TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

XUẤT BẢN TỪ 1964

9 2018
Số 495

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 55
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: (024)35121607; ĐT - Fax Phát hành, Trị sự: (024) 35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com Website: http://www.nxbgd.vn/toanhoctuoitre



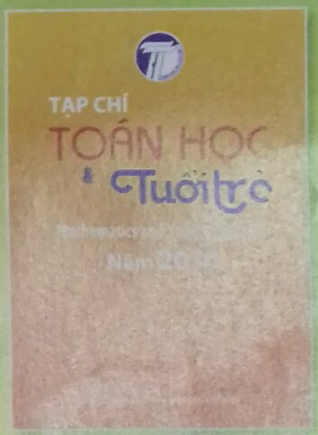
Nhà toán học Ấn Độ **Brahmagupta** (598 - 668 SCN)

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

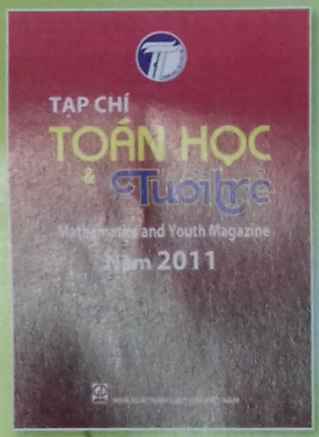
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Bộ đóng tập

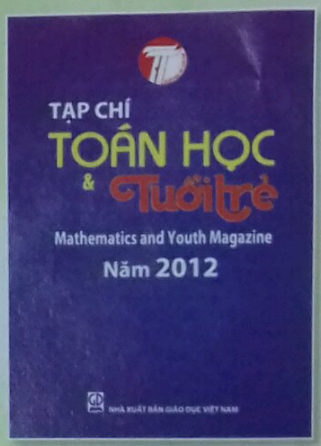
TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ HÀNG NĂM



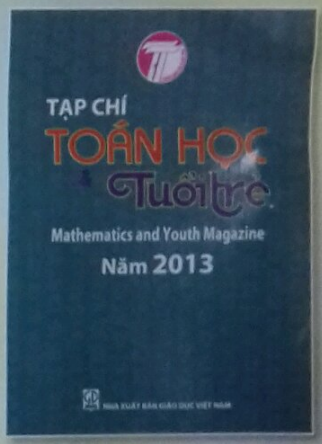
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 99.000 đồng



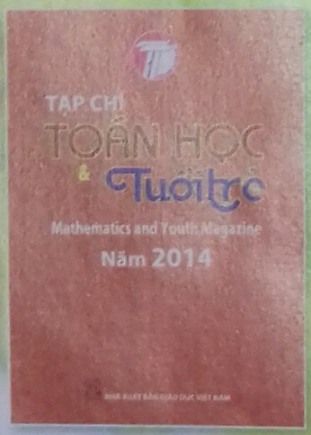
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 126.000 đồng



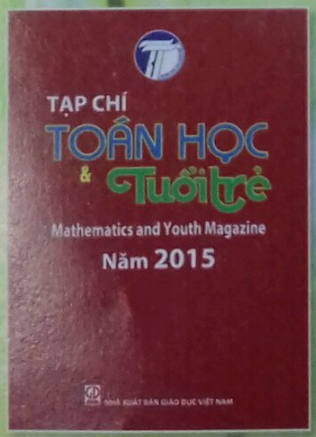
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 152.000 đồng



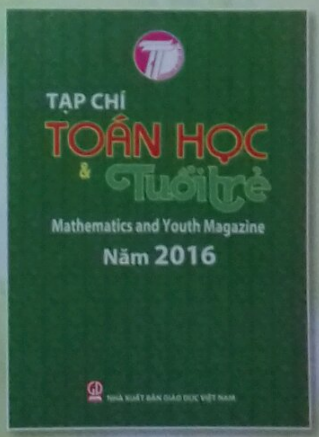
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 175.000 đồng



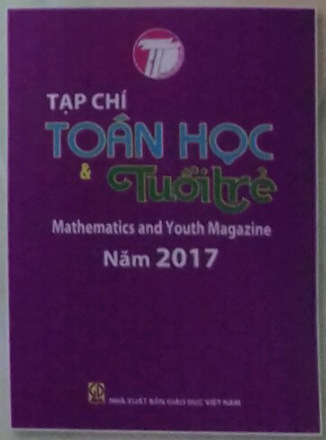
Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 185.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng



Khổ 19 x 26,5
Giá bìa: 199.000 đồng

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: (024).35121607
- Điện thoại Fax- phát hành: (024). 35121606
- Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com



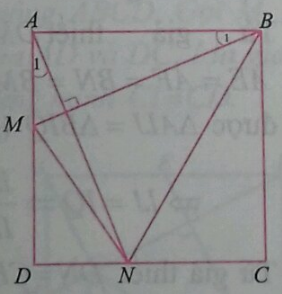
HÃY NHÌN NHỮNG BÀI TOÁN THEO HƯỚNG HỮU DỤNG

NGUYỄN ANH VŨ
(GV THPT Nguyễn Bỉnh Khiêm, Hoài Ân, Bình Định)

Trong học tập, việc kết nối các kiến thức với nhau là rất quan trọng. Việc này giúp cho chúng ta giải quyết các vấn đề nhanh hơn, giúp chúng ta sáng tạo ra những kết quả mới và giúp ta hiểu về một vấn đề nào đó một cách sâu sắc. Mỗi một kết quả đều có tính hữu dụng của nó, người học toán hãy luôn nhìn bài toán theo hướng này. Chắc chắn chúng ta sẽ tìm thấy những ứng dụng thú vị. Bài viết này là một ví dụ minh hoạ. Từ một kết quả trong một bài toán, nếu ta không nhìn nó dưới con mắt động thì kết quả đó không hữu dụng, còn ta kiên nhẫn và nhìn nó dưới sự thay đổi thì nó trở thành một kết quả có nhiều ứng dụng. Sau đây chúng tôi sẽ trình bày một bài toán như vậy.

I. BÀI TOÁN*

Cho $ABCD$ là hình vuông, M, N lần lượt thuộc các cạnh AD và DC. Chứng minh rằng: $NA \perp BM \Leftrightarrow DM = CN$.



Lời giải. Ta có

$NA \perp BM \Leftrightarrow \widehat{A_1} = \widehat{B_1}$

$\Leftrightarrow \Delta DNA = \Delta AMB$ (g.c.g)

$\Leftrightarrow DN = AM \Leftrightarrow DM = CN$.

Nhận xét.

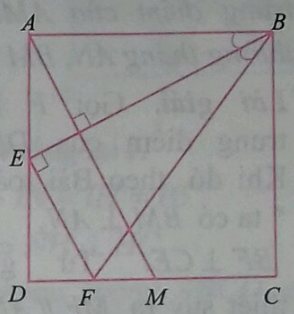
1. $NA \perp BM \Leftrightarrow NA = BM \Leftrightarrow AM = DN$.

2. $DM = CN \Leftrightarrow AM^2 + BN^2 = MN^2 + AB^2$.

3. Thay giả thiết M, N lần lượt thuộc các cạnh AD và DC bằng giả thiết M, N lần lượt thuộc các tia AD và tia DC thì kết quả bài toán vẫn đúng. Tiếp theo là các bài toán ứng dụng của Bài toán *.

Bài toán 1. *Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E là trung điểm của AD. Qua E vẽ đường thẳng vuông góc với BE cắt CD tại F. Tính tỉ số $\dfrac{EF}{EB}$.*

Lời giải. Gọi M là trung điểm của DC, khi đó ta có $DE = CM$, theo kết quả Bài toán * ta có $AM \perp BE$ và $BE = AM$.



Ta có

$FE \perp EB \Rightarrow FE \parallel AM$,

mà M là trung điểm của AD nên EF là đường trung bình của tam giác ADM $\Rightarrow \dfrac{EF}{AM} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{EF}{EB} = \dfrac{1}{2}$.

Nhận xét. 1. $FE \perp EB \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{EBF}$

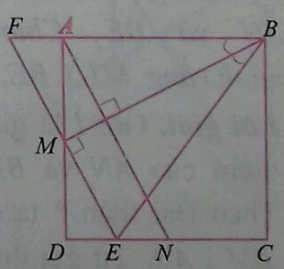
(vì $\tan\widehat{ABE} = \tan\widehat{EBF} = \dfrac{1}{2}$).

2. Nếu thay giả thiết E là trung điểm bằng giả thiết E là một điểm bất kì trên đoạn AD, ta có

$$\frac{EF}{EB} = \frac{ED}{AD}.$$

Bài toán 2. *Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của AD, E là điểm thuộc cạnh DC sao cho $\widehat{ABM} = \widehat{MBE}$. Tính tỉ số $\dfrac{DE}{DC}$.*

Lời giải. Gọi F là giao điểm của EM với AB, khi đó ta có



$\Delta FAM = \Delta EDM$ (g.c.g)

$\Rightarrow MF = ME$.

Ta lại có $\widehat{ABM} = \widehat{MBE}$, từ đó suy ra $ME \perp MB$. (1)

Gọi N là trung điểm của DC, theo Bài toán * ta có $AN \perp BM$. (2)

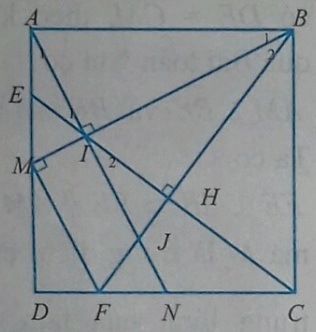
Từ (1) và (2) suy ra $AN \parallel ME$, mà M là trung điểm của AD nên E là trung điểm của DN $\Rightarrow \dfrac{DE}{DC} = \dfrac{1}{4}$.

Nhận xét. Từ Bài toán 1 và Bài toán 2 ta có

$$\widehat{ABM} = \widehat{MBE} \Leftrightarrow ME \perp MB.$$

Bài toán 3. *Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của của AD và DC, E là trung điểm của AM. Chứng minh rằng các đường thẳng AN, BM và CE đồng quy.*

Lời giải. Gọi F là trung điểm của DN. Khi đó, theo Bài toán * ta có $BM \perp AN$, $BF \perp CE$. Từ giả thiết suy ra $MF \parallel AN$ $\Rightarrow MF \perp MB \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (theo nhận xét ở Bài toán 2). Mà $\widehat{A_1} = \widehat{B_1} \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{B_2}$. (1)



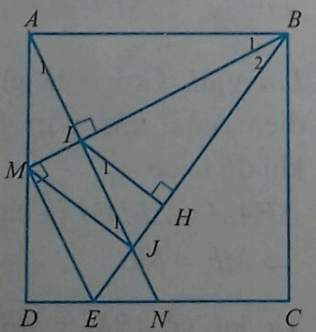
Gọi I, J lần lượt là giao điểm của AN với BM; AN với BF và IH là đường cao của tam giác JIB, khi đó $\widehat{I_2} = \widehat{B_2}$. (2)

Do E là trung điểm AM và tam giác AIM là tam giác vuông nên $\widehat{I_1} = \widehat{A_1}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{I_1} = \widehat{I_2} \Rightarrow$ ba điểm E, I, H thẳng hàng. Ta có $EH \perp BF$ và $CE \perp BF$ nên ba điểm E, H, C thẳng hàng. Vậy các đường AN, BM và CE đồng quy tại I.

Bài toán 4. *Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và DC và E là trung điểm của DN. Gọi J là giao điểm của AN và BE. Chứng minh rằng $MJ \perp BE$.*

Lời giải. Gọi I là giao điểm của AN và BM. Theo Bài toán * ta có $BM \perp AN$. Từ giả thiết của M và E suy ra $ME \parallel AN \Rightarrow ME \perp MB$



$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (theo nhận xét ở Bài toán 2).

Suy ra I là trung điểm của $AJ \Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{J_1}$.

Mà $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ nên $\widehat{J_1} = \widehat{A_1} = \widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (1).

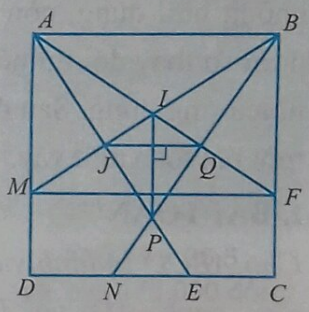
Gọi IH là đường cao của tam giác vuông JIB, khi đó, ta có $\widehat{I_1} = \widehat{B_2}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra

$$\widehat{J_1} = \widehat{I_1} \Rightarrow MJ \parallel IH \Rightarrow MJ \perp BE.$$

Nhận xét. Có thể thay yêu cầu chứng minh $MJ \perp BE$ bằng yêu cầu chứng minh tứ giác $AMJB$ nội tiếp đường tròn.

Bài toán 5. *Cho hình vuông $ACBD$. Gọi M, N là các điểm lần lượt thuộc AD và DC, E, F lần lượt thuộc DC và BC sao cho $DM=DN=CE=CF$. Chứng minh rằng nếu các đường AE, AF, BM, BN tạo thành một tứ giác thì tứ giác đó có hai đường chéo vuông góc.*

Lời giải. Theo Bài toán * ta có $BM \perp AE, BN \perp AF$.



Giả sử BM cắt AF, AE lần lượt tại I và J, BN cắt AE, AF lần lượt tại P và Q. Ta chứng minh $IP \perp JQ$. Thật vậy, từ giả thiết $DM=CF$, suy ra I là trung điểm của BM và AF và $IA=IB$.

Từ giả thiết $DM=DN=CE=CF$, suy ra $AE = AF = BN = BM$. Lúc này, ta chứng minh được $\Delta AIJ = \Delta BIQ$ (g.c.g)

$$\Rightarrow IJ = IQ \Rightarrow \frac{IJ}{IB} = \frac{IQ}{IA} \Rightarrow JQ \parallel AB \quad (1)$$

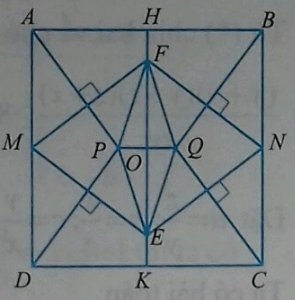
Từ giả thiết $DN=CE$ dễ suy ra $PA=PB$. Kết hợp với $IA = IB$, suy ra IP là đường trung trực của AB, dẫn đến $IP \perp AB$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $IP \perp JQ$.

Bài toán 6. *Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Tứ giác $MENF$ là hình thoi có E, F nằm bên trong hình vuông. Đường thẳng đi qua A vuông góc với MF và đường thẳng đi qua D vuông góc với*

ME cắt nhau tại P. Đường thẳng đi qua B vuông góc với NF và đường thẳng đi qua C vuông góc với NE cắt nhau tại Q. Chứng minh tứ giác PEQF là hình thoi.

Lời giải. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Do $EMFN$ là hình thoi nên O là trung điểm của FE và $FE \perp MN$. Ta chứng minh P, Q thuộc MN. Thật vậy:

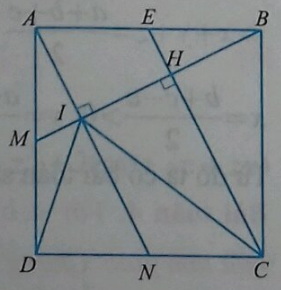


Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và DC. Gọi G là giao điểm của AP và MN. Áp dụng Bài toán * cho hình vuông $AMOH$ ta có $MG = OF$. Gọi J là giao điểm của DP và MN. Áp dụng kết quả Bài toán* cho hình vuông $DMOK$ ta có $MJ = OE$, mà $OE = OF$ nên $MG = MJ = OE = OF \Rightarrow G \equiv J \Rightarrow P$ thuộc cạnh MN. Tương tự, ta cũng chứng minh được Q thuộc cạnh MN và ta có kết quả $NQ = MP = OF \Rightarrow OP = OQ$. Khi đó, hai đường chéo EF và PQ của tứ giác $PEQF$ vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường suy ra $PEQF$ là hình thoi.

Nhận xét. $PEQF$ là hình vuông khi $FE = \frac{1}{2}AB$.

Bài toán 7. *Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và DC, I là giao điểm của AN và BM. Chứng minh CI = CD.*

Lời giải. Gọi E là trung điểm của AB, H là giao điểm của CE và BM. Theo Bài toán * ta có AN và CE cùng vuông góc với $BM \Rightarrow EH \parallel AI$. Mà E là trung điểm của AB, nên H là trung điểm của BI. Tam giác CIB có CH vuông góc với BI tại trung điểm H của $BI \Rightarrow \Delta CBI$ cân tại $C \Rightarrow CI = CB \Rightarrow CI = CD$.

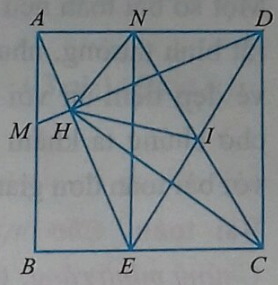


Nhận xét. Bài toán trên có thể phát biểu như sau:

Cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm của AD và AI là đường cao của tam giác AMB. Chứng minh ΔCIB cân.

Bài toán 8. *Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AB, AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho AM = AN. Gọi AH là đường cao của tam giác AMD. Chứng minh CH ⊥ HN.*

Lời giải. Gọi E là giao điểm của AH với CB. Theo Bài toán * ta suy ra $DCEN$ là hình chữ nhật. Gọi I là giao điểm của DE và CN, khi đó ta có $IN = IE = IC = ID$.



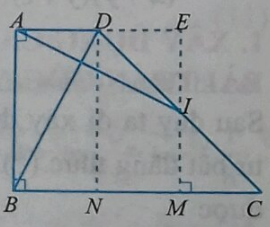
Ta lại có tam giác DHE vuông tại H

$$IH = IE = ID \Rightarrow IN = IH = IC$$

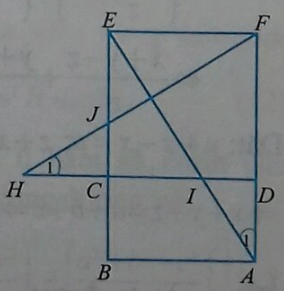
$\Rightarrow \Delta NHC$ vuông tại $H \Rightarrow NH \perp HC$.

Bài toán 9. *Cho hình thang vuông ABCD, có đường cao AB = 2a, đáy lớn BC = 3a và đáy nhỏ AD = a. Gọi I là trung điểm của DC. Chứng minh AI ⊥ BD.*

Lời giải. Từ I dựng đường thẳng song song với AB cắt AD tại E, BC tại M. Do I là trung điểm của DC nên I là trung điểm của ME. Từ D dựng đường thẳng song song với AB cắt BC tại N. Ta có $IM \parallel DN$ và I là trung điểm của DC nên M là trung điểm của NC. Do $BN = AD = a$, $BC = 3a \Rightarrow MN = MC = a \Rightarrow ABME$ là hình vuông và D là trung điểm của AE. Theo Bài toán * ta có $AI \perp BD$.



Bài toán 10. *Cho hình chữ nhật ABCD. Trên tia AD và BC lần lượt lấy hai điểm F và E sao cho DF = CE = DC. Trên tia đối của tia CD lấy điểm H sao cho CH = CB. Chứng minh AE ⊥ FH.*



(Xem tiếp trang 11)

ỨNG DỤNG CỦA MỘT BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN

MAI VĂN NĂM

(GV THCS Khánh Hồng, Yên Khánh, Ninh Bình)

Một số bài toán nếu nhìn thoáng qua ta thấy nó rất bình thường, nhưng bên trong lại mang một vẻ đẹp tiềm ẩn với rất nhiều điều thú vị đang chờ chúng ta khám phá. Chúng ta hãy bắt đầu với bài toán đơn giản sau đây

Bài toán. *Cho x,y,z là các số không âm. Chứng minh rằng:* $(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8xyz$ (*).

Lời giải. Bài toán này có nhiều cách chứng minh, nhưng cách đơn giản nhất như sau:

Ta có $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\geq 0\Leftrightarrow x+y\geq 2\sqrt{xy}$. Đẳng thức xảy ra khi: $x=y$. Tương tự có $y+z\geq 2\sqrt{yz}$; $z+x\geq 2\sqrt{zx}$. Nhân các bất đẳng thức trên theo vế ta được

$$(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8xyz. \qquad \text{(đpcm)}$$

1. XÂY DỰNG CÁC BÀI TOÁN KHÁC TỪ BÀI TOÁN GỐC

Sau đây ta đi xây dựng các bất đẳng thức mới từ bất đẳng thức (*). Từ (*) khai triển vế trái ta được

$$x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y+2xyz\geq 8xyz.$$

Rút gọn, chia hai vế cho xyz ta được:

$$\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}\geq 6$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x+y}{z}-1\right)+\left(\frac{y+z}{x}-1\right)+\left(\frac{z+x}{y}-1\right)\geq 3$$

$$\Leftrightarrow\frac{x+y-z}{z}+\frac{y+z-x}{x}+\frac{z+x-y}{y}\geq 3.$$

Đặt: $y+z-x=a;\ z+x-y=b;\ x+y-z=c$

$$\Rightarrow x+y+z=a+b+c\Rightarrow x=\frac{b+c}{2};y=\frac{c+a}{2};z=\frac{a+b}{2}.$$

Thay vào ta được: $\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}\geq 3$. Từ đó có bài toán sau:

Bài toán 1. (Bất đẳng thức Nesbit) *Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng:*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}. \qquad (1)$$

Từ (*) chia hai vế cho tích xyz ta được

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}\geq 8\Leftrightarrow\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{z}{y}\right)\left(1+\frac{x}{z}\right)\geq 8.$$

Đặt $a=\frac{z}{y};\ b=\frac{x}{z};\ c=\frac{y}{x}\Rightarrow abc=1$.

Ta có bài toán:

Bài toán 2. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:*

$$(1+a)(1+b)(1+c)\geq 8 \qquad (2)$$

Từ (*) chia hai vế cho tích xyz và biến đổi theo hướng khác ta được

$$\Leftrightarrow\frac{x+y}{z}.\frac{y+z}{x}.\frac{z+x}{y}\geq 8.$$

Đặt $a=\frac{y+z}{x};\ b=\frac{x+z}{y};\ c=\frac{y+x}{z}$ thì

$$a+1=\frac{x+y+z}{x};b+1=\frac{x+y+z}{y};c+1=\frac{x+y+z}{z}.$$

Ta có bài toán sau:

Bài toán 3. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1$. Chứng minh rằng: $abc\geq 8$.* (3)

Từ (*) nếu đặt: $a=y+z;\ b=x+z;\ c=x+y$

$\Rightarrow x+y+z=\frac{a+b+c}{2}$ thế thì ta được

$$x=\frac{b+c-a}{2}>0;\ y=\frac{a+c-b}{2}>0;\ z=\frac{a+b-c}{2}>0.$$

Từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 4. *Với a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:*

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leq abc. \qquad (4)$$

Từ (*) nếu thêm giả thiết $x+y+z=1$ thay vào ta có: $(1-x)(1-y)(1-z)\geq 8xyz$

$$\Leftrightarrow 1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)-xyz\geq 8xyz.$$

Từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 5. *Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:*

$$ab+bc+ca\geq 9abc. \quad (5)$$

Từ (4) chia cả hai vế cho tích abc ta được:

$$\frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{abc}\leq 1$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-1\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-1\right)\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{b}-1\right)\leq 1.$$

Nếu đặt: $x=\frac{b}{c};y=\frac{c}{a};z=\frac{a}{b}\Rightarrow xyz=1$ thì ta có

Bài toán 6. *(IMO – 2000). Cho các số $x,y,z>0$ thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng:*

$$\left(x+\frac{1}{y}-1\right)\left(y+\frac{1}{z}-1\right)\left(z+\frac{1}{x}-1\right)\leq 1. \quad (6)$$

Từ (4) nếu thêm giả thiết: $a+b+c=1$ thay vào ta được $(1-2c)(1-2a)(1-2b)\leq abc$

$\Leftrightarrow 1-2(a+b+c)+4(ab+bc+ca)-8abc\leq abc.$

Từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 7. *Cho x,y,z là các số dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:*

$$4(xy+yz+zx)-9xyz\leq 1. \quad (7)$$

Biến đổi tiếp ta có $4(xy+yz+zx)-9xyz\leq 1$

$\Leftrightarrow 4(xy+yz+zx-2xyz)\leq 1+xyz$. Áp dụng BĐT Cauchy ta có $xyz\leq\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$. Từ đó ta có

Bài toán 8. *(IMO – 1984). Cho x,y,z là các số dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng: $xy+yz+zx-2xyz\leq\frac{7}{27}$.* (8)

Từ (7) với chú ý rằng

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

thì ta có bài toán sau:

Bài toán 9. *Cho x,y,z là các số dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:*

$$2(x^2+y^2+z^2)+9xyz\geq 1. \quad (9)$$

(Đề tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Hùng Vương, Phú Thọ, năm học 2017 – 2018).

Từ (9) tiếp tục thay giả thiết $x+y+z=1$ và biến đổi ta được $2(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)+9xyz\geq 1$

$\Leftrightarrow 2(x^3+y^3+z^3+x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+9xyz\geq 1$

sử dụng kết quả $(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y\leq x^3+y^3+z^3+3xyz$ được suy ra khi khai triển (4)) ta có

$2(x^3+y^3+z^3+x^3+y^3+z^3+3xyz)+9xyz\geq 1.$

Từ đó ta có bài toán sau:

Bài toán 10. *Cho x,y,z là các số dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng:*

$$x^3+y^3+z^3+\frac{15}{4}xyz\geq\frac{1}{4}. \quad (10)$$

2. ỨNG DỤNG ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Dưới đây ta sẽ xét một số bài toán bất đẳng thức lượng giác được giải bằng phương pháp đại số nhờ áp dụng BĐT (*).

Bài toán 11. *Cho tam giác ABC nhọn. Chứng minh rằng: $\cos A.\cos B.\cos C\leq\frac{1}{8}$.* (11)

Lời giải. Áp dụng định lí côsin cho ΔABC ta có

$$(11)\Leftrightarrow\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}.\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\leq\frac{1}{8}$$

$\Leftrightarrow 2c^2.2a^2.2b^2\geq 8(b^2+c^2-a^2)(c^2+b^2-a^2).$

$.(a^2+b^2-c^2)$

Đặt: $x=b^2+c^2-a^2;\ y=c^2+a^2-b^2;\ z=a^2+b^2-c^2$ với $x,y,z>0$ suy ra $2a^2=y+z;\ 2b^2=z+x;$ $2c^2=x+y$, bất đẳng thức có dạng

$$(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8xyz. \quad (*)$$

Bài toán 12. *Chứng minh rằng trong tam giác ABC luôn có: $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\geq\frac{3}{4}$.* (12)

Lời giải. Áp dụng định lí hàm số côsin cho ΔABC ta thấy BĐT (12) tương đương với

$$4\left[\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2+\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)^2+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2\right]\geq 3$$

(Xem tiếp trang 34)

Hướng dẫn giải ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN KHTN, ĐHGQ HÀ NỘI NĂM HỌC 2018-2019

VÒNG 1

Câu 1. 1) ĐK: $x \ge -1$. Đặt

$$u=\sqrt{x+1},\ v=\sqrt{x^2-x+1}\ (u,\ v\ge 0).$$

Phương trình đã cho trở thành:

$$v^2-1+2uv=2u \Leftrightarrow (v-1)(v+1)+2u(v-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (v-1)(v+1+2u)=0 \Leftrightarrow v=1 \text{ (vì } u,\ v\ge 0).$$

Do đó $\sqrt{x^2-x+1}=1 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0$; $x=1$.

2) Nhân cả hai vế phương trình thứ nhất với 2, hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2xy+2y^2=2+2y \\ x^2+2y^2+2xy=4+x. \end{cases}$$

Cộng hai phương trình trên ta được:

$$(x+2y)^2-(x+2y)-6=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2y=3 \\ x+2y=-2. \end{array}\right.$$

• Với $x+2y=3 \Rightarrow x=3-2y$. Thế vào phương trình thứ nhất của hệ ta có:

$$(3-2y)y+y^2=1+y \Leftrightarrow -y^2+2y-1=0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)^2=0 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=1.$$

• Với $x+2y=-2 \Rightarrow x=-2-2y$. Thế vào phương trình thứ nhất của hệ ta có:

$$(-2-2y)y+y^2=1+y \Leftrightarrow y^2+3y+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=1-\sqrt{5} \\ y=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=1+\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm là:

$$(1;1),\left(1-\sqrt{5};\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right),\left(1+\sqrt{5};\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Câu 2. 1) Phương trình đã cho tương đương với

$$(x+y)(3x+2y)^2+(x+y)=3x+2y-1$$

$$\Leftrightarrow (x+y)[(3x+2y)^2+1]=3x+2y-1.$$

Đặt $t=3x+2y$, ta có

$$(x+y)(t^2+1)=t-1 \Leftrightarrow x+y=\frac{t-1}{t^2+1}.$$

Vì $x+y$ là các số nguyên nên $(t-1)\vdots(t^2+1)$ $\Rightarrow (t^2-1)\vdots(t^2+1)$ mà $t^2-1=(t^2+1)-2$ nên $2\vdots(t^2+1)$. Suy ra $t^2+1\in\{1;2\}$.

