x)^2$$

$$= -4 \sin^2 2x + 4 \cos^2 2x = 4(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 4 \cos 4x$$

d) Sai

$$g'(x) = y'' - 4 = 0$$

$$\Rightarrow -4 \sin 2x = 4 \Rightarrow \sin 2x = -1$$

$$\Rightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Phương trình có hai nghiệm thuộc nửa khoảng $[0; 2\pi)$ là $x = \frac{3\pi}{4}$ và $x = \frac{7\pi}{4}$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = \ln(2x - 4)$.

a) Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $D = [2; +\infty)$.

b) $y'' < 0 \quad \forall x \in D$.

c) Tổng các nghiệm của phương trình $y'' = -1$ là 4.

d) Có 1 giá trị thực của tham số m để phương trình $y'' + y' + m - 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho tổng của chúng bằng 5.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------------	----------------	---------------	---------------

a) Sai

Điều kiện xác định: $2x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ (*).

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $D = (2; +\infty)$.

b) Đúng

$$\text{Ta có: } y' = \frac{2}{2x-4} = \frac{1}{x-2}, \quad y'' = -\frac{1}{(x-2)^2}.$$

$$\text{Ta thấy: } y'' = -\frac{1}{(x-2)^2} < 0 \quad \forall x \in D.$$

c) Sai

Ta có:

$$y'' = -\frac{1}{(x-2)^2} = -1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow x=3 \text{ (thỏa mãn (*))}$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình $y'' = -1$ là 3.

d) Sai

$$\text{Ta có: } y'' + y' + m - 2 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-2} + m - 2 = 0 \quad (1).$$

Đặt $t = \frac{1}{x-2} > 0$ (do $x > 2$), phương trình (1) trở thành: $-t^2 + t + m - 2 = 0$ (2).

Nhận xét: Với mỗi giá trị tương ứng của x ($x > 2$), ta được một giá trị tương ứng của t ($t > 0$).

$$t = \frac{1}{x-2} \Rightarrow x = \frac{1}{t} + 2$$

Theo giả thiết, phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 lớn hơn 2 và $x_1 + x_2 = 5$.

$$\Rightarrow \text{PT (2) có 2 nghiệm } t_1, t_2 \text{ dương và } \left(\frac{1}{t_1} + 2\right) + \left(\frac{1}{t_2} + 2\right) = 5 \Leftrightarrow \frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2} = 1 \Leftrightarrow t_1 t_2 = t_1 + t_2.$$

$$\Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (m - 2) \geq 0 \Leftrightarrow 4m - 7 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{7}{4}.$$

Áp dụng Vi – ét với phương trình (2): $\begin{cases} t_1 + t_2 = 1 \\ t_1 t_2 = 2 - m \end{cases}$.

Do t_1, t_2 dương nên $t_1 t_2 = 2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$. Khi đó, $\frac{7}{4} \leq m < 2$ (**).

Xét $t_1 t_2 = t_1 + t_2 \Rightarrow 2 - m = 1 \Leftrightarrow m = 1$ (không thỏa mãn (**)).

Vậy không tồn tại giá trị thực nào của tham số m để phương trình $y'' + y' + m - 2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho tổng của chúng bằng 5.

Câu 3: Một vật chuyển động trên đường thẳng được xác định bởi công thức $s(t) = t^3 - 3t^2 + 7t - 2$, trong đó $t > 0$ và tính bằng giây và $s(t)$ là quãng đường chuyển động được của vật trong t giây tính bằng mét.

a) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ là 7 m/s.

b) Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ là 6 m/s².

c) Gia tốc của vật tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng 16 m/s là 10 m/s².

d) Vận tốc của chuyển động đạt giá trị nhỏ nhất tại thời điểm $t = 1$ (giây).

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

Ta có: $s'(t) = 3t^2 - 6t + 7$ và $s''(t) = 6t - 6$.

a) Đúng

Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ là: $v(2) = s'(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 7 = 7$ m/s.

b) Đúng

Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ là: $a(2) = v'(2) = s''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6$ m/s².

c) Sai

Vận tốc của chuyển động bằng 16 m/s tại thời điểm t nghĩa là:

$$v(t) = s'(t) = 16 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t + 7 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \text{ (tm)} \\ t = -1 \text{ (l)} \end{cases}$$

Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ là: $a(3) = v'(3) = s''(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12$ m/s²

d) Đúng

Vận tốc của chuyển động có phương trình $v(t) = 3t^2 - 6t + 7$ là một parabol có đỉnh $I(1;4)$ và hệ số $a = 3 > 0$ nên hàm số $v(t)$ có giá trị nhỏ nhất bằng 4 tại $t = 1$.

Vậy tại thời điểm $t = 1$ thì vận tốc của chuyển động đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4 m/s

Câu 4: Một vật chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t$ trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét.

| **Mệnh đề** | **Đúng** | **Sai**

a)	Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 5s$ là $36m/s$.		
b)	Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3s$ là $6m/s^2$.		
c)	Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu là $12m/s^2$.		
d)	Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu là $12m/s$.		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

Tại $t_0 \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có:

$$\begin{aligned} s(t) - s(t_0) &= t^3 - 3t^2 - 9t - (t_0^3 - 3t_0^2 - 9t_0) = (t - t_0)(t^2 + t.t_0 + t_0^2) - 3(t - t_0)(t + t_0) - 9(t - t_0) \\ &= (t - t_0)(t^2 + t.t_0 + t_0^2 - 3t - 3t_0 - 9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(t - t_0)(t^2 + t.t_0 + t_0^2 - 3t - 3t_0 - 9)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} (t^2 + t.t_0 + t_0^2 - 3t - 3t_0 - 9) = 3t_0^2 - 6t_0 - 9 \end{aligned}$$

Ta có: $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t - 9$

Tại $t_0 \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có:

$$v(t) - v(t_0) = 3t^2 - 6t - 9 - (3t_0^2 - 6t_0 - 9) = (t - t_0)(3t + 3t_0 - 6)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(t - t_0)(3t + 3t_0 - 6)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} (3t + 3t_0 - 6) = 6t_0 - 6$$

Ta có: $a(t) = v'(t) = 6t - 6$

a) Đúng

Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 5s$ là $36m/s$.

Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 5s$ là: $v(5) = 3.5^2 - 6.5 - 9 = 36(m/s)$.

b) Đúng

Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3s$ là $6m/s^2$.

Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 2s$ là: $a(2) = 6.2 - 6 = 6(m/s^2)$.

c) Đúng

Gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu là $12m/s^2$.

Khi vận tốc triệt tiêu, ta có: $3t^2 - 6t - 9 = 0 \Rightarrow t = 3(t > 0)$

Khi đó gia tốc là: $a(3) = 6.3 - 6 = 12m/s^2$.

d) Sai

Vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu là $12m/s$.

Khi gia tốc triệt tiêu, ta có: $6t - 6 = 0 \Rightarrow t = 1$

khi đó vận tốc là: $v(1) = 3.1^2 - 6.1 - 9 = -12(m/s)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = x^3 + 2x$, giá trị của $f''(-1)$ bằng

Lời giải

$$f'(x) = 3x^2 + 2, f''(x) = 6x \Rightarrow f''(-1) = -6.$$

Câu 2: Một vật chuyển động biến đổi đều với phương trình chuyển động $s = 2t^2 + 3t + 1$ (mét), trong đó t tính bằng giây. Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ là:

Lời giải

Tốc độ của vật là đạo hàm cấp 1 của phương trình chuyển động: $v(t) = s'(t) = 4t + 3$.

Gia tốc của vật là đạo hàm cấp 2 của phương trình chuyển động (hoặc đạo hàm cấp 1 của vận tốc): $a(t) = v'(t) = s''(t) = 4$.

Gia tốc là một hằng số, không phụ thuộc vào thời gian. Vì vậy, gia tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ là 4m/s^2 .

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = x^{2018} + x^{2017} + \dots + x^3 + x^2 + x + 1$, ($x \neq 1$). Biết $f'(2) = a \cdot 2^b + 1$, tính tổng $a + b$.

Lời giải

Với $x \neq 1$, thì $f(x)$ là tổng của 2019 số hạng đầu của cấp số nhân với $u_1 = 1, q = x$ nên ta được:

$$f(x) = \frac{1 - x^{2019}}{1 - x} = \frac{x^{2019} - 1}{x - 1}.$$

Khi đó, ta có:

$$f'(x) = \frac{2019x^{2018}(x-1) - (x^{2019} - 1)}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{2019 \cdot 2^{2018} - (2^{2019} - 1)}{1} = 2017 \cdot 2^{2018} + 1.$$

Vậy $a = 2017, b = 2018 \Rightarrow a + b = 4035$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{2mx}{x^2 + 5x + 6}$. Với m bằng bao nhiêu thì $y''(-1) = \frac{13}{4}$.

Lời giải

Ta có: $x = 3(x+2) - 2(x+3)$; $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$.

$$\text{Suy ra } y = 2m \left(\frac{3}{x+3} - \frac{2}{x+2} \right).$$

$$\text{Ta có: } y' = 2m \left[-\frac{3}{(x+3)^2} + \frac{2}{(x+2)^2} \right] \Rightarrow y'' = 2m \left(\frac{6}{(x+3)^3} - \frac{4}{(x+2)^3} \right).$$

$$\text{Khi đó } y''(-1) = \frac{13}{4} \Leftrightarrow 2m \cdot \left(-\frac{13}{4} \right) = \frac{13}{4} \Leftrightarrow 2m = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Câu 5: Cho hàm số $y = e^{-x} \cdot \sin x$. Số nghiệm của phương trình $y'' + 2y' = 0$ trên đoạn $[0; 4\pi]$ là bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x = e^{-x} (\cos x - \sin x)$$

$$y'' = -e^{-x} (\cos x - \sin x) + e^{-x} (-\cos x - \sin x) = -2e^{-x} \cos x$$

$$\text{Suy ra } y'' + 2y' = -2e^{-x} \cos x + 2e^{-x} (\cos x - \sin x) = -2e^{-x} \cdot \sin x.$$

$$y'' + 2y' = 0 \Leftrightarrow -2e^{-x} \cdot \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì $x \in [0; 4\pi] \Rightarrow x \in \{0; \pi; 2\pi; 3\pi; 4\pi\}$ hay phương trình đã cho có 5 nghiệm trên đoạn $[0; 4\pi]$.

Câu 6: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = \frac{1}{24}t^4 - t^3 + 10t^2 - 4t$, trong đó t tính bằng giây (s) và $s(t)$ tính bằng mét (m). Tại thời điểm gia tốc của chất điểm đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của chất điểm bằng bao nhiêu?

Lời giải

Vận tốc của chất điểm là: $v(t) = \frac{1}{6}t^3 - 3t^2 + 20t - 4$.

Gia tốc của chất điểm là: $a(t) = \frac{1}{2}t^2 - 6t + 20$.

Gia tốc của chất điểm đạt giá trị nhỏ nhất tại thời điểm $t = \frac{6}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 6$.

Khi đó, vận tốc của chất điểm là $v(6) = 44$.

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho $f(x) = (x-3)^6$. Tính $f''(2)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 6(x-3)^5$

Suy ra $f''(x) = 6 \cdot 5 \cdot (x-3)^4 = 30(x-3)^4$

Từ đó: $f''(2) = 30 \cdot (2-3)^4 = 30$.

Câu 2: Cho $f(x) = \sin 3x$. Tính $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $f''(0)$, $f''\left(\frac{\pi}{18}\right)$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 3\cos 3x$ và $f''(x) = -9\sin 3x$

Khi đó: $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -9\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -9$; $f''(0) = -9\sin(0) = 0$ và $f''\left(\frac{\pi}{18}\right) = -9\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-9}{2}$.

Câu 3: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ là:

Lời giải

Ta có: $y = \frac{x+1}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2} \Rightarrow y' = -\frac{3}{(x-2)^2}$ và $y'' = \frac{6}{(x-2)^3}$

Câu 4: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

Lời giải

Vận tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp một của quãng đường: $v = S' = -3t^2 + 6t + 9$

Gia tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp hai của quãng đường: $a = S'' = -6t + 6$

Gia tốc triệt tiêu khi $S'' = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Khi đó vận tốc của chuyển động là $S'(1) = 12 \text{ m/s}$.

Câu 5: Một vật dao động điều hòa theo phương trình $x = 3 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 1$, với t tính bằng giây và x tính bằng centimet. Trong khoảng thời gian 3 giây, gia tốc của vật đạt giá trị lớn nhất bao nhiêu lần?

Lời giải

Vận tốc tức thời của vật là: $v(t) = x'(t) = -6\pi \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Gia tốc tức thời của vật là: $a(t) = v'(t) = -12\pi^2 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$

Ta có: $-1 \leq \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1, \forall t \geq 0$.

Suy ra $-12\pi^2 \leq -12\pi^2 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \leq 12\pi^2$. Do đó $-12\pi^2 \leq a(t) \leq 12\pi^2$.

Dấu “=” xảy ra khi $\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ hoặc $\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = -1$.

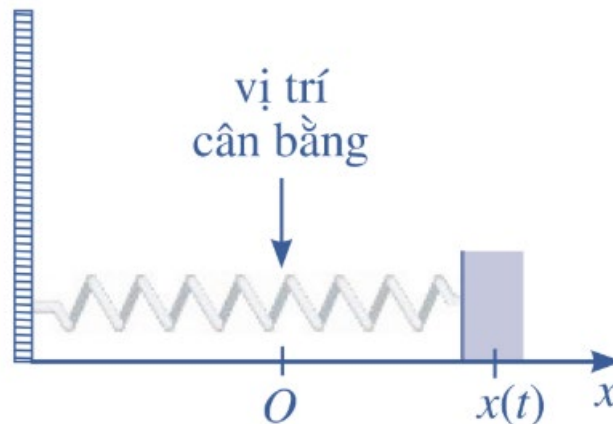
Khi đó $\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, suy ra $2\pi t + \frac{\pi}{4} = k\pi$, hay $t = -\frac{1}{8} + \frac{k}{2} (k \in \mathbb{N}^*)$ (do $t \geq 0$)

Do $0 < t < 3$ nên $0 < -\frac{1}{8} + \frac{k}{2} < 3$, suy ra $\frac{1}{4} < k < \frac{25}{4}$.

Mà $k \in \mathbb{N}^*$ nên $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Vậy trong khoảng thời gian 3 giây, gia tốc của vật đạt giá trị lớn nhất 6 lần

Câu 6: Một con lắc lò xo dao động điều hòa theo phương nằm ngang trên mặt phẳng không có ma sát như hình vẽ, có phương trình chuyển động $x(t) = 2 \sin(at + b)$, với t tính bằng giây và x tính bằng centimet. Tại thời điểm $t = 4$ (s), người ta đo được quãng đường di chuyển của con lắc là $\sqrt{2}$ (cm), vận tốc của con lắc bằng $-0,6$ (cm/s). Hỏi tại thời điểm $t = 4$ (s), gia tốc của con lắc bằng bao nhiêu (đơn vị cm/s^2)? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)



Lời giải

Vận tốc tức thời của con lắc là: $v(t) = x'(t) = 2a \cdot \cos(at + b)$.

Gia tốc tức thời của con lắc là: $s''(t) = v'(t) = -2a^2 \cdot \sin(at + b)$.

Theo bài ra ta có $\begin{cases} s(4) = \sqrt{2} \\ v(4) = -0,6 \end{cases}$, suy ra $\begin{cases} 2\sin(4a + b) = \sqrt{2} \\ 2a \cdot \cos(4a + b) = -0,6 \end{cases}$

Với $a \cdot \cos(4a + b) < 0$, bình phương hai vế của các phương trình trong hệ ta được:

$$\begin{cases} \sin^2(4a + b) = \frac{1}{2} \\ 4a^2 \cdot \cos^2(4a + b) = 0,36 \end{cases}.$$

suy ra $\begin{cases} \cos^2(4a + b) = \frac{1}{2} \\ 4a^2 \cdot \frac{1}{2} = 0,36 \end{cases}$. Từ đó ta có $a^2 = \frac{9}{50}$

Vậy gia tốc của con lắc tại thời điểm $t = 4$ (s) là $s''(4) = -2 \cdot \frac{9}{50} \cdot \sin(4a + b) = -\frac{9}{25} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0,3 \text{ cm/s}^2$

ĐẠO HÀM

BÀI: ĐẠO HÀM CẤP HAI

ĐỀ TEST SỐ 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Hàm số $y = \frac{x}{x-2}$ có đạo hàm cấp hai là:

- A. $y'' = 0$. B. $y'' = \frac{1}{(x-2)^2}$. C. $y'' = -\frac{4}{(x-2)^2}$. D. $y'' = \frac{4}{(x-2)^3}$.

Câu 2: Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm cấp hai bằng:

- A. $y'' = -\frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$. B. $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$. C. $y'' = -\frac{1}{\cos^2 x}$. D. $y'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$.

Câu 3: Hàm số $y = \frac{-2x^2 + 3x}{1-x}$ có đạo hàm cấp hai bằng:

- A. $y'' = 2 + \frac{1}{(1-x)^2}$. B. $y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$. C. $y'' = \frac{-2}{(1-x)^3}$. D. $y'' = \frac{2}{(1-x)^4}$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \sin 2x$. Chọn khẳng định **đúng**?

- A. $4y - y' = 0$. B. $4y + y'' = 0$. C. $y = y' \tan 2x$. D. $y^2 = (y')^2 = 4$.

Câu 5: Cho hàm số $y = e^{x^2}$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là:

- A. $2xe^{x^2}$. B. $4x^2e^{x^2}$. C. $2e^{x^2}(1 + 2x^2)$. D. $2e^{x^2}(2x^2 - 1)$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \ln(x^2 + 1)$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là:

- A. $\frac{2x}{x^2 + 1}$. B. $\frac{2}{x^2 + 1}$. C. $\frac{2(1-x^2)}{(x^2 + 1)^2}$. D. $\frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$.

Câu 7: Cho hàm số $y = -\frac{1}{x}$. Khi đó $y''\left(\frac{1}{2}\right)$ bằng

- A. -16. B. -8. C. 8. D. 16.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + 3$ (a, b là các hằng số). Biết $f'(1) = 0$ và $f''(1) = -2$. Tính $a + b$ bằng

- A. 1. B. 2. C. -1. D. 0.

Câu 9: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s = f(t)$ thỏa mãn $f''(t) = 2 + 3t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Gia tốc tức thời tại điểm $t = 1$ giây của chuyển động bằng

A. 5 m/s^2 . B. 3 m/s^2 . C. 2 m/s^2 . D. 6 m/s^2 .

Câu 10: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 5t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ giây.

A. 6 m/s^2 . B. 10 m/s^2 . C. 10 m/s . D. 2 m/s .

Câu 11: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 3 \sin\left(6t + \frac{\pi}{3}\right)$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{2}$ giây.

A. $54\sqrt{3} \text{ m/s}^2$. B. -9 m/s^2 . C. $54\sqrt{3} \text{ m/s}$. D. 9 m/s^2 .

Câu 12: Một chất điểm dao động theo phương trình ly độ $x(t) = 2 \cos(2\pi t)$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $x(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc lớn nhất của chất điểm

A. $8\pi^2 \text{ m/s}^2$. B. $4\pi^2 \text{ m/s}^2$. C. $2\pi \text{ m/s}$. D. $4\pi \text{ m/s}^2$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 4x - 5$.

a) $f''(1) < f''(2)$.

b) $x = 2$ là một nghiệm của phương trình $3f'(x) - 26 = 0$.

c) Hàm số $g(x) = 3f'(x) - xf''(x)$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{85}{3}$.

d) Số phương trình tiếp tuyến của hàm số $f'(x)$ đi qua điểm $A\left(\frac{5}{3}; 9\right)$ là 3.

Câu 2: Một con lắc lò xo chuyển động theo phương nằm ngang trên mặt phẳng không ma sát, có phương trình chuyển động $x = 4 \cdot \cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) + 3$, trong đó t tính bằng giây và x tính bằng centimet.

a) Vận tốc tức thời của con lắc tại thời điểm $t(s)$ là $v = 4\pi \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) (\text{cm/s})$.

b) Gia tốc tức thời của con lắc tại thời điểm $t(s)$ là $a = -4\pi^2 \cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) (\text{cm/s}^2)$.

c) Vận tốc của con lắc tại thời điểm $t = 5 (s)$ là $-10,9 (\text{cm/s})$ (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

d)) Gia tốc của con lắc tại thời điểm $t = 5 (s)$ là $19,7 (\text{cm/s}^2)$ (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

Câu 3: Chuyển động của một vật có phương trình $s(t) = 4 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{12}\right)$ (m), với t là thời gian tính bằng giây.

a) $s'(t) = -8\pi \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{12}\right)$

b) $s''(t) = 16\pi^2 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{12}\right)$

c) Vận tốc của vật tại thời điểm khi $t = 5(s)$ là $\approx 6,505(m/s)$.

d) Gia tốc của vật tại thời điểm khi $t = 5(s)$ là $\approx 152,533(m/s^2)$

Câu 4: Cho hàm số $y = e^{\sin x}$.

a) $y' \cdot \cos x - y \cdot \sin x - y'' = 1$.

b) $2y' \sin x = \sin 2x \cdot e^{\sin x}$.

c) $y' = \cos x \cdot e^{\sin x}$.

d) $y' \cdot \cos x - y \cdot \sin x - y'' = 0$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số sau: $y = x \sin x$ tại $x_0 = 0$.

Câu 2: Vị trí chuyển động của một vật trên đường thẳng được biểu diễn bởi công thức $s(t) = 3t^3 + 5t + 2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính gia tốc của vật đó khi $t = 1$.

Câu 3: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc tức thời của chất điểm bằng $-1 m/s$.

Câu 4: Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng mét/giây. Tìm gia tốc của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc chuyển động là 11 mét/giây.

Câu 5: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 3 \sin 2t + 2 \cos 2t$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s là quãng đường chuyển động được của chất điểm trong t giây tính bằng mét. Tính gia tốc của chất điểm đó khi $t = \frac{\pi}{4}$.

Câu 6: Một vật dao động điều hòa có phương trình $x = 2 \sin \pi t$ (x tính bằng cm, t tính bằng giây). Tính thời điểm đầu tiên vật có gia tốc lớn nhất.

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho $f(x) = \sin 3x$. Giá trị của $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ bằng:

Câu 2: Cho $f(x) = (x+10)^6$. Tính $f''(2)$.

Câu 3: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \sin 5x \cos 2x$ là

Câu 4: Một chuyển động xác định bởi phương trình $S(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$. Trong đó t được tính bằng giây, S được tính bằng mét. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3s$?

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x) = -4\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. Số nghiệm của phương trình $f''(x) = -8$ thuộc đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là

Câu 6: Cho phương trình dao động $x(t) = 10\cos\left(\frac{2\pi}{5}t + \frac{\pi}{3}\right)$, ở đây li độ x tính bằng centimét và thời gian t tính bằng giây. Tìm thời điểm đầu tiên để vật có gia tốc bằng 0.

----- **HẾT** -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Hàm số $y = \frac{x}{x-2}$ có đạo hàm cấp hai là:

- A.** $y'' = 0$. **B.** $y'' = \frac{1}{(x-2)^2}$. **C.** $y'' = -\frac{4}{(x-2)^2}$. **D.** $y'' = \frac{4}{(x-2)^3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = \left(\frac{x}{x-2} \right)' = \frac{-2}{(x-2)^2}; \quad y'' = \left(\frac{-2}{(x-2)^2} \right)' = 2 \cdot \frac{2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{4}{(x-2)^3}.$$

Câu 2: Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm cấp hai bằng:

- A.** $y'' = -\frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$. **B.** $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$. **C.** $y'' = -\frac{1}{\cos^2 x}$. **D.** $y'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow y'' = -\frac{2 \cos x (-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$$

Câu 3: Hàm số $y = \frac{-2x^2 + 3x}{1-x}$ có đạo hàm cấp hai bằng:

- A.** $y'' = 2 + \frac{1}{(1-x)^2}$. **B.** $y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$. **C.** $y'' = \frac{-2}{(1-x)^3}$. **D.** $y'' = \frac{2}{(1-x)^4}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = 2x - 1 + \frac{1}{1-x} \Rightarrow y' = 2 + \frac{1}{(1-x)^2}; \quad y'' = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Câu 4: Cho hàm số $y = \sin 2x$. Chọn khẳng định **đúng**?

