

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

Môn thi : **TOÁN LỚP 11**

Thời gian : **150 phút** (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi : 20/3/2021

Câu 1 (3,0 điểm). Giải các phương trình sau:

a) $4\cos^2 x - 4\cos 2x \cdot \cos^2 x - 6\sin x \cdot \cos x + 1 = 0$

b) $\sin^3 x + \cos^4 x = 1$

Câu 2 (4,0 điểm).

a) Cho dãy số gồm có ba số hạng u_1, u_2, u_3 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Nếu ta trừ số hạng thứ ba cho 4 thì dãy thu được là một cấp số cộng. Nếu trừ số hạng thứ hai và thứ ba của cấp số cộng vừa thu được cho 1 thì dãy thu được là một cấp số nhân. Tìm dãy số u_1, u_2, u_3 .

b) Cho dãy số (u_n) , biết: $u_0 = 1, u_1 = 1$ và $n(n+1)u_{n+1} = n(n-1)u_n - (n-2)u_{n-1}, \forall n \geq 1$.

Chứng tỏ rằng $(n+1) \cdot u_{n+1} - u_n = 0, \forall n \geq 1$ và tính tổng $S = \frac{u_0}{u_1} + \frac{u_1}{u_2} + \dots + \frac{u_{2020}}{u_{2021}}$.

Câu 3 (6,0 điểm).

a) Cho số nguyên dương n . Chứng minh rằng: $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

b) Gọi X là tập hợp tất cả các số tự nhiên có năm chữ số được lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập X . Tính xác suất để số được chọn có đúng ba chữ số giống nhau.

c) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{a(x^2-2)}{x-3} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$.

Tìm giá trị của tham số a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Câu 4 (3,0 điểm).

a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai đường tròn (C) và (C') với phương trình $(C'): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$. Biết rằng phép vị tự tâm $A(0;1)$ tỉ số $k = 2$ biến đường tròn (C) thành đường tròn (C') . Viết phương trình đường tròn (C) .

b) Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC đều. Tìm tập hợp những điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho $MA^2 = MB^2 + MC^2$.

Câu 5 (4,0 điểm).

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = a, AC = 2a, AA' = 2a\sqrt{5}$ và góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh CC' .

a) Chứng minh MB vuông góc với MA' .

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BM)$ theo a .

Hết

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Môn thi: **TOÁN – Lớp 11**

ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM

(Đáp án – Thang điểm gồm 06 trang)

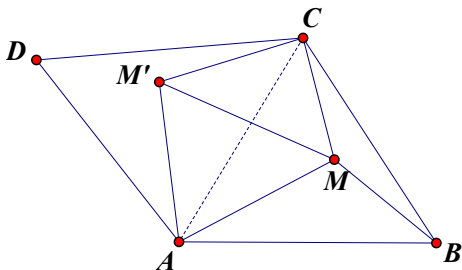
Câu 1 (3,0 điểm)		
a	$4\cos^2 x - 4\cos 2x \cdot \cos^2 x - 6\sin x \cos x + 1 = 0$	1,5
	$\text{pt} \Leftrightarrow 4\cos^2 x(1 - \cos 2x) - 3\sin 2x + 1 = 0$	0.25
	$\Leftrightarrow 2(1 + \cos 2x)(1 - \cos 2x) - 3\sin 2x + 1 = 0$	0.25
	$\Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 2x) - 3\sin 2x + 1 = 0$	0.25
	$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x - 3\sin 2x + 1 = 0$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (0.25) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad (0.5)$	0.75
b	$\sin^3 x + \cos^4 x = 1$	1,5
	$\sin^3 x + \cos^4 x = 1 \Leftrightarrow \sin^3 x + \cos^4 x = \sin^2 x + \cos^2 x$	0.25
	$\Leftrightarrow \sin^2 x(1 - \sin x) + \cos^2 x(1 - \cos^2 x) = 0$	0.25
	$\Leftrightarrow \sin^2 x(1 - \sin x) + \sin^2 x(1 - \sin^2 x) = 0$	0.25
	$\Leftrightarrow \sin^2 x(1 - \sin x)(2 + \sin x) = 0$	0.25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$	0.5
	Vậy phương trình có nghiệm là: $x = k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$	