• $t^2+1=1 \Rightarrow t=0 \Rightarrow x+y=-1$ suy ra

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ 3x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}.$$

• $t^2+1=2 \Rightarrow t^2=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \Rightarrow x+y=0, \\ t=-1 \Rightarrow x+y=-1. \end{array}\right.$

+ Với $\begin{cases} x+y=0 \\ 3x+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$.

+ Với $\begin{cases} x+y=-1 \\ 3x+2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$.

Thử lại, ta có phương trình đã cho có 3 nghiệm là: $(2;-3),(1;-1),(1;-2)$.

2) Ta có

$$M+\sqrt{\frac{b}{3}}=\frac{a}{\sqrt{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt{b+2a}}+\sqrt{\frac{b}{3}}$$

$$=\frac{a^2}{a\sqrt{a+2b}}+\frac{b^2}{b\sqrt{b+2a}}+\frac{b^2}{b\sqrt{3b}}$$

$$\ge \frac{(a+b+b)^2}{a\sqrt{a+2b}+b\sqrt{b+2a}+b\sqrt{3b}}$$

$$\ge \frac{(a+2b)^2}{a\sqrt{a+2b}+b\sqrt{(1+1)(b+2a+3b)}}$$

$$=\frac{(a+2b)^2}{a\sqrt{a+2b}+b\sqrt{4(a+2b)}}=\sqrt{a+2b}.$$

$$\Rightarrow M\ge \sqrt{a+2b}-\sqrt{\frac{b}{3}}=\sqrt{a+2b}-\sqrt{a+2b}+2=2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

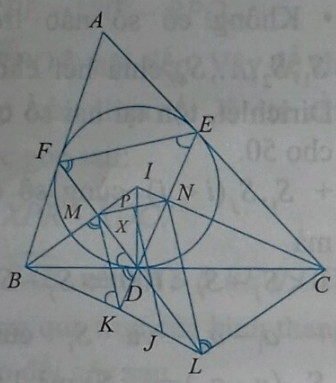
$$\begin{cases} a=b \\ \sqrt{a+2b}-\sqrt{\dfrac{b}{3}}=2 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=3.$$

Vậy min $M=2$, đạt được khi $a=b=3$.

Câu 3.

1) Do IB vuông góc với DF tại M nên tứ giác $BKDM$ nội tiếp. Từ đó $\widehat{BKM}=\widehat{BDF}=\widehat{DEF}$ và $\widehat{BMK}=\widehat{BDK}=\widehat{CDE}=\widehat{DFE}$. Vậy $\Delta BKM \backsim \Delta DEF$.

2) Chứng minh tương tự $\Delta CLN \backsim \Delta DFE$ do đó $\Delta BMK \backsim \Delta CLN$.



Mà $BM \parallel CL$ do cùng vuông góc với DF. $BK \parallel CN$ do cùng vuông góc với DE. Ta suy ra $MK \parallel NL$.

3) Gọi P là trung điểm của MN. Do tứ giác $IMDN$ nội tiếp đường tròn đường kính ID nên $XP \perp MN$ (1)

Mặt khác

$\widehat{KMD}=90^0-\widehat{KDB}=90^0-\widehat{CDE}=90^0-\widehat{DFE}$,

suy ra $MK \perp EF \parallel MN$. Kết hợp $MK \parallel NL$ thì tứ giác $KMNL$ là hình thang vuông tại M, N. Lại có JP là đường trung bình nên $JP \perp MN$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra J, X, P cùng nằm trên đường thẳng vuông góc MN, mà $MN \parallel EF$ nên $JX \perp EF$. Đó là điều phải chứng minh.

Câu 4. • Kí hiệu $N(p,q)$ là số miền được chia bởi p đường thẳng đi qua P và q đường thẳng đi qua Q ($p \ge 0, q \ge 0$ và $p+q=10$).

• Xét p đường thẳng đồng quy tại P sẽ chia mặt phẳng thành $N(p,0)=2p$ miền.

• Chọn một đường thẳng đầu tiên đi qua Q. Đường thẳng này cắt tất cả p đường thẳng đi qua P tại p điểm và bị chia thành $p+1$ đoạn. Mỗi đoạn biến một miền cũ thành hai miền mới. Suy ra số miền tăng thêm là $p+1$ và ta có $N(p,1)=2p+p+1$.

• Đối với các đường thẳng tiếp theo sẽ chia thành $p+2$ đoạn thẳng (kể cả điểm Q). Suy ra số miền tăng thêm là $p+2$. Ta có:

$N(p,2)=N(p,1)+p+2$

$N(p,3)=N(p,2)+p+2=N(p,1)+2(p+2)$

……

$$\begin{aligned} N(p,q)&=N(p,1)+(q-1)(p+2) \\ &=2p+p+1+pq-p+2q-2 \\ &=2(p+q)-1+pq \le 2(p+q)-1+\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 \\ &\le 19+25=44. \end{aligned}$$

Khi $p=q=5$ thì đẳng thức xảy ra. Vậy số miền tối đa là 44.

VÒNG 2

Câu 1. 1) Ta có

$x^3+y^3+x^3y^3+7(x+1)(y+1)=31$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+(xy)^3+6(x+1)(y+1)+(x+1)(y+1)=31$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+(xy)^3+3xy(x+y)(x+1)(y+1)$
$+xy+x+y=30$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+(xy)^3+3(x+y)(x+xy)(y+xy)$
$+xy+x+y=30$

$\Leftrightarrow (xy+x+y)^3+xy+x+y=30.$

Đặt $t=xy+x+y$, ta thu được

$t^3+t=30 \Leftrightarrow (t-3)(t^2+3t+10)=0 \Leftrightarrow t=3.$

Do đó ta có

$$\begin{cases} (x+y)+xy=3 \\ xy(x+y)=2. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1. \\ \begin{cases} x+y=1 \\ xy=2 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $x=y=1$.

2) ĐK: $0 \le x \le \frac{3}{2}$. Đặt $u = \sqrt{x}, v = \sqrt{3-2x}$ thì khi đó $(u \ge 0, v \ge 0)$, ta có hệ $\begin{cases} 2u^2 + v^2 = 3 \\ 9 + 3uv = 7u + 5v. \end{cases}$

Cộng hai phương trình ta thu được

$2u^2 + v^2 + 3uv + 6 = 7u + 5v$

$\Leftrightarrow v^2 + (3u-5)v + 2u^2 - 7u + 6 = 0$

$\Leftrightarrow v^2 + (3u-5)v + (u-2)(2u-3) = 0$

$\Leftrightarrow (v+u-2)(v+2u-3) = 0$

• $\begin{cases} v+u-2=0 \\ 2u^2+v^2=3 \end{cases}$, thế $v = 2-u$ vào phương trình dưới ta có $2u^2 + (2-u)^2 = 3 \Leftrightarrow 3u^2 - 4u + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 1 \Rightarrow x = 1 \\ u = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{9}. \end{array}\right.$$

• $\begin{cases} v+2u-3=0 \\ 2u^2+v^2=3 \end{cases}$, thế $v = 3-2u$ vào phương trình dưới ta có

$2u^2 + (3-2u)^2 = 3 \Leftrightarrow 6u^2 - 12u + 6 = 0$

$\Leftrightarrow 6(u-1)^2 = 0 \Leftrightarrow u = 1 \Rightarrow x = 1.$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là:

$$x = \frac{1}{9}; \ x = 1.$$

Câu 2. Đặt $a = x^2 - 2xy - y, b = xy - 2y^2 - x, c = 2x^2 + y^2 + 2x + y$. Ta có

$a - b = x^2 + 2y^2 - 3xy + x - y = (x-y)(x-2y+1).$

Do a, b chia hết cho 5 suy ra $(a-b) \vdots 5$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} (x-y) \vdots 5 \\ (x-2y+1) \vdots 5. \end{array}\right.$$

• $(x-y) \vdots 5 \Rightarrow x \equiv y \pmod 5$. Khi đó

$a \equiv x^2 - 2x^2 - x = -(x^2 + x) \pmod 5.$

$c \equiv 2x^2 + x^2 + 2x + x = 3(x^2 + x) \pmod 5.$

Vì $a \vdots 5 \Rightarrow (x^2 + x) \vdots 5 \Rightarrow c \vdots 5.$

• $(x-2y+1) \vdots 5 \Rightarrow x \equiv 2y - 1 \pmod 5$. Khi đó

$a \equiv (2y-1)^2 - 2(2y-1)y - y = -3y + 1 \pmod 5.$

$c \equiv 2(2y-1)^2 + y^2 + 2(2y-1) + y \equiv 9y^2 - 3y \equiv 3y(3y-1) \pmod 5.$

Vì $a \vdots 5 \Rightarrow (3y-1) \vdots 5 \Rightarrow c \vdots 5$. Ta có điều cần chứng minh.

2) Kí hiệu $S_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i \ (1 \le i \le 49)$. Từ giả thiết ta có $1 \le S_i < 100$.

• Tồn tại $i \ (1 \le i \le 49)$ sao cho $S_i \vdots 50$ mà $1 \le S_i < 100 \Rightarrow S_i = 50$.

• $a_1 - a_{50} \vdots 50$ mà $1 - 50 \le a_1 - a_{50} \le 0 \Rightarrow a_1 = a_{50}$.

Khi đó từ giả thiết suy ra $a_1 = a_2 = \cdots = a_{50} = 2$

$\Rightarrow S_{25} = 2 + 2 + \cdots + 2 \ (25 \text{ số}) = 50.$

• Không có số nào trong các số $a_1 - a_{50}$, $S_1, S_2, \ldots, S_{49}$ chia hết cho 50. Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 50.

+ $S_i, S_j (i < j)$ cùng số dư suy ra $S_j - S_i \vdots 50$ mà

$0 < S_j - S_i < 100 \Rightarrow S_j - S_i = a_{i+1} + \cdots + a_j = 50.$

+ $a_1 - a_{50}$ và S_1 cùng số dư. Suy ra $S_1 - (a_1 - a_{50}) = a_{50} \vdots 50$ mà $1 \le a_{50} \le 50 \Rightarrow a_{50} = 50.$

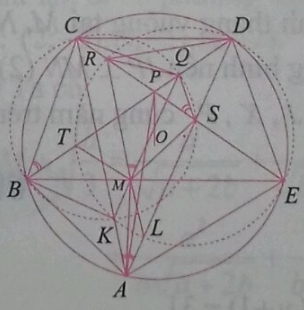
+ $a_1 - a_{50}$ và $S_i \ (2 \le i \le 49)$ cùng số dư.

Suy ra $S_i - (a_1 - a_{50}) = a_2 + a_3 + \cdots + a_i + a_{50} \vdots 50$

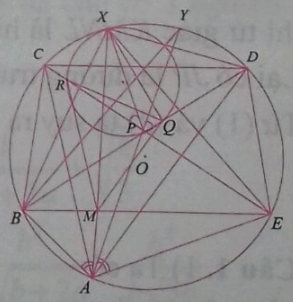
mà $1 < a_2 + a_3 + \cdots + a_i + a_{50} < 100$

$\Rightarrow a_2 + a_3 + \cdots + a_i + a_{50} = 50.$

Câu 3.



Hình 1



Hình 2

1) (h.1) Do $MK \parallel AD$ và tứ giác $BKQC$ nội tiếp nên $\widehat{CKM} = \widehat{CAD} = \widehat{CBQ} = \widehat{CKQ}$, từ đó K, M, Q thẳng hàng.

2) (h.2) Chứng minh tương tự 1) thì L, M, R thẳng hàng. Ta có $\widehat{RMQ} = \widehat{CAD}$ do góc có cạnh tương ứng song song. Từ đó

$$\widehat{RSQ} = \widehat{CBQ} = \widehat{CAD} = \widehat{RMQ},$$

ta suy ra S nằm trên đường tròn (MQR).

Chứng minh tương tự T cũng nằm trên đường tròn (MQR) nên năm điểm M, S, Q, R, T cùng thuộc một đường tròn.

3) (h.2) Bỏ qua trường hợp đơn giản khi A nằm trên trung trực của BE. Gọi AM, AP cắt (O) tại X, Y khác A. Ta có $\widehat{BXA} = \widehat{BDA} = \widehat{BQM}$ suy ra tứ giác $BMQX$ nội tiếp. Tương tự thì tứ giác $EMRX$ nội tiếp. Từ đó

$$\widehat{RXQ} = \widehat{RXM} + \widehat{MXQ} = \widehat{REM} + \widehat{QBM}$$
$$= 180^0 - \widehat{BPE} = 180^0 - \widehat{RPQ}.$$

Ta thu được tứ giác $RPQX$ nội tiếp. Vậy để chỉ ra (PQR) và (O) tiếp xúc nhau tại X, ta cần chứng minh đẳng thức góc sau:

$$\widehat{CXR} = \widehat{XPR} - \widehat{XDC}.$$

Từ giả thiết $\widehat{MAB} = \widehat{PAE}$ nên $XY \parallel BE \parallel CD$ suy ra X và Y đối xứng qua trục của hình thang cân $BEDC$. Ta có biến đổi góc sau

$$\widehat{XPR} - \widehat{XDC} = \widehat{YPD} - \widehat{YCD}$$
$$= \widehat{YPD} - \widehat{YBD} = \widehat{PYB} \quad (1)$$

Sử dụng tứ giác $MEXR$ nội tiếp, ta có biến đổi góc:

$$\widehat{CXR} = \widehat{CXE} - \widehat{EXR} = \widehat{CDE} - \widehat{RMB}$$
$$= \widehat{BCD} - \widehat{ACD} = \widehat{ACB} = \widehat{AYB} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thu được $\widehat{XPR} - \widehat{XDC} = \widehat{CXR}$. Vậy đó là điều phải chứng minh.

Câu 4. Với $a,b,c,d > 0$ ta có

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$$
$$\geq (a+b+c+d)(abc+bcd+cda+dab)$$
$$\Leftrightarrow a^2c^2 + b^2d^2 \geq 2abcd \text{ (đúng).}$$

Suy ra

$$M = \frac{ab}{(a+b)(b+c)(d+a)} + \frac{bc}{(b+c)(c+d)(a+b)}$$
$$+ \frac{cd}{(c+d)(d+a)(b+c)} + \frac{da}{(d+a)(a+b)(c+d)}$$
$$= \frac{2(abc+bcd+cda+dab)}{(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)} \leq \frac{2}{a+b+c+d}.$$

Xét

$$P = \sqrt{\frac{ab}{(a+b)(b+c)}} + \sqrt{\frac{bc}{(b+c)(c+d)}}$$
$$+ \sqrt{\frac{cd}{(c+d)(d+a)}} + \sqrt{\frac{da}{(d+a)(a+b)}}.$$

Ta có

$$P^2 = \left(\sqrt{\frac{ab}{(a+b)(b+c)(d+a)}}\sqrt{d+a} \right.$$
$$+ \sqrt{\frac{bc}{(b+c)(c+d)(a+b)}}\sqrt{a+b}$$
$$\left. + \sqrt{\frac{cd}{(c+d)(d+a)(b+c)}}\sqrt{b+c} \right.$$
$$\left. + \sqrt{\frac{da}{(d+a)(a+b)(c+d)}}\sqrt{c+d} \right)^2$$
$$\leq 2(a+b+c+d)M \leq 2(a+b+c+d) \times$$
$$\times \frac{2}{a+b+c+d} = 4 \Rightarrow P \leq 2.$$

Cho $d = b$ ta thu được

$$\sqrt{\frac{ab}{(a+b)(b+c)}} + \sqrt{\frac{bc}{(b+c)^2}} + \sqrt{\frac{cb}{(c+b)(b+a)}}$$
$$+ \sqrt{\frac{ab}{(a+b)^2}} \leq 2.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{ab}{a+b}}\left(\frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{a+b}}\right)$$
$$+ \sqrt{\frac{bc}{b+c}}\left(\frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{a+b}}\right) \leq 2$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{ab}{a+b}} + \sqrt{\frac{bc}{b+c}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{a+b}}\right) \leq 2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

NGUYỄN VŨ LƯƠNG – PHẠM VĂN HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội) ***giới thiệu***

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT NĂNG KHIẾU ĐHQG TP. HỒ CHÍ MINH NĂM HỌC 2018 – 2019

VÒNG 1

(Dành cho tất cả thí sinh; Thời gian làm bài: 120 phút)

Câu 1 (1 *điểm*). Biết $0<x\le y$ và

$$\left(\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})+2(x+2y)}\right)+\left(\frac{y}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}+\frac{x}{\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}\right)=\frac{5}{3}.$$

Tính $\frac{x}{y}$.

Câu 2 (2 *điểm*). a) Giải phương trình:

$$\frac{2x^2(7-x)}{\sqrt{3-x}}=x(x-7).$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x+3)(x-1)=(y-2)(x+3)\\(x-1)\sqrt{y^2-5y+8}=(y-2)^2\end{cases}.$$

Câu 3 (2 *điểm*). Cho phương trình

$$x^2-x+3m-11=0 \qquad (1)$$

a) Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có nghiệm kép? Tìm nghiệm đó.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 sao cho $2017x_1+2018x_2=2019$.

Câu 4 (2 *điểm*). a) Đầu tháng 5 năm 2018, khi đang vào thu hoạch, giá dưa hấu bất ngờ giảm mạnh. Nông dân A cho biết vì sợ dưa hỏng nên phải bán 30% số dưa hấu thu hoạch được với giá 1500 đồng mỗi kilôgam (1500/kg), sau đó nhờ phong trào "giải cứu dưa hấu" nên đã may mắn bán hết số dưa còn lại với giá 3500đ/kg; nếu trừ tiền đầu tư thì lãi được 9 triệu đồng (không kể công chăm sóc hơn hai tháng của cả nhà). Cũng theo ông A, mỗi sào đầu tư (hạt giống, phân bón,...) hết 4 triệu đồng và thu hoạch được 2 tấn dưa hấu. Hỏi ông A đã trồng bao nhiêu sào dưa hấu?

b) Một khu đất hình chữ nhật $ABCD$ $(AB<AD)$ có chu vi 240 mét được chia thành hai phần gồm khu đất hình chữ nhật $ABNM$ làm chuồng trại và phần còn lại làm vườn thả để nuôi gà (M, N lần lượt thuộc các cạnh AD, BC). Theo quy hoạch trang trại nuôi được 2400 con gà, bình quân mỗi con gà cần một mét vuông của diện tích vườn thả và diện tích vườn thả gấp ba lần diện tích chuồng trại. Tính chu vi của khu đất làm vườn thả.

Câu 5 (3 *điểm*). Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (T) tâm O, bán kính R; $\widehat{CAD}=45^0$, AC vuông góc với BD và cắt BD tại I, $AD>BC$. Dựng CK vuông góc với AD ($K\in AD$), CK cắt BD tại H và cắt (T) tại E ($E\ne C$).

a) Tính số đo góc $\widehat{COD}$. Chứng minh các điểm C, I, K, D cùng thuộc một đường tròn và $AC=BD$.

b) Chứng minh A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHE. Tính IK theo R.

c) IK cắt AB tại F. Chứng minh O là trực tâm tam giác AIK và $CK.CB=CF.CD$.

LƯƠNG XUÂN VINH
(ĐH Kinh tế - Tài chính, TP. Hồ Chí Minh)
giới thiệu

VÒNG 2

(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán; Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1 (1,5 *điểm*). Cho các phương trình: $x^2-x+m=0$ (1) và $mx^2-x+1=0$ (2) với m là tham số.

a) Tìm m để các phương trình (1) và (2) đều có 2 nghiệm dương phân biệt.

b) Giả sử điều kiện ở câu a) được thỏa mãn, gọi x_1,x_2 là nghiệm của (1) và x_3,x_4 là nghiệm của (2). Chứng minh rằng:

$$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_1+x_4x_1x_2>5.$$

☞ **Câu 2** (2 *điểm*). Cho a, b là hai số nguyên thỏa mãn $a^3+b^3>0$.

a) Chứng minh rằng $a^3+b^3\geq a+b>0$.

b) Chứng minh rằng $a^3+b^3\geq a^2+b^2$.

c) Tìm tất cả các bộ số x, y, z, t nguyên sao cho $x^3+y^3=z^2+t^2$ và $z^3+t^3=x^2+y^2$.

Câu 3 (2 *điểm*). Cho

$$A_n=2018^n+2032^n-1964^n-1984^n$$

với n là số tự nhiên.

a) Chứng minh với mọi số tự nhiên n thì A_n chia hết cho 51.

b) Tìm tất cả những số tự nhiên n sao cho A_n chia hết cho 45.

Câu 4 (3 *điểm*). Cho tam giác ABC nhọn. Một đường tròn qua B, C cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E và F; BF cắt CE tại D. Lấy điểm K sao cho từ giác $DBKC$ là hình bình hành.

a) Chứng minh rằng tam giác KBC đồng dạng với tam giác DFE, tam giác AKC đồng dạng với tam giác ADE.

b) Hạ DM vuông góc với AB, DN vuông góc với AC. Chứng minh rằng MN vuông góc với AK.

c) Gọi I là trung điểm AD, J là trung điểm MN. Chứng minh rằng đường thẳng IJ đi qua trung điểm của cạnh BC.

d) Đường thẳng IJ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN tại T ($T\neq I$). Chứng minh rằng AD tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác DTJ.

Câu 5 (1,5 *điểm*). Đội văn nghệ của một trường THCS có 8 học sinh. Nhà trường muốn thành lập các nhóm tốp ca, mỗi nhóm gồm đúng 3 học sinh (mỗi học sinh có thể tham gia vài nhóm tốp ca khác nhau). Biết rằng hai nhóm tốp ca bất kỳ có chung nhau nhiều nhất là một học sinh.

a) Chứng minh rằng không có học sinh nào tham gia từ 4 nhóm tốp ca trở lên.

b) Có thể thành lập nhiều nhất là bao nhiêu nhóm tốp ca như vậy?

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(*TP. Hồ Chí Minh*) ***giới thiệu***

HÃY NHÌN NHỮNG BÀI TOÁN ...

(*Tiếp theo trang* 3)

Ta có $DF=CE=DC$, suy ra $DCEF$ là hình vuông $\Rightarrow FE=FD$ và $CH=CB; FA=DH$. Từ đó suy ra $\Delta FAE=\Delta DHF\Rightarrow \widehat{H_1}=\widehat{A_1}\Rightarrow \Delta ADI=\Delta HCJ$ (g.c.g) $\Rightarrow DI=CJ$. Khi đó theo Bài toán * ta có $EI\perp FJ$ hay $AE\perp FH$.

BÀI TẬP

1. Cho hình vuông $ABCD$, điểm M thuộc đoạn thẳng AC sao cho $AM=\frac{1}{4}AC$, N là trung điểm đoạn thẳng DC. Chứng minh rằng BMN là tam giác vuông cân.

2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2a$, $BC=3a$. Lấy điểm E trên AD sao cho $EA=a$. Gọi I là trung điểm của CE. Chứng minh $BE\perp AI$.

3. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của B trên AC. M, N lần lượt là trung điểm của AK và DC. Chứng minh rằng $BM\perp MN$.

4. (T4/289 *TH&TT*). Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC, G là điểm trên cạnh AB sao cho $GB=2GA$. Các đường thẳng GM và CA cắt nhau tại D. Đường thẳng qua M vuông góc với CG tại E và cắt AC tại K. Gọi P là giao điểm của DE và GK. Chứng minh rằng:

a) $DE=BC$; b) $PG=PE$.

5. (T2/335 *TH&TT*). Cho tam giác ABC vuông cân với đáy BC. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Kẻ NH vuông góc với CM tại H. Kẻ HE vuông góc với AB tại E. Chứng minh rằng tam giác ABH cân và HM là phân giác của góc BHE.

6. (T4/410 *TH&TT*). Cho tam giác ABC vuông cân ở A. Gọi M, N, O lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC. Đường vuông góc với CM kẻ từ O cắt MN tại G. So sánh độ dài hai đoạn thẳng GM và GN.

7. (Bài toán 16, nhiều cách giải cho một bài toán trên TH& TT, chính là Bài toán 7 ở trên).

Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Kẻ NH vuông góc với CM ($H\in CM$). Chứng minh rằng tam giác ABH cân.

Chúng tôi hy vọng sẽ cùng được trao đổi với các bạn thêm nhiều ứng dụng hơn nữa của Bài toán *.



HỆ PHƯƠNG TRÌNH DƯỚI GÓC NHÌN ĐA CHIỀU

HUỲNH DUY THỦY

(GV THPT chuyên Chu Văn An, Bình Định)

Phương trình - Hệ phương trình là một trong những bài toán cổ xưa của toán học.Vẻ đẹp của nó được thể hiện bởi sự giản dị và sâu sắc. Phương trình - Hệ phương trình hàm chứa một mảng kiến thức trọng tâm trong chương trình toán học phổ thông - một nội dung hấp dẫn người dạy, người học. Chính vì thế, việc khai thác, khám phá, phát hiện và kiến tạo các giải pháp cho mảng kiến thức luôn "thời sự" và quan trọng này là việc làm không có hồi kết.

Trong bài viết này, tác giả chọn lọc và đưa ra 7 đề thi về hệ phương trình trong kỳ thi chọn lọc HSG năm 2017 – 2018 của các tỉnh, thành phố. Mỗi đề, nói chung sẽ có 2 cách giải: Cách 1 là đáp án của Trường hay Sở Giáo dục đề xuất bài toán; cách 2 là cách do tác giả đề xuất. Với bài viết này, tác giả mong muốn góp một chút suy nghĩ trong phương pháp tiếp cận cũng như chia sẻ những ý tưởng giải không trùng lặp với đáp án đã có sẵn. Hy vọng rằng qua bài viết, bạn đọc sẽ nắm rõ hơn bản chất của bài toán giải hệ phương trình, tự tin và hứng thú trong việc học toán, làm toán và luôn giữ vững lòng say mê sáng tạo toán học.

ĐỀ SỐ 1. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x-\sqrt{y+2}=\dfrac{3}{2} \\ y+2(x-2)\sqrt{x+2}=-\dfrac{7}{4} \end{cases} (x,y\in\mathbb{R}).$$

(Đề thi Olympic 30/4 năm 2017 – Trường THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, TP. Hồ Chí Minh đề nghị).

Cách 1. ĐK: $\begin{cases} x\ge -2 \\ y\ge -2 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x+2} \\ v=\sqrt{y+2} \end{cases}$ với $\begin{cases} u\ge 0 \\ v\ge 0 \end{cases}$ (*). Hệ trở thành:

$$\begin{cases} u^2-v=\dfrac{7}{2} & (1) \\ v^2+2(u^2-4)u=\dfrac{1}{4} & (2) \end{cases}.$$

Thế (1) vào (2) ta được phương trình:

$$\left(u^2-\frac{7}{2}\right)^2+2u^3-8u=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow u^4+2u^3-7u^2-8u+12=0$$

$$\Leftrightarrow (u-1)(u-2)(u^2+5u+6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=1 \\ u=2 \end{array}\right.$$

(vì $u^2+5u+6>0, \forall u\ge 0$).

• Với $u=1$ thay vào (1) ta được $v=-\dfrac{5}{2}$, không thỏa mãn.

• Với $u=2$ thay vào (1) ta được $v=\dfrac{1}{2}$, thỏa mãn (*).

Suy ra $x=2,\ y=-\dfrac{7}{4}$.

Vậy HPT có nghiệm: $\begin{cases} x=2 \\ y=-\dfrac{7}{4} \end{cases}$.

Cách 2. ĐK: $\begin{cases} x\ge -2 \\ y\ge -2 \end{cases}$. Khi đó, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$x-\frac{3}{2}=\sqrt{y+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{3}{2} & (3) \\ x^2-3x+\dfrac{1}{4}=y \end{cases}.$$

Thay $x^2-3x+\dfrac{1}{4}=y$ vào phương trình thứ hai của hệ, ta được: $(x-2)(x-1)+2(x-2)\sqrt{x+2}=0$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-1+2\sqrt{x+2})=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(\sqrt{x+2}-1)(\sqrt{x+2}+3)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \sqrt{x+2}=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right. .$$

Đối chiếu với điều kiện (3), ta có $x=2$ thỏa mãn.

Với $x=2 \Rightarrow y=-\frac{7}{4}$.

Vậy HPT có nghiệm: $\begin{cases} x=2 \\ y=-\frac{7}{4} \end{cases}$.

Nhận xét. *Về cách* 1:

- Quan sát hệ phương trình, ta nhận thấy phương trình thứ nhất chứa biểu thức $\sqrt{x+2}$, phương trình thứ hai chứa biểu thức $\sqrt{y+2}$, và điều quan trọng nhất là các số hạng còn lại biểu diễn được qua hai biểu thức chứa dấu căn trên. Chính từ phát hiện này, gợi ý cho ta đưa vào hai ẩn số phụ.
- Với phép đặt ẩn số phụ, ta đưa được hệ phương trình đã cho về hệ phương trình không còn dấu căn nữa: $\begin{cases} u^2-v=\frac{7}{2} \\ v^2+2(u^2-4)u=\frac{1}{4} \end{cases}$.