- A.** $4y - y' = 0$. **B.** $4y + y'' = 0$. **C.** $y = y' \tan 2x$. **D.** $y^2 = (y')^2 = 4$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 2 \cos 2x; \quad y'' = -4 \sin 2x.$$

$$\text{Từ đó suy ra: } 4y + y'' = 0.$$

Câu 5: Cho hàm số $y = e^{x^2}$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là:

- A.** $2xe^{x^2}$. **B.** $4x^2 e^{x^2}$. **C.** $2e^{x^2}(1+2x^2)$. **D.** $2e^{x^2}(2x^2-1)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}; \quad y'' = 2e^{x^2} + 2x(e^{x^2} \cdot 2x) = 2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2} = 2e^{x^2}(1+2x^2).$$

Câu 6: Cho hàm số $y = \ln(x^2 + 1)$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là:

- A.** $\frac{2x}{x^2 + 1}$. **B.** $\frac{2}{x^2 + 1}$. **C.** $\frac{2(1-x^2)}{(x^2 + 1)^2}$. **D.** $\frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = \frac{2x}{x^2+1}; y'' = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}.$$

Câu 7: Cho hàm số $y = -\frac{1}{x}$. Khi đó $y''\left(\frac{1}{2}\right)$ bằng

A. -16.

B. -8.

C. 8.

D. 16.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = -\frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{x^2} \Rightarrow y'' = -\frac{2}{x^3} \Rightarrow y''\left(\frac{1}{2}\right) = -16.$$

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + 3$ (a, b là các hằng số). Biết $f'(1) = 0$ và $f''(1) = -2$. Tính $a + b$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. -1.

D. 0.

Lời giải

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(1) = 2a + b = 0.$$

$$f''(x) = 2a \Rightarrow f''(1) = 2a = -2 \Leftrightarrow a = -1. \text{ Thay vào trên, ta được } b = 2.$$

$$\text{Vậy } a + b = 1.$$

Câu 9: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s = f(t)$ thỏa mãn $f''(t) = 2 + 3t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Gia tốc tức thời tại điểm $t = 1$ giây của chuyển động bằng

A. 5 m/s^2 .

B. 3 m/s^2 .

C. 2 m/s^2 .

D. 6 m/s^2 .

Lời giải

$$\text{Ta có } a(t) = s''(t) = f''(t) = 2 + 3t.$$

$$\text{Vậy gia tốc tức thời tại điểm } t = 1 \text{ giây của chuyển động là } a(1) = 2 + 3.1 = 5 \text{ m/s}^2.$$

Câu 10: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 5t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ giây.

A. 6 m/s^2 .

B. 10 m/s^2 .

C. 10 m/s .

D. 2 m/s .

Lời giải

$$\text{Ta tính được } v(t) = s'(t) = t^2 - 4t + 5; a(t) = s''(t) = 2t - 4$$

$$\text{Gia tốc của chất điểm tại thời điểm } t = 5 \text{ giây là } a(t) = s''(t) = 2t - 4 \Rightarrow a(5) = 2.5 - 4 = 6 \text{ m/s}^2.$$

Câu 11: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 3 \sin\left(6t + \frac{\pi}{3}\right)$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{2}$ giây.

A. $54\sqrt{3} \text{ m/s}^2$.

B. -9 m/s^2 .

C. $54\sqrt{3} \text{ m/s}$.

D. 9 m/s^2 .

Lời giải

Ta tính được $s'(t) = 18 \cos\left(6t + \frac{\pi}{3}\right)$; $s''(t) = -108 \sin\left(6t + \frac{\pi}{3}\right)$

Gia tốc của chất điểm $a(t) = s''(t) = -108 \sin\left(6t + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow a\left(\frac{\pi}{2}\right) = 54\sqrt{3} \text{ m/s}^2$

Câu 12: Một chất điểm dao động theo phương trình ly độ $x(t) = 2 \cos(2\pi t)$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $x(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc lớn nhất của chất điểm

A. $8\pi^2 \text{ m/s}^2$.

B. $4\pi^2 \text{ m/s}^2$.

C. $2\pi \text{ m/s}$.

D. $4\pi \text{ m/s}^2$.

Lời giải

Ta tính được $v(t) = x'(t) = -4\pi \sin(2\pi t)$; $a(t) = x''(t) = -8\pi^2 \cos(2\pi t)$.

$\Rightarrow$ Gia tốc lớn nhất của chất điểm là $8\pi^2 \text{ m/s}^2$ vì $-1 \leq \cos(2\pi t) \leq 1$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 4x - 5$.

a) $f''(1) < f''(2)$.

b) $x = 2$ là một nghiệm của phương trình $3f'(x) - 26 = 0$.

c) Hàm số $g(x) = 3f'(x) - xf''(x)$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{85}{3}$.

d) Số phương trình tiếp tuyến của hàm số $f'(x)$ đi qua điểm $A\left(\frac{5}{3}; 9\right)$ là 3.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------------	----------------	----------------	----------------

a) Sai

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 7x + 4; f''(x) = x^2 - 6x + 7.$$

Hàm số $y = f''(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$ và đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$

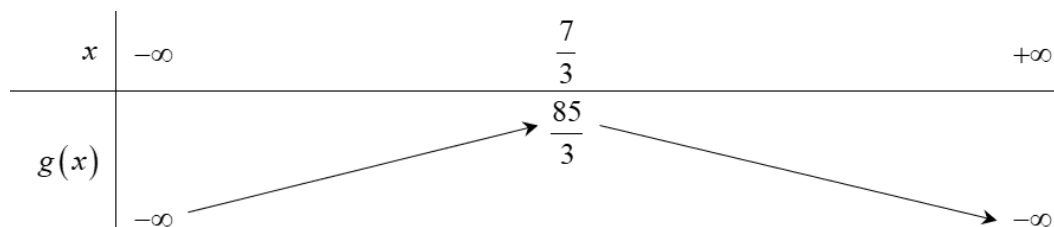
b) Đúng

$$3f'(x) - 26 = 0 \Rightarrow x^3 - 9x^2 + 21x - 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 5,79 \\ x = 2 \\ x \approx 1,2 \end{cases}.$$

c) Đúng

$$g(x) = 3f'(x) - xf''(x) = -3x^2 + 14x + 12.$$

BBT:



Dựa vào BBT, suy ra hàm số $g(x)$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{85}{3}$.

d) Đúng

Gọi tiếp điểm có hoành độ là x_0 . Khi đó phương trình tiếp tuyến của hàm số $f'(x)$ là:

$$y = (x_0^2 - 6x_0 + 7)(x - x_0) + \frac{1}{3}x_0^3 - 3x_0^2 + 7x_0 + 4.$$

$$\text{Tiếp tuyến đi qua điểm } A\left(\frac{5}{3}; 9\right) \Rightarrow 9 = (x_0^2 - 6x_0 + 7)\left(\frac{5}{3} - x_0\right) + \frac{1}{3}x_0^3 - 3x_0^2 + 7x_0 + 4$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3}x_0^3 + \frac{14}{3}x_0^2 - 10x_0 + \frac{20}{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \approx 1,38 \\ x_0 = 2 \\ x_0 \approx 3,62 \end{cases}.$$

Câu 2: Một con lắc lò xo chuyển động theo phương nằm ngang trên mặt phẳng không ma sát, có phương trình chuyển động $x = 4 \cdot \cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) + 3$, trong đó t tính bằng giây và x tính bằng centimet.

a) Vận tốc tức thời của con lắc tại thời điểm $t(s)$ là $v = 4\pi \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$ (cm/s).

b) Gia tốc tức thời của con lắc tại thời điểm $t(s)$ là $a = -4\pi^2 \cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$ (cm/s²).

c) Vận tốc của con lắc tại thời điểm $t = 5$ (s) là $-10,9$ (cm/s) (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

d) Gia tốc của con lắc tại thời điểm $t = 5$ (s) là $19,7$ (cm/s²) (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) Sai

$$\text{Có } x = 4 \cdot \cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) + 3 \Rightarrow v = (x)' = -4\pi \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) \text{ (cm/s)}$$

b) Đúng

$$\text{Có } a = (v)' = a = -4\pi^2 \cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) \text{ (cm/s}^2\text{)}.$$

c) Đúng

$$\text{Thay } t = 5 \Rightarrow v(5) = -4\pi \cdot \sin\left(5\pi - \frac{2\pi}{3}\right) \approx -10,9 \text{ (cm/s)}.$$

d) Sai

$$\text{Thay } t = 5 \Rightarrow a(5) = -4\pi^2 \cdot \cos\left(5\pi - \frac{2\pi}{3}\right) \approx -19,7 \text{ (cm/s}^2\text{)}.$$

Câu 3: Chuyển động của một vật có phương trình $s(t) = 4\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{12}\right)$ (m), với t là thời gian tính bằng giây.

a) $s'(t) = -8\pi \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{12}\right)$

b) $s''(t) = 16\pi^2 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{12}\right)$

c) Vận tốc của vật tại thời điểm khi $t = 5$ (s) là $\approx 6,505$ (m/s).

d) Gia tốc của vật tại thời điểm khi $t = 5$ (s) là $\approx 152,533$ (m/s²)

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) b) Ta có $s'(t) = -8\pi \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{12}\right)$ và $s''(t) = -16\pi^2 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{12}\right)$.

c) Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 5$ (s) là:

$$s'(5) = -8\pi \sin\left(10\pi - \frac{\pi}{12}\right) \approx 6,505 \text{ (m/s)}.$$

d) Gia tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 5$ (s) là:

$$s''(5) = -16\pi^2 \cos\left(10\pi - \frac{\pi}{12}\right) \approx -152,533 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

Câu 4: Cho hàm số $y = e^{\sin x}$.

a) $y' \cdot \cos x - y \cdot \sin x - y'' = 1$.

b) $2y' \sin x = \sin 2x \cdot e^{\sin x}$.

c) $y' = \cos x \cdot e^{\sin x}$.

d) $y' \cdot \cos x - y \cdot \sin x - y'' = 0$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

Ta có:

$$y' = \cos x \cdot e^{\sin x}$$

$$2y' \sin x = 2 \cos x \cdot e^{\sin x} \cdot \sin x = \sin 2x \cdot e^{\sin x}$$

$$y'' = -\sin x \cdot e^{\sin x} + \cos^2 x \cdot e^{\sin x}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\} = \cos^2 x \cdot e^{\sin x} - \sin x \cdot e^{\sin x} - (-\sin x \cdot e^{\sin x} + \cos^2 x \cdot e^{\sin x}) = 0$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số sau: $y = x \sin x$ tại $x_0 = 0$.

Lời giải

Trả lời: 2

Ta có:

$$y' = (x \sin x)' = x' \cdot \sin x + (\sin x)' \cdot x = \sin x + x \cos x$$

$$\begin{aligned} y' &= (\sin x + x \cos x)' = (\sin x)' + (x \cos x)' \\ &= \cos x + x' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot x = 2 \cos x - x \sin x \\ \Rightarrow y''(0) &= 2 \cos 0 - 0 \cdot \sin 0 = 2 \end{aligned}$$

Câu 2: Vị trí chuyển động của một vật trên đường thẳng được biểu diễn bởi công thức $s(t) = 3t^3 + 5t + 2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính gia tốc của vật đó khi $t = 1$.

Lời giải

Ta có $s'(t) = 9t^2 + 5$ suy ra gia tốc $s''(t) = 18t$, gia tốc $s''(1) = 18$.

Câu 3: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc tức thời của chất điểm bằng -1 m/s .

Lời giải

Theo giả thiết, $s'(t) = t^2 - 6t + 8 = -1 \Leftrightarrow t = 3 \text{ (s)}$.

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 3 \text{ (s)}$ là: $s''(3) = 0 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

Câu 4: Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng mét/giây. Tìm gia tốc của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc chuyển động là 11 mét/giây.

Lời giải

Trả lời: 14

Ta tính được $v'(t) = 8 + 6t$.