Câu 2 (4,0 điểm)		
a	Cho dãy số gồm có ba số hạng u_1, u_2, u_3 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Nếu ta trừ số hạng thứ ba cho 4 thì dãy thu được là một cấp số cộng. Nếu trừ số hạng thứ hai và thứ ba của cấp số cộng vừa thu được cho 1 thì dãy thu được lại là một cấp số nhân. Tìm dãy số u_1, u_2, u_3 .	2,0
	u_1, u_2, u_3 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân $\Leftrightarrow u_2^2 = u_1 \cdot u_3$ (1)	0.25
	$u_1, u_2, u_3 - 4$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow 2u_2 = u_1 + u_3 - 4$ (2)	0.25
	$u_1, u_2 - 1, u_3 - 5$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân $\Leftrightarrow (u_2 - 1)^2 = u_1 \cdot (u_3 - 5)$ (3)	0.25

	$+ \text{Ta có hệ } \begin{cases} u_2^2 = u_1 \cdot u_3 & (1) \\ 2u_2 = u_1 + u_3 - 4 & (2) \\ (u_2 - 1)^2 = u_1 \cdot (u_3 - 5) & (3) \end{cases}$	
	Từ (1) và (3) suy ra $u_1 = \frac{2u_2 - 1}{5}$ (4) Từ (2) và (4) suy ra $u_3 = \frac{8u_2 + 21}{5}$ (5)	0.5
	Thay (4), (5) vào (1) thu được PT: $9u_2^2 - 34u_2 + 21 = 0 \Leftrightarrow u_2 = 3, u_2 = \frac{7}{9}$	0.5
	Vậy có 2 dãy số thỏa đề bài là 1; 3; 9 hoặc $\frac{1}{9}; \frac{7}{9}; \frac{49}{9}$	0,25
b	Dãy số (u_n), biết: $u_0 = 1, u_1 = 1$ và $n(n+1)u_{n+1} = n(n-1)u_n - (n-2)u_{n-1}, \forall n \geq 1$. Chứng tỏ rằng $(n+1)u_{n+1} - u_n = 0, \forall n \geq 1$. Tính tổng $S = \frac{u_0}{u_1} + \frac{u_1}{u_2} + \dots + \frac{u_{2020}}{u_{2021}}$	2,0
	Từ công thức xác định của dãy ta có: $n[(n+1)u_{n+1} - u_n] = (n-2)(nu_n - u_{n-1}), \forall n \geq 1$ Thay $n = 1$ ta được: $2u_2 - u_1 = 0$ (và $n = 2$ suy ra $3u_3 - u_2 = 0$)	0.25 0,25
	Giả sử $(k+1)u_{k+1} - u_k = 0, \forall k > 1$ Suy ra $(k+2)u_{k+2} - u_{k+1} = \frac{k-1}{k+1}[(k+1)u_{k+1} - u_k] = 0$ Vậy $(n+1)u_{n+1} - u_n = 0, \forall n \geq 1$	0.5
	Tính $\frac{u_0}{u_1} = 1; \frac{u_1}{u_2} = 2$ Từ $(n+1)u_{n+1} - u_n = 0, \forall n \geq 2$ suy ra $\frac{u_n}{u_{n+1}} = n+1$ Suy ra $S = \frac{u_0}{u_1} + \frac{u_1}{u_2} + \dots + \frac{u_{2020}}{u_{2021}} = 1 + 2 + \dots + 2021$	0.25 0.25 0,25
	$\Leftrightarrow S = \frac{2021 \cdot 2022}{2} = 2021 \cdot 1011 (= 2043231)$	0.25

Câu 3 (6,0 điểm)		
a	Cho số nguyên dương n . Chứng minh rằng: $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$	2,0
	Xét khai triển: $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1x + \dots + C_{2n}^n x^n + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n}$ (1)	0.5
	Mặt khác: $(1+x)^{2n} = (1+x)^n \cdot (x+1)^n$ $= (C_n^0 + C_n^1x + \dots + C_n^n x^n)(C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^n)$ (2)	0.75
	Hệ số của x^n trong (1) là C_{2n}^n	0.25
	Hệ số của x^n trong (2) là $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2$	0.25
	Vậy: $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$	0.25