Hệ phương trình này "*dễ chịu*" hơn. Ý tưởng lời giải ở cách 1 là ở đó!

Về cách 2:

Khi giải hệ phương trình ta cần tìm quan hệ giữa các ẩn số dưới dạng đơn giản nhất. Với hướng đó, từ phương trình thứ nhất của hệ, ta biểu thị được $y=x^2-3x+\frac{1}{4}$. Đến đây "*nút thắt*" của bài toán đã được tháo gỡ. Việc giải bài toán tiếp theo trở nên thuận lợi. Việc xử lý bài toán theo cách 2 dường như trực quan và trôi chảy hơn. Bản chất của cách giải là sử dụng phương pháp thế.

ĐỀ SỐ 2. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} \frac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{y-x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} (x,y\in\mathbb{R}).$$

(Olympic 30/4 năm 2017 - THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định đề nghị).

Cách 1. ĐK: $0\le x^2-y^2<1$. Hệ phương trình đã cho được viết lại là

$$\begin{cases} \frac{x-y\sqrt{(x-y)(x+y)}}{\sqrt{1-(x-y)(x+y)}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1) \\ \frac{y-x\sqrt{(x-y)(x+y)}}{\sqrt{1-(x-y)(x+y)}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2) \end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$, khi đó $0\le x^2-y^2=uv<1$; $x=\frac{u+v}{2}$; $y=\frac{u-v}{2}$. Thay u, v vào hệ (1), (2) rồi cộng và trừ hai phương trình ấy cho nhau ta thu được hệ:

$$\begin{cases} u-u\sqrt{uv}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1-uv} \quad (3) \\ v+v\sqrt{uv}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1-uv} \quad (4) \end{cases}.$$

Nhân hai phương trình (3) và (4) cho nhau ta có: $uv(1-uv)=\frac{1}{4}(1-uv)$. Do $uv<1$ nên $uv=\frac{1}{4}$. Thay vào (3), (4) ta được:

$$(u;v)=\left(\frac{3+\sqrt{6}}{2};\frac{3-\sqrt{6}}{6}\right).$$

Vậy $(x;y)=\left(\frac{6+\sqrt{6}}{6};\frac{3+2\sqrt{6}}{6}\right)$.

Cách 2. ĐK: $0\le x^2-y^2<1$.

Lần lượt thực hiện các phép toán cộng, trừ theo vế hai phương trình của hệ, ta được:

$$\begin{cases} \frac{(x+y)(1-\sqrt{x^2-y^2})}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} \\ \frac{(x-y)(1+\sqrt{x^2-y^2})}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Suy ra

$$\frac{(x-y)(x+y)(1-\sqrt{x^2-y^2})(1+\sqrt{x^2-y^2})}{\sqrt{1-x^2+y^2}.\sqrt{1-x^2+y^2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-y^2)(1-x^2+y^2)}{1-x^2+y^2}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2-y^2=\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow y^2=x^2-\frac{1}{4}.$$

Trường hợp $y<0$ ta có $y=-\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}$.

Khi đó phương trình thứ nhất của hệ trở thành:

$$\frac{x+\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}.\sqrt{\frac{1}{4}}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow x+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4x+2\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}=3\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}=3-4x$$

$$\Rightarrow 12x^2-24x+10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{6+\sqrt{6}}{6}\\ x=\frac{6-\sqrt{6}}{6}\end{array}\right.$$

• Với $x=\frac{6+\sqrt{6}}{6}\Rightarrow y=-\frac{3+2\sqrt{6}}{6}$;

• Với $x=\frac{6-\sqrt{6}}{6}\Rightarrow y=\frac{3-2\sqrt{6}}{6}$.

Thử vào hệ phương trình ta thấy các giá trị tìm được không thỏa mãn.

Trường hợp $y>0$ ta có $y=\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}$. Khi đó phương trình thứ nhất của hệ được viết được thành

$$\frac{x-\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}.\sqrt{\frac{1}{4}}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 4x-2\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}=3$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}=4x-3\Rightarrow 12x^2-24x+10=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{6+\sqrt{6}}{6};\ x=\frac{6-\sqrt{6}}{6}$$

• Với $x=\frac{6+\sqrt{6}}{6}\Rightarrow y=\frac{3+2\sqrt{6}}{6}$;

• Với $x=\frac{6-\sqrt{6}}{6}\Rightarrow y=-\frac{3-2\sqrt{6}}{6}$.

Thử lại ta thấy HPT có nghiệm:

$$x=\frac{6+\sqrt{6}}{6};\ y=\frac{3+2\sqrt{6}}{6}.$$

Nhận xét. • Trong cách 1, khi khai triển hằng đẳng thức chứa trong các dấu căn, ta thấy các đại lượng $(x+y)$ và $(x-y)$ xuất hiện khá nhiều lần. Từ điều này, ta nghĩ tới việc đặt ẩn phụ. Khi đó hệ phương trình theo hai ẩn mới đơn giản hơn hệ phương trình ban đầu. Đây chính là điều ta cần hướng tới! Việc giải tiếp theo không quá phức tạp.

• Các biểu thức ở mẫu của vế trái trong hai phương trình là giống nhau. Theo suy nghĩ thông thường, ta thử thực hiện các phép toán cộng, trừ vế với vế hai phương trình của hệ. Bất ngờ, ta nhận được một hệ phương trình mới đẹp hơn. "Đẹp" theo nghĩa trong hệ phương trình mới xuất hiện những cặp nhân tử có dạng quen thuộc, gợi ý cho ta thực hiện phép nhân, chia lượng liên hợp. Đây chính là ý tưởng hình thành cách giải 2.

ĐỀ SỐ 3. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}3x^2-2y^2-xy+12x-17y-15=0 & (1)\\ \sqrt{2-x}+\sqrt{6-x-x^2}=y+\sqrt{2y+5}-\sqrt{y+4} & (2)\end{cases}$$

với $x,y\in\mathbb{R}$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 12 tỉnh Hưng Yên năm học 2017 – 2018).

Cách giải 1. ĐK: $\begin{cases}-3\le x\le 2\\ y\ge -\frac{5}{2}\end{cases}$ (3). Khi đó

$$(1)\Leftrightarrow (x-y-1)(3x+2y+15)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=x-1\\ 3x+2y+15=0\end{array}\right.$$

TH: $3x+2y+15=0$. Từ ĐK (3) suy ra:

$$3x+2y+15\ge -9-5+15>0 \text{ (loại).}$$

TH: $y=x-1$, thay vào phương trình (2) ta được

$$\sqrt{2-x}+\sqrt{6-x-x^2}=x-1+\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-x}+\sqrt{x+3}+\sqrt{(2-x)(x+3)}=x-1+\sqrt{2x+3}$$

(ĐK: $-\frac{3}{2}\le x\le 2$ (4)).

Đặt $\sqrt{2-x}+\sqrt{x+3}=t\Rightarrow\sqrt{(2-x)(x+3)}=\frac{t^2-5}{2}$.

Phương trình trở thành:

$$t+\frac{t^2-5}{2}=\sqrt{2x+3}+\frac{(2x+3)-5}{2} \qquad (5)$$

Xét hàm số $f(u)=u+\frac{u^2-5}{2}$ trên $(0;+\infty)$ có:

$$f'(u)=1+u>0,\forall u\in(0;+\infty),$$

nên hàm $f(u)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

$$\text{PT}(5) \Leftrightarrow f(t) = f(\sqrt{2x+3}) \Leftrightarrow t = \sqrt{2x+3}.$$

Trở lại phép đặt: $\sqrt{2-x} + \sqrt{x+3} = \sqrt{2x+3}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6-x-x^2} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ 2x^2 - x - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{41}}{4} \Rightarrow y = \frac{-3+\sqrt{41}}{4} \text{ (thỏa mãn các ĐK).}$$

Vậy HPT có nghiệm $(x;y) = \left(\frac{1+\sqrt{41}}{4}; \frac{-3+\sqrt{41}}{4}\right)$.

Cách 2. ĐK: $\begin{cases} -3 \le x \le 2 \\ y \ge -\frac{5}{2} \end{cases}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$3x^2 + (12-y)x - 2y^2 - 17y - 15 = 0.$$

Ta có: $\Delta = (12-y)^2 - 4.3.(-2y^2 - 17y - 15)$

$$= 25y^2 + 180y + 324 = (5y+18)^2 > 0.$$

Suy ra phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{y-12+5y+18}{2.3} = y+1 \\ x = \dfrac{y-12-5y-18}{2.3} = \dfrac{-2y}{3} - 5 \end{array}\right.$$

Đối chiếu ĐK, ta nhận được $x = y+1 \Leftrightarrow y = x-1$.

Thay $y = x-1$ vào phương trình thứ hai, ta được:

$$\sqrt{2-x} + \sqrt{6-x-x^2} = x - 1 + \sqrt{2x+3} - \sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow x - 1 - \sqrt{2-x} - \sqrt{(2-x)(x+3)} + \sqrt{2x+3} - \sqrt{x+3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[x - 1 - \sqrt{(2-x)(x+3)}\right] + \left[\sqrt{2x+3} - (\sqrt{x+3} + \sqrt{2-x})\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[(x-1) - \sqrt{(2-x)(x+3)}\right] + \frac{2x+3-2\sqrt{(2-x)(x+3)} - x - 3 - 2 + x}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+3} + \sqrt{2-x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[(x-1) - \sqrt{(2-x)(x+3)}\right] \times \left[1 + \frac{2}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+3} + \sqrt{2-x}}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) - \sqrt{(2-x)(x+3)} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(2-x)(x+3)} = x-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ (2-x)(x+3) = (x-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ 2x^2 - x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1+\sqrt{41}}{4} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{41}}{4} \end{array}\right.$$

Đối chiếu với ĐK, ta nhận được:

$$x = \frac{1+\sqrt{41}}{4} \Rightarrow y = \frac{-3+\sqrt{41}}{4}.$$

Vậy HPT đã cho có nghiệm duy nhất:

$$(x;y) = \left(\frac{1+\sqrt{41}}{4}; \frac{-3+\sqrt{41}}{4}\right).$$

Nhận xét.

- Mấu chốt trong cách giải 1 nằm ở chỗ phát hiện được nhân tử chung $(x-y-1)$ ẩn giấu trong phương trình thứ nhất của hệ. Để làm xuất hiện nhân tử chung, ta có thể tách nhóm các số hạng, đặt thừa số chung, đưa về dạng tích số, … Thay $y = x-1$ vào phương trình thứ hai của hệ, ta nhận được phương trình vô tỉ một ẩn số. Đến đây, khai thác quan hệ giữa các đại lượng $\sqrt{2-x}, \sqrt{3+x}, \sqrt{6-x-x^2}$ ta hình thành ý nghĩ đặt ẩn phụ và đưa phương trình về dạng $f(t) = f(\sqrt{2x+3})$. Đây là một ý nghĩ hay trong cách xử lý bài toán.

- Ở cách giải thứ hai, ta xem phương trình thứ nhất như một phương trình bậc hai với ẩn số x (hoặc ẩn số y). Khi đó việc tìm ra mối quan hệ của các ẩn số x và y được thực hiện dựa theo giải phương trình bậc hai. Ý nghĩ này không lạ lẫm, nhưng chính là điểm nhấn của cách giải 2. Một điểm khác cần lưu ý ở cách giải hai là khi chỉ ra được quan hệ giữa x và y, cần đối chiếu với điều kiện đã xét để nhận được đẳng thức $x = y+1$. Lúc này, ta thay y theo x vào phương trình thứ hai của hệ sẽ được phương trình đơn giản hơn, vì nếu thay x theo y ta sẽ bị vướng bởi bậc của phương trình, khi đó phương trình hình thành khá phức tạp.

ĐỀ SỐ 4. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x^3-y^3-3(2x^2-y^2+2y)+15x-10=0 \ (1) \\ \sqrt{x^2+y-5}+3\sqrt{y}-\sqrt{3x^2-6y+13}=0 \ (2) \end{cases}$$

với $x, y \in \mathbb{R}$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 12 tỉnh Thái Bình, năm học 2017 – 2018).

Cách 1. ĐK: $\begin{cases} x^2+y-5\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 3x^2-6y+13\ge 0 \end{cases}$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow (x-2)^3+3(x-2)=(y-1)^3+3(y-1).$$

Phương trình có dạng $f(x-2)=f(y-1)$ với

$$f(t)=t^3+3t, \forall t\in\mathbb{R}.$$

Ta có: $f'(t)=3t^2+3>0, \forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó:

$$f(x-2)=f(y-1)\Leftrightarrow x-2=y-1\Leftrightarrow y=x-1.$$

Thay $y=x-1$ vào phương trình (2) ta được:

$$\sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}-\sqrt{3x^2-6x+19}=0 \quad (3)$$

ĐK: $x\ge 2$. Khi đó

$$(3)\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}=\sqrt{3x^2-6x+19}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1}\sqrt{x^2+x-6}=x^2-8x+17$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-2}\sqrt{x^2+2x-3}=(x^2+2x-3)-10(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 10\left(\frac{x-2}{x^2+2x-3}\right)+3\sqrt{\frac{x-2}{x^2+2x-3}}-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{x-2}{x^2+2x-3}}=\dfrac{1}{5} \\ \sqrt{\dfrac{x-2}{x^2+2x-3}}=\dfrac{-1}{2}: \text{ vô nghiệm} \end{array}\right.$$

Ta có: $\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2+2x-3}}=\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow x^2-23x+47=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{23+\sqrt{341}}{2} \text{ (thỏa mãn các ĐK)} \\ x=\dfrac{23-\sqrt{341}}{2} \text{ (thỏa mãn các ĐK)} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của HPT là:

$$\begin{cases} x=\dfrac{23+\sqrt{341}}{2} \\ y=\dfrac{21+\sqrt{341}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=\dfrac{23-\sqrt{341}}{2} \\ y=\dfrac{21-\sqrt{341}}{2} \end{cases}.$$

Cách 2. ĐK: $\begin{cases} x^2+y-5\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 3x^2-6y+13\ge 0 \end{cases}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$(x^3-6x^2+12x-8)+(3x-6)$$
$$=(y^3-3y^2+3y-1)+(3y-3)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3+3(x-2)=(y-1)^3+3(y-1)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3-(y-1)^3+3[(x-2)-(y-1)]=0$$

$$\Leftrightarrow [(x-2)-(y-1)][(x-2)^2+(x-2)(y-1)+(y-1)^2]$$
$$+3[(x-2)-(y-1)]=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)[(x-2)^2+(x-2)(y-1)+(y-1)^2]$$
$$+3(x-y-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1)\underbrace{[(x-2)^2+(x-2)(y-1)+(y-1)^2+3]}_{u}=0$$

$$\Leftrightarrow x-y-1=0 \ (\text{do } u>0)$$

$$\Leftrightarrow y=x-1.$$

Thay $y=x-1$ vào PT(2) ta được:

$$\sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}-\sqrt{3x^2-6x+19}=0 \quad (3)$$

ĐK: $x\ge 2$. Khi đó

$$(3)\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}=\sqrt{3x^2-6x+19}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1}\sqrt{x^2+x-6}=x^2-8x+17$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-2}\sqrt{x^2+2x-3}=(x^2+2x-3)-10(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 10\left(\frac{x-2}{x^2+2x-3}\right)+3\sqrt{\frac{x-2}{x^2+2x-3}}-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{x-2}{x^2+2x-3}}=\dfrac{1}{5} \\ \sqrt{\dfrac{x-2}{x^2+2x-3}}=\dfrac{-1}{2}: \text{ vô nghiệm} \end{array}\right.$$

Ta có: $\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2+2x-3}}=\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow x^2-23x+47=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{23+\sqrt{341}}{2} \text{ (thỏa mãn các ĐK)} \\ x=\dfrac{23-\sqrt{341}}{2} \text{ (thỏa mãn các ĐK)} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của HPT là:

$$\begin{cases} x=\dfrac{23+\sqrt{341}}{2} \\ y=\dfrac{21+\sqrt{341}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=\dfrac{23-\sqrt{341}}{2} \\ y=\dfrac{21-\sqrt{341}}{2} \end{cases}$$

Nhận xét.

• Khi quan sát kỹ một chút, ta thấy hình ảnh của hàm số đại diện ẩn giấu trong phương trình thứ nhất của hệ. Thật vậy, ở cách 1 chỉ một vài phép biến đổi quen thuộc, ta tìm được hàm đại diện $f(t)=t^3+3t$. Chú ý rằng kỹ thuật vận dụng các hằng đẳng thức để tìm ra quy luật xuất hiện của các đại lượng, từ đó hình thành hàm số cần xét thường được sử dụng để giải trong các đề thi chọn học sinh giỏi hằng năm của các tỉnh.

• Cách giải thứ 2 biến đổi phương trình thứ nhất của hệ về phương trình tích. Thật ra cách xử lý này với hệ phương trình đang xét là không hay! Tuy nhiên vấn đề được đặt ra là cần khai thác những phương pháp có thể giải được bài toán. Cách giải này có thể không hay với bài toán này, nhưng lại cần thiết với bài toán khác thì sao! Nếu có một chút gì đó đặc sắc ở cách giải này thì đó chính là công đoạn biến đổi phương trình $\sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}=\sqrt{3x^2-6x+19}$ về dạng phương trình bậc hai. Một cách xử lý rất kinh nghiệm, cần được lưu ý.

ĐỀ SỐ 5. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} (\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{y^2+1}+y)=\sqrt{x} \\ 2x^3(y^2+1)-(x+1)xy=2 \end{cases} (x,y\in\mathbb{R}).$$

(Đề thi học sinh giỏi cấp tỉnh lớp 12 tỉnh Hà Tĩnh, năm học 2017- 2018).

Cách 1. ĐK: $x\ge 0$.

Nhận xét: $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $x>0$, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{y^2+1}+y)=(\sqrt{x+1}+1)\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow x(\sqrt{y^2+1}+y)=(\sqrt{x+1}+1)\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y^2+1}+y=\sqrt{\frac{1}{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}} \quad (*).$$

Xét hàm số: $f(t)=\sqrt{t^2+1}+t$ trên $\mathbb{R}$.

Phương trình (*) viết dưới dạng: $f(y)=f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}+1=\dfrac{t+\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}}$

$$>\frac{t+\sqrt{t^2}}{\sqrt{t^2+1}}=\frac{t+|t|}{\sqrt{t^2+1}}\ge 0,\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên tập $\mathbb{R}$. Do đó: $f(y)=f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Thay $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ vào phương trình thứ hai của hệ, ta được:

$$2x^3\left(\frac{1}{x}+1\right)-(x+1)\sqrt{x}=2$$

$$\Leftrightarrow 2x^3+2x^2-x\sqrt{x}-\sqrt{x}=2.$$

Đặt $u=\sqrt{x}$, ĐK: $u>0$. Khi đó, phương trình (*) trở thành: $2u^6+2u^4-u^3-u-2=0$

$$\Leftrightarrow (u-1)(2u^5+2u^4+4u^3+3u^2+3u+2)=0$$

$$\Leftrightarrow u=1\Rightarrow x=1\Rightarrow y=1.$$

Vậy HPT có nghiệm duy nhất là $(x;y)=(1;1)$.

Cách 2. ĐK: $x\ge 0$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{y^2+1}+y)=\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{y^2+1}+y)=\sqrt{x}(\sqrt{x+1}+1)$$

$$\Leftrightarrow x(\sqrt{y^2+1}+y)=\sqrt{x}(\sqrt{x+1}+1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{y^2+1}+y)=\sqrt{x+1}+1.$$

Ta có: $(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{y^2+1}+y)=\sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{y^2+1}+y)(\sqrt{y^2+1}-y)=\sqrt{x}(\sqrt{y^2+1}-y)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}-1=\sqrt{x}(\sqrt{y^2+1}-y)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+1=\sqrt{x}(\sqrt{y^2+1}-y)+2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{y^2+1}+y)=\sqrt{x}(\sqrt{y^2+1}-y)+2$$

$\Leftrightarrow 2y\sqrt{x}=2 \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Thay $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ vào phương trình thứ hai của hệ, ta được:

$$2x^3\left(\frac{1}{x}+1\right)-(x+1)\sqrt{x}=2$$

$$\Leftrightarrow 2x^3+2x^2-x\sqrt{x}-\sqrt{x}=2 \qquad (*)$$

Đặt $u=\sqrt{x}$, ĐK: $u>0$. Khi đó, phương trình (*) trở thành: $2u^6+2u^4-u^3-u-2=0$

$$\Leftrightarrow (u-1)(2u^5+2u^4+4u^3+3u^2+3u+2)=0$$

$$\Leftrightarrow u=1\Rightarrow x=1\Rightarrow y=1.$$

Vậy HPT có nghiệm duy nhất là $(x;y)=(1;1)$.

Nhận xét.

• Cách giải thứ nhất áp dụng tính đơn điệu của hàm số vào giải phương trình. Để làm điều này thông thường cần biến đổi 2 vế sao cho một vế được biểu diễn theo ẩn x, vế còn lại biểu diễn theo y và 2 vế này có nét tương đồng. Ở phương trình thứ nhất của hệ, vế trái vừa có ẩn x và y, trong khi vế phải chỉ có ẩn x. Điều đó đem đến cho ta ý tưởng về việc viết vế trái hoàn toàn theo ẩn y và vế phải theo ẩn x. Như vậy, ta cần phải triệt tiêu ẩn số x bên vế phải. Vì thế, việc nhân cả hai vế cho lượng liên hợp của $(\sqrt{x+1}-1)$ là phép biến đổi đúng hướng! Khi nhân lượng liên hợp, vế trái còn xuất hiện ẩn số x nên ta chia cả hai vế cho x (điều kiện $x\neq 0$ đã xét từ đầu bài) để vế trái chỉ biểu diễn theo y, vế phải biểu diễn theo x. Khi chia cả hai vế cho x thì vế trái và phải đều xuất hiện dạng hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+1}+t$. Đến đây bài toán đã được giải quyết!

• Ý tưởng trong cách giải 2 là phá vỡ cấu trúc của các dấu căn, bằng phép nhân lượng liên hợp để chuyển bài toán về dạng đơn giản hơn. Ta lần lượt nhân lượng liên hợp đối với từng nhân tử ở vế trái. Từ đó, xuất hiện $(\sqrt{x^2+1}-1)$ và $(\sqrt{x^2+1}+1)$ ở cả hai phép nhân liên hợp. Như vậy, ta có thể biến đổi $(\sqrt{x^2+1}-1)$ thành $(\sqrt{x^2+1}+1)$ bằng cách cộng hai vế của phương trình cho 2. Phép biến đổi này tạo ra một phương trình mới đơn giản hơn và dễ giải quyết hơn phương trình ban đầu.

ĐỀ SỐ 6. *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases}2\sqrt{x+3y+2}-3\sqrt{y}=\sqrt{x+2}\\ \sqrt{y-1}-\sqrt{4-x}+8-x^2=0\end{cases}\ (x,y\in\mathbb{R}).$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 12 thành phố Hải Phòng, năm học 2017 – 2018).

Với đề này tác giả chưa tìm thấy đáp án của Sở giáo dục và Đào tạo thành phố Hải Phòng, tác giả xin đề xuất một lời giải.

Lời giải. Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{y}\\ b=\sqrt{x+2}\end{cases}$. Ta có $\begin{cases}a\geq 0\\ b\geq 0\end{cases}$.

Phương trình thứ nhất của hệ viết được thành

$$2\sqrt{3a^2+b^2}-3a=ba\Leftrightarrow (2\sqrt{3a^2+b^2})^2=(3a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow 12a^2+4b^2=9a^2+6ab+b^2\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2=0\Leftrightarrow a=b$$

Do đó ta có: $\sqrt{y}=\sqrt{x+2}\Leftrightarrow y=x+2$.

Thay $y=x+2$ vào phương trình thứ hai của hệ, ta được: $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+8-x^2=0$.

ĐK: $-1\leq x\leq 4$. Ta có:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+8-x^2=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}-2+1-\sqrt{4-x}+9-x^2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}+\frac{x-3}{1+\sqrt{4-x}}+(3-x)(x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}+\frac{1}{1+\sqrt{4-x}}-x-3\right)=0.$$

Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}+\frac{1}{1+\sqrt{4-x}}-x-3<0,\forall x\in[-1;4].$$

Do đó $x=3\Rightarrow y=5$. Vậy HPT có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;5)$.

Nhận xét. Quan sát phương trình thứ nhất của hệ, ta phát hiện ra mối liên hệ giữa các đại lượng $\sqrt{x+3y+2},\sqrt{y},\sqrt{x+2}$, chính từ phát hiện này ta có thể đưa ẩn số phụ vào để việc thực hiện các phép tính được đơn giản. Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{y}\\ b=\sqrt{x+2}\end{cases}$, ta có:

$\begin{cases} a \ge 0 \\ b \ge 0 \end{cases}$. Từ đây ta suy ra được $a = b$ và từ đó tìm được nghiệm của hệ.

ĐỀ SỐ 7. *Giải hệ phương trình*:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3x^2 + 6x - 3y + 4 = 0 \quad (1) \\ (x+1)\sqrt{y+1} + (x+6)\sqrt{y+6} = x^2 + 7x + 12 \quad (2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{R}).$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 12 tỉnh Hòa Bình, năm học 2017 – 2018).

Cách 1. ĐK: $y \ge -1$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với: $(x+1)^3 + 3(x+1) = y^3 + 3y$.

Phương trình có dạng $f(x+1) = f(y)$ với $f(t) = t^3 + 3t,\ t \in \mathbb{R}$.

Hàm số $f(t)$ có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t$ nên là hàm đồng biến. Suy ra $x + 1 = y$. Thay $y = x + 1$ vào phương trình (2) ta có:

$$(x+1)\sqrt{x+2} + (x+6)\sqrt{x+7} = x^2 + 7x + 12$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(\sqrt{x+2} - 2) + (x+6)(\sqrt{x+7} - 3) = x^2 + 2x - 8$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - x - 4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \dfrac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - x - 4 = 0 \ (*) \end{array}\right.$$

Ta chứng minh phương trình (*) vô nghiệm:

Thật vậy

$$\left(\frac{x+2}{\sqrt{x+2}+2} - \frac{x+2}{2}\right) + \left(\frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - \frac{x+6}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} < 0, \forall x \ge -2.$$

Do đó HPT có nghiệm là: $(x; y) = (2; 3)$.

Cách 2. ĐK: $y \ge -1$. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow (x+1)^3 + 3(x+1) = y^3 + 3y$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 - y^3 + 3(x - y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y + 1)[(x+1)^2 + y(x+1) + y^2 + 3] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y - 1.$$

Thay $y = x - 1$ vào phương trình (2) ta có:

$$(x+1)\sqrt{x+2} + (x+6)\sqrt{x+7} = x^2 + 7x + 12$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(\sqrt{x+2} - 2) + (x+6)(\sqrt{x+7} - 3) = x^2 + 2x - 8$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - x - 4\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \dfrac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - x - 4 = 0 \ (*) \end{array}\right.$$

Chứng minh phương trình (*) vô nghiệm như ở cách 1. Vậy HPT có nghiệm $(x; y) = (2; 3)$.

Nhận xét.

- Ta phát hiện ngay phương trình thứ nhất của hệ có dạng quen thuộc. Thực hiện phép biến đổi, đưa phương trình về dạng

$$(x+1)^3 + 3(x+1) = y^3 + 3y$$

là phép biến đổi đúng hướng. Đến đây sử dụng tính đơn điệu của hàm số ta tìm được $y = x + 1$. Đây chính là nội dung chính của cách giải 1.

- Ý tưởng trong cách giải 2 là không sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số. Cách xử lý này tỏ ra phù hợp với đối tượng thí sinh chưa học chương trình lớp 12. Thực chất của cách giải là biến đổi để xuất hiện nhân tử chung, đưa về phương trình tích số.

- Ta trao đổi thêm bước giải phương trình vô tỉ một ẩn: Ta phát hiện được nghiệm $x = 2$. Tách thừa số $x - 2$, ta nhận được:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - x - 4 = 0. \quad (*)$$

Thao tác biến đổi $-x - 4 = -\frac{x+2}{2} - \frac{x+6}{2}$ thật sự là điểm nhấn trong việc chứng minh (*) vô nghiệm.

Kết luận. Với việc phân tích các hệ phương trình trong kì thi chọn học sinh giỏi năm học 2017 – 2018 của một số tỉnh, thành phố, bài viết đã cố gắng đưa ra cách nhìn nhận bài toán dưới nhiều khía cạnh khác nhau. Việc phát hiện, khai thác được những điểm mấu chốt, những nút thắt ẩn giấu bên trong bài toán chính là cơ sở để giải quyết bài toán. Hy vọng rằng bài viết sẽ phần nào giúp bạn đọc quen, tự tin khi gặp và giải những bài toán về hệ phương trình.