Ta có $v(t) = 11 \Leftrightarrow 8t + 3t^2 = 11 \Leftrightarrow t = 1 \text{ (} t > 0\text{)}$.

Gia tốc của chất điểm $a(t) = v'(t) = 8 + 6t \longrightarrow a(1) = v'(1) = 8 + 6 \cdot 1 = 14 \text{ m/s}^2$.

Câu 5: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 3 \sin 2t + 2 \cos 2t$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s là quãng đường chuyển động được của chất điểm trong t giây tính bằng mét. Tính gia tốc của chất điểm đó khi $t = \frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Ta có: $s'(t) = 3(\sin 2t)' + 2(\cos 2t)' = 6 \cos 2t - 4 \sin 2t$.

Và $s''(t) = 6(\cos 2t)' - 4(\sin 2t)' = -12 \sin 2t - 8 \cos 2t$.

Gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4}$ là:

$$a\left(\frac{\pi}{4}\right) = s''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -12 \left[\sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right] - 8 \left[\cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right] = -12$$

Câu 6: Một vật dao động điều hòa có phương trình $x = 2 \sin \pi t$ (x tính bằng cm , t tính bằng giây). Tính thời điểm đầu tiên vật có gia tốc lớn nhất.

Lời giải

Gia tốc của vật bằng đạo hàm cấp hai của phương trình chuyển động

$$\text{Ta có: } x' = 2\pi \cos \pi t \Rightarrow a(t) = x''(t) = -2\pi^2 \sin \pi t$$

$$\text{Vì } -1 \leq \sin \pi t \leq 1 \Leftrightarrow -2\pi^2 \leq -2\pi^2 \sin \pi t \leq 2\pi^2 \Leftrightarrow -2\pi^2 \leq a(t) \leq 2\pi^2$$

$$\text{Gia tốc lớn nhất khi } \sin \pi t = -1 \Leftrightarrow \pi t = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} + 2k$$

$$\text{Với } k = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}(l); k = 1 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$

Vậy tại $t = \frac{3}{2}$ giây là thời điểm đầu tiên vật có gia tốc lớn nhất.

Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $S(t)(km)$ là hàm số phụ

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho $f(x) = \sin 3x$. Giá trị của $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ bằng:

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = 3\cos 3x \text{ suy ra } f''(x) = -9\sin 3x$$

$$\text{Do đó: } f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -9\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 9.$$

Câu 2: Cho $f(x) = (x+10)^6$. Tính $f''(2)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = 6(x+10)^5$$

$$\text{Suy ra } f''(x) = 6.5.(x+10)^4 = 30(x+10)^4$$

$$\text{Từ đó: } f''(2) = 30.(2+10)^4 = 622080.$$

Câu 3: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \sin 5x \cos 2x$ là

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = \sin 5x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 7x + \sin 3x)$$

$$\text{Do đó } y' = \frac{1}{2}(7\cos 7x + 3\cos 3x) \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}(-49\sin 7x - 9\sin 3x)$$

Câu 4: Một chuyển động xác định bởi phương trình $S(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$. Trong đó t được tính bằng giây, S được tính bằng mét. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3s$?

Lời giải

$$\text{Vận tốc của chuyển động tại thời điểm } t \text{ có phương trình là } v(t) = S'(t) = 3t^2 - 6t - 9.$$

$$\text{Gia tốc của chuyển động tại thời điểm } t \text{ có phương trình là } a(t) = v'(t) = 6t - 6.$$

$$\text{Tại thời điểm } t = 3s \text{ ta có } a(3) = 6.3 - 6 = 12 \text{ m/s}^2.$$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x) = -4\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. Số nghiệm của phương trình $f''(x) = -8$ thuộc đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là

Lời giải

$$f(x) = -4\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right), f'(x) = 8\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right), f''(x) = 16\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$f''(x) = -8 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên lấy được $x = \frac{\pi}{2}$.

Câu 6: Cho phương trình dao động $x(t) = 10\cos\left(\frac{2\pi}{5}t + \frac{\pi}{3}\right)$, ở đây li độ x tính bằng centimét và thời gian t tính bằng giây. Tìm thời điểm đầu tiên để vật có gia tốc bằng 0.

Lời giải

$$\text{Ta có gia tốc } a(t) = x''(t) = \frac{-8\pi^2}{5}\cos\left(\frac{2\pi}{5}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{Gia tốc bằng 0 tức là } \frac{-8\pi^2}{5}\cos\left(\frac{2\pi}{5}t + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{12} + \frac{5}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}. \text{ Do } t \geq 0 \text{ nên thời điểm}$$

đầu tiên vật có gia tốc bằng 0 tương ứng với $k = 0$, tức là tại thời điểm $t = \frac{5}{12}$ (giây).



ĐẠO HÀM

ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG

ĐỀ TEST SỐ 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tính số gia của hàm số $y = \frac{x^2}{2}$ tại điểm $x_0 = -1$ ứng với số gia Δx .

A. $\Delta y = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - \Delta x$.

B. $\Delta y = \frac{1}{2}[(\Delta x)^2 - \Delta x]$.

C. $\Delta y = \frac{1}{2}[(\Delta x)^2 + \Delta x]$.

D. $\Delta y = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + \Delta x$.

Câu 2: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

A. $y' = 3 \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

B. $y' = -3 \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

C. $y' = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

D. $y' = -3 \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

Câu 3: Đạo hàm của hàm số $y = e^{1-2x}$ là

A. $y' = 2e^{1-2x}$

B. $y' = -2e^{1-2x}$

C. $y' = \frac{1}{2}e^{1-2x}$

D. $y' = e^{1-2x}$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$. Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm S là:

A. $S = \left\{0; \frac{2}{3}\right\}$.

B. $S = \left\{-\frac{2}{3}; 0\right\}$.

C. $S = \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$.

D. $S = \left\{-\frac{3}{2}; 0\right\}$.

Câu 5: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$ tại điểm $x = 1$.

A. $f'(1) = \frac{1}{2}$.

B. $f'(1) = 1$.

C. $f'(1) = 0$.

D. Không tồn tại.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = x^2 + 3x - 1$ có đồ thị (C) . Xác định hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của đồ thị với trục Oy

A. -3 .

B. 2 .

C. 3 .

D. 4 .

Câu 7: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2$ tại điểm $M(2; 6)$ là.

A. $y = 12x - 18$.

B. $y = 12x + 18$.

C. $y = -12x + 18$.

D. $y = -12x - 18$.

Câu 8: Hàm số $y = \tan x + \sqrt{3}$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ là

- A. $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$. B. $y' = \frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{3}$. C. $y' = -\frac{1}{\cos^2 x}$. D. $y' = -\frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{3}$.

Câu 9: Đạo hàm của hàm số $y = 4^{x^2+3}$ là

- A. $y' = (x^2 + 3) \cdot 4^{x^2+3}$. B. $y' = \ln 4 \cdot 4^{x^2+3}$. C. $y' = 2x \cdot \ln 4 \cdot 4^{x^2+3}$. D. $y' = 2x \cdot \ln 2 \cdot 2^{2x^2+6}$.

Câu 10: Hàm số $y = \cos^2 5x$ có đạo hàm là

- A. $y' = 2 \cos 5x$. B. $y' = 10 \cos 5x$. C. $y' = -5 \sin 10x$. D. $y' = 10 \sin 10x$.

Câu 11: Một chất điểm chuyển động có phương trình $S = t^3 - 3t^2 - 9t + 5$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Gia tốc tại thời điểm vận tốc bị triệt tiêu là

- A. $12m/s^2$. B. $9m/s^2$. C. $-9m/s^2$. D. $-12m/s^2$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x) = \log_8 x$ với $x > 0$. Khi đó $f''(x)$ bằng

- A. $\frac{1}{x^2 \ln 8}$ B. $\frac{-1}{3x^2 \ln 2}$ C. $\frac{1}{x \ln 8}$ D. $\frac{-1}{3x^2}$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 2024$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = -4x + \frac{4043}{2}$.

- a) Đạo hàm của $f(x)$ là: $f'(x) = 2x^3 - 6x$
 b) Hệ số góc của đường thẳng d là: 4
 c) Gọi Δ là tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với d , khi đó hệ số góc của Δ là -4
 d) Có hai tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với d

Câu 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

- a) $y' = 3x^2 - 3x$.
 b) $y'' = 6x - 6$.
 c) Số nghiệm nguyên của bất phương trình $y' \leq 0$ là 7.
 d) Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $\frac{y'}{y''} > 1$ trên đoạn $[-100; 100]$ bằng 5044.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \sin x - x$.

- a) Đạo hàm của hàm số là $f'(x) = -\cos x - 1$.
 b) $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
 c) Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm là $S = \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
 d) Có 3 giá trị nguyên của m để phương trình $f''(x) - m + 1 = 0$ có nghiệm.

- Câu 4:** Một tài xế đang lái xe ô tô. Ngay khi phát hiện phía trước có vật cản, tài xế đã phanh gấp lại nhưng vẫn xảy ra va chạm, chiếc ô tô để lại vết trượt dài 24,24 m (được tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi xảy ra va chạm). Trong quá trình đạp phanh, ô tô chuyển động theo phương trình $s(t) = 22t - \frac{3}{2}t^2$, trong đó s (m) là độ dài quãng đường đi được sau khi phanh, t (s) là thời gian tính từ lúc bắt đầu phanh ($0 \leq t \leq 5$).
- Vận tốc tức thời của ô tô ngay khi đạp phanh là 22 (m/s).
 - Ô tô không chạy quá tốc độ, biết tốc độ giới hạn cho phép trong khu vực ô tô đang di chuyển là 70 km/h.
 - Thời điểm xảy ra va chạm cách thời điểm bắt đầu đạp phanh là 1,5 s.
 - Vận tốc tức thời của ô tô ngay khi xảy ra va chạm là 18,4 (m/s).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

- Câu 1:** Cho hàm số $f(x) = \log_2(x^2 + 1)$, tính $f'(1)$
- Câu 2:** Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 6 \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng centimét. Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}$ (s) là $-\sqrt{a}$ (cm/s). Tìm a
- Câu 3:** Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-2}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc -5 có dạng $y = ax + b$. Tìm $\min(a + b)$
- Câu 4:** Cho hàm số $f(x) = \sin^2 x$. Số nghiệm thuộc $(0; 2\pi)$ của phương trình $2f(x) + f'''(x) = 0$ là bao nhiêu
- Câu 5:** Một vật chuyển động theo quy luật $S(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật chuyển động và S (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc vật bắt đầu chuyển động thì vận tốc lớn nhất của vật bằng bao nhiêu m/s?
- Câu 6:** Sau khi phát hiện một dịch bệnh, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 35t^2 - \frac{5}{3}t^3$ (kết quả khảo sát trong 12 tháng liên tục). Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất bằng bao nhiêu người một ngày?

PHẦN IV. Tự luận

- Câu 1:** Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2 + x + 1}$. Tính tổng các nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ (làm tròn tới hàng phần trăm).
- Câu 2:** Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{x-2} - 27$ song song với trục hoành?

- Câu 3:** Có hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-2}{x-1}$ (C) đi qua điểm $A(9;0)$. Tính hệ số góc của hai tiếp tuyến đó bằng bao nhiêu (làm tròn tới hàng phần trăm).
- Câu 4:** Một vật chuyển động với phương trình $S(t) = 4t^2 + t^3$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây, $S(t)$ tính bằng m . Tại thời điểm vận tốc của vật bằng $11(m/s)$ thì gia tốc của vật là bao nhiêu? (đơn vị m/s^2)
- Câu 5:** Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = -\frac{1}{2}t^3 + 12t^2$, t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động, s (mét) là quãng đường vật chuyển động trong t giây. Tính vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 10$ (giây)
- Câu 6:** Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{x-1}$ có đồ thị là (H) . Biết tiếp tuyến của (H) song song với đường thẳng $d: y = -x$ có dạng $y = ax + b$. Tính $a + b$.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tính số gia của hàm số $y = \frac{x^2}{2}$ tại điểm $x_0 = -1$ ứng với số gia Δx .