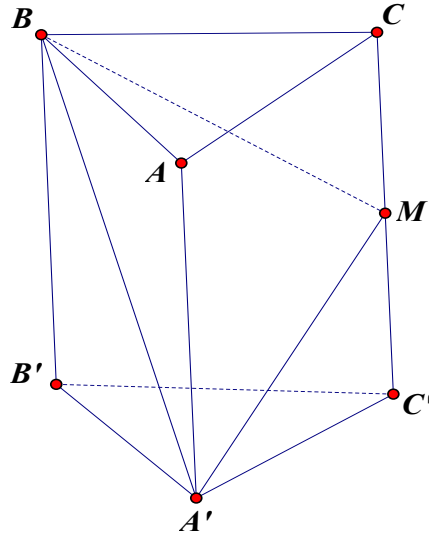
b	Gọi X là tập hợp tất cả các số tự nhiên có năm chữ số được lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5. Chọn ngẫu nhiên từ X ra một số. Tính xác suất để số được chọn có đúng ba chữ số giống nhau.	2,0
	- Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 5.6^4$ Gọi A là biến cố: “số được chọn có đúng 3 chữ số giống nhau”.	0.5
	- Có C_5^3 cách chọn 3 vị trí trong 5 vị trí để đặt 3 chữ số giống nhau. Có 6 cách chọn 1 trong 6 chữ số đặt vào 3 vị trí được chọn(gọi số xuất hiện 3 lần là a); 5 cách chọn b; 5 cách chọn c Số có 5 chữ số thỏa yêu cầu đề bài (bao gồm cả số 0 đứng đầu) là: $C_5^3 .6.5.5$	0.5
	* Trường hợp có số 0 đứng đầu, ta xét 4 số còn lại: Khả năng 1: (Có 3 số giống nhau khác 0) có C_4^3 vị trí đặt 3 số giống nhau; có 5 cách chọn 3 số giống nhau a; 5 cách chọn b(b khác a) Trường hợp này có $C_4^3 .5.5$	0.25
	* Khả năng 2: (3 số giống nhau là 3 số 0). Có C_4^2 cách chọn 2 vị trí để đặt thêm 2 số 0; có 5 cách chọn b; 5 cách chọn c Trường hợp này là: $C_4^2 .5.5$	0.25
	$n(A) = C_5^3 .6.5.5 - C_4^3 .5.5 - C_4^2 .5.5 = 1250$	0.25
	Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1250}{6480} = \frac{125}{648}$	0.25
c	Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{a(x^2-2)}{x-3} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$. Tìm giá trị của tham số a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.	2,0
	$f(1) = \frac{1}{2}a$	0,25
	$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{2}a$	0,25
	$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(x-1)}{(x^2-1)(\sqrt{3x+1}+2)}$	0,5
	$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3}{(x+1)(\sqrt{3x+1}+2)} = \frac{3}{8}$	0,5
	Để $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ thì $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$	0,25
	Suy ra $a = \frac{3}{4}$	0,25

Câu 4 (3,0 điểm)		
a	Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai đường tròn (C) và (C') với phương trình $(C'): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$. Biết rằng phép vị tự tâm $A(0;1)$ tỉ số $k = 2$ biến đường tròn (C) thành đường tròn (C') . Viết phương trình đường tròn (C) .	1,5
	+ Phép vị tự tâm A tỉ số $k = 2$ biến (C) thành (C') $\Leftrightarrow$ Phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{1}{2}$ biến (C') thành (C)	0.25
	+ Đường tròn (C') có tâm $I'(2;-1)$, bán kính $R' = 4$.	0.25
	+ Gọi đường tròn (C) có tâm I , bán kính R là ảnh của đường tròn (C') qua phép vị tự $V_{\left(A, \frac{1}{2}\right)}$.	0.25
	+ $R = k .R' = \left \frac{1}{2}\right .4 = 2$	0.25
	+ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}.\overrightarrow{AI'} = (1;-1)$. Tính được điểm $I(1; 0)$	0.25
	Phương trình đường tròn (C) là : $(x-1)^2 + y^2 = 4$.	0.25
b	Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC đều. Tìm tập hợp những điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho $MA^2 = MB^2 + MC^2$	1,5
	 Trong hình vẽ bên, xét phép quay tâm A, góc quay 60°. Ta có : $Q_{(A, 60^\circ)} : B \mapsto C$ $C \mapsto D$ $M \mapsto M'$ Suy ra các tam giác AMM', ACD đều	0,25
	Giả thiết : $MA^2 = MB^2 + MC^2$ $\Leftrightarrow M'M^2 = M'C^2 + MC^2$ $\Leftrightarrow \angle MCM' = 90^\circ$	0,25 0,25
	Mặt khác có $\angle MBC + \angle MCB = \angle M'CD + \angle MCB$ $= \angle DCB - \angle M'CM = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$ Suy ra $\angle BMC = 150^\circ$	0.25 0.25
	Vậy tập hợp những điểm M là phần nằm trong tam giác của cung chứa góc 150° chắn trên đoạn BC	0.25