LỊCH SỬ HÌNH THÀNH VÀ PHÁT TRIỂN LƯỢNG GIÁC HỌC

LÊ QUỐC HÁN (*Trường Đại Học Vinh*)
LÊ THỊ NGỌC THÚY (*Trường CĐSP Nghệ An*) (***Sưu tầm và giới thiệu***)

1. Thời kỳ Ai Cập và Babylon.

Lượng giác học phát sinh từ đâu và bắt đầu thời kỳ nào vẫn là câu hỏi chưa có lời đáp. Tuy nhiên dựa vào những thành tựu toán học qua các thời đại đến nay còn lưu giữ được, người ta cho rằng người Ai Cập cổ đại chưa biết đến nhiều về *Lượng giác học*, mặc dù họ đã xây nên những Kim tự tháp khổng lồ mà nếu không có những kiến thức cơ bản của *Hình học* và *Lượng giác học* thì khó hoàn thành nổi. Tuy nhiên, người Babylon cổ đại chắc chắn đã biết đến Lượng giác học. Trong bảng số được viết bằng chữ Babylon cổ vào khoảng 1900 đến 1600 trước công nguyên, các hàm số lượng giác của các góc nhọn cách 1^0 từ 45^0 xuống 31^0 đã được tính chi tiết và chính xác. Việc tính toán này được giải thích dựa trên các hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Có một số các bài toán trong *bản cỏ chỉ Rhind* đề cập đến cotang của góc nhị diện ở đáy của một hình chóp. Hơn nữa các công trình nghiên cứu mới về lịch sử toán học cổ đại của Mesopotamia cho thấy một sự phát triển có thể đánh giá được về *Lượng giác học* thực hành. Các nhà thiên văn học Babylon của thế kỷ IV và V trước công nguyên đã thu thập được một khối lượng đáng kể các dữ kiện quan sát, và ngày nay người ta biết được rằng phần lớn các dữ kiện đó đã được chuyển qua tay người Hy Lạp. Chính thiên văn học xa xưa này đã khai sinh ra *Lượng giác học cầu.*

2. Lượng giác học Hy Lạp cổ đại.

Nhà thiên văn học được xem là xuất sắc nhất của thời cổ đại là Hipparchus thành đạt vào năm 140 trước công nguyên. Mặc dù quan sát về xuân phân đã được Hipparchus ghi lại ở Alexandria vào năm 146 trước công nguyên, song những quan sát quan trọng nhất của ông được ghi lại ở Alexandria vào năm 146 trước công nguyên, song những quan sát quan trọng nhất lại được thực hiện ở đài quan sát nổi tiếng của trung tâm thương mại Rhodes. Ông là một nhà quan sát cực kỳ cẩn thận và trong thiên văn, nhiều kỳ tích đã thuộc về ông như việc xác định thời gian của một tháng âm lịch trung bình chỉ sai khác $1''$ so với giá trị hiện nay được chấp thuận, việc tính toán độ nghiêng của hoàng đạo, việc khám phá và đánh giá tiếng động hàng năm của các phân điểm. Ngoài ra ông đã tính toán *thị sai* của Mặt Trăng, xác định cận điểm và chuyển động trung bình của Mặt Trăng và đã ghi vào danh mục được 850 các định tinh (ngôi sao coi như đứng yên). Chính Hipparchus hoặc có lẽ cả Hipsicles (vào khoảng 180 trước công nguyên) đã đưa vào Hy Lạp việc chia một đường tròn thành 360^0, đã biện minh cho việc định vị trên mặt đất bằng vĩ tuyến và kinh tuyến. Sự hiểu biết về những thành tựu này chỉ được lưu truyền lại bằng miệng, bởi vì hầu như chúng ta không còn bút tích nào của Hipparchus cả.



Nhà toán học Hy Lạp Cổ đại Hipparchus
(190 - 120 TCN)

Tuy nhiên điều chúng ta quan tâm ở đây là những đóng góp của ông vào sự phát triển của *Lượng giác học.* Ông để lại cho hậu thế một tác phẩm gồm 12 quyển bàn về việc xây dựng một

bảng các dây cung. Chắc là dựa theo bảng đó mà sau này Claudius Ptolemy đã ghi cho chiều dài của các dây cung trương tất cả các góc ở tâm của một hình tròn cho trước theo khoảng nửa độ một, từ $0,5^0$ đến 180^0. Thực ra bảng này lập được nhờ công thức $\sin\alpha = \frac{AB}{2R}$ trong đó AB là độ dài dây trương cung có góc ở tâm bằng α và R là bán kính đường tròn. Bán kính của vòng tròn được chia thành 60 phần bằng nhau và chiều dài của dây cung được biểu thị theo cơ số 60 mà một trong các phần đó là một đơn vị. Như vậy, nếu dùng ký hiệu $\text{crd}\alpha$ để biểu thị chiều dài của dây trương cung góc ở tâm α, ta ghi nhận được, chẳng hạn như $\text{crd}\,36^0 = 37^p 4'55''$, có nghĩa là dây trương góc ở tâm 36^0 thì bằng $\frac{37}{60}$ của bán kính cộng thêm $\frac{4}{60}$ của một trong những phần nhỏ đó, cộng thêm $\frac{55}{3600}$ nữa của một trong các phần nhỏ. Giả sử AB là dây cung của đường tròn tâm O sao cho $\widehat{AOB} = 2\alpha$ và M là trung điểm AB, thế thì $\sin\alpha = \frac{AM}{OA} = \frac{\text{crd}\,2\alpha}{120}$. Như vậy bảng các dây cung của Ptolemy chủ yếu cho các sin của các góc cách nhau $15'$, từ 0^0 đến 90^0.

Cách tính chiều dài các dây cung đã được Ptolemy giải thích một cách thanh thoát và có thể hiểu đó là cách giải thích của Hipparchus. Rõ ràng Hipparchus đã sử dụng có hệ thống các bảng của mình và có nhận thức được những tương đương của nhiều công thức mà hiện nay được dùng để *giải các tam giác vuông cầu*.

Theon (khoảng 390 sau công nguyên) cũng nói đến một luận văn gồm sáu quyển về các dây cung của một đường tròn được viết bởi Menelaus ở Alexandria, cùng thời với Plutarch (vào khoảng 100 sau công nguyên). Công trình này cũng như các công trình khác của Menelaus đều đã bị thất lạc. Tuy nhiên, cũng may mà luận văn ba quyển của Menelaus *Sphaerica* có được lưu giữ bằng tiếng Ảrập. Công trình này đã soi rọi một tia sáng lên sự phát triển của người Hy Lạp về *Lượng giác học*. Trong quyển I lần đầu tiên xuất hiện định nghĩa về một *tam giác cầu*. Quyển này nói về nhiều mệnh đề mà Euclid đã xác lập cho các tam giác phẳng như các định lý về các tam giác bằng nhau quen thuộc, định lý về các tam giác cân…để xác lập cho các tam giác cầu. Ngoài ra còn xác định tính đồng dạng của hai tam giác cầu có các góc của tam giác này bằng các góc của tam giác kia (mà không giống trong mặt phẳng!) và cả xác lập một sự kiện động trời mà gần hai nghìn năm sau người Châu Âu mới tìm thấy trong nỗi ngạc nhiên và nghi ngờ: *tổng các góc của một tam giác cầu lớn hơn hai góc vuông*!. Các tam giác cầu đối xứng qua đường tròn lớn được xem là tương đẳng. Quyển II bao gồm các định lý về thiên văn học. Trong quyển III đã phát triển *Lượng giác cầu* thời đó chủ yếu được suy từ một mệnh đề có nhiều ứng dụng mạnh mẽ mà ngày nay nhiều học sinh THCS biết đến dưới cái tên Định lý Menelaus: *Nếu một đường hoành (cát tuyến) cắt các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC tương ứng tại các điểm L, M, N thì* $\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}}.\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}}.\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = -1.$

Trong trường hợp tương tự ở hình cầu, đường hoành là đường tròn lớn cắt các cạnh BC, CA, AB của tam giác cầu ABC tương ứng tại các điểm L, M, N thì nhận được kết quả tương tự $\frac{\sin\widehat{AN}}{\sin\widehat{NB}}.\frac{\sin\widehat{BL}}{\sin\widehat{LC}}.\frac{\sin\widehat{CM}}{\sin\widehat{MA}} = -1.$

Menelaus đã thừa nhận điều trên ở trường hợp hình phẳng là quá rõ và ông đã dùng để xác định trường hợp hình cầu. Một bộ phận của *Lượng giác cầu* có thể suy từ định lý này bằng cách xét các tam giác đặc biệt và các đường hoành đặc biệt. Mệnh đề đảo của cả hai trường hợp hình phẳng và hình cầu của định lý này cũng đúng.

Một công trình thiên văn học khác có ảnh hưởng to lớn đến sự phát triển toán học Hy Lạp thế kỷ II trước công nguyên được viết bởi Claudius Ptolemy ở Alexandria vào khoảng 150 sau công nguyên. Công trình này mang tên *Syntaxis Mathematica* hay "Sưu tập toán học", dựa trên những bài viết của Hipparchus và được ghi nhận là đầy súc tích và mỹ lệ. Về sau các nhà dịch thuật Ảrập gọi nó là *Almagest*. Tác phẩm này gồm 13 quyển. Quyển I bên cạnh một số tài liệu mở đầu về thiên văn học là bảng dây cung nói ở trên cùng với một giải thích ngắn việc nó được ra đời từ một mệnh đề mà ngày nay gọi là Định lý Ptolemy: *Trong một tứ giác nội tiếp, tích các đường chéo bằng tổng các tích của hai cặp cạnh đối diện*. Từ định lý này ông rút ra các hệ quả sau đây:

1. *Nếu* a *và* b (với $a \geq b$) *là các dây cung của một đường tròn với bán kính đơn vị thì*

$$s = \frac{a}{2}\sqrt{4-b^2} + \frac{b}{2}\sqrt{4-a^2}$$

là dây của tổng hai cung đó và $d = \frac{a}{2}\sqrt{4-b^2} - \frac{b}{2}\sqrt{4-a^2}$ *là dây của hiệu hai cung đó.*

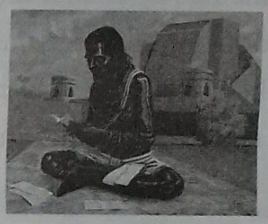
2. *Nếu* t *là dây cung của đường tròn bán kính đơn vị thì* $p = \sqrt{2-\sqrt{4-t^2}}$ *là dây cung của nửa cung đó.*

Dựa vào các kết quả này ông xây dựng bảng các dây cung với khoảng cách $0,5^0$.

Quyển II nói về các hiện tượng tùy thuộc vào tính hình cầu của trái đất. Các quyển III, IV, V phát triển hệ thống địa tâm của thiên văn bằng các epicyclic. Trong quyển VI có lời giải bài toán ba điểm trong trắc địa: xác định điểm để từ đó các cặp ba điểm cho trước được nhìn dưới các góc cho trước. Trong quyển VII trình bày lý thuyết các thiên thực và đưa ra giá trị bốn chữ số của π ($\pi = \frac{377}{120}$ hay $\pi = 3,1416$). Các quyển VII và VIII trình bày danh mục của 1028 các định tinh. Các quyển còn lại nói về các hành tinh. Có thể nói rằng *Almagest* là một công trình mẫu mực về thiên văn học tính đến trước khi Copernicus và Kepler xuất hiện.

3. Lượng giác học Ấn Độ cổ đại.

Nền toán học Ấn Độ thời kỳ trung đại phát triển rực rỡ nhất vào khoảng từ thế kỷ VI đến thế kỷ XII với những tên tuổi lớn: Aryabhata I (476 - 550) (vào thế kỷ VI), Brahmagupta - người được xem là nhà toán học Hinđu lỗi lạc nhất của thế kỷ VII, Mahavira (vào giữa thế kỷ IX), Bhaskara (sống vào cuối thế kỷ XI đầu thế kỷ XII)... Tuy nhiên người Hindu (dân tộc chính của Ấn Độ) không thạo lắm về hình học cũng như lượng giác học. Những phép chứng minh chặt chẽ thường ít gặp và không phát triển theo tiên đề. Hình học và lượng giác học của họ phần lớn dựa theo kinh nghiệm và nói chung có liên hệ tới đo lường.



Nhà toán học Ấn Độ Brahmagupta (598 - 668 SCN)

Sulvasutras cổ đại cho thấy người Hindu thời xưa đã áp dụng hình học và lượng giác học để xây dựng đền đài và khi làm việc đó có sử dụng tới hệ thức Pythagoras.

Cả Brahmagupta và Mahavira không những đều biết công thức tính diện tích tam giác theo ba cạnh của Heron mà còn thiết lập công thức tương tự cho tứ giác nội tiếp

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

trong đó S là diện tích của tứ giác nội tiếp đường tròn có các cạnh là a, b, c, d và nửa chu

vì p. Không những vậy, họ còn mở rộng công thức đó cho tứ giác lồi tùy ý

$$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\frac{A+C}{2},$$

trong đó A,C là hai góc đối diện của tứ giác.

Đáng chú ý hơn cả trong hình học và cũng là điều tuyệt diệu có một không hai, là những kết quả đáng chú ý của Brahmagupta liên quan đến tứ giác:

1. *Giả sử $ABCD$ là tứ giác nội tiếp với bốn cạnh liên tiếp có độ dài là a,b,c,d và các đường chéo có độ dài là m, n. Khi đó*

$$m^2=\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}, n^2=\frac{(ac-bd)(ad+bc)}{ab+cd}$$

2. *Trong tứ giác nội tiếp có $mn=ac+bd$* (Định lý Ptolemy).

3. *Trong tứ giác nội tiếp có $m\delta\cos\varphi=ab+cd$, $n\delta\cos\varphi=ad+bc$, trong đó đường kính $MN=\delta$ vuông góc nới một trong hai đường chéo và φ là góc giữa MN với đường chéo kia.*

4. *Nếu a, b, c và A, B, C là các số nguyên dương sao cho $a^2+b^2=c^2, A^2+B^2=C^2$ thì tứ giác nội tiếp có các cạnh kế tiếp nhau aC,cB,bC,cA* (gọi là hình thang Brahmagupta) *sẽ có diện tích và các đường chéo là những số hữu tỷ, hơn nữa các đường chéo của tứ giác này vuông góc với nhau.*

5. *Diện tích của một tứ giác nội tiếp lẫn ngoại tiếp đường tròn bằng căn bậc hai của tích các cạnh của nó.*

6. *Một tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau khi và chỉ khi tổng bình phương của một cặp cạnh đối diện bằng tổng các bình phương của cặp cạnh đối diện còn lại* (Định lý bốn điểm).

Giống như người Hy Lạp, người Hindu xem *Lượng giác học* là một công cụ để họ nghiên cứu thiên văn. Họ đã dùng cách chia quen thuộc đối với chúng ta thành độ, phút, giây và có soạn các bảng sin, nghĩa là họ đã soạn các bảng nửa dây cung chứ không phải các bảng dây cung như người Hy Lạp. Người Hindu cũng đã dùng các tương đương của sin, côsin và sin ngược $\left(ver\sin A=1-\cos A\right)$. Họ tính sin của nửa góc dựa vào hệ thức $ver\sin 2A=2\sin^2 A$. Trong thiên văn học họ giải các *tam giác phẳng* và *tam giác cầu*. Tuy nhiên *Lượng giác học* của họ chủ yếu mô tả mang sắc thái số học hơn hình học.

4. Lượng giác học Ả Rập cổ đại.

Song song với sự phát triển của nền toán học Ấn Độ, nền toán học Ả Rập trung đại phát triển rực rỡ nhất vào khoảng thế kỷ VIII đến XII. Vai trò quan trọng của người Ả Rập trong hình học và lượng giác học là ở việc lưu giữ nhiều hơn là việc khám phá. Thế giới chịu ơn họ rất nhiều ở chỗ đã bền bỉ dịch thuật thỏa đáng các tác phẩm kinh điển của Hy Lạp.

Có một công trình nghiên cứu đẹp về hình học và lượng giác học của Abul - Wefa (940 - 998), trong đó ông cho biết cách đặt các đỉnh của một đa diện đều lên hình cầu ngoại tiếp chúng mà chỉ dùng compa với độ mở nhất định. Chúng ta cũng biết tới một phép giải hình học của Omar Khayyam (khoảng 1100) cho phương trình bậc ba và công trình tuyệt hảo *Rubaiyat* của ông đã có ảnh hưởng rất lớn về những nghiên cứu về *định đề đường thẳng song song* của Nasir ed - din (vào khoảng 1250) sau này. Nasir đã cho công bố, kèm theo lời bình và những "chỉnh lý", một phần của một công trình *Bàn về những khó khăn trong hình học Euclid* của Khayyam. Trong phần này của công trình trước đó, lần đầu tiên xét đến ba tình huống khi chứng minh *định đề đường thẳng song song* mà sau này Saccheri đã gọi tên là các *giả thiết góc nhọn*, *giả thiết góc tù* và *giả thiết góc vuông*. Ngoài ra, Nasir ed - din cũng đưa ra một phương pháp độc đáo về chứng minh Định lý Pythagoras.

Tên tuổi của al - Hatiam, hoặc phổ biến hơn, Alhazen (vào khoảng 965 - 1039) đã được lưu

truyền trong toán học cùng với bài toán gọi là *Alhazen*: "*Từ hai điểm đã cho của một hình tròn cho trước trong mặt phẳng hãy dựng hai đường thẳng cắt nhau trên đường tròn và tạo thành hai góc bằng nhau với tiếp tuyến của đường tròn tại điểm đó*". Bài toán này đã dẫn tới một phương trình bậc bốn và đã được giải bằng phương cách Hy Lạp là cho một hyperbol và một đường tròn giao nhau. Alhazen sinh ở Basra miền nam Iraq và có lẽ ông là nhà vật lý học Hồi giáo lớn nhất. Bài toán trên ra đời cùng với cuốn *Quang học* của ông, một luận văn có ảnh hưởng lớn ở châu Âu sau này.

Người ta đã kể lại một câu chuyện cảm động về Alhazen. Có một lần, chẳng may mắn chút nào, ông bốc đồng rằng mình có thể thiết kế một cái máy có thể kiểm tra và điều chỉnh nạn lũ lụt hàng năm ở sông Nil. Do đó ông được giáo chủ Hakim triệu về Cairo để giải thích cách làm. Vì biết rằng sơ đồ của mình hoàn toàn phi thực tiễn và cũng do sợ cơn thịnh nộ của giáo chủ nên Alhazen phải giả vờ điên vì thời bấy giờ người điên dại được bảo vệ rất đặc biệt. Rất cẩn thận cảnh giác, ông đã phải kéo dài sự lừa dối đó cho tới khi Hakim qua đời vào năm 1021.

Giống những người Hindu, các nhà toán học Ả Rập thường tự coi mình là các nhà thiên văn học và tỏ ra quan tâm nhiều tới *Lượng giác học*. Họ có những thành tựu trong việc soạn thảo các *bảng lượng giác*. Họ được thừa nhận đã sử dụng toàn bộ sáu hàm lượng giác và có cải tiến để rút ra các công thức lượng giác cầu. *Luật cosin* cho một tam giác cầu lệch

$$\cos\alpha = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A$$

do al - Battan (Latin hóa là Albtegnius, khoảng 920) đưa ra, và công thức $\cos B = \cos b\sin A$ cho một tam giác cầu ABC có góc vuông tại C, được gọi là *định lý Geber* theo tên nhà thiên văn học Hồi giáo phương tây Jabir ibn Aflah (thường được gọi là Geber, khoảng 1130), thành đạt tại Seville.

5. Thay cho lời kết.

Có thể nói, đến nền toán học Ả Rập, *Lượng giác học* đã phát triển và hoàn thiện đến mức sâu sắc dưới quan điểm tĩnh và kết hợp chặt chẽ hình học đã đạt được những thành tựu ứng dụng to lớn trong thiên văn học. Về sau, từ thế kỷ XVIII, ở châu Âu, do sự phát triển mạnh mẽ của giải tích học, *Lượng giác học* được nhìn dưới quan điểm động hơn (*quan điểm hàm*) nên ngoài sáu hàm số lượng giác mà người Ả Rập xét đến, các hàm số lượng giác ngược được quan tâm nghiên cứu và tỏ ra có những ứng dụng bất ngờ. Chẳng hạn John Machin (1706) đã tìm được 100 chữ số thập phân của *số Pi* (π) bằng cách sử dụng hệ thức

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right),$$

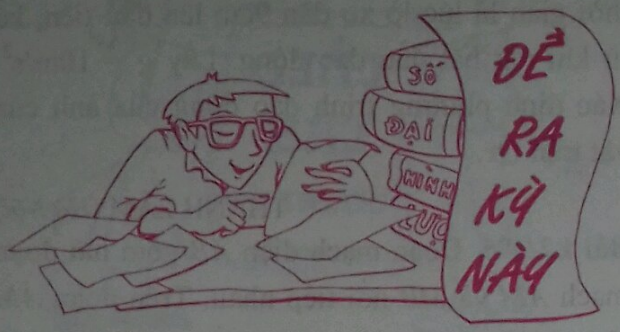
và đến năm 1844 thì Zachaius Danse cùng với Strasznicky đã tính được số *số Pi* (π) với 200 chữ số thập phân bằng cách sử dụng hệ thức

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + arc\tan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right).$$

Về sau, cùng với sự ra đời của phép tính vi tích phân, các chuỗi lượng giác được nghiên cứu và cho nhiều thành tựu toán học to lớn với những kết quả đẹp đến bất ngờ, chẳng hạn từ chuỗi hội tụ

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \left(-1 \le x \le 1\right)$$

được đưa ra bởi nhà toán học Scotland James Gregory (hệ thức Leibniz) đã nhận được kết quả $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ bằng cách cho $x = 1$ vào trong chuỗi trên.



CÁC LỚP THCS

Bài T1/495 (Lớp 6). Chứng minh rằng không thể phân tích số $2^{9^{2018}}$ thành tổng của n số nguyên dương liên tiếp $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T2/495 (Lớp 7). Tìm mười hai chữ số tận cùng của số tự nhiên 5^{1040}.

HUỲNH THANH TÂM
(Cán Bộ Bưu điện thị xã An Nhơn, Bình Định)

Bài T3/495. Giải các hệ phương trình nghiệm nguyên sau:

a) $\begin{cases} 3a^2+2ab+3b^2=12 \\ a^2+b^2=c^2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} (z-3)(x^2+y^2)-2xy=0 \\ x+y=z \end{cases}$.

TRẦN VĂN HINH
(GV THCS Nam Giang, Nam Trực, Nam Định)

Bài T4/495. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trong góc BAC vẽ các tia Ax, Ay sao cho $\widehat{CAx}=\frac{1}{2}\widehat{ABC}$; $\widehat{BAy}=\frac{1}{2}\widehat{ACB}$ và tia Ax cắt tia phân giác góc ACB tại Q, tia Ay cắt cạnh BC tại K. Tìm tỉ số $\frac{AK}{AQ}$.

NGUYỄN HÀM THÀNH
(GV THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An)

Bài T5/495. Giải phương trình:

$$3\sqrt[3]{\frac{x^2-2x+2}{2x-1}}+2x=5.$$

CAO XUÂN NAM
(GV THPT chuyên Hà Giang, Hà Giang)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/495. Chứng minh rằng với các số thực x, y, z thỏa mãn $xyz=1$ ta luôn có:

$$\left(\frac{x}{1+xy}\right)^2+\left(\frac{y}{1+zy}\right)^2+\left(\frac{z}{1+xz}\right)^2 \geq \frac{3}{4}.$$

PHAN MẠNH HÀ
(GV THPT Nam Yên Thành, Yên Thành, Nghệ An)

Bài T7/495. Cho đa thức $P(x)=x^{2018}-ax^{2016}+a$, trong đó a là tham số thực. Biết rằng $P(x)$ có 2018 nghiệm thực. Chứng minh rằng tồn tại một nghiệm x_0 của $P(x)$ thỏa mãn $|x_0| \leq \sqrt{2}$.

LÊ XUÂN ĐẠI
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc)

Bài T8/495. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $SA=SB=SC=a$, $AB=2a, BC=3a$. Đặt $SD=x$ $(0<x<a\sqrt{14})$. Tìm x theo a để tích $AC.SD$ đạt giá trị lớn nhất.

NGUYỄN QUANG NAM
(GV THPT Quỳ Hợp 2, Nghệ An)

Bài T9/495. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P=xy+yz+zx+\frac{2}{9}(M-m)^3$$

trong đó $M=\max\{x,y,z\}$ và $m=\min\{x,y,z\}$.

NGUYỄN VIỆT HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

TIẾN TỚI OLYMPIC TOÁN

Bài T10/495. Cho dãy số (a_n) được xác định bởi: $a_n=n+[\sqrt[3]{n}]$ với n là số nguyên dương và $[\sqrt[3]{n}]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá $\sqrt[3]{n}$. Giả sử tồn tại số nguyên dương k sao cho các số hạng: $a_k; a_{k+1}; ...; a_{k+p}$ lập thành một dãy $p+1$ số tự nhiên liên tiếp trong đó $p=6015\times 2006+1$. Chứng minh rằng:

$$k>8.10^9+6.10^7.$$

TRẦN NGỌC THẮNG
(GV THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch, Vĩnh Phúc)

Bài T11/495. Tìm số k nhỏ nhất sao cho trong tập con tùy ý gồm k phần tử của tập hợp $\{1, 2, \ldots, 25\}$ luôn có 3 số tạo thành bộ ba Pythagoras.

VŨ ĐÌNH HÒA (*GV ĐHSP Hà Nội*)

Bài T12/495. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), H là chân đường cao đỉnh A, đường thẳng AO cắt BC tại D. Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC và đường tròn ngoại tiếp tam giác AHB. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác KHD cắt (O) tại M và N. Gọi X là giao điểm của MN và BC. Chứng minh rằng $XA = XK$.

NGUYỄN THANH DŨNG

(*GV THPT chuyên Chu Văn An, Lạng Sơn*)

Bài L1/495. Một con lắc lò xo lí tưởng lò xo nhẹ có hệ số đàn hồi 10N/m, đầu trên gắn giá cố định, đầu dưới gắn vật nhỏ khối lượng 100g. Ở vị trí cân bằng, truyền cho vật vận tốc 20cm/s hướng xuống dưới. Coi rằng vật dao động điều hoà. Đặt một thấu kính mỏng có độ tụ $D = +10$dp sao cho trục chính của thấu kính nằm ngang và đi qua vị trí cân bằng của vật dao động. Quang tâm của thấu kính cách vị trí cân bằng 15cm. Chọn trục Ox thẳng đứng hướng lên, gốc toạ độ là vị trí cân bằng của vật, mốc thời gian là lúc lò xo dãn 9cm lần đầu tiên, kể từ khi vật bắt đầu dao động. Lấy $g = 10\text{m/s}^2$. Xác định phương trình dao động của ảnh của vật trên Ox.

THANH LÂM (*Hà Nội*)

Bài L2/495. Đoạn mạch điện AB gồm hai đoạn mạch AM và MB nối tiếp nhau. Trên đoạn AM chứa biến trở và cuộn cảm thuần, trên đoạn MB chỉ chứa tụ điện có điện dung thay đổi được. Đặt vào hai đầu A, B một điện áp xoay chiều

$$u_{AB} = U\sqrt{2}\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{12}\right)(\text{V})$$

và điều chỉnh điện dung của tụ điện sao cho điện áp trên đoạn mạch AM không phụ thuộc vào biến trở. Biết rằng khi đó điện áp trên đoạn mạch AM có biểu thức là

$$u_{AM} = 120\sqrt{2}\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right)(\text{V})$$

và công suất tiêu thụ điện trên đoạn mạch AB là $P = 90$ W. Xác định độ tự cảm của cuộn dây.

VIỆT CƯƠNG (*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR SECONDARY SCHOOL

Problem T1/495 (For 6th grade). Show that it is impossible to write $2^{9^{2018}}$ as a sum of n consecutive positive integers for any $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Problem T2/495 (For 7th grade). Find the last twelve digits of the number 5^{1040}.

Problem T3/495. Find integral solutions of the following systems of equations

a) $\begin{cases} 3a^2 + 2ab + 3b^2 = 12 \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} (z-3)(x^2+y^2) - 2xy = 0 \\ x + y = z \end{cases}$.

Problem T4/495. Given a right triangle ABC with the right angle A. In the angle $\widehat{BAC}$ draw the rays Ax, Ay such that $\widehat{CAx} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$; $\widehat{BAy} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$. The ray Ax intersects the angle bisector of $\widehat{ACB}$ at Q, the ray Ay intersects BC at K. Compute the ratio $\frac{AK}{AQ}$.

Problem T5/495. Solve the equation

$$3\sqrt[3]{\frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 1}} + 2x = 5.$$

FOR HIGHSCHOOL

Problem T6/495. Given real numbers x, y, z such that $xyz = 1$, show that

$$\left(\frac{x}{1+xy}\right)^2 + \left(\frac{y}{1+zy}\right)^2 + \left(\frac{z}{1+xz}\right)^2 \geq \frac{3}{4}.$$

(*Tiếp theo trang 45*)



Bài T1/491. *Cho x, y là các số tự nhiên lớn hơn 1 thỏa mãn $x^{2017}=y^{2018}$. Hãy tìm số tự nhiên x, biết y là số tự nhiên nhỏ nhất.*

Lời giải. *Cho x, y là các số* tự nhiên lớn hơn 1 thỏa mãn $x^{2017}=y^{2018}$. Đặt ước chung lớn nhất của x, y là $(x,y)=e$ thì có $x=eu, y=ev$ với e, u, v là các số nguyên dương và $(u,v)=1$. Thay x, y như thế vào đẳng thức ban đầu được $(eu)^{2017}=(ev)^{2018}$, hay là $e^{2017}u^{2017}=e^{2018}v^{2018}$, suy ra $u^{2017}=ev^{2018}$ (*), do đó v^{2018} là ước số của u^{2017}. Từ $(u,v)=1$ có $(v^{2018},u^{2017})=1$ mà v^{2018} là ước số của u^{2017} nên chỉ có thể là $v^{2018}=1$, suy ra $v=1$. Từ đó và (*) có $y=e=u^{2017}$ và $x=eu=u^{2018}$. Khi $y=u^{2017}$ là số tự nhiên nhỏ nhất lớn hơn 1 thì u là số tự nhiên nhỏ nhất lớn hơn 1 nên $u=2$, lúc đó $y=2^{2017}$ và $x=2^{2018}$. ❐

➢ ***Nhận xét.*** 1) Đa số các bạn đều biến đổi từ $x^{2017}=y^{2018}$ thành $y=\left(\frac{x}{y}\right)^{2017}$ và nhận xét rằng y là số nguyên dương thì $\frac{x}{y}$ là số nguyên dương, dẫn đến $x=ky$ với k là số nguyên dương. Nhận xét này có được nhờ kết quả sau: *Nếu $a^n=b$ với b, n là các số nguyên dương và a là số hữu tỉ thì a là số nguyên.* Thật vậy, giả sử $a=\frac{u}{v}$ là phân số tối giản với u, v là các số nguyên dương, lúc đó $(u,v)=1$ nên $(u^n,v^n)=1$. Từ $a^n=b$ có $u^n=bv^n$ nên v^n là ước số của u^n mà $(u^n,v^n)=1$ suy ra $v^n=1$, do đó $v=1$ và $a=u$ là số nguyên dương.

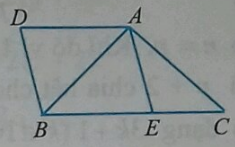
Chú ý rằng nếu $b=a^n$ với b, n là các số nguyên thì a chưa chắc đã nguyên. Ví dụ $y=u^{2017}$, thì y, 2017 nguyên nhưng $u=\sqrt[2017]{2}$ là số vô tỷ $(y=2)$.

2) Các bạn sau có lời giải tốt: **Nghệ An**: *Nguyễn Công An*, 6A, *Dương Trọng Nguyên*, 6C,THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh**: *Bùi Thị Hà Trang*, *Đậu Bá Tiệp*, 6A, THCS Xuân Diệu, Can Lộc; **Quảng Ngãi**: *Nguyễn Hoàng Hưng*, 6A, *Đặng Cao Gia Nguyên*, 6C, *Võ Diệp Toàn Lộc*, *Điệp Diệu Châu*, 7B, THCS Phạm Văn Đồng, Nghĩa Hành; *Mai Thành Nguyên*, 6A, THCS TTr. Sông Vệ, Tư Nghĩa.

VIỆT HẢI

Bài T2/491. *Cho tam giác ABC cân tại A có $\hat{A}=108^0$, $BC=a$, $AC=b$. Về phía ngoài tam giác ABC vẽ tam giác ABD cân tại A có $\widehat{BAD}=36^0$. Tính chu vi tam giác ABD theo a và b.*

Lời giải. Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE=AD$. Khi đó



$$\Delta ABD=\Delta BAE \text{ (c.g.c)}$$
$$\Rightarrow BD=AE;\ \widehat{ADB}=\widehat{BEA}.$$

Do đó $\widehat{BEA}=\widehat{ADB}=72^0$, $\widehat{ACE}=36^0\Rightarrow\widehat{EAC}=36^0$ $\Rightarrow\Delta EAC$ cân tại $E\Rightarrow AE=EC$. Vậy ta có

$$BD=AE=EC=BC-BE=BC-AB=a-b.$$

Vậy chu vi tam giác ABD là:

$$ABD=AB+AD+BD=b+b+a-b=a+b.$$ ❐

➢ ***Nhận xét.*** Các bạn sau có lời giải đúng gửi về Tòa soạn: **Nghệ An:** *Phạm Văn Quyền*, *Nguyễn Thị Thanh Hằng*, *Nguyễn Thị Khánh Như*, *Nguyễn Đình Thủy*, *Đào Thái Hằng*, *Nguyễn Văn Thành Nam*, *Nguyễn Hoàng Huy*, *Nguyễn Phương Uyên*, *Đặng Hữu Khanh*, *Nguyễn Quốc Hiếu*, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; *Phạm Ngọc Trinh*, 7B, THCS Hồ Xuân Hương, Khối 1, TT. Cầu Giát, Quỳnh Lưu; **Quảng Ngãi:** *Phạm Đình Tâm*, *Nguyễn Trung Phú*, 7A, *Phạm Thùy Trang*, *Đặng Cao Gia Nguyên*, 7C, THCS Phạm Văn Đồng, *Võ Thị Hồng Thu*, 7B, THCS Nghĩa Mỹ, Tư Nghĩa; **Quảng Trị:** *Nguyễn Thiện Nhân*, 7A, THCS Hội Yên, Hải Quế, Hải Lăng; **Thanh Hóa:** *Lê Đức Chính*, *Lê Minh Long*, 7B, THCS Nhữ Bá Sỹ, TT. Bút Sơn, Hoằng Hóa; **Cần Thơ:** *Huỳnh Nguyễn Ngọc Khánh*, 7, THCS Thốt Nốt, Thốt Nốt; **Ninh Thuận:** *Trương Minh Thanh*, 9/1, THCS Trương Định, TT. Phước Dân, Ninh Phước, Ninh Thuận; **Phú Thọ:** *Hà Minh Ngọc*, *Lại Trường Giang*, 7A, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Kim Nam Tuấn*, 6A2, THCS Yên Lạc, Yên Lạc.

NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

Bài T3/491. *Tìm các số nguyên dương n thỏa mãn điều kiện với mọi số nguyên dương a là ước của n thì $a+2$ là ước của $n+2$.*

Lời giải. Dễ thấy $n=1$ thỏa mãn bài toán.

Cách 1. Xét $n>1$, gọi p là ước nguyên tố nhỏ nhất của n. Theo đề bài thì $n+2$ chia hết cho $\frac{n}{p}+2$, suy ra $(n+2p)-(n+2)=2(p-1)$ chia hết cho $\frac{n}{p}+2$ (1).

Ta xét hai trường hợp

• Nếu n chẵn thì $p=2$, từ (1) suy ra 2 chia hết cho $\frac{n}{p}+2$ (vô lí vì $\frac{n}{p}+2>2$).

• Nếu n lẻ thì $\frac{n}{p}$ lẻ, từ (1) suy ra $p-1$ chia hết cho $\frac{n}{p}+2$, nên $p-1\ge\frac{n}{p}+2\Rightarrow n\le p(p-3)<p^2$. Do đó $n=p$. Khi đó vì 1 là ước của p nên theo giả thiết thì $p+2$ chia hết cho 3, nghĩa là p là số nguyên tố có dạng $3k+1$ ($k\in\mathbb{N}^*$). Rõ ràng các số này thỏa mãn.

Cách 2.

• Nếu n là số nguyên tố, thì n có hai ước số là 1 và n. Khi đó $n+2$ phải chia hết cho $n+2$ (hiển nhiên) và $n+2$ phải chia hết cho $1+2=3$. Suy ra n là số nguyên tố dạng $3k+1$ ($k\in\mathbb{N}^*$).

• Nếu n là hợp số thì n có thể viết dưới dạng $n=ab$ với $1<a\le b<n$ ($a,\ b\in\mathbb{N}$). Theo đề bài, ta phải có $n+2=ab+2=a(b+2)-(2a-2)$ chia hết cho $b+2$. Từ đó, $2a-2$ chia hết cho $b+2$. Vì $a\le b$ nên $2a-2<2(b+2)$, do đó ta phải có $2a-2=b+2$ hay $b=2a-4$. Thay vào, ta được $n=2a^2-4a$. Sử dụng điều kiện $n+2$ chia hết cho $a+2$, ta có

$$n+2=2a^2-4a+2=2a(a+2)-8(a+2)+18$$

chia hết cho $a+2$. Suy ra 18 chia hết cho $a+2$. Từ đó $a\in\{4,7,16\}$.

+ Với $a=4$ thì $n=16$; 16 chia hết cho 8 nhưng (16+2) không chia hết cho (8+2) (loại).

+ Với $a=7$ thì $n=70$; 70 chia hết cho 35 nhưng $(70+2)$ không chia hết cho $(35+2)$ (loại).

+ Với $a=16$ thì $n=448$; 448 chia hết cho 224 nhưng (448+2) không chia hết cho (224+2) (loại).

Vậy các số nguyên dương n cần tìm là 1 và tất cả các số nguyên tố có dạng $3k+1$ ($k\in\mathbb{N}^*$). ❐

➢ ***Nhận xét.*** Đa số các bạn đều giải theo cách trên. Tuyên dương các bạn sau có lời giải đúng: **Hà Nội:** *Ngô Bảo An*, 9A0, 9T, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa; **Thanh Hóa**: *Đỗ Cao Bách Tùng*, 9B, THCS Trần Mai Minh, TP. Thanh Hóa; **Bình Phước**: *Đặng Đình Văn*, 8/11, THCS Tân Phú, Đồng Xoài.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T4/491. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính AC. Vẽ đường thẳng vuông góc với AC tại A và cắt đường thẳng BC tại K. Lấy điểm T trên cung nhỏ AB (T khác A và B). Đường thẳng KT cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai P. Trên tiếp tuyến tại T của đường tròn (O) lấy hai điểm I, J sao cho KIA, KAJ là các tam giác cân tại K. Chứng minh rằng:*

a) $\widehat{TIP}=\widehat{TKJ}$.

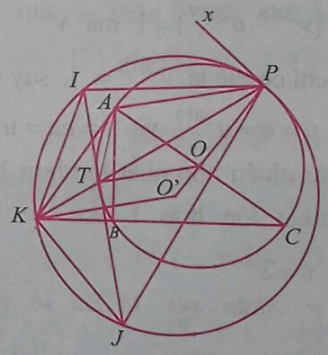
b) *Đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác KPJ tiếp xúc với nhau.*

Lời giải. Ta có $KA\perp AC$ nên KA là tiếp tuyến của đường tròn (O).

a) Xét ΔKAT và ΔKPA có góc K chung, và $\widehat{KAT}=\widehat{KPA}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AT}$) $\Rightarrow \Delta KAT\backsim\Delta KPA$ (g.g), $\Rightarrow\frac{KA}{KP}=\frac{KT}{KA}\Rightarrow\frac{KI}{KP}=\frac{KT}{KI}$ (vì $KA=KI$).

Từ đó suy ra $\Delta KIT\backsim\Delta KPI$ (c.g.c), nên $\widehat{KIT}=\widehat{IPK}$ (1)

Mặt khác, $KI=KJ$ $(=KA)$ nên ΔKIJ cân tại K, ta có $\widehat{KIJ}=\widehat{KJI}$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{IPK}=\widehat{IJK}$, nên tứ giác $KIPJ$ nội tiếp. Vậy $\widehat{TIP}=\widehat{TKJ}$.

b) *Cách* 1. Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KPJ.

Từ $KI=KJ$ và $O'I=O'J$, ta có $O'K\perp IJ$, mà $IJ\perp OT$ (tính chất tiếp tuyến), dẫn đến $OT\ //\ O'K$.

Suy ra $\widehat{OTP}=\widehat{O'KP}$ (đồng vị) $\Rightarrow\widehat{TOP}=\widehat{KO'P}$, do đó O', O, P thẳng hàng. Vậy hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc nhau tại P.

Cách 2. Chứng minh tương tự a), ta có

$$\Delta KTJ\backsim\Delta KJP\Rightarrow\widehat{KTJ}=\widehat{KJP}\qquad(3)$$

Kẻ tiếp tuyến Px của đường tròn (O) (hình vẽ). Ta có

$$\widehat{xPT}=\widehat{ITP}\ (\text{cùng chắn cung}\ \overset{\frown}{TP})\qquad(4)$$

Từ (3), (4) suy ra $\widehat{xPK}=\widehat{KJP}$, do đó Px là tiếp tuyến của đường tròn (O'). Vậy hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc nhau tại P. ❐

➢ ***Nhận xét.*** Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Thanh Hóa:** *Đỗ Cao Bách Tùng*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; *Nguyễn Tiến Đạt*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hữu Tuấn Nam*, 9A1, THCS Thị trấn Chờ, Yên Phong; **Nghệ An:** *Phùng Lê Anh Quân*, 9A1, THCS Hải Hòa, TX. Cửa Lò; **Hà Nội:** *Lê Ngọc Tùng*, 8A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai; **Thái Nguyên:** *Trần Hoàng Minh*, 9A5, THCS Chu Văn An, TP. Thái Nguyên.

NGUYỄN THANH HỒNG

Bài T5/491. *Tìm các cặp nghiệm nguyên (x, y) thỏa mãn:* $y^2+2y=4x^2y+8x+7$.

Lời giải. Phương trình trên tương đương với

$$y^2-2(2x^2-1)y-8x-7=0.$$

Coi đây là phương trình bậc hai đối với y, phương trình có nghiệm nguyên khi $\Delta'=4(x^4-x^2+2x+2)$ là một số chính phương. Ta có

$$x^4-x^2+2x+2=(x+1)^2[(x-1)^2+1].$$

Xét các trường hợp:

• Nếu $x=-1$ thay vào phương trình, ta được $y^2-2y+1=0\Leftrightarrow y=1$; $(x;y)=(-1;1)$ là một nghiệm của phương trình.

• Nếu $x\neq -1$ phải có $(x-1)^2+1=a^2$, $a\in\mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow a^2-(x-1)^2=1\Leftrightarrow (a-x+1)(a+x-1)=1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a-x+1=1\\ a+x-1=1\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}a-x+1=-1\\ a+x-1=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ x=1\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}a=-1\\ x=1\end{cases}.$$

• Nếu $x=1$ thay vào phương trình, ta được $y^2-2y-15=0\Leftrightarrow y=5$ hoặc $y=-3$, khi đó $(x;y)$ bằng $(1;5), (1;-3)$ là nghiệm của phương trình. Vậy phương trình trong đầu bài có ba cặp nghiệm nguyên là $(x;y)\in\{(-1;1),(1;5),(1;-3)\}$. ❐

➢ ***Nhận xét.*** Điều then chốt của hướng giải là viết phương trình đã cho thành một phương trình bậc hai đối với ẩn số y, sau đó tìm x để $\Delta'=4(x^4-x^2+2x+2)$ là một số chính phương. Các bạn sau đây có bài giải tốt: **Phú Thọ:** *Nguyễn Công Hải, Trần Anh Tú*, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Tiến Đạt*, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Đỗ Cao Bách Tùng*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP.Thanh Hóa; **Hà Nội:** *Lê Ngọc Tùng*, 8A, THCS Nguyễn Trực, Thanh Oai, *Nguyễn Ngân Chi*, 7C, THPT Lý Thái Tổ, Cầu Giấy; **Bình Phước:** *Đặng Đình Văn*, 8/11 THCS Tân Phú, Đồng Xoài; **Quảng Trị:** *Lê Văn Tuấn Kiệt*, 9C, THCS Phan Đình Phùng, TP Đông Hà; **Nghệ An:** *Kiều Đình Hải*, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T6/491. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y+\log_2 z=3\\ \sqrt{x^2+4}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{z^2+4}=\sqrt{2}(x+y+z)\end{cases}.$$

Lời giải. ĐK : $x, y, z>0$.

Từ vế đầu của phương trình ta có

$$2^{\log_2 x+\log_2 y+\log_2 z}=2^3\Rightarrow xyz=8.$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $(a+b)\le\sqrt{2}(a^2+b^2)$, ta có

$$\sqrt{x^2+4}+\sqrt{4x}\le\sqrt{2}.\sqrt{x^2+4+4x}=\sqrt{2}(x+2).$$

Tương tự : $\sqrt{y^2+4}+\sqrt{4y}\le\sqrt{2}(y+2)$;

$$\sqrt{z^2+4}+\sqrt{4z}\le\sqrt{2}(z+2).$$

Suy ra $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{z^2+4}+$

$$+2(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})\le\sqrt{2}(x+y+z)+6\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{x^2+4}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{z^2+4}$$

$$\le\sqrt{2}(x+y+z)+[6\sqrt{2}-2(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})]\le\sqrt{2}(x+y+z)$$

(vì với $xyz=8$ thì $3\sqrt{2}\le\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ theo bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương quen thuộc). Bất đẳng thức trở thành đẳng thức, cho nên phải có $x=y=z=2$. Thay vào phương trình ta thấy nghiệm này thỏa mãn phương trình, đây là nghiệm duy nhất của bài toán. ❐

➢ ***Nhận xét.*** Đây là bài toán phải áp dụng 2 lần bất đẳng thức. Hầu hết các bạn giải tương tự như vậy. Các bạn sau đây gửi lời giải đúng. **Vĩnh Phúc:** *Vương Tùng Dương*, 12A1, *Lê Ngọc Hoa, Hà Ngọc Khánh, Trần Hằng Quý, Tạ Nam Khánh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Tiến Hoàng, Phạm Thị Mai Phương*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Bến Tre:** *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cày Nam, *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân; **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Gia Lai:** *Lê Tôn Đăng Khoa*, 11A2, THPT Nguyễn Chí Thanh; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Đức Toàn, Phạm Hiếu*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn. **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Vĩnh Long:** *Mai Quốc Khánh*, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Thừa Thiên Huế:** *Trương Công Đức*, 10T2, THPT chuyên Quốc học Huế.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T7/491. *Chứng minh rằng*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1+(n-1)\sqrt{n}}}}}=3.$$

Lời giải. *Cách* 1. Ta có:

$$3=\sqrt{1+2.4}=\sqrt{1+2\sqrt{16}}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{25}}}$$
$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{36}}}}$$

và bằng phương pháp quy nạp ta có

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+...\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}}}}=3 \quad (1)$$

Từ đó:

$$3\ge\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+...+\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}} \quad (2)$$

Bây giờ ta sử dụng bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{1+x\alpha}\le\sqrt{\alpha}\sqrt{x+1},\ x\ge 0,\ \alpha\ge 1 \quad (3)$$

Từ (3) với $x=n$, $\alpha=n+2$, ta có:

$$\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}\le\sqrt{n+2}\sqrt{n+1}.$$

Từ đó:

$$\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}}<\sqrt{1+\sqrt{n+2}(n-1)\sqrt{1+n}}$$
$$<(n+2)^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}},$$

trong đó bất đẳng thức cuối cùng suy từ (3) với $\alpha=\sqrt{n+2}$.

Từ (1), lặp lại cách làm n lần cho ta:

$$3\le(n+2)^{2^{-n}}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+...\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}} \quad (4)$$

Từ (2), (4) cho ta:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+...+\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}}=3.$$

Cách 2 (Của bạn *Võ Minh Quân*, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt, **Lâm Đồng**).

Với $2\le m\le n-1$, đặt

$$x_m=\sqrt{1+m\sqrt{1+(1+m)\sqrt{1+...+(n-2)\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}}.$$

Ta có

$$x_m^2=1+mx_{m+1}\Leftrightarrow x_m^2-(m+1)^2=mx_{m+1}-m^2-2m$$
$$\Leftrightarrow x_m^2-(m+1)^2=m\left[x_{m+1}-(m+2)\right].$$

Suy ra: $|x_m-(m+1)|=m\dfrac{|x_{m+1}-(m+2)|}{|x_m+m+1|}$

$$\le\frac{m}{m+2}|x_{m+1}-(m+2)|,\ m=2,...,n-1 \quad (*)$$

Sử dụng liên tiếp (*) ta có:

$$|x_2-3|\le\frac{2}{4}|x_3-4|\le\frac{2}{4}.\frac{3}{5}|x_4-5|$$
$$\le...\le\frac{2}{4}.\frac{3}{5}...\frac{n-2}{n}|x_{n-1}-n|=\frac{6\left|\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}-n\right|}{n(n-1)}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

(do bậc của mẫu lớn hơn bậc của tử). Vậy $\lim\limits_{n\to\infty}x_2=3$.

❐

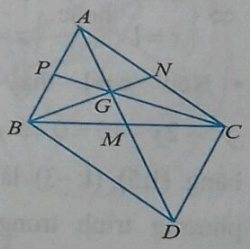
➢***Nhận xét.*** Đa số các bạn giải bài này theo cách thứ nhất, tìm giới hạn của dãy số theo nguyên lý kẹp. Một số bạn khác lại làm theo ý tưởng của cách 2, thông qua đánh giá và tìm giới hạn trực tiếp. Cách thứ nhất khá cơ bản và dễ nhìn thấy hướng giải, cách thứ hai ngắn gọn hơn nhưng biến đổi khó hơn. Ngoài bạn *Quân*, các bạn sau có lời giải tốt: **Nam Định:** *Vũ Minh Đức*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Nam Định. **Vĩnh Phúc:** *Lê Ngọc Hoa*, *Tạ Nam Khánh*, *Chu Thị Thanh*, 10A1, *Hà Ngọc Khánh*, *Lê Anh Dũng*, 11A1, *Vương Tùng Dương*, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc. **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 11 Toán, *Hoàng Kim Cả*, 10 toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp. **Thừa Thiên Huế:** *Lê Thị Thu Sương*, 10 Toán 2, *Tôn Nữ Cát Vi*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế. **Bến Tre:** *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cày Nam. **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Lê Tuấn Anh*, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu.

TRẦN HỮU NAM

Bài T8/491. *Cho m_a, m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến của một tam giác có chu vi bằng 2 và bán kính đường tròn nội tiếp bằng r. Chứng minh rằng:*

$$\max\{1,3\sqrt[3]{r}\}\le m_a+m_b+m_c<\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Lời giải. Xét tam giác ABC, $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB và G là trọng tâm ΔABC. Dựng hình bình hành $ABDC$. Từ bất đẳng thức tam giác ta có



$2m_a=AD<AB+BD=b+c$; $2m_b<c+a$; $2m_c<a+b$.

Từ đó $m_a+m_b+m_c<a+b+c$. Mặt khác

$$a=BC<GB+GC=\frac{2}{3}m_b+\frac{2}{3}m_c;$$
$$b<\frac{2}{3}m_c+\frac{2}{3}m_a;\ c<\frac{2}{3}m_a+\frac{2}{3}m_b,$$

suy ra $\dfrac{3}{4}(a+b+c)<m_a+m_b+m_c<a+b+c$

$$\Rightarrow 1<\frac{3}{2}<m_a+m_b+m_c<2<\frac{3}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

Sử dụng công thức Héron cho ΔABC ta được

$$S_{ABC}=p.r=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Do $p=1$, nên $S_{ABC}=r=\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}$.

Từ công thức tính độ dài đường trung tuyến và bất đẳng thức Cauchy ta thấy

$$m_a^2=\frac{(b^2+c^2-a^2)+(b^2+c^2)}{4}\ge\frac{(b^2+c^2-a^2)+2bc}{4}$$
$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow m_a^2\ge\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4}=1-a\Leftrightarrow m_a\ge\sqrt{1-a}.$$

Tương tự ta có $m_b\ge\sqrt{1-b}$; $m_c\ge\sqrt{1-c}$

$$\Rightarrow m_a+m_b+m_c\ge\sqrt{1-a}+\sqrt{1-b}+\sqrt{1-c}$$
$$\ge3\sqrt[3]{\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}}=3\sqrt[3]{r}\quad(2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{2}{3}$.

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\max\{1,3\sqrt[3]{r}\}\le m_a+m_b+m_c<\frac{3}{\sqrt{2}}.$$ ❐

➢***Nhận xét.*** Tất cả các bài giải gửi về Tòa soạn đều đúng. Kết quả bài toán có thể được làm chặt chẽ hơn là: $\max\left\{\frac{3}{2},3\sqrt[3]{r}\right\}\le m_a+m_b+m_c<2$. Các bạn sau có lời giải tốt hơn cả: **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 12T, THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Nam Khánh, Trần Hồng Quý*, 10A1, *Lê Anh Dũng*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 10T1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** *Lê Phú Tấn*, 10T1, THPT chuyên Lam Sơn, TP. Thanh Hóa; **Quảng Bình:** *Đinh Đoàn Xuân Phương*, 10 Toán, *Hồ Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp, Đồng Hới; **Thừa Thiên Huế:** *Trương Công Đức*, 10 Toán, THPT chuyên Quốc học Huế; **Đăk Lăk:** *Nguyễn Trần Thiện Nhâm*, 10CT, THPT chuyên Nguyễn Du; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre, *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cày Nam.

HỒ QUANG VINH

Bài T9/491. *Cho a, b, c là ba số không âm thỏa mãn: $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của*

$$P=a\sqrt{b^3+1}+b\sqrt{c^3+1}+c\sqrt{a^3+1}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số thực dương ta có

$$a\sqrt{b^3+1}=a\sqrt{(b+1)(b^2-b+1)}$$
$$\le a.\frac{1}{2}.(b+1+b^2-b+1)=\frac{1}{2}a(b^2+2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l}a=0\\b+1=b^2-b+1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\b\in\{0,2\}\end{array}\right.$$

Tương tự

$$b\sqrt{c^3+1}\le\frac{1}{2}b(c^2+2),\ c\sqrt{a^3+1}\le\frac{1}{2}c(a^2+2).$$

Do đó $P=a\sqrt{b^3+1}+b\sqrt{c^3+1}+c\sqrt{a^3+1}$

$$\le\frac{Q}{2}+a+b+c=\frac{Q}{2}+3,\quad(1)$$

trong đó $Q=ab^2+bc^2+ca^2$. Do các số a, b, c có vai trò hoán vị vòng quanh trong bài toán, không mất tính tổng quát ta giả sử b là số ở giữa hai số a và c, tức là $(b-a)(b-c)\le0$. Ta có

• $b(c+a)^2-Q=bc^2+2abc+a^2b-ab^2-bc^2-ca^2$
$$=abc+(abc-ca^2)-(ab^2-a^2b)$$
$$=abc+a(b-a)(c-b)\ge0.$$

• $b(c+a)^2=\frac{1}{2}\cdot2b.(c+a)^2\le\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2b+2(c+a)}{3}\right)^3=4\quad(2)$

(theo BĐT Cauchy cho ba số thực không âm).

Từ (1) và (2) ta suy ra $P\le\frac{Q}{2}+3\le\frac{4}{2}+3=5$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2b=c+a$, $abc=0,...\Leftrightarrow b=1$, $a=0$, $c=2$. Như vậy $P=5$

$$\Leftrightarrow(a,b,c)\in\{(0,1,2),\ (1,2,0),\ (2,0,1)\}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 5. ❐

➢***Nhận xét.*** 1) Bất đẳng thức $Q\le4$ là đề dự bị của Kỳ thi IMO 1993.

2) Các bạn học sinh sau có lời giải tốt: **Ninh Bình:** *Lê Quang Chiến*, 9A, THCS Quang Sơn, TP. Tam Điệp; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Nam Khánh, Lê Ngọc Hoa, Trần Hồng Quý, Chu Thị Thanh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Thanh Hóa:** *Phạm Anh Đức*, 9B, THCS Trần Mai Ninh; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Phi Việt*, 10T1, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị:** *Lê Văn Tuấn Kiệt*, 9C, THCS Phan Đình Phùng, TP. Đông Hà ; **Đà Nẵng:** *Phạm Hiếu*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên Huế:** *Nguyễn Hồ Anh Hưng*, 10T1, THPT chuyên Quốc học Huế.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/491. *Cho dãy số (F_n) xác định bởi công thức: $F_n=2^{2^n}+1$, $\forall n\in\mathbb{N}$.*

a) *Với mỗi $n\in\mathbb{N}$, gọi q là một ước nguyên tố của F_n, chứng minh rằng: $(q-1)\vdots2^{n+1}$.*

b) *Với mỗi $n\in\mathbb{N},n\ge2$, gọi q là một ước nguyên tố của F_n, chứng minh rằng: $(q-1)\vdots2^{n+2}$.*

Lời giải. (Dựa trên lời giải của bạn *Nguyễn Danh Lân*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**).

a) Vì $q|(2^{2^n}+1)$ nên q lẻ. Gọi h là cấp của 2 (mod q), $h=\text{ord}_q2$. Do $2^{q-1}\equiv1\ (\text{mod}\,q)$ nên ta có $h|(q-1)$.