A. $\Delta y = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - \Delta x$.

B. $\Delta y = \frac{1}{2}[(\Delta x)^2 - \Delta x]$.

C. $\Delta y = \frac{1}{2}[(\Delta x)^2 + \Delta x]$.

D. $\Delta y = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + \Delta x$.

Lời giải

Ta có $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(-1 + \Delta x) - f(-1)$

$$\frac{(-1 + \Delta x)^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1 - 2\Delta x + (\Delta x)^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - \Delta x.$$

Câu 2: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

A. $y' = 3\cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

B. $y' = -3\cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

C. $y' = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

D. $y' = -3\sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

Lời giải

Ta có $y' = \left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)' \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) = -3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

Câu 3: Đạo hàm của hàm số $y = e^{1-2x}$ là

A. $y' = 2e^{1-2x}$

B. $y' = -2e^{1-2x}$

C. $y' = \frac{1}{2}e^{1-2x}$

D. $y' = e^{1-2x}$

Lời giải

$$y' = (e^{1-2x})' = e^{1-2x} (1-2x)' = -2e^{1-2x}$$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$. Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm S là:

A. $S = \left\{0; \frac{2}{3}\right\}$.

B. $S = \left\{-\frac{2}{3}; 0\right\}$.

C. $S = \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$.

D. $S = \left\{-\frac{3}{2}; 0\right\}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{(x^3)'(x-1) - x^3(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2}.$$

$$\text{Phương trình } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Câu 5: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$ tại điểm $x = 1$.

A. $f'(1) = \frac{1}{2}$.

B. $f'(1) = 1$.

C. $f'(1) = 0$.

D. Không tồn tại.

Lời giải

Ta có $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

Tại $x = 1$ thì $f'(x)$ không xác định.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = x^2 + 3x - 1$ có đồ thị (C) . Xác định hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của đồ thị với trục Oy

A. -3 .

B. 2 .

C. 3 .

D. 4 .

Lời giải

Ta có $f'(x) = 2x + 3$.

Tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị với trục Oy có hoành độ tiếp điểm $x_0 = 0$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $x_0 = 0$ là $k = f'(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$

Vậy hệ số góc của tiếp tuyến đã cho bằng 3 .

Câu 7: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2$ tại điểm $M(2; 6)$ là.

A. $y = 12x - 18$.

B. $y = 12x + 18$.

C. $y = -12x + 18$.

D. $y = -12x - 18$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 3x^2$.

Tiếp điểm $M(2; 6)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $x_0 = 2$ là $k = f'(2) = 12$.

Vậy tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2$ tại điểm $M(2; 6)$ có phương trình:

$$y = 12(x - 2) + 6 \Leftrightarrow y = 12x - 18.$$

Câu 8: Hàm số $y = \tan x + \sqrt{3}$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ là

A. $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

B. $y' = \frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{3}$.

C. $y' = -\frac{1}{\cos^2 x}$.

D. $y' = -\frac{1}{\cos^2 x} + \sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ nên $y' = (\tan x + \sqrt{3})' = (\tan x)' + (\sqrt{3})' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Câu 9: Đạo hàm của hàm số $y = 4^{x^2+3}$ là

A. $y' = (x^2 + 3) \cdot 4^{x^2+3}$.

B. $y' = \ln 4 \cdot 4^{x^2+3}$.

C. $y' = 2x \cdot \ln 4 \cdot 4^{x^2+3}$.

D. $y' = 2x \cdot \ln 2 \cdot 2^{2x^2+6}$.

Lời giải

Đặt $u = x^2 + 3$, ta có $y = 4^u$. Khi đó $y'_u = (4^u)' = 4^u \cdot \ln 4; u'_x = 2x$

Theo công thức tính đạo hàm của hàm hợp, ta có:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 4^u \cdot \ln 4 \cdot 2x = 4^{x^2+3} \cdot \ln 4 \cdot 2x = 2x \cdot \ln 4 \cdot 4^{x^2+3}.$$

Câu 10: Hàm số $y = \cos^2 5x$ có đạo hàm là

A. $y' = 2 \cos 5x$.

B. $y' = 10 \cos 5x$.

C. $y' = -5 \sin 10x$.

D. $y' = 10 \sin 10x$.

Lời giải

Đặt $u = \cos 5x$, ta có $y = u^2$. Khi đó: $y'_u = 2u$; $u'_x = -5 \sin 5x$.

Theo công thức tính đạo hàm của hàm hợp, ta có:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 2u \cdot (-5 \sin 5x) = 2 \cdot \cos 5x \cdot (-5 \sin 5x) = -5 \cdot (2 \sin 5x \cdot \cos 5x) = -5 \sin 10x.$$

Câu 11: Một chất điểm chuyển động có phương trình $S = t^3 - 3t^2 - 9t + 5$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Gia tốc tại thời điểm vận tốc bị triệt tiêu là

A. $12m/s^2$.

B. $9m/s^2$.

C. $-9m/s^2$.

D. $-12m/s^2$.

Lời giải

Vận tốc tại thời điểm t của chất điểm được tính theo công thức $v(t) = S'(t) = 3t^2 - 6t - 9$.

Gia tốc tức thời t là $g(t) = v'(t) = 6t - 6$.

$$\text{Vận tốc triệt tiêu nên } 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -1(l) \end{cases}$$

Suy ra gia tốc tại thời điểm đó là: $g(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12(m/s^2)$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x) = \log_8 x$ với $x > 0$. Khi đó $f''(x)$ bằng

A. $\frac{1}{x^2 \ln 8}$

B. $\frac{-1}{3x^2 \ln 2}$

C. $\frac{1}{x \ln 8}$

D. $\frac{-1}{3x^2}$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 2024$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = -4x + \frac{4043}{2}$.

a) Đạo hàm của $f(x)$ là: $f'(x) = 2x^3 - 6x$

b) Hệ số góc của đường thẳng d là: 4

c) Gọi Δ là tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với d , khi đó hệ số góc của Δ là -4

d) Có hai tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với d

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

● Ý a) đúng.

● Ý b) sai. Hệ số góc của đường thẳng d là: -4

● Ý c) đúng. Vì hai đường thẳng song song thì hai hệ số góc bằng nhau.

● Ý d) sai.

Ta có $f'(x) = 2x^3 - 6x$. Gọi $M(x_0, y_0)$ là tọa độ tiếp điểm

Do tiếp tuyến Δ song song với đường thẳng d nên

$$f'(x_0) = -4 \Leftrightarrow 2x_0^3 - 6x_0 = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = \frac{4043}{2}$. Phương trình tiếp tuyến $y = -4x + \frac{4043}{2}(l)$ vì trùng d

Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 2020$. Phương trình tiếp tuyến $y = -4x + 2012(n)$

Câu 2: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

a) $y' = 3x^2 - 3x$.

b) $y'' = 6x - 6$.

c) Số nghiệm nguyên của bất phương trình $y' \leq 0$ là 7.

d) Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $\frac{y'}{y''} > 1$ trên đoạn $[-100; 100]$ bằng 5044.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a) $y' = 3x^2 - 6x$

b) $y'' = 6x - 6$

c) $y' \leq 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$. Suy ra bất phương trình có 3 nghiệm nguyên.

d) $\frac{y'}{y''} > 1 \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 6x}{6x - 6} > 1 \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 12x + 6}{6x - 6} > 0$.

Đặt $f(x) = \frac{3x^2 - 12x + 6}{6x - 6}$. Điều kiện $x \neq 1$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 12x + 6}{6x - 6} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$$

Bảng xét dấu.

x	$-\infty$	$2-\sqrt{2}$	1	$2+\sqrt{2}$	$+\infty$		
$3x^2-12x+6$	+	0	-	-	0	+	
$6x-6$	-		-	0	+		+
$\frac{3x^2-12x+6}{6x-6}$	-	0	+		-	0	+

x	$-\infty$	$2-\sqrt{2}$	1	$2+\sqrt{2}$	$+\infty$		
$3x^2-12x+6$	+	0	-		-	0	+
$6x-6$	-		-	0	+		+
$\frac{3x^2-12x+6}{6x-6}$	-	0	+		-	0	+

Suy ra tập nghiệm của bpt là $x \in (2 - \sqrt{2}; 1) \cup (2 + \sqrt{2}; +\infty)$.

Vì nghiệm nguyên trên đoạn $[-100; 100]$ nên $x \in \{4; 5; \dots; 100\}$.

Vậy tổng các nghiệm nguyên bằng $\frac{(4 + 100) \cdot 97}{2} = 5044$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \sin x - x$.

a) Đạo hàm của hàm số là $f'(x) = -\cos x - 1$.

b) $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

c) Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm là $S = \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

d) Có 3 giá trị nguyên của m để phương trình $f''(x) - m + 1 = 0$ có nghiệm.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) Sai

Ta có $f'(x) = \cos x - 1$

b) Sai

$$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

c) **Đúng** $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$

Tập nghiệm của phương trình là $S = \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

d) **Đúng** $f''(x) - m + 1 = 0 \Leftrightarrow f''(x) = m - 1 \Leftrightarrow -\sin x = m - 1 \Leftrightarrow \sin x = 1 - m$

Để phương trình có nghiệm thì $-1 \leq 1 - m \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$

Các giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m \in \{0; 1; 2\}$.

Câu 4: Một tài xế đang lái xe ô tô. Ngay khi phát hiện phía trước có vật cản, tài xế đã phanh gấp lại nhưng vẫn xảy ra va chạm, chiếc ô tô để lại vết trượt dài 24,24m (được tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi xảy ra va chạm). Trong quá trình đạp phanh, ô tô chuyển động theo phương trình $s(t) = 22t - \frac{3}{2}t^2$, trong đó s (m) là độ dài quãng đường đi được sau khi phanh, t (s) là thời gian tính từ lúc bắt đầu phanh ($0 \leq t \leq 5$).

a) Vận tốc tức thời của ô tô ngay khi đạp phanh là 22(m/s).

b) Ô tô không chạy quá tốc độ, biết tốc độ giới hạn cho phép trong khu vực ô tô đang di chuyển là 70km/h.

c) Thời điểm xảy ra va chạm cách thời điểm bắt đầu đạp phanh là 1,5s.

d) Vận tốc tức thời của ô tô ngay khi xảy ra va chạm là 18,4(m/s).

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) **Đúng**

Vận tốc tức thời của ô tô tại thời điểm t (s) là: $v(t) = s'(t) = 22 - 3t$ (m/s).

Vận tốc tức thời của ô tô ngay khi đạp phanh ($t = 0$ s) là:

$$v(0) = 22 - 3.0 = 22 \text{ (m/s)}.$$

b) Sai

Đổi $22 \text{ m/s} = 79,2 \text{ km/h} > 70 \text{ km/h}$.

Do đó ô tô chạy quá tốc độ giới hạn cho phép.

c) Sai

Khi xảy ra va chạm, ô tô đã đi được 24,24m kể từ khi đạp phanh nên ta có:

$$24,24 = 22t - \frac{3}{2}t^2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}t^2 - 22t + 24,24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1,2 \\ t = 13,47 \end{cases}.$$

Vì $0 \leq t \leq 5$ nên $t = 1, 2$ s.

d) Đúng

Vận tốc tức thời của ô tô ngay khi xảy ra va chạm ($t = 1, 2$ s) là:

$$v(1, 2) = 22 - 3 \cdot 1, 2 = 18, 4 \text{ (m/s)}.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \log_2(x^2 + 1)$, tính $f'(1)$

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1) \cdot \ln 2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Câu 2: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 6 \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng centimét. Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}$ (s) là $-\sqrt{a}$ (cm/s). Tìm a

Lời giải

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(s)$ là: $v(t) = s'(t) = 18 \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Vậy vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}$ (s) là:

$$v\left(\frac{\pi}{6}\right) = 18 \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = -9\sqrt{2} = -\sqrt{162} \text{ (cm/s)} \Rightarrow a = 162$$

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-2}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc -5 có dạng $y = ax + b$. Tìm $\min(a + b)$

Lời giải

Gọi $A(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

$$\text{Ta có: } y'(x_0) = -5 \Leftrightarrow \frac{-5}{(x_0 - 2)^2} = -5 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 3. \end{cases}$$

- Với $x_0 = 1$ ta được $y_0 = -3$, phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -5x + 2$

- Với $x_0 = 3$ ta được $y_0 = 7$, phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -5x + 22$

$$\text{Vậy } \min(a + b) = -5 + 2 = -3$$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \sin^2 x$. Số nghiệm thuộc $(0; 2\pi)$ của phương trình $2f(x) + f'''(x) = 0$ là bao nhiêu

Lời giải

$$f'(x) = 2 \sin x \cdot (\sin)' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

$$f'''(x) = 2 \cos 2x$$

$$2f(x) + f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 1 - \cos 2x + 2\cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Vì nghiệm thuộc $(0; 2\pi) \Rightarrow k = 0; k = 1$ thỏa mãn.