Câu 5 (4,0 điểm)

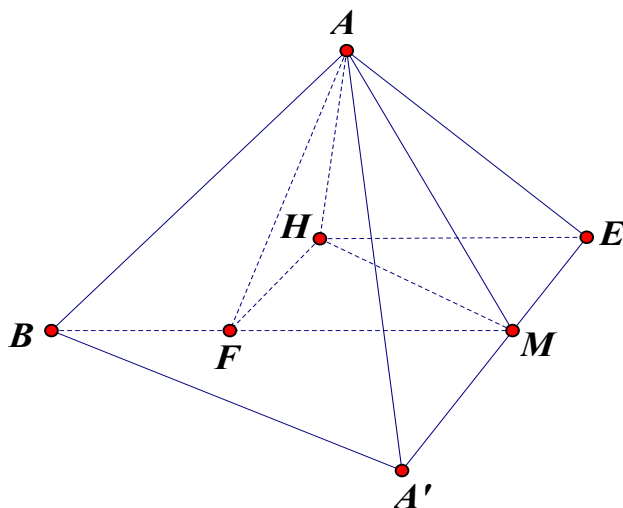
Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = a, AC = 2a, AA' = 2a\sqrt{5}$ và góc $\angle BAC = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh CC' .

- a) Chứng minh MB vuông góc với MA' .
b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BM)$ theo a .



(Hình vẽ phục vụ câu a - 0,25 điểm)

a	Chứng minh MB vuông góc với MA' .	1,75
	+ Xét tam giác ABC , theo định lí hàm số Cosin ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A$ $= a^2 + (2a)^2 - 2.a.(2a).\cos 120^\circ = 7a^2$	0,5
	+ Xét tam giác vuông BCM có: $BM^2 = BC^2 + CM^2 = 7a^2 + 5a^2 = 12a^2$	0,25
	+ Xét tam giác vuông $A'C'M$ có: $A'M^2 = A'C'^2 + C'M^2 = 4a^2 + 5a^2 = 9a^2$	0,25
	+ Xét tam giác vuông $A'AB$ có: $A'B^2 = A'A^2 + AB^2 = 20a^2 + a^2 = 21a^2$	0,25
	Suy ra $A'M^2 + MB^2 = 21a^2 = A'B^2$ hay $MB \perp A'M$	0,5
b	Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BM)$ theo a .	2,0
		0,25



Gọi H là hình chiếu của A trên mặt phẳng (A'BM). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H trên MA' và BM. Suy ra AH là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (A'BM).

0,25

Ta có

$$AH^2 = MA^2 - A'H^2 = A'A^2 - (HE^2 + HF^2) = MA^2 - (AE^2 - AH^2 + AF^2 - AH^2)$$

0,25

Suy ra: $AH^2 = AE^2 + AF^2 - MA^2$

0,25

Tính AE: có $AE = 2d(C, A'M) = 2 \frac{2.A'C'.C'M}{A'M} = \frac{2.2a.a\sqrt{5}}{3a} = \frac{4a\sqrt{5}}{3}$

0,25

Tính AF: Xét tam giác ABM, có $BM = 2a\sqrt{3}$, $AB=a$, $AM=A'M=3a$

$$\cos \angle BAM = \frac{a^2 + 9a^2 - 12a^2}{2a.3a} = -\frac{1}{3}$$

0,25

Suy ra: $\sin \angle BAM = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAM} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ và

$$S_{ABM} = \frac{1}{2} AB.AM.\sin \angle BAM = \frac{1}{2}.a.3a.\frac{2\sqrt{2}}{3} = a^2\sqrt{2}$$

Suy ra: $AF = \frac{2S_{ABM}}{BM} = \frac{2.a^2\sqrt{2}}{2a\sqrt{3}} = a\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

0,25

$$AH^2 = AE^2 + AF^2 - MA^2 = \left(\frac{4a\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 - (3a)^2 = \left(\frac{a\sqrt{5}}{3}\right)^2$$

0,25

Vậy $d(A, mp(A'BM)) = \frac{a\sqrt{5}}{3}$

Ghi chú: Nếu học sinh có cách giải khác đúng thì Ban Giám khảo thảo luận và thống nhất thang điểm cho phù hợp với Hướng dẫn chấm.