Vì $q|(2^{2^n}+1)\Rightarrow2^{2^n}\equiv-1\ (\text{mod}\,q)\Rightarrow2^{2^{n+1}}\equiv1\ (\text{mod}\,q)$

$\Rightarrow h|2^{n+1}\Rightarrow h=2^m\ (m\le n+1)$.

Nếu $m<n+1$ thì $h|2^n\Rightarrow2^{2^n}\equiv1\ (\text{mod}\,q)\Rightarrow$ $2\equiv0\ (\text{mod}\,q)$ (mâu thuẫn vì q lẻ).

Vậy $h=2^{n+1}$. Do đó $2^{n+1}\mid(q-1)$.

b) Do $q\mid F_n$ nên theo a) $q\equiv 1\pmod{2^{n+1}}$. Do $n\geq 2$ nên $q\equiv 1\pmod 8$. Do đó $\left(\frac{2}{q}\right)=(-1)^{\frac{q^2-1}{8}}=1$. Vậy tồn tại a lẻ để $a^2\equiv 2\pmod q$. Suy ra $2^{\frac{q-1}{2}}\equiv a^{q-1}\equiv 1\pmod q$.

Theo câu a) ta có $2^{n+1}=\text{ord}_q 2$. Do đó $\frac{q-1}{2}\vdots 2^{n+1}$.

Vậy $(q-1)\vdots 2^{n+2}$. ❐

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc:** *Trần Hồng Quý*, 10A1, *Lê Anh Dũng*, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 11 Toán, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Bến Tre:** *Nguyễn Văn Cảnh*, 12A8, THPT An Thới, Mỏ Cày Nam.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/491. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:*

$$f(x)f(y)+f(xy)+f(x)+f(y)=f(x+y)+2xy,\ (1)$$

với mọi $x,y\in\mathbb{R}$.

Lời giải. Thay $x=0$, $y=0$ vào (1), ta được $f(0)=0$ hoặc $f(0)=-2$. Ta có

$(1)\Leftrightarrow[f(x)+1][f(y)+1]+f(xy)+1=f(x+y)+1+2xy+1$, với mọi $x,y\in\mathbb{R}$ hay

$$g(x)g(y)+g(xy)=g(x+y)+2xy+1,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\ (2)$$

trong đó $g(t)=f(t)+1$. Thay $y=0$ vào (2), ta được

$$g(x)g(0)+g(0)=g(x)+1\Leftrightarrow[g(0)-1][g(x)+1]=0,\ \forall x\in\mathbb{R}.\ (3)$$

Nếu $f(0)=-2$ thì $g(0)=f(0)+1\neq 1$ nên $g(x)\equiv -1$. Hàm này không thỏa mãn (2). Vậy $f(0)=0$ và $g(0)=1$. Thay $x=1$, $y=-1$ vào (2), ta được

$$g(1)g(-1)+g(-1)=g(0)-1\Leftrightarrow[g(1)+1]g(-1)=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g(1)=-1\\g(-1)=0\end{array}\right.$$

• Nếu $g(1)=-1$, thay $y=1$ vào (2), ta thu được $g(x+1)=-2x-1$ hay $g(x)=-2x+1$. Hàm này thỏa mãn (2), suy ra $f(x)=-2x$ thỏa mãn (1).

• Nếu $g(1)=a\neq -1$, khi đó $g(-1)=0$. Thay $y=1$ vào (2), ta được

$$g(x+1)=(a+1)g(x)-2x-1,\ \forall x\in\mathbb{R}.\quad(4)$$

Thay x bởi $-x$ và $y=-1$ vào (2), ta được

$$g(x)=g(-x-1)+2x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}.\quad(5)$$

Thay (5) vào (4) ta có:

$$g(x+1)=(a+1)[g(-x-1)+2x+1]-2x-1$$
$$\Leftrightarrow g(x+1)=(a+1)g(-x-1)+a(2x+1)$$
$$\Leftrightarrow g(x)=(a+1)g(-x)+a(2x-1),\ \forall x\in\mathbb{R}.\ (6)$$

hay $g(-x)=(a+1)g(x)+a(-2x-1),\ \forall x\in\mathbb{R}.\quad(7)$

Từ (6) và (7), ta thu được

$$(a^2+2a)g(x)=2a^2x+a^2+2a,\quad\forall x\in\mathbb{R}.\quad(8)$$

Từ (8) suy ra $a\neq -2$. Nếu $a\neq 0$ thì

$$(8)\Leftrightarrow g(x)=\frac{2a}{a+2}x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}.\quad(9)$$

Thế vào (2), ta thu được $\frac{4(a^2-a-2)}{(a+2)^2}xy=0,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ nên $a=2$ (do $a\neq 1$) và $g(x)=x+1$. Hàm này thỏa mãn (2) nên $f(x)=x$ thỏa mãn (1).

Nếu $a=0$ thì từ (7) suy ra $g(-x)=g(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. Thay $y=x$ và $y=-x$ vào (2), ta thu được

$$\left\{\begin{array}{l}g^2(x)+g(x^2)=-2x^2+2,\ \forall x\in\mathbb{R}\\g^2(x)+g(x^2)=g(2x)+2x^2+1,\ \forall x\in\mathbb{R}\end{array}\right.$$

Suy ra $g(2x)=-4x^2+1$ hay $g(x)=-x^2+1$. Hàm này thỏa mãn (2) nên $f(x)=-x^2$ thỏa mãn (1).

Vậy các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện (1) là $f(x)=-2x$, $f(x)=x$ và $f(x)=-x^2$. ❐

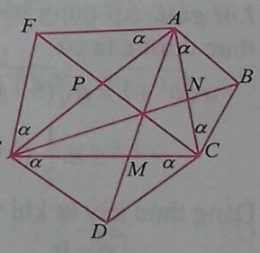
➢***Nhận xét.*** Các bạn sau đây có lời giải đúng: **Đà Nẵng:** *Phan Hiến*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Lâm Đồng:** *Võ Minh Quân*, 11T, THPT chuyên Thăng Long; **Quảng Bình:** *Hồ Anh*, 11T, *Hoàng Kim Cả*, 10T, THPT chuyên Võ Nguyên Giáp; **Vĩnh Phúc:** *Lê Anh Dũng*, 11A1, *Trần Hồng Quý*, *Lê Ngọc Hoa*, *Tạ Nam Khánh*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T12/491. *Cho lục giác lồi $ABCDEF$ ngoại tiếp đường tròn (O). Biết rằng tâm O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ACE. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của các tam giác OAD, OBE và OCF còn có một điểm chung khác điểm O.*

Lời giải. Ta cần có một bổ đề.

Bổ đề. *Nếu lục giác lồi $ABCDEF$ có $DC=DE$; $FE=FA$; $BA=BC$ và $\widehat{CDE}=\widehat{EFA}=\widehat{ABC}$ thì AD, CF, EB đồng quy.*



Chứng minh. Gọi M, N, P theo thứ tự là giao điểm của AD, CF, EB và CE, EA, AC. Đặt $\widehat{CAE}=\hat{A}$; $\widehat{ECA}=\hat{C}$; $\widehat{AEC}=\hat{E}$. Dễ thấy các tam giác BAC, DCE, FEA cân tại B, D, F và đồng dạng. Do đó

$\widehat{BAC}=\widehat{BCA}=\widehat{DCE}=\widehat{DEC}=\widehat{FEA}=\widehat{FAE}=\alpha.$

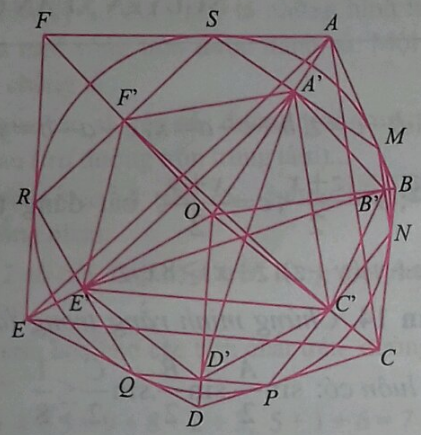
Vậy, chú ý rằng $BA=BC; DC=DE; FE=FA,$ ta có

$$\frac{ME}{MC}.\frac{NC}{NA}.\frac{PA}{PE}=\frac{S(EAD)}{S(CAD)}.\frac{S(CEB)}{S(AEB)}.\frac{S(ACF)}{S(ECF)}$$

$$=\frac{EA.ED\sin(E+\alpha)}{CA.CD\sin(C+\alpha)}.\frac{CE.CB\sin(C+\alpha)}{AE.AB\sin(A+\alpha)}$$

$$.\frac{AC.AF\sin(A+\alpha)}{EC.EF\sin(E+\alpha)}=1.$$

Do đó, theo định lí Ceva, AD, BE, CF đồng quy. Trở lại giải bài toán T12.



Gọi R là bán kính của (O); M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là tiếp điểm của (O) và AB, BC, CD, DE, DF, FA; A', B', C', D', E', F' theo thứ tự là trung điểm của SM, MN, NP, PQ, QR, RS.

Dễ thấy A', B', C', D', E', F' theo thứ tự thuộc OA, OB, OC, OD, OE, OF và

$$\overline{OA}.\overline{OA'}=\overline{OB}.\overline{OB'}=\overline{OC}.\overline{OC'}=\overline{OD}.\overline{OD'}$$

$$=\overline{OE}.\overline{OE'}=\overline{OF}.\overline{OF'}=R^2 \quad (1)$$

Từ (1) suy ra các đường tròn (OAD), (OCF), (OEB) theo thứ tự là ảnh của các đường thẳng $A'D'$, $C'F'$, $E'B'$ qua phép nghịch đảo $N_O^{R^2}$ (2)

Từ (1), chú ý rằng $OA=OC=OE$, suy ra $OA'=OC'=OE'$. Do đó

$$D'C'=D'E';\ F'E'=F'A';\ B'A'=B'C' \quad (3)$$

Vì $OA=OC=OE$ nên $\widehat{SAM}=\widehat{NCP}=\widehat{QRE}$ (4)

Từ (1) suy ra các tứ giác $A\,A'F'F$, $A\,A'B'B$, $CC'B'B$, $CC'D'D$, $E\,E'D'D$, $E\,E'F'F$ nội tiếp (5). Từ (4) và (5) suy ra

$$\widehat{C'D'E'}=\widehat{E'F'A'}=\widehat{A'B'C'} \quad (6)$$

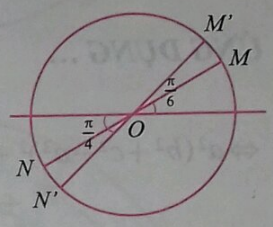
Từ (3) và (6), theo bổ đề trên, suy ra $A'D'$, $C'F'$, $E'B'$ đồng quy (7). Từ (1), (2) và (7) suy ra các đường tròn (OAD), (OCF), (OEB) cùng đi qua một điểm khác O. ❐

➢***Nhận xét.*** Bài toán này không khó nhưng chỉ có hai bạn tham gia giải: **Lâm Đồng:** *Võ Minh Quân*, 11T, THPT chuyên Thăng Long, TP. Đà Lạt; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Đức Toàn*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP. Đà Nẵng.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/491. *Một vật dao động điều hòa theo phương trình* $x=A\cos(5\pi t+\varphi)$. *Tại thời điểm* t, *vật nặng đang đi về phía vị trí cân bằng và tỉ số giữa thế năng và động năng của vật bằng* $3\left(\frac{W_t}{W_đ}=3\right)$. *Sau đó* $\frac{1}{60}s$ *thì tỉ số đó bằng bao nhiêu?*

Lời giải. Tại thời điểm t thì $\left(\frac{W_t}{W_đ}=3\right)$, tức là $W_t=\frac{3}{4}W$ (W là cơ năng của vật) hay:



$$\frac{kx^2}{2}=\frac{3}{4}\frac{kA^2}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{A\sqrt{3}}{2}.$$

Khi đó, ngọn của vectơ diễn tả dao động của vật ở M hoặc N. OM và ON hợp với trục hoành một góc α xác định bởi: $\cos\alpha=\frac{1}{A}.\frac{A\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{6}.$

Sau thời gian $\Delta t=\frac{1}{60}s$ thì vectơ dao động quay được một góc là $\Delta\varphi=\omega\Delta t=5\pi.\frac{1}{60}=\frac{\pi}{12}.$

Đến lúc đó, vectơ dao động sẽ đến OM' hoặc ON' hợp với trục hoành một góc:

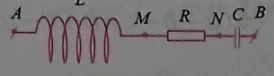
$\alpha'=\alpha+\Delta\varphi=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}.$ Lúc đó: $x=\pm\frac{A\sqrt{2}}{2}.$

Do đó: $W_1=\frac{kx^2}{2}=\frac{1}{2}\frac{kA^2}{2}=\frac{W}{2}\Rightarrow\frac{W_1}{W_đ}=1.$ ❐

➢***Nhận xét.*** Chỉ có một bạn có lời giải gần đúng bài ra kì này: **Quảng Trị:** *Võ Thanh Long*, 11, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị.

ĐINH THỊ THÁI QUỲNH

Bài L2/491. *Đặt điện áp* $u=U_0\cos 2\pi f$ (U_0 *không đổi,* f *thay đổi được*) *vào hai đầu đoạn mạch như hình vẽ. Khi* $f=f_1$ *và* $f=f_2=2f_1$ *thì công suất tiêu thụ là* P *và điện áp tức thời* u_{AN} *vuông pha với* u_{MB}. *Khi* $f=f_3$ *thì điện áp hiệu dụng giữa hai đầu cuộn cảm thuần đạt giá trị cực đại và công suất tiêu thụ của đoạn mạch là* 140W. *Giá trị công suất* P *là bao nhiêu?*



Lời giải. Khi $f=f_1$ và $f=f_2=2f_1\Rightarrow Z_1=Z_2$

$$\Leftrightarrow (Z_{L_1}-Z_{C_1})^2=(Z_{L_2}-Z_{C_2})^2\Rightarrow Z_{L_1}=\frac{Z_{C_1}}{3}. \quad (1)$$

Mặt khác u_{AN} vuông pha với u_{MB} nên ta có:

$$R^2=Z_{L_1}.Z_{C_1}\Rightarrow Z_{L_1}=\frac{R}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $Z_{C_1}=\sqrt{3}R$.

Công suất tiêu thụ của mạch khi ấy:

$$P=\frac{U^2}{R^2+(Z_{L_1}-Z_{C_1})^2}R=\frac{3U^2}{7R} \quad (3)$$

Khi $f=f_3$ thì $U_{L\max}$ ta có $\Rightarrow Z_{C_3}^2=Z_{L_3}.Z_{C_3}-\frac{R^2}{2}$.

Suy ra $Z_{C_3}=\frac{R}{\sqrt{2}}; Z_{L_3}=\sqrt{2}R$. Công suất của mạch lúc này: $P_0=\frac{2U^2}{3R}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $P=90$W. ❐

➢***Nhận xét.*** Rất tiếc không có bạn nào gửi lời giải bài Vật lý này về Tòa soạn.

NGUYỄN XUÂN QUANG

ỨNG DỤNG ...

(Tiếp theo trang 5)

$$\Leftrightarrow a^2(b^2+c^2-a^2)^2+b^2(c^2+a^2-b^2)^2+c^2(a^2+b^2-c^2)^2\ge 3.a^2b^2c^2$$

Đặt: $x=b^2+c^2-a^2; y=c^2+a^2-b^2; z=a^2+b^2-c^2$, với $x,y,z>0$ suy ra

$$a^2=\frac{y+z}{2}; b^2=\frac{z+x}{2}; c^2=\frac{x+y}{2}.$$

Khi đó bất đẳng thức được đưa về:

$$\frac{y+z}{2}x^2+\frac{z+x}{2}y^2+\frac{x+y}{2}z^2\ge 3\frac{x+y}{2}.\frac{y+z}{2}.\frac{z+x}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y\ge 6xyz$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x)\ge 8xyz \quad (*)$$

Bài toán 13. *Chứng minh rằng trong tam giác ABC nhọn luôn có:* $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$. (13)

Lời giải. Áp dụng định lí hàm số côsin cho ΔABC ta thấy BĐT (13) tương đương với

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\le\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)\le 3abc \quad (**)$$

$$a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b\le a^3+b^3+c^3+3abc$$

$$\Leftrightarrow (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc.$$

Đặt: $a+b-c=z; b+c-a=x; c+a-b=y$ thì $a=\frac{y+z}{2}; b=\frac{z+x}{2}; c=\frac{x+y}{2}$, bất đẳng thức có dạng $(x+y)(y+z)(z+x)\ge 8xyz$.

Bài toán 14. *Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có:* $\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{8}$ (14).

Lời giải. Ta có

$$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{bc}};$$

tương tự $\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b+a-c)(b+c-a)}{ca}}$;

$$\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(c+b-a)(c+a-b)}{ab}}.$$

Thay vào ta thấy BĐT (14) tương đương với $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc$ (luôn đúng theo 4).

Như vậy từ một bài toán đơn giản nhưng ta có thể sáng tạo ra các bài toán từng xuất hiện trong các kì thi chọn học sinh giỏi và thi Olympic Toán Quốc tế (IMO), qua đó ta thấy rằng mọi bài toán khó đều trở nên đơn giản nếu ta biết cách đơn giản hóa vấn đề.



ĐƯỜNG TRÒN KỲ ẢO

Đường tròn kỳ ảo dưới đây là những hình tròn đồng tâm, trên mỗi vòng tròn được đánh số. Một số tính chất của chúng là :

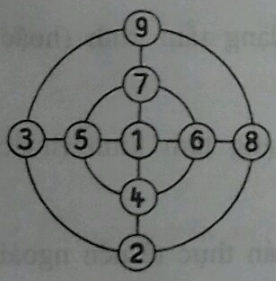
- Tổng của các số trên các đường tròn trong và ngoài bằng nhau (trừ đường tròn trung tâm)..
- Tổng của các số trên các đường kính (trong và ngoài) bằng nhau.
- Tổng 2 số đối đỉnh nằm trên cùng một đường kính bằng nhau.

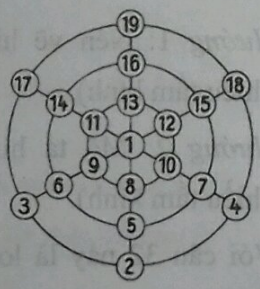
Ví dụ minh họa cho các tính chất trên đường tròn kỳ ảo ***bậc*** 3:

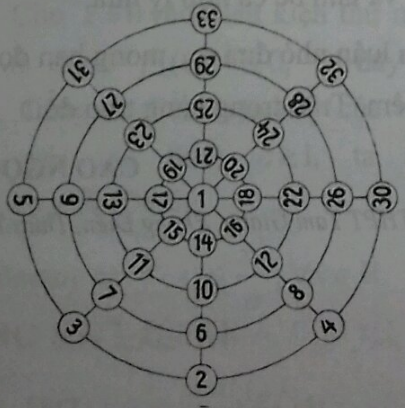
$7 + 6 + 4 + 5 = 9 + 8 + 2 + 3$; $5 + 1 + 6 = 7 + 1 + 4$;

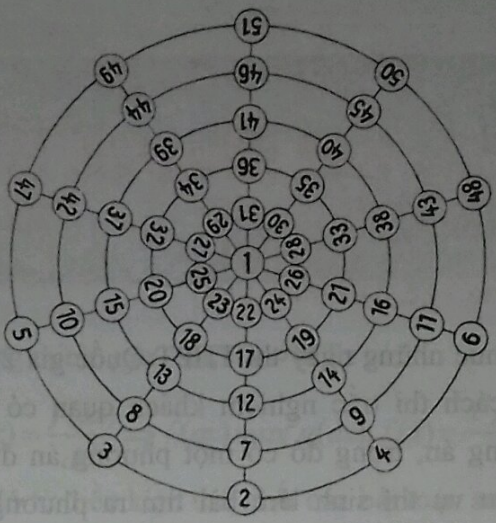
$3+5+1+6+8 = 9+7+1+4+2$; $7+4 = 6+5$; $9+2 = 3+8$.

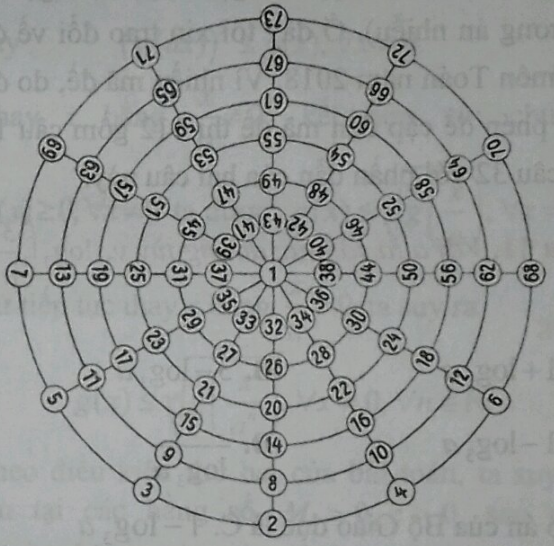
Dưới đây là các đường tròn kỳ ảo ***bậc*** 3,4,5,6 và 7.





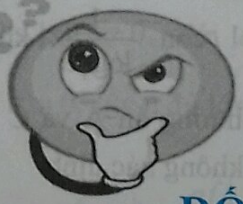






TRẦN VĂN LÂM

(Xóm Tiến Bộ, thôn Vân Trai, xã Tân Phú, thị xã Phổ Yên, tỉnh Thái Nguyên)



ĐỐ VUI !

CÁC HÌNH VUÔNG VỚI SỐ 2018

Hãy tìm 12 hình vuông với số đo các cạnh là các số nguyên liên tiếp sao cho tổng diện tích của 12 hình vuông đó bằng 2018.

Mời bạn đọc gửi lời giải bài đố vui này cho Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 5.11.2018

VIỆT HẢI *(Hà Nội)*



Kết thúc những ngày thi THPT Quốc gia 2018. Với cách thi trắc nghiệm khách quan có bốn phương án, trong đó có một phương án đúng. Nhiệm vụ thí sinh làm bài tìm ra phương án đúng và loại ra ba phương án còn lại (gọi là phương án nhiễu). Ở đây tôi xin trao đổi về đề thi môn Toán năm 2018. Vì nhiều mã đề, do đó xin phép đề cập đến mã đề thi 112 gồm câu 11 và câu 32 với phần dẫn của hai câu này.

Câu 11. *Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3\left(\frac{3}{a}\right)$ bằng*

A. $1+\log_3 a$ **B.** $3-\log_3 a$

C. $1-\log_3 a$ **D.** $\frac{1}{\log_3 a}$

Đáp án của Bộ Giáo dục là C. $1-\log_3 a$

Xin trao đổi:

• Nếu $a=1$ thì $\log_3 a=0$ nên: $1+\log_3 a=1$, $3-\log_3 a=3$, $1-\log_3 a=1$ còn $\frac{1}{\log_3 a}$ không xác định. Dẫn đến hai phương án A và C đều bằng 1 còn phương án D không xác định.

• Nếu $1\neq a>0$ thì

$$\log_3\left(\frac{3}{a}\right)=\log_3 3-\log_3 a=1-\log_3 a$$

nên đáp án đúng C. $1-\log_3 a$

Câu 32. *Ông A dự định sử dụng hết 5,5m^2 kính để làm một cái bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?*

A. 1,51m^3. **B.** 1,17m^3.

C. 1,40m^3. **D.** 1,01m^3.

Xin trao đổi:

Phần dẫn ông A sử dụng hết 5,5m^2 kính mà không đề cập về hình dạng nên không thuyết phục lắm trong cách làm bể cá. Vì rằng có nhiều hình dạng tấm kính bảo đảm đủ 5,5m^2 nhưng không thể làm bể cá được. Do đó nên sửa phần dẫn.

Đề xuất.

Câu 11. *Với a là số thực dương khác* 1.

Câu 32.

Hướng 1: Nên vẽ hình dạng tấm kính (hoặc nhiều tấm kính).

Hướng 2: Mô tả hình dạng tấm kính (hoặc nhiều tấm kính).

Với câu 32 này là loại toán thực tế nên ngoài cách tìm dung tích lớn nhất, người học cần biết cách cắt và làm bể cá hợp lý nữa.

Vài bình luận nhỏ đưa ra, mong bạn đọc gần xa góp ý thêm. Trân trọng cùng trao đổi!

CAO NGỌC TOẢN

(*GV THPT Tam Giang, Phong Điền, Thừa Thiên Huế*)

CÁC BẠN NHỚ ĐẶT MUA TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ QUÝ IV NĂM 2018 TẠI CÁC CƠ SỞ BƯU ĐIỆN TRONG CẢ NƯỚC



ỨNG DỤNG GIỚI HẠN TRONG BÀI TOÁN HÀM SỐ

TRẦN TRUNG DŨNG
(B12 D48, T31, Bộ Công an)

Giới hạn là một phát minh mang tính đột phá của giải tích sơ cấp, có rất nhiều ứng dụng trong cả lý thuyết và thực tiễn. Chúng ta có thể tìm thấy ứng dụng của giới hạn trong nhiều dạng toán thuộc các lĩnh vực khác nhau của Toán học như Đại số (qua các bài toán xây dựng dãy số để chứng minh BĐT), Giải tích, Số học (qua các bài toán về giới hạn liên quan đến hàm phần nguyên và phần lẻ), Hình học giải tích, ... Bài báo này tập trung vào việc phân tích ứng dụng của giới hạn trong các dạng toán về hàm số bao gồm giải phương trình, bất phương trình hàm, chứng minh BĐT hàm, tìm hằng số tốt nhất cho một BĐT hàm số, xác định các giá trị của tham số để tồn tại một hàm số thỏa mãn yêu cầu nhất định,... Mời các bạn đến với những thí dụ đầu tiên.

I. Ứng dụng giới hạn trong bài toán chứng minh BĐT hàm số

Thí dụ 1. *Cho $a \geq 1$ là một số thực và $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là một hàm số thỏa mãn đồng thời hai điều kiện*

- $(f(ax))^2 \leq a^3x^2 f(x)$ *với mọi số thực x;*
- f *bị chặn trên một lân cận nào đó của 0.*

Chứng minh rằng $|f(x)| \leq \dfrac{x^2}{a}$ với mọi số thực x.

Lời giải. Cho $x=0$ vào điều kiện thứ nhất của bài toán ta được $f((0))^2 \leq 0$, từ đây suy ra $f(0)=0$. Cũng từ điều kiện này của bài toán kết hợp với giả thiết $a \geq 1$, ta suy ra $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó

$$(\text{đpcm}) \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{x^2}{a}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Điều này là hiển nhiên với $x=0$. Xét trường hợp $x \neq 0$, ta đặt $g(x)=\dfrac{af(x)}{x^2}, \forall x \neq 0$, ta cần chứng minh $g(x) \leq 1, \forall x \neq 0$. Ta có:

$$g(ax)=\frac{f(ax)}{ax^2} \Rightarrow f(ax)=ax^2 g(ax); f(x)=\frac{x^2 g(x)}{a}.$$

Do đó từ điều kiện thứ nhất của bài toán suy ra:

$$a^2x^4\left(g(ax)\right)^2 \leq a^2x^4 g(x), \forall x \neq 0,$$

hay $$\left(g(ax)\right)^2 \leq g(x), \forall x \neq 0.$$

Thay x bằng $\dfrac{x}{a} \neq 0$, kết hợp với chú ý $g(x) \geq 0, \forall x \neq 0$ ta được: $g(x) \leq \sqrt{g\left(\dfrac{x}{a}\right)}, \forall x \neq 0.$

Cứ tiếp tục thay x bằng $\dfrac{x}{a} \neq 0$ ta suy ra

$$g(x) \leq \sqrt[2^n]{g\left(\frac{x}{a^n}\right)}, \forall x \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Theo điều kiện thứ hai của bài toán, ta suy ra tồn tại các hằng số $M>0, c>0$ sao cho $f(x)<M, \forall x \in (-c;c)$. Với $a=1$, ta suy ra ngay $\left(g(x)\right)^2 \leq g(x), \forall x \neq 0$, lại có $g(x) \geq 0, \forall x \neq 0$ ta suy ra ngay $g(x) \leq 1, \forall x \neq 0$. Với $a>1$, ta cố định một số thực $x \neq 0$, lấy n đủ lớn ta sẽ có $\dfrac{x}{a^n} \in (-c;c)$.

Khi đó $g\left(\dfrac{x}{a^n}\right)=\dfrac{af\left(\dfrac{x}{a^n}\right)}{\left(\dfrac{x}{a^n}\right)^2} < \dfrac{aM}{\left(\dfrac{x}{a^n}\right)^2}$, suy ra

$$g(x) \leq \sqrt[2^n]{g\left(\frac{x}{a^n}\right)} < \frac{\sqrt[2^n]{aM}}{\sqrt[2^n]{x^2}}.a^{\frac{n}{2^{n-1}}}.$$

Cho $n \to +\infty$ với chú ý $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[2^n]{aM}}{\sqrt[2^n]{x^2}}.a^{\frac{n}{2^{n-1}}}=1$ (do

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[2^n]{\dfrac{aM}{x^2}}=1;\ \lim\limits_{n\to+\infty}a^{\frac{n}{2^{n-1}}}=a^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2^{n-1}}}=a^0=1)$ ta suy ra $g(x)\le 1$. Như vậy với mọi số thực $x\neq 0$, ta đều có $g(x)\le 1$. Kết hợp các trường hợp đã xét ta suy ra BĐT đã cho được chứng minh hoàn toàn.

Nhận xét. Hai điểm mấu chốt của bài toán trên là việc đặt hàm số phụ $g(x)$ để chuyển từ việc chứng minh một BĐT hai vế chứa biến số thành BĐT có một vế là hằng số và việc sử dụng phương pháp lặp để thu được BĐT chặt hơn là $g(x)\le\sqrt[2^n]{g\left(\dfrac{x}{a^n}\right)},\ \forall x\neq 0,\ \forall n\in\mathbb{N}$ từ BĐT $g(x)\le\sqrt{g\left(\dfrac{x}{a}\right)},\ \forall x\neq 0$ để sau đó sử dụng giới hạn kết hợp với giả thiết hàm đã cho bị chặn trên một lân cận của 0.

Thí dụ 2. *Cho $P(x)$ là một đa thức bậc $n\ge 1$ thỏa mãn $P(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$. Chứng minh:*

$$P(x)+P'(x)+P''(x)+...+P^{(n)}(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Lời giải. Đặt

$$G(x)=P(x)+P'(x)+P''(x)+...+P^{(n)}(x).$$

Ta cần chứng minh $G(x)\ge 0,\forall x$. Ta có

$$G'(x)=P'(x)+P''(x)+P'''(x)+...+P^{(n)}(x)$$

(chú ý $P^{(n+1)}(x)=0$ với $P(x)$ là một đa thức bậc n). Suy ra $G(x)-G'(x)=P(x)$. Từ đó ta có $G(x)-G'(x)\ge 0,\forall x$. Đặt $f(x)=e^{-x}G(x)$, ta suy ra $f'(x)=e^{-x}\left(-G(x)+G'(x)\right)\le 0,\forall x$. Do đó $f(x)$ là hàm nghịch biến. Vì thế $f(x)\ge\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\forall x$. Vì $P(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên ta suy ra $P(x)$ là một đa thức bậc n chẵn với hệ số cao nhất dương. Do đó $G(x)$ cũng là một đa thức bậc n chẵn với hệ số cao nhất dương. Từ đó ta có $G(x);G'(x);G''(x);...;G^{(n-1)}(x)$ đều là các đa thức bậc lớn hơn hoặc bằng 1 và có hệ số cao nhất dương, suy ra

$$\lim_{x\to+\infty}G(x)=\lim_{x\to+\infty}G'(x)=\lim_{x\to+\infty}G''(x)$$
$$=...=\lim_{x\to+\infty}G^{(n-1)}(x)=+\infty.$$

Theo quy tắc L'Hospital ta được:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{G(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{G'(x)}{e^x}$$
$$=...=\lim_{x\to+\infty}\frac{G^{(n-1)}(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{G^{(n)}(x)}{e^x}=0$$

(do $G^{(n)}(x)=\text{const}$). Vì thế $f(x)\ge 0,\forall x$. Từ đó ta có $G(x)\ge 0,\forall x$ (đpcm).

Nhận xét. Giới hạn được ứng dụng trong bài toán này thông qua hai đánh giá: một là $f(x)\ge\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\forall x$ thu được từ tính nghịch biến của f, hai là đánh giá dùng quy tắc L'Hospital để thu được $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{G(x)}{e^x}=0$.

II. Ứng dụng giới hạn trong bài toán giải phương trình hàm, bất phương trình hàm

Một trong những ứng dụng quan trọng của giới hạn trong bài toán giải phương trình hàm là việc giải các phương trình hàm liên tục dạng $f(x)=h(x)f\left(g(x)\right)$. Đây là một dạng toán quen thuộc nên tác giả chỉ xin trình bày một ví dụ tương đối khó về nó, đó là Thí dụ 3 sau đây:

Thí dụ 3. *Tìm tất cả các hàm số liên tục $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)=x^{x-1}f(x^x)$ với mọi $x>0$.*

Lời giải. • Với $0<a<1$, ta xét dãy số (u_n) được xác định như sau: $u_1=a;\ u_{n+1}=u_n^{u_n},\forall n\in\mathbb{N}^*$. Suy ra

$$f(u_n)=u_n^{u_n-1}f(u_n^{u_n})=\frac{u_{n+1}f(u_{n+1})}{u_n}$$

hay $u_{n+1}f(u_{n+1})=u_nf(u_n)$. Từ đó suy ra

$$af(a)=u_1f(u_1)=u_2f(u_2)=...=u_nf(u_n)\quad(1)$$

Ta có $u_2=a^a$, do $0<a<1$ nên

$$a\ln a<0\Rightarrow\ln a^a<0,\text{ do đó}$$

$u_2=a^a<1$. Từ đó lại có $0<u_2<1$. Tương tự ta suy ra $0<u_n<1,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Do đó

$(u_n-1)\ln(u_n)>0$ suy ra $\ln u_n^{(u_n-1)}>\ln 1$ hay $u_n^{u_n}>u_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$ tức là $u_{n+1}>u_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Từ đây ta có (u_n) là dãy tăng và bị chặn trên bởi 1, do đó nó có giới hạn hữu hạn. Đặt giới hạn đó là L, ta có: $L=L^L$ và $L\le 1$. Từ đây dễ dàng suy ra $L=1$.

Từ (1) suy ra

$$af(a)=\lim_{n\to+\infty}u_nf(u_n)=\lim_{n\to+\infty}u_n.f(\lim_{n\to+\infty}u_n)=f(1).$$

Suy ra $f(a)=\dfrac{f(1)}{a}$.

• Với $a\ge 1$. Xét hàm $g(x)=x^x$ trên $[1;+\infty)$, ta có $g'(x)=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}(\ln x+1)$. Dễ thấy $g'(x)>0, \forall x\ge 1$. Do đó $g(x)$ là hàm đơn điệu tăng trên $[1;+\infty)$. Vì thế tồn tại một hàm $g^{-1}(x)$ là hàm ngược của $g(x)$.

Xét dãy số (u_n) được xác định như sau:

$$u_1=a; u_{n+1}=g^{-1}(u_n), \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Hiển nhiên thông qua cách xây dựng dãy ta có $u_n>0, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Ta có

$$f(u_{n+1})=u_{n+1}^{u_{n+1}-1}f\left(g(u_{n+1})\right)=\frac{g(u_{n+1})f(u_n)}{u_{n+1}}=\frac{u_nf(u_n)}{u_{n+1}}$$

hay $u_{n+1}f(u_{n+1})=u_nf(u_n)$. Suy ra

$$af(a)=u_1f(u_1)=u_2f(u_2)=\ldots=u_nf(u_n) \quad (2).$$

Ta có: $g(u_{n+1})=g(g^{-1}(u_n))=u_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$ suy ra $g(u_2)=u_1=a\ge 1$ do đó phải có $u_2\ge 1$ vì nếu $u_2<1$ thì $u_2\ln u_2<0\Rightarrow \ln u_2^{u_2}<\ln 1$ suy ra $g(u_2)<1$, mâu thuẫn.

Tương tự ta suy ra $u_n\ge 1, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Từ đó ta có $g(u_{n+1})=g(g^{-1}(u_n))=u_n\le u_n^{u_n}=g(u_n), \forall n\in\mathbb{N}^*$, kết hợp với tính đồng biến của $g(x)$ trên $[1;+\infty)$ suy ra $u_{n+1}\le u_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Từ đây ta có (u_n) là dãy không tăng và bị chặn dưới bởi 1, do đó nó có giới hạn hữu hạn. Đặt giới hạn đó là L ta có: $L=L^L$ và $L\ge 1$. Từ đây dễ dàng suy ra $L=1$. Từ (2) suy ra

$$af(a)=\lim_{n\to+\infty}u_nf(u_n)=\lim_{n\to+\infty}u_n.f(\lim_{n\to+\infty}u_n)=f(1).$$

Suy ra $f(a)=\dfrac{f(1)}{a}$. Kết hợp hai trường hợp suy ra $f(x)=\dfrac{f(1)}{x}, \forall x>0$. Thử lại ta thấy hàm số này thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Đáp số: $f(x)=\dfrac{c}{x}, \forall x>0$ trong đó c là hằng số.

Nhận xét. Cái khó của bài toán này là việc xét trường hợp $a\ge 1$, trong các bài toán thường làm thì hàm ngược của $g(x)$ là một hàm tường minh, tuy nhiên trong bài toán này ta không thể chỉ ra biểu diễn cụ thể của nó và do vậy việc đánh giá để tìm giới hạn dãy số trong trường hợp này đòi hỏi người làm phải khéo léo và có kỹ thuật hơn.

Thí dụ 4. *Tìm tất cả các hàm số* $f:[0;+\infty)\to[0;+\infty)$ *thỏa mãn* $3f(x)\ge 2x, \forall x\ge 0$ *và* $f\left(3f(x)-2x\right)=x, \forall x\ge 0$.

Lời giải. Từ $3f(x)\ge 2x, \forall x\ge 0$ ta suy ra $f(x)\ge\dfrac{2}{3}x, \forall x\ge 0$. Do đó

$$f\left(3f(x)-2x\right)\ge 2f(x)-\frac{4}{3}x, \forall x\ge 0.$$

Suy ra

$$x\ge 2f(x)-\frac{4}{3}x, \forall x\ge 0 \text{ hay } f(x)\le\frac{7}{6}x, \forall x\ge 0.$$

Như vậy $\dfrac{2}{3}x\le f(x)\le\dfrac{7}{6}x, \forall x\ge 0$. Xét hai dãy (a_n) và (b_n) xác định như sau:

$$a_1=\frac{2}{3}; b_1=\frac{7}{6}; a_{n+1}=\frac{2b_n+1}{3b_n}; b_{n+1}=\frac{2a_n+1}{3a_n}.$$

Dễ chứng minh bằng quy nạp được

$$a_nx\le f(x)\le b_nx, \forall x\ge 0, \forall n\ge 1. \quad (1)$$

Đồng thời ta dễ dàng có được $a_n<1, \forall n\ge 1$ và $b_n>1, \forall n\ge 1$.

Ta có $b_2=\dfrac{7}{6}$; $a_2=\dfrac{20}{21}$ suy ra $a_2>a_1$. Từ đó

$$b_3=\frac{2}{3}+\frac{1}{3a_2}<\frac{2}{3}+\frac{1}{3a_1}=b_2$$

Từ đó lại suy ra $a_3=\frac{2}{3}+\frac{1}{3b_2}<\frac{2}{3}+\frac{1}{3b_3}=a_4$.

Tiếp tục như vậy ta suy ra (a_n) là dãy không giảm, (b_n) là dãy không tăng. Lại có (a_n) bị chặn trên, (b_n) bị chặn dưới suy ra hai dãy số này đều có giới hạn hữu hạn và từ cách xác định dãy số dễ dàng chứng minh được chúng có cùng giới hạn là 1. Trong (1) cho $n\to+\infty$ ta suy ra $f(x)=x, \forall x\ge 0$. Thử lại ta thấy $f(x)=x, \forall x\ge 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Thí dụ 5. *Tìm tất cả các hàm số $f:[1;+\infty)\to[1;+\infty)$ thỏa mãn:*

i) $f(x)\ge x$ *với mọi* $x\ge 1$;

ii) $f\left(\frac{f(x)}{x}\right)=x^2$ *với mọi* $x\ge 1$.

Lời giải. Thay x bằng $\frac{f(x)}{x}$ trong i) ta được:

$$f\left(\frac{f(x)}{x}\right)\ge\frac{f(x)}{x} \text{ với mọi } x\ge 1.$$

Kết hợp với ii) suy ra $f(x)\le x^3$ với mọi $x\ge 1$.

Từ đó ta có $x\le f(x)\le x^3$ với mọi $x\ge 1$.

Xét hai dãy (a_n) và (b_n) xác định như sau:

$$a_1=1; b_1=3; a_{n+1}=\frac{b_n+2}{b_n}; b_{n+1}=\frac{a_n+2}{a_n}.$$

Ta có ngay $x^{a_1}\le f(x)\le x^{b_1}$ với mọi $x\ge 1$. Giả sử đã có $x^{a_k}\le f(x)\le x^{b_k}$ với mọi $x\ge 1$, với $k\ge 1$, ta chứng minh $x^{a_{k+1}}\le f(x)\le x^{b_{k+1}}$ với mọi $x\ge 1$. Thật vậy: thay x bằng $\frac{f(x)}{x}$ vào giả thiết quy nạp, kết hợp với ii) ta được

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{a_k}\le f\left(\frac{f(x)}{x}\right)=x^2\le\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{b_k}$$

với mọi $x\ge 1$. Suy ra $x^{\frac{b_k+2}{b_k}}\le f(x)\le x^{\frac{a_k+2}{a_k}}$ với mọi $x\ge 1$ hay $x^{a_{k+1}}\le f(x)\le x^{b_{k+1}}$ với mọi $x\ge 1$.

Theo nguyên lý quy nạp ta thu được

$x^{a_n}\le f(x)\le x^{b_n}$ với mọi $x\ge 1$ và $n\ge 1$ (1).

Tương tự thí dụ 4 ta chứng minh được hai dãy (a_n) và (b_n) đều có giới hạn là 2. Trong (1) cho $n\to+\infty$ ta suy ra $f(x)=x^2, \forall x\ge 1$. Thử lại ta thấy $f(x)=x^2, \forall x\ge 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. *Đáp số:* $f(x)=x^2, \forall x\ge 1$.

Nhận xét. Hai thí dụ 4 và 5 có điểm chung là việc xây dựng hai dãy số có cùng giới hạn để kẹp hàm số đã cho. Đây là một kỹ thuật rất đáng chú ý trong bài toán giải phương trình hàm có thêm điều kiện là một BĐT. Nếu ta thu được một BĐT kẹp từ các điều kiện của bài toán trong đó đại lượng bị kẹp giữa là $f(x)$ thì hãy nghĩ ngay đến việc sử dụng kỹ thuật này.

Thí dụ 6. *Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:*

i) $f(x+y)\le f(x)+f(y), \forall x, y\in\mathbb{R}$;

ii) $f(x)\ln 2018\le 2018^x-1, \forall x\in\mathbb{R}$.

Lời giải. Cho $x=y=0$ vào i) ta thu được $f(0)\ge 0$. Cho $x=0$ vào ii) ta thu được $f(0)\ln 2018\le 0$ suy ra $f(0)\le 0$. Do đó $f(0)=0$. Thay y bằng x vào i) ta thu được $f(2x)\le 2f(x), \forall x\in\mathbb{R}$. Từ đây suy ra

$$f(x)\le 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right), \forall x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}.$$

Thay x bằng $\frac{x}{2^n}$ trong ii), ta được

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right)\ln 2018\le 2018^{\frac{x}{2^n}}-1, \forall x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}.$$

Kết hợp hai BĐT trên thu được

$$\frac{f(x)}{2^n}\ln 2018\le 2018^{\frac{x}{2^n}}-1, \forall x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}.$$

Suy ra $f(x)\le\frac{2018^{\frac{x}{2^n}}-1}{\frac{x}{2^n}\ln 2018}.x, \forall x\ne 0, n\in\mathbb{N}.$

Cố định $x\in\mathbb{R}$, cho $n\to+\infty$, ta suy ra

$$f(x)\le\lim_{n\to+\infty}\frac{2018^{\frac{x}{2^n}}-1}{\frac{x}{2^n}\ln 2018}.x, \forall x\ne 0.$$

Suy ra $f(x)\le x, \forall x\ne 0$ (chú ý $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2018^{\frac{x}{2^n}}-1}{\dfrac{x}{2^n}\ln 2018}=1$, có thể dùng quy tắc L'Hospital cho giới hạn này). Từ đó ta có $f(-x)\le -x, \forall x\ne 0$. Ta suy ra

$$f(x)+f(-x)\le 0, \forall x\ne 0.$$

Mặt khác, trong i cho $y=-x$ ta suy ra

$$f(x)+f(-x)\ge f(0)=0, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Từ đó ta suy ra

$$f(x)+f(-x)=0, \forall x\ne 0 \Leftrightarrow f(x)=x, \forall x\ne 0.$$

Lại có $f(0)=0$ suy ra $f(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại ta thấy $f(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán (việc chứng minh $x\ln 2018\le 2018^x-1, \forall x\in\mathbb{R}$ bạn đọc tự giải quyết). *Đáp số*: $f(x)=x, \forall x\in\mathbb{R}$.

Thí dụ 7. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn:* $f(x+y^2)\ge (y+1)f(x), \forall x, y\in\mathbb{R}$.

Lời giải. Thay x bằng $x-1$ và thay y bằng -1 vào điều kiện của bài toán ta được:

$$f(x)\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}.$$

Thay x bằng $x+y^2$ vào điều kiện của bài toán ta được: $f(x+2y^2)\ge (y+1)f(x+y^2), \forall x, y\in\mathbb{R}$.

Lại có $f(x+y^2)\ge (y+1)f(x), \forall x, y\in\mathbb{R}$ suy ra

$$f(x+2y^2)\ge (y+1)^2 f(x), \forall x, y\in\mathbb{R}.$$

Tiếp tục như vậy ta thu được

$$f(x+ny^2)\ge (y+1)^n f(x), \forall x, y\in\mathbb{R}, n\ge 1 \quad (1).$$

Trong (1) thay y bằng $\dfrac{1}{n}$ ta được:

$$f\left(x+\frac{1}{n}\right)\ge\left(\frac{1}{n}+1\right)^n f(x), \forall x\in\mathbb{R}, n\ge 1 \quad (2).$$

Trong (2) lại thay x bằng $x+\dfrac{1}{n}$ ta thu được

$$f\left(x+\frac{2}{n}\right)\ge\left(\frac{1}{n}+1\right)^n f\left(x+\frac{1}{n}\right), \forall x\in\mathbb{R}, n\ge 1.$$

Kết hợp với (2) suy ra

$$f\left(x+\frac{2}{n}\right)\ge\left(\frac{1}{n}+1\right)^{2n} f(x), \forall x\in\mathbb{R}, n\ge 1.$$

Cứ tiếp tục như vậy ta thu được

$$f\left(x+\frac{k}{n}\right)\ge\left(\frac{1}{n}+1\right)^{kn} f(x), \forall x\in\mathbb{R}, n\ge 1, k\ge 1 \quad (3).$$

Cho $k=n$ vào (3) suy ra

$$f(x+1)\ge\left(\frac{1}{n}+1\right)^{n^2} f(x), \forall x\in\mathbb{R}, n\ge 1 \quad (4).$$

Giả sử tồn tại $x_0\in\mathbb{R}$ để $f(x_0)\ne 0$ khi đó do $f(x)\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x_0)>0$. Trong (4) thay x bằng x_0 sau đó cho $n\to+\infty$ ta được

$$f(x_0+1)\ge\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right)^{n^2} f(x_0).$$

Chú ý rằng

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+1\right)^{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{n}+1\right)^n\right)^n=\lim_{n\to+\infty}e^n=+\infty$$

và $f(x_0)>0$ nên ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n}+1\right)^{n^2} f(x_0)=+\infty$.

Từ đó suy ra mâu thuẫn vì $f(x_0+1)$ là một hằng số. Do đó suy ra $f(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại ta thấy $f(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. *Đáp số*: $f(x)=0, \forall x\in\mathbb{R}$.

III. Ứng dụng giới hạn trong bài toán tìm hằng số tốt nhất và tìm giá trị của tham số để tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu

Thí dụ 8. (VMO 2003). *Gọi F là tập hợp các hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thoả mãn điều kiện: $f(3x)\ge f(f(2x))+x, \forall x\in(0;+\infty)$. Tìm số thực α tốt nhất (lớn nhất) sao cho với mọi $f\in F$ ta có: $f(x)\ge\alpha x, \forall x\in(0;+\infty)$.*

Lời giải. Do hàm $f(x)=\dfrac{x}{2}, \forall x\in(0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện của bài toán nên ta có $\alpha\le\dfrac{1}{2}$. Ta chứng minh $\alpha=\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán tức là với mọi $f\in F$ ta có : $f(x)\ge\dfrac{x}{2}, \forall x\in(0;+\infty)$.

Thật vậy: do $f\in F$ nên

$$f(3x) \ge f(f(2x)) + x > x, \forall x \in (0;+\infty),$$

suy ra $f(x) \ge \frac{x}{3}, \forall x \in (0;+\infty)$. Xét dãy a_n xác định như sau: $a_1 = \frac{1}{3}$; $a_{n+1} = \frac{2a_n^2 + 1}{3}, \forall n \ge 1$.

Dễ dàng chứng minh bằng quy nạp được

$$f(x) \ge a_n x, \forall x \in (0;+\infty), \forall n \ge 1.$$

Đồng thời dễ tìm ra $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}$. Từ đó suy ra

$$f(x) \ge \lim_{n\to+\infty} a_n x = \frac{x}{2}, \forall x \in (0;+\infty).$$

Vậy số thực α tốt nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\alpha = \frac{1}{2}$.

Thí dụ 9. *Tìm tất cả các số thực $a > 1$ sao cho tồn tại hàm số $f : (0;+\infty) \to (0;+\infty)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:*

i) $f(x) \le x + \frac{a}{2} f\left(\frac{x}{a}\right), \forall x > 0.$

ii) $f(x) \le 4, \forall x \in (0;1].$

iii) $f(2018) > 4036.$

Lời giải. Đặt $g(x) = \frac{f(x)}{2x}, \forall x > 0$. Từ các điều kiện của bài toán ta suy ra:

$$g(x) \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} g\left(\frac{x}{a}\right), \forall x > 0 \quad (1)$$

$$g(x) \le \frac{2}{x}, \forall x \in (0;1] \ (2); \quad g(2018) > 1 \quad (3)$$

Từ (1) ta suy ra

$$g(x) \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} g\left(\frac{x}{a}\right) \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} g\left(\frac{x}{a^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} g\left(\frac{x}{a^2}\right), \forall x > 0.$$

Tiếp tục như vậy suy ra

$$g(x) \le \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} g\left(\frac{x}{a^n}\right), \forall x > 0, \forall n \ge 1.$$

Hay $g(x) \le 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} g\left(\frac{x}{a^n}\right), \forall x > 0, \forall n \ge 1.$

Cố định $x > 0$, chọn n đủ lớn thì $\frac{x}{a^n}$ sẽ thuộc $(0;1]$, khi đó

$$g(x) \le 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2a^n}{x} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{2}{x} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^n, \forall x > 0.$$

Nếu $1 < a < 2$ thì cho $n \to +\infty$ sẽ suy ra $g(x) \le 1, \forall x > 0$, mâu thuẫn với $g(2018) > 1$.

Nếu $a \ge 2$ thì dễ kiểm tra có hàm $f(x) = 2(x+1), \forall x > 0$ thỏa mãn mọi điều kiện của bài toán. Vậy $a \ge 2$ là tất cả các giá trị cần tìm của a.

Kết luận. Như vậy bài báo đã trình bày với bạn đọc một số ứng dụng của giới hạn trong việc giải phương trình hàm, bất phương trình hàm, chứng minh bất đẳng thức hàm số và tìm hằng số tốt nhất, tìm điều kiện của tham số để tồn tại hàm số thỏa mãn yêu cầu cho trước. Tác giả đã cố gắng tuyển chọn và sắp xếp các bài toán theo dạng và theo kỹ thuật sử dụng nhằm giúp bạn đọc có cái nhìn khái quát nhất về các bài toán dạng này cũng như nhằm cung cấp cho các bạn cách tư duy đúng đắn khi giải các bài toán đó. Sau đây là một số bài tập vận dụng dành cho bạn đọc:

1. Tìm số thực k lớn nhất để nếu $f(x)$ là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn BPT hàm: $\sqrt{3f(x)} - \sqrt{3f(x) - \frac{9}{4} f\left(\frac{4}{3}x\right)} \ge 1, \forall x \in \mathbb{R}.$ thì ta luôn có $f(x) \ge k, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Cho hàm số $f : (0;+\infty) \to (0;+\infty)$ thỏa mãn $f(2x) \ge x + f\big(f(x)\big), \forall x > 0$. Chứng minh rằng

$$f(x) \ge x, \forall x > 0.$$

3. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to (0;+\infty)$ thỏa mãn đồng thời: $f(x+y) \ge f(x) f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

$$f(x) \ge 1 + x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

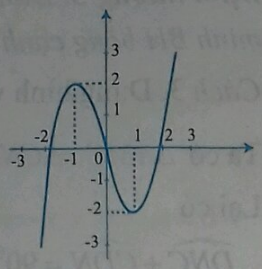
4. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ và $f(x+y) \le f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

5. Tìm tất cả các hàm số $f : (-1;1) \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn $f(x) = f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), \forall x \in (-1;1)$.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 36

Problem. *Given the graph of a cubic function* $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *(a is non - zero). Compute the number of real solutions of the equation* $f(f(x)) = 0$. (1)



Solution. Consider the equation $f(t) = 0$ (2). From the graph we see that (2) has 3 distinct solutions $t = 0$, $t = c_0$, $t = -c_0$ (where c_0 is about 1.7). Thus the number of real solutions of the equation $f(f(x)) = 0$ is equal to the number of distinct real solutions of 3 equations $f(x) = 0$, $f(x) = c_0$, $f(x) = -c_0$. But it is not difficult to see that the 3 horizontal lines $y = 0$, $y = c_0$, $y = -c_0$ intersect the graph at 9 different points. Therefore (1) has 9 distinct real solutions.

Remarks.

• I collected the problem, the picture of the graph on from some study group.

• We can use the increasing/decreasing properties of a cubic function to see clearly why 3 horizontal lines $y = 0$, $y = c_0$, $y = -c_0$ intersect the graph at 9 different points.

TỪ VỰNG

Cubic function	: hàm đa thức bậc 3
Solution	: nghiệm
Horizontal	: nằm ngang

Translated by **NGUYEN PHU HOANG LAN**
(College of Science – Vietnam National University, Hanoi)

BÀI DỊCH SỐ 33

Bài toán. *Tìm tất cả đường tiệm cận đứng của đồ thị (C) của hàm số*

$$y = \frac{1}{x \sin\frac{1}{x}}.$$

Lời giải. Tất cả các nghiệm của phương trình $x.\sin\frac{1}{x} = 0$ là $x = 0$ hoặc $x = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. Từ đó chúng ta nhận thấy các đường tiệm cận đứng của (C) có thể là $x = 0$ hoặc $x = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. Đường thẳng có phương trình $x = 0$ không thể là đường tiệm cận đứng của (C). Xét dãy số $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. Dãy số này tiến tới 0^+, và dãy số tương ứng $y_n = \frac{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)} \to +\infty$

Mặt khác, nếu ta chọn $x_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, dãy này tiến tới 0^+, dãy số tương ứng

$$y_n = \frac{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}{\sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)} \to -\infty.$$

Do đó giới hạn là không tồn tại khi x tiến tới 0 về phía bên phải $(x \to 0^+)$. Tương tự đối với phía bên trái $(x \to 0^-)$. Bây giờ ta chứng minh các đường thẳng còn lại đúng là các đường tiệm cận đứng của (C). Xét trường hợp $x = \frac{1}{\pi}$. Ta có $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{\pi}\right)^+} y = \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{\pi}\right)^+} \frac{\pi}{\sin\frac{1}{x}} \to +\infty$. Chú ý rằng mẫu số tiến tới 0 nhưng luôn dương, do đó giới hạn là dương vô cùng. Tương tự cho các đường thẳng đứng khác. ❐

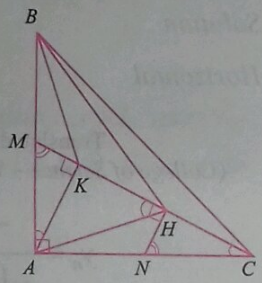
Kết luận. Tất cả các đường tiệm cận đứng của (C) là $x = \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

➢***Nhận xét.*** Các bạn sau có bài dịch tương đối tốt, gửi bài về Tòa soạn sớm: **Hưng Yên:** *Đoàn Phú Thành*, 10 Toán 1, THPT chuyên Hưng Yên; **Thừa Thiên Huế:** *Lê Thị Thu Sương*, 11 Toán 2, Tôn *Nữ Cát Vy*, 12 Toán 2, THPT chuyên Quốc học Huế; **Bến Tre:** *Lê Ngô Nhật Huy*, 12A1, THPT Lạc Long Quân, TP. Bến Tre.

HỒ HẢI *(Hà Nội)*



BÀI TOÁN 16. *Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Kẻ NH ⊥ CM tại H. Chứng minh rằng tam giác ABH cân.*



***Lời giải. Định hướng* 1.** *Vận dụng phương pháp chứng minh hai tam giác bằng nhau.*

Cách 1. Từ giả thiết suy ra $AM=AN=NC$. Kẻ $AK\perp CM$, khi đó

$\Delta AKM=\Delta CHN$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow AK=HC$. Lại có $NH\parallel AK$ và $AN=NC$

$\Rightarrow KH=HC\Rightarrow AK=KH\Rightarrow\Delta AKH$ vuông cân tại $K\Rightarrow\widehat{KHA}=45^0\Rightarrow\widehat{AHC}=135^0$.

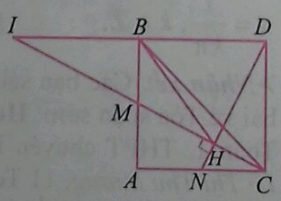
Ta có $\Delta BKA=\Delta AHC$ (c.g.c) $\Rightarrow\widehat{BKA}=\widehat{AHC}=135^0$

$\Rightarrow\widehat{BKH}=135^0\Rightarrow\Delta BKA=\Delta BKH$ (c.g.c)

$\Rightarrow BA=BH$. Vậy ΔABH cân tại B.

***Định hướng* 2.** *Vận dụng chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền trong tam giác vuông.*

Cách 2. Dựng hình vuông $ABDC$. Ta có



$\Delta AMC=\Delta CND$ (c.g.c)

$\Rightarrow\widehat{ACM}=\widehat{CDN}$.

Lại có $\widehat{DNC}+\widehat{CDN}=90^0$

$\Rightarrow\widehat{DNC}+\widehat{ACM}=90^0\Rightarrow CM\perp DN$.

Mặt khác $NH\perp CM$ suy ra N, H, D thẳng hàng. Gọi I là giao điểm của CM và BD thì

$\Delta AMC=\Delta BMI$ (g.c.g) $\Rightarrow BI=AC\Rightarrow BI=BD$.

Tam giác DHI vuông tại H có HB là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền DI, nên $HB=\frac{1}{2}DI$ hay $HB=AB$. Vậy ΔABH cân tại B.

***Định hướng* 3.** *Dựng hình vuông ABDC, chứng minh BH bằng cạnh của hình vuông.*

Cách 3. Dựng hình vuông $ABDC$.

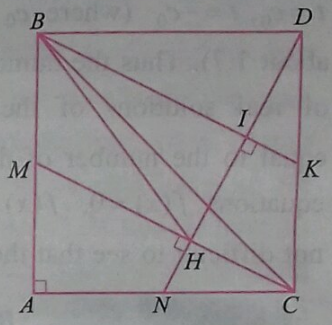
Ta có $\Delta AMC=\Delta CND$ (c.g.c) $\Rightarrow\widehat{ACM}=\widehat{CDN}$.

Lại có

$\widehat{DNC}+\widehat{CDN}=90^0$

$\Rightarrow\widehat{DNC}+\widehat{ACM}=90^0$

$\Rightarrow CM\perp DN$.



Mặt khác $NH\perp CM$ suy ra ba điểm N, H, D thẳng hàng. Gọi K là trung điểm của CD, I là giao điểm của BK và DN. Tứ giác $BKCM$ là hình bình hành, suy ra

$$BK\parallel MC\Rightarrow BK\perp HD.$$

Lại do $KD=KC\Rightarrow HI=ID$. Tam giác BDH có BI vừa là đường cao vừa là trung tuyến nên ΔBDH cân tại $B\Rightarrow BH=BD\Rightarrow BH=BA$. Do đó tam giác ABH cân tại B.

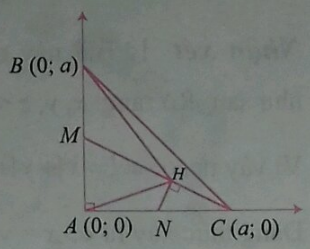
ĐẬU CÔNG NHO

(*GV THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nghệ An*)

Nhận xét. Bạn *Trương Quang An*, thôn An Hòa Nam, xã Nghĩa Thắng, huyện Tư Nghĩa, tỉnh **Quảng Ngãi** đưa ra hai cách giải tương tự như Cách 1 và Cách 3; bạn *Đoàn Phú Thành*, 10 Toán 1, THPT chuyên **Hưng Yên** cũng giới thiệu một cách giải tương tự như Cách 1 của tác giả đề toán *Đậu Công Nho*. Tòa soạn TH&TT xin giới thiệu một cách giải nữa theo phương pháp tọa độ của bạn *Đỗ Trọng Hiển*, Giáo viên THPT Lương Thế Vinh, TX. Điện Bàn, **Quảng Nam.**

Cách 4. Vì tam giác ABC vuông cân tại A. Nên ta chọn hệ trục tọa độ như hình dưới $A(0;\ 0)$; $B(0;\ a)$, $C(a;\ 0)$, với $a>0$.

Vì M là trung điểm của AB nên $M\left(0;\frac{a}{2}\right)$, N là trung điểm của AC nên $N\left(\frac{a}{2};0\right)$.



Ta có $\overrightarrow{MC}=\left(a;-\frac{a}{2}\right)\Rightarrow \vec{n}\left(\frac{1}{2};1\right)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng MC.

Phương trình tổng quát đường thẳng MC là:

$$\frac{1}{2}(x-0)+1\left(y-\frac{a}{2}\right)=0\Leftrightarrow x+2y-a=0$$

Vì $NH\perp MC$ nên $\vec{n}=\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng NH.

Phương trình tổng quát của đường thẳng NH là:

$$1.\left(x-\frac{a}{2}\right)-\frac{1}{2}.(y-0)=0\Leftrightarrow 2x-y-a=0.$$

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình (vì H là giao điểm của MC và NH):

$$\begin{cases}x+2y-a=0\\2x-y-a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3a}{5}\\y=\frac{a}{5}\end{cases}\Leftrightarrow H\left(\frac{3a}{5};\frac{a}{5}\right).$$

Từ đó $BH=\sqrt{\left(\frac{3a}{5}-0\right)^2+\left(\frac{a}{5}-a\right)^2}=\sqrt{\frac{9a^2}{25}+\frac{16a^2}{25}}=a.$

Vậy $AB=BH=a$, suy ra ΔABH cân tại B.

LÊ MAI (*Hà Nội*)

Mời các bạn gửi lời giải Bài toán 18 dưới đây về Tòa soạn Tạp chí TH&TT trước ngày 31.10.2018.

BÀI TOÁN 18. *Cho đường tròn tâm O và dây cung AB không đi qua O. Trên dây cung AB lấy các điểm M, N sao cho $AM=MN=NB$. Các tia OM, ON cắt đường tròn (O) theo thứ tự tại D và E. Chứng minh rằng sđ $\overset{\frown}{AD}<$ sđ $\overset{\frown}{DE}$.*

ĐÀO QUỐC CHUNG
(*GV THCS Diễn Hải, Diễn Châu, Nghệ An*)

PROBLEMS...

(Tiếp theo trang 26)

Problem T7/495. Suppose that the polynomial $P(x)=x^{2018}-ax^{2016}+a$ (a is a real parameter) has 2018 real solutions. Show that there exists at least one solution x_0 of $P(x)$ with $|x_0|\le\sqrt{2}$.

Problem T8/495. Given a pyramid $S.ABCD$ with the base $ABCD$ is a parallelogram, and $SA=SB=SC=a$, $AB=2a, BC=3a$. Let $SD=x$ $(0<x<a\sqrt{14})$. Find x in terms of a so that the product $AC.SD$ obtains its maximum value.

Problem T9/495. Suppose that x, y, z are non-negative numbers satisfying $x+y+z=1$. Find the maximum value of the expression

$$P=xy+yz+zx+\frac{2}{9}(M-m)^3$$

where $M=\max\{x,y,z\}$ and $m=\min\{x,y,z\}$.

Problem T10/495. Consider the sequence (a_n): $a_n=n+[\sqrt[3]{n}]$, n positive integers, ($[\sqrt[3]{n}]$ is the integral part of $\sqrt[3]{n}$). Suppose there exists a positive integer k such that the terms $a_k; a_{k+1}; ...; a_{k+p}$ are $p+1$ consecutive natural numbers with $p=6015\times 2006+1$. Show that

$$k>8.10^9+6.10^7.$$

Problem T11/495. Find the least number k so that in any subset of k elements of {1, 2, …, 25} we can always find at least a Pythagorean triple.

Problem T12/495. Let ABC be a triangle inscribed in a circle (O). Suppose that AH is the altitude and the line AO intersects BC at D. Let K be the second intersection of the circumcircle of ADC and the circumcircle of AHB. Suppose that the circumcircle of KHD intersects (O) at M and N. Let X be the intersection of MN and BC. Show that $XA=XK$.

TOWARDS MATHEMMATICAL OLYMPIAD

DU LỊCH THẾ GIỚI QUA CÁC BÀI TOÁN HAY

Trong bài kỳ này là lời giải bài toán được đưa ra trong phần bài tập đề nghị ở TH&TT số 493, T7.2018.

Bài 24 (*Canadian Mathematical Olympiad*, 1983). *Tìm tất cả các số nguyên dương w, x, y và z sao cho* $w! = x! + y! + z!$.

Lời giải. Do tính đối xứng nên ta có thể giả thiết: $x \le y \le z \le w$.

Nếu $y > x$ thì $(x + 1)!$ chia hết $y!$, $z!$ và $w!$, vì vậy $(x + 1)!$ chia hết $x!$, điều này là vô lý.

Vì vậy ta có $x = y$. Bây giờ ta xét hai trường hợp:

• TH1: $y < z$. Trong trường hợp này thì $(y + 1)!$ chia hết $z!$ và $w!$, vì vậy nó phải chia hết $x! + y! = 2y!$. Điều này kéo theo $(y + 1)$ chia hết 2, và vì vậy $y = 1$. Do vậy

$$w! = 2 + z!.$$

Từ đây suy ra $w > z$, và từ $z!$ chia hết $w!$ nên $z!$ chia hết 2. Kết hợp với $z > y = 1$ suy ra $z = 2$ và $w! = 4$: điều này là không thể.

Như vậy trong trường hợp này bài toán không có nghiệm.

• TH2: $y = z$. Khi đó ta có:

$$w! = 3x!.$$

Vì vậy $w > x$ và do đó:

$$(x+1)! \,\big|\, w! = 3x! \Rightarrow (x+1) \,\big|\, 3.$$

Do $x \ge 1$ nên $x = 2$, từ đó ta có nghiệm của bài toán là: $x = y = z = 2$, $w = 3$.

Kết luận: Bài toán có nghiệm duy nhất

$$(x, y, z, w) = (2, 2. 2, 3).$$

Nhận xét. 1. Bài này có thể giải theo cách khác như sau: Rõ ràng: $x, y, z < w \Rightarrow x!, y!, z! \le (w-1)!$.

Vì vậy ta có: $w! = x! + y! + z! \le 3(w-1)! \Rightarrow w \le 3$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = w - 1$.

Nếu $w \le 2$ thì ta có: $x! + y! + z! \ge 3 > 2! \ge w!$: vô lý.

Vậy $w = 3$ và ta có $x = y = z = 2$: thỏa mãn bài toán.

2. Bạn *Trương Quang An*, xã Nghĩa Thắng, Huyện Tư Nghĩa, **Quảng Ngãi** có lời tương tự như cách 2 ở trên.

NHƯ HOÀNG (*Hà Nội*)

Sau đây là bài tập đề nghị. Bạn đọc hãy gửi lời giải về Tòa soạn TH&TT trước ngày 31.10.2018.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 26. *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca \le 1$. Chứng minh rằng*

$$a + b + c + \sqrt{3} \ge 8abc\left(\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1}\right).$$

HOÀNG LÊ NHẬT TÙNG

(*SV K61 ngành SP Toán, ĐHQG Hà Nội*)



Math Jokes

A visitor to the Royal Tyrell museum in Alberta asks a museum employee:

"How old is the skeleton of that T-Rex?"

"Precisely 60 million and three years, two months, and 12 days."

"How can you know that with such precision?"

"That's easy. When I started working here, a sign said that the skeleton was 60 million years old. And that was three years, two months, and 12 days ago..."



GIẢI ĐÁP: PHẦNTHƯỞNG Được hay không?
(*Đề đăng trên TH&TT số* 491, *tháng* 5 *năm* 2018)

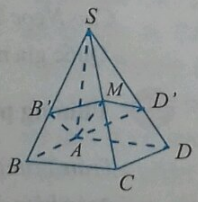
Phân tích. Lời giải của bạn *Phương Thảo* sai ở lập luận "Do $0 < x, y \le 1$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$, suy ra $y=\frac{x}{3x-1}$ với $\frac{1}{3}<x, y\le 1$" dẫn đến kết luận $\frac{SB'}{SB}+\frac{SD'}{SD}\le\frac{3}{2}$ là sai. Bạn *Phương Thảo* mặt dù biết vai trò x, y như nhau nhưng đã mắc hai lỗi sau:

1) Chỉ sử dụng điều kiện $x>0, y>0$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$, suy ra $x>\frac{1}{3}, y>\frac{1}{3}$, rồi kết hợp với điều kiện ban đầu của x, y và kết luận $\frac{1}{3}<x, y\le 1$. Lỗi này là lỗi đánh giá không chặt.

2) Khi thử $x=\frac{2}{5}>\frac{1}{3}$ thì không kiểm tra điều kiện của y (vì lúc này $y=2$).

Lời giải đúng.

Làm như lời giải của bạn *Phương Thảo* đến $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$.



Từ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3\Rightarrow y=\frac{x}{3x-1}$, kết hợp với điều kiện $0<x, y\le 1$ ta có $\frac{1}{2}\le x\le 1$

Tương tự, ta cũng có $\frac{1}{2}\le y\le 1$.

Với $\frac{1}{2}\le x\le 1$, ta suy ra $\frac{1}{2}\le 3x-1\le 2$.

Đặt $t=3x-1$ thì $\frac{1}{2}\le t\le 2$. Khi đó:

$$\frac{SB'}{SB}+\frac{SD'}{SD}=x+y=x+\frac{x}{3x-1}$$
$$=\frac{1}{3}\left(3x-1+\frac{1}{3x-1}\right)+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\left(t+\frac{1}{t}\right)+\frac{2}{3}.$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\frac{1}{3}\left(t+\frac{1}{t}\right)+\frac{2}{3}\ge\frac{1}{3}.2.\sqrt{t.\frac{1}{t}}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}.$$

Do $\frac{1}{2}\le t\le 2$ nên $(2t-1)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}\right)\le 0\Leftrightarrow t+\frac{1}{t}\le\frac{5}{2}$,

Suy ra $\frac{1}{3}\left(t+\frac{1}{t}\right)+\frac{2}{3}\le\frac{3}{2}$.

Vậy khẳng định $\frac{4}{3}\le\frac{SB'}{SB}+\frac{SD'}{SD}\le\frac{3}{2}$ là đúng.

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng bài này.

KIHIVI

PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG!



Trong giờ bài tập, thầy giáo đưa ra bài tập sau đây:

Tìm số thực a để hai phương trình (ẩn x)

$$x^2-3x-a-2=0\ \ (1),\quad x^2+ax+1=0\ \ (2)$$

tương đương.

Bạn *Hương* xung phong lên bảng trình bày lời giải.

Lời giải của Hương như sau:

Hai phương trình $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ và $a_2x^2+b_2x+c_2=0$ tương đương khi và chỉ khi hai bộ số (a_1,b_1,c_1) và (a_2,b_2,c_2) tỉ lệ. Do đó PT(1) tương đương với PT(2) khi và chỉ khi

$$\begin{cases}-3=a\\-a-2=1\end{cases}\Leftrightarrow a=-3.$$

Vậy $a=-3$ là giá trị cần tìm.

Các bạn có đồng ý với kết quả này không?

NGUYỄN VĂN XÁ
(*GV THPT Yên Phong số* 2, *Bắc Ninh*)

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào phát hiện được sai lầm và đưa ra lời giải đúng bài này.

KIHIVI

PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG !



Trong giờ bài tập, thầy giáo đưa ra bài tập sau đây:

Tìm số thực a để hai phương trình (ẩn x)

$$x^2-3x-a-2=0 \quad (1), \quad x^2+ax+1=0 \quad (2)$$

tương đương.

Bạn *Hương* xung phong lên bảng trình bày lời giải.

Lời giải của Hương như sau:

Hai phương trình $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ và $a_2x^2+b_2x+c_2=0$ tương đương khi và chỉ khi hai bộ số (a_1,b_1,c_1) và (a_2,b_2,c_2) tỉ lệ. Do đó PT(1) tương đương với PT(2) khi và chỉ khi

$$\begin{cases}-3=a\\-a-2=1\end{cases}\Leftrightarrow a=-3.$$

Vậy $a=-3$ là giá trị cần tìm.

Các bạn có đồng ý với kết quả này không?

NGUYỄN VĂN XÁ

(*GV THPT Yên Phong số 2, Bắc Ninh*)

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ
Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964
Số 495 (9.2018)
Tòa soạn : Tầng 12, Tòa nhà Diamond Flower, Số 1, Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội
ĐT Biên tập: 024.35121607, ĐT - Fax Phát hành, Trị sự : 024.35121606
Email: toanhoctuoitrevietnam@gmail.com

BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
GS. ĐOÀN QUỲNH
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Thành viên
NXBGD Việt Nam
NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc NXBGD Việt Nam
HOÀNG LÊ BÁCH
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập
NXBGD Việt Nam
PHAN XUÂN THÀNH

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

***Tổng biên tập* : TS. TRẦN HỮU NAM** ***Thư kí Tòa soạn* : ThS. HỒ QUANG VINH**

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU, *ThS.* NGUYỄN ANH DŨNG, *TS.* TRẦN NAM DŨNG, *TS.* NGUYỄN MINH ĐỨC, *TS.* NGUYỄN MINH HÀ, *TS.* NGUYỄN VIỆT HẢI, *PGS. TS.* LÊ QUỐC HÁN, *ThS.* PHẠM VĂN HÙNG, *PGS. TS.* VŨ THANH KHIẾT, *GS. TSKH.* NGUYỄN VĂN MẬU, Ông NGUYỄN KHẮC MINH, *TS.* PHẠM THỊ BẠCH NGỌC, *PGS. TS.* NGUYỄN ĐĂNG PHẤT, *PGS. TS.* TẠ DUY PHƯỢNG, *ThS.* NGUYỄN THẾ THẠCH, *GS. TSKH.* ĐẶNG HÙNG THẮNG, *PGS. TS.* PHAN DOÃN THOẠI, *ThS.* VŨ KIM THỦY, *PGS. TS.* VŨ DƯƠNG THỤY, *GS. TSKH.* NGÔ VIỆT TRUNG.

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở**
For Lower Secondary School
Nguyễn Anh Vũ – Hãy nhìn những bài toán theo hướng hữu dụng.

6 Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội, năm học 2018 - 2019.

10 Đề thi tuyển sinh lớp 10 trường THPT Năng khiếu, ĐHGQ TP. Hồ Chí Minh, năm học 2018 - 2019.

12 **Bạn đọc tìm tòi**
Huỳnh Duy Thủy – Hệ phương trình dưới góc nhìn đa chiều.

20 **Lịch sử toán học**
Lê Quốc Hán, Lê Thị Ngọc Thúy – Lịch sử hình thành và phát triển lượng giác học.

25 **Đề ra kỳ này**
Problems in This Issue
T1/495, ..., T12/495, L1/495, L2/495.

27 **Giải bài kỳ trước**
Solutions to Previous Problems

35 **Giải trí toán học**
Trần Văn Lâm – Đường tròn kỳ ảo.

36 **Bạn đọc trao đổi**
Cao Ngọc Toản – Một số trao đổi về đề thi THPT Quốc gia môn Toán năm 2018.

37 **Phương pháp giải toán**
Trần Trung Dũng – Ứng dụng giới hạn trong bài toán hàm số.

43 **Tiếng Anh qua các bài toán** - *Bài số* 36.
Bài dịch số 33 - Tiếng Anh qua các bài toán.

44 **Nhiều cách giải cho một bài toán**

46 **Du lịch thế giới qua các bài toán hay**

47 **Sai lầm ở đâu?**
Nguyễn Văn Xá – Phương trình tương đương.

***Biên tập*:** LÊ MAI, NGUYỄN THỊ TRƯỜNG
***Trị sự, phát hành*:** NGUYỄN KHOA ĐIỀM, NGUYỄN THỊ THU HUYỀN
***Mĩ thuật*:** QUỐC HIỆP, THANH LONG
***Thiết kế, chế bản*:** NGUYỄN THỊ TRƯỜNG

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

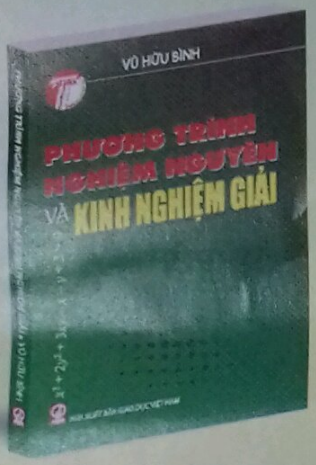
Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

Cuốn sách

PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN VÀ KINH NGHIỆM GIẢI

(Tái bản lần thứ nhất, có chỉnh lí, bổ sung) Của tác giả NGND. VŨ HỮU BÌNH

Sách dày 224 trang, khổ 17 x 24 cm, giá bìa 42000 đồng



Nội dung của sách trình bày các phương pháp giải phương trình với nghiệm nguyên, vốn là một đề tài lý thú của Số học và Đại số, từ các học sinh nhỏ với những bài toán như *Trăm trâu trăm cỏ* đến các chuyên gia toán học với những bài toán như *định lí lớn Fermat*.

Sách gồm 5 chương:

Chương I giới thiệu các phương pháp thường dùng để giải phương trình nghiệm nguyên.

Chương II giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên được sắp xếp theo từng ngày.

Chương III giới thiệu những bài toán đưa về giải phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những bài toán vui, bài toán thực tế.

Chương IV giới thiệu một số phương trình nghiệm nguyên mang tên các nhà toán học như *Pell*, *Pythagore*, *Fermat*, *Diophante*, ...

Chương V giới thiệu những phương trình nghiệm nguyên chưa được giải quyết và những bước tiến của Toán học để giải những phương trình nghiệm nguyên, trong đó có những đóng góp của *Andrew Wiles* chứng minh định lý lớn Fermat và Giáo sư *Ngô Bảo Châu* chứng minh Bổ đề cơ bản trong *Chương trình Langlands*.

Phương trình nghiệm nguyên có số phương trình ít hơn số ẩn nên đòi hỏi người giải toán phải vận dụng kiến thức sáng tạo, vì thế phương trình nghiệm nguyên thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi từ bậc tiểu học, trung học cơ sở đến trung học phổ thông. Cuốn sách dành một phần thích đáng nêu những kinh nghiệm giải toán về phương trình nghiệm nguyên như cách phân tích bài toán, cách suy luận để tìm hướng giải, cách phân chia bài toán thành những bài toán nhỏ dễ giải quyết hơn, cách "*đưa khó về dễ, đưa lạ về quen*", cách liên hệ tình huống đang giải quyết với những vấn đề mới, cách chọn hướng đi phù hợp với từng bài toán đặt ra ...tất cả những điều đó đều là những kĩ năng mà mỗi người cần có trong học tập, trong nghiên cứu và trong cuộc sống.

Trong lần tái bản này, cuốn sách bổ sung thêm những kinh nghiệm giải toán, bổ sung thêm một số thí dụ, cập nhật thêm một số sự kiện liên quan đến tiểu sử các nhà toán học, bổ sung thêm một số cách giải.

Với những câu thơ ở đầu mỗi chương, với cách trình bày rõ ràng, dễ hiểu, tươi mát, với những thông tin cập nhật, với những kinh nghiệm thực tế trong bồi dưỡng học sinh giỏi và viết sách, tác giả cuốn sách, NGND *Vũ Hữu Bình* sẽ đem đến cho bạn đọc những kiến thức hệ thống và những kinh nghiệm giải toán giúp giải quyết một loại toán khó ở bậc phổ thông.

Tin rằng cuốn sách không chỉ hữu ích cho học sinh và thầy cô giáo, mà còn là tài liệu tham khảo tốt cho sinh viên và giảng viên các trường Đại học và Cao đẳng ngành Toán, cùng các phụ huynh có nguyện vọng giúp con em mình học Toán tốt hơn.

Bạn đọc có thể đặt mua ấn phẩm trên tại: Tòa soạn Tạp chí TH&TT; Các cơ sở Bưu điện; Các Công ty Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương; Các Cửa hàng sách của NXB Giáo dục Việt Nam; Siêu thị trực tuyến www.sachtoan24h.com (hotline: 0973472803, 0912920591).

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: 024.35121607
- Điện thoại Fax- phát hành: 024. 35121606
- Số tài khoản: 111000002173, tại Ngân hàng Thương mại Cổ phần Công thương Việt Nam - chi nhánh Hoàn Kiếm, Hà Nội.

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc

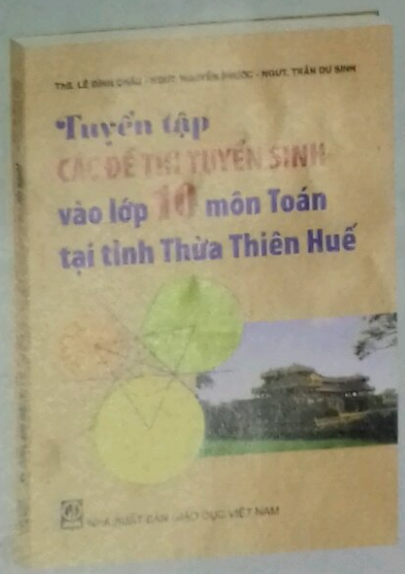
Cuốn sách

TUYỂN TẬP CÁC ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 MÔN TOÁN TẠI TỈNH THỪA THIÊN HUẾ

(*Tái bản lần thứ nhất có chỉnh lý, bổ sung*)

của các tác giả: ThS. *Lê Đình Châu*, NGƯT. *Nguyễn Phước*, NGƯT. *Trần Dư Sinh*.

Sách dày 240 trang, khổ 17 × 24 cm, giá bìa: 38.000 *đồng*.



Các đề thi tuyển sinh vào lớp 10, tuyển sinh vào Trường Quốc học Huế là công trình của tập thể các thầy cô giáo dạy toán có kinh nghiệm và được thông qua tuyển chọn của Hội đồng ra đề thi. Do đó, tuyển tập các đề thi là nguồn tư liệu phong phú, bổ ích cho học sinh trong việc ôn tập.

Cuốn sách "*Tuyển tập các đề thi tuyển sinh vào lớp 10 môn Toán tại tỉnh Thừa Thiên Huế*" được các tác giả sưu tầm và biên soạn bao gồm hai phần cơ bản:

- Phần các đề thi tuyển sinh vào các trường THPT ở tỉnh Thừa Thiên Huế từ năm học 1991 – 1992 đến năm học 2018 - 2019.
- Phần các đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán, chuyên Tin Trường THPT chuyên Quốc học Huế từ năm học 2005 – 2006 đến năm học 2018 – 2019.

Cuốn sách này ra đời nhằm đáp ứng nhu cầu học Toán của học sinh THCS, đặc biệt là giúp cho các em học sinh lớp 9 có tài liệu ôn tập chuẩn bị cho kì thi vào các trường THPT và THPT chuyên.

Hy vọng cuốn sách sẽ giúp cho các thầy cô giáo và các em học sinh chuẩn bị thật tốt và đạt kết quả như mong muốn trong các kỳ thi tuyển sinh vào lớp đầu cấp THPT.

Mọi chi tiết xin liên hệ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tầng 12, tòa nhà Diamond Flower, số 1 Hoàng Đạo Thúy, Thanh Xuân, Hà Nội

- Điện thoại biên tập: 024. 35121607
- Điện thoại Fax – phát hành: 024.35121606
- Số tài khoản: 111000002173 tại Ngân hàng Thương mại Cổ phần Công thương Việt Nam – chi nhánh Hoàn Kiếm, Hà Nội.

ISSN: 0866-8035
Chỉ số: 12884
Mã số: 8BT09M8

Giấy phép XB số 510/GP-BTTTT cấp ngày 13.4.2010
In tại Xí nghiệp Bản đồ 1 - BQP
In xong và nộp lưu chiểu tháng 09 năm 2018

Giá: 15.000 đồng
Mười lăm nghìn đồng