

Chuyên đề

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRÒNG KHÔNG GIAN



- ☒ **HỆ THỐNG ĐẦY ĐỦ KIẾN THỨC**
- ☒ **CÁC BÀI TẬP MINH HỌA**
- ☒ **THỦ THUẬT CASIO GIẢI NHANH**
- ☒ **BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM CÓ LỜI GIẢI CHI TIẾT**



“Nơi nào có ý chí, nơi đó có con đường.”

Tài liệu gồm 280 trang bao gồm các chủ đề sau:

- Chủ đề 1. Hệ trục tọa độ trong không gian
- Chủ đề 2. Phương trình mặt cầu
- Chủ đề 3. Phương trình mặt phẳng
- Chủ đề 4. Phương trình đường thẳng
- Chủ đề 5. Thủ thuật Casio giải nhanh chuyên đề Oxyz
- Chủ đề 6. Bài tập vận dụng cao Oxyz

Bố cục của các chủ đề gồm các phần sau:

- 1. Kiến thức cơ bản cần nắm
- 2. Các dạng toán và phương pháp giải (kèm theo các bài toán minh họa)
- 3. Bài tập trắc nghiệm rèn luyện (có lời giải chi tiết)

Tài liệu được tôi sưu tầm và biên soạn để làm tư liệu cho các em lớp 12 ôn thi kỳ thi THPT Quốc gia tham khảo, giúp các em ôn lại kiến thức nhanh chóng và hiệu quả hơn. Trong quá trình tổng hợp và biên soạn không tránh khỏi những sai sót đáng tiếc do số lượng kiến thức và bài tập khá nhiều. Mong các đọc giả thông cảm và đóng góp ý kiến để những tài liệu sau của tôi được chỉnh chu hơn! Mọi đóng góp xin gửi về:

Facebook: <https://web.facebook.com/duytuan.qna>.

Hoặc qua Gmail: btdt94@gmail.com.

Các em có thể xem thêm các chuyên đề luyện thi Đại học môn Toán tại Website: <https://toanhocplus.blogspot.com/>

Xin chân thành cảm ơn!!!

Quảng Nam – 26.03.2018

Bùi Trần Duy Tuấn

MỤC LỤC

CHỦ ĐỀ 1: HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN 8

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM..... 8

I. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN 8

II. TỌA ĐỘ CỦA VECTO 8

III. TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM 9

IV. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VECTO 9

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN..... 11

I. TÌM TỌA ĐỘ CỦA VECTO, CỦA ĐIỂM..... 11

1. Kiến thức vận dụng 11

2. Một số bài toán minh họa..... 11

II. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO VÀ ỨNG DỤNG..... 13

1. Kiến thức vận dụng 13

2. Một số bài toán minh họa..... 13

III. VẬN DỤNG CÔNG THỨC TRUNG ĐIỂM VÀ TRỌNG TÂM 16

1. Kiến thức vận dụng 16

2. Bài toán minh họa 16

IV. CHỨNG MINH HAI VECTO CÙNG PHƯƠNG, KHÔNG CÙNG PHƯƠNG 17

1. Kiến thức vận dụng 17

2. Một số bài toán minh họa..... 17

V. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VECTO VÀ ỨNG DỤNG..... 18

1. Kiến thức vận dụng 18

2. Một số bài toán minh họa..... 18

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM..... 20

I. ĐỀ BÀI 20

II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI..... 28

CHỦ ĐỀ 2: PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU..... 36

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM 36

I. ĐỊNH NGHĨA..... 36

II. CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU 36

III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẪNG..... 36

IV. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ ĐƯỜNG THẲNG 37

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP 38

I. TÌM TÂM VÀ BÁN KÍNH MẶT CẦU 38

1. Kiến thức vận dụng 38

2. Một số bài toán minh họa.....	38
II. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU.....	39
1. Phương pháp	39
2. Một số bài toán minh họa.....	39
II. SỰ TƯƠNG GIAO VÀ SỰ TIẾP XÚC.....	45
1. Phương pháp	45
2. Một số bài toán minh họa.....	45
C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	50
I. ĐỀ BÀI	50
II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI	62

CHỦ ĐỀ 3: PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG..... 80

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM..... 80

I. VECTO PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẪNG.....	80
II. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẪNG	80
III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẪNG	81
IV. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẪNG	81
V. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG	81

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG 82

Dạng 1: Viết phương trình mặt phẳng khi biết một điểm và vector pháp tuyến của nó	82
Dạng 2: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua 1 điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và song song với 1 mặt phẳng $(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$ cho trước	82
Dạng 3: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng.....	82
Dạng 4: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng Δ	83
Dạng 5: Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ , vuông góc với mặt phẳng (β)	83
Dạng 6: Viết phương trình mặt phẳng (α) qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (β)	84
Dạng 7: Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ và song song với Δ' (Δ, Δ' chéo nhau).84	
Dạng 8: Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ và 1 điểm M	85
Dạng 9: Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa 2 đường thẳng cắt nhau Δ và Δ'	86
Dạng 10: Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa 2 song song Δ và Δ'	86
Dạng 11:Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua một điểm M và song song với hai đường thẳng Δ và Δ' chéo nhau cho trước.....	87
Dạng 12:Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua một điểm M và vuông góc với hai mặt phẳng $(P), (Q)$ cho trước.	87

Dạng 13: Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β) và cách $(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$ một khoảng k cho trước.....	88
Dạng 14: Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$ cho trước và cách điểm M một khoảng k cho trước.....	88
Dạng 15: Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S)	89
Dạng 16: Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa một đường thẳng Δ và tạo với một mặt phẳng $(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$ cho trước một góc φ cho trước.....	89
C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	91
I. ĐỀ BÀI.....	91
II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.....	102

CHỦ ĐỀ 4: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG..... 119

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM	119
I. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG	119
II. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG	119
III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG.....	121
IV. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG – KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG	121
V. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG – GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG	121
B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG	122
I. XÁC ĐỊNH VECTO CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG.....	122
1. Phương pháp	122
2. Một số bài toán minh họa.....	122
II. LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG	124
1. Phương pháp	124
2. Một số bài toán minh họa.....	124
III. XÉT VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG	130
IV. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG.....	135
1. Phương pháp:	135
2. Một số bài toán minh họa.....	135
V. HÌNH CHIẾU CỦA MỘT ĐIỂM LÊN MỘT ĐƯỜNG THẲNG	138
1. Phương pháp	138
2. Bài toán minh họa	138
VI. HÌNH CHIẾU CỦA MỘT ĐIỂM LÊN MỘT MẶT PHẪNG	139
1. Phương pháp	139
2. Một số bài toán minh họa.....	139

VII. KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG – KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU.....	143
1. Kiến thức vận dụng	143
2. Một số bài toán minh họa.....	143
VIII. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG – GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG.....	145
1. Kiến thức vận dụng	145
2. Một số bài toán minh họa.....	145
IX. XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ ĐIỂM TRÊN ĐƯỜNG THẲNG	147
1. Phương pháp	147
2. Một số bài toán minh họa.....	147
HỆ THỐNG MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VỀ LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG.....	148
C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	150
I. ĐỀ BÀI	150
II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI	167

CHỦ ĐỀ 5: THỦ THUẬT CASIO GIẢI NHANH CHUYÊN ĐỀ OXYZ..... 190

A. TÍNH NHANH THỂ TÍCH CHÓP, DIỆN TÍCH TAM GIÁC.....	190
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM	190
II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA	190
B. TÍNH NHANH VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG – MẶT	198
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM	198
II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA	198
C. TÌM HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN.....	205
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM	205
II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA	205
D. TÍNH NHANH KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN	215
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM	215
II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA	215
E. TÍNH NHANH GÓC GIỮA VECTO, ĐƯỜNG VÀ MẶT.....	226
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM	226
II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA	227

CHỦ ĐỀ 6: BÀI TẬP VẬN DỤNG CAO OXYZ..... 236

A. ĐỀ BÀI	236
B. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.....	280

LƯU Ý TRƯỚC KHI ĐỌC TÀI LIỆU

Tài liệu được chia thành 6 chủ đề:

Chủ đề 1: Hệ trục tọa độ không gian.

Chủ đề 2: Phương trình mặt cầu.

Chủ đề 3: Phương trình mặt phẳng.

Chủ đề 4: Phương trình đường thẳng.

Chủ đề 5: Thủ thuật Casio giải nhanh chuyên đề Oxyz.

Chủ đề 6: Bài tập vận dụng cao.

Cuốn sách này phân chia kiến thức theo các chủ đề nhằm hệ thống kiến thức khoa học và đầy đủ. Nhưng trong những chủ đề đầu có thể có những kiến thức của các chủ đề phía sau, nên bạn đọc hãy xem trước những **KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM** ở **mục A** của các chủ đề **1, 2, 3, 4** một cách **song song** để tiện làm những dạng bài tập ngay ở những chủ đề từ đầu.

Thí dụ: Những dạng bài tập của phương trình mặt cầu (thuộc chủ đề 2) có thể có những kiến thức liên quan đến phương trình đường thẳng (thuộc chủ đề 4) hoặc có kiến thức liên quan đến phương trình mặt phẳng (thuộc chủ đề 3) nên bạn đọc hãy học **KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM** của các chủ đề một cách song song để dễ làm bài tập ngay từ những chủ đề đầu.

Còn bây giờ thì bắt đầu đọc tài liệu thôi !!!

“Nơi nào có ý chí, nơi đó có con đường”

Chủ đề 1

HỆ TRỤC TỌA ĐỘ KHÔNG GIAN

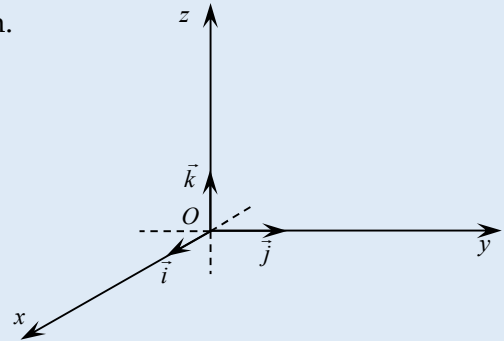


A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian, xét ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một và chung một điểm gốc O . Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị, tương ứng trên các trục Ox, Oy, Oz . Hệ ba trục như vậy gọi là **hệ trục tọa độ vuông góc** trong không gian.

Chú ý: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$.



II. TỌA ĐỘ CỦA VECTO

1. Định nghĩa

$$\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

2. Tính chất

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3), k \in \mathbb{R}$

- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$ • $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$ • $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
- $\vec{0} = (0; 0; 0), \vec{i} = (1; 0; 0), \vec{j} = (0; 1; 0), \vec{k} = (0; 0; 1)$
- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$ • $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = 0$
- $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ • $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (\text{với } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0})$

III. TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM

1. Định nghĩa:

$$M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (x : \text{hoành độ}, y : \text{tung độ}, z : \text{cao độ})$$

Chú ý: • $M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0; M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0; M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0$

• $M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0; M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0; M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0.$

2. Tính chất:

Cho $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$

• $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

• $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

• Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB : $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

• Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC : $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$

• Tọa độ trọng tâm G của tứ diện $ABCD$:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$$

IV. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

1. Định nghĩa

Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $[\vec{a}, \vec{b}]$, được xác định bởi

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$$

Chú ý: Tích có hướng của hai vectơ là một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ là một số.

2. Tính chất

• $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}; \quad [\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$

• $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$

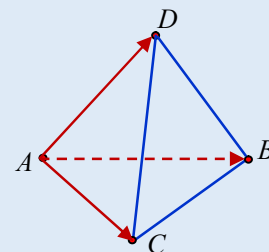
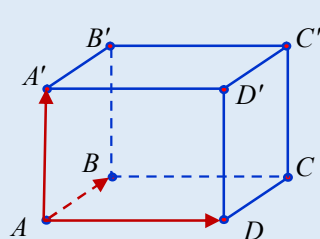
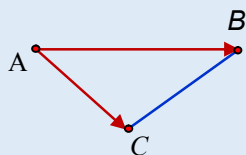
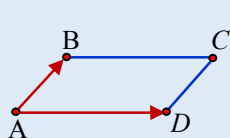
• $[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}; \quad [\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}; \quad [\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}$

• $|\vec{a}, \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$ (Chương trình nâng cao)

• $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$ (chứng minh 3 điểm thẳng hàng)

3. Ứng dụng của tích có hướng: (Chương trình nâng cao)

- Điều kiện đồng phẳng của ba vector: $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$
- Diện tích hình bình hành $ABCD$: $S_{\square ABCD} = |[\vec{AB}, \vec{AD}]|$
- Diện tích tam giác ABC : $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]|$
- Thể tích khối hộp $ABCD A'B'C'D'$: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = |[\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA'}|$
- Thể tích tứ diện $ABCD$: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|$

**Chú ý:**

- **Tích vô hướng** của hai vector thường sử dụng để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, tính góc giữa hai đường thẳng.
- **Tích có hướng** của hai vector thường sử dụng để tính diện tích tam giác; tính thể tích khối tứ diện, thể tích hình hộp; chứng minh các vector đồng phẳng – không đồng phẳng, chứng minh các vector cùng phương.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$$

B. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

I. TÌM TỌA ĐỘ CỦA VECTO, CỦA ĐIỂM

1. Kiến thức vận dụng

☛ **Định nghĩa:** $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k} \Leftrightarrow \vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \Leftrightarrow M(x; y; z)$

☛ **Tính chất:** Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$; $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3) \quad k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$$

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases} \quad \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

2. Một số bài toán minh họa

Bài toán 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = (3; 0; 1)$, $\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{d} = (5; 2; -3)$.

a) Tìm tọa độ của các vectơ: $\vec{a} + \vec{b}$, $3\vec{a} - 2\vec{c}$.

b) Tìm tọa độ các vectơ: $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; $3\vec{a} - 2\vec{c} + 3\vec{d}$

c) Phân tích vectơ $\vec{d}$ theo 3 vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$

Lời giải:

a) Ta có:

$$\checkmark \vec{a} = (-1; 1; -3), \vec{b} = (3; 0; 1) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (2; 1; -2).$$

$$\checkmark 3\vec{a} = (-3; 3; -9), 2\vec{c} = (4; 6; 0) \Rightarrow 3\vec{a} - 2\vec{c} = (-7; -3; -9).$$

b) Ta có:

$$\checkmark \vec{a} = (-1; 1; -3), \vec{b} = (3; 0; 1), \vec{c} = (2; 3; 0) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (0; -2; -2).$$

$$\checkmark 3\vec{a} = (-3; 3; -9), 2\vec{c} = (4; 6; 0), 3\vec{d} = (15; 6; -9) \Rightarrow 3\vec{a} - 2\vec{c} + 3\vec{d} = (8; 3; -18).$$

$$\text{c) Giả sử } \vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} \Rightarrow \begin{cases} 5 = -m + 3n + 2p \\ 2 = m + 3p \\ -3 = -3m + n \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{19}{11}, n = \frac{24}{11}, p = \frac{1}{11}.$$

$$\text{Vậy } \vec{d} = \frac{19}{11}\vec{a} + \frac{24}{11}\vec{b} + \frac{1}{11}\vec{c}$$

Bài toán 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; -3; 1)$; $B(2; 5; 1)$ và vectơ $\overrightarrow{OC} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

a) Tìm tọa độ của điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

b) Tìm tọa độ điểm E sao cho tứ giác $OABE$ là hình thang có hai đáy OA ; BE và $OA = 2BE$.

c) Tìm tọa độ điểm M sao cho $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{CM}$.

Lời giải:

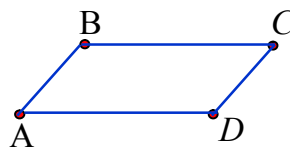
a) Gọi $D(x; y; z)$. Ta có:

$$\checkmark \overrightarrow{BC} = (-5; -3; 4), \overrightarrow{AC} = (-4; 5; 4).$$

$$\frac{-5}{-4} \neq \frac{-3}{5} \Rightarrow \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC} \text{ không cùng phương.}$$

$$\checkmark \overrightarrow{AD} = (x-1; y+3; z-1)$$

$$ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = -5 \\ y+3 = -3 \\ z-1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -6 \\ z = 5 \end{cases}. \text{ Vậy } (-4; -6; 5).$$



b) Gọi $E(x; y; z)$. Ta có:

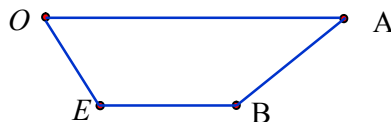
$$\checkmark \overrightarrow{OA} = (1; -3; 1), \overrightarrow{OB} = (2; 5; 1)$$

$$\frac{1}{2} \neq \frac{-3}{5} \Rightarrow \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \text{ không cùng phương.}$$

$$\checkmark \overrightarrow{EB} = (2-x; 5-y; 1-z).$$

$$\text{Từ đề cho ta suy ra: } \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{EB} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 4 - 2x \\ -3 = 10 - 2y \\ 1 = 2 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{13}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } E\left(\frac{3}{2}; \frac{13}{2}; \frac{1}{2}\right).$$



c) Gọi $M(x; y; z)$. Ta có:

$$\checkmark \overrightarrow{AB} = (1; 8; 0) \Rightarrow 3\overrightarrow{AB} = (3; 24; 0)$$

$$\overrightarrow{AM} = (x-1; y+3; z-1) \Rightarrow 2\overrightarrow{AM} = (2x-2; 2y+6; 2z-2)$$

$$\overrightarrow{CM} = (x+3; y-2; z-5) \Rightarrow 3\overrightarrow{CM} = (3x+9; 3y-6; 3z-15)$$

$$\checkmark 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+2x-2 = 3x+9 \\ 24+2y+6 = 3y-6 \\ 0+2z-2 = 3z-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = 36 \\ z = 13 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } M(-8; 36; 13).$$

Bài toán 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$, $C'(4; 5; -5)$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Lời giải:

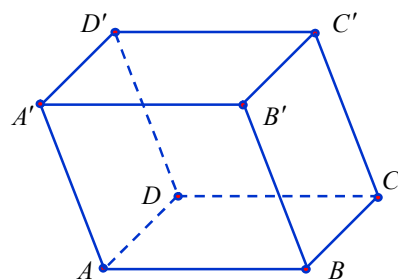
$$\checkmark \text{ Gọi } C(x; y; z). \text{ Ta có: } \overrightarrow{AB} = (1; 1; 1);$$

$$\overrightarrow{DC} = (x-1; y+1; z-1).$$

$$\text{Tứ giác } ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ y+1=1 \\ z-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow C(2;0;2).$$

$$\square \text{ Gọi } D'(x;y;z). \text{ Ta có: } \overrightarrow{D'C'} = (4-x; 5-y; -5-z); \overrightarrow{DC} = (1;1;1).$$

$$\text{Tứ giác } DCC'D' \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x=1 \\ 5-y=1 \\ -5-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \\ z=-6 \end{cases} \Rightarrow D'(3;4;-6).$$



$$\square \text{ Gọi } A'(x;y;z). \text{ Ta có: } \overrightarrow{A'D'} = (3-x; 4-y; -6-z); \overrightarrow{AD} = (0;-1;0).$$

$$\text{Tứ giác } ADD'A' \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x=0 \\ 4-y=-1 \\ -6-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5 \\ z=-6 \end{cases} \Rightarrow A'(3;5;-6).$$

$$\square \text{ Gọi } B'(x;y;z). \text{ Ta có: } \overrightarrow{A'B'} = (x-3; y-5; z+6); \overrightarrow{D'C'} = (1;1;1).$$

$$\text{Tứ giác } A'B'C'D' \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=1 \\ y-5=1 \\ z+6=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=6 \\ z=-5 \end{cases} \Rightarrow B'(4;6;-5).$$

II. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO VÀ ỨNG DỤNG

1. Kiến thức vận dụng

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3); \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:

$$\star \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\star |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\star \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

$$\star \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

2. Một số bài toán minh họa

Bài toán 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1; 2; 1)$, $\vec{b} = (3; -1; 2)$, $\vec{c} = (4; -1; -3)$, $\vec{d} = (3; -3; -5)$, $\vec{u} = (1; m; 2)$, ($m \in \mathbb{R}$).

a) Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot (\vec{a} + 2\vec{c})$, $|\vec{a} + 2\vec{b}|$.

d) Tìm m để $\vec{u} \perp (\vec{b} + \vec{d})$.

b) So sánh $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ và $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

e) Tìm m để $(\vec{u}, \vec{a}) = 60^\circ$.

c) Tính các góc $(\vec{a}, \vec{b})$, $(\vec{a} + \vec{b}, 3\vec{a} - 2\vec{c})$.

Lời giải:

a) Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \cdot (\vec{a} + 2\vec{c})$, $|\vec{a} + 2\vec{b}|$.

$$\checkmark \vec{a} = (1; 2; 1), \vec{b} = (3; -1; 2) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1.3 + 2.(-1) + 1.2 = 3.$$

$$\checkmark \vec{c} = (4; -1; -3) \Rightarrow 2\vec{c} = (8; -2; -6) \Rightarrow \vec{a} + 2\vec{c} = (9; 0; -5)$$

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} + 2\vec{c}) = 3.9 + (-1).0 + 2.(-5) = 17.$$

$$\checkmark 2\vec{b} = (6; -2; 4) \Rightarrow \vec{a} + 2\vec{b} = (7; 0; 5) \Rightarrow |\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{7^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{74}.$$

b) So sánh $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ và $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

$$\checkmark \vec{b} \cdot \vec{c} = 3.4 + (-1).(-1) + 2.(-3) = 7 \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = (7; 14; 7)$$

$$\checkmark \vec{a} \cdot \vec{b} = 1.3 + 2.(-1) + 1.2 = 3 \quad (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = (12; -3; -9)$$

$$\text{Vậy } \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

c) Tính các góc $(\vec{a}, \vec{b})$, $(\vec{a} + \vec{b}, 3\vec{a} - 2\vec{c})$.

$$\checkmark \vec{a} = (1; 2; 1), \vec{b} = (3; -1; 2) \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1.3 + 2.(-1) + 1.2}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{3}{2\sqrt{21}} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) \approx 70^\circ 54'$$

$$\begin{aligned} \checkmark \vec{a} + \vec{b} &= (4; 3; 3), 3\vec{a} - 2\vec{c} = (-5; 8; 9) \Rightarrow \cos(\vec{a} + \vec{b}, 3\vec{a} - 2\vec{c}) = \frac{4.(-5) + 3.8 + 3.9}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-5)^2 + 8^2 + 9^2}} \\ &= \frac{15}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{170}} \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}, 3\vec{a} - 2\vec{c}) \approx 76^\circ 57' \end{aligned}$$

d) Tìm m để $\vec{u} \perp (\vec{b} + \vec{d})$.

$$\checkmark \vec{b} + \vec{d} = (6; -4; -3), \vec{u} = (1; m; 2).$$

$$\checkmark \vec{u} \perp (\vec{b} + \vec{d}) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot (\vec{b} + \vec{d}) = 0 \Leftrightarrow 6 - 4m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

e) Tìm m để $(\vec{u}, \vec{a}) = 60^\circ$.

$$(\vec{u}, \vec{a}) = 60^\circ \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{a}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2m+3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{m^2+5}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{6m^2+30} = 4m+6$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m+6 \geq 0 \\ 6m^2+30 = (4m+6)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{3}{2} \\ 10m^2+48m+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{-12 \pm \sqrt{129}}{5}.$$

Bài toán 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ sao cho $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$ và $|\vec{a} - 2\vec{b}|$.

Lời giải:

$$\checkmark \text{Ta có: } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 4 + 9 + 2.2.3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 7$$

Vậy $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$

☑ Ta có: $|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} - 2\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 - 4|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b}) = 4 + 36 - 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 52$

Vậy $|\vec{a} - 2\vec{b}| = 2\sqrt{13}$.

Bài toán 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2; -1; 1)$, $B(3; 5; 2)$, $C(8; 4; 3)$, $D(-2; 2m+1; -3)$.

- Tính AB, BC, AC .
- Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông.
- Tìm tọa độ điểm M nằm trên trục hoành sao cho $MA = MB$.
- Tìm m sao cho tam giác ABD vuông tại A .
- Tính số đo góc A của tam giác ABC .

Lời giải:

- a) Tính AB, BC, AC .

☑ $\vec{AB} = (1; 6; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{1^2 + 6^2 + 1^2} = \sqrt{38}$

☑ $\vec{BC} = (5; -1; 1) \Rightarrow BC = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 1^2} = 3\sqrt{3}$

☑ $\vec{AC} = (6; 5; 2) \Rightarrow AC = \sqrt{6^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{65}$

- b) Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông.

$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 1 \cdot 5 + 6 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{BC} \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B .

- c) Tìm tọa độ điểm M nằm trên trục hoành sao cho $MA = MB$.

Ta có: $M \in Ox \Rightarrow M(x; 0; 0)$

$MA = MB \Rightarrow \sqrt{(2-x)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{(3-x)^2 + 5^2 + 2^2}$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 6 = x^2 - 6x + 38 \Leftrightarrow x = 16$. Vậy $M(16; 0; 0)$.

- d) Tìm m sao cho tam giác ABD vuông tại A .

$\vec{AB} = (1; 6; 1), \vec{AD} = (-4; 2m+2; -4)$

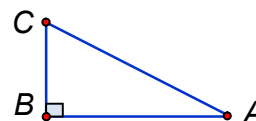
ΔABD vuông tại $A \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0 \Leftrightarrow -4 + 12m + 12 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}$.

- e) Tính số đo góc A của tam giác ABC .

$\vec{AB} = (1; 6; 1), \vec{AC} = (6; 5; 2), \cos A = \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{1 \cdot 6 + 6 \cdot 5 + 1 \cdot 2}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{65}} \Rightarrow \hat{A} \approx 40^\circ 8'$.

Chú ý: Vì ΔABD vuông tại B nên có thể dùng hệ thức lượng trong tam giác vuông

$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{38}} \Rightarrow \hat{A} \approx 40^\circ 8'$



III. VẬN DỤNG CÔNG THỨC TRUNG ĐIỂM VÀ TRỌNG TÂM

1. Kiến thức vận dụng

$$\star M \text{ là trung điểm } AB \Leftrightarrow M\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$$

$$\star G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC \Leftrightarrow G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}; \frac{y_A+y_B+y_C}{3}; \frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$$

2. Bài toán minh họa

Bài toán: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;3;2)$, $B(3;-5;6)$, $C(2;1;3)$.

- Tìm tọa độ của điểm M là trung điểm của cạnh AB .
- Tìm tọa độ hình chiếu trọng tâm G của tam giác ABC lên trục Ox .
- Tìm tọa độ điểm N đối xứng với điểm A qua điểm C .
- Tìm tọa độ điểm F trên mặt phẳng Oxz sao cho $|\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC}|$ nhỏ nhất.
- Tìm tọa độ điểm B' đối xứng với điểm B qua trục tung.

Lời giải:

- a) Tìm tọa độ của điểm M là trung điểm của cạnh AB .

$$\text{Ta có điểm } M \text{ là trung điểm của cạnh } AB \Rightarrow M\left(\frac{1+3}{2}; \frac{3-5}{2}; \frac{2+6}{2}\right) \text{ hay } M(2; -1; 4).$$

- b) Tìm tọa độ hình chiếu trọng tâm G của tam giác ABC lên trục Ox .

$$\checkmark G \text{ là trọng của tam giác } ABC \Rightarrow G\left(\frac{1+3+2}{3}; \frac{3-5+1}{3}; \frac{2+6+3}{3}\right) \text{ hay } G\left(2; -\frac{1}{3}; \frac{11}{3}\right).$$

$$\checkmark \text{ Hình chiếu của của } G \text{ lên trục } Ox \text{ là } H(2; 0; 0).$$

- c) Tìm tọa độ điểm N đối xứng với điểm A qua điểm C .

Gọi $N(x; y; z)$, ta có: N đối xứng với điểm A qua điểm $C \Leftrightarrow C$ là trung điểm của AN

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{1+x}{2}, 1 = \frac{3+y}{2}, 3 = \frac{2+z}{2} \Leftrightarrow x = 3, y = -1, z = 4. \text{ Vậy } N(3; -1; 4).$$

- d) Tìm tọa độ điểm F trên mặt phẳng (Oxz) sao cho $|\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC}|$ nhỏ nhất.

$$\checkmark |\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC}| = |3\overrightarrow{FG}| = 3FG.$$

$$\checkmark \text{ Do đó } |\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC}| \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow FG \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow F \text{ là hình chiếu của } G \text{ lên } mp(Oxz).$$

$$\text{Vậy } F\left(2; 0; \frac{11}{3}\right).$$

- e) Tìm tọa độ điểm B' đối xứng với điểm B qua trục tung.

$$\checkmark \text{ Hình chiếu của } B \text{ lên trục } Oy \text{ là } H(0; -5; 0).$$

$$\checkmark B' \text{ đối xứng với điểm } B \text{ qua trục tung} \Leftrightarrow H \text{ là trung điểm của đoạn } BB' \Rightarrow B'(-3; -5; -6).$$

IV. CHỨNG MINH HAI VECTO CÙNG PHƯƠNG, KHÔNG CÙNG PHƯƠNG

1. Kiến thức vận dụng

$$\vec{a} \text{ cùng phương } \vec{b} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{a} = k\vec{b} \quad (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \quad (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$$

2. Một số bài toán minh họa

Bài toán 1:

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (3; 2; 5)$, $\vec{b} = (3m + 2; 3; 6 - n)$. Tìm m, n để $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương.

Lời giải:

Ta có: $\vec{a} = (3; 2; 5)$, $\vec{b} = (3m + 2; 3; 6 - n)$

$$\vec{a}, \vec{b} \text{ cùng phương khi } \frac{3m+2}{3} = \frac{3}{2} = \frac{6-n}{5} \Leftrightarrow m = \frac{5}{6}, n = -\frac{3}{2}.$$

Bài toán 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 2; 3)$, $B(2; 1; 1)$, $C(0; 2; 4)$.

a) Chứng minh A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác.

b) Tìm tọa độ điểm $M \in mp(Oyz)$ sao cho 3 điểm A, B, M thẳng hàng.

Lời giải:

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 0; 1)$.

$$\frac{1}{-1} \neq \frac{-2}{1} \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ không cùng phương.}$$

Vậy A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác.

b) Tìm tọa độ điểm $M \in mp(Oyz)$ sao cho 3 điểm A, B, M thẳng hàng.

Ta có $M \in mp(Oyz) \Rightarrow M(x; 0; z)$

$$\overrightarrow{AM} = (x-1; -2; z-3), \overrightarrow{AB} = (1; -1; -2).$$

$$A, B, M \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{-2}{-1} = \frac{z-3}{-2} \Leftrightarrow x = 3, z = -1.$$

Vậy $M(3; 0; -1)$.

V. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VECTO VÀ ỨNG DỤNG

1. Kiến thức vận dụng

Định nghĩa: Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3); \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \wedge \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$$

Tính chất:

$$[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}; [\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}. [\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$$

$$\vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0} \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0.$$

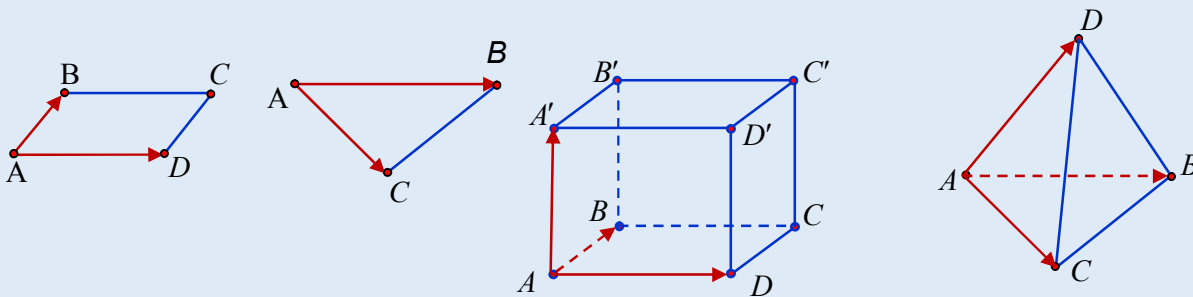
Ứng dụng:

$$\text{Diện tích hình bình hành } ABCD: S_{ABCD} = |[\vec{AB}, \vec{AD}]|.$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC: S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]|.$$

$$\text{Thể tích khối hộp } ABCD.A'D'C'D': V_{ABCD.A'B'C'D'} = |[\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA'}|.$$

$$\text{Thể tích khối tứ diện } ABCD: V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|.$$



2. Một số bài toán minh họa

Bài toán 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm: $A(1;0;1)$, $B(-1;1;2)$, $C(-1;1;0)$, $D(2;-1;-2)$.

a) Chứng minh rằng: A, B, C, D là 4 đỉnh của một tứ diện.

b) Tính thể tích tứ diện $ABCD$. Suy ra độ dài đường cao của tứ diện qua đỉnh A .

Lời giải:

a) Chứng minh rằng: A, B, C, D là 4 đỉnh của một tứ diện.

$$\vec{AB} = (-2; 1; 1), \vec{AC} = (-2; 1; -1), \vec{AD} = (1; -1; -3).$$

$$\Rightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] = (-2; -4; 0) \Rightarrow \vec{AD} \cdot [\vec{AB}, \vec{AC}] = 2 \neq 0 \Rightarrow \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD} \text{ không đồng phẳng}$$

Vậy A, B, C, D là 4 đỉnh của một tứ diện.

b) Tính thể tích tứ diện $ABCD$. Suy ra độ dài đường cao của tứ diện qua đỉnh A .

$$\vec{AB} = (-2; 1; 1), \vec{AC} = (-2; 1; -1), \vec{AD} = (1; -1; -3).$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-2; -4; 0) \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AD} \cdot [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \frac{1}{3} \text{ (đ.v.t.t)}$$

$$\checkmark \text{ Ta có: } \overrightarrow{BC} = (0; 0; -2), \overrightarrow{BD} = (3; -2; -4)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = (-4; -6; 0) \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}]| = \sqrt{13}.$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} d(A; (BCD)) \cdot S_{ABCD} \Leftrightarrow d(A; (BCD)) = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABCD}} = \frac{\sqrt{13}}{13}.$$

Bài toán 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(-3; 5; 15)$, $B(0; 0; 7)$, $C(2; -1; 4)$, $D(4; -3; 0)$. Chứng minh AB và CD cắt nhau.

Lời giải:

$$\checkmark \text{ Ta có: } \overrightarrow{AB} = (3; -5; -8), \overrightarrow{AC} = (5; -6; -11), \overrightarrow{AD} = (7; -8; -15), \overrightarrow{CD} = (2; -2; -4)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (7; -7; 7) \Rightarrow \overrightarrow{AD} \cdot [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \text{ đồng phẳng}$$

$$\Leftrightarrow A, B, C, D \text{ cùng thuộc một mặt phẳng (1)}$$

$$\checkmark [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = (4; -4; 4) \neq \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \text{ không cùng phương. (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra: AB và CD cắt nhau.

Bài toán 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.EFGH$ với $A(1; 1; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $E(-1; 2; -2)$, $D(3; 1; 2)$. Khoảng cách từ A đến $mp(DCGH)$ bằng

A. $\sqrt{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải:

Chọn B.

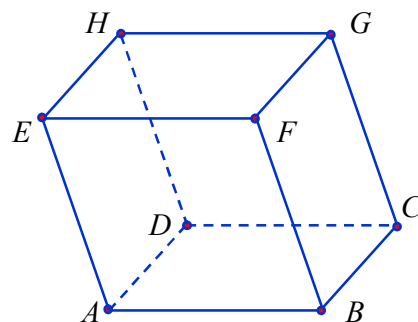
$$\checkmark \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1; 0; 1) \\ \overrightarrow{AD} = (2; 0; 1) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] = (0; 1; 0), \overrightarrow{AE} = (-2; 1; -3)$$

$$\checkmark [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \cdot \overrightarrow{AE} = 1 \Rightarrow V_{ABCD.EFGH} = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \cdot \overrightarrow{AE}| = 1$$

$$\checkmark \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1; 0; 1) \\ \overrightarrow{AE} = (-2; 1; -3) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}] = (-1; 1; 1)$$

$$\Rightarrow S_{ABFE} = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}]| = \sqrt{3} = S_{DCGH}.$$

$$\checkmark V_{ABCD.EFGH} = d(A, (DCGH)) S_{DCGH} \Rightarrow d(A, (DCGH)) = \frac{V_{ABCD.EFGH}}{S_{DCGH}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I. ĐỀ BÀI

Câu 1. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$, khi đó $\cos \varphi$ bằng

- A. $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. B. $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. C. $\frac{-\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. D. $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Câu 2. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a} = (1; 2; 0)$ và $\vec{b} = (2; 0; -1)$, khi đó $\cos \varphi$ bằng

- A. 0. B. $\frac{2}{5}$. C. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. D. $-\frac{2}{5}$.

Câu 3. Cho vectơ $\vec{a} = (1; 3; 4)$, tìm vectơ $\vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$

- A. $\vec{b} = (-2; -6; -8)$. B. $\vec{b} = (-2; -6; 8)$. C. $\vec{b} = (-2; 6; 8)$. D. $\vec{b} = (2; -6; -8)$.

Câu 4. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a} = (-2; 2; 5)$, $\vec{b} = (0; 1; 2)$ trong không gian bằng

- A. 10. B. 13. C. 12. D. 14.