Số nghiệm thuộc $(0; 2\pi)$ của phương trình $2f(x) + f''(x) = 0$ là 2

Câu 5: Một vật chuyển động theo quy luật $S(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật chuyển động và S (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc vật bắt đầu chuyển động thì vận tốc lớn nhất của vật bằng bao nhiêu m/s?

Lời giải

Phương trình vận tốc chuyển động của vật là $v(t) = S'(t) = -t^2 + 12t$.

Ta có $v'(t) = -2t + 12 \Rightarrow v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

Suy ra bảng biến thiên của hàm số chỉ vận tốc của vật trong khoảng thời gian 10 giây đầu là:

x	0	6	10
$f(x)$	0	36	20

Vậy trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu mới chuyển động vận tốc lớn nhất của vật đạt được là $36(m/s)$ tại thời điểm $t = 6(s)$.

Câu 6: Sau khi phát hiện một dịch bệnh, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 35t^2 - \frac{5}{3}t^3$ (kết quả khảo sát trong 12 tháng liên tục). Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất bằng bao nhiêu người một ngày?

Lời giải

Ta có $f(t) = 35t^2 - \frac{5}{3}t^3 \Rightarrow f'(t) = -5t^2 + 70t; (t > 0)$

Vì hàm số $y = f'(t)$ là hàm số bậc hai có đồ thị là một parabol có bề lõm quay xuống nên đạt giá trị lớn nhất tại $t = -\frac{70}{2(-5)} = 7$.

Vậy vào ngày thứ 7 thì tốc độ truyền bệnh là nhanh nhất và tốc độ truyền bệnh lớn nhất bằng $f'(7) = -5.7^2 + 70.7 = 735$ (người/ngày) hay $a = 735$.

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2 + x + 1}$. Tính tổng các nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ (làm tròn tới hàng phần trăm).

Lời giải

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2 + x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{2\sqrt{x^3 - 2x^2 + x + 1}}$$

$$\text{Xét } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 4x + 1}{2\sqrt{x^3 - 2x^2 + x + 1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2x^2 + x + 1 > 0 \\ 3x^2 - 4x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 (tm) \\ x_2 = \frac{1}{3} (tm) \end{cases}$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ là $x_1 + x_2 = \frac{4}{3} \approx 1,33$

Câu 2: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{x-2} - 27$ song song với trục hoành?

Lời giải

Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm. Vì tiếp tuyến song song trục hoành nên tiếp tuyến có hệ số góc $y'(x_0) = 0$ và $y(x_0) \neq 0$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{2x^3 - 6x^2}{(x-2)^2}. \text{ Do đó } y'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2x_0^2(x_0 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 3 \end{cases}.$$

Ta có $y(0) = -27 \neq 0$ (nhận) và $y(3) = 0$ (loại vì khi đó tiếp tuyến trùng trục hoành).

Vậy chỉ có một tiếp tuyến thỏa mãn đề bài.

Câu 3: Có hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-2}{x-1}$ (C) đi qua điểm $A(9;0)$. Tính hệ số góc của hai tiếp tuyến đó bằng bao nhiêu (làm tròn tới hàng phần trăm).

Lời giải

$$y' = \frac{-1}{(x-1)^2}.$$

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ A ($x_0 \neq 1$).

$$\text{Phương trình tiếp tuyến là: } y = \frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{3x_0-2}{x_0-1}.$$

$$\text{Tiếp tuyến qua } A \Leftrightarrow \frac{x_0-9}{(x_0-1)^2} + \frac{3x_0-2}{x_0-1} = 0 \Leftrightarrow x_0 - 9 + (3x_0-2)(x_0-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = \frac{7}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Hai hệ số góc của hai tiếp tuyến kẻ từ } A \text{ là } y'(-1) \cdot y'\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{9}{64} \approx 0,14.$$

Câu 4: Một vật chuyển động với phương trình $S(t) = 4t^2 + t^3$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây, $S(t)$ tính bằng m . Tại thời điểm vận tốc của vật bằng $11(m/s)$ thì gia tốc của vật là bao nhiêu? (đơn vị m/s^2)

Lời giải

$$\text{Ta có: } v(t) = S'(t) = 8t + 3t^2 \text{ và } a(t) = v'(t) \Rightarrow a(t) = S''(t) = 6t + 8.$$

Theo đề bài, ta có: $v = 11(m/s) \Rightarrow 3t^2 + 8t = 11 \Rightarrow t = 1 \ (t > 0)$.

Vậy gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc của vật bằng 11 là

$$a(1) = 14(m/s^2) \Rightarrow x = 14.$$

Câu 5: Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = -\frac{1}{2}t^3 + 12t^2$, t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động, s (mét) là quãng đường vật chuyển động trong t giây. Tính vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 10$ (giây)

Lời giải

Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t (giây) là $v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 24t$

Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 10$ (giây) là $v(10) = s'(10) = 90$ (m/s).

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{x-1}$ có đồ thị là (H) . Biết tiếp tuyến của (H) song song với đường thẳng $d: y = -x$ có dạng $y = ax + b$. Tính $a + b$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$ với mọi $x \neq 1$.

Gọi d' là tiếp tuyến của (H) tại tiếp điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

Vì d' song song với đường thẳng $d: y = -x$ nên ta có $f'(x_0) = -1$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{(x_0-1)^2} = -1 \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0-1=1 \\ x_0-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=2 \\ x_0=0 \end{cases}.$$

Với $x_0 = 2$, phương trình tiếp tuyến tại $M_0(2; 2)$ có hệ số góc $f'(2) = -1$ là

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 2 = -1(x - 2) \Leftrightarrow y = -x + 4.$$

Với $x_0 = 0$, phương trình tiếp tuyến tại $N_0(0; 0)$ có hệ số góc $f'(0) = -1$ là

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 0 = -1(x - 0) \Leftrightarrow y = -x \text{ (loại vì trùng } d \text{)}.$$

Vậy tiếp tuyến của (H) song song với d' là $d: y = -x + 4$.

Tính được $a + b = -1 + 4 = 3$.



ĐẠO HÀM

ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG ĐỀ TEST SỐ 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(2) = -2$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ bằng

- A. 2. B. $\frac{1}{2}$. C. $-\frac{1}{2}$. D. -2.

Câu 2: Đạo hàm của hàm số $y = \sin x + \cos x + 2025$ bằng

- A. $y' = \sin x + \cos x$. B. $y' = \cos x - \sin x + 2025$.
C. $y' = \cos x - \sin x$. D. $y' = -\cos x + \sin x$.

Câu 3: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \pi^x$.

- A. $y' = x\pi^{x-1} \ln \pi$. B. $y' = \pi^x \ln \pi$. C. $y' = \frac{\pi^x}{\ln \pi}$. D. $y' = x\pi^{x-1}$.

Câu 4: Trên khoảng $(0; +\infty)$, hàm số $y = \log_3 x$ có đạo hàm là:

- A. $y' = \frac{x}{\ln 3}$. B. $y' = x \ln 3$. C. $y' = \frac{1}{x \ln 3}$. D. $y' = \frac{\ln 3}{x}$.

Câu 5: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 2}$.

- A. $y' = 1 + \frac{3}{(x+2)^2}$. B. $y' = \frac{x^2 + 6x + 7}{(x+2)^2}$. C. $y' = \frac{x^2 + 4x + 5}{(x+2)^2}$. D. $y' = \frac{x^2 + 8x + 1}{(x+2)^2}$.

Câu 6: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2 - 3x^2}$ bằng biểu thức nào sau đây?

- A. $\frac{-3x}{\sqrt{2 - 3x^2}}$. B. $\frac{1}{2\sqrt{2 - 3x^2}}$. C. $\frac{-6x^2}{2\sqrt{2 - 3x^2}}$. D. $\frac{3x}{\sqrt{2 - 3x^2}}$.

Câu 7: Hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 + 1$ tại điểm có hoành độ bằng -2 là

- A. $k = 1$. B. $k = 4$. C. $k = -20$. D. $k = -15$.

Câu 8: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C): $y = x^3 - 3x + 1$ tại giao điểm của (C) với trục Oy có phương trình là:

- A. $y = -3x + 1$. B. $y = 3x + 1$. C. $y = -3x + 3$. D. $y = x + 1$.

Câu 9: Đạo hàm của hàm số $y = \tan 3x$ bằng biểu thức nào sau đây?

- A. $\frac{3x}{\cos^2 3x}$. B. $-\frac{3}{\cos^2 3x}$. C. $\frac{3}{\cos^2 3x}$. D. $-\frac{3}{\sin^2 3x}$.

Câu 10: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_2(x + e^x)$.

- A. $\frac{1+e^x}{x+e^x}$. B. $\frac{1}{(x+e^x)\ln 2}$. C. $\frac{1+e^x}{\ln 2}$. D. $\frac{1+e^x}{(x+e^x)\ln 2}$.

Câu 11: Đạo hàm của hàm số $y = 5 \sin 3x - 7 \cos 4x$ là

- A. $y' = 15 \sin 3x - 28 \cos 4x$. B. $y' = 15 \cos 3x - 28 \sin 4x$.
C. $y' = 15 \cos 3x + 28 \sin 4x$. D. $y' = 5 \cos 3x + 7 \sin 4x$.

Câu 12: Cho chuyển động được xác định bởi phương trình $s = 2t^3 + 6t^2 - t$, trong đó t được tính bằng giây và s được tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3s$ là:

- A. $48(m/s)$. B. $89(m/s^2)$. C. $36(m/s^2)$. D. $48(m/s^2)$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$ có đồ thị là (C) .

- a) Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $M(0; -1)$ bằng 9.
b) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị đã cho tại điểm $M(0; -1)$ là $y = 9x - 1$.
c) Biết tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(0; -1)$ tạo với hai trục toạ độ một tam giác. Khi đó tam giác có diện tích bằng 18.
d) Hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến tại một điểm N trên đồ thị (C) bằng 12.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = x \ln x$ có đồ thị (C) .

- a) $f'(x) = x + \frac{1}{x}$.
b) $f'(1) = 1$.
c) Phương trình $f'(x) = 2$ có một nghiệm nguyên dương.
d) Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = e$ có phương trình $y = 2x - 2e$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 + 2$.

- a) Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 = 1$ là $f'(1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
b) Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là $f'(1) = 6$.
c) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là $y = 6x - 2$.
d) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

- Câu 4:** Một vật chuyển động trên đường thẳng được xác định bởi công thức $s(t) = t^3 - 3t^2 + 7t - 2$, trong đó $t > 0$ và tính bằng giây và s là quãng đường chuyển động được của vật trong t giây tính bằng mét. Khi đó:
- a) Quãng đường đi được của vật sau $t = 4s$ là $s = 42m$.
 - b) Tốc độ của vật tại thời điểm $t = 2$ là $7(m/s)$
 - c) Gia tốc của vật tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng $16m/s$ là $10(m/s^2)$
 - d) Thời điểm $t = 1$ (giây) tại đó vận tốc của chuyển động đạt giá trị nhỏ nhất

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

- Câu 1:** Một phản ứng hóa học tạo ra một chất B, có nồng độ $C(t)$ mol/l tại thời điểm t giờ được mô tả bởi hàm $C(t) = 5 - 5e^{-0,1t}$, $t \geq 0$. Giả sử khi tốc độ của phản ứng theo nồng độ giảm còn $\frac{1}{5}$ so với lúc ban đầu, nhà nghiên cứu dừng phản ứng để tránh lãng phí nguyên liệu. Hãy cho biết ở thời điểm đó nồng độ của chất B là bao nhiêu?
- Câu 2:** Cho hàm số $y = \frac{5x+1}{x-2}$ có đồ thị (C) . Biết $y = ax + b$ là phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất trong các tiếp tuyến có hoành độ tiếp điểm là số nguyên dương. Tính $3a + b$.
- Câu 3:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x + 1$ tại giao điểm của (C) với trục Oy có dạng: $y = ax + b$. Tính $2a + 5b$
- Câu 4:** Cho hàm số $f(x) = x^3 - 7x^2 + 10x + 2025$ có đồ thị (C) . Cho x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình sau: $f'(x) - 2xf''(x) + 25 = 0$.
- Tích các nghiệm của phương trình có dạng $-\frac{a}{b}$ (tối giản). Khi đó $a - 2b$ là:
- Câu 5:** Một xưởng sản xuất xác định rằng tổng chi phí của họ để sản xuất x mặt hàng là $C(x) = \sqrt{3x^2 + 20}$ (triệu đồng) và xưởng lên kế hoạch nâng sản lượng trong t tuần kể từ nay theo hàm số $x(t) = 5t + 8$. Chi phí sẽ tăng nhanh thế nào sau 2 tuần kể từ khi xưởng thực hiện kế hoạch đó (làm tròn đến hàng phần trăm, đơn vị: triệu đồng)?
- Câu 6:** Chuyển động của một vật gắn trên con lắc lò xo (khi bỏ qua ma sát và sức cản không khí) được cho bởi phương trình sau: $x(t) = 6\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$, trong đó x tính bằng centimet và thời gian t tính bằng giây. Tìm gia tốc tức thời của vật tại thời điểm vật có li độ $x = 3$ lần thứ nhất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị, đơn vị: (cm/s^2)).

PHẦN IV. Tự luận

- Câu 1:** Cho hàm số $f(x) = e^{x^2+3x}$. Tính $f'(0)$.
- Câu 2:** Cho hàm số $f(x) = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{12}\right)$. Tính $f''\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

- Câu 3:** Trên đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ có điểm M sao cho tiếp tuyến tại đó cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2. Khi đó M có tung độ là
- Câu 4:** Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 7x + 5$. Trên (C) tiếp tuyến tại điểm $M(a; b)$ song song với đường thẳng $y = -2x + 9$. Tính $a + b$?
- Câu 5:** Dân số của Việt Nam sau t năm tính từ năm 2023 được dự đoán theo công thức $N(t) = 100 \cdot e^{0.012t}$ với $N(t)$ tính theo đơn vị triệu người và $0 < t \leq 50$. Cho biết đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ gia tăng dân số của Việt Nam (đơn vị là triệu người/năm). Hỏi bắt đầu từ năm nào thì tốc độ gia tăng dân số hơn 2 triệu người/năm?
- Câu 6:** Sau khi phát hiện một dịch bệnh, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày phát hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = -t^3 + 45t^2 + 600t$, $t \in \mathbb{N}$, $t \leq 30$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0; 30]$ thì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Trong 30 ngày đầu tiên, có bao nhiêu ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn hơn 1200

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(2) = -2$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ bằng

- A. 2. B. $\frac{1}{2}$. C. $-\frac{1}{2}$. D. -2.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = -2$.

Câu 2: Đạo hàm của hàm số $y = \sin x + \cos x + 2025$ bằng

- A. $y' = \sin x + \cos x$. B. $y' = \cos x - \sin x + 2025$.
C. $y' = \cos x - \sin x$. D. $y' = -\cos x + \sin x$.

Lời giải

Ta có: $y' = \cos x + (-\sin x) = \cos x - \sin x$.

Câu 3: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \pi^x$.

- A. $y' = x\pi^{x-1} \ln \pi$. B. $y' = \pi^x \ln \pi$. C. $y' = \frac{\pi^x}{\ln \pi}$. D. $y' = x\pi^{x-1}$.

Lời giải

Áp dụng $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ ($a > 0, a \neq 1$).

Câu 4: Trên khoảng $(0; +\infty)$, hàm số $y = \log_3 x$ có đạo hàm là:

- A. $y' = \frac{x}{\ln 3}$. B. $y' = x \ln 3$. C. $y' = \frac{1}{x \ln 3}$. D. $y' = \frac{\ln 3}{x}$.

Lời giải

Ta có: $y' = (\log_3 x)' = \frac{1}{x \ln 3}$.

Câu 5: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 2}$.

- A. $y' = 1 + \frac{3}{(x+2)^2}$. B. $y' = \frac{x^2 + 6x + 7}{(x+2)^2}$. C. $y' = \frac{x^2 + 4x + 5}{(x+2)^2}$. D. $y' = \frac{x^2 + 8x + 1}{(x+2)^2}$.

Lời giải

Ta có: $y = x - \frac{3}{x+2} \Rightarrow y' = 1 + \frac{3}{(x+2)^2}$.

Câu 6: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2-3x^2}$ bằng biểu thức nào sau đây?

- A. $\frac{-3x}{\sqrt{2-3x^2}}$. B. $\frac{1}{2\sqrt{2-3x^2}}$. C. $\frac{-6x^2}{2\sqrt{2-3x^2}}$. D. $\frac{3x}{\sqrt{2-3x^2}}$.

Lời giải

Ta có: $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

$$f'(x) = \left(\sqrt{2-3x^2} \right)' = \frac{(2-3x^2)'}{2\sqrt{2-3x^2}} = \frac{-6x}{2\sqrt{2-3x^2}} = \frac{-3x}{\sqrt{2-3x^2}}.$$

- Câu 7:** Hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 + 1$ tại điểm có hoành độ bằng -2 là
A. $k = 1$. **B.** $k = 4$. **C.** $k = -20$. **D.** $k = -15$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 + 4x$.

Hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng -2 là

$$y'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) = 4.$$

- Câu 8:** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x + 1$ tại giao điểm của (C) với trục Oy có phương trình là:
A. $y = -3x + 1$. **B.** $y = 3x + 1$. **C.** $y = -3x + 3$. **D.** $y = x + 1$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 3$.

Giao điểm M của đồ thị hàm số (C) với trục Oy là $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại $M(0;1)$ là: $k = y'(0) = -3$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(0;1)$ là: $y = k(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = -3x + 1$.

- Câu 9:** Đạo hàm của hàm số $y = \tan 3x$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{3x}{\cos^2 3x}$. **B.** $-\frac{3}{\cos^2 3x}$. **C.** $\frac{3}{\cos^2 3x}$. **D.** $-\frac{3}{\sin^2 3x}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = (\tan 3x)' = \frac{(3x)'}{\cos^2 3x} = \frac{3}{\cos^2 3x}.$$

- Câu 10:** Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_2(x + e^x)$.

A. $\frac{1+e^x}{x+e^x}$. **B.** $\frac{1}{(x+e^x)\ln 2}$. **C.** $\frac{1+e^x}{\ln 2}$. **D.** $\frac{1+e^x}{(x+e^x)\ln 2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = \frac{(x+e^x)'}{(x+e^x)\ln 2} = \frac{1+e^x}{(x+e^x)\ln 2}.$$

- Câu 11:** Đạo hàm của hàm số $y = 5 \sin 3x - 7 \cos 4x$ là

A. $y' = 15 \sin 3x - 28 \cos 4x$. **B.** $y' = 15 \cos 3x - 28 \sin 4x$.
C. $y' = 15 \cos 3x + 28 \sin 4x$. **D.** $y' = 5 \cos 3x + 7 \sin 4x$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = 5 \cdot 3 \cos 3x + 7 \cdot 4 \sin 4x = 15 \cos 3x + 28 \sin 4x.$$

- Câu 12:** Cho chuyển động được xác định bởi phương trình $s = 2t^3 + 6t^2 - t$, trong đó t được tính bằng giây và s được tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3s$ là:

A. $48(m/s)$.

B. $89(m/s^2)$.

C. $36(m/s^2)$.

D. $48(m/s^2)$.

Lời giải

Ta có $v(t) = S'(t) = 6t^2 + 12t - 1 \Rightarrow a(t) = v'(t) = 12t + 12$.

Gia tốc của chuyển động khi $t = 3s$ là: $a(3) = 12.3 + 12 = 48(m/s^2)$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$ có đồ thị là (C).

a) Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $M(0; -1)$ bằng 9.

b) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị đã cho tại điểm $M(0; -1)$ là $y = 9x - 1$.

c) Biết tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(0; -1)$ tạo với hai trục toạ độ một tam giác. Khi đó tam giác có diện tích bằng 18.

d) Hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến tại một điểm N trên đồ thị (C) bằng 12.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

Gọi điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ là toạ độ tiếp điểm.

$$\text{Ta có: } y'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-(x^3 - x_0^3) + 3(x^2 - x_0^2) + 9(x - x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[-(x^2 + x.x_0 + x_0^2) + 3(x + x_0) + 9 \right] = -3x_0^2 + 6x_0 + 9$$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm M là $y'(x_0) = -3x_0^2 + 6x_0 + 9$.

a) Đúng

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $M(0; -1)$ bằng $y'(0) = 9$.

b) Đúng

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị đã cho tại điểm $M(0; -1)$ là: $y = 9(x - 0) - 1 \Leftrightarrow y = 9x - 1$

(Δ)

c) Sai

Ta có (Δ) cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại hai điểm $A\left(\frac{1}{9}; 0\right), B(0; -1)$ nên diện tích tam giác

OAB vuông tại O bằng: $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot 1 = \frac{1}{18}$ (đơn vị diện tích)

d) Đúng

Ta thấy, hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm N trên đồ thị là (C) một hàm số bậc 2 có đồ thị là một

parabol, có đỉnh $S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow S(1; 12)$ và hệ số $a = -3 < 0$ nên hàm số có giá trị lớn nhất

bằng

12 tại $x_0 = 1$. Vậy hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến là $y'(1) = 12$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = x \ln x$ có đồ thị (C).

- a) $f'(x) = x + \frac{1}{x}$.
 b) $f'(1) = 1$.
 c) Phương trình $f'(x) = 2$ có một nghiệm nguyên dương.
 d) Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = e$ có phương trình $y = 2x - 2e$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
--------	---------	--------	--------

a) Sai

$$f'(x) = (x \ln x)' = (x') \ln x + x \cdot (\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

b) Đúng

$$\text{Ta có: } f'(x) = \ln x + 1 \Rightarrow f'(1) = \ln 1 + 1 = 1.$$

c) Sai

$$f'(x) = 2 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 2 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

d) Sai

Gọi $M(x_0; f(x_0))$ là tiếp điểm của tiếp tuyến.

$$\text{Theo giả thiết } x_0 = e \Rightarrow f(x_0) = e \ln e = e$$

Mặt khác: $f'(e) = \ln e + 1 = 2$. Do đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(e; e)$

$$\text{là: } y = 2(x - e) + e \Leftrightarrow y = 2x - e.$$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 + 2$.

- a) Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 = 1$ là $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.
 b) Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là $f'(1) = 6$.
 c) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là $y = 6x - 2$.
 d) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) Sai.

$$\text{Đạo hàm của hàm số } y = f(x) \text{ tại điểm } x_0 = 1 \text{ là } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

b) Đúng.

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 = 1$ là

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^3 + 2) - (2 \cdot 1^3 + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2(x^2 + x + 1) = 6.$$

Do đó hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 = 1$ là $f'(1) = 6$.

c) Đúng.

Khi $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 2.1^3 + 2 = 4$. Do đó tiếp điểm là điểm $M(1;4)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $M(1;4)$ là $f'(1) = 6$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(1;4)$ là: $y = 6(x-1) + 4$ hay $y = 6x - 2$.

d) Sai.

Với x_0 bất kì, ta có

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(2x^3 + 2) - (2x_0^3 + 2)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{(x - x_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (2(x^2 + xx_0 + x_0^2)) = 6x_0^2. \end{aligned}$$

Gọi $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ là hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Khi đó:

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm A là $f'(x_A) = 6x_A^2$.

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm B là $f'(x_B) = 6x_B^2$.

Để tiếp tuyến tại A và B vuông góc với nhau thì $f'(x_A) \cdot f'(x_B) = -1 \Leftrightarrow 6x_A^2 \cdot 6x_B^2 = -1$ (vô lý)

Vậy không tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ vuông góc với nhau.

Câu 4: Một vật chuyển động trên đường thẳng được xác định bởi công thức $s(t) = t^3 - 3t^2 + 7t - 2$, trong đó $t > 0$ và tính bằng giây và s là quãng đường chuyển động được của vật trong t giây tính bằng mét. Khi đó:

a) Quãng đường đi được của vật sau $t = 4s$ là $s = 42m$.

b) Tốc độ của vật tại thời điểm $t = 2$ là $7(m/s)$

c) Gia tốc của vật tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng $16m/s$ là $10(m/s^2)$

d) Thời điểm $t = 1$ (giây) tại đó vận tốc của chuyển động đạt giá trị nhỏ nhất

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Ta có: $s(4) = 42m$

b) Ta có: $s'(t) = 3t^2 - 6t + 7$ và $s''(t) = 6t - 6$.

Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ là: $v(2) = s'(2) = 3.2^2 - 6.2 + 7 = 7(m/s)$.

c) Vận tốc của chuyển động bằng $16m/s^2$ tại thời điểm t nghĩa là:

$$v(t) = s'(t) = 16 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t + 7 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -1 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ là: $a(3) = v'(3) = s''(3) = 6.3 - 6 = 12(m/s^2)$.

d) Vận tốc của chuyển động có phương trình $v(t) = 3t^2 - 6t + 7$ là một parabol, có đỉnh

$$S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow S(1;4) \text{ và hệ số } a = 3 > 0 \text{ nên hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng } 4 \text{ tại } t = 1.$$

Vậy tại thời điểm $t = 1$ thì vận tốc của chuyển động đạt giá trị nhỏ nhất bằng $4(m/s)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Một phản ứng hóa học tạo ra một chất B, có nồng độ $C(t)$ mol / l tại thời điểm t giờ được mô tả bởi hàm $C(t) = 5 - 5e^{-0,1t}$, $t \geq 0$. Giả sử khi tốc độ của phản ứng theo nồng độ giảm còn $\frac{1}{5}$ so với lúc ban đầu, nhà nghiên cứu dừng phản ứng để tránh lãng phí nguyên liệu. Hãy cho biết ở thời điểm đó nồng độ của chất B là bao nhiêu?

Lời giải

Tốc độ phản ứng của nồng độ là: $C'(t) = -5 \cdot (-0,1) \cdot e^{-0,1t} = 0,5 \cdot e^{-0,1t}$

Tại thời điểm ban đầu, tốc độ của phản ứng là: $C'(0) = 0,5 \cdot e^{-0,1 \cdot 0} = 0,5$.

Khi tốc độ phản ứng giảm còn $\frac{1}{5}$ so với lúc ban đầu thì:

$$C'(t) = 0,5 \cdot e^{-0,1t} = 0,1 \Rightarrow e^{-0,1t} = \frac{1}{5} \Rightarrow -0,1t = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow t = -10 \ln\left(\frac{1}{5}\right)$$

Tại thời điểm đó, ta có nồng độ của chất B là: $C\left(-10 \cdot \ln \frac{1}{5}\right) = 5 - 5e^{-0,1 \cdot (-10) \ln \frac{1}{5}} = 4$ mol / l.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{5x+1}{x-2}$ có đồ thị (C) . Biết $y = ax + b$ là phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất trong các tiếp tuyến có hoành độ tiếp điểm là số nguyên dương. Tính $3a + b$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = f'(x) = \frac{-11}{(x-2)^2}.$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ có dạng $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

Ta có $f'(x_0) = \frac{-11}{(x_0 - 2)^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $(x_0 - 2)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất mà x_0 phải là số

nguyên dương khác 2 nên $x_0 = 3$ thỏa mãn yêu cầu.

$$\text{Với } x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 16$$

Khi đó phương trình tiếp tuyến là: $y = -11(x - 3) + 16 \Leftrightarrow y = -11x + 49$.

$$\Rightarrow a = -11; b = 49 \Rightarrow 3a + b = 3 \cdot (-11) + 49 = 16$$

Câu 3: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x + 1$ tại giao điểm của (C) với trục Oy có dạng: $y = ax + b$. Tính $2a + 5b$

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 3.$$

Giao điểm M của đồ thị hàm số (C) với trục Oy là $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại $M(0;1)$ là: $k = y'(0) = -3$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(0;1)$ là: $y = k(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = -3x + 1$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 7x^2 + 10x + 2025$ có đồ thị (C) . Cho x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình sau: $f'(x) - 2xf''(x) + 25 = 0$.

Tích các nghiệm của phương trình có dạng $-\frac{a}{b}$ (tối giản). Khi đó $a - 2b$ là:

Lời giải

$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 10, f''(x) = 6x - 14$$

$$\text{Khi đó } f'(x) - 2xf''(x) + 25 = 0 \Leftrightarrow (3x^2 - 14x + 10) - 2x(6x - 14) + 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 14x - 35 = 0$$

$$\text{Tích các nghiệm của phương trình là: } x_1 \cdot x_2 = -\frac{35}{9}$$

$$\text{Vậy } a - 2b = 35 - 2 \cdot 9 = 17$$

Câu 5: Một xưởng sản xuất xác định rằng tổng chi phí của họ để sản xuất x mặt hàng là $C(x) = \sqrt{3x^2 + 20}$ (triệu đồng) và xưởng lên kế hoạch nâng sản lượng trong t tuần kể từ nay theo hàm số $x(t) = 5t + 8$. Chi phí sẽ tăng nhanh thế nào sau 2 tuần kể từ khi xưởng thực hiện kế hoạch đó (làm tròn đến hàng phần trăm, đơn vị: triệu đồng)?

Lời giải

Tốc độ tăng chi phí theo thời gian là:

$$C'(t) = C'(x) \cdot x'(t).$$

Ta có:

$$C'(x) = \frac{(3x^2 + 20)'}{2\sqrt{3x^2 + 20}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 20}}; x'(t) = 5$$

$$\Rightarrow C'(t) = 5 \cdot \frac{3(5t + 8)}{\sqrt{3(5t + 8)^2 + 20}} = \frac{15(5t + 8)}{\sqrt{3(5t + 8)^2 + 20}}.$$

Tốc độ tăng chi phí của xưởng sau 2 tuần kể từ khi thực hiện kế hoạch đó là:

$$C(2) = \frac{15(5 \cdot 2 + 8)}{\sqrt{3(5 \cdot 2 + 8)^2 + 20}} \approx 8,57.$$

Câu 6: Chuyển động của một vật gắn trên con lắc lò xo (khi bỏ qua ma sát và sức cản không khí) được cho bởi phương trình sau: $x(t) = 6 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$, trong đó x tính bằng centimet và thời gian t tính bằng giây. Tìm gia tốc tức thời của vật tại thời điểm vật có li độ $x = 3$ lần thứ nhất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị, đơn vị: (cm/s^2)).

Lời giải

$$\text{Vận tốc của vật tại thời điểm } t \text{ là } v(t) = x'(t) = -12\pi \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{Gia tốc của vật tại thời điểm } t \text{ là } a(t) = v'(t) = -24\pi \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{6}\right).$$

Tại thời điểm vật có li độ $x = 3$, ta có:

$$3 = 6 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi t - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2\pi t - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{4} + k \\ t = -\frac{1}{12} + k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Với $t = \frac{1}{4} + k$, $k = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{4}$.

Với $t = -\frac{1}{12} + k$, $k = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{12}$ (loại), $k = 1 \Rightarrow t = \frac{11}{12}$.

Do đó, từ thời điểm $t = 0$, vật có li độ $x = 3$ lần đầu tiên tại thời điểm $t = \frac{1}{4}$. Gia tốc của vật tại

thời điểm $t = \frac{1}{4}$ là:

$$a\left(\frac{1}{4}\right) = -24\pi \cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = -12\pi \approx -38 \text{ (cm/s}^2\text{)}.$$

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = e^{x^2+3x}$. Tính $f'(0)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = (2x+3)e^{x^2+3x} \Rightarrow f'(0) = 3 \cdot e^0 = 3$

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{12}\right)$. Tính $f''\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = -2\cos\left(2x + \frac{\pi}{12}\right) \Rightarrow f''(x) = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{12}\right) \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{24}\right) = 4\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$

Câu 3: Trên đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ có điểm M sao cho tiếp tuyến tại đó cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2. Khi đó M có tung độ là

Lời giải

Ta có $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$.

Gọi $M\left(x_0; \frac{1}{x_0-1}\right)$, $x_0 \neq 1$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M : $y - \frac{1}{x_0-1} = -\frac{1}{(x_0-1)^2}(x - x_0)$.

Cho $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{x_0-1} + \frac{x_0}{(x_0-1)^2} = \frac{2x_0-1}{(x_0-1)^2}$. Suy ra tiếp tuyến cắt trục tung tại $A\left(0; \frac{2x_0-1}{(x_0-1)^2}\right)$.

Cho $y = 0 \Rightarrow x - x_0 = x_0 - 1 \Rightarrow x = 2x_0 - 1$. Suy ra tiếp tuyến cắt trục hoành tại $B(2x_0 - 1; 0)$

$$S_{\Delta OAB} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}OA \cdot OB = 2 \Leftrightarrow \frac{|2x_0-1|}{(x_0-1)^2} \cdot |2x_0-1| = 4 \Leftrightarrow x_0 = \frac{3}{4} \Rightarrow y_M = \frac{1}{\frac{3}{4}-1} = -4.$$

Câu 4: Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 7x + 5$. Trên (C) tiếp tuyến tại điểm $M(a; b)$ song song với đường thẳng $y = -2x + 9$. Tính $a + b$?

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + 7$.

Trên (C) tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = -2x + 9$ có hệ số góc $k = -2$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm $\Rightarrow k = y'(x_0) = -2$.

$$\Rightarrow 3x_0^2 - 12x_0 + 7 = -2 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 7 \\ x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = -1 \end{cases}$$

TH1: Tại điểm $(1; 7)$ thì phương trình tiếp tuyến là $y = -2(x - 1) + 7 \Rightarrow y = -2x + 9$ (Loại)

TH2: Tại điểm $(3; -1)$ thì phương trình tiếp tuyến là $y = -2(x - 3) - 1 \Rightarrow y = -2x + 5$ (**Nhận**)

Vậy $M(3; -1) \Rightarrow a + b = 3 - 1 = 2$

Câu 5: Dân số của Việt Nam sau t năm tính từ năm 2023 được dự đoán theo công thức $N(t) = 100 \cdot e^{0,012t}$ với $N(t)$ tính theo đơn vị triệu người và $0 < t \leq 50$. Cho biết đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ gia tăng dân số của Việt Nam (đơn vị là triệu người/năm). Hỏi bắt đầu từ năm nào thì tốc độ gia tăng dân số hơn 2 triệu người/năm?

Lời giải

Ta có $N'(t) = 1,2e^{0,012t}$.

Tốc độ gia tăng dân số hơn 2 triệu người/năm khi

$$N'(t) > 2 \Leftrightarrow 1,2e^{0,012t} > 2 \Leftrightarrow e^{0,012t} > \frac{2}{1,2} \Leftrightarrow 0,012t > \ln \frac{2}{1,2} \Leftrightarrow t > \frac{1}{0,012} \cdot \ln \frac{2}{1,2} \approx 42,6.$$

Vậy bắt đầu từ năm 2066 thì tốc độ gia tăng dân số hơn 2 triệu người/năm.

Câu 6: Sau khi phát hiện một dịch bệnh, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày phát hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = -t^3 + 45t^2 + 600t$, $t \in \mathbb{N}$, $t \leq 30$. Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0; 30]$ thì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Trong 30 ngày đầu tiên, có bao nhiêu ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn hơn 1200?

Lời giải

Ta có $f'(t) = -3t^2 + 90t + 600$.

Tốc độ truyền bệnh lớn hơn 1200 khi

$$f'(t) > 1200 \Leftrightarrow -3t^2 + 90t + 600 > 1200 \Leftrightarrow -3t^2 + 90t - 600 > 0 \Leftrightarrow 10 < t < 20.$$

Vậy có 9 ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn hơn 1200.