Câu 5. Trong không gian cho hai điểm $A(-1; 2; 3)$, $B(0; 1; 1)$, độ dài đoạn AB bằng

- A. $\sqrt{6}$. B. $\sqrt{8}$. C. $\sqrt{10}$. D. $\sqrt{12}$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vectơ đơn vị, khi đó với $M(x; y; z)$ thì $\overrightarrow{OM}$ bằng

- A. $-x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$. B. $x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$. C. $x\vec{j} + y\vec{i} + z\vec{k}$. D. $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Câu 7. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ là một vectơ, kí hiệu $[\vec{a}, \vec{b}]$, được xác định bằng tọa độ

- A. $(a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$. B. $(a_2b_3 + a_3b_2; a_3b_1 + a_1b_3; a_1b_2 + a_2b_1)$.
C. $(a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 + a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$. D. $(a_2b_2 - a_3b_3; a_3b_3 - a_1b_1; a_1b_1 - a_2b_2)$.

Câu 8. Cho các vectơ $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ và $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ khi và chỉ khi

- A. $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 1$. B. $u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + u_3 + v_3 = 0$.
C. $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$. D. $u_1v_2 + u_2v_3 + u_3v_1 = -1$.

Câu 9. Cho vectơ $\vec{a} = (1; -1; 2)$, độ dài vectơ $\vec{a}$ là

- A. $\sqrt{6}$. B. 2. C. $-\sqrt{6}$. D. 4.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M nằm trên trục Ox sao cho M không trùng với gốc tọa độ, khi đó tọa độ điểm M có dạng

- A. $M(a; 0; 0), a \neq 0$. B. $M(0; b; 0), b \neq 0$. C. $M(0; 0; c), c \neq 0$. D. $M(a; 1; 1), a \neq 0$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M nằm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho M không trùng với gốc tọa độ và không nằm trên hai trục Ox, Oy , khi đó tọa độ điểm M là $(a, b, c \neq 0)$

- A. $(0; b; a)$. B. $(a; b; 0)$. C. $(0; 0; c)$. D. $(a; 1; 1)$

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (0; 3; 4)$ và $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$, khi đó tọa độ vectơ $\vec{b}$ có thể là

- A. $(0; 3; 4)$. B. $(4; 0; 3)$. C. $(2; 0; 1)$. D. $(-8; 0; -6)$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, khi đó $[\vec{u}, \vec{v}]$ bằng

- A. $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$. B. $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$. C. $\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$. D. $\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a} = (1; -1; 2)$, $\vec{b} = (3; 0; -1)$, $\vec{c} = (-2; 5; 1)$, vectơ $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ có tọa độ là

- A. $(6; 0; -6)$. B. $(-6; 6; 0)$. C. $(6; -6; 0)$. D. $(0; 6; -6)$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 0; -3)$, $B(2; 4; -1)$, $C(2; -2; 0)$. Độ dài các cạnh AB, AC, BC của tam giác ABC lần lượt là

- A. $\sqrt{21}, \sqrt{13}, \sqrt{37}$. B. $\sqrt{11}, \sqrt{14}, \sqrt{37}$. C. $\sqrt{21}, \sqrt{14}, \sqrt{37}$. D. $\sqrt{21}, \sqrt{13}, \sqrt{35}$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 0; -3)$, $B(2; 4; -1)$, $C(2; -2; 0)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

- A. $\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. B. $\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$. C. $(5; 2; 4)$. D. $\left(\frac{5}{2}; 1; -2\right)$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 2; 0)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(0; -2; 5)$. Để 4 điểm A, B, C, D đồng phẳng thì tọa độ điểm D là

- A. $D(-2; 5; 0)$. B. $D(1; 2; 3)$. C. $D(1; -1; 6)$. D. $D(0; 0; 2)$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-2; 0; 1)$, $\vec{c} = (-1; 0; 1)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c} - 3\vec{i}$

- A. $\vec{n} = (6; 2; 6)$. B. $\vec{n} = (6; 2; -6)$. C. $\vec{n} = (0; 2; 6)$. D. $\vec{n} = (-6; 2; 6)$.

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 0; 2)$, $B(-2; 1; 3)$, $C(3; 2; 4)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC

- A. $G\left(\frac{2}{3}; 1; 3\right)$. B. $G(2; 3; 9)$. C. $G(-6; 0; 24)$. D. $G\left(2; \frac{1}{3}; 3\right)$.

Câu 20. Cho 3 điểm $M(2; 0; 0)$, $N(0; -3; 0)$, $P(0; 0; 4)$. Nếu $MNPQ$ là hình bình hành thì tọa độ của điểm Q là

- A. $Q(-2; -3; 4)$ B. $Q(2; 3; 4)$ C. $Q(3; 4; 2)$ D. $Q(-2; -3; -4)$

Câu 21. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(1; 1; 1)$, $N(2; 3; 4)$, $P(7; 7; 5)$. Để tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành thì tọa độ điểm Q là

- A. $Q(-6; 5; 2)$. B. $Q(6; 5; 2)$. C. $Q(6; -5; 2)$. D. $Q(-6; -5; -2)$.

Câu 22. Cho 3 điểm $A(1; 2; 0)$, $B(1; 0; -1)$, $C(0; -1; 2)$. Tam giác ABC là

- A. tam giác có ba góc nhọn. B. tam giác cân đỉnh A .

C. tam giác vuông đỉnh A.

D. tam giác đều.

Câu 23. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1;2;2), B(0;1;3), C(-3;4;0)$. Để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm D là

A. $D(-4;5;-1)$. B. $D(4;5;-1)$. C. $D(-4;-5;-1)$. D. $D(4;-5;1)$.

Câu 24. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau góc 60° và $|\vec{a}|=2; |\vec{b}|=4$. Khi đó $|\vec{a}+\vec{b}|$ bằng

A. $\sqrt{8\sqrt{3}+20}$. B. $2\sqrt{7}$. C. $2\sqrt{5}$. D. 2.

Câu 25. Cho điểm $M(1;2;-3)$, khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Oxy) bằng

A. 2. B. -3. C. 1. D. 3.

Câu 26. Cho điểm $M(-2;5;0)$, hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Oy là điểm

A. $M'(2;5;0)$. B. $M'(0;-5;0)$. C. $M'(0;5;0)$. D. $M'(-2;0;0)$.

Câu 27. Cho điểm $M(1;2;-3)$, hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Oxy) là điểm

A. $M'(1;2;0)$. B. $M'(1;0;-3)$. C. $M'(0;2;-3)$. D. $M'(1;2;3)$.

Câu 28. Cho điểm $M(-2;5;1)$, khoảng cách từ điểm M đến trục Ox bằng

A. $\sqrt{29}$. B. $\sqrt{5}$. C. 2. D. $\sqrt{26}$.

Câu 29. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ với I là trọng tâm của đáy ABC . Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức đúng

A. $\vec{IA} = \vec{IB} + \vec{IC}$. B. $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{CI} = \vec{0}$. C. $\vec{IA} + \vec{BI} + \vec{IC} = \vec{0}$. D. $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 vectơ $\vec{a} = (-1;1;0); \vec{b} = (1;1;0); \vec{c} = (1;1;1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai:

A. $\vec{b} \perp \vec{c}$. B. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$. C. $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. D. $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Câu 31. Cho điểm $M(3;2;-1)$, điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (Oxy) là điểm

A. $M'(3;-2;1)$. B. $M'(3;-2;-1)$. C. $M'(3;2;1)$. D. $M'(3;2;0)$.

Câu 32. Cho điểm $M(3;2;-1)$, điểm $M'(a;b;c)$ đối xứng của M qua trục Oy , khi đó $a+b+c$ bằng

A. 6. B. 4. C. 0. D. 2.

Câu 33. Cho $\vec{u} = (1;1;1)$ và $\vec{v} = (0;1;m)$. Để góc giữa hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ có số đo bằng 45° thì m bằng

A. $\pm\sqrt{3}$. B. $2 \pm \sqrt{3}$. C. $1 \pm \sqrt{3}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 34. Cho $A(1;-2;0), B(3;3;2), C(-1;2;2), D(3;3;1)$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng

A. 5. B. 4. C. 3. D. 6.

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$ cho tứ diện $ABCD$. Độ dài đường cao vẽ từ D của tứ diện $ABCD$ cho bởi công thức nào sau đây:

A. $h = \frac{1}{3} \frac{|\vec{AB}, \vec{AC}| \cdot |\vec{AD}|}{|\vec{AB}, \vec{AC}|}$.

B. $h = \frac{1}{3} \frac{|\vec{AB}, \vec{AC}| \cdot |\vec{AD}|}{|\vec{AB}, \vec{AC}|}$.

$$\text{C. } h = \frac{\left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \cdot \overrightarrow{AD} \right|}{\left| \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \right|}.$$

$$\text{D. } h = \frac{\left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \cdot \overrightarrow{AD} \right|}{\left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \right|}.$$

Câu 36. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-2;0), B(3;3;2), C(-1;2;2), D(3;3;1)$.

Độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ đỉnh D xuống mặt phẳng (ABC) là

$$\text{A. } \frac{9}{7\sqrt{2}}.$$

$$\text{B. } \frac{9}{7}.$$

$$\text{C. } \frac{9}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{D. } \frac{9}{14}.$$

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(1;0;2), B(-2;1;3), C(3;2;4), D(6;9;-5)$.

Tìm tọa độ trọng tâm G của tứ diện $ABCD$

$$\text{A. } G\left(-9; \frac{18}{4}; -30\right).$$

$$\text{B. } G(8;12;4).$$

$$\text{C. } G\left(3;3; \frac{14}{4}\right).$$

$$\text{D. } G(2;3;1).$$

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1), B(2;-1;2)$. Điểm M trên trục Ox và cách đều hai điểm A, B có tọa độ là

$$\text{A. } M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

$$\text{B. } M\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right).$$

$$\text{C. } M\left(\frac{3}{2}; 0; 0\right).$$

$$\text{D. } M\left(0; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1), B(3;-1;2)$. Điểm M trên trục Oz và cách đều hai điểm A, B có tọa độ là

$$\text{A. } M(0;0;4).$$

$$\text{B. } M(0;0;-4).$$

$$\text{C. } M\left(0;0; \frac{3}{2}\right).$$

$$\text{D. } M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(-1;-2;3), B(0;3;1), C(4;2;2)$. Cosin của góc $\widehat{BAC}$ là

$$\text{A. } \frac{9}{2\sqrt{35}}.$$

$$\text{B. } \frac{9}{\sqrt{35}}.$$

$$\text{C. } -\frac{9}{2\sqrt{35}}.$$

$$\text{D. } -\frac{9}{\sqrt{35}}.$$

Câu 41. Tọa độ của vectơ $\vec{n}$ vuông góc với hai vectơ $\vec{a} = (2;-1;2), \vec{b} = (3;-2;1)$ là

$$\text{A. } \vec{n} = (3;4;1).$$

$$\text{B. } \vec{n} = (3;4;-1).$$

$$\text{C. } \vec{n} = (-3;4;-1).$$

$$\text{D. } \vec{n} = (3;-4;-1).$$

Câu 42. Cho $|\vec{a}| = 2; |\vec{b}| = 5$, góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\frac{2\pi}{3}$, $\vec{u} = k\vec{a} - \vec{b}; \vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b}$. Để $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$ thì k bằng

$$\text{A. } -\frac{6}{45}.$$

$$\text{B. } \frac{45}{6}.$$

$$\text{C. } \frac{6}{45}.$$

$$\text{D. } -\frac{45}{6}.$$

Câu 43. Cho $\vec{u} = (2;-1;1), \vec{v} = (m;3;-1), \vec{w} = (1;2;1)$. Với giá trị nào của m thì ba vectơ trên đồng phẳng

$$\text{A. } \frac{3}{8}.$$

$$\text{B. } -\frac{3}{8}.$$

$$\text{C. } \frac{8}{3}.$$

$$\text{D. } -\frac{8}{3}.$$

Câu 44. Cho hai vectơ $\vec{a} = (1; \log_3 5; m), \vec{b} = (3; \log_5 3; 4)$. Với giá trị nào của m thì $\vec{a} \perp \vec{b}$

$$\text{A. } m = 1; m = -1.$$

$$\text{B. } m = 1.$$

$$\text{C. } m = -1.$$

$$\text{D. } m = 2; m = -2.$$

- Câu 45.** Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;5;3), B(3;7;4), C(x;y;6)$. Giá trị của x, y để ba điểm A, B, C thẳng hàng là
A. $x=5; y=11$. **B.** $x=-5; y=11$. **C.** $x=-11; y=-5$. **D.** $x=11; y=5$.
- Câu 46.** Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;0;0), B(0;0;1), C(2;1;1)$. Tam giác ABC là
A. tam giác vuông tại A . **B.** tam giác cân tại A .
C. tam giác vuông cân tại A . **D.** Tam giác đều.
- Câu 47.** Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC có $A(1;0;0), B(0;0;1), C(2;1;1)$. Tam giác ABC có diện tích bằng
A. $\sqrt{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.
- Câu 48.** Ba đỉnh của một hình bình hành có tọa độ là $(1;1;1), (2;3;4), (7;7;5)$. Diện tích của hình bình hành đó bằng
A. $2\sqrt{83}$. **B.** $\sqrt{83}$. **C.** 83 . **D.** $\frac{\sqrt{83}}{2}$.
- Câu 49.** Cho 3 vectơ $\vec{a} = (1;2;1); \vec{b} = (-1;1;2)$ và $\vec{c} = (x;3x;x+2)$. Tìm x để 3 vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng
A. 2. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 1.
- Câu 50.** Trong không gian $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a} = (3;-2;4), \vec{b} = (5;1;6), \vec{c} = (-3;0;2)$. Tìm vectơ $\vec{x}$ sao cho vectơ $\vec{x}$ đồng thời vuông góc với $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$
A. $(1;0;0)$. **B.** $(0;0;1)$. **C.** $(0;1;0)$. **D.** $(0;0;0)$.
- Câu 51.** Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $B(1;2;-3), C(7;4;-2)$. Nếu E là điểm thỏa mãn đẳng thức $\vec{CE} = 2\vec{EB}$ thì tọa độ điểm E là
A. $\left(3; \frac{8}{3}; -\frac{8}{3}\right)$. **B.** $\left(3; \frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$. **C.** $\left(3; 3; -\frac{8}{3}\right)$. **D.** $\left(1; 2; \frac{1}{3}\right)$.
- Câu 52.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-2;3;3)$. Điểm $M(a;b;c)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$, khi đó $P = a^2 + b^2 - c^2$ có giá trị bằng
A. 43.. **B.** 44.. **C.** 42.. **D.** 45.
- Câu 53.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-2;3;3)$. Tìm tọa độ điểm D là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC
A. $D(0;1;3)$. **B.** $D(0;3;1)$. **C.** $D(0;-3;1)$. **D.** $D(0;3;-1)$.
- Câu 54.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1;3;5), B(-4;3;2), C(0;2;1)$. Tìm tọa độ điểm I tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
A. $I\left(\frac{8}{3}; \frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$. **B.** $I\left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$. **C.** $I\left(-\frac{5}{3}; \frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$. **D.** $I\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Câu 55. Trong không gian $Oxyz$, cho 3 vectơ $\vec{a} = (-1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$. Cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC'} = \vec{c}$. Thể tích của hình hộp nói trên bằng:

- A. $\frac{1}{3}$ B. 4 C. $\frac{2}{3}$ D. 2

Câu 56. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho tọa độ 4 điểm $A(2; -1; 1)$, $B(1; 0; 0)$, $C(3; 1; 0)$, $D(0; 2; 1)$. Cho các mệnh đề sau:

- 1) Độ dài $AB = \sqrt{2}$.
 2) Tam giác BCD vuông tại B .
 3) Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 6.

Các mệnh đề đúng là:

- A. 2). B. 3). C. 1); 3). D. 2), 1)

Câu 57. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (-1, 1, 0)$; $\vec{b} = (1, 1, 0)$; $\vec{c} = (1, 1, 1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng:

- A. $\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\sqrt{6}}{3}$. B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.
 C. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$.

Câu 58. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$, biết $A(1; 0; 1)$, $B(-1; 1; 2)$, $C(-1; 1; 0)$, $D(2; -1; -2)$. Độ dài đường cao AH của tứ diện $ABCD$ bằng:

- A. $\frac{2}{\sqrt{13}}$. B. $\frac{1}{\sqrt{13}}$. C. $\frac{\sqrt{13}}{2}$. D. $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

Câu 59. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ với I là trọng tâm của đáy ABC . Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức đúng

- A. $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$. B. $\overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$.
 C. $\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$. D. $\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \vec{0}$.

Câu 60. Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$, $D(-2; 1; -1)$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng

- A. $\frac{3}{2}$. B. 3. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 61. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = a$, $SC = 3a$, $\widehat{ASB} = \widehat{CSB} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 90^\circ$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Khi đó khoảng cách SG bằng

- A. $\frac{a\sqrt{15}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{7}}{3}$. D. $a\sqrt{3}$.

Câu 62. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2; 5; 1)$, $B(-2; -6; 2)$, $C(1; 2; -1)$ và điểm $M(m; m; m)$, để $|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì m bằng

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

- Câu 63.** Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;5;1), B(-2;-6;2), C(1;2;-1)$ và điểm $M(m;m;m)$, để $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất thì m bằng
- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.
- Câu 64.** Cho hình chóp $S.ABCD$ biết $A(-2;2;6), B(-3;1;8), C(-1;0;7), D(1;2;3)$. Gọi H là trung điểm của CD , $SH \perp (ABCD)$. Để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $\frac{27}{2}$ (đvtt) thì có hai điểm S_1, S_2 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Tìm tọa độ trung điểm I của S_1S_2
- A. $I(0;-1;-3)$. B. $I(1;0;3)$ C. $I(0;1;3)$. D. $I(-1;0;-3)$.
- Câu 65.** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;7), B(4;5;-2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oyz) tại điểm M . Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số nào
- A. $\frac{1}{2}$. B. 2. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.
- Câu 66.** Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(2;1;-1), B(3;0;1), C(2;-1;3)$ và D thuộc trục Oy . Biết $V_{ABCD} = 5$ và có hai điểm $D_1(0;y_1;0), D_2(0;y_2;0)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó $y_1 + y_2$ bằng
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 67.** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1;2;4), B(3;0;-2), C(1;3;7)$. Gọi D là chân đường phân giác trong của góc A . Tính độ dài $|\overline{OD}|$.
- A. $\frac{\sqrt{207}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{203}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{201}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{205}}{3}$.
- Câu 68.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC , biết $A(1;1;1), B(5;1;-2), C(7;9;1)$. Tính độ dài phân giác trong AD của góc A
- A. $\frac{2\sqrt{74}}{3}$. B. $\frac{3\sqrt{74}}{2}$. C. $2\sqrt{74}$. D. $3\sqrt{74}$.
- Câu 69.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1), B(1;4;-1), C(2;4;3), D(2;2;-1)$. Biết $M(x;y;z)$, để $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x + y + z$ bằng
- A. 7. B. 8. C. 9. D. 6.
- Câu 70.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;3;1), B(-1;2;0), C(1;1;-2)$. H là trực tâm tam giác ABC , khi đó, độ dài đoạn OH bằng
- A. $\frac{\sqrt{870}}{12}$. B. $\frac{\sqrt{870}}{14}$. C. $\frac{\sqrt{870}}{16}$. D. $\frac{\sqrt{870}}{15}$.
- Câu 71.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(3;1;0)$, B nằm trên mặt phẳng (Oxy) và có hoành độ dương, C nằm trên trục Oz và $H(2;1;1)$ là trực tâm của tam giác ABC . Tọa độ các điểm B, C thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

A. $B\left(\frac{-3+\sqrt{177}}{4}; \frac{17-\sqrt{177}}{2}; 0\right), C\left(0; 0; \frac{3-\sqrt{177}}{4}\right).$

B. $B\left(\frac{-3-\sqrt{177}}{4}; \frac{17+\sqrt{177}}{2}; 0\right), C\left(0; 0; \frac{3+\sqrt{177}}{4}\right).$

C. $B\left(\frac{-3+\sqrt{177}}{4}; \frac{17-\sqrt{177}}{2}; 0\right), C\left(0; 0; \frac{3+\sqrt{177}}{4}\right).$

D. $B\left(\frac{-3+\sqrt{177}}{4}; \frac{17+\sqrt{177}}{2}; 0\right), C\left(0; 0; \frac{3-\sqrt{177}}{4}\right).$

Câu 72. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$, $B(3; 0; 8)$, $D(-5; -4; 0)$.

Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó $|\overline{CA} + \overline{CB}|$ bằng:

A. $5\sqrt{10}$.

B. $6\sqrt{10}$.

C. $10\sqrt{6}$.

D. $10\sqrt{5}$.

Câu 73. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC , biết $A(5; 3; -1)$, $B(2; 3; -4)$, $C(3; 1; -2)$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng:

A. $9 - 2\sqrt{6}$.

B. $9 - 3\sqrt{6}$.

C. $9 + 3\sqrt{6}$.

D. $9 + 2\sqrt{6}$.

Câu 74. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(3; 0; 0)$, $N(m, n, 0)$, $P(0; 0; p)$.

Biết $MN = \sqrt{13}$, $\widehat{MON} = 60^\circ$, thể tích tứ diện $OMNP$ bằng 3. Giá trị của biểu thức

$A = m + 2n^2 + p^2$ bằng

A. 29.

B. 27.

C. 28.

D. 30.

Câu 75. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 3; 1)$, $B(-1; 2; 0)$, $C(1; 1; -2)$.

Gọi $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính giá trị biểu thức

$P = 15a + 30b + 75c$

A. 48.

B. 50.

C. 52.

D. 46.

II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1A	2B	3A	4C	5A	6D	7A	8C	9A	10A
11B	12D	13A	14C	15C	16A	17A	18D	19A	20B
21B	22A	23A	24B	25D	26C	27A	28D	29D	30A
31C	32C	33B	34C	35D	36A	37D	38C	39A	40A
41B	42D	43D	44C	45A	46A	47C	48A	49A	50D
51A	52B	53A	54C	55D	56A	57A	58B	59B	60D
61A	62A	63B	64C	65A	66B	67D	68A	69A	70D
71A	72B	73B	74A	75B					

Câu 1. **Chọn A.**

Câu 2. **Chọn B.**

Câu 3. **Chọn A.**

Câu 4. **Chọn C.**

Câu 5. **Chọn A.**

Câu 6. **Chọn D.**

Câu 7. **Chọn A.**

Câu 8. **Chọn C.**

Câu 9. **Chọn A.**

Câu 10. **Chọn A.**

Câu 11. **Chọn B.**

Câu 12. **Chọn D.**

Câu 13. **Chọn A.**

Câu 14. **Chọn C.**

Câu 15. **Chọn C.**

Câu 16. **Chọn A.**

Câu 17. **Chọn A.**

Cách 1: Tính $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

Cách 2: Lập phương trình (ABC) và thế toạ độ D vào phương trình tìm được.

Câu 18. **Chọn D.**

Câu 19. **Chọn A.**

Câu 20. **Chọn B.**

Gọi $Q(x; y; z)$, $MNPQ$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z - 4 = 0 \end{cases}$

Câu 21. **Chọn B.**

Điểm $Q(x; y; z)$

$\overrightarrow{MN} = (1; 2; 3)$, $\overrightarrow{QP} = (7 - x; 7 - y; 5 - z)$

Vì $MNPQ$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \Rightarrow Q(6; 5; 2)$

Câu 22. Chọn A.

$\overrightarrow{AB} = (0; -2; -1); \overrightarrow{AC} = (-1; -3; 2)$. Ta thấy $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \neq 0 \Rightarrow \Delta ABC$ không vuông.

$|\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{AC}| \Rightarrow \Delta ABC$ không cân.

Câu 23. Chọn A.

Điểm $D(x; y; z)$

$\overrightarrow{AB} = (1; -1; 1), \overrightarrow{DC} = (-3 - x; 4 - y; -z)$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow D(-4; 5; -1)$

Câu 24. Chọn B.

Ta có $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 4 + 16 + 8 = 28 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = 2\sqrt{7}$.

Câu 25. Chọn D.

Với $M(a; b; c) \Rightarrow d(M, (Oxy)) = |c|$

Câu 26. Chọn C.

Với $M(a; b; c) \Rightarrow$ hình chiếu vuông góc của M lên trục Oy là $M_1(0; b; 0)$

Câu 27. Chọn A.

Với $M(a; b; c) \Rightarrow$ hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (Oxy) là $M_1(a; b; 0)$

Câu 28. Chọn D.

Với $M(a; b; c) \Rightarrow d(M, Ox) = \sqrt{b^2 + c^2}$

Câu 29. Chọn D.

Câu 30. Chọn A.

Vì $\vec{b} \cdot \vec{c} = 2 \neq 0$.

Câu 31. Chọn C.

Với $M(a; b; c) \Rightarrow$ điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (Oxy) là $M(a; b; -c)$

Câu 32. Chọn C.

Với $M(a; b; c) \Rightarrow$ điểm đối xứng của M qua trục Oy là $M'(-a; b; -c)$

$\Rightarrow M'(-3; 2; 1) \Rightarrow a + b + c = 0$.

Câu 33. Chọn B.

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot m}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{m^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}(m+1) = \sqrt{3} \sqrt{m^2 + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ 3(m^2 + 1) = 2(m+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = 2 \pm \sqrt{3}$$

Câu 34. Chọn C.

Tính $\overrightarrow{AB} = (2; 5; 2), \overrightarrow{AC} = (-2; 4; 2), \overrightarrow{AD} = (2; 5; 1)$

$$V = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \right| = 3$$

Sử dụng Casio

MODE **8** **1** **1** (nhập vectơ $\overrightarrow{AB}$)

SHIFT **5** **2** **2** **2** (nhập vectơ $\overrightarrow{AC}$)

SHIFT **5** **2** **3** **1** (nhập vectơ $\overrightarrow{AD}$)

AC **1** **=** **6** **SHIFT** **hyp** (abs) **SHIFT** **5** **3** **SHIFT** **5** **4** **SHIFT** **5** **7** **SHIFT** **5** **5** **=** (tính V)

Câu 35. Chọn D.

$$\text{Vì } V_{ABCD} = \frac{1}{3} h \cdot \frac{1}{2} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \frac{1}{6} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \text{ nên } h = \frac{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}}{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]}$$

Câu 36. Chọn A.

Tính $\overrightarrow{AB}(2;5;2), \overrightarrow{AC}(-2;4;2), \overrightarrow{AD}(2;5;1)$

$$V = \frac{1}{6} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 3$$

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h, \text{ với } B = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 7\sqrt{2}, h = d(D, (ABC))$$

$$\Rightarrow h = \frac{3V}{B} = \frac{3 \cdot 3}{7\sqrt{2}} = \frac{9}{7\sqrt{2}}$$

Câu 37. Chọn D.

Câu 38. Chọn C.

$$M \in Ox \Rightarrow M(a;0;0)$$

$$M \text{ cách đều hai điểm } A, B \text{ nên } MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow (1-a)^2 + 2^2 + 1^2 = (2-a)^2 + 2^2 + 1^2$$

$$\Leftrightarrow 2a = 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

Câu 39. Chọn A.

Câu 40. Chọn A.

Câu 41. Chọn B.

Câu 42. Chọn D.

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (k\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = 4k - 50 + (2k-1) |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{2\pi}{3} \\ &= -6k - 45 \end{aligned}$$

Câu 43. Chọn D.

$$\text{Ta có: } [\vec{u}, \vec{v}] = (-2; m+2; m+6), \quad [\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{w} = 3m+8$$

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{8}{3}$$

Câu 44. Chọn C.

Câu 45. Chọn A.

$$\overrightarrow{AB} = (1; 2; 1), \overrightarrow{AC} = (x-2; y-5; 3)$$

$$A, B, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{3}{1} \Leftrightarrow x=5; y=11$$

Câu 46. Chọn A.

$$\overrightarrow{BA} = (1; 0; -1), \overrightarrow{CA} = (-1; -1; -1), \overrightarrow{CB} = (-2; -1; 0)$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \Rightarrow \text{tam giác vuông tại } A, AB \neq AC.$$

Câu 47. Chọn C.

$$\overrightarrow{AB} = (-1; 0; 1), \overrightarrow{AC} = (1; 1; 1). S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \right| = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Câu 48. Chọn A.

Gọi 3 đỉnh theo thứ tự là A, B, C

$$\overrightarrow{AB} = (1; 2; 3), \overrightarrow{AC} = (6; 6; 4)$$

$$S_{hbb} = \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \right| = \sqrt{(-10)^2 + 14^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{83}$$

Câu 49. Chọn A.

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ đồng phẳng thì } \left[\vec{a}, \vec{b} \right] \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Câu 50. Chọn D.

$$\text{Để thấy chỉ có } \vec{x} = (0; 0; 0) \text{ thỏa mãn } \vec{x} \cdot \vec{a} = \vec{x} \cdot \vec{b} = \vec{x} \cdot \vec{c} = 0.$$

Câu 51. Chọn A.

$$E(x; y; z), \text{ từ } \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EB} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{8}{3} \\ z = -\frac{8}{3} \end{cases}.$$

Câu 52. Chọn B.

$M(x; y; z)$, $ABCM$ là hình bình hành thì

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = -2-2 \\ y-2 = 3+1 \\ z+1 = 3-3 \end{cases} \Rightarrow M(-3; 6; -1) \Rightarrow P = 44..$$

Câu 53. Chọn A.

$$\text{Ta có } AB = \sqrt{26}, AC = \sqrt{26} \Rightarrow \text{tam giác } ABC \text{ cân ở } A \text{ nên } D \text{ là trung điểm } BC \\ \Rightarrow D(0; 1; 3).$$

Câu 54. Chọn C.

$$\text{Ta có: } AB = BC = CA = 3\sqrt{2} \Rightarrow \Delta ABC \text{ đều. Do đó tâm } I \text{ của đường tròn ngoại tiếp} \\ \Delta ABC \text{ là trọng tâm của nó. Kết luận: } I\left(-\frac{5}{3}; \frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right).$$

Câu 55. Chọn D.

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} \Rightarrow A(-1; 1; 0), \overrightarrow{OB} = \vec{b} \Rightarrow B(1; 1; 0), \overrightarrow{OC} = \vec{c} \Rightarrow C'(1; 1; 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} \Rightarrow C(2;0;0) \Rightarrow \overrightarrow{CC'} = (-1;1;1) = \overrightarrow{OO'} \Rightarrow V_{OABC.O'A'B'C'} = \left| [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] \overrightarrow{OO'} \right|$$

Câu 56. Chọn A.

Câu 57. Chọn A.

$$\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|}$$

Câu 58. Chọn B.

$$\text{Sử dụng công thức } h = \frac{|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Câu 59. Chọn B.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{SI} &= \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AI} \\ \overrightarrow{SI} &= \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BI} \\ \overrightarrow{SI} &= \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CI} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3\overrightarrow{SI} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI})$$

$$\text{Vì I là trọng tâm tam giác } ABC \Rightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{SI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}).$$

Câu 60. Chọn D.

$$\text{Thể tích tứ diện: } V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}|$$

Câu 61. Chọn A.

Áp dụng công thức tổng quát: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a, SB = b, SC = c$ và có $\widehat{ASB} = \alpha, \widehat{BSC} = \beta, \widehat{CSA} = \gamma$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, khi đó

$$SG = \frac{1}{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos \alpha + 2ac \cos \gamma + 2bc \cos \beta}$$

Chúng minh:

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$$

$$(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})^2 = \overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SC}^2 + 2\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC}$$

$$\text{Khi đó } SG = \frac{1}{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos \alpha + 2ac \cos \gamma + 2bc \cos \beta}$$

$$\text{Áp dụng công thức trên ta tính được } SG = \frac{a\sqrt{15}}{3}.$$

Câu 62. Chọn A.

$$\overrightarrow{AC}(-1; -3; -2), \overrightarrow{MB}(-2 - m; -6 - m; 2 - m)$$

$$|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}| = \sqrt{m^2 + m^2 + (m - 6)^2} = \sqrt{3m^2 - 12m + 36} = \sqrt{3(m - 2)^2 + 24}$$

$$\text{Để } |\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}| \text{ nhỏ nhất thì } m = 2$$

Câu 63. Chọn B.

$$\overrightarrow{MA} = (2-m; 5-m; 1-m), \overrightarrow{MB} = (-2-m; -6-m; 2-m), \overrightarrow{MC} = (1-m; 2-m; -1-m)$$

$$MA^2 - MB^2 - MC^2 = -3m^2 - 24m - 20 = 28 - 3(m-4)^2 \leq 28$$

Để $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất thì $m = 4$

Câu 64. Chọn C.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (-1; -1; 2), \overrightarrow{AC} = (1; -2; 1) \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\overrightarrow{DC} = (-2; -2; 4), \overrightarrow{AB} = (-1; -1; 2) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow ABCD \text{ là hình thang và}$$

$$S_{ABCD} = 3S_{ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vì } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} \Rightarrow SH = 3\sqrt{3}$$

Lại có H là trung điểm của $CD \Rightarrow H(0; 1; 5)$

$$\text{Gọi } S(a; b; c) \Rightarrow \overrightarrow{SH} = (-a; 1-b; 5-c) \Rightarrow \overrightarrow{SH} = k \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] = k(3; 3; 3) = (3k; 3k; 3k)$$

$$\text{Suy ra } 3\sqrt{3} = \sqrt{9k^2 + 9k^2 + 9k^2} \Rightarrow k = \pm 1$$

$$+) \text{ Với } k=1 \Rightarrow \overrightarrow{SH} = (3; 3; 3) \Rightarrow S(-3; -2; 2)$$

$$+) \text{ Với } k=-1 \Rightarrow \overrightarrow{SH} = (-3; -3; -3) \Rightarrow S(3; 4; 8)$$

Suy ra $I(0; 1; 3)$

Câu 65. Chọn A.

Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oyz) tại điểm $M \Rightarrow M(0; y; z)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} = (2; -1-y; 7-z), \overrightarrow{MB} = (4; 5-y; -2-z)$$

$$\text{Từ } \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \text{ ta có hệ } \begin{cases} 2 = k \cdot 4 \\ -1-y = k(5-y) \\ 7-z = k(-2-z) \end{cases} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Câu 66. Chọn B.

$$D \in Oy \Rightarrow D(0; y; 0)$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (1; -1; 2), \overrightarrow{AD} = (-2; y-1; 1), \overrightarrow{AC} = (0; -2; 4)$$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] = (0; -4; -2) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] \cdot \overrightarrow{AD} = -4y + 2$$

$$V_{ABCD} = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{6} |-4y + 2| = 5 \Leftrightarrow y = -7; y = 8 \Rightarrow D_1(0; -7; 0), D_2(0; 8; 0) \Rightarrow y_1 + y_2 = 1$$

Câu 67. Chọn D.

Gọi $D(x; y; z)$

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{14}} = 2$$

$$\text{Vì } D \text{ nằm giữa } B, C \text{ (phân giác trong) nên } \overrightarrow{DB} = -2\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x = -2(1-x) \\ -y = -2(3-y) \\ -2-z = -2(7-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } D\left(\frac{5}{3}; 2; 4\right) \Rightarrow |\overrightarrow{OD}| = \frac{\sqrt{205}}{3}$$

Câu 68. Chọn A.

$D(x; y; z)$ là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC .

$$\text{Ta có } \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DB} \Rightarrow D\left(\frac{17}{3}; \frac{11}{3}; -1\right) \Rightarrow AD = \frac{2\sqrt{74}}{3}.$$

Câu 69. Chọn A.

Gọi G là trọng tâm của $ABCD$ ta có: $G\left(\frac{7}{3}; \frac{14}{3}; 0\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 &= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \\ &\geq GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } M \equiv G\left(\frac{7}{3}; \frac{14}{3}; 0\right) \Rightarrow x + y + z = 7. \end{aligned}$$

Câu 70. Chọn D.

$H(x; y; z)$ là trực tâm của $\Delta ABC \Leftrightarrow BH \perp AC, CH \perp AB, H \in (ABC)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{15}; y = \frac{29}{15}; z = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{2}{15}; \frac{29}{15}; -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{870}}{15}.$$

Câu 71. Chọn A.

Giả sử $B(x; y; 0) \in (Oxy), C(0; 0; z) \in Oz$.

$$H \text{ là trực tâm của tam giác } ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH} \text{ ãoàng phaúng} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}] \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \\ 3x - 3y + yz - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3 - \sqrt{177}}{4}; y = \frac{17 + \sqrt{177}}{2}; z = \frac{3 + \sqrt{177}}{4} \\ &\Rightarrow B\left(\frac{-3 - \sqrt{177}}{4}; \frac{17 + \sqrt{177}}{2}; 0\right), C\left(0; 0; \frac{3 + \sqrt{177}}{4}\right). \end{aligned}$$

Câu 72. Chọn B.

Ta có trung điểm BD là $I(-1; -2; 4)$, $BD = 12$ và điểm A thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $A(a; b; 0)$.

$$ABCD \text{ là hình vuông} \Rightarrow \begin{cases} AB^2 = AD^2 \\ AI^2 = \left(\frac{1}{2}BD\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)^2 + b^2 + 8^2 = (a+5)^2 + (b+4)^2 \\ (a+1)^2 + (b+2)^2 + 4^2 = 36 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - 2a \\ (a+1)^2 + (6-2a)^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = \frac{17}{5} \\ b = \frac{-14}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(1; 2; 0) \text{ hoặc } A\left(\frac{17}{5}; \frac{-14}{5}; 0\right) (\text{loại}).$$

$$\text{Với } A(1; 2; 0) \Rightarrow C(-3; -6; 8).$$

Câu 73. Chọn B.

Ta có $AC^2 + BC^2 = 9 + 9 = AB^2 \Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại C .

$$\text{Suy ra: } r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\frac{1}{2}CA \cdot CB}{\frac{1}{2}(AB + BC + CA)} = \frac{3 \cdot 3 \sqrt{2}}{3\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3}} = 9 - 3\sqrt{6}$$

Câu 74. Chọn A.

$$\overrightarrow{OM} = (3; 0; 0), \overrightarrow{ON} = (m; n; 0) \Rightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 3m$$

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = |\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}| \cos 60^\circ \Rightarrow \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \frac{1}{2}$$

$$MN = \sqrt{(m-3)^2 + n^2} = \sqrt{13}$$

$$\text{Suy ra } m = 2; n = \pm 2\sqrt{3}$$

$$[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}] \cdot \overrightarrow{OP} = 6\sqrt{3}p \Rightarrow V = \frac{1}{6} |6\sqrt{3}p| = 3 \Rightarrow p = \pm\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } A = 2 + 2 \cdot 12 + 3 = 29.$$

Câu 75. Chọn B.

$I(x; y; z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Leftrightarrow AI = BI = CI, I \in (ABC)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ CI^2 = BI^2 \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AI} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{14}{15}; y = \frac{61}{30}; z = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{14}{15}; \frac{61}{30}; -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow P = 50.$$

Chủ đề 2

PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

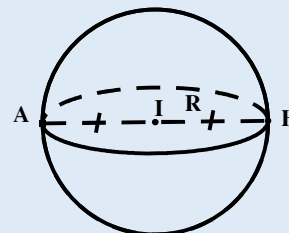


A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐỊNH NGHĨA

Cho điểm I cố định và một số thực dương R . Tập hợp tất cả những điểm M trong không gian cách I một khoảng R được gọi là mặt cầu tâm I , bán kính R .

Kí hiệu: $S(I; R) \Rightarrow S(I; R) = \{M / IM = R\}$



II. CÁC DẠNG PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Dạng 1 : Phương trình chính tắc

Mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$, bán kính $R > 0$.

$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Dạng 2 : Phương trình tổng quát

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad (2)$$

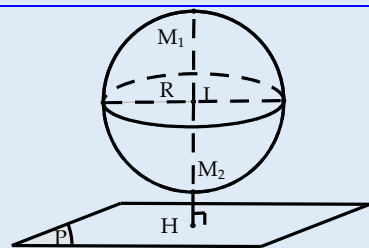
$\Rightarrow$ Điều kiện để phương trình (2) là phương trình mặt cầu: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

- (S) có tâm $I(a; b; c)$.
- (S) có bán kính: $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

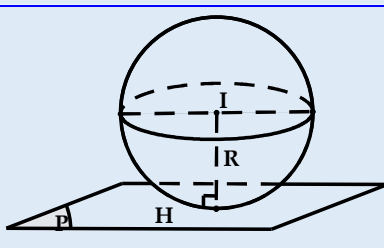
III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẪNG

Cho mặt cầu $S(I; R)$ và mặt phẳng (P) . Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(P) \Rightarrow d = IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) . Khi đó :

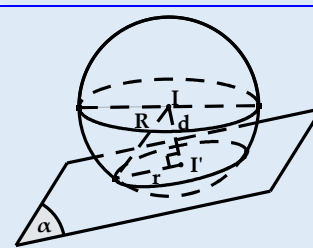
+ Nếu $d > R$: Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.



+ Nếu $d = R$: Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu. Lúc đó: (P) là mặt phẳng tiếp diện của mặt cầu và H là tiếp điểm.

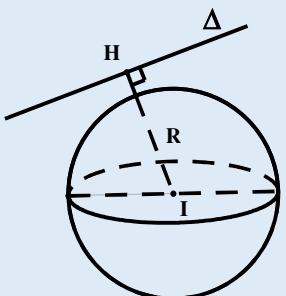
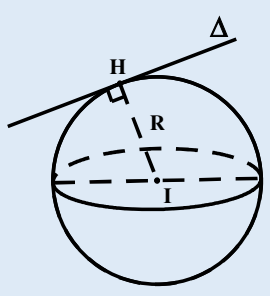
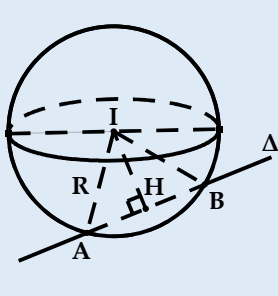


+ Nếu $d < R$: Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm I' và bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.



Lưu ý: Khi mặt phẳng (P) đi qua tâm I thì mặt phẳng (P) được gọi là mặt phẳng kính và thiết diện lúc đó được gọi là đường tròn lớn.

IV. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ ĐƯỜNG THẲNG

Cho mặt cầu $S(I; R)$ và đường thẳng Δ . Gọi H là hình chiếu của I lên Δ . Khi đó :		
+ $IH > R$: Δ không cắt mặt cầu.	+ $IH = R$: Δ tiếp xúc với mặt cầu. Δ là tiếp tuyến của (S) và H là tiếp điểm.	+ $IH < R$: Δ cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.
		

* Lưu ý: Trong trường hợp Δ cắt (S) tại 2 điểm A, B thì bán kính R của (S) được tính như sau:

+ Xác định: $d(I; \Delta) = IH$.

+ Lúc đó: $R = \sqrt{IH^2 + AH^2} = \sqrt{IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2}$

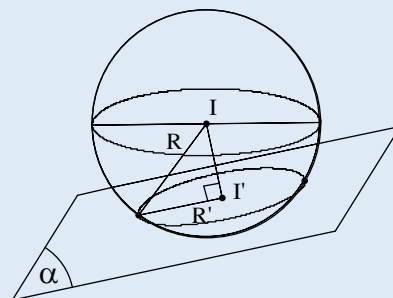
V. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA MẶT CẦU VÀ MẶT PHẪNG

Cho mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ tâm $I(a; b; c)$ bán kính R và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$.

- Nếu $d(I, (P)) > R$ thì mp (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.
- Nếu $d(I, (P)) = R$ thì mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) tiếp xúc nhau. Khi đó (P) gọi là tiếp diện của mặt cầu (S) và điểm chung gọi là tiếp điểm
- Nếu $d(I, (P)) < R$ thì mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn có

phương trình:
$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Trong đó bán kính đường tròn $r = \sqrt{R^2 - d(I, (P))^2}$ và tâm H của đường tròn là hình chiếu của tâm I mặt cầu (S) lên mặt phẳng (P) .



B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

I. TÌM TÂM VÀ BÁN KÍNH MẶT CẦU

1. Kiến thức vận dụng

☛ Phương trình: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ là phương trình mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$, bán kính R

☛ Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ thỏa điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$, là phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

2. Một số bài toán minh họa

Bài toán 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu, nếu là phương trình mặt cầu hãy tìm tâm và bán kính của mặt cầu đó.

a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 5$.

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1 = 0$.

c) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 3y + 21 = 0$.

Lời giải:

a) Phương trình $(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 5$ có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ nên là phương trình mặt cầu có tâm $I(2;-3;0)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$

b) Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1 = 0$ có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d$ với $a=1, b=-2, c=3, d=1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d = 13 > 0$.

Vậy phương trình cho là phương trình mặt cầu có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R = \sqrt{13}$.

c) Phương trình $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 3y + 21 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y + 7 = 0$ có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d$ với $a=1, b=-\frac{1}{2}, c=0, d=7 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d = -\frac{23}{4} < 0$.

Vậy phương trình cho không phải là phương trình mặt cầu.

Bài toán 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm m để mỗi phương trình sau là phương trình mặt cầu.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 2(m+1)y - 4z + 1 = 0$.

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m-3)x - 4mz + 8 = 0$.

Lời giải:

a) Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 2(m+1)y - 4z + 1 = 0$ có dạng

$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d$ với $a=m, b=-(m+1), c=2, d=1$.

ĐK: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 \Leftrightarrow m^2 + (m+1)^2 + 2^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow 2m^2 + 2m + 4 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$.

b) Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(m-3)x - 4mz + 8 = 0$ có dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d \text{ với } a = m-3, b = 0, c = 2m, d = 8.$$

$$\text{ĐK: } a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 \Leftrightarrow (m-3)^2 + (2m)^2 - 8 > 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 6m + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{5} \\ m > 1 \end{cases}$$

Bài toán 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-3)z + m^2 - 1 = 0$ là phương trình của mặt cầu có bán kính nhỏ nhất.

A. $m \in \mathbb{R}$.

B. $m = 0$.

C. $m = 2$.

D. $m = 1$.

Lời giải:

Chọn D.

Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-3)z + m^2 - 1 = 0$ có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \text{ với } a = -(m+2), b = 0, c = m-3, d = m^2 - 1.$$

ĐK để pt cho là pt mặt cầu: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0 \Rightarrow (m+2)^2 + (m-3)^2 - (m^2 - 1) > 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m + 14 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}.$$

Khi đó bán kính mặt cầu là $R = \sqrt{m^2 - 2m + 14} = \sqrt{(m-1)^2 + 13} \geq \sqrt{13}$

Do đó $\min R = \sqrt{13}$ khi $m = 1$.

II. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

1. Phương pháp

Thuật toán 1:

Bước 1: Xác định tâm $I(a; b; c)$.

Bước 2: Xác định bán kính R của (S).

Bước 3: Mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R là: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

Thuật toán 2:

Gọi phương trình (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Phương trình (S) hoàn toàn xác định nếu biết được a, b, c, d . ($a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$)

2. Một số bài toán minh họa

Bài toán 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, viết phương trình mặt cầu trong mỗi trường hợp sau:

a) Có đường kính AB với $A(4; -3; 7)$, $B(2; 1; 3)$.

b) Có tâm $C(3; -3; 1)$ và đi qua điểm $A(5; -2; 1)$.

c) Có tâm thuộc mặt phẳng (Oxy) và đi qua 3 điểm $A(1; 1; 1)$, $B(2; -1; -3)$, $C(-1; 0; 2)$.

d) Có tâm $A(2; 4; -5)$ và tiếp xúc với trục Oz .

Lời giải:

a) Có đường kính AB với $A(4; -3; 7)$, $B(2; 1; 3)$.

☑ Tâm I của mặt cầu là trung điểm của $AB \Rightarrow I(3; -1; 5)$.

☑ Bán kính mặt cầu là $R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(2-4)^2 + (1+3)^2 + (3-7)^2} = 3$.

☑ Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9$.

b) Có tâm $C(3; -3; 1)$ và đi qua điểm $A(5; -2; 1)$.

☑ Tâm của mặt cầu là $C(3; -3; 1)$.

☑ Bán kính mặt cầu là $R = CA = \sqrt{(5-3)^2 + (-2+3)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{5}$.

☑ Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 5$.

c) Có tâm thuộc mặt phẳng (Oxy) và đi qua 3 điểm $A(1; 1; 1)$, $B(2; -1; -3)$, $C(-1; 0; 2)$.

☑ Gọi phương trình mặt cầu dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

☑ Mặt cầu có tâm $I(a; b; c) \in mp(Oxy) \Rightarrow c = 0$ (1).

☑ Mặt cầu qua 3 điểm $A(1; 1; 1)$, $B(2; -1; -3)$, $C(-1; 0; 2)$, suy ra:
$$\begin{cases} 3 - 2a - 2b - 2c + d = 0 \\ 14 - 4a + 2b + 6c + d = 0 \\ 5 + 2a - 4c + d = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta tìm được: $a = \frac{7}{10}$, $b = -\frac{12}{5}$, $c = 0$, $d = -\frac{32}{5}$.

☑ Vậy PTMC là: $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{7}{5}x + \frac{24}{5}z - \frac{32}{5} = 0$.

d) Có tâm $A(2; 4; -5)$ và tiếp xúc với trục Oz .

☑ Tâm mặt cầu là $A(2; 4; -5)$.

☑ Gọi H là hình chiếu của A lên trục $Oz \Rightarrow H(0; 0; -5)$

Bán kính mặt cầu là $R = AH = \sqrt{(0-2)^2 + (0-4)^2 + (-5+5)^2} = \sqrt{20}$

☑ Vậy PTMC là: $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z+5)^2 = 20$.

Bài toán 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 1; 2)$, $B(1; 1; -1)$, $C(-1; 0; 1)$.

Phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm A, B, C và có tâm nằm trên $mp(Oxz)$ là

A. $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{3}{2}x - z - \frac{5}{2} = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}z + \frac{5}{2} = 0$.

$$\text{C. } x^2 + y^2 + z^2 - \frac{3}{2}x + z - \frac{5}{2} = 0.$$

$$\text{D. } x^2 + y^2 + z^2 - \frac{3}{2}y - z - \frac{5}{2} = 0.$$

Lời giải:

Chọn A.

☑ Gọi phương trình mặt cầu dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

☑ Mặt cầu có tâm $I(a; b; c) \in mp(Oxz) \Rightarrow b = 0$ (1).

☑ Mặt cầu qua 3 điểm $A(1; 1; 2), B(1; 1; -1), C(-1; 0; 1)$, suy ra:
$$\begin{cases} 6 - 2a - 2b - 4c + d = 0 \\ 3 - 2a - 2b + 2c + d = 0 \\ 2 + 2a - 2c + d = 0 \end{cases} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta tìm được: $a = \frac{3}{4}, b = 0, c = \frac{1}{2}, d = -\frac{5}{2}$.

☑ Vậy PTMC là: $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{3}{2}x - z - \frac{5}{2} = 0$.

Bài toán 3: Viết phương trình mặt cầu (S) biết:

a) (S) qua bốn điểm $A(1; 2; -4), B(1; -3; 1), C(2; 2; 3), D(1; 0; 4)$.

b) (S) qua $A(0; 8; 0), B(4; 6; 2), C(0; 12; 4)$ và có tâm I thuộc mặt phẳng (Oyz) .

Lời giải:

a) Cách 1: Gọi $I(x; y; z)$ là tâm mặt cầu (S) cần tìm.

$$\text{Theo giả thiết: } \begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \\ IA^2 = ID^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = -1 \\ x + 7z = -2 \\ y - 4z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Do đó: $I(-2; 1; 0)$ và $R = IA = \sqrt{26}$. Vậy (S): $(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 26$.

Cách 2: Gọi phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, ($a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$).

$$\text{Do } A(1; 2; -4) \in (S) \Leftrightarrow -2a - 4b + 8c + d = -21 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } B(1; -3; 1) \in (S) \Leftrightarrow -2a + 6b - 2c + d = -11 \quad (2)$$

$$C(2; 2; 3) \in (S) \Leftrightarrow -4a - 4b - 6c + d = -17 \quad (3)$$

$$D(1; 0; 4) \in (S) \Leftrightarrow -2a - 8c + d = -17 \quad (4)$$

Giải hệ (1), (2), (3), (4) ta có a, b, c, d , suy ra phương trình mặt cầu (S):

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 26.$$

b) Do tâm I của mặt cầu nằm trên mặt phẳng $(Oyz) \Rightarrow I(0; b; c)$.

$$\text{Ta có: } IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ c = 5 \end{cases}.$$

Vậy $I(0; 7; 5)$ và $R = \sqrt{26}$. Vậy (S): $x^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 26$.

Bài toán 4: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases}$ và (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + 2z + 3 = 0$ và $(\beta): x + 2y + 2z + 7 = 0$.

Lời giải:

Gọi $I(t; -1; -t) \in \Delta$ là tâm mặt cầu (S) cần tìm.

Theo giả thiết: $d(I, (\alpha)) = d(I, (\beta)) \Leftrightarrow \frac{|1-t|}{3} = \frac{|5-t|}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-t = 5-t \\ 1-t = t-5 \end{cases} \Rightarrow t = 3$.

Suy ra: $I(3; -1; -3)$ và $R = d(I, (\alpha)) = \frac{2}{3}$. Vậy (S): $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}$.

Bài toán 5: Lập phương trình mặt cầu (S) qua 2 điểm $A(2; 6; 0)$, $B(4; 0; 8)$ và có tâm thuộc d:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+5}{1}.$$

Lời giải:

Ta có $d: \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2t \\ z = -5+t \end{cases}$. Gọi $I(1-t; 2t; -5+t) \in d$ là tâm của mặt cầu (S) cần tìm.

Ta có: $\overline{IA} = (1+t; 6-2t; 5-t)$, $\overline{IB} = (3+t; -2t; 13-t)$.

Theo giả thiết, do (S) đi qua A, B $\Leftrightarrow AI = BI$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1+t)^2 + (6-2t)^2 + (5-t)^2} = \sqrt{(3+t)^2 + 4t^2 + (13-t)^2}$$

$$\Leftrightarrow 62 - 32t = 178 - 20t \Leftrightarrow 12t = -116 \Leftrightarrow t = -\frac{29}{3}$$

$$\Rightarrow I\left(\frac{32}{3}; -\frac{58}{3}; -\frac{44}{3}\right) \text{ và } R = IA = 2\sqrt{233}.$$

$$\text{Vậy (S): } \left(x - \frac{32}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{58}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{44}{3}\right)^2 = 932.$$

Bài toán 6: Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(2; 3; -1)$ và cắt đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{1}$ tại hai điểm A, B với $AB = 16$.

Lời giải:

Chọn $M(-1; 1; 0) \in \Delta \Rightarrow \overline{IM} = (-3; -2; 1)$.

Đường thẳng Δ có một vector chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = (1; -4; 1)$.

$$\text{Ta có: } [\overline{IM}, \vec{u}_\Delta] = (2; 4; 14) \Rightarrow d(I, \Delta) = \frac{[\overline{IM}, \vec{u}_\Delta]}{|\vec{u}_\Delta|} = 2\sqrt{3}.$$

Gọi R là bán kính mặt cầu (S) . Theo giả thiết: $R = \sqrt{\left[d(I, \Delta)\right]^2 + \frac{AB^2}{4}} = 2\sqrt{19}$.

Vậy $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 76$.

Bài toán 7: Cho hai mặt phẳng $(P): 5x - 4y + z - 6 = 0$, $(Q): 2x - y + z + 7 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{7} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-2}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I là giao điểm của (P) và Δ sao cho (Q) cắt (S) theo một hình tròn có diện tích là 20π .

Lời giải:

Ta có $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$. Tọa độ I là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x = 1 + 7t & (1) \\ y = 3t & (2) \\ z = 1 - 2t & (3) \\ 5x - 4y + z - 6 = 0 & (4) \end{cases}$

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta có: $5(1+7t) - 4(3t) + (1-2t) - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow I(1; 0; 1)$.

Ta có: $d(I, (Q)) = \frac{5\sqrt{6}}{3}$.

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến của (S) và mặt phẳng (Q) . Ta có: $20\pi = \pi r^2 \Leftrightarrow r = 2\sqrt{5}$.
 R là bán kính mặt cầu (S) cần tìm.

Theo giả thiết: $R = \sqrt{\left[d(I, (Q))\right]^2 + r^2} = \frac{\sqrt{330}}{3}$. Vậy $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = \frac{110}{3}$.

Bài toán 8: Cho mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 2 = 0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -t \\ y = 2t - 1 \\ z = t + 2 \end{cases}$.

Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc d và I cách (P) một khoảng bằng 2 và (S) cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 3.

Lời giải:

Gọi $I(-t; 2t-1; t+2) \in d$: là tâm của mặt cầu (S) và R là bán kính của (S) .

Theo giả thiết: $R = \sqrt{\left[d(I; (P))\right]^2 + r^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

Mặt khác: $d(I; (P)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|-2t - 2t + 1 - 2t - 4 - 2|}{\sqrt{4+1+4}} = 2 \Leftrightarrow |6t+5| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{6} \\ t = -\frac{11}{6} \end{cases}$

* Với $t = \frac{1}{6}$: Tâm $I_1\left(-\frac{1}{6}; -\frac{2}{3}; \frac{13}{6}\right)$, suy ra $(S_1): \left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{13}{6}\right)^2 = 13$.

* Với $t = -\frac{11}{6}$: Tâm $I_2\left(\frac{11}{6}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{6}\right)$, suy ra $(S_2): \left(x - \frac{11}{6}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{6}\right)^2 = 13$.

Bài toán 9: Cho điểm $I(1;0;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I và cắt d tại hai điểm A, B sao cho ΔIAB vuông tại I.

Lời giải:

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;1;2)$ và $P(1;-1;1) \in d$.

Ta có: $\vec{IP} = (0;-1;-2) \Rightarrow [\vec{u}, \vec{IP}] = (0;-4;-2)$. Suy ra: $d(I;d) = \frac{|\vec{u}, \vec{IP}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{20}}{3}$.

Gọi R là bán kính của (S). Theo giả thiết, ΔIAB vuông tại I

$$\Rightarrow \frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IB^2} = \frac{2}{R^2} \Leftrightarrow R = \sqrt{2}IH = \sqrt{2}d(I,d) = \frac{\sqrt{40}}{3}$$

$$\text{Vậy (S): } (x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{40}{9}.$$

Bài toán 10: (Khối A- 2011) Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$ và điểm $A(4;4;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB), biết điểm B thuộc (S) và tam giác OAB đều.

Lời giải:

(S) có tâm $I(2;2;2)$, bán kính $R = 2\sqrt{3}$. Nhận xét: điểm O và A cùng thuộc (S).

Tam giác OAB đều, có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R' = \frac{OA}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

$$\text{Khoảng cách: } d(I;(P)) = \sqrt{R^2 - (R')^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Mặt phẳng (P) đi qua O có phương trình dạng: $ax + by + cz = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 > 0$) (*)

Do (P) đi qua A, suy ra: $4a + 4b = 0 \Leftrightarrow b = -a$.

$$\text{Lúc đó: } d(I;(P)) = \frac{|2(a+b+c)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|2c|}{\sqrt{2a^2+c^2}} \Rightarrow \frac{|2c|}{\sqrt{2a^2+c^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 2a^2 + c^2 = 3c^2 \Rightarrow \begin{cases} c = a \\ c = -1 \end{cases}. \text{ Theo (*), suy ra (P): } x - y + z = 0 \text{ hoặc } x - y - z = 0.$$

Chú ý: Kỹ năng xác định tâm và bán kính của đường tròn trong không gian.

Cho mặt cầu (S) tâm I bán kính R. Mặt phẳng (P) cắt (S) theo một đường tròn (C).

Bước 1: Lập phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với mặt phẳng (P).

Bước 2: Tâm I' của đường tròn (C) là giao điểm của d và mặt phẳng (P).

Bước 3: Gọi r là bán kính của (C): $r = \sqrt{R^2 - [d(I;(P))]^2}$

Bài toán 11: Chứng minh rằng: Mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0$ cắt mặt phẳng (P): $x - 2 = 0$ theo giao tuyến là một đường tròn (C). Xác định tâm và bán kính của (C).

Lời giải:

* Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;0)$ và bán kính $R=2$.

Ta có: $d(I,(P))=1<2=R \Leftrightarrow$ mặt phẳng (P) cắt (S) theo giao tuyến là 1 đường tròn. (đ.p.c.m)

* Đường thẳng d qua $I(1;0;0)$ và vuông góc với (P) nên nhận $\vec{n}_p=(1;0;0)$ làm 1 vectơ chỉ

phương, có phương trình $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$.

+ Tọa độ tâm I' đường tròn là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow I'(2;0;0)$.

+ Ta có: $d(I,(P))=1$. Gọi r là bán kính của (C), ta có: $r=\sqrt{R^2-[d(I,(P))]^2}=\sqrt{3}$.

II. SỰ TƯƠNG GIAO VÀ SỰ TIẾP XÚC

1. Phương pháp

Các điều kiện tiếp xúc:

+ Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của (S) $\Leftrightarrow d(I;\Delta)=R$.

+ Mặt phẳng (α) là tiếp diện của (S) $\Leftrightarrow d(I;(\alpha))=R$.

* Lưu ý các dạng toán liên quan như tìm tiếp điểm, tương giao.

2. Một số bài toán minh họa

Bài toán 1: Cho đường thẳng (Δ): $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$ và mặt cầu (S):

$x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$. Số điểm chung của (Δ) và (S) là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Lời giải:

Đường thẳng (Δ) đi qua $M(0;1;2)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;-1)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R=2$.

Ta có $\vec{MI}=(1;-1;-4)$ và $[\vec{u},\vec{MI}]=(-5;7;-3) \Rightarrow d(I,\Delta)=\frac{[\vec{u},\vec{MI}]}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{498}}{6}$

Vì $d(I,\Delta)>R$ nên (Δ) không cắt mặt cầu (S).

Lựa chọn đáp án A.

Bài toán 2: Cho điểm $I(1; -2; 3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục Oy là:

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{10}$.

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10$.

C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 10$.

D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

Lời giải:

Gọi M là hình chiếu của $I(1; -2; 3)$ lên Oy , ta có : $M(0; -2; 0)$.

$\overline{IM} = (-1; 0; -3) \Rightarrow R = d(I, Oy) = IM = \sqrt{10}$ là bán kính mặt cầu cần tìm.

Phương trình mặt cầu là : $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10$.

Lựa chọn đáp án B.

Bài toán 3: Cho điểm $I(1; -2; 3)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$. Phương trình mặt cầu tâm I , tiếp xúc với d là:

A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 50$.

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 5\sqrt{2}$.

C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 5\sqrt{2}$.

D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 50$.

Lời giải:

Đường thẳng (d) đi qua $I(-1; 2; -3)$ và có VTCP $\vec{u} = (2; 1; -1) \Rightarrow d(A, d) = \frac{[\vec{u}, \overline{AM}]}{|\vec{u}|} = 5\sqrt{2}$

Phương trình mặt cầu là : $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 50$.

Lựa chọn đáp án D.

Bài toán 4: Mặt cầu (S) tâm $I(2; 3; -1)$ cắt đường thẳng $d: \frac{x-11}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+25}{-2}$ tại 2 điểm A, B sao cho $AB = 16$ có phương trình là:

A. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 17$.

B. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 289$.

C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 289$.

D. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 280$.

Lời giải:

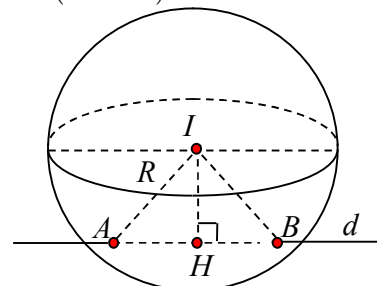
Đường thẳng (d) đi qua $M(11; 0; -25)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; -2)$.

Gọi H là hình chiếu của I trên (d) . Ta có:

$$IH = d(I, AB) = \frac{[\vec{u}, \overline{MI}]}{|\vec{u}|} = 15 \Rightarrow R = \sqrt{IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 17.$$

Vậy $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 289$.

Lựa chọn đáp án C.



Bài toán 5: Cho đường thẳng $d: \frac{x+5}{2} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z}{1}$ và điểm $I(4;1;6)$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) có tâm I , tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6$. Phương trình của mặt cầu (S) là:

A. $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 18.$

B. $(x+4)^2 + (y+1)^2 + (z+6)^2 = 18.$

C. $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 9.$

D. $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 16.$

Lời giải:

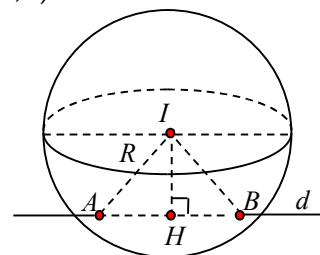
Đường thẳng d đi qua $M(-5;7;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -2; 1)$.

Gọi H là hình chiếu của I trên (d) . Ta có :

$$IH = d(I, AB) = \frac{|\vec{u}, \vec{MI}|}{|\vec{u}|} = 3 \Rightarrow R = \sqrt{IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 18$$

Vậy $(S): (x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 18.$

Lựa chọn đáp án A.



Bài toán 6: Cho điểm $I(1;0;0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB đều là:

A. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{20}{3}.$

B. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{20}{3}.$

C. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{16}{4}.$

D. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{5}{3}.$

Lời giải:

Đường thẳng (Δ) đi qua $M = (1;1;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;2;1)$

Ta có $\vec{MI} = (0;-1;2)$ và $[\vec{u}, \vec{MI}] = (5;-2;-1)$

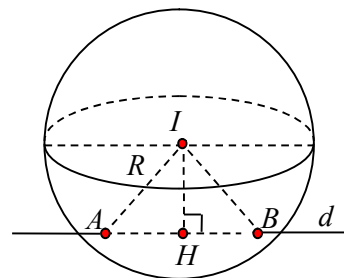
Gọi H là hình chiếu của I trên (d) . Ta có :

$$IH = d(I, AB) = \frac{|\vec{u}, \vec{MI}|}{|\vec{u}|} = \sqrt{5}.$$

Xét tam giác IAB , có $IH = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = \frac{2IH}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{20}{3}.$

Lựa chọn đáp án A.



Bài toán 7: Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z + 5 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của mặt cầu (S) qua $A(0;0;5)$ biết:

a) Tiếp tuyến có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;2;2)$.

b) Vuông góc với mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 2z + 3 = 0$.

Lời giải:

a) Đường thẳng d qua $A(0;0;5)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;2;2)$, có phương trình d :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 5 + 2t \end{cases}.$$

b) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_p = (3;-2;2)$.

Đường thẳng d qua $A(0;0;5)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) nên có một vectơ chỉ phương

$$\vec{n}_p = (3;-2;2), \text{ có phương trình } d: \begin{cases} x = 3t \\ y = -2t \\ z = 2t + 5 \end{cases}.$$

Bài toán 8: Cho $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y + 2z + 3 = 0$ và hai đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{2}; \quad \Delta_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}.$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với Δ_1 và Δ_2 đồng thời tiếp xúc với (S) .

Lời giải:

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;3;-1)$, $R = 4$.

Ta có: Δ_1 có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (3;2;2)$.

Δ_2 có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (2;2;1)$.

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp của mặt phẳng (P) .

$$\text{Do: } \begin{cases} (P) // \Delta_1 \\ (P) // \Delta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{u}_1 \\ \vec{n} \perp \vec{u}_2 \end{cases} \Rightarrow \text{chọn } \vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-2;-1;2)$$

Lúc đó, mặt phẳng (P) có dạng: $-2x - y + 2z + m = 0$.

$$\text{Để mặt phẳng } (P) \text{ tiếp xúc với } (S) \Leftrightarrow d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|5+m|}{3} = 4 \Leftrightarrow |5+m| = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 7 \\ m = -17 \end{cases}.$$

Kết luận: Vậy tồn tại 2 mặt phẳng là: $-2x - y + 2z + 7 = 0$, $-2x - y + 2z - 17 = 0$.

Bài toán 9: Viết phương trình tiếp diện của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 5 = 0$, biết tiếp diện:

a) qua $M(1;1;1)$.

b) song song với mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 1 = 0$.

b) vuông góc với đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$.

Lời giải:

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;3)$, bán kính $R = 3$.

a) Để ý rằng, $M \in (S)$. Tiếp diện tại M có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IM} = (2; -1; -2)$, có phương trình

$$(\alpha): 2(x-1) - (y-1) - 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 2z + 1 = 0.$$

b) Do mặt phẳng $(\alpha) // (P)$ nên (α) có dạng: $x + 2y - 2z + m = 0$.

$$\text{Do } (\alpha) \text{ tiếp xúc với } (S) \Leftrightarrow d(I, (\alpha)) = R \Leftrightarrow \frac{|m-3|}{3} = 3 \Leftrightarrow |m-3| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m = 12 \end{cases}.$$

* Với $m = -6$ suy ra mặt phẳng có phương trình: $x + 2y - 2z - 6 = 0$.

* Với $m = 12$ suy ra mặt phẳng có phương trình: $x + 2y - 2z + 12 = 0$.

c) Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d = (2; 1; -2)$.

Do mặt phẳng $(\alpha) \perp d$ nên (α) nhận $\vec{u}_d = (2; 1; -2)$ làm một vectơ pháp tuyến.

Suy ra mặt phẳng (α) có dạng: $2x + y - 2z + m = 0$.

$$\text{Do } (\alpha) \text{ tiếp xúc với } (S) \Leftrightarrow d(I, (\alpha)) = R \Leftrightarrow \frac{|m-6|}{3} = 3 \Leftrightarrow |m-6| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = 15 \end{cases}.$$

* Với $m = -3$ suy ra mặt phẳng có phương trình: $x + 2y - 2z - 3 = 0$.

* Với $m = 15$ suy ra mặt phẳng có phương trình: $x + 2y - 2z + 15 = 0$.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I. ĐỀ BÀI

Câu 1. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu ?

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$.

B. $x^2 + y^2 - z^2 + 2x - y + 1 = 0$.

C. $2x^2 + 2y^2 = (x+y)^2 - z^2 + 2x - 1$.

D. $(x+y)^2 = 2xy - z^2 - 1$.

Câu 2. Phương trình nào sau đây **không phải** là phương trình mặt cầu ?

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$.

B. $2x^2 + 2y^2 = (x+y)^2 - z^2 + 2x - 1$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 1 = 0$.

D. $(x+y)^2 = 2xy - z^2 + 1 - 4x$.

Câu 3. Phương trình nào sau đây **không phải** là phương trình mặt cầu ?

A. $(x-1)^2 + (2y-1)^2 + (z-1)^2 = 6$.

B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 6$.

C. $(2x-1)^2 + (2y-1)^2 + (2z+1)^2 = 6$.

D. $(x+y)^2 = 2xy - z^2 + 3 - 6x$.

Câu 4. Cho các phương trình sau: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$; $x^2 + (2y-1)^2 + z^2 = 4$;

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0; (2x+1)^2 + (2y-1)^2 + 4z^2 = 16.$$

Số phương trình là phương trình mặt cầu là:

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Câu 5. Mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 9$ có tâm là:

A. $I(1; -2; 0)$.

B. $I(-1; 2; 0)$.

C. $I(1; 2; 0)$.

D. $I(-1; -2; 0)$.

Câu 6. Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$ có tâm là:

A. $I(8; -2; 0)$.

B. $I(-4; 1; 0)$.

C. $I(-8; 2; 0)$.

D. $I(4; -1; 0)$.

Câu 7. Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 1 = 0$ có tọa độ tâm và bán kính R là:

A. $I(2; 0; 0), R = \sqrt{3}$.

B. $I(2; 0; 0), R = 3$.

C. $I(0; 2; 0), R = \sqrt{3}$.

D. $I(-2; 0; 0), R = \sqrt{3}$.

Câu 8. Phương trình mặt cầu có tâm $I(-1; 2; -3)$, bán kính $R = 3$ là:

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 3$.

C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$.

D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$.

Câu 9. Mặt cầu $(S): (x+y)^2 = 2xy - z^2 + 1 - 4x$ có tâm là:

A. $I(-2; 0; 0)$.

B. $I(4; 0; 0)$.

C. $I(-4; 0; 0)$.

D. $I(2; 0; 0)$.

Câu 10. Đường kính của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$ bằng:

A. 4.

B. 2.

C. 8.

D. 16.

Câu 11. Mặt cầu có phương trình nào sau đây có tâm là $I(-1; 1; 0)$?

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 1 = 0$.

C. $2x^2 + 2y^2 = (x + y)^2 - z^2 + 2x - 1 - 2xy$.

D. $(x + y)^2 = 2xy - z^2 + 1 - 4x$.

Câu 12. Mặt cầu (S) : $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 12y + 2 = 0$ có bán kính bằng:

A. $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

B. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{21}}{3}$.

D. $\sqrt{\frac{13}{3}}$.

Câu 13. Gọi I là tâm mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$. Độ dài $|OI|$ (O là gốc tọa độ) bằng:

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. $\sqrt{2}$.

Câu 14. Phương trình mặt cầu có bán kính bằng 3 và tâm là giao điểm của ba trục tọa độ?

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 6y = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$.

Câu 15. Mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 10y + 3z + 1 = 0$ đi qua điểm có tọa độ nào sau đây?

A. $(2; 1; 9)$.

B. $(3; -2; -4)$.

C. $(4; -1; 0)$.

D. $(-1; 3; -1)$.

Câu 16. Mặt cầu tâm $I(-1; 2; -3)$ và đi qua điểm $A(2; 0; 0)$ có phương trình:

A. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 22$.

B. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 11$.

C. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 22$.

D. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 22$.

Câu 17. Cho hai điểm $A(1; 0; -3)$ và $B(3; 2; 1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là:

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y + z - 6 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z + 6 = 0$.

Câu 18. Nếu mặt cầu (S) đi qua bốn điểm $M(2; 2; 2)$, $N(4; 0; 2)$, $P(4; 2; 0)$ và $Q(4; 2; 2)$ thì tâm I của (S) có tọa độ là:

A. $(-1; -1; 0)$.

B. $(3; 1; 1)$.

C. $(1; 1; 1)$.

D. $(1; 2; 1)$.

Câu 19. Bán kính mặt cầu đi qua bốn điểm $M(1; 0; 1)$, $N(1; 0; 0)$, $P(2; 1; 0)$ và $Q(1; 1; 1)$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. 1.

D. $\frac{3}{2}$.

Câu 20. Cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ và 4 điểm $M(1; 2; 0)$, $N(0; 1; 0)$, $P(1; 1; 1)$, $Q(1; -1; 2)$. Trong bốn điểm đó, có bao nhiêu điểm **không** nằm trên mặt cầu (S) ?

A. 2 điểm.

B. 4 điểm.

C. 1 điểm.

D. 3 điểm.

Câu 21. Mặt cầu (S) tâm $I(-1; 2; -3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P) : $x + 2y + 2z + 1 = 0$ có phương trình:

A. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = \frac{4}{9}$.

B. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = \frac{4}{9}$.

C. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = \frac{4}{3}$.

D. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = \frac{16}{3}$.

Câu 22. Phương trình mặt cầu nào dưới đây có tâm $I(2;1;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x+2y+2z+2=0$?

A. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=16$.

B. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$.

C. $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$.

D. $(x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=9$.

Câu 23. Mặt cầu (S) tâm $I(3;-3;1)$ và đi qua $A(5;-2;1)$ có phương trình:

A. $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=5$.

B. $(x-5)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=5$.

C. $(x-3)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=\sqrt{5}$.

D. $(x-5)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=\sqrt{5}$.

Câu 24. Phương trình mặt cầu có đường kính AB với $A(1;3;2)$, $B(3;5;0)$ là:

A. $(x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=3$.

B. $(x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=2$.

C. $(x+2)^2+(y+4)^2+(z+1)^2=2$.

D. $(x+2)^2+(y+4)^2+(z+1)^2=3$.

Câu 25. Cho $I(1;2;4)$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y+z-1=0$. Mặt cầu tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) , có phương trình là:

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=4$.

B. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z+4)^2=1$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=4$.

D. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=3$.

Câu 26. Cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ và điểm $A(5;4;-2)$. Phương trình mặt cầu đi qua điểm A và có tâm là giao điểm của d với mặt phẳng (Oxy) là:

A. $(S): (x-1)^2+(y+2)^2+z^2=64$.

B. $(S): (x+1)^2+(y-1)^2+z^2=9$.

C. $(S): (x+1)^2+(y+1)^2+z^2=65$.

D. $(S): (x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=65$.

Câu 27. Cho ba điểm $A(6;-2;3)$, $B(0;1;6)$, $C(2;0;-1)$, $D(4;1;0)$. Khi đó mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có phương trình là:

A. $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z-3=0$.

B. $x^2+y^2+z^2+4x-2y+6z-3=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-2x+y-3z-3=0$.

D. $x^2+y^2+z^2+2x-y+3z-3=0$.

Câu 28. Cho ba điểm $A(2;0;1)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-2=0$. Phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P) là:

A. $x^2+y^2+z^2-x+2z+1=0$.

B. $x^2+y^2+z^2-x-2y+1=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-2x+2y+1=0$.

D. $x^2+y^2+z^2-2x-2z+1=0$.

Câu 29. Phương trình mặt cầu tâm $I(1;-2;3)$ và tiếp xúc với trục Oy là:

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.

B. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$.

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=8$.

D. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=10$.

Câu 30. Cho các điểm $A(-2;4;1)$, $B(2;0;3)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$. Gọi (S) là mặt cầu đi

qua A, B và có tâm thuộc đường thẳng d . Bán kính mặt cầu (S) bằng:

- A. $3\sqrt{3}$. B. $\sqrt{6}$. C. 3. D. $2\sqrt{3}$.

Câu 31. Cho điểm $A(1;-2;3)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$. Phương trình mặt cầu tâm A , tiếp xúc với d là:

- A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{50}$. B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 5$.
C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 50$. D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 50$.

Câu 32. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 2 = 0$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng d có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với (P) và đi qua điểm $A(1;-1;1)$ là:

- A. $(x+2)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 1$. B. $(x-4)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.
C. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$. D. $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

Câu 33. Phương trình mặt cầu có tâm $I(1;2;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) là:

- A. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z - 10 = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 10 = 0$.
C. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 10 = 0$. D. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z - 10 = 0$.

Câu 34. Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu tâm $I(1;-3;2)$ tại điểm $M(7;-1;5)$ có phương trình là:

- A. $6x + 2y + 3z + 55 = 0$. B. $3x + y + z - 22 = 0$.
C. $6x + 2y + 3z - 55 = 0$. D. $3x + y + z + 22 = 0$.

Câu 35. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x + 3y - 12z + 10 = 0$. Mặt phẳng tiếp xúc với (S) và song song với (α) có phương trình là:

- A. $4x + 3y - 12z + 78 = 0$.
B. $4x + 3y - 12z - 78 = 0$ hoặc $4x + 3y - 12z + 26 = 0$.
C. $4x + 3y - 12z - 26 = 0$.
D. $4x + 3y - 12z + 78 = 0$ hoặc $4x + 3y - 12z - 26 = 0$.

Câu 36. Cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 14$. Mặt cầu (S) cắt trục Oz tại A và B ($z_A < 0$). Phương trình nào sau đây là phương trình tiếp diện của (S) tại B :

- A. $2x - y - 3z + 9 = 0$. B. $2x - y - 3z - 9 = 0$.
C. $x - 2y - z - 3 = 0$. D. $x - 2y + z + 3 = 0$.

Câu 37. Cho 4 điểm $A(3; -2; -2)$, $B(3; 2; 0)$, $C(0; 2; 1)$ và $D(-1; 1; 2)$. Mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCD) có phương trình là:

- A. $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = \sqrt{14}$. B. $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 14$.
 C. $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \sqrt{14}$. D. $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 14$.

Câu 38. Cho mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 2 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc trục Oz , bán kính bằng $\frac{2}{\sqrt{14}}$ và tiếp xúc mặt phẳng (P) có phương trình:

- A. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{2}{7}$ hoặc $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = \frac{2}{7}$.
 B. $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = \frac{2}{7}$ hoặc $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = \frac{2}{7}$.
 C. $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2}{7}$ hoặc $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = \frac{2}{7}$.
 D. $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2}{7}$ hoặc $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = \frac{2}{7}$.

Câu 39. Cho đường thẳng $d: \frac{x+5}{2} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z}{1}$ và điểm $I(4; 1; 6)$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tâm I tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6$. Phương trình của mặt cầu (S) là:

- A. $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 18$. B. $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 12$.
 C. $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 16$. D. $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 9$.

Câu 40. Cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ có phương trình $(P): x - 2y + z - 1 = 0$ và $(Q): 2x + y - z + 3 = 0$. Mặt cầu có tâm nằm trên mặt phẳng (P) và tiếp xúc với mặt phẳng (Q) tại điểm M , biết rằng M thuộc mặt phẳng (Oxy) và có hoành độ $x_M = 1$, có phương trình là:

- A. $(x-21)^2 + (y-5)^2 + (z+10)^2 = 600$. B. $(x+19)^2 + (y+15)^2 + (z-10)^2 = 600$.
 C. $(x-21)^2 + (y-5)^2 + (z+10)^2 = 100$. D. $(x+21)^2 + (y+5)^2 + (z-10)^2 = 600$.

Câu 41. Cho hai điểm $M(1; 0; 4)$, $N(1; 1; 2)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2 = 0$. Mặt phẳng (P) qua M, N và tiếp xúc với mặt cầu (S) có phương trình:

- A. $4x + 2y + z - 8 = 0$ hoặc $4x - 2y - z + 8 = 0$. B. $2x + 2y + z - 6 = 0$ hoặc $2x - 2y - z + 2 = 0$.
 C. $2x + 2y + z - 6 = 0$. D. $2x - 2y - z + 2 = 0$.

Câu 42. Cho hai điểm $A(1; -2; 3)$, $B(-1; 0; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 4 = 0$. Phương trình mặt cầu (S) có bán kính bằng $\frac{AB}{6}$ có tâm thuộc đường thẳng AB và (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) là:

- A. $(x-4)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = \frac{1}{3}$.

B. $(x-4)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = \frac{1}{3}$ hoặc $(x-6)^2 + (y+5)^2 + (z-4)^2 = \frac{1}{3}$.

C. $(x+4)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = \frac{1}{3}$.

D. $(x+4)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = \frac{1}{3}$ hoặc $(x+6)^2 + (y-5)^2 + (z+4)^2 = \frac{1}{3}$.

Câu 43. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$ và hai mặt phẳng $(P_1): x+2y+2z-2=0$; $(P_2): 2x+y+2z-1=0$. Mặt cầu có tâm I nằm trên d và tiếp xúc với 2 mặt phẳng (P_1) , (P_2) , có phương trình:

A. $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 9$.

B. $(S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 9$ hoặc $(S): \left(x + \frac{19}{17}\right)^2 + \left(y + \frac{16}{17}\right)^2 + \left(z + \frac{15}{17}\right)^2 = \frac{9}{289}$.

C. $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

D. $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ hoặc $(S): \left(x + \frac{19}{17}\right)^2 + \left(y - \frac{16}{17}\right)^2 + \left(z - \frac{15}{17}\right)^2 = \frac{9}{289}$.

Câu 44. Cho điểm $A(1;3;2)$, đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z}{-2}$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-6=0$. Phương trình mặt cầu (S) đi qua A , có tâm thuộc d đồng thời tiếp xúc với (P) là:

A. $(S): (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 4$.

B. $(S): (x+1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 16$ hoặc $(S): \left(x - \frac{83}{13}\right)^2 + \left(y + \frac{87}{13}\right)^2 + \left(z + \frac{70}{13}\right)^2 = \frac{13456}{169}$.

C. $(S): (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 16$ hoặc $(S): \left(x + \frac{83}{13}\right)^2 + \left(y - \frac{87}{13}\right)^2 + \left(z - \frac{70}{13}\right)^2 = \frac{13456}{169}$.

D. $(S): (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 16$.

Câu 45. Cho mặt phẳng $(P): x-2y-2z+10=0$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$, $\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{4}$. Mặt cầu (S) có tâm thuộc Δ_1 , tiếp xúc với Δ_2 và mặt phẳng (P) , có phương trình:

A. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$ hoặc $\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$.

B. $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$ hoặc $\left(x + \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$.

C. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$.

D. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 3$.

Câu 46. Cho mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có phương trình lần lượt là $(P): 2x + 2y + z - m^2 + 4m - 5 = 0$; $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 6 = 0$. Giá trị của m để (P) tiếp xúc (S) là:

A. $m = -1$ hoặc $m = 5$.

B. $m = 1$ hoặc $m = -5$.

C. $m = -1$.

D. $m = 5$.

Câu 47. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$ và mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 4 = 0$. Phương trình đường thẳng d tiếp xúc với mặt cầu (S) tại $A(3; -1; 1)$ và song song với mặt phẳng (P) là:

A. $\begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = -1 + 6t \\ z = 1 + t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2 - 6t \\ z = -1 - t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -1 - 6t \\ z = 1 - t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

Câu 48. Cho điểm $A(2; 5; 1)$ và mặt phẳng $(P): 6x + 3y - 2z + 24 = 0$, H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P) . Phương trình mặt cầu (S) có diện tích 784π và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại H , sao cho điểm A nằm trong mặt cầu là:

A. $(x - 8)^2 + (y - 8)^2 + (z + 1)^2 = 196$.

B. $(x + 8)^2 + (y + 8)^2 + (z - 1)^2 = 196$.

C. $(x + 16)^2 + (y + 4)^2 + (z - 7)^2 = 196$.

D. $(x - 16)^2 + (y - 4)^2 + (z + 7)^2 = 196$.

Câu 49. Cho mặt phẳng $(P): 2x + y - z + 5 = 0$ và các điểm $A(0; 0; 4)$, $B(2; 0; 0)$. Phương trình mặt cầu đi qua O , A , B và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là:

A. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 6$.

B. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 2)^2 = 6$.

C. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 6$.

D. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 6$.

Câu 50. Cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 2 = 0$ và điểm $A(2; -3; 0)$. Gọi B là điểm thuộc tia Oy sao cho mặt cầu tâm B , tiếp xúc với mặt phẳng (P) có bán kính bằng 2. Tọa độ điểm B là:

A. $(0; 1; 0)$.

B. $(0; -4; 0)$.

C. $(0; 2; 0)$ hoặc $(0; -4; 0)$.

D. $(0; 2; 0)$.

Câu 51. Cho hai mặt phẳng $(P): 2x + 3y - z + 2 = 0$, $(Q): 2x - y - z + 2 = 0$. Phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm $A(1; -1; 1)$ và có tâm thuộc mặt phẳng (Q) là:

A. $(S): (x + 3)^2 + (y + 7)^2 + (z - 3)^2 = 56$.

B. $(S): (x - 3)^2 + (y - 7)^2 + (z + 3)^2 = 56$.

C. $(S): (x + 3)^2 + (y + 7)^2 + (z - 3)^2 = 14$.

D. $(S): (x - 3)^2 + (y - 7)^2 + (z + 3)^2 = 14$.

Câu 52. Cho điểm $I(0; 0; 3)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A , B sao cho tam giác IAB vuông là:

A. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{3}{2}$.

B. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{8}{3}$.

C. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{2}{3}$.

D. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{4}{3}$.

Câu 53. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1}$ và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 21 = 0$. Số giao điểm của (Δ) và (S) là:

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Câu 54. Cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}$ và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$. Tọa độ giao điểm của (Δ) và (S) là:

A. $A(0;0;2), B(-2;2;-3)$.

B. $A(2;3;2)$.

C. $A(-2;2;-3)$.

D. (Δ) và (S) không cắt nhau.

Câu 55. Cho đường thẳng $(\Delta): \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2 \\ z = -4+7t \end{cases}$ và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 67 = 0$. Giao điểm của (Δ) và (S) là các điểm có tọa độ:

A. (Δ) và (S) không cắt nhau.

B. $A(1;2;5), B(-2;0;4)$.

C. $A(2;-2;5), B(4;0;3)$.

D. $A(1;2;-4), B(2;2;3)$.

Câu 56. Cho điểm $I(1;0;0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho $AB = 4$ là:

A. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 9$.

B. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 3$.

C. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 3$.

D. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Câu 57. Cho điểm $I(1;1;-2)$ đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6$ là:

A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 27$.

B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 27$.

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 24$.

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 54$.

Câu 58. Cho điểm $I(1;0;0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông là:

A. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 12$.

B. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 10$.

C. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 8$.

D. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 16$.

Câu 59. Cho điểm $I(1;0;0)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = -2+t \end{cases}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt

đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB đều là:

A. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{20}{3}$.

B. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{20}{3}$.

C. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{16}{4}$.

D. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{5}{3}$.

Câu 60. Cho các điểm $I(1;1;-2)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1+t \\ y = 3+2t \\ z = 2+t \end{cases}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I

và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông là:

A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 3$.

B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$.

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$.

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 36$.

Câu 61. Cho điểm $I(1;1;-2)$ đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm

I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB đều là:

A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 24$.

B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 24$.

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 18$

D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 18$.

Câu 62. Cho điểm $I(1;1;-2)$ đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm

I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho $\widehat{IAB} = 30^\circ$ là:

A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 72$.

B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 36$.

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 66$.

D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 46$.

Câu 63. Phương trình mặt cầu có tâm $I(3;\sqrt{3};-7)$ và tiếp xúc trục tung là:

A. $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 + (z+7)^2 = 61$.

B. $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 + (z+7)^2 = 58$.

C. $(x+3)^2 + (y+\sqrt{3})^2 + (z-7)^2 = 58$.

D. $(x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 + (z+7)^2 = 12$.

Câu 64. Phương trình mặt cầu có tâm $I(\sqrt{5};3;9)$ và tiếp xúc trục hoành là:

A. $(x+\sqrt{5})^2 + (y+3)^2 + (z+9)^2 = 86$.

B. $(x-\sqrt{5})^2 + (y-3)^2 + (z-9)^2 = 14$.

C. $(x-\sqrt{5})^2 + (y-3)^2 + (z-9)^2 = 90$.

D. $(x+\sqrt{5})^2 + (y+3)^2 + (z+9)^2 = 90$.

Câu 65. Phương trình mặt cầu có tâm $I(-\sqrt{6};-\sqrt{3};\sqrt{2}-1)$ và tiếp xúc trục Oz là:

A. $(x+\sqrt{6})^2 + (y+\sqrt{3})^2 + (z-\sqrt{2}+1)^2 = 9$.

B. $(x+\sqrt{6})^2 + (y+\sqrt{3})^2 + (z-\sqrt{2}-1)^2 = 9$.

C. $(x+\sqrt{6})^2 + (y+\sqrt{3})^2 + (z-\sqrt{2}-1)^2 = 3$. D. $(x+\sqrt{6})^2 + (y+\sqrt{3})^2 + (z-\sqrt{2}+1)^2 = 3$.

Câu 66. Phương trình mặt cầu có tâm $I(4;6;-1)$ và cắt trục Ox tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông là:

A. $(x-4)^2 + (y-6)^2 + (z+1)^2 = 26$. B. $(x-4)^2 + (y-6)^2 + (z+1)^2 = 74$.
C. $(x-4)^2 + (y-6)^2 + (z+1)^2 = 34$. D. $(x-4)^2 + (y-6)^2 + (z+1)^2 = 104$.

Câu 67. Phương trình mặt cầu có tâm $I(\sqrt{3};-\sqrt{3};0)$ và cắt trục Oz tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB đều là:

A. $(x+\sqrt{3})^2 + (y-\sqrt{3})^2 + z^2 = 8$. B. $(x-\sqrt{3})^2 + (y+\sqrt{3})^2 + z^2 = 9$.
C. $(x+\sqrt{3})^2 + (y-\sqrt{3})^2 + z^2 = 9$. D. $(x-\sqrt{3})^2 + (y+\sqrt{3})^2 + z^2 = 8$.

Câu 68. Phương trình mặt cầu có tâm $I(3;6;-4)$ và cắt trục Oz tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác IAB bằng $6\sqrt{5}$ là:

A. $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z+4)^2 = 49$. B. $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z+4)^2 = 45$.
C. $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z+4)^2 = 36$. D. $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z+4)^2 = 54$.

Câu 69. Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;-1)$ và cắt trục Ox tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông. Điểm nào sau đây thuộc mặt cầu (S) :

A. $(2;1;1)$. B. $(2;1;0)$. C. $(2;0;0)$. D. $(1;0;0)$.

Câu 70. Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I(1;-3;0)$ và cắt trục Ox tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB đều. Điểm nào sau đây không thuộc mặt cầu (S) :

A. $(-1;-3;2\sqrt{3})$. B. $(3;-3;2\sqrt{2})$. C. $(3;-3;-2\sqrt{2})$. D. $(2;-1;1)$.

Câu 71. Cho các điểm $I(-1;0;0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc d là:

A. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 5$. B. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 5$.
C. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 10$. D. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 10$.

Câu 72. Cho điểm $I(1;7;5)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z}{3}$. Phương trình mặt cầu có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác diện tích tam giác IAB bằng $2\sqrt{6015}$ là:

A. $(x-1)^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 2018$. B. $(x-1)^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 2017$.
C. $(x-1)^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 2016$. D. $(x-1)^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 2019$.

Câu 73. Cho các điểm $A(1;3;1)$ và $B(3;2;2)$. Mặt cầu đi qua hai điểm A, B và tâm thuộc trục Oz có đường kính là:

- A. $\sqrt{14}$. B. $2\sqrt{14}$. C. $2\sqrt{10}$. D. $2\sqrt{6}$.

Câu 74. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;1)$ và $B(0;1;1)$. Mặt cầu đi qua hai điểm A, B và tâm thuộc trục hoành có đường kính là:

- A. $2\sqrt{6}$. B. $\sqrt{6}$. C. $2\sqrt{5}$. D. 12.

Câu 75. Cho các điểm $A(2;1;-1)$ và $B(1;0;1)$. Mặt cầu đi qua hai điểm A, B và tâm thuộc trục Oy có đường kính là:

- A. $2\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{6}$. C. $4\sqrt{2}$. D. $\sqrt{6}$.

Câu 76. Cho các điểm $A(0;1;3)$ và $B(2;2;1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$. Mặt cầu đi qua hai điểm A, B và tâm thuộc đường thẳng d thì tọa độ tâm là:

- A. $\left(\frac{13}{10}; \frac{17}{10}; \frac{12}{5}\right)$. B. $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 2\right)$. C. $\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$. D. $\left(\frac{6}{5}; \frac{9}{5}; \frac{13}{5}\right)$.

Câu 77. Cho các điểm $A(1;3;0)$ và $B(2;1;1)$ và đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tâm thuộc đường thẳng d thì tọa độ tâm của (S) là:

- A. $(4;5;2)$. B. $(6;6;3)$. C. $(8;7;4)$. D. $(-4;1;-2)$.

Câu 78. Cho các điểm $A(1;1;3)$ và $B(2;2;0)$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tâm thuộc đường thẳng d thì tọa độ tâm (S) là:

- A. $\left(\frac{-11}{6}; \frac{23}{6}; \frac{7}{6}\right)$. B. $\left(\frac{5}{6}; \frac{7}{6}; \frac{23}{6}\right)$. C. $\left(\frac{5}{6}; \frac{7}{6}; \frac{25}{6}\right)$. D. $\left(\frac{1}{6}; \frac{9}{6}; \frac{19}{6}\right)$.

Câu 79. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=t \\ y=-1+3t \\ z=1 \end{cases}$. Phương trình mặt cầu có đường kính là đoạn thẳng vuông góc chung của đường thẳng d và trục Ox là:

- A. $(x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \frac{1}{2}$. B. $(x+1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = \frac{1}{4}$.
C. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}$. D. $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + y^2 + \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Câu 80. Cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=4 \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x=t' \\ y=3-t' \\ z=0 \end{cases}$. Phương trình mặt cầu có đường kính là

đoạn thẳng vuông góc chung của đường thẳng d và d' là:

- A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$. B. $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4$.

C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 2.$

D. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4.$

Câu 81. Cho các điểm $A(-2;4;1)$ và $B(2;0;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$. Gọi (S) là mặt cầu đi qua A, B và có tâm thuộc đường thẳng D . Bán kính mặt cầu (S) bằng:

A. $\frac{\sqrt{1169}}{4}.$

B. $\frac{\sqrt{873}}{4}.$

C. $\frac{1169}{16}.$

D. $\frac{\sqrt{967}}{2}.$

Câu 82. Cho các điểm $A(2;4;-1)$ và $B(0;-2;1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Gọi (S) là mặt cầu

đi qua A, B và có tâm thuộc đường thẳng D . Đường kính mặt cầu (S) bằng:

A. $2\sqrt{19}.$

B. $2\sqrt{17}.$

C. $\sqrt{19}.$

D. $\sqrt{17}.$

Câu 83. Mặt cầu tâm $I(2;4;6)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) có phương trình:

A. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 16.$

B. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 36.$

C. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 4.$

D. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 56.$

Câu 84. Mặt cầu tâm $I(2;4;6)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) có phương trình:

A. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 16.$

B. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 4.$

C. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 36.$

D. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 56.$

Câu 85. Phương trình mặt cầu tâm $I(2;4;6)$ nào sau đây tiếp xúc với trục Ox :

A. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 20.$

B. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 40.$

C. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 52.$

D. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 56.$

Câu 86. Mặt cầu tâm $I(2;4;6)$ tiếp xúc với trục Oz có phương trình:

A. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 20.$

B. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 40.$

C. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 52.$

D. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 56.$

Câu 87. Cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$. Phương trình mặt cầu nào sau đây là phương trình của mặt cầu đối xứng với mặt cầu (S) qua mặt phẳng (Oxy) :

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 9.$

B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9.$

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 9.$

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9.$

Câu 88. Cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$. Phương trình mặt cầu nào sau đây là phương trình mặt cầu đối xứng với mặt cầu (S) qua trục Oz :

A. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 4.$

B. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 4.$

C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4.$

D. $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4.$

Câu 89. Đường tròn giao tuyến của $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$ khi cắt bởi mặt phẳng (Oxy) có chu vi bằng :

A. $\sqrt{7}\pi$.

B. $2\sqrt{7}\pi$.

C. 7π .

D. 14π .

II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1A	2B	3A	4C	5A	6D	7A	8C	9A	10A
11B	12D	13A	14C	15C	16A	17A	18D	19A	20B
21B	22A	23A	24A	25D	26C	27A	28D	29D	30A
31C	32C	33B	34C	35D	36A	37D	38C	39A	40A
41B	42D	43D	44C	45A	46A	47C	48A	49A	50D
51A	52B	53A	54C	55D	56A	57A	58B	59B	60D
61A	62A	63B	64C	65A	66B	67D	68A	69A	70D
71A	72B	73B	74A	75B	76A	77C	78A	79D	80A
81A	82A	83B	84A	85C	86A	87D	88A	89B	

Câu 1. Chọn A.

Phương trình mặt cầu (S) có hai dạng là:

$$(1) (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2;$$

$$(2) x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \text{ với } a^2 + b^2 + c^2 - d > 0.$$

Từ đây ta có dấu hiệu nhận biết nhanh chóng, hoặc thực hiện phép biến đổi đưa phương trình cho trước về một trong hai dạng trên.

Câu 2. Chọn B.

Phương trình mặt cầu (S) có hai dạng là:

$$(1) (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2;$$

$$(2) x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \text{ với } a^2 + b^2 + c^2 - d > 0.$$

Từ đây ta có dấu hiệu nhận biết nhanh chóng, hoặc thực hiện phép biến đổi đưa phương trình cho trước về một trong hai dạng trên.

Ở các đáp án B, C, D đều thỏa mãn điều kiện phương trình mặt cầu. Tuy nhiên ở đáp án A thì phương trình: $2x^2 + 2y^2 = (x+y)^2 - z^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2x + 1 = 0$ không đúng dạng phương trình mặt cầu.

Câu 3. Chọn A.

Phương trình mặt cầu (S) có hai dạng là:

$$(1) (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2;$$

$$(2) x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \text{ với } a^2 + b^2 + c^2 - d > 0.$$

Từ đây ta có dấu hiệu nhận biết nhanh chóng, hoặc thực hiện phép biến đổi đưa phương trình cho trước về một trong hai dạng trên.

Phương trình ở các đáp án B, C, D đều thỏa mãn điều kiện phương trình mặt cầu. Ví dụ:

$$C. (2x-1)^2 + (2y-1)^2 + (2z+1)^2 = 6 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}.$$

$$D. (x+y)^2 = 2xy - z^2 + 3 - 6x \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 3 = 0.$$

Câu 4. Chọn C.

$$\text{Ta có: } (2x+1)^2 + (2y-1)^2 + 4z^2 = 16 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = 4$$

$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ là phương trình của một mặt cầu.

Câu 5. Chọn A.

Phương trình mặt cầu (S) có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ có tâm $I(a;b;c)$, bán kính R.

Câu 6. Chọn D.

Phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$, có tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Câu 7. Chọn A.

Phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$, có tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Câu 8. Chọn C.

Mặt cầu có tâm $I(-1;2;-3)$, bán kính $R=3$ có phương trình: $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$.

Câu 9. Chọn A.

Biến đổi $(x+y)^2 = 2xy - z^2 + 1 - 4x \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 1 = 0$. Vậy mặt cầu có tâm $I(-2;0;0)$.

Câu 10. Chọn A.

Mặt cầu (S) có bán kính $R=2$ suy ra đường kính có độ dài: $2R=4$.

Câu 11. Chọn B.

Phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$, có tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Câu 12. Chọn D.

Biến đổi $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 12y + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + \frac{2}{3} = 0$ có tâm $I(1;-2;0)$,

bán kính $R = \sqrt{\frac{13}{3}}$.

Câu 13. Chọn A.

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;2) \Rightarrow \overline{OI} = (0;0;2) \Rightarrow |\overline{OI}| = 2$.

Câu 14. Chọn C.

Mặt cầu tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=3$ có phương trình: $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Câu 15. Chọn C.

Lần lượt thay tọa độ các điểm vào phương trình mặt cầu. Tọa độ điểm nào thỏa mãn phương trình thì điểm đó thuộc mặt cầu.

Câu 16. Chọn A.

Ta có: $\overline{IA} = (3; -2; 3) \Rightarrow IA = \sqrt{22}$. Vậy $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 22$.

Câu 17. Chọn A.

Ta có $\overline{AB} = (2; 2; 4) \Rightarrow AB = 2\sqrt{6}$. Mặt cầu đường kính AB có tâm I là trung điểm AB nên

$I(2; 1; -1)$, bán kính $R = \frac{AB}{2} = \sqrt{6}$.

Câu 18. Chọn D.

Gọi phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, $(a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$.

Do $M(2; 2; 2) \in (S) \Leftrightarrow -4a - 4b - 4c + d = -12$ (1)

$N(4; 0; 2) \in (S) \Leftrightarrow -8a - 4c + d = -20$ (2)

$P(4; 2; 0) \in (S) \Leftrightarrow -8a - 4b + d = -20$ (3)

$Q(4; 2; 2) \in (S) \Leftrightarrow -8a - 4b - 4c + d = -24$ (4)

Giải hệ (1), (2), (3), (4) ta có $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$, $d = -8$, suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 1)$

Câu 19. Chọn A.

Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$. Do (S) đi qua bốn điểm M, N, P, Q nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -2a - 2c + d = -2 \\ -2a + d = -1 \\ -4a - 2b + d = -5 \\ -2a - 2b - 2c + d = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \\ d = 2 \end{cases} \text{ . Vậy } R = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} - 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 20. Chọn B.

Lần lượt thay tọa độ các điểm M, N, P, Q vào phương trình mặt cầu (S) , ta thấy chỉ có tọa độ điểm Q thỏa mãn.

Câu 21. Chọn B.

Mặt cầu (S) tâm I , tiếp xúc với mặt phẳng $(P) \Leftrightarrow d(I; (P)) = R \Leftrightarrow R = \frac{2}{3}$.

$$\Rightarrow (S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}.$$

Câu 22. Chọn A.

Do mặt cầu $S(I; R)$ tiếp xúc với mặt phẳng $(P) \Leftrightarrow d(I; (P)) = R \Leftrightarrow R = 4$.

$$\Rightarrow (S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 16.$$

Câu 23. Chọn A.

• Bán kính mặt cầu là: $R = IA = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5}$

• Vậy phương trình của mặt cầu là: $(S): (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 5$.

Câu 24. Chọn A.

• Trung điểm của đoạn thẳng AB là $I(2; 4; 1)$, $AB = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{3}$

• Mặt cầu đường kính AB có tâm $I(2; 4; 1)$, bán kính $R = \frac{AB}{2} = \sqrt{3}$

• Vậy phương trình của mặt cầu là: $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 3$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

• Ta có: $2R = AB = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow R = \sqrt{3}$.

$\Rightarrow$ Các đáp án B và C bị loại.

• Với đáp án D thì: $(1+2)^2 + (3+4)^2 + (2+1)^2 = 3 \Leftrightarrow 67 = 3 \Rightarrow A \notin (S)$

$\Rightarrow$ Đáp án D bị loại.

Câu 25. Chọn D.

• Bán kính mặt cầu là: $R = d(I, (\alpha)) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 3$.

• Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 3$.

Câu 26. Chọn C.

• Mặt phẳng (Oxy) có phương trình $z = 0$

• Tâm I là giao điểm của d với mặt phẳng $(Oxy) \Rightarrow I \in d \Rightarrow I(t; 1+2t; -1-t)$

• $I \in (Oxy) \Rightarrow -1-t = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow I(-1; -1; 0) \Rightarrow \overline{IA} = (6; 5; -2)$

• Bán kính mặt cầu là: $R = IA = \sqrt{6^2 + 5^2 + (-2)^2} = \sqrt{65}$

• Vậy phương trình của mặt cầu là $(S): (x+1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 65$.

Lưu ý: Để làm được bài này học sinh phải nhớ được phương trình tổng quát của mặt phẳng (Oxy) và loại ngay được đáp án D

Câu 27. Chọn A.

• Phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2Ax - 2By - 2Cz + D = 0$, ta có:

$$\begin{cases} A(6; -2; 3) \in (S) \\ B(0; 1; 6) \in (S) \\ C(2; 0; -1) \in (S) \\ D(4; 1; 0) \in (S) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 49 - 12A + 4B - 6C + D = 0 \quad (1) \\ 37 - 2B - 12C + D = 0 \quad (2) \\ 5 - 4A + 2C + D = 0 \quad (3) \\ 17 - 8A - 2B + D = 0 \quad (4) \end{cases}$$

- Lấy $(1)-(2); (2)-(3); (3)-(4)$ ta được hệ:

$$\begin{cases} -12A + 6B + 6C = -12 \\ 4A - 2B - 14C = -32 \\ 4A + 2B + 2C = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \\ C = 3 \end{cases} \Rightarrow D = -3$$

- Vậy phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 3 = 0$.

Lưu ý: Ở bài này máy tính Casio giúp chúng ta giải nhanh chóng hệ phương trình bậc nhất ba ẩn được tạo ra để tìm các hệ số của phương trình mặt cầu tổng quát. (Ta cũng có thể dùng máy tính cầm tay thay trực tiếp tọa độ các điểm vào từng đáp án và tìm ra đáp án đúng)

Câu 28. Chọn D.

- Phương mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2Ax - 2By - 2Cz + D = 0$, ta có :

$$\begin{cases} A(2;0;1) \in (S) \\ B(1;0;0) \in (S) \\ C(1;1;1) \in (S) \\ I \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4A - 2C + D = -5 & (1) \\ -2A + D = -1 & (2) \\ -2A - 2B - 2C + D = -3 & (3) \\ A + B + C = 2 & (4) \end{cases}$$

- Lấy $(1)-(2); (2)-(3);$ kết hợp (4) ta được hệ: $\begin{cases} -2A - 2C = -4 \\ 2B + 2C = 2 \\ A + B + C = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 1 \end{cases} \Rightarrow D = 1$.

- Vậy phương trình mặt cầu là: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0$.

Lưu ý: Ở câu này nếu nhanh trí chúng ta có thể sử dụng máy tính cầm tay thay ngay tọa độ tâm của các mặt cầu ở 4 đáp án trên vào **phương trình mặt phẳng (P)** để loại ngay được các đáp án có tọa độ tâm không thuộc mặt phẳng (P)

Câu 29. Chọn D.

- Gọi M là hình chiếu của $I(1;-2;3)$ lên Oy , ta có $M(0;-2;0)$.
- $\overline{IM} = (-1;0;-3) \Rightarrow R = IM = \sqrt{10}$ là bán kính mặt cầu cần tìm.
- Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10$.

Câu 30. Chọn A.

- Tâm $I \in d \Rightarrow I(1+t; 1+2t; -2+t)$.
- $\overline{AI} = (3+t; -3+2t; -3+t); \overline{BI} = (-1+t; 1+2t; -5+t)$
- Vì (S) đi qua A, B nên ta có
 $IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (3+t)^2 + (-3+2t)^2 + (-3+t)^2 = (-1+t)^2 + (1+2t)^2 + (-5+t)^2$
 $\Leftrightarrow 4t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow \overline{IA} = (3; -3; -3)$
- Vậy bán kính mặt cầu (S): $R = IA = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{3}$.

Câu 31. Chọn C.

$$\bullet d(A, d) = \frac{|\overrightarrow{BA}, \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{4+196+100}}{\sqrt{4+1+1}} = 5\sqrt{2}. \text{ Trong đó } B(-1; 2; -3) \in d$$

• Phương trình mặt cầu tâm $A(1; -2; 3)$, bán kính $R = 5\sqrt{2}$ là

$$(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 50.$$

Câu 32. Chọn C.

• Gọi I là tâm của (S) .

$$I \in d \Rightarrow I(1+3t; -1+t; t). \text{ Bán kính } R = IA = \sqrt{11t^2 - 2t + 1}.$$

• Mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I, (P)) = \frac{|5t+3|}{3} = R.$

$$\Leftrightarrow 37t^2 - 24t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 & \Rightarrow R=1 \\ t=\frac{24}{37} & \Rightarrow R=\frac{77}{37} \end{cases}.$$

Vì (S) có bán kính nhỏ nhất nên chọn $t=0, R=1$. Suy ra $I(1; -1; 0)$.

• Vậy phương trình mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1.$

Câu 33. Chọn B.

• Gọi M là hình chiếu của $I(1; 2; 3)$ lên mặt phẳng (Oxz) , ta có: $M(1; 0; 3)$.

• $\overline{IM} = (0; -2; 0) \Rightarrow R = IM = 2$ là bán kính mặt cầu cần tìm.

• Vậy phương trình mặt cầu là $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$

$$\text{Hay } x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 10 = 0.$$

Câu 34. Chọn C.

• Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 2)$

• Vì mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm M nên mặt phẳng (P) qua

$M(7; -1; 5)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \overline{IM} = (6; 2; 3)$

• Vậy phương trình mặt phẳng $(P): 6x + 2y + 3z - 55 = 0.$

Lưu ý: Vì mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm $M(7; -1; 5)$ nên điểm M thuộc mặt phẳng cần tìm hơn nữa khoảng cách từ tâm $I(1; -3; 2)$ đến mặt phẳng cần tìm bằng IM cũng chính là bán kính mặt cầu. Từ các nhận xét đó để tìm ra đáp án của bài này ta có thể làm như sau:

B1: Thay tọa độ M vào các đáp án để loại ra mặt phẳng không chứa M

B2: Tính IM và $d(I; (P))$ và kết luận

Câu 35. Chọn D.

• Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} + 2 = 4$

• Gọi (β) là mặt phẳng tiếp xúc với (S) và song song với $(\alpha).$

• Vì $(\beta) // (\alpha) \Rightarrow (\beta): 4x + 3y - 12z + D = 0 \quad (D \neq 10)$

$$\bullet \text{ Mặt phẳng } (\beta) \text{ tiếp xúc với mặt cầu } (S) \Leftrightarrow d(I, (\beta)) = R \Leftrightarrow \frac{|4.1 + 3.2 - 12.3 + D|}{\sqrt{4^2 + 3^2 + (-12)^2}} = 4$$

$$\Leftrightarrow |D - 26| = 52 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 78 \\ D = -26 \end{cases} \text{ (thỏa điều kiện)}$$

• Vậy phương trình mặt phẳng $(\beta): 4x + 3y - 12z + 78 = 0$ hoặc $(\beta): 4x + 3y - 12z - 26 = 0$.

Lưu ý: Nếu hình dung phác họa hình học bài toán được thì ta có thể dự đoán được có 2 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 36. Chọn A.

• Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; 0)$

• Vì $A \in Oz \Rightarrow A(0; 0; z_A)$ ($z_A < 0$)

$$\bullet A \in (S) \Rightarrow (0 - 2)^2 + (0 + 1)^2 + z_A^2 = 14 \Rightarrow z_A^2 = 9 \Rightarrow z_A = -3$$

Nên mặt cầu (S) cắt trục Oz tại $A(0; 0; -3)$ và $B(0; 0; 3)$

Gọi (α) là tiếp diện của mặt cầu (S) tại B .

• Mặt phẳng (α) qua $B(0; 0; 3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{IB} = (-2; 1; 3)$

• Vậy phương trình mặt phẳng $(\alpha): 2x - y - 3z + 9 = 0$.

Câu 37. Chọn D.

• Mặt phẳng (BCD) đi qua $B(3; 2; 0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = (1; 2; 3)$

$$\Rightarrow (BCD): x + 2y + 3z - 7 = 0$$

• Vì mặt cầu (S) có tâm A tiếp xúc với mặt phẳng (BCD) nên bán kính

$$R = d(A, (BCD)) = \frac{|3 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-2) - 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \sqrt{14}.$$

• Vậy phương trình mặt cầu $(S): (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z + 2)^2 = 14$.

Câu 38. Chọn C.

• Vì tâm $I \in Oz \Rightarrow I(0; 0; z)$

• Mặt cầu (S) có tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P)

$$\Leftrightarrow d(I, (\beta)) = R \Leftrightarrow \frac{|2.0 + 3.0 + 1.z - 2|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\Leftrightarrow |z - 2| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \Rightarrow I(0; 0; 0) \\ z = 4 \Rightarrow I(0; 0; 4) \end{cases}$$

• Vậy phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = \frac{2}{7}$ hoặc $(S): x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = \frac{2}{7}$.

Câu 39. Chọn A.

• $\vec{a} = (2; -2; 1)$ là vectơ chỉ phương của d .

• Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên d là trung điểm của $AB \Rightarrow HA = 3$

$$\bullet \text{ Ta có: } \begin{cases} H \in d \\ \overrightarrow{IH} \cdot \vec{a} = 0 \end{cases}$$

$$H \in d \Rightarrow H(-5+2t; 7-2t; t)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IH} = (2t-9; 6-2t; t-6)$$

$$\bullet \overrightarrow{IH} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow t = 4 \Rightarrow \overrightarrow{IH} = (-1; -2; -2) \Rightarrow IH = 3.$$

Trong $\triangle IAH$ vuông tại H có: $IA^2 = IH^2 + HA^2 = 9 + 9 = 18$

$$\bullet \text{ Vậy } (S): (x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-6)^2 = 18.$$

Câu 40. Chọn A.

$$\bullet \text{ Vì } M \in (Oxy) \text{ và có hoành độ bằng 1 nên } M(1; y; 0).$$

$$\bullet \text{ Lại có, mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng } (Q) \text{ nên } M \in (Q) \Rightarrow M(1; -5; 0).$$

$$\bullet \text{ Gọi } I(a; b; c) \text{ là tâm của mặt cầu } (S) \text{ cần tìm.}$$

Ta có (S) tiếp xúc với mp (Q) tại M nên $IM \perp (Q)$.

Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1; -1)$.

$$\bullet \text{ Ta có: } IM \perp (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = t\vec{n}, \quad (t \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + 2t \\ b = -5 + t \\ c = -t \end{cases}$$

$$I \in (P) \Leftrightarrow 1 + 2t - 2(-5 + t) - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 10 \Rightarrow I(21; 5; -10).$$

$$\text{Bán kính mặt cầu } R = d(I; (Q)) = 10\sqrt{6}.$$

$$\bullet \text{ Vậy phương trình mặt cầu } (S): (x-21)^2 + (y-5)^2 + (z+10)^2 = 600.$$

Câu 41. Chọn B.

$$\bullet \text{ Ta có mặt cầu } (S) \text{ có tâm } I(1; -1; 0) \text{ và bán kính } R = 2, \quad \overrightarrow{MN} = (0; 1; -2)$$

$$\bullet \text{ Gọi } \vec{n} = (A, B, C) \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 > 0 \text{ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng } (P).$$

$$\bullet \text{ Vì } (P) \text{ qua } M, N \text{ nên } \vec{n} \perp \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \Leftrightarrow B - 2C = 0 \quad (1)$$

$\bullet$ Mặt phẳng (P) qua $M(1; 0; 4)$ và nhận $\vec{n} = (A, B, C)$ là vectơ pháp tuyến nên có phương trình

$$A(x-1) + B(y-0) + C(z-4) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + Cz - A - 4C = 0.$$

$$\bullet \text{ Mặt phẳng } (P) \text{ tiếp xúc với } (S) \Leftrightarrow d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|1.A - 1.B + 0.C - A - 4C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 2$$

$$\Leftrightarrow |B + 4C| = 2\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow A^2 - 4C^2 = 0 \quad (*)$$

$$\bullet \text{ Trong } (*), \text{ nếu } C = 0 \text{ thì } A = 0, \text{ và từ (1) suy ra } B = 0 \text{ (vô lí). Do vậy } C \neq 0.$$

$$\text{Chọn } C = 1 \Rightarrow A = \pm 2.$$

Với $A = 2, C = 1$, ta có $B = 2$. Khi đó $(P): 2x + 2y + z - 6 = 0$.

Với $A = -2, C = 1$, ta có $B = 2$. Khi đó $(P): 2x - 2y - z + 2 = 0$.

• Vậy phương trình mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - 6 = 0$ hoặc $(P): 2x - 2y - z + 2 = 0$.

Câu 42. Chọn D.

• Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; -2) = -2(1; -1; 1)$. Bán kính mặt cầu là $R = \frac{AB}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

• Tâm I của mặt cầu thuộc đường thẳng AB nên tọa độ I có dạng $I(1+t; -2-t; 3+t)$

• Ta có: (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P) \Leftrightarrow d(I; (P)) = \frac{AB}{6} \Leftrightarrow \frac{|t+6|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -5 \\ t = -7 \end{cases}$.

• $t = -5 \Rightarrow I(-4; 3; -2)$. Mặt cầu (S) có phương trình là $(x+4)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = \frac{1}{3}$.

• $t = -7 \Rightarrow I(-6; 5; -4)$. Mặt cầu (S) có phương trình là $(x+6)^2 + (y-5)^2 + (z+4)^2 = \frac{1}{3}$.

Câu 43. Chọn D.

• $I \in d \Rightarrow I(2t+1; t+2; 2t+3)$

• Mặt cầu tiếp xúc với 2 mặt phẳng $\Leftrightarrow d(I; (P_1)) = d(I; (P_2))$

$$\Leftrightarrow |8t+9| = |9t+9| \Leftrightarrow \begin{cases} 8t+9 = 9t+9 \\ 8t-9 = -9t-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{-18}{17} \end{cases}$$

• $t = 0 \Rightarrow I(1; 2; 3); R = 3 \Rightarrow (S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

• $t = \frac{-18}{17} \Rightarrow I\left(-\frac{19}{17}; \frac{16}{17}; \frac{15}{17}\right); R = \frac{3}{17} \Rightarrow (S): \left(x + \frac{19}{17}\right)^2 + \left(y - \frac{16}{17}\right)^2 + \left(z - \frac{15}{17}\right)^2 = \frac{9}{289}$.

Câu 44. Chọn C.

• d có phương trình tham số $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4 - t \\ z = -2t \end{cases}$

• Gọi I là tâm mặt cầu (S) , do I thuộc d nên $I(-1+2t; 4-t; -2t)$

Theo đề bài, (S) có bán kính $R = IA = d(I; (P))$.

$$\Rightarrow \sqrt{(2-2t)^2 + (t-1)^2 + (2+2t)^2} = \frac{|2(-1+2t) - 2(4-t) - 2t - 6|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9t^2 - 2t + 9} = \frac{|4t - 16|}{3} \Leftrightarrow 9(9t^2 - 2t + 9) = (4t - 16)^2 \Leftrightarrow 65t^2 + 110t - 175 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{35}{13} \end{cases}$$

• Với $t = 1 \Rightarrow I(1; 3; -2), R = 4 \Rightarrow (S): (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 16$.

• Với $t = -\frac{35}{13} \Rightarrow I\left(-\frac{83}{13}; \frac{87}{13}; \frac{70}{13}\right); R = \frac{116}{13} \Rightarrow (S): \left(x + \frac{83}{13}\right)^2 + \left(y - \frac{87}{13}\right)^2 + \left(z - \frac{70}{13}\right)^2 = \frac{13456}{169}$.

Câu 45. Chọn A.

- $\Delta_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$; Δ_2 đi qua điểm $A(2; 0; -3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}_2 = (1; 1; 4)$.
- Giả sử $I(2 + t; t; 1 - t) \in \Delta_1$ là tâm và R là bán kính của mặt cầu (S) .
- Ta có: $\vec{AI} = (t; t; 4 - t) \Rightarrow [\vec{AI}, \vec{a}_2] = (5t - 4; 4 - 5t; 0) \Rightarrow d(I; \Delta_2) = \frac{|\vec{AI}, \vec{a}_2|}{|\vec{a}_2|} = \frac{|5t - 4|}{3}$
- $d(I, (P)) = \frac{|2 + t - 2t - 2(1 - t) + 10|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{|t + 10|}{3}$.
- (S) tiếp xúc với Δ_2 và $(P) \Leftrightarrow d(I, \Delta_2) = d(I, (P)) \Leftrightarrow |5t - 4| = |t + 10| \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{7}{2} \\ t = -1 \end{cases}$.
- Với $t = \frac{7}{2} \Rightarrow I\left(\frac{11}{2}; \frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right)$, $R = \frac{9}{2} \Rightarrow (S): \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$.
- Với $t = -1 \Rightarrow I(1; -1; 2)$, $R = 3 \Rightarrow (S): (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$.

Câu 46. Chọn A.

- $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 6 = 0$ có tâm $I(1; -1; 1)$ và bán kính $R = 3$.
- (P) tiếp xúc $(S) \Leftrightarrow d(I; (P)) = R$
- $\Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 - m^2 + 4m - 5|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 3 \Leftrightarrow |m^2 - 4m + 4| = 9$
- $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 4 = 9 \\ m^2 - 4m + 4 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 5 \end{cases}$.

Câu 47. Chọn C.

- Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; -1) \Rightarrow \vec{IA} = (2; 1; 2)$
- Đường thẳng d tiếp xúc với mặt cầu (S) tại $\begin{cases} t = \frac{7}{2} \\ t = -1 \end{cases}$ và song song với mặt phẳng (P)
- nên đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{a}_d = [\vec{n}_{(P)}, \vec{IA}] = (4; -6; -1)$
- Vậy phương trình đường thẳng $d: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -1 - 6t \\ z = 1 - t \end{cases}$

Câu 48. Chọn A.

- Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) . Suy ra $d: \begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = 5 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$
- Vì H là hình chiếu vuông góc của A trên (P) nên $H = d \cap (P)$.

Vì $H \in d$ nên $H(2+6t; 5+3t; 1-2t)$.

• Mặt khác, $H \in (P)$ nên ta có: $6(2+6t) + 3(5+3t) - 2(1-2t) + 24 = 0 \Leftrightarrow t = -1$

Do đó, $H(-4; 2; 3)$.

• Gọi I, R lần lượt là tâm và bán kính mặt cầu.

Theo giả thiết diện tích mặt cầu bằng 784π , suy ra $4\pi R^2 = 784\pi \Rightarrow R = 14$.

Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại H nên $IH \perp (P) \Rightarrow I \in d$.

Do đó tọa độ điểm I có dạng $I(2+6t; 5+3t; 1-2t)$, với $t \neq -1$.

• Theo giả thiết, tọa độ điểm I thỏa mãn:

$$\begin{cases} d(I, (P)) = 14 \\ AI < 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{6(2+6t) + 3(5+3t) - 2(1-2t) + 24}{\sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2}} \right| = 14 \\ \sqrt{(6t)^2 + (3t)^2 + (-2t)^2} < 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \\ -2 < t < 2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

Do đó: $I(8; 8; -1)$.

• Vậy phương trình mặt cầu $(S): (x-8)^2 + (y-8)^2 + (z+1)^2 = 196$.

Câu 49. Chọn A.

• Gọi (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R .

• Phương mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

• (S) qua 3 điểm O, A, B , ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} d = 0 \\ -8c + d = -16 \\ -4a + d = -4 \\ \frac{|2a + b - c + 5|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ c = 2 \\ a = 1 \\ (2 + b - 2 + 5)^2 = 6(1^2 + b^2 + 2^2 - 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ c = 2 \\ a = 1 \\ 5b^2 - 10b + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 2 \\ d = 0 \end{cases}$$

• Vậy $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 6$.

Câu 50. Chọn D.

• Vì B thuộc tia Oy nên $B(0; b; 0)$ (với $b > 0$)

• Bán kính của mặt cầu tâm B , tiếp xúc với (P) là $R = d(B, (P)) = \frac{|2b+2|}{3}$.

• Theo giả thiết $R = 2 \Leftrightarrow \frac{|2b+2|}{3} = 2 \Leftrightarrow |2b+2| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 2b+2 = 6 \\ 2b+2 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = -4 \end{cases}$.

Do $b > 0 \Rightarrow b = 2$

• Vậy $B(0; 2; 0)$.

Câu 51. Chọn A.

• Gọi d đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) , ta có: $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$

• Tâm $I \in d \Rightarrow I(1 + 2t; -1 + 3t; 1 - t)$.

$I \in (Q) \Rightarrow 2(1 + 2t) - (-1 + 3t) - (1 - t) + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow I(-3; -7; 3)$

• Bán kính mặt cầu là $R = IA = 2\sqrt{14}$.

• Phương trình mặt cầu $(S): (x + 3)^2 + (y + 7)^2 + (z - 3)^2 = 56$.

Câu 52. Chọn B.

• Gọi $H(-1 + t; 2t; 2 + t) \in d$ là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d

$\Rightarrow \overrightarrow{IH} = (-1 + t; 2t; -1 + t)$

• Ta có vectơ chỉ phương của $d: \vec{a}_d = (1; 2; 1)$ và $IH \perp d$

$\Rightarrow \overrightarrow{IH} \cdot \vec{a}_d = 0 \Leftrightarrow -1 + t + 4t - 1 + t = 0 \Leftrightarrow -2 + 6t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow H\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$

$\Rightarrow IH = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

• Vì tam giác IAB vuông tại I và $IA = IB = R$. Suy ra tam giác IAB vuông cân tại I , do đó bán kính:

$R = IA = AB \cos 45^\circ = 2IH \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}IH = \sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

• Vậy phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = \frac{8}{3}$.

Câu 53. Chọn A.

Đường thẳng (Δ) đi qua $M(-2; 0; 3)$ và có VTCP $\vec{u} = (-1; 1; -1)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -3)$ và bán kính $R=9$

Ta có $\overrightarrow{MI} = (3; 2; -6)$ và $[\vec{u}, \overrightarrow{MI}] = (-4; -9; -5)$

$\Rightarrow d(I; \Delta) = \frac{|\overrightarrow{MI} \cdot [\vec{u}, \overrightarrow{MI}]|}{|[\vec{u}, \overrightarrow{MI}]|} = \frac{\sqrt{366}}{3}$

Vì $d(I, \Delta) < R$ nên (Δ) cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt.

Câu 54. Chọn C.

Tọa độ giao điểm là nghiệm hệ phương trình: $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = -3 + 2t \\ x^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow t = 0 \Rightarrow A(-2; 2; -3).$

Câu 55. Chọn D.

Tọa độ giao điểm là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -4 + 7t \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 67 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow A(1; 2; -4) \\ t = 1 \Rightarrow B(2; 2; 3) \end{cases}$$

Câu 56. Chọn A.

Đường thẳng (d) đi qua $M(1; 1; -2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; 1)$.

Gọi H là hình chiếu của I trên (d) . Ta có: $IH = d(I; AB) = \frac{[\vec{u}, \overrightarrow{MI}]}{|\vec{u}|} = \sqrt{5}$

$$\Rightarrow R^2 = IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 9.$$

Vậy phương trình mặt cầu: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Câu 57. Chọn A.

Đường thẳng (d) đi qua $M(-1; 3; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; 1)$.

Gọi H là hình chiếu của I trên (d) . Ta có: $IH = d(I; AB) = \frac{[\vec{u}, \overrightarrow{MI}]}{|\vec{u}|} = \sqrt{18}$

$$\Rightarrow R^2 = IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 27.$$

Vậy phương trình mặt cầu: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 27$.

Câu 58. Chọn B.

Đường thẳng d đi qua $M(1; 1; -2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; 1)$.

Gọi H là hình chiếu của I trên D . Ta có: $IH = d(I; AB) = \frac{[\vec{u}, \overrightarrow{MI}]}{|\vec{u}|} = \sqrt{5}$

$$\Rightarrow R^2 = IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 10.$$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 10$.

Câu 59. Chọn B.

Đường thẳng Δ đi qua $M(1; 1; -2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; 1)$

Ta có $\overrightarrow{MI} = (0; -1; 2)$ và $[\vec{u}, \overrightarrow{MI}] = (5; -2; -1)$

Gọi H là hình chiếu của I trên D . Ta có: $IH = d(I; AB) = \frac{[\vec{u}, \overrightarrow{MI}]}{|\vec{u}|} = \sqrt{5}.$

$$\text{Xét tam giác } IAB, \text{ có } IH = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = \frac{2IH}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$$

$$\text{Vậy phương trình mặt cầu là: } (x-1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{20}{3}.$$

Câu 60. Chọn D.

Đường thẳng d đi qua $M(-1; 3; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; 1)$.

$$\text{Gọi } H \text{ là hình chiếu của } I \text{ trên } D. \text{ Ta có: } IH = d(I; AB) = \frac{[\vec{u}, \overrightarrow{MI}]}{|\vec{u}|} = \sqrt{18}$$

$$\Rightarrow R^2 = IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 36.$$

$$\text{Vậy phương trình mặt cầu là: } (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 36.$$

Câu 61. Chọn A.

Đường thẳng d đi qua $M(-1; 3; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; 1)$.

$$\text{Gọi } H \text{ là hình chiếu của } I \text{ trên } D. \text{ Ta có: } IH = d(I; AB) = \frac{[\vec{u}, \overrightarrow{MI}]}{|\vec{u}|} = \sqrt{18}.$$

$$\Rightarrow IH = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = \frac{2IH}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}.$$

$$\text{Vậy phương trình mặt cầu là: } (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 24.$$

Câu 62. Chọn A.

Đường thẳng d đi qua $M(-1; 3; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2; 1)$.

$$\text{Gọi } H \text{ là hình chiếu của } I \text{ trên } D. \text{ Ta có: } IH = d(I; AB) = \frac{[\vec{u}, \overrightarrow{MI}]}{|\vec{u}|} = \sqrt{18} \Rightarrow R = IA = 2\sqrt{18}.$$

$$\text{Vậy phương trình mặt cầu là: } (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 72.$$

Câu 63. Chọn B.

$$\text{Gọi } H \text{ là hình chiếu của } I(3; \sqrt{3}; -7) \text{ trên } Oy \Rightarrow H(0; \sqrt{3}; 0) \Rightarrow R = IH = \sqrt{58}$$

$$\text{Vậy phương trình mặt cầu là: } (x-3)^2 + (y-\sqrt{3})^2 + (z+7)^2 = 58.$$

Câu 64. Chọn C.

$$\text{Gọi } H \text{ là hình chiếu của } I(\sqrt{5}; 3; 9) \text{ trên } Ox \Rightarrow H(\sqrt{5}; 0; 0) \Rightarrow R = IH = \sqrt{90}$$

$$\text{Vậy phương trình mặt cầu là: } (x-\sqrt{5})^2 + (y-3)^2 + (z-9)^2 = 90.$$

Câu 65. Chọn A.

$$\text{Gọi } H \text{ là hình chiếu của } I(-\sqrt{6}; -\sqrt{3}; \sqrt{2}-1) \text{ trên } Oz \Rightarrow H(0; 0; \sqrt{2}-1) \Rightarrow R = IH = 3.$$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x + \sqrt{6})^2 + (y + \sqrt{3})^2 + (z - \sqrt{2} + 1)^2 = 9$.

Câu 66. Chọn B.

Gọi H là hình chiếu của $I(4; 6; -1)$ trên $Ox \Rightarrow H(4; 0; 0) \Rightarrow IH = d(I; Ox) = \sqrt{37}$

$$\Rightarrow R^2 = IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 37 + 37 = 74$$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 + (z + 1)^2 = 74$.

Câu 67. Chọn D.

Gọi H là hình chiếu của $I(\sqrt{3}; -\sqrt{3}; 0)$ trên $Oz \Rightarrow H(0; 0; 0) \Rightarrow IH = d(I; Oz) = \sqrt{6}$

$$\Rightarrow IH = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = \frac{2IH}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x - \sqrt{3})^2 + (y + \sqrt{3})^2 + z^2 = 8$.

Câu 68. Chọn A.

Gọi H là hình chiếu của $I(3; 6; -4)$ trên $Oz \Rightarrow H(0; 0; -4) \Rightarrow IH = d(I; Oz) = \sqrt{45}$

$$S_{\Delta AIB} = \frac{IH \cdot AB}{2} \Rightarrow AB = \frac{2S_{\Delta AIB}}{IH} = 4 \Rightarrow R^2 = IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 49$$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 + (z + 4)^2 = 49$.

Câu 69. Chọn A.

Gọi H là hình chiếu của $I(2; 1; -1)$ trên $Ox \Rightarrow H(2; 0; 0) \Rightarrow IH = d(I; Ox) = \sqrt{2}$

$$\Rightarrow R^2 = IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 4$$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 4$

$$\Rightarrow (2; 1; 1) \in (S).$$

Câu 70. Chọn D.

Gọi H là hình chiếu của $I(1; -3; 0)$ trên $Ox \Rightarrow H(1; 0; 0) \Rightarrow IH = d(I; Ox) = 3$

$$\Rightarrow IH = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = \frac{2IH}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 12 \Rightarrow (2; -1; 1) \notin (S)$.

Câu 71. Chọn A.

Đường thẳng d đi qua $I(2; 1; 1)$ và có một vectơ chỉ phương: $\vec{u} = (1; 2; 1)$

$$\Rightarrow d(I; d) = \frac{|\vec{u}, \overrightarrow{MI}|}{|\vec{u}|} = \sqrt{5}. \text{ Phương trình mặt cầu là: } (x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 5.$$

Câu 72. Chọn B.

Gọi H là hình chiếu của $I(1;7;5)$ trên $d \Rightarrow H(0;0;-4) \Rightarrow IH = d(I;d) = 2\sqrt{3}$

$$S_{\Delta AIB} = \frac{IH \cdot AB}{2} \Rightarrow AB = \frac{2S_{\Delta AIB}}{IH} = \sqrt{8020} \Rightarrow R^2 = IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 2017$$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 2017$.

Câu 73. Chọn B.

Gọi $I(0;0;t)$ trên Oz vì $IA = IB \Rightarrow t = 3 \Rightarrow I(0;0;3)$

$\Rightarrow R = IA = \sqrt{14} \Rightarrow$ đường kính là: $2\sqrt{14}$.

Câu 74. Chọn A.

Gọi $I(t;0;0)$ trên Ox . Vì $IA = IB \Rightarrow t = 2 \Rightarrow I(2;0;0)$

$\Rightarrow R = IA = \sqrt{6} \Rightarrow$ đường kính bằng $2\sqrt{6}$.

Câu 75. Chọn B.

Gọi $I(0;t;0)$ trên Oy vì $IA = IB \Rightarrow t = 2 \Rightarrow I(0;2;0)$

$\Rightarrow R = IA = \sqrt{6} \Rightarrow$ đường kính bằng $2\sqrt{6}$.

Câu 76. Chọn A.

Gọi $I(1+t;2-t;3-2t)$ trên d vì $IA = IB \Rightarrow t = \frac{3}{10} \Rightarrow I\left(\frac{13}{10}; \frac{17}{10}; \frac{12}{5}\right)$.

Câu 77. Chọn C.

Gọi $I(2t;3+t;t)$ trên d vì $IA = IB \Rightarrow t = 4 \Rightarrow I(8;7;4)$.

Câu 78. Chọn A.

Gọi $I(t;2-t;3+t)$ trên d vì $IA = IB \Rightarrow t = -\frac{11}{6} \Rightarrow I\left(-\frac{11}{6}; \frac{23}{6}; \frac{7}{6}\right)$.

Câu 79. Chọn D.

Gọi $A(t;-1+3t;1) \in d; B(t';0;0) \in Ox \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (t'-t;1-3t;-1), \overrightarrow{u_d} = (1;3;0), \vec{i} = (1;0;0)$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{i} = 0 \end{cases} \Rightarrow t = t' = \frac{1}{3} \text{ và } R = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Câu 80. Chọn A.

Gọi $A(2t;t;4) \in d; B(t';3-t';0) \in d' \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (t'-2t;3-t'-t;-4), \overrightarrow{u_d} = (2;1;0), \overrightarrow{u_{d'}} = (1;-1;0)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u_{d'}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow A(2;1;4) \\ t' = 2 \Rightarrow B(2;1;0) \end{cases}$$

$\Rightarrow I(2;1;2)$ và $R = 2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$.

Câu 81. Chọn A.

Gọi $I(1+2t;-2-t;3-2t)$ trên d vì $IA = IB \Rightarrow t = \frac{-11}{4} \Rightarrow IA = \frac{\sqrt{1169}}{4}$.

Câu 82. Chọn A.

Gọi $I(1+2t;2-t;1+t)$ trên d vì $IA = IB \Rightarrow t = 1 \Rightarrow R = IA = \sqrt{19}$ đường kính là $2\sqrt{19}$.

Câu 83. Chọn B.

Mặt cầu tâm $I(2;4;6)$, bán kính R và tiếp xúc với mặt phẳng $(Oxy): z=0$

$$\Leftrightarrow R = d(I; (Oxy))$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{|6|}{1} = 6. \text{ Vậy } (S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 36.$$

Câu 84. Chọn A.

Mặt cầu tâm $I(2;4;6)$, bán kính R và tiếp xúc với mặt phẳng $(Oxz): y=0$

$$\Leftrightarrow R = d(I; (Oxz))$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{|4|}{1} = 4. \text{ Vậy } (S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 16.$$

Câu 85. Chọn C.

Mặt cầu tâm $I(2;4;6)$, bán kính R và tiếp xúc trục $Ox \Leftrightarrow R = d(I; Ox)$

$$\Leftrightarrow R = \sqrt{y_I^2 + z_I^2} = \sqrt{52}. \text{ Vậy } (S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 52.$$

Lưu ý: Học sinh hoàn toàn có thể sử dụng công thức khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng để giải quyết.

Câu 86. Chọn A.

Mặt cầu tâm $I(2;4;6)$, bán kính R và tiếp xúc trục $Ox \Leftrightarrow R = d(I; Oz)$

$$\Leftrightarrow R = \sqrt{x_I^2 + y_I^2} = \sqrt{20}. \text{ Vậy } (S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 20.$$

Lưu ý: Học sinh hoàn toàn có thể sử dụng công thức khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng để giải quyết.

Câu 87. Chọn D.

Mặt cầu (S) tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=3$. Do mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua mặt phẳng (Oxy) nên tâm I' của (S') đối xứng với I qua (Oxy) , bán kính $R'=R=3$.

Ta có: $I'(1;2;-3)$. Vậy $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$.

Lưu ý: Để ý thấy rằng trung điểm II' thuộc mặt phẳng (Oxy) và $\overline{II'} \perp (Oxy)$. Cả 4 đáp án trên đều có thể dễ dàng tìm được tọa độ I' nên nếu tinh ý ta sẽ tiết kiệm được thời gian hơn trong việc tìm đáp án.

Câu 88. Chọn A.

Mặt cầu (S) tâm $I(-1;1;2)$, bán kính $R=2$. Do mặt cầu (S') đối xứng với (S) qua trục Oz nên tâm I' của (S') đối xứng với I qua trục Oz , bán kính $R'=R=2$.

Ta có: $I'(1;-1;2)$. Vậy $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 4$.

Lưu ý: Sẽ vất vả hơn rất nhiều nếu học sinh không nhớ được tính chất đối xứng, tọa độ của một điểm đối xứng qua các trục tọa độ.

Câu 89. Chọn B.

Mặt cầu (S) tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R = 4$. Ta có: $d(I; (Oxy)) = |z_I| = 3$.

Gọi r là bán kính đường tròn (C) giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng (Oxy) , ta suy ra:

$$r = \sqrt{R^2 - [d(I; (Oxy))]^2} = \sqrt{7}. \text{ Vậy chu vi } (C) \text{ bằng: } 2\sqrt{7}\pi.$$

Lưu ý: Để hiểu và làm nhanh bài này học sinh nên vẽ minh họa hình học và từ đó rút ra công thức tổng quát xác định bán kính đường tròn giao tuyến như hướng dẫn giải ở trên.

Chủ đề 3

PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG



A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. VECTO PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẪNG

- Vecto $\vec{n} \neq \vec{0}$ là vecto pháp tuyến (VTPT) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với mặt phẳng (α)
- Chú ý:
 - ✓ Nếu $\vec{n}$ là một VTPT của mặt phẳng (α) thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là một VTPT của mặt phẳng (α) .
 - ✓ Một mặt phẳng được xác định duy nhất nếu biết một điểm nó đi qua và một VTPT của nó.
 - ✓ Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng (α) thì $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}]$ là một VTPT của (α) .

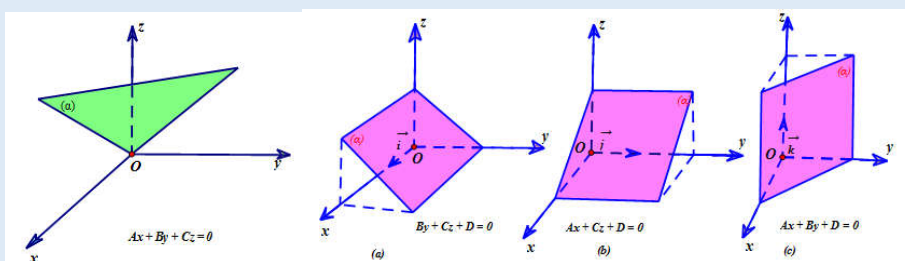
II. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA MẶT PHẪNG

- ✓ Trong không gian $Oxyz$, mọi mặt phẳng đều có dạng phương trình:
 $Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$
- ✓ Nếu mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ thì nó có một VTPT là $\vec{n}(A; B; C)$.
- ✓ Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận vecto $\vec{n}(A; B; C)$ khác $\vec{0}$ là VTPT là: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

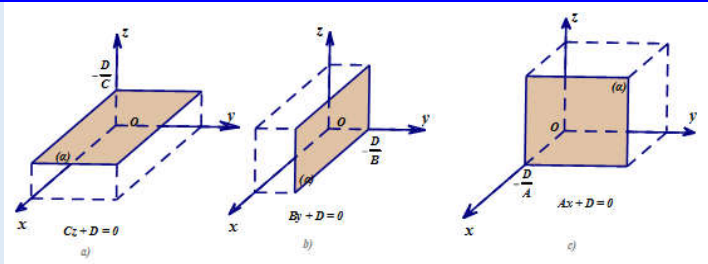
• Các trường hợp riêng

Xét phương trình mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

- ✓ Nếu $D = 0$ thì mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ O .
- ✓ Nếu $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Ox .
- ✓ Nếu $A \neq 0, B = 0, C \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oy .
- ✓ Nếu $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc chứa trục Oz .



- ✓ Nếu $A = B = 0, C \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oxy) .
- ✓ Nếu $A = C = 0, B \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oxz) .
- ✓ Nếu $B = C = 0, A \neq 0$ thì mặt phẳng (α) song song hoặc trùng với (Oyz) .



Chú ý:

- ✓ Nếu trong phương trình (α) không chứa ẩn nào thì (α) song song hoặc chứa trục tương ứng.
- ✓ Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn (α) : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Ở đây (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm $(a; 0; 0)$, $(0; b; 0)$, $(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$.

III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẪNG

Cho 2 mặt phẳng $(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

- $(\alpha) \parallel (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$
- $(\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$
- (α) cắt $(\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \vee \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \vee \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$

Đặc biệt: $(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = 0$

IV. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẪNG

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

Khi đó khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính:

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Chú ý: Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ 1 điểm thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

V. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Góc giữa (α) và (β) bằng hoặc bù với góc giữa hai VTPT $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$. Tức là:

$$\cos((\alpha), (\beta)) = \left| \cos(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta) \right| = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Đặc biệt: $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0$.

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN VỀ VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

Dạng 1: Viết phương trình mặt phẳng khi biết một điểm và vectơ pháp tuyến của nó.

Phương pháp:

Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Ví dụ. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;0;-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1;-1;2)$.

Lời giải:

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;0;-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1;-1;2)$ có phương trình là:
 $1(x-1)-1(y-0)+2(z+2)=0 \Leftrightarrow x-y+2z+3=0$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $x-y+2z+3=0$.

Dạng 2: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua 1 điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và song song với 1 mặt phẳng $(\beta): Ax+By+Cz+D=0$ cho trước.

Phương pháp:

Cách 1: Thực hiện theo các bước sau:

1. VTPT của (β) là $\vec{n}_\beta = (A; B; C)$.
2. $(\alpha) // (\beta)$ nên VTPT của mặt phẳng (α) là $\vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta = (A; B; C)$.
3. Phương trình mặt phẳng $(\alpha): A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

Cách 2:

1. Mặt phẳng $(\alpha) // (\beta)$ nên phương trình (P) có dạng: $Ax+By+Cz+D'=0$ (*), với $D' \neq D$.
2. Vì (P) qua 1 điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nên thay tọa độ $M_0(x_0; y_0; z_0)$ vào (*) tìm được D' .

Ví dụ. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(0;1;3)$ và song song với mặt phẳng $(Q): 2x-3z+1=0$.

Lời giải:

Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): 2x-3z+1=0$ nên mặt phẳng (P) có phương trình dạng: $2x-3z+D=0$ ($D \neq 1$).

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(0;1;3)$ nên thay tọa độ điểm M vào phương trình mặt phẳng phải thỏa mãn. Ta được: $2.0-3.3+D=0 \Leftrightarrow D=9$ (thỏa mãn $D \neq 1$).

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $2x-3z+9=0$.

Dạng 3: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng.

Phương pháp:

1. Tìm tọa độ các vector: $\vec{AB}, \vec{AC}$.
2. Vectơ pháp tuyến của (α) là: $\vec{n}_\alpha = [\vec{AB}, \vec{AC}]$.

3. Điểm thuộc mặt phẳng: A (hoặc B hoặc C).

4. Viết phương trình mặt phẳng qua 1 điểm và có VTPT $\vec{n}_\alpha$.

Ví dụ. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1;0;-2)$, $B(1;1;1)$, $C(0;-1;2)$.

Lời giải:

Ta có: $\vec{AB} = (0;1;3)$, $\vec{AC} = (-1;-1;4) \Rightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] = (7;-3;1)$.

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) ta có

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{AB} \\ \vec{n} \perp \vec{AC} \end{cases} \text{ nên } \vec{n} \text{ cùng phương với } [\vec{AB}, \vec{AC}].$$

Chọn $\vec{n} = (7;-3;1)$ ta được phương trình mặt phẳng (ABC) là: $7(x-1) - 3(y-0) + 1(z+2) = 0$
 $\Leftrightarrow 7x - 3y + z - 5 = 0$.

Dạng 4: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng Δ

Phương pháp:

1. Tìm VTCP của Δ là $\vec{u}_\Delta$.
2. Vì $(\alpha) \perp \Delta$ nên (α) có VTPT $\vec{n}_\alpha = \vec{u}_\Delta$.
3. Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT $\vec{n}_\alpha$.

Ví dụ. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm O và vuông góc

với đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t. \end{cases}$

Lời giải:

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là: $\vec{u}_d = (1;2;1)$.

Mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng d nên (α) có một vectơ pháp tuyến là: $\vec{n}_\alpha = \vec{u}_d = (1;2;1)$

Đồng thời (α) đi qua điểm O nên có phương trình là: $x + 2y + z = 0$.

Dạng 5: Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ , vuông góc với mặt phẳng (β) .

Phương pháp:

1. Tìm VTPT của (β) là $\vec{n}_\beta$.
2. Tìm VTCP của Δ là $\vec{u}_\Delta$.
3. VTPT của mặt phẳng (α) là: $\vec{n}_\alpha = [\vec{n}_\beta; \vec{u}_\Delta]$.
4. Lấy một điểm M trên Δ .
5. Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Ví dụ. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = -t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t. \end{cases} \text{ và vuông góc với } (\beta): x + 2y - z + 1 = 0.$$

Lời giải:

Đường thẳng d đi qua điểm $A(0; -1; 2)$ và có VTCP là: $\vec{u_d} = (-1; 2; 1)$.

Mặt phẳng (β) có VTPT là $\vec{n_\beta} = (1; 2; -1)$.

Mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và vuông góc với (β) nên (α) có một vectơ pháp tuyến là:

$$\vec{n_\alpha} = [\vec{u_d}, \vec{n_\beta}] = (-4; 0; -4) = -4(1; 0; 1).$$

Phương trình mặt phẳng (α) là: $x + z - 2 = 0$.

Dạng 6: Viết phương trình mặt phẳng (α) qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (β) .

Phương pháp:

1. Tìm VTPT của (β) là $\vec{n_\beta}$.
2. Tìm tọa độ vectơ $\vec{AB}$.
3. VTPT của mặt phẳng (α) là: $\vec{n_\alpha} = [\vec{n_\beta}, \vec{AB}]$.
4. Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Ví dụ. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(1; 2; -2), B(2; -1; 4)$ và vuông góc với $(\beta): x - 2y - z + 1 = 0$.

Lời giải:

$$\text{Có } \vec{AB} = (1; -3; 6)$$

Mặt phẳng (β) có VTPT là $\vec{n_\beta} = (1; -2; -1)$.

Mặt phẳng (α) chứa A, B và vuông góc với (β) nên (α) có một vectơ pháp tuyến là:

$$\vec{n_\alpha} = [\vec{AB}, \vec{n_\beta}] = (15; 7; 1).$$

Phương trình mặt phẳng (α) là: $15x + 7z + 1 - 27 = 0$.

Dạng 7: Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ và song song với Δ' (Δ, Δ' chéo nhau).

Phương pháp:

1. Tìm VTCP của Δ và Δ' là $\vec{u_\Delta}$ và $\vec{u_{\Delta'}}$.
2. VTPT của mặt phẳng (α) là: $\vec{n_\alpha} = [\vec{u_\Delta}, \vec{u_{\Delta'}}]$.
3. Lấy một điểm M trên Δ .
4. Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Ví dụ. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng

$$d_1: \begin{cases} x=1 \\ y=1-2t \\ z=1+t \end{cases} \text{ và song song với đường thẳng } d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}.$$

Lời giải:

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(1;1;1)$ vectơ chỉ phương $\vec{u}_1(0;-2;1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(1;0;1)$ vectơ chỉ phương $\vec{u}_2(1;2;2)$.

Ta có $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-6;1;2)$.

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) , ta có:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{u}_1 \\ \vec{n} \perp \vec{u}_2 \end{cases} \text{ nên } \vec{n} \text{ cùng phương với } [\vec{u}_1, \vec{u}_2].$$

Chọn $\vec{n} = (-6;1;2)$.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_1(1;1;1)$ và nhận vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-6;1;2)$ có phương trình:

$$-6(x-1) + 1(y-1) + 2(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -6x + y + 2z + 3 = 0.$$

Thay tọa độ điểm M_2 vào phương trình mặt phẳng (P) thấy không thỏa mãn.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $-6x + y + 2z + 3 = 0$.

Dạng 8: Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ và 1 điểm M

Phương pháp:

1. Tìm VTCP của Δ là $\vec{u}_\Delta$, lấy 1 điểm N trên Δ . Tính tọa độ $\overrightarrow{MN}$.
2. VTPT của mặt phẳng (α) là: $\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_\Delta; \overrightarrow{MN}]$.
3. Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Ví dụ. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng $d: \begin{cases} x=1 \\ y=1-2t \\ z=1+t \end{cases}$

và điểm $M(-4;3;2)$.

Lời giải:

Đường thẳng d đi qua điểm $N(1;1;1)$ vectơ chỉ phương $\vec{u}_d(0;-2;1)$.

$$\overrightarrow{MN} = (5; -2; -1).$$

Mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và điểm M nên (α) có một vectơ pháp tuyến là:

$$\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d, \overrightarrow{MN}] = (4; 5; 10).$$

Phương trình mặt phẳng (α) là: $4x + 5y + 10z - 19 = 0$.

Dạng 9: Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa 2 đường thẳng cắt nhau Δ và Δ' .

Phương pháp:

1. Tìm VTCP của Δ và Δ' là $\vec{u}_\Delta$ và $\vec{u}_{\Delta'}$.
2. VTPT của mặt phẳng (α) là: $\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_\Delta; \vec{u}_{\Delta'}]$.
3. Lấy một điểm M trên Δ .
4. Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Ví dụ. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \text{ và } d_2 : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Lời giải:

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(1;1;1)$ vectơ chỉ phương $\vec{u}_1(0;-2;1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(1;1;1)$ vectơ chỉ phương $\vec{u}_2(3;-2;1)$.

Ta có $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (0;3;6)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (0;0;0)$

Do $\overrightarrow{M_1M_2}[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = 0$ nên đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau.

Mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau nên (α) có một vectơ pháp tuyến là:

$$\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (0;3;6) = 3(0;1;2).$$

Phương trình mặt phẳng (α) là: $y + 2z - 3 = 0$.

Dạng 10: Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa 2 song song Δ và Δ' .

Phương pháp:

1. Tìm VTCP của Δ và Δ' là $\vec{u}_\Delta$ và $\vec{u}_{\Delta'}$, lấy $M \in \Delta, N \in \Delta'$.
2. VTPT của mặt phẳng (α) là: $\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_\Delta; \overrightarrow{MN}]$.
3. Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Ví dụ. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \text{ và } d_2 : \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 - 4t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Lời giải:

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(1;1;1)$ vectơ chỉ phương $\vec{u}_1(0;-2;1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(4;3;1)$ vectơ chỉ phương $\vec{u}_2(0;-4;2)$.

Ta có $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (3;2;0)$.

Do $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0}$ nên đường thẳng d_1, d_2 song song

Mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d_1, d_2 song song nên (α) có một vectơ pháp tuyến là:
 $\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_1, \vec{M_1M_2}] = (-2; 3; 6) = -(2; -3; -6).$

Phương trình mặt phẳng (α) là: $2x - 3y - 6z + 7 = 0.$

Dạng 11: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua một điểm M và song song với hai đường thẳng Δ và Δ' chéo nhau cho trước.

Phương pháp:

1. Tìm VTCP của Δ và Δ' là $\vec{u}_\Delta$ và $\vec{u}_{\Delta'}.$
2. VTPT của mặt phẳng (α) là: $\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_\Delta; \vec{u}_{\Delta'}].$
3. Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Ví dụ. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1; 0; -2)$ và (P)

song song với hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và $d_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}.$

Lời giải:

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(1; 1; 1)$ vectơ chỉ phương $\vec{u}_1(0; -2; 1).$

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(1; 0; 1)$ vectơ chỉ phương $\vec{u}_2(1; 2; 2).$

Ta có $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-6; 1; 2).$

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) , ta có:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{u}_1 \\ \vec{n} \perp \vec{u}_2 \end{cases} \text{ nên } \vec{n} \text{ cùng phương với } [\vec{u}_1, \vec{u}_2].$$

Chọn $\vec{n} = (-6; 1; 2)$ ta được phương trình mặt phẳng (P) là:

$$-6(x-1) + 1(y-0) + 2(z+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -6x + y + 2z + 10 = 0.$$

Dạng 12: Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua một điểm M và vuông góc với hai mặt phẳng $(P), (Q)$ cho trước.

Phương pháp:

1. Tìm VTPT của (P) và (Q) là $\vec{n}_P$ và $\vec{n}_Q.$
2. VTPT của mặt phẳng (α) là: $\vec{n}_\alpha = [\vec{n}_P; \vec{n}_Q].$
3. Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Ví dụ. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-1; -2; 5)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x + 2y - 3z + 1 = 0$ và $(R): 2x - 3y + z + 1 = 0.$

Lời giải:

VTPT của (Q) là $\vec{n}_Q(1;2;-3)$, VTPT của (R) là $\vec{n}_R(2;-3;1)$.

Ta có $[\vec{n}_Q, \vec{n}_R] = (-7;-7;-7)$ nên mặt phẳng (P) nhận $\vec{n}(1;1;1)$ là một VTPT và (P) đi qua điểm $M(-1;-2;5)$ nên có phương trình là: $x + y + z - 2 = 0$.

Dạng 13: Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β) và cách (β): $Ax + By + Cz + D = 0$ một khoảng k cho trước.

Phương pháp:

1. Trên mặt phẳng (β) chọn 1 điểm M .
2. Do (α)//(β) nên (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D' = 0$ ($D' \neq D$).
3. Sử dụng công thức khoảng cách $d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\beta)) = k$ để tìm D' .

Ví dụ. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q): $x + 2y - 2z + 1 = 0$ và cách (Q) một khoảng bằng 3.

Lời giải:

Trên mặt phẳng (Q): $x + 2y - 2z + 1 = 0$ chọn điểm $M(-1;0;0)$.

Do (P) song song với mặt phẳng (Q) nên phương trình của mặt phẳng (P) có dạng: $x + 2y - 2z + D = 0$ với $D \neq 1$.

$$\text{Vì } d((P), (Q)) = 3 \Leftrightarrow d(M, (P)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|-1 + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 3 \Leftrightarrow |-1 + D| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} D = -8 \\ D = 10 \end{cases}$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán: $x + 2y - 2z - 8 = 0$ và $x + 2y - 2z + 10 = 0$.

Dạng 14: Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β): $Ax + By + Cz + D = 0$ cho trước và cách điểm M một khoảng k cho trước.

Phương pháp:

1. Do (α)//(β) nên (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D' = 0$ ($D' \neq D$).
2. Sử dụng công thức khoảng cách $d(M, (\alpha)) = k$ để tìm D' .

Ví dụ. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q): $x + 2y - 2z + 1 = 0$ và (P) cách điểm $M(1;-2;1)$ một khoảng bằng 3.

Lời giải:

Do (P) song song với mặt phẳng (Q) nên phương trình của mặt phẳng (P) có dạng: $x + 2y - 2z + D = 0$ với $D \neq 1$.

$$\text{Vì } d(M, (P)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|1 - 4 - 2 + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 3 \Leftrightarrow |-5 + D| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} D = -4 \\ D = 14 \end{cases}$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán: $x + 2y - 2z - 4 = 0$ và $x + 2y - 2z + 14 = 0$.

Dạng 15: Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) .

Phương pháp:

1. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính của mặt cầu (S) .
2. Nếu mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại $M \in (S)$ thì mặt phẳng (α) đi qua điểm M và có VTPT là $\overrightarrow{MI}$.
3. Khi bài toán không cho tiếp điểm thì ta phải sử dụng các dữ kiện của bài toán tìm được VTPT của mặt phẳng và viết phương trình mặt phẳng có dạng: $Ax + By + Cz + D = 0$ (D chưa biết).
Sử dụng điều kiện tiếp xúc: $d(I, (\alpha)) = R$ để tìm D .

Ví dụ. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(Q): x + 2y - 2z + 1 = 0$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z - 3 = 0$

Lời giải:

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2 + 3} = 3$

Do (P) song song với mặt phẳng (Q) nên phương trình của mặt phẳng (P) có dạng: $x + 2y - 2z + D = 0$ với $D \neq 1$.

Vì (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) nên $d(I, (P)) = R = 3 \Leftrightarrow \frac{|-1 + 4 - 2 + D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 3 \Leftrightarrow |1 + D| = 9$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D = -10 \\ D = 8 \end{cases}$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán: $x + 2y - 2z - 10 = 0$ và $x + 2y - 2z + 8 = 0$.

Dạng 16: Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa một đường thẳng Δ và tạo với một mặt phẳng $(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$ cho trước một góc φ cho trước.

Phương pháp:

1. Tìm VTPT của (β) là $\overrightarrow{n_\beta}$.
2. Gọi $\overrightarrow{n_\alpha}(A'; B'; C')$.
3. Dùng phương pháp vô định giải hệ:
$$\begin{cases} (\overrightarrow{n_\alpha}; \overrightarrow{n_\beta}) = \varphi \\ \overrightarrow{n_\alpha} \perp \overrightarrow{u_\Delta} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha}$$
4. Áp dụng cách viết phương trình mặt phẳng đi qua 1 điểm và có 1 VTPT.

Ví dụ. Trong mặt phẳng $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) và đường thẳng d lần lượt có phương trình $(P): x + 2y - z + 5 = 0$ và $d: \frac{x+1}{2} = y+1 = z-3$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (P) một góc 60° .

Lời giải:

Giả sử mặt phẳng (Q) có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$ ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$).

Chọn hai điểm $M(-1; -1; 3), N(1; 0; 4) \in d$.

Mặt phẳng (Q) chứa d nên $M, N \in (Q) \Rightarrow \begin{cases} A \cdot (-1) + B \cdot (-1) + C \cdot 3 + D = 0 \\ A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 4 + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -2A - B \\ D = 7A + 4B \end{cases}$

Suy ra mặt phẳng có phương trình là $Ax + By + (-2A - B)z + 7A + 4B = 0$ và có VTPT $\vec{n}_Q = (A; B; -2A - B)$.

(Q) tạo với mặt phẳng (P) một góc $60^\circ \Rightarrow \frac{|A + 2B + 2A + B|}{\sqrt{A^2 + B^2 + (2A + B)^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$
 $\Leftrightarrow A = (4 \pm 2\sqrt{3})B$

Cho $B = 1$ ta được $A = (4 \pm 2\sqrt{3})$.

Vậy có 2 phương trình mặt phẳng

$$(4 - 2\sqrt{3})x + y + (-9 + 4\sqrt{3})z + 32 - 14\sqrt{3} = 0$$

$$(4 + 2\sqrt{3})x + y + (-9 - 4\sqrt{3})z + 32 + 14\sqrt{3} = 0$$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I. ĐỀ BÀI

Câu 1. Chọn khẳng định **sai**

- A. Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) thì $k\vec{n}$ ($k \in \mathbb{R}$) cũng là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .
- B. Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm nó đi qua và một vectơ pháp tuyến của nó.
- C. Mọi mặt phẳng trong không gian $Oxyz$ đều có phương trình dạng: $Ax + By + Cz + D = 0$ ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$).
- D. Trong không gian $Oxyz$, mỗi phương trình dạng: $Ax + By + Cz + D = 0$ ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$) đều là phương trình của một mặt phẳng nào đó.

Câu 2. Chọn khẳng định **đúng**

- A. Nếu hai vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng cùng phương thì hai mặt phẳng đó song song.
- B. Nếu hai mặt phẳng song song thì hai vectơ pháp tuyến tương ứng cùng phương.
- C. Nếu hai mặt phẳng trùng nhau thì hai vectơ pháp tuyến tương ứng bằng nhau.
- D. Nếu hai vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng cùng phương thì hai mặt phẳng đó trùng nhau.

Câu 3. Chọn khẳng định **sai**

- A. Nếu hai đường thẳng AB, CD song song thì vectơ $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$.
- B. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng, vectơ $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) .
- C. Cho hai đường thẳng AB, CD chéo nhau, vectơ $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng chứa đường thẳng AB và song song với đường thẳng CD .
- D. Nếu hai đường thẳng AB, CD cắt nhau thì vectơ $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. Tìm khẳng định **sai** trong các mệnh đề sau:

- A. $A = 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$ khi và chỉ khi (α) song song với trục Ox .
- B. $D = 0$ khi và chỉ khi (α) đi qua gốc tọa độ.
- C. $A \neq 0, B = 0, C \neq 0, D = 0$ khi và chỉ khi (α) song song với mặt phẳng (Oyz)
- D. $A = 0, B = 0, C \neq 0, D \neq 0$ khi và chỉ khi (α) song song với mặt phẳng (Oxy) .

- Câu 5.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, ($abc \neq 0$). Khi đó phương trình mặt phẳng (ABC) là:
- A. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. B. $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} + \frac{z}{c} = 1$. C. $\frac{x}{a} + \frac{y}{c} + \frac{z}{b} = 1$. D. $\frac{x}{c} + \frac{y}{b} + \frac{z}{a} = 1$.
- Câu 6.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x - z = 0$. Tìm khẳng định đúng trong các mệnh đề sau:
- A. $(\alpha) // Ox$. B. $(\alpha) // (xOz)$. C. $(\alpha) // Oy$. D. $(\alpha) \supset Oy$.
- Câu 7.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$. Mặt phẳng (P) là $-x + 3z - 2 = 0$ có phương trình song song với:
- A. Trục Oy . B. Trục Oz . C. Mặt phẳng Oxy . D. Trục Ox .
- Câu 8.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $3x + 2y - z + 1 = 0$. Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là:
- A. $\vec{n}(3;2;1)$. B. $\vec{n}(-2;3;1)$. C. $\vec{n}(3;2;-1)$. D. $\vec{n}(3;-2;-1)$.
- Câu 9.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $-2x + 2y - z - 3 = 0$. Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là:
- A. $\vec{n}(4;-4;2)$. B. $\vec{n}(-2;2;-3)$. C. $\vec{n}(-4;4;2)$. D. $\vec{n}(0;0;-3)$.
- Câu 10.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;1)$, $B(-1;3;3)$, $C(2;-4;2)$. Một vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng (ABC) là:
- A. $\vec{n} = (9;4;-1)$. B. $\vec{n} = (9;4;1)$. C. $\vec{n} = (4;9;-1)$. D. $\vec{n} = (-1;9;4)$.
- Câu 11.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P) $-2x + y - 5 = 0$
- A. $(-2;1;0)$. B. $(-2;1;-5)$. C. $(1;7;5)$. D. $(-2;2;-5)$.
- Câu 12.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(-1;2;0)$ và nhận $\vec{n}(-1;0;2)$ là VTPT có phương trình là:
- A. $-x + 2y - 5 = 0$ B. $-x + 2z - 5 = 0$ C. $-x + 2y - 5 = 0$ D. $-x + 2z - 1 = 0$
- Câu 13.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-2;-2)$, $B(3;2;0)$, $C(0;2;1)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là:
- A. $2x - 3y + 6z = 0$. B. $4y + 2z - 3 = 0$. C. $3x + 2y + 1 = 0$. D. $2y + z - 3 = 0$.
- Câu 14.** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;1)$, $B(-2;1;1)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là:
- A. $x - y - 2 = 0$. B. $x - y + 1 = 0$. C. $x - y + 2 = 0$. D. $-x + y + 2 = 0$.
- Câu 15.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$. Mặt phẳng (P) đi qua các điểm $A(-1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;-2)$ có phương trình là:
- A. $-2x + y + z - 2 = 0$. B. $-2x - y - z + 2 = 0$. C. $-2x + y - z - 2 = 0$. D. $-2x + y - z + 2 = 0$.

- Câu 16.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;1)$ và hai mặt phẳng $(\alpha): 2x + 4y - 6z - 5 = 0$ và $(\beta): x + 2y - 3z = 0$. Tìm khẳng định đúng?
- A. Mặt phẳng (β) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (α) ;
B. Mặt phẳng (β) đi qua điểm A và không song song với mặt phẳng (α) ;
C. Mặt phẳng (β) không đi qua điểm A và không song song với mặt phẳng (α) ;
D. Mặt phẳng (β) không đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (α) ;
- Câu 17.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;3)$ và các mặt phẳng: $(\alpha): x - 2 = 0$, $(\beta): y + 1 = 0$, $(\gamma): z - 3 = 0$. Tìm khẳng định sai.
- A. $(\alpha) // Ox$. B. (β) đi qua M . C. $(\gamma) // (xOy)$. D. $(\beta) \perp (\gamma)$.
- Câu 18.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Phương trình mặt phẳng qua $A(2;5;1)$ và song song với mặt phẳng (Oxy) là:
- A. $2x + 5y + z = 0$. B. $x - 2 = 0$. C. $y - 5 = 0$. D. $z - 1 = 0$.
- Câu 19.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Mặt phẳng đi qua $M(1;4;3)$ và vuông góc với trục Oy có phương trình là:
- A. $y - 4 = 0$. B. $x - 1 = 0$. C. $z - 3 = 0$. D. $x + 4y + 3z = 0$.
- Câu 20.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 6x - 3y - 2z - 6 = 0$. Khẳng định nào sau đây sai?
- A. Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{u}(-6, 3, 2)$.
B. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (α) bằng $\frac{6}{8}$.
C. Mặt phẳng (α) chứa điểm $A(1, 2, -3)$.
D. Mặt phẳng (α) cắt ba trục Ox, Oy, Oz .
- Câu 21.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Biết A, B, C là số thực khác 0, mặt phẳng chứa trục Oz có phương trình là:
- A. $Ax + Bz + C = 0$. B. $Ax + By = 0$ C. $By + Az + C = 0$. D. $Ax + By + C = 0$.
- Câu 22.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(5;1;3), B(1;2;6), C(5;0;4), D(4;0;6)$. Viết phương trình mặt phẳng qua D và song song với mặt phẳng (ABC) .
- A. $x + y + z - 10 = 0$. B. $x + y + z - 9 = 0$. C. $x + y + z - 8 = 0$. D. $x + 2y + z - 10 = 0$.
- Câu 23.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(5;1;3), B(1;2;6), C(5;0;4), D(4;0;6)$. Viết phương trình mặt phẳng chứa AB và song song với CD .
- A. $2x + 5y + z - 18 = 0$. B. $2x - y + 3z + 6 = 0$. C. $2x - y + z + 4 = 0$. D. $x + y + z - 9 = 0$.

- Câu 24.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Ox và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x + y + z - 3 = 0$. Phương trình mặt phẳng (P) là:
A. $y + z = 0$. **B.** $y - z = 0$. **C.** $y - z - 1 = 0$. **D.** $y - 2z = 0$.
- Câu 25.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Phương trình của mặt phẳng chứa trục Ox và qua điểm $I(2; -3; 1)$ là:
A. $3y + z = 0$. **B.** $3x + y = 0$. **C.** $y - 3z = 0$. **D.** $y + 3z = 0$.
- Câu 26.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 1)$, $B(1; 0; 4)$ và $C(0; -2; -1)$. Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC là:
A. $2x + y + 2z - 5 = 0$. **B.** $x - 2y + 3z - 7 = 0$. **C.** $x + 2y + 5z - 5 = 0$. **D.** $x + 2y + 5z + 5 = 0$.
- Câu 27.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua $A(2; -1; 4)$, $B(3; 2; -1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x + y + 2z - 3 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) là:
A. $5x + 3y - 4z + 9 = 0$. **B.** $x + 3y - 5z + 21 = 0$. **C.** $x + y + 2z - 3 = 0$. **D.** $5x + 3y - 4z = 0$.
- Câu 28.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua $M(0; -2; 3)$, song song với đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-3} = z$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): x + y - z = 0$ có phương trình:
A. $2x - 3y - 5z - 9 = 0$. **B.** $2x - 3y + 5z - 9 = 0$. **C.** $2x + 3y + 5z + 9 = 0$. **D.** $2x + 3y + 5z - 9 = 0$.
- Câu 29.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Tọa độ giao điểm M của mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 4 = 0$ với trục Ox là?
A. $M(0, 0, 4)$. **B.** $M\left(0, \frac{4}{3}, 0\right)$. **C.** $M(3, 0, 0)$. **D.** $M(2, 0, 0)$.
- Câu 30.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng qua các hình chiếu của $A(5; 4; 3)$ lên các trục tọa độ. Phương trình của mặt phẳng (α) là:
A. $12x + 15y + 20z - 60 = 0$ **B.** $12x + 15y + 20z + 60 = 0$.
C. $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 0$. **D.** $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} - 60 = 0$.
- Câu 31.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(5; -2; 0)$, $B(-3; 4; 1)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{a}(1; 1; 1)$. Phương trình của mặt phẳng (α) là:
A. $5x + 9y - 14z = 0$. **B.** $x - y - 7 = 0$.
C. $5x + 9y - 14z - 7 = 0$. **D.** $-5x - 9y - 14z + 7 = 0$.
- Câu 32.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, có bao nhiêu mặt phẳng song song với mặt phẳng $(P): x + y + z - 6 = 0$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 12$?
A. 2 **B.** Không có. **C.** 1. **D.** 3.

- Câu 33.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 mặt phẳng $(P): x - 2y + 4z - 3 = 0$, $(Q): -2x + 4y - 8z + 5 = 0$, $(R): 3x - 6y + 12z - 10 = 0$, $(W): 4x - 8y + 8z - 12 = 0$. Có bao nhiêu cặp mặt phẳng song song với nhau.
- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.
- Câu 34.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x + (m-1)y + 4z - 2 = 0$, $(\beta): nx + (m+2)y + 2z + 4 = 0$. Với giá trị thực của m, n bằng bao nhiêu để (α) song song (β)
- A. $m = 3; n = -6$. B. $m = 3; n = 6$. C. $m = -3; n = 6$ D. $m = -3; n = -6$.
- Câu 35.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + my + (m-1)z + 2 = 0$, $(Q): 2x - y + 3z - 4 = 0$. Giá trị số thực m để hai mặt phẳng $(P), (Q)$ vuông góc
- A. $m = 1$ B. $m = -\frac{1}{2}$ C. $m = 2$ D. $m = \frac{1}{2}$
- Câu 36.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$. Cho hai mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 2z - 3 = 0$, $(\beta): x - 2y + 2z - 8 = 0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ là bao nhiêu?
- A. $d((\alpha), (\beta)) = \frac{5}{3}$ B. $d((\alpha), (\beta)) = \frac{11}{3}$ C. $d((\alpha), (\beta)) = 5$ D. $d((\alpha), (\beta)) = \frac{4}{3}$
- Câu 37.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - z + 1 = 0$. Gọi mặt phẳng (Q) là mặt phẳng đối xứng của mặt phẳng (P) qua trục tung. Khi đó phương trình mặt phẳng (Q) là?
- A. $x + 2y - z - 1 = 0$ B. $x - 2y - z + 1 = 0$ C. $x + 2y + z + 1 = 0$ D. $x - 2y - z - 1 = 0$
- Câu 38.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 3y + 5z - 4 = 0$. Gọi mặt phẳng (Q) là mặt phẳng đối xứng của mặt phẳng (P) qua mặt phẳng (Oxz) . Khi đó phương trình mặt phẳng (Q) là?
- A. $(P): 2x - 3y - 5z - 4 = 0$ B. $(P): 2x - 3y + 5z - 4 = 0$
C. $(P): 2x + 3y + 5z - 4 = 0$ D. $(P): 2x - 3y + 5z + 4 = 0$
- Câu 39.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, (α) là mặt phẳng đi qua điểm $A(2; -1; 5)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(P): 3x - 2y + z + 7 = 0$ và $(Q): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) là:
- A. $x + 2y + z - 5 = 0$. B. $2x - 4y - 2z - 10 = 0$.
C. $2x + 4y + 2z + 10 = 0$. D. $x + 2y - z + 5 = 0$.
- Câu 40.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tọa độ điểm M nằm trên trục Oy và cách đều hai mặt phẳng: $(P): x + y - z + 1 = 0$ và $(Q): x - y + z - 5 = 0$ là:
- A. $M(0; -3; 0)$. B. $M(0; 3; 0)$. C. $M(0; -2; 0)$. D. $M(0; 1; 0)$.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng qua $G(1;2;3)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác gốc O) sao cho G là trọng tâm của tam giác ABC . Khi đó mặt phẳng (α) có phương trình:

A. $3x+6y+2z+18=0$.

B. $6x+3y+2z-18=0$.

C. $2x+y+3z-9=0$.

D. $6x+3y+2z+9=0$.

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng song song với mặt phẳng $(\beta): 2x-4y+4z+3=0$ và cách điểm $A(2;-3;4)$ một khoảng $k=3$. Phương trình của mặt phẳng (α) là:

A. $2x-4y+4z-5=0$ hoặc $2x-4y+4z-13=0$.

B. $x-2y+2z-25=0$.

C. $x-2y+2z-7=0$.

D. $x-2y+2z-25=0$ hoặc $x-2y+2z-7=0$.

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$, $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{4}$. Phương trình mặt phẳng (α) cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 là:

A. $7x-2y-4z=0$.

B. $7x-2y-4z+3=0$.

C. $2x+y+3z+3=0$.

D. $14x-4y-8z+3=0$.

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, ($b>0, c>0$) và mặt phẳng $(P): y-z+1=0$. Xác định b và c biết mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) và khoảng cách từ O đến (ABC) bằng $\frac{1}{3}$.

A. $b = \frac{1}{\sqrt{2}}, c = \frac{1}{\sqrt{2}}$

B. $b = 1, c = \frac{1}{2}$

C. $b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}$

D. $b = \frac{1}{2}, c = 1$

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(5;4;3)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz các đoạn bằng nhau có phương trình là:

A. $x+y+z-12=0$

B. $x+y+z=0$

C. $5x+4y+3z-50=0$

D. $x-y+z=0$

Câu 46. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Oy và tạo với mặt phẳng $y+z+1=0$ góc 60° . Phương trình mặt phẳng (P) là:

A. $\begin{cases} x-z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x-z-1=0 \\ x-z=0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x-2z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$. Phương trình mặt phẳng (α) chứa trục Oz và tiếp xúc với (S)

A. $(\alpha): 4x-3y+2=0$. **B.** $(\alpha): 3x+4y=0$. **C.** $(\alpha): 3x-4y=0$. **D.** $(\alpha): 4x-3y=0$.

- Câu 48.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tam giác ABC có $A(1, 2, -1), B(-2, 1, 0), C(2, 3, 2)$. Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (OGB) bằng bao nhiêu ?
- A. $\frac{3\sqrt{174}}{29}$ B. $\frac{\sqrt{174}}{29}$ C. $\frac{2\sqrt{174}}{29}$ D. $\frac{4\sqrt{174}}{29}$
- Câu 49.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$. Phương trình mặt phẳng (α) chứa Oy cắt hình cầu (S) theo thiết diện là đường tròn có chu vi bằng 8π
- A. $(\alpha): 3x - z = 0$ B. $(\alpha): 3x + z = 0$ C. $(\alpha): 3x + z + 2 = 0$ D. $(\alpha): x - 3z = 0$
- Câu 50.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng song song với mặt phẳng Oxz và cắt mặt cầu $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 12$ theo đường tròn có chu vi lớn nhất. Phương trình của (P) là:
- A. $x - 2y + 1 = 0$. B. $y - 2 = 0$. C. $y + 1 = 0$. D. $y + 2 = 0$.
- Câu 51.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa trục Oy và cách M một khoảng lớn nhất. Phương trình của (α) là:
- A. $x + 3z = 0$. B. $x + 2z = 0$. C. $x - 3z = 0$. D. $x = 0$.
- Câu 52.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$, điểm $A(0; 0; 2)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là hình tròn (C) có diện tích nhỏ nhất ?
- A. $(P): x + 2y + 3z - 6 = 0$. B. $(P): x + 2y + z - 2 = 0$.
C. $(P): 3x + 2y + 2z - 4 = 0$. D. $(P): x - 2y + 3z - 6 = 0$.
- Câu 53.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $N(1; 1; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
- A. $(P): x + y + z - 3 = 0$. B. $(P): x + y - z + 1 = 0$.
C. $(P): x - y - z + 1 = 0$. D. $(P): x + 2y + z - 4 = 0$.
- Câu 54.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1; 1; 1), B(0; 2; 2)$ đồng thời cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm M, N (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho $OM = 2ON$
- A. $(P): 2x + 3y - z - 4 = 0$. B. $(P): x + 2y - z - 2 = 0$.
C. $(P): x - 2y - z + 2 = 0$. D. $(P): 3x + y + 2z - 6 = 0$.

- Câu 55.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có các đỉnh $A(1;2;1)$, $B(-2;1;3)$, $C(2;-1;3)$ và $D(0;3;1)$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua A, B đồng thời cách đều C, D
- A. $(P_1): 4x + 2y + 7z - 15 = 0; (P_2): x - 5y - z + 10 = 0$.
 B. $(P_1): 6x - 4y + 7z - 5 = 0; (P_2): 3x + y + 5z + 10 = 0$.
 C. $(P_1): 6x - 4y + 7z - 5 = 0; (P_2): 2x + 3z - 5 = 0$.
 D. $(P_1): 3x + 5y + 7z - 20 = 0; (P_2): x + 3y + 3z - 10 = 0$.
- Câu 56.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;3); B(3;0;2); C(0;-2;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B và cách C một khoảng lớn nhất?
- A. $(P): 3x + 2y + z - 11 = 0$.
 B. $(P): 3x + y + 2z - 13 = 0$.
 C. $(P): 2x - y + 3z - 12 = 0$.
 D. $(P): x + y - 3 = 0$.
- Câu 57.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C (khác gốc tọa độ O) sao cho M là trực tâm tam giác ABC . Mặt phẳng (α) có phương trình là:
- A. $x + 2y + 3z - 14 = 0$.
 B. $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - 1 = 0$.
 C. $3x + 2y + z - 10 = 0$.
 D. $x + 2y + 3z + 14 = 0$.
- Câu 58.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $G(1;4;3)$. Viết phương trình mặt phẳng cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho G là trọng tâm tứ diện $OABC$?
- A. $\frac{x}{4} + \frac{y}{16} + \frac{z}{12} = 0$.
 B. $\frac{x}{4} + \frac{y}{16} + \frac{z}{12} = 1$.
 C. $\frac{x}{3} + \frac{y}{12} + \frac{z}{9} = 1$.
 D. $\frac{x}{3} + \frac{y}{12} + \frac{z}{9} = 0$.
- Câu 59.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Mặt phẳng (P) qua M cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất có phương trình là:
- A. $6x + 3y + 2z = 0$.
 B. $6x + 3y + 2z - 18 = 0$.
 C. $x + 2y + 3z - 14 = 0$.
 D. $x + y + z - 6 = 0$.
- Câu 60.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng có phương trình $(P): x + 2y + 2z - 1 = 0$ $(Q): x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 5$. Mặt phẳng (α) vuông với mặt phẳng $(P), (Q)$ đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S) .
- A. $2x + y - 1 = 0; 2x + y + 9 = 0$.
 B. $2x - y - 1 = 0; 2x - y + 9 = 0$.
 C. $x - 2y + 1 = 0; x - 2y - 9 = 0$.
 D. $2x - y + 1 = 0; 2x - y - 9 = 0$.
- Câu 61.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$, 2 điểm $A(1;0;0), B(-1;2;0)$ $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 25$. Viết phương trình mặt phẳng (α)

vuông với mặt phẳng (P) , song song với đường thẳng AB , đồng thời cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có bán kính bằng $r = 2\sqrt{2}$

A. $2x + 2y + 3z + 11 = 0; 2x + 2y + 3z - 23 = 0$. **B.** $2x - 2y + 3z + 11 = 0; 2x - 2y + 3z - 23 = 0$.

C. $2x - 2y + 3z - 11 = 0; 2x - 2y + 3z + 23 = 0$. **D.** $2x + 2y + 3z - 11 = 0; 2x + 2y + 3z + 23 = 0$.

Câu 62. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;1;-1), B(1;1;2), C(-1;2;-2)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 1 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua A , vuông góc với mặt phẳng (P) cắt đường thẳng BC tại I sao cho $IB = 2IC$ biết tọa độ điểm I là số nguyên

A. $(\alpha): 2x - y - 2z - 3 = 0$.

B. $(\alpha): 4x + 3y - 2z - 9 = 0$.

C. $(\alpha): 6x + 2y - z - 9 = 0$.

D. $(\alpha): 2x + 3y + 2z - 3 = 0$.

Câu 63. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$, $(Q): 2x + 3y + 4z - 1 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua $A(1;0;1)$ và chứa giao tuyến của hai mặt phẳng $(P), (Q)$?

A. $(\alpha): 2x + 3y + z - 3 = 0$.

B. $(\alpha): 7x + 8y + 9z - 16 = 0$.

C. $(\alpha): 7x + 8y + 9z - 17 = 0$.

D. $(\alpha): 2x - 2y + z - 3 = 0$.

Câu 64. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$, $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (α) vuông góc với d_1 , cắt Oz tại A và cắt d_2 tại B (có tọa độ nguyên) sao cho $AB = 3$.

A. $(\alpha): 10x - 5y + 5z + 1 = 0$.

B. $(\alpha): 4x - 2y + 2z + 1 = 0$.

C. $(\alpha): 2x - y + z + 1 = 0$.

D. $(\alpha): 2x - y + z + 2 = 0$.

Câu 65. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có điểm $A(1;1;1), B(2;0;2), C(-1;-1;0), D(0;3;4)$. Trên các cạnh AB, AC, AD lần lượt lấy các điểm B', C', D' thỏa: $\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} = 4$. Viết phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ biết tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất?

A. $16x + 40y - 44z + 39 = 0$.

B. $16x + 40y + 44z - 39 = 0$.

C. $16x - 40y - 44z + 39 = 0$.

D. $16x - 40y - 44z - 39 = 0$.

Câu 66. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $(P): x + 4y - 2z - 6 = 0, (Q): x - 2y + 4z - 6 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa giao tuyến của $(P), (Q)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều.

A. $x + y + z + 6 = 0$.

B. $x + y + z - 6 = 0$.

C. $x + y - z - 6 = 0$.

D. $x + y + z - 3 = 0$.

Câu 67. Cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z - 1 = 0$; $(\beta): x + 2y - 2z - 3 = 0$. Cosin góc giữa mặt phẳng (α) và mặt phẳng (β) bằng:

- A. $\frac{4}{9}$ B. $-\frac{4}{9}$ C. $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ D. $-\frac{4}{3\sqrt{3}}$

Câu 68. Cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 5z + 2 = 0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 1 = 0$; $(\beta): x - 2z - 3 = 0$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Khi đó:

- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

Câu 69. Cho mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + 2z - 5 = 0$. Điểm $A(1; -2; 2)$. Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua A và tạo với mặt phẳng (α) một góc 45° .

- A. Vô số. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 70. Hai mặt phẳng nào dưới đây tạo với nhau một góc 60°

- A. $(P): 2x + 11y - 5z + 3 = 0$ và $(Q): x + 2y - z - 2 = 0$.
 B. $(P): 2x + 11y - 5z + 3 = 0$ và $(Q): -x + 2y + z - 5 = 0$.
 C. $(P): 2x - 11y + 5z - 21 = 0$ và $(Q): 2x + y + z - 2 = 0$.
 D. $(P): 2x - 5y + 11z - 6 = 0$ và $(Q): -x + 2y + z - 5 = 0$.

Câu 71. Trong không gian với hệ tọa độ $\begin{cases} y = 0 \\ 2x - y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$ Oxyz cho điểm $M(1;0;0)$ và $N(0;0;-1)$, mặt phẳng (P) qua điểm M, N và tạo với mặt phẳng $(Q): x - y - 4 = 0$ một góc bằng 45° . Phương trình mặt phẳng (P) là

- A. $\begin{cases} y = 0 \\ 2x - y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} y = 0 \\ 2x - y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$
 C. $\begin{cases} 2x - y - 2z + 2 = 0 \\ 2x - y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2x - 2z + 2 = 0 \\ 2x - 2z - 2 = 0 \end{cases}$

Câu 72. Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và mặt phẳng $(Q): x - y + z - 1 = 0$. Khi đó mặt phẳng (R) vuông góc với mặt phẳng (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O đến mặt phẳng (R) bằng 2, có phương trình là

- A. $2x - 2z - 2\sqrt{2} = 0$. B. $x - z - 2\sqrt{2} = 0$.
 C. $x - z + 2\sqrt{2} = 0$. D. $\begin{cases} x - z + 2\sqrt{2} = 0 \\ x - z - 2\sqrt{2} = 0 \end{cases}$

Câu 73. Tập hợp các điểm $M(x; y; z)$ trong không gian Oxyz cách đều hai mặt phẳng $(P): x + y - 2z - 3 = 0$ và $(Q): x + y - 2z + 5 = 0$ thoả mãn:

- A. $x + y - 2z + 1 = 0$. B. $x + y - 2z + 4 = 0$.
 C. $x + y - 2z + 2 = 0$. D. $x + y - 2z - 4 = 0$.

Câu 74. Tập hợp các điểm $M(x;y;z)$ trong không gian $Oxyz$ cách đều hai mặt phẳng $(P):x-2y-2z-7=0$ và mặt phẳng $(Q):2x+y+2z+1=0$ thoả mãn:

- A. $x+3y+4z+8=0$.
 B. $\begin{cases} x+3y+4z+8=0 \\ 3x-y-6=0 \end{cases}$.
 C. $3x-y-6=0$.
 D. $3x+3y+4z+8=0$.

Câu 75. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm M thuộc trục Ox cách đều hai mặt phẳng $(P):x+y-2z-3=0$ và (Oyz) . Khi tọa độ điểm M là

- A. $\left(\frac{3}{1+\sqrt{6}};0;0\right)$ và $\left(\frac{3}{\sqrt{6}-1};0;0\right)$.
 B. $\left(\frac{3}{1+\sqrt{6}};0;0\right)$ và $\left(\frac{3}{1-\sqrt{6}};0;0\right)$.
 C. $\left(\frac{\sqrt{6}-1}{3};0;0\right)$ và $\left(\frac{\sqrt{6}+1}{3};0;0\right)$.
 D. $\left(\frac{1+\sqrt{6}}{3};0;0\right)$ và $\left(\frac{1-\sqrt{6}}{3};0;0\right)$.

Câu 76. Trong không gian $Oxyz$ cho tứ diện $ABCD$ có các đỉnh $A(1;2;1), B(-2;1;3), C(2;-1;1)$ và $D(0;3;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua 2 điểm A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P) là

- A. $\begin{cases} 4x-2y+7z-1=0 \\ 2x+3z-5=0 \end{cases}$.
 B. $2x+3z-5=0$.
 C. $4x+2y+7z-15=0$.
 D. $\begin{cases} 4x+2y+7z-15=0 \\ 2x+3z-5=0 \end{cases}$.

Câu 77. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(0;-1;2), N(-1;1;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M, N và tạo với mặt phẳng $(Q):2x-y-2z-2=0$ góc có số đo nhỏ nhất. Điểm $A(1;2;3)$ cách mp (P) một khoảng là

- A. $\sqrt{3}$.
 B. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.
 C. $\frac{7\sqrt{11}}{11}$.
 D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Câu 78. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;1); B(3;-2;0); C(1;2;-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A sao cho tổng khoảng cách từ B và C đến (P) lớn nhất biết rằng (P) không cắt đoạn BC . Khi đó, điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P) ?

- A. $G(-2;0;3)$.
 B. $F(3;0;-2)$.
 C. $E(1;3;1)$.
 D. $H(0;3;1)$.

Câu 79. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ trong đó b, c dương và mặt phẳng $(P):y-z+1=0$. Biết rằng $mp(ABC)$ vuông góc với $mp(P)$ và $d(O, (ABC)) = \frac{1}{3}$, mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $b+c=1$.
 B. $2b+c=1$.
 C. $b-3c=1$.
 D. $3b+c=3$.

Câu 80. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;3); B(0;1;1); C(1;0;-2)$.

Điểm $M \in (P): x + y + z + 2 = 0$ sao cho giá trị của biểu thức $T = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ nhỏ nhất. Khi đó, điểm M cách $(Q): 2x - y - 2z + 3 = 0$ một khoảng bằng

A. $\frac{121}{54}$.

B. 24.

C. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

D. $\frac{101}{54}$.

II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1A	2B	3A	4C	5A	6D	7A	8C	9A	10A
11B	12D	13A	14C	15C	16A	17A	18D	19A	20B
21B	22A	23A	24B	25D	26C	27A	28D	29D	30A
31C	32C	33B	34C	35D	36A	37D	38C	39A	40A
41B	42D	43D	44C	45A	46A	47C	48A	49A	50D
51A	52B	53A	54C	55D	56A	57A	58B	59B	60D
61A	62A	63B	64C	65A	66B	67A	68A	69A	70B
71A	72D	73A	74B	75B	76D	77A	78C	79A	80D

Câu 1. **Chọn A.**

Câu 2. **Chọn B.**

Câu 3. **Chọn A.**

Câu 4. **Chọn C.**

Câu 5. **Chọn A.**

Câu 6. **Chọn D.**

Câu 7. **Chọn A.**

Câu 8. **Chọn C.**

Câu 9. **Chọn A.**

Câu 10. **Chọn A.**

Phương pháp tự luận

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; 5; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (1; -2; 1)$

$$\Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (9; 4; -1).$$

Phương pháp trắc nghiệm

Sử dụng MTBT tính tích có hướng.

Có $\overrightarrow{AB} = (-2; 5; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (1; -2; 1)$.

Chuyển sang chế độ Vector: Mode 8.

Ấn tiếp 1 – 1: Nhập tọa độ $\overrightarrow{AB}$ vào vector A.

Sau đó ấn AC. Shift – 5 – 1 – 2 – 1 Nhập tọa độ $\overrightarrow{AC}$ vào vector B.

Sau đó ấn AC.

Để nhân $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right]$ ấn Shift - 5 - 3 - X Shift - 5 - 4 - =

Câu 11. Chọn B.

Phương pháp tự luận

Thay tọa độ các điểm vào phương trình mặt phẳng, nếu điểm nào làm cho vế trái bằng 0 thì đó là điểm thuộc mặt phẳng.

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập phương trình mặt phẳng (P) vào máy tính dạng sau: $-2X + Y + 0A - 5 = 0$, sau đó dùng hàm CALC và nhập tọa độ $(x; y; z)$ của các điểm vào. Nếu bằng 0 thì điểm đó thuộc mặt phẳng.

Câu 12. Chọn D.

Mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(-1; 2; 0)$ và nhận $\vec{n}(-1; 0; 2)$ là VTPT có phương trình là: $-1(x+1) + 0(y-2) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow -x - 1 + 2z = 0 \Leftrightarrow -x + 2z - 1 = 0$.

Vậy $-x + 2z - 1 = 0$.

Phương pháp trắc nghiệm (nên có)

Từ tọa độ VTPT suy ra hệ số B=0, vậy loại ngay đáp án $-x + 2y - 5 = 0$ và $-x + 2y - 5 = 0$

Chọn 1 trong 2 PT còn lại bằng cách thay tọa độ điểm A vào

Câu 13. Chọn A.

Phương pháp tự luận

$$\overrightarrow{AB} = (0; 4; 2), \overrightarrow{AC} = (-3; 4; 3)$$

$$(ABC) \text{ qua } A(3; -2; -2) \text{ và có vectơ pháp tuyến } \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] = (4; -6; 12) = 2(2; -3; 6)$$

$$\Rightarrow (ABC): 2x - 3y + 6z = 0$$

Phương pháp trắc nghiệm

Sử dụng MTBT tính tích có hướng.

Hoặc thay tọa độ cả 3 điểm A, B, C vào mặt phẳng xem có thỏa hay không?

Câu 14. Chọn C.

Phương pháp tự luận

$$+) \overrightarrow{AB} = (-1; 1; 0).$$

$$+) \text{ Trung điểm } I \text{ của đoạn } AB \text{ là } I\left(\frac{-3}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$$

$$\text{Mặt phẳng trung trực của đoạn } AB \text{ là } -(x + \frac{3}{2}) + (y - \frac{1}{2}) = 0 \text{ hay } x - y + 2 = 0.$$

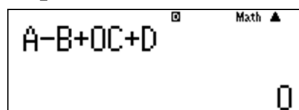
Phương pháp trắc nghiệm

Do (α) là mặt phẳng trung trực của AB nên $(\alpha) \perp AB$

Kiểm tra mặt phẳng (α) nào có $\vec{n}_\alpha = k\overrightarrow{AB}$ và chứa điểm I

Cả 4 đáp án đều thỏa điều kiện $\vec{n}_\alpha = k\overrightarrow{AB}$.

Cả 4 PT đều chung dạng: $x-y+0z+D=0$, nên để kiểm tra PT nào thỏa tọa độ điểm I ta bấm máy tính: trong đó nhập A, B, C là tọa độ I , còn D là số hạng tự do từng PT, nếu cái nào



làm bằng 0 thì chọn.

Câu 15. Chọn C.

Phương pháp tự luận

Theo công thức phương trình mặt phẳng ta có: $\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-2} = 1 \Leftrightarrow -2x + y - z - 2 = 0$.

Vậy $-2x + y - z - 2 = 0$.

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập phương trình mặt phẳng (P) vào máy tính, sau đó dùng hàm CALC và nhập tọa độ $(x; y; z)$ của các điểm vào. Nếu tất cả các điểm đều cho kết quả bằng 0 thì đó là mặt phẳng cần tìm. Chỉ cần 1 điểm làm cho phương trình khác 0 đều loại.

Câu 16. Chọn A.

Có $\vec{n}_\alpha = (2; 4; -6)$, $\vec{n}_\beta = (1; 2; -3) \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$. Và $A \in (\beta)$

Câu 17. Chọn A.

Câu 18. Chọn D.

Phương pháp tự luận

Mặt phẳng qua $A(2; 5; 1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{k} = (0; 0; 1)$ có phương trình: $z - 1 = 0$.

Phương pháp trắc nghiệm

Mặt phẳng qua A và song song với (Oxy) có phương trình $z = z_A$.

Câu 19. Chọn A.

Phương pháp tự luận

Mặt phẳng qua $M(1; 4; 3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{j} = (0; 1; 0)$ có phương trình $y - 4 = 0$.

Phương pháp trắc nghiệm

Mặt phẳng qua M và vuông góc với trục Oy có phương trình $y = y_M$.

Câu 20. Chọn B.

$$\text{Do } d(O, (\alpha)) = \frac{6}{\sqrt{36+9+4}} = \frac{6}{7}.$$

Câu 21. Chọn B.

Trục Oz là giao tuyến của 2 mặt phẳng $(Ozx), (Oyz)$ nên mặt phẳng chứa Oz thuộc chùm mặt phẳng tạo bởi 2 mặt $(Ozx), (Oyz) \Rightarrow Ax + By = 0$.

Câu 22. Chọn A.

Phương pháp tự luận

$$+) \vec{AB} = (-4; 1; 3), \vec{AC} = (0; -1; 1) \Rightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] = (4; 4; 4).$$

+) Mặt phẳng đi qua D có VTPT $\vec{n} = (1; 1; 1)$ có phương trình: $x + y + z - 10 = 0$.

+) Thay tọa độ điểm A vào phương trình mặt phẳng thấy không thỏa mãn.

Vậy phương trình mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $x + y + z - 10 = 0$.

Phương pháp trắc nghiệm

Gọi phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$.

Sử dụng MTBT giải hệ bậc nhất 3 ẩn, nhập tọa độ 3 điểm A, B, C vào hệ, chọn $D = 1$ ta được

$A = \frac{1}{9}, B = \frac{1}{9}, C = \frac{1}{9}$. (Trong trường hợp chọn $D = 1$ vô nghiệm ta chuyển sang chọn $D = 0$).

Suy ra mặt phẳng (ABC) có VTPT $\vec{n} = (1; 1; 1)$

Mặt phẳng đi qua D có VTPT $\vec{n} = (1; 1; 1)$ có phương trình: $x + y + z - 10 = 0$.

Thay tọa độ điểm A vào phương trình mặt phẳng thấy không thỏa mãn.

Vậy chọn A.

Câu 23. Chọn A.

Phương pháp tự luận

+) $\overrightarrow{AB} = (-4; 1; 3), \overrightarrow{CD} = (-1; 0; 2) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = (2; 5; 1)$.

+) Mặt phẳng đi qua A có VTPT $\vec{n} = (2; 5; 1)$ có phương trình là: $2x + 5y + z - 18 = 0$.

+) Thay tọa độ điểm C vào phương trình mặt phẳng thấy không thỏa mãn.

Vậy phương trình mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $2x + 5y + z - 18 = 0$

Phương pháp trắc nghiệm

+) Sử dụng MTBT kiểm tra tọa độ điểm A thỏa mãn phương trình hay không? thấy đáp án B, C không thỏa mãn.

+) Kiểm tra điều kiện VTPT của mặt phẳng cần tìm vuông góc với vectơ $\overrightarrow{CD}$ ta loại được đáp D.

Vậy chọn A.

Câu 24. Chọn B.

Phương pháp tự luận

+) Trục Ox vectơ đơn vị $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

Mặt phẳng (Q) có VTPT $\vec{n}_{(Q)} = (1; 1; 1)$.

Mặt phẳng (P) chứa trục Ox và vuông góc với $(Q): x + y + z - 3 = 0$ nên (P) có VTPT

$\vec{n} = [\vec{i}, \vec{n}_{(Q)}] = (0; -1; 1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là: $y - z = 0$.

Phương pháp trắc nghiệm

+) Mặt phẳng (P) chứa trục Ox nên loại đáp án C.

+) Kiểm tra điều kiện VTPT của mặt phẳng (Q) vuông góc với VTPT của (P) ta loại tiếp được đáp án B, D.

Vậy chọn A.

Câu 25. Chọn D.

Trục Ox đi qua $A(1;0;0)$ và có $\vec{i} = (1;0;0)$

Mặt phẳng đi qua $I(2;-3;1)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{i}, \vec{AI}] = (0;1;3)$ có phương trình $y + 3z = 0$.

Câu 26. Chọn C.

Ta có: $\vec{CB}(1;2;5)$.

Mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC có một VTPT là $\vec{CB}(1;2;5)$ nên có phương trình là: $x + 2y + 5z - 5 = 0$.

Câu 27. Chọn A.

Phương pháp tự luận

$\vec{AB} = (1;3;-5)$, $\vec{n_Q} = (1;1;2)$

Mặt phẳng (α) đi qua $A(2;-1;4)$ và có vector pháp tuyến $[\vec{AB}, \vec{n_Q}] = (-10;-6;8) = -2(5;3;-4)$ có phương trình: $5x + 3y - 4z + 9 = 0$.

Vậy $5x + 3y - 4z + 9 = 0$.

Phương pháp trắc nghiệm

Do $(\alpha) \perp (Q) \Rightarrow \vec{n_\alpha} \cdot \vec{n_Q} = 0$, kiểm tra mp (α) nào có $\vec{n_\alpha} \cdot \vec{n_Q} = 0$.

Vậy chọn A.

Câu 28. Chọn D.

Phương pháp tự luận

Ta có $\vec{u_d} = (2;-3;1)$, $\vec{n_\beta} = (1;1;-1)$

Mặt phẳng (α) đi qua $M(0;-2;3)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n_\alpha} = [\vec{u_d}, \vec{n_\beta}] = (2;3;5)$

$\Rightarrow (\alpha): 2x + 3y + 5z - 9 = 0$.

Phương pháp trắc nghiệm

Do $\begin{cases} (\alpha) // (d) \\ (\alpha) \perp (Q) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n_\alpha} = k\vec{n_Q} \\ \vec{n_\alpha} \cdot \vec{n_Q} = 0 \end{cases}$ kiểm tra mp (α) nào thỏa hệ

Vậy chọn A.

Câu 29. Chọn D.

Gọi $M(a,0,0)$ là điểm thuộc trục Ox . Điểm $M \in (P) \Rightarrow 2a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

Vậy $M(2,0,0)$ là giao điểm của $(P), Ox$.

Phương pháp trắc nghiệm

Giải hệ PT gồm PT của (P) và của (Ox) :
$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 4 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}; \text{ bấm máy tính.}$$

Câu 30. Chọn A.

Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên trục Ox, Oy, Oz .

Ta có: $M(5;0;0)$, $N(0;4;0)$, $P(0;0;3)$.

Phương trình mặt phẳng (α) qua $M(5;0;0)$, $N(0;4;0)$, $P(0;0;3)$ là:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 12x + 15y + 20z - 60 = 0.$$

Câu 31. Chọn C.

Ta có: $\overrightarrow{AB}(-8;6;1)$.

Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(5;-2;0)$, $B(-3;4;1)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{a}(1;1;1)$ nên có một VTPT là: $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \vec{a}] = (5;9;-14)$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(5;-2;0)$ và có một VTPT $\vec{n} = (5;9;-14)$ có phương trình là:
 $5x + 9y - 14z - 7 = 0$.

Câu 32. Chọn C.

Phương pháp tự luận

+) Mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) có dạng: $x + y + z + D = 0$ ($D \neq -6$).

+) Do mặt phẳng (Q) tiếp xúc với mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 12$ nên $d(I; (Q)) = R$ với I là tâm cầu, R là bán kính mặt cầu.

Tìm được $D = 6$ hoặc $D = -6$ (loại) Vậy có 1 mặt phẳng thỏa mãn.

Câu 33. Chọn B.

Hai mặt phẳng song song khi $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$

$$\text{Xét } (P) \text{ và } (Q): \frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} = \frac{4}{-8} \neq \frac{-3}{5} \Rightarrow (P) \parallel (Q)$$

$$\text{Xét } (P) \text{ và } (R): \frac{1}{3} = \frac{-2}{-6} = \frac{4}{12} \neq \frac{-3}{-10} \Rightarrow (P) \parallel (R)$$

$$\Rightarrow (Q) \parallel (R)$$

$$\text{Xét } (P) \text{ và } (W): \frac{1}{4} = \frac{-2}{-8} \neq \frac{4}{8}$$

$$\text{Xét } (Q) \text{ và } (W): \frac{-2}{4} = \frac{4}{-8} \neq \frac{-8}{8}$$

$$\text{Xét } (R) \text{ và } (W): \frac{3}{4} = \frac{-6}{-8} \neq \frac{12}{8}.$$

Vậy có 3 cặp mặt phẳng song song.

Câu 34. Chọn C.

$$\text{Để } (\alpha) \text{ song song } (\beta) \Rightarrow \frac{3}{n} = \frac{m-1}{m+2} = \frac{4}{2} \neq \frac{4}{-2} \Leftrightarrow m = -3; n = 6.$$

Vậy $m = -3; n = 6$.

Câu 35. Chọn D.

$$\text{Để 2 mặt phẳng } (P), (Q) \text{ vuông góc} \Rightarrow \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0 \Leftrightarrow 1.2 + m.(-1) + (m-1).3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } m = \frac{1}{2}.$$

Câu 36. Chọn A.

$$\text{Lấy } M(1, 0, 1) \text{ thuộc mặt phẳng } (\alpha). \text{ Ta có } d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\beta)) = \frac{5}{\sqrt{1 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{5}{3}.$$

$$\text{Vậy } d((\alpha), (\beta)) = \frac{5}{3}.$$

Câu 37. Chọn D.

Gọi $M(x, y, z)$ là điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng (P) . Điểm $M'(-x, y, -z)$ là điểm đối xứng của M qua trục tung $\Rightarrow (Q): -x + 2y + z + 1 = 0$ là mặt phẳng đi qua M' và là mặt phẳng đối xứng của (P)

$$\text{Vậy } x - 2y - z - 1 = 0.$$

Câu 38. Chọn C.

Gọi $M(x, y, z)$ là điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng (P) . Điểm $M'(x, -y, z)$ là điểm đối xứng của M qua trục tung $\Rightarrow (Q): 2x + 3y + 5z - 4 = 0$ là mặt phẳng đi qua M' và là mặt phẳng đối xứng của (P) .

$$\text{Vậy } (P): 2x + 3y + 5z - 4 = 0.$$

Câu 39. Chọn A.

Mặt phẳng (P) có một VTPT là $\vec{n_p} = (3; -2; 1)$

Mặt phẳng (Q) có một VTPT là $\vec{n_q} = (5; -4; 3)$

Mặt phẳng (α) vuông góc với 2 mặt phẳng $(P): 3x - 2y + z + 7 = 0$,

$(Q): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$ nên có một VTPT là $\vec{n_p} = [\vec{n_p}, \vec{n_q}] = (-2; -4; -2)$.

Phương trình mặt phẳng (α) là: $x + 2y + z - 5 = 0$

Câu 40. Chọn A.

Ta có $M \in Oy \Rightarrow M(0; m; 0)$

$$\text{Giả thiết có } d(M, (P)) = d(M, (Q)) \Leftrightarrow \frac{|m+1|}{\sqrt{3}} = \frac{|-m-5|}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow m = -3. \text{ Vậy } M(0; -3; 0)$$

Câu 41. Chọn B.

Gọi $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ là giao điểm của mặt phẳng (α) các trục Ox, Oy, Oz

Phương trình mặt phẳng $(\alpha): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ ($a, b, c \neq 0$).

$$\text{Ta có } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{3} = 1 \\ \frac{b}{3} = 2 \\ \frac{c}{3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha): \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 18 = 0$$

Câu 42. Chọn D.

$$\text{Vì } (\alpha) // (\beta) \Rightarrow (\alpha): 2x - 4y + 4z + m = 0 \quad (m \neq 3)$$

$$\text{Giả thiết có } d(A, (\alpha)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|32 + m|}{6} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -14 \\ m = -50 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (\alpha): x - 2y + 2z - 7 = 0, (\alpha): x - 2y + 2z - 25 = 0$$

Câu 43. Chọn D.

$$\text{Ta có } d_1 \text{ đi qua } A(2; 2; 3) \text{ và có } \vec{u}_{d_1} = (2; 1; 3), d_2 \text{ đi qua } B(1; 2; 1) \text{ và có } \vec{u}_{d_2} = (2; -1; 4)$$

$$\vec{AB} = (-1; 1; -2); [\vec{u}_{d_1}; \vec{u}_{d_2}] = (7; -2; -4);$$

$$\Rightarrow [\vec{u}_{d_1}; \vec{u}_{d_2}] \vec{AB} = -1 \neq 0 \text{ nên } d_1, d_2 \text{ chéo nhau.}$$

$$\text{Do } (\alpha) \text{ cách đều } d_1, d_2 \text{ nên } (\alpha) \text{ song song với } d_1, d_2 \Rightarrow \vec{n}_\alpha = [\vec{u}_{d_1}; \vec{u}_{d_2}] = (7; -2; -4)$$

$$\Rightarrow (\alpha) \text{ có dạng } 7x - 2y - 4z + d = 0$$

$$\text{Theo giả thiết thì } d(A, (\alpha)) = d(B, (\alpha)) \Leftrightarrow \frac{|d - 2|}{\sqrt{69}} = \frac{|d - 1|}{\sqrt{69}} \Leftrightarrow d = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow (\alpha): 14x - 4y - 8z + 3 = 0$$

Câu 44. Chọn C.

$$\text{Phương trình mặt phẳng } (ABC) \text{ có dạng } \frac{x}{1} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow bcx + cy + bz - bc = 0$$

$$\text{Theo giả thiết: } \begin{cases} (ABC) \perp (P) \\ d(O, (ABC)) = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c - b = 0 \\ \frac{|-bc|}{\sqrt{(bc)^2 + c^2 + b^2}} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ \frac{b^2}{\sqrt{b^4 + 2b^2}} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3b^2 = \sqrt{b^4 + 2b^2} \Leftrightarrow 8b^4 = 2b^2 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

Câu 45. Chọn A.

Gọi $A(a; 0; 0), B(0; a; 0), C(0; 0; a)$ ($a \neq 0$) là giao điểm của mặt phẳng (α) và các tia Ox, Oy, Oz .

$$\text{Phương trình mặt phẳng } (\alpha) \text{ qua } A, B, C \text{ là: } \frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1.$$

$$\text{Mặt phẳng } (\alpha) \text{ qua điểm } M(5; 4; 3) \Rightarrow a = 12$$

$$\text{Ta có } \frac{x}{12} + \frac{y}{12} + \frac{z}{12} = 1 \Leftrightarrow x + y + z - 12 = 0$$

Câu 46. Chọn A.

Phương pháp tự luận

+) Mặt phẳng (P) chứa trục Oy nên có dạng: $Ax + Cz = 0$ ($A^2 + C^2 \neq 0$).

$$\text{+) Mặt phẳng (P) tạo với mặt phẳng } y + z + 1 = 0 \text{ góc } 60^\circ \text{ nên } \cos 60^\circ = \frac{|\vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Q)}|}{|\vec{n}_{(P)}| \cdot |\vec{n}_{(Q)}|}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + C^2} \cdot \sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{A^2 + C^2} = \sqrt{2}|C| \Leftrightarrow A^2 - C^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = C \\ A = -C \end{cases}$$

$$\text{Phương trình mặt phẳng (P) là: } \begin{cases} x - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Phương pháp trắc nghiệm

+) Mặt phẳng (P) chứa trục Oy nên loại đáp án B, C.

+) Còn lại hai đáp án A, D chung phương trình thứ hai nên ta thử điều kiện về góc đối với phương trình thứ nhất của đáp án A thấy thỏa mãn.

Câu 47. Chọn C.

Mặt phẳng (α) chứa trục Oz có dạng: $Ax + By = 0$ ($A^2 + B^2 \neq 0$)

$$\text{Ta có: } d(I, (\alpha)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|A + 2B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow 4AB + B^2 = 0 \Leftrightarrow 4A + B = 0. \text{ Chọn } A = 3, B = -4 \Rightarrow (\alpha): 3x - 4y = 0$$

Câu 48. Chọn A.

$$\text{Do } G \text{ là trọng tâm tam giác } \triangle ABC \Rightarrow G\left(\frac{1}{3}, 2, \frac{1}{3}\right)$$

$$\text{Gọi } \vec{n} \text{ là một vtcp của mặt phẳng (OGB)} \Rightarrow \vec{n} = \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{OB} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{13}{3}\right)$$

$$\text{Phương trình mặt phẳng (OGB): } x + 2y - 13z = 0 \Rightarrow d(A, (OGB)) = \frac{3\sqrt{174}}{29}$$

Câu 49. Chọn A.

Phương trình mặt phẳng (α): $Ax + Cz = 0$ ($A^2 + C^2 \neq 0$)

Ta có: $2\pi r = 8\pi \Leftrightarrow r = 4$. Mà (S) có tâm $I(1, 2, 3)$, $R = 4$

$$\text{Do } R = r = 4 \Rightarrow I \in (\alpha) \Leftrightarrow A + 3C = 0$$

$$\text{Chọn } A = 3, C = -1 \Rightarrow (\alpha): 3x - z = 0$$

Câu 50. Chọn D.

Phương pháp tự luận

Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 12$ theo đường tròn có chu vi lớn nhất nên mặt phẳng (P) đi qua tâm $I(1; -2; 0)$.

Phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng Oxz có dạng: $Ay + B = 0$

Do (P) đi qua tâm $I(1; -2; 0)$ có phương trình dạng: $y + 2 = 0$.

Phương pháp trắc nghiệm

+) Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng Oxz nên loại đáp án D.

+) Mặt phẳng (P) đi qua tâm $I(1; -2; 0)$ nên thay tọa độ điểm I vào các phương trình loại được đáp án B, C.

Câu 51. Chọn A.

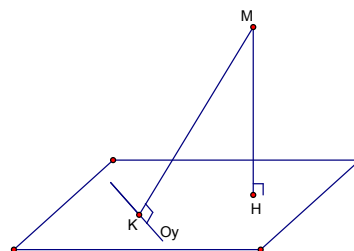
+) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (α) và trục Oy .

Ta có: $K(0; 2; 0)$

$$d(M, (\alpha)) = MH \leq MK$$

Vậy khoảng cách từ M đến mặt phẳng (α) lớn nhất khi mặt phẳng (α) qua K và vuông góc với MK .

Phương trình mặt phẳng: $x + 3z = 0$



Câu 52. Chọn B.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1, 2, 3), R = 3$.

Ta có $IA < R$ nên điểm A nằm trong mặt cầu.

$$\text{Ta có: } d(I, (P)) = \sqrt{R^2 - r^2}$$

Diện tích hình tròn (C) nhỏ nhất $\Leftrightarrow r$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I, (P))$ lớn nhất.

Do $d(I, (P)) \leq IA \Rightarrow \max d(I, (P)) = IA$ Khi đó mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\overrightarrow{IA}$ làm vtpt

$$\Rightarrow (P): x + 2y + z - 2 = 0$$

Câu 53. Chọn A.

Gọi $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ lần lượt là giao điểm của (P) với các trục Ox, Oy, Oz

$$\Rightarrow (P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 (a, b, c \neq 0)$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} N \in (P) \\ NA = NB \\ NA = NC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \\ |a-1| = |b-1| \\ |a-1| = |c-1| \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 3 \Rightarrow x + y + z - 3 = 0$$

Câu 54. Chọn C.

Gọi $M(a; 0; 0), N(0; b; 0)$ lần lượt là giao điểm của (P) với các tia Ox, Oy ($a, b > 0$)

Do $OM = 2ON \Leftrightarrow a = 2b \Rightarrow \overrightarrow{MN}(-2b; b; 0) = -b(2; -1; 0)$. Đặt $\vec{u}(2; -1; 0)$

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P) \Rightarrow \vec{n} = [\vec{u}, \vec{AB}] = (-1; 2; 1)$

Phương trình mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 2 = 0$.

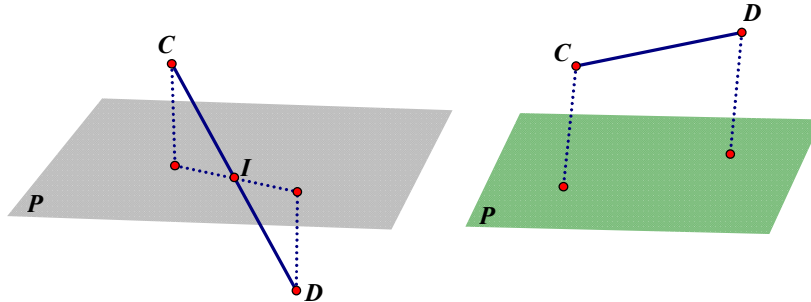
Câu 55. Chọn D.

Trường hợp 1: $CD \parallel (P)$

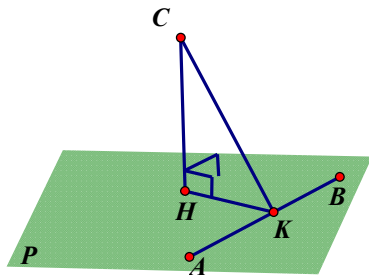
$$\vec{n}_p = \vec{AB} \wedge \vec{CD} = (-6; -10; -14) = -2(3; 5; 7) \Rightarrow (P): 3x + 5y + 7z - 20 = 0$$

Trường hợp 2: (P) đi qua trung điểm $I(1; 1; 2)$ của CD

$$\vec{n}_p = \vec{AB} \wedge \vec{AI} = (1; 3; 3) \Rightarrow (P): x + 3y + 3z - 10 = 0.$$



Câu 56. Chọn A.



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu C của lên $mp(P)$ và đoạn thẳng AB

Ta có: $CH = d(C, (P)) \leq CK \Rightarrow d(C, (P))$ lớn nhất khi $H \equiv K$.

Khi đó mặt phẳng (P) đi qua A, B và vuông góc với mặt phẳng (ABC)

$$\text{Ta có } \vec{n}_p = [\vec{AB}, \vec{AC}] \wedge \vec{AB} = (-9, -6, -3)$$

$$\Rightarrow (P): 3x + 2y + z - 11 = 0$$

Câu 57. Chọn A.

Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB , K là hình chiếu vuông góc B trên AC . M là trực tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $M = BK \cap CH$

$$\text{Ta có: } \left. \begin{array}{l} AB \perp CH \\ AB \perp CO \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp (COH) \Rightarrow AB \perp OM \quad (1)$$

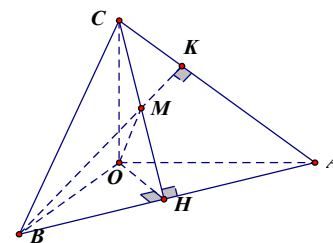
Chứng minh tương tự, ta có: $AC \perp OM \quad (2)$.

Từ (1) và (2), ta có: $OM \perp (ABC)$

$$\text{Ta có: } \vec{OM}(1; 2; 3).$$

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và có một VTPT là $\vec{OM}(1; 2; 3)$ nên có phương trình là: $(x-1) + 2(y-2) + 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Cách 2:



+) Do A, B, C lần lượt thuộc các trục Ox, Oy, Oz nên $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ ($a, b, c \neq 0$).

Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

+) Do M là trực tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ M \in (ABC) \end{cases}$. Giải hệ điều kiện trên ta được a, b, c

Vậy phương trình mặt phẳng: $x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Câu 58. Chọn B.

+) Do A, B, C lần lượt thuộc các trục Ox, Oy, Oz nên $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$.

+) Do G là trọng tâm tứ diện $OABC$ nên $\begin{cases} x_G = \frac{x_O + x_A + x_B + x_C}{4} \\ y_G = \frac{y_O + y_A + y_B + y_C}{4} \\ z_G = \frac{z_O + z_A + z_B + z_C}{4} \end{cases}$

suy ra $a = 4, b = 16, c = 12$.

+) Vậy phương trình đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{4} + \frac{y}{16} + \frac{z}{12} = 1$.

Câu 59. Chọn B.

+) Mặt phẳng (P) cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C nên $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ ($a, b, c > 0$).

Phương trình mặt phẳng (P) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

+) Mặt phẳng (P) qua M nên $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$.

Ta có $1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}} \Leftrightarrow abc \geq 162$

+) Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng $V = \frac{1}{6}abc \geq 27$.

Thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất khi $\frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{3}$ suy ra $a = 3, b = 6, c = 9$.

Phương trình mặt phẳng (P) $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1$ hay $6x + 3y + 2z - 18 = 0$.

Câu 60. Chọn D.

Mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 5$ có tâm $I(1; -2; 0)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$

Gọi $\vec{n}_\alpha$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α)

Ta có: $\vec{n}_\alpha = \vec{n}_P \wedge \vec{n}_Q \Rightarrow \vec{n}_\alpha = (-6; 3; 0) = -3(2; -1; 0) = -3\vec{n}_1$

Lúc đó mặt phẳng (α) có dạng: $2x - y + m = 0$.

Do mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu $(S) \Rightarrow d(I, (\alpha)) = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|m+4|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-9 \end{cases}$

Vậy phương trình mặt phẳng (α) : $2x - y + 1 = 0$ hoặc $2x - y - 9 = 0$.

Câu 61. Chọn A.

Mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 5$ có tâm $I(1; 2; 0)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$

Gọi $\vec{n}_\alpha$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α)

Ta có: $\vec{n}_\alpha = [\vec{n}_p, \vec{AB}] \Rightarrow \vec{n}_\alpha = (4; 4; 6) = 2(2; 2; 3) = 2\vec{n}_1$

Lúc đó mặt phẳng (α) có dạng: $2x + 2y + 3z + m = 0$

Gọi J là hình chiếu của I lên mặt phẳng (α)

Ta có: $R^2 = r^2 + IJ^2 \Rightarrow IJ^2 = 17 \Rightarrow d(I, (\alpha)) = \sqrt{17} \Leftrightarrow |6+m| = 17 \Leftrightarrow m = 11$ hoặc $m = -23$

Vậy phương trình mặt phẳng (α) : $2x + 2y + 3z + 11 = 0$ hoặc $2x + 2y + 3z - 23 = 0$

Câu 62. Chọn A.

Do I, B, C thẳng hàng và $IB = 2IC \Rightarrow \begin{cases} \vec{IB} = 2\vec{IC} \\ \vec{IB} = -2\vec{IC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(-3; 3; -6) \\ I(-\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{2}{3}) \end{cases}$

Vì tọa độ điểm I là số nguyên nên $I(-3; 3; -6)$

Lúc đó mặt phẳng (α) đi qua $A, I(-3; 3; -6)$ và vuông góc với mặt phẳng (P)

$\Rightarrow (\alpha): 2x - y - 2z - 3 = 0$.

Câu 63. Chọn B.

Gọi M, N là các điểm thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng $(P), (Q)$.

M, N thỏa hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x + 3y + 4z - 1 = 0 \end{cases}$

Cho $x = 7 \Rightarrow \begin{cases} y + z = -4 \\ 3y + 4z = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow M(7; -3; -1)$.

Cho $x = 6 \Rightarrow \begin{cases} y + z = -3 \\ 3y + 4z = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow N(6; -1; -2)$.

Lúc đó mặt phẳng (α) chứa 3 điểm $A, N, M \Rightarrow (\alpha): 7x + 8y + 9z - 16 = 0$.

Câu 64. Chọn C.

Do mặt phẳng (α) vuông góc với $d_1 \Rightarrow 2x - y + z + m = 0$.

Mặt phẳng (α) cắt Oz tại $A(0; 0; -m)$, cắt d_2 tại $B(m+1; 2m; m-1)$

$\Rightarrow \vec{AB} = (m+1; 2m; m-1) \Rightarrow \sqrt{9m^2 - 2m + 2} = 3 \Leftrightarrow 9m^2 - 2m - 7 = 0 \Leftrightarrow m = 1, m = -\frac{7}{9}$.

Vậy mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + z + 1 = 0$.

Câu 65. Chọn A.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $4 = \frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} \geq 3\sqrt[3]{\frac{AB \cdot AC \cdot AD}{AB' \cdot AC' \cdot AD'}}$
 $\Rightarrow \frac{AB' \cdot AC' \cdot AD'}{AB \cdot AC \cdot AD} \geq \frac{27}{64} \Rightarrow \frac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{AB' \cdot AC' \cdot AD'}{AB \cdot AC \cdot AD} \geq \frac{27}{64} \Rightarrow V_{AB'C'D'} \geq \frac{27}{64} V_{ABCD}$
 Để $V_{AB'C'D'}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{AD'}{AD} = \frac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{AB'} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AB} \Rightarrow B' \left(\frac{7}{4}; \frac{1}{4}; \frac{7}{4} \right)$
 Lúc đó mặt phẳng $(B'C'D')$ song song với mặt phẳng (BCD) và đi qua $B' \left(\frac{7}{4}; \frac{1}{4}; \frac{7}{4} \right)$
 $\Rightarrow (B'C'D'): 16x + 40y - 44z + 39 = 0$.

Câu 66. Chọn B.

Chọn $M(6; 0; 0), N(2; 2; 2)$ thuộc giao tuyến của $(P), (Q)$

Gọi $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ lần lượt là giao điểm của (α) với các trục Ox, Oy, Oz

$$\Rightarrow (\alpha): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 (a, b, c \neq 0)$$

$$(\alpha) \text{ chứa } M, N \Rightarrow \begin{cases} \frac{6}{a} = 1 \\ \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = 1 \end{cases}$$

Hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều $\Rightarrow OA = OB = OC \Rightarrow |a| = |b| = |c|$

Vậy phương trình $x + y + z - 6 = 0$.

Câu 67. Chọn A.

Gọi $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) và (β) .

Ta có $\vec{n}_\alpha(2; -1; 2); \vec{n}_\beta(1; 2; -2)$.

Áp dụng công thức:

$$\cos((\alpha), (\beta)) = \left| \cos(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta) \right| = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{9}.$$

Câu 68. Chọn A.

$$\text{Đường thẳng } d \text{ có phương trình: } \begin{cases} x = 2t \\ y = \frac{1}{2} + t \\ z = -\frac{3}{2} + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \text{ Suy ra VTCP của } d \text{ là } \vec{u}_d(2; 1; 1)$$

$$\text{Ta có } \sin(d, (P)) = \left| \cos(\vec{u}_d, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow (d, (P)) = 60^\circ.$$

Câu 69. Chọn A.

[Phương pháp tự luận]

Gọi $\vec{n}_\beta(a; b; c)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) cần lập.

$$\cos((\alpha), (\beta)) = \left| \cos(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta) \right| = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|3a - 2b + 2c|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 2(3a - 2b + 2c)^2 = 17(a^2 + b^2 + c^2)$$

Phương trình trên có vô số nghiệm.

Suy ra có vô số vectơ $\vec{n}_\beta(a; b; c)$ là véc tơ pháp tuyến của (β) . Suy ra có vô số mặt phẳng (β) thỏa mãn điều kiện bài toán

[Phương pháp trắc nghiệm]

Dựng hình.

Giả sử tồn tại mặt phẳng (β) thỏa mãn điều kiện bài toán. (Đi qua A và tạo với mặt phẳng (α) một góc 45°). Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (α) . Sử dụng phép quay theo trục Δ với mặt phẳng (β) . Ta được vô số mặt phẳng (β') thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 70. Chọn B.

Áp dụng công thức tính góc giữa hai mặt phẳng.

$$\cos((P), (Q)) = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

Xác định các vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) và (Q) . Thay các giá trị vào biểu thức để tìm giá trị đúng.

Dùng chức năng CALC trong máy tính bỏ túi để hỗ trợ việc tính toán nhanh nhất.

Câu 71. Chọn A.

Gọi vectơ pháp tuyến của mp (P) và (Q) lần lượt là $\vec{n}_p(a; b; c)$ ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$), $\vec{n}_q$

$$(P) \text{ qua } M(1; 0; 0) \Rightarrow (P): a(x-1) + by + cz = 0$$

$$(P) \text{ qua } N(0; 0; -1) \Rightarrow a + c = 0$$

$$(P) \text{ hợp với } (Q) \text{ góc } 45^\circ \Rightarrow \left| \cos(\vec{n}_p, \vec{n}_q) \right| = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{|a-b|}{\sqrt{2a^2+b^2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=-2b \end{cases}$$

Với $a=0 \Rightarrow c=0$ chọn $b=1$ phương trình $(P): y=0$

Với $a=-2b$ chọn $b=-1 \Rightarrow a=2$ phương trình mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 2 = 0$.

Câu 72. Chọn D.

$$\vec{n}_p(1; 1; 1), \vec{n}_q(1; -1; 1) \Rightarrow [\vec{n}_p, \vec{n}_q] = (2; 0; -2)$$

$$\text{Mặt phẳng } (R): 2x - 2z + D = 0 \Rightarrow d(O, (R)) = \frac{|D|}{\sqrt{8}} = 2 \Rightarrow \begin{cases} D = 4\sqrt{2} \\ D = -4\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy phương trình mp } (R): x - z + 2\sqrt{2} = 0; \quad x - z - 2\sqrt{2} = 0$$

Câu 73. Chọn A.

$$M(x; y; z). \text{ Ta có } d(M, (P)) = d(M, (Q)) \Leftrightarrow \frac{|x + y - 2z - 3|}{\sqrt{6}} = \frac{|x + y - 2z + 5|}{\sqrt{6}}$$

$$\Leftrightarrow |x + y - 2z - 3| = |x + y - 2z + 5| \Leftrightarrow x + y - 2z + 1 = 0$$

Câu 74. Chọn B.

$$\text{Cho điểm } M(x; y; z), \quad d(M, (P)) = d(M, (Q)) \Leftrightarrow \frac{|x - 2y - 2z - 7|}{3} = \frac{|2x + y + 2z + 1|}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 4z + 8 = 0 \\ 3x - y - 6 = 0 \end{cases}.$$

Câu 75. Chọn B.

$$\text{Điểm } M(m; 0; 0) \in Ox; \quad d(M, (P)) = d(M, (Q)) \Leftrightarrow \frac{|m - 3|}{\sqrt{6}} = |m|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 = m\sqrt{6} \\ m - 3 = -m\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{1 + \sqrt{6}} \\ m = \frac{3}{1 - \sqrt{6}} \end{cases}$$

Câu 76. Chọn D.

Trường hợp 1: (P) qua AB và song song với CD , khi đó:

$$(P) \text{ có vectơ pháp tuyến là } [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = (-8; -4; -14) \text{ và } C \notin (P) \Rightarrow (P): 4x + 2y + 7z - 15 = 0.$$

Trường hợp 2: (P) qua AB cắt CD tại trung điểm I của đoạn CD . Ta có $I(1; 1; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AI}(0; -1; 0)$, vectơ pháp tuyến của (P) là $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}] = (2; 0; 3)$ nên phương trình $(P): 2x + 3z - 5 = 0$.

Câu 77. Chọn A.

$$(P) \text{ có VTPT } \vec{n} \text{ vuông góc với } \overrightarrow{MN}(-1; 2; 1) \text{ nên } \vec{n}(2b + c; b; c).$$

Gọi α là góc tạo bởi (P) và (Q) , α nhỏ nhất khi $\cos \alpha$ lớn nhất.

$$\text{Ta có } \cos \alpha = \frac{|b|}{\sqrt{5b^2 + 2c^2 + 4bc}}$$

Nếu $b = 0$ thì $\cos \alpha = 0$.

$$\text{Nếu } b \neq 0 \text{ thì } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{c}{b} + 1\right)^2 + 3}}. \text{ Khi đó, } \cos \alpha \text{ lớn nhất khi } \frac{c}{b} = -1 \Rightarrow \text{chọn } b = 1; c = -1$$

Vậy, phương trình mp (P) là $x + y - z + 3 = 0$. Do đó $d(A, (P)) = \sqrt{3}$.

Câu 78. Chọn C.

Gọi I là trung điểm đoạn BC ; các điểm B', C', I' lần lượt là hình chiếu của B, C, I trên (P) .

Ta có tứ giác $BCC'B'$ là hình thang và II' là đường trung bình.

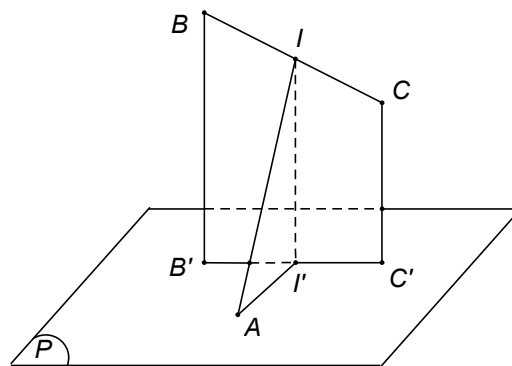
$$\Rightarrow d(B, (P)) + d(C, (P)) = BB' + CC' = 2II'.$$

Mà $II' \leq IA$ (với IA không đổi)

Do vậy, $d(B, (P)) + d(C, (P))$ lớn nhất khi $I' \equiv A$

$\Rightarrow (P)$ đi qua A và vuông góc $\overline{IA}$ với $I(2; 0; -1)$.

$$\Rightarrow (P): -x + 2z - 1 = 0 \Rightarrow E(1; 3; 1) \in (P).$$



Câu 79. Chọn A.

Ta có phương trình mp(ABC) là $\frac{x}{1} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

$$(ABC) \perp (P) \Rightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0 \Rightarrow b = c \quad (1)$$

$$\text{Ta có } d(O, (ABC)) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 8 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow b = c = \frac{1}{2} \Rightarrow b + c = 1.$$

Câu 80. Chọn D.

Gọi $M(x; y; z)$. Ta có $T = 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 - 8x - 8y + 6z + 31$

$$\Rightarrow T = 6 \left[\left(x - \frac{2}{3} \right)^2 + \left(y - \frac{2}{3} \right)^2 + \left(z + \frac{1}{2} \right)^2 \right] + \frac{145}{6}$$

$$\Rightarrow T = 6MI^2 + \frac{145}{6} \text{ với } I \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{2} \right)$$

$\Rightarrow T$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất $\Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P)

$$\Rightarrow M \left(-\frac{5}{18}; -\frac{5}{18}; -\frac{13}{9} \right).$$

Chủ đề 4

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

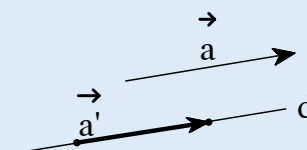


A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. Vector chỉ phương của đường thẳng

Vector $\vec{a} \neq \vec{0}$ là 1 vector chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của vector $\vec{a}$ song song hoặc trùng với đường thẳng d .



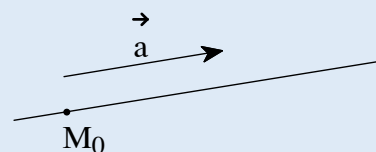
2. Phương trình tham số - Phương trình chính tắc của đường thẳng

Đường thẳng d đi qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có 1 vector chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$

+ Phương trình tham số của đường thẳng d là:
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

+ Phương trình chính tắc của đường thẳng d là:

$$d: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \quad (2) \quad (a_1, a_2, a_3 \neq 0)$$



II. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = x'_0 + b_1 k \\ y = y'_0 + b_2 k \\ z = z'_0 + b_3 k \end{cases}$

Đường thẳng d_1 có 1 vector chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$.

Đường thẳng d_2 có 1 vector chỉ phương $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$.

1. Xét vị trí tương đối của d_1 và d_2 theo chương trình cơ bản:

Bước 1: Kiểm tra tính cùng phương của $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Bước 2: Nhận xét:

+ Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương thì:
$$\begin{cases} d_1 // d_2 \\ d_1 \equiv d_2 \end{cases}$$

+ Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương thì hoặc d_1 cắt d_2 hoặc d_1 và d_2 chéo nhau.

• TH1: d_1 cắt d_2

Điều kiện 1: $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

Điều kiện 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x_0 + a_1 t = x'_0 + b_1 k & (1) \\ y_0 + a_2 t = y'_0 + b_2 k & (2) (*) \\ z_0 + a_3 t = z'_0 + b_3 k & (3) \end{cases}$$
 có nghiệm duy nhất (t_0, k_0) .

Kết luận: d_1 cắt d_2 tại điểm $M_0(x_0 + a_1 t_0; y_0 + a_2 t_0; z_0 + a_3 t_0)$.

Lưu ý: Giải hệ (*) bằng cách: Từ (1) và (2) giải ra $(t_0; k_0)$ và thay vào (3) (Nếu (3) thoả thì $(t_0; k_0)$, ngược lại thì không).

• **TH2: d_1 và d_2 chéo nhau**

Điều kiện 1: $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

Điều kiện 2: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x_0 + a_1 t = x'_0 + b_1 k & (1) \\ y_0 + a_2 t = y'_0 + b_2 k & (2) (*) \\ z_0 + a_3 t = z'_0 + b_3 k & (3) \end{cases}$$
 vô nghiệm.

• **TH3: d_1 song song với d_2**

Điều kiện 1: $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Điều kiện 2: Chọn điểm $M_0(x_0; y_0; z_0) \in d_1$. Cần chỉ rõ $M_0 \notin d_2$.

• **TH4: d_1 và d_2 trùng nhau**

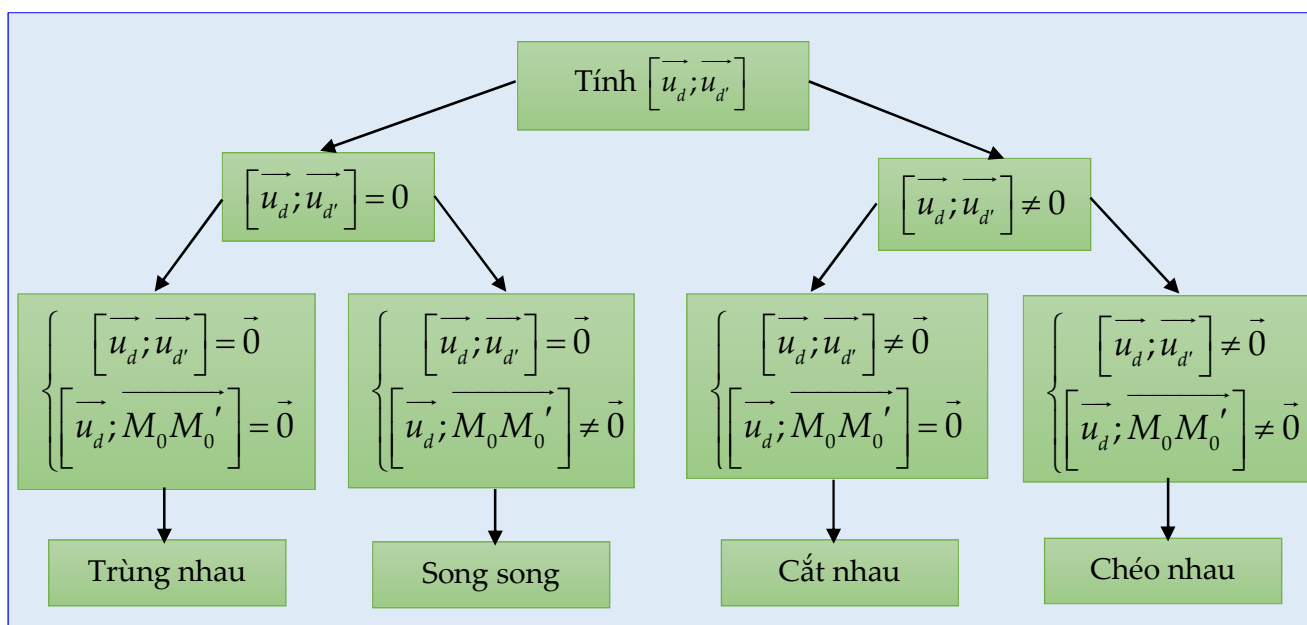
Điều kiện 1: $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trùng nhau.

Điều kiện 2: Chọn điểm $M_0(x_0; y_0; z_0) \in d_1$. Cần chỉ rõ $M_0 \in d_2$.

Đặc biệt: $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$

2. Xét vị trí tương đối của d_1 và d_2 theo chương trình nâng cao bằng sơ đồ sau:

- Đường thẳng d có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u}_d$ và $M_0 \in d$.
- Đường thẳng d' có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u}_{d'}$ và $M'_0 \in d'$.



III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Cho đường thẳng: $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ và mp $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

$$\text{Xét hệ phương trình: } \begin{cases} x = x_0 + a_1 t & (1) \\ y = y_0 + a_2 t & (2) \\ z = z_0 + a_3 t & (3) \\ Ax + By + Cz + D = 0 & (4) \end{cases} (*)$$

- (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow d$ cắt (α)
- (*) có vô nghiệm $\Leftrightarrow d \parallel (\alpha)$
- (*) vô số nghiệm $\Leftrightarrow d \subset (\alpha)$

IV. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG – KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

- Khoảng cách từ điểm M đến một đường thẳng d qua điểm M_0 có vectơ chỉ phương $\vec{u}$:

$$d(M, d) = \frac{\left| [\vec{M_0M}; \vec{u}] \right|}{\left| \vec{u} \right|}.$$

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

d đi qua điểm M và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và d' đi qua điểm M' và có vectơ chỉ phương $\vec{u}'$

là:

$$d(d, d') = \frac{\left| [\vec{u}; \vec{u}'] \cdot \vec{M_0M} \right|}{\left| [\vec{u}; \vec{u}'] \right|}.$$

- Khoảng cách từ giữa đường thẳng và mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng đến mặt phẳng hoặc khoảng cách từ một điểm thuộc mặt phẳng đến đường thẳng.

V. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG – GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

- Góc giữa hai đường thẳng (d) và (d') có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ và $\vec{u}' = (a'; b'; c')$ là ϕ :

$$\cos \phi = \frac{\left| aa' + bb' + cc' \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}} \quad (0^\circ \leq \phi \leq 90^\circ).$$

Đặc biệt: $(d) \perp (d') \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$.

- Góc giữa đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ và mp (α) có vectơ pháp tuyến

$\vec{n} = (A; B; C)$ là:

$$\sin \phi = \left| \cos(\vec{n}, \vec{u}) \right| = \frac{\left| Aa + Bb + Cc \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (0^\circ \leq \phi \leq 90^\circ).$$

B. MỘT SỐ DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

I. XÁC ĐỊNH VECTO CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG

1. Phương pháp

- Vecto $\vec{a} \neq \vec{0}$ là 1 vector chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của vectơ $\vec{a}$ song song hoặc trùng với đường thẳng d .
- Nếu $\vec{a}$ là 1 vector chỉ phương của đường thẳng d thì $k\vec{a}, (k \neq 0)$ cũng là 1 vector chỉ phương của d .
- Gọi $\vec{u}$ là 1 vector chỉ phương của đường thẳng d . Nếu có 2 vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương và $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{a} \\ \vec{u} \perp \vec{b} \end{cases}$ thì chọn 1 vector chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = [\vec{a}, \vec{b}]$ hoặc $\vec{u} = k[\vec{a}, \vec{b}], k \neq 0$

2. Một số bài toán minh họa

Bài toán 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; -1; 2), B(2; 3; 1), C(4; 2; 0)$;

các đường thẳng $\Delta_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 + 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R}), \Delta_2 : \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{2}$; các mặt phẳng $(P) : x + 3y - 2z + 1 = 0$

, $(Q) : 3x - z = 0$. Tìm một vector chỉ phương của các đường thẳng sau:

- Đường thẳng Δ_1 .
- Đường thẳng d_1 đi qua A và song song với Δ_2 .
- Đường thẳng AB .
- Đường thẳng d_2 qua B và song song với Oy .
- Đường thẳng d_3 qua C và vuông góc với (P) .
- Đường thẳng d_4 qua B , vuông góc với Ox và Δ_1 .
- Đường thẳng $d_5 \subset (Q)$ qua O và vuông góc với Δ_2 .
- Đường thẳng d_6 là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P), (Q)$.
- Đường thẳng d_7 qua B vuông góc với Δ_2 và song song với mặt phẳng (Oxy) .
- Đường thẳng d_8 qua A , cắt và vuông góc với trục Oz .

Lời giải:

- Đường thẳng Δ_1 có 1 vector chỉ phương là $\vec{a} = (0; -3; 4)$.
- Đường thẳng Δ_2 có 1 vector chỉ phương là $\vec{b} = (3; -3; 2)$. Ta có: $d_1 // \Delta_2$ nên $\vec{b} = (3; -3; 2)$ cũng là 1 vector chỉ phương của d_1 .
- Đường thẳng AB có 1 vector chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (1; 4; -1)$.
- Đường thẳng $d_2 // Oy$ nên có 1 vector chỉ phương là $\vec{j} = (0; 1; 0)$.

- e) Mặt phẳng (P) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (1; 3; -2)$. Đường thẳng $d_3 \perp (P)$ nên có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{n}_1 = (1; 3; -2)$.
- f) Gọi $\vec{u}_4$ là 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng d_4 .
Ta có: $[\vec{i}, \vec{a}] = (0; -4; -3)$, $\begin{cases} \vec{u}_4 \perp \vec{i} \\ \vec{u}_4 \perp \vec{a} \end{cases} \Rightarrow$ chọn $\vec{u}_4 = (0; 4; 3)$.
- g) Mặt phẳng (Q) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (3; 0; -1)$. Gọi $\vec{u}_5$ là 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng d_5 . Ta có: $[\vec{n}_2, \vec{b}] = (-3; -9; -9)$, $\begin{cases} \vec{u}_5 \perp \vec{n}_2 \\ \vec{u}_5 \perp \vec{b} \end{cases} \Rightarrow$ chọn $\vec{u}_5 = (1; 3; 3)$.
- h) Gọi $\vec{u}_6$ là 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng d_6 . Ta có: $[\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (-3; -5; -9)$,
 $\begin{cases} \vec{u}_6 \perp \vec{n}_1 \\ \vec{u}_6 \perp \vec{n}_2 \end{cases} \Rightarrow$ chọn $\vec{u}_6 = (3; 5; 9)$.
- i) Gọi $\vec{u}_7$ là 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng d_7 . Mặt phẳng (Oxy) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{k} = (0; 0; 1)$. Ta có: $[\vec{n}_2, \vec{k}] = (-3; 3; 0)$, $\begin{cases} \vec{u}_7 \perp \vec{n}_2 \\ \vec{u}_7 \perp \vec{k} \end{cases} \Rightarrow$ chọn $\vec{u}_7 = (1; -1; 0)$.
- j) Gọi $H = d_8 \cap Oz$. Ta có $\begin{cases} d_8 \perp Oz \\ A \in d_8 \end{cases} \Rightarrow H$ là hình chiếu của A lên $Oz \Rightarrow H(0; 0; 2)$. Vậy d_8 có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{OA} = (1; -1; 0)$.

Bài toán 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x + 3ky - z + 2 = 0$ và $(\beta): kx - y + 2z + 1 = 0$. Tìm k để giao tuyến của $(\alpha), (\beta)$

a) vuông góc với mặt phẳng $(P): x - y - 2z + 5 = 0$.

b) song song với mặt phẳng $(Q): -x - y - 2z + 1 = 0$.

Lời giải:

Gọi $\vec{u}$ là 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng d là giao tuyến của $(\alpha), (\beta)$.

Mặt phẳng của (α) có 1 vectơ pháp là $\vec{n}_\alpha = (1; 3k; -1)$.

Mặt phẳng của (β) có 1 vectơ pháp là $\vec{n}_\beta = (k; -1; 2)$.

Ta có: $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n}_\alpha \\ \vec{u} \perp \vec{n}_\beta \end{cases} \Rightarrow$ chọn $\vec{u} = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta] = (6k - 1; -k - 2; -3k^2 - 1)$.

a) Mặt phẳng (P) có 1 vectơ pháp tuyến $\vec{n}_p = (1; -1; -2)$. Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng

$$\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{n}_p \text{ cùng phương} \Leftrightarrow [\vec{u}, \vec{n}_p] = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -3k^2 + 2k + 3 = 0 \\ -11k + 4 = 0 \\ 1 - 5k = 0 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm}).$$

Vậy không tồn tại giá trị k thỏa yêu cầu bài toán.

b) Mặt phẳng (Q) có 1 vectơ pháp tuyến $\vec{n}_Q = (-1; -1; -2)$.

Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (Q) :

$$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n}_p = 0 \Leftrightarrow -6k + 1 - k - 2 + 3k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 3k^2 - 7k = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = \frac{7}{3} \end{cases}$$

II. LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. Phương pháp

Bước 1: Xác định $M_0(x_0; y_0; z_0) \in d$.

Bước 2: Xác định 1 vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ của đường thẳng d .

Bước 3: Áp dụng công thức, ta có:

- Phương trình tham số của d :
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$
- Phương trình chính tắc của d :
$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}; \quad (a_1, a_2, a_3 \neq 0)$$

2. Một số bài toán minh họa

Bài toán 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$ và

$$\Delta_2: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 3t \end{cases} \text{ . Vi\text{e}t phương trình:}$$

a) tham số của đường thẳng Δ_1 .

b) chính tắc của đường thẳng Δ_2 .

Lời giải:

a) Đường thẳng Δ_1 qua $M(1; -2; 0)$ và có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -1; 2)$, có phương trình tham số

$$\text{l\`a: } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - t \\ z = 2t \end{cases}$$

b) Đường thẳng Δ_1 qua $N(2; -1; 0)$ và có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; 3)$, có phương trình chính tắc

$$\text{l\`a: } \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}.$$

Chú ý: Nếu đề bài chỉ yêu cầu viết phương trình đường thẳng thì ta viết phương trình tham số hay phương trình chính tắc của đường thẳng đều được.

Bài toán 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;-1)$, $B(2;3;-3)$, $C(1;2;4)$,

$D(-1;2;1)$; đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x=t \\ y=-1-t \\ z=2t \end{cases}$; mặt phẳng $(\alpha): 3x+5y-z+1=0$. Viết phương

trình của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:

- a) Qua A và có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;3;5)$. b) Qua 2 điểm B, C .
 c) Qua $M_0(1;2;3)$ và song song với trục tung. d) Qua C và song song với Δ_1 .
 e) Qua B và vuông góc với (Oxz) . f) Qua D và vuông góc với (α) .

Lời giải:

a) Đường thẳng d qua $A(2;0;-1)$ và có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;3;5)$, có phương trình tham số

$$\text{là: } \begin{cases} x=2-t \\ y=3t \\ z=-1+5t \end{cases}.$$

b) Đường thẳng d qua $B(2;3;-3)$ và có 1 vectơ chỉ phương $\vec{BC}=(-1;-1;7)$, có phương trình tham

$$\text{số là: } \begin{cases} x=2-t \\ y=3-t \\ z=-3+7t \end{cases}.$$

c) Đường thẳng d qua $M_0(1;2;3) \notin Ox$ và song song với trục Ox nên nhận $\vec{i}=(1;0;0)$ làm 1 vectơ

$$\text{chỉ phương, có phương trình tham số: } \begin{cases} x=1+t \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}.$$

d) Đường thẳng d đi qua điểm $C(1;2;4)$. Đường thẳng Δ_1 có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;-1;2)$. Ta

có: $d // \Delta_1 \Rightarrow d$ có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;-1;2)$. Vậy phương trình chính tắc của đường thẳng d là: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{2}$.

e) Đường thẳng d đi qua điểm $B(2;3;-3)$. Mặt phẳng (Oxz) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{j}=(0;1;0)$.

Đường thẳng d vuông góc với (Oxz) nên nhận $\vec{j}=(0;1;0)$ làm 1 vectơ chỉ phương. Vậy phương

$$\text{trình tham số của đường thẳng } d \text{ là: } \begin{cases} x=2 \\ y=3+t \\ z=-3 \end{cases}.$$

f) Đường thẳng d đi qua điểm $D(-1;2;1)$. Mặt phẳng (α) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;5;-1)$.

Đường thẳng d vuông góc với (α) nên nhận $\vec{n}=(3;5;-1)$ làm 1 vectơ chỉ phương. Vậy phương

$$\text{trình chính tắc của đường thẳng } d \text{ là: } \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-1}{-1}.$$

Bài toán 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;1;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(1;2;2)$,

$D(-1;-2;1)$; các đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x=2+t \\ y=-1-t \\ z=t \end{cases}$, $\Delta_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$; các mặt phẳng

$(\alpha): x+2y-z+1=0$, $(\beta): x+y+2z+3=0$. Viết phương trình của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:

- Qua A và vuông góc với các đường thẳng Δ_1, AB .
- Qua B và vuông góc với đường thẳng AC và trục Oz .
- Qua O và song song với 2 mặt phẳng (α) , (Oyz) .
- Qua C , song song với (β) và vuông góc với Δ_2 .
- d là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) , (β) .

Lời giải:

a) Đường thẳng d qua $A(1;1;-1)$. Đường thẳng Δ_1 có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (1;-1;1)$; $\vec{AB} = (1;-2;4)$

$\Rightarrow [\vec{u}; \vec{AB}] = (-2;-3;-1)$. Gọi $\vec{u}$ là 1 vectơ chỉ phương của d . Ta có: $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{u}_1 \\ \vec{u} \perp \vec{AB} \end{cases} \Rightarrow$ chọn $\vec{u} = (2;3;1)$.

Vậy phương trình chính tắc của d là $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1}$.

b) Đường thẳng d qua $B(2;-1;3)$; $\vec{AC} = (0;1;3)$; $\vec{k} = (0;0;1) \Rightarrow [\vec{AC}, \vec{k}] = (1;0;0)$. Gọi $\vec{u}$ là 1 vectơ chỉ

phương của d . Ta có: $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{AC} \\ \vec{u} \perp \vec{k} \end{cases} \Rightarrow$ chọn $\vec{u} = (1;0;0)$.

Vậy phương trình tham số của d là $\begin{cases} x=2+t \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases}$

c) Đường thẳng d qua $O(0;0;0)$; $\vec{n}_1 = (1;2;-1)$ là 1 vectơ pháp tuyến của (α) ; $\vec{i} = (1;0;0)$ là 1 vectơ pháp tuyến của (Oyz) ; Ta có: $[\vec{n}_1, \vec{i}] = (0;-1;-2)$.

Gọi $\vec{u}$ là 1 vectơ chỉ phương của d . Ta có: $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n}_1 \\ \vec{u} \perp \vec{i} \end{cases} \Rightarrow$ chọn $\vec{u} = (0;1;2)$. Vậy phương trình tham số

của d là $\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=2t \end{cases}$.

d) Đường thẳng d qua $C(1;2;2)$; $\vec{n}_2 = (1;1;2)$ là 1 vectơ pháp tuyến của (β) ; $\vec{u}_2 = (2;1;1)$ là 1 vectơ chỉ phương của Δ_2 ; Ta có: $[\vec{n}_2, \vec{u}_2] = (-1;3;-1)$. Gọi $\vec{u}$ là 1 vectơ chỉ phương của d . Ta có:

$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n}_2 \\ \vec{u} \perp \vec{u}_2 \end{cases} \Rightarrow$ chọn $\vec{u} = (-1;3;-1)$. Vậy phương trình chính tắc của d là $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-2}{-1}$.

e) Chọn điểm trên giao tuyến d :

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x+2y-z+1=0 \\ x+y+2z+3=0 \end{cases}$ (I). Cho $z=0$, giải được: $\begin{cases} x=-5 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow A(-5;2;0) \in d$.

Xác định vectơ chỉ phương của d : Gọi $\vec{u}$ là 1 vectơ chỉ phương của d . Ta có: $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n}_1 \\ \vec{u} \perp \vec{n}_2 \end{cases} \Rightarrow$ chọn

$\vec{u} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (5; -3; -1)$. Vậy phương trình tham số của d : $\begin{cases} x = -5 + 5t \\ y = 2 - 3t \\ z = -t \end{cases}$.

Bài toán 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng d đi qua

$A(2; -1; 1)$ cắt và vuông góc với đường thẳng Δ : $\begin{cases} x = t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases}$.

Lời giải:

Đường thẳng Δ có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -1; 1)$.

Gọi $B = d \cap \Delta$. Ta có: $B \in \Delta \Rightarrow B(t; -1-t; t)$; $\overrightarrow{AB} = (t-2; -t; t-1)$; $\vec{u} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Suy ra: $B(1; -2; 1)$. Đường thẳng d đi qua $A(2; -1; 1)$ và có 1 vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (1; 1; 0)$ nên

có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 \end{cases}$.

Bài toán 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3; 2; -4)$ và $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$

và mặt phẳng $(P): 3x - 2y - 3z - 7 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A , song song với (P) và cắt đường thẳng d .

Lời giải:

Cách 1:

Bước 1: Xác định điểm $B = d \cap \Delta$: $AB \parallel mp(P)$.

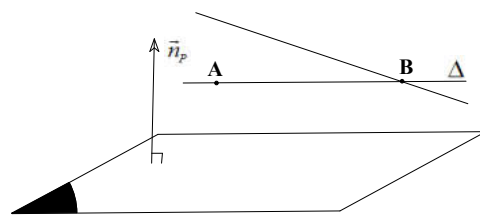
Ta có: $d: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -4 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. Gọi $B(2+3t; -4-2t; 1+2t) \in d$

Lúc đó: $\overrightarrow{AB} = (3t-1; -2t-6; 2t+5)$. Mặt phẳng (P) có 1 vectơ pháp $\vec{n}_p = (3; -2; -3)$

$AB \parallel mp(P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_p = 3(3t-1) - 2(-2t-6) - 3(2t+5) = 0 \Leftrightarrow 7t-6=0 \Leftrightarrow t = \frac{6}{7}$

Bước 2: Đường thẳng $\Delta \equiv AB$.

Vì vậy $B\left(\frac{32}{7}; -\frac{40}{7}; \frac{19}{7}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(\frac{11}{7}; -\frac{54}{7}; \frac{47}{11}\right)$.



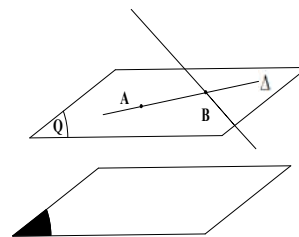
Đường thẳng $\Delta \equiv AB$ đi qua A và có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (11; -54; 47)$ nên có phương

$$\text{trình tham số: } \begin{cases} x = 3 + 11t \\ y = 3 - 54t \\ z = -4 + 47t \end{cases}$$

Cách 2:

Bước 1: Lập phương trình mp(Q) qua A và song song với mp(P):

Bước 2: Xác định giao điểm B của d và mp(Q), $\Delta \equiv AB$.



Bài toán 6: (Khối A- 2007) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng d vuông góc với mp(P), đồng thời cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 với

$$d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}; d_2: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}; (P): 7x + y - 4z = 0.$$

Lời giải:

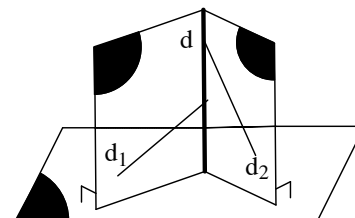
Cách 1:

Bước 1: Viết phương trình mp (α) chứa d_1 và vuông góc với (P).

Bước 2: Viết phương trình mp (β) chứa d_2 và vuông góc với (P).

Bước 3: Đường thẳng cần tìm là giao tuyến của mp (α) và mp (β).

Kiểm tra sự cắt nhau. (mối quan hệ giữa vectơ chỉ phương)



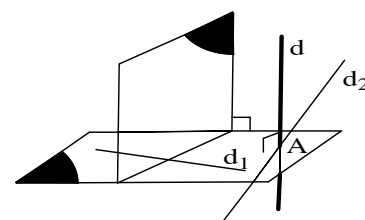
Cách 2:

Bước 1: Viết phương trình mp (α) chứa d_1 và vuông góc với (P).

Bước 2: Xác định giao điểm A của d_2 và mp (α).

Bước 3: Đường thẳng cần tìm đi qua A và vuông góc với mp(P).

Kiểm tra sự cắt nhau. (Mối quan hệ giữa vectơ chỉ phương).



Cách 3:

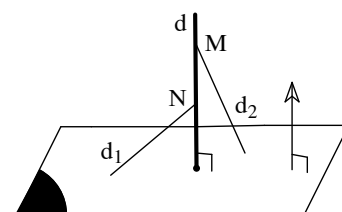
Sử dụng kỹ năng khái niệm “thuộc” (Tìm ra 2 giao điểm M, N)

$$\text{Ta có: } d_1: \begin{cases} x = 2m \\ y = 1 - m \\ z = -2 + m \end{cases}; d_2: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}$$

Mặt phẳng (P) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P = (7; 1; -4)$.

Gọi $N = d \cap d_1, M = d \cap d_2$. Ta có: $N(2m; 1 - m; -2 + m) \in d_1, M(-1 + 2t; 1 + t; 3) \in d_2$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{NM} = (2t - 2m - 1; t + m; 5 - m).$$



Lúc đó ta có $\overrightarrow{NM}$ và $\vec{n}_p$ cùng phương $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_p] = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -4t - 3m - 5 = 0 \\ 8t - 15m + 31 = 0 \\ -5t - 9m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ m = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow N(2; 0; -1), M(-5; -1; 3).$$

Đường thẳng $d \equiv NM$, qua $N(2; 0; -1)$ và có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{n}_p = (7; 1; -4)$, có phương trình

tham số:
$$\begin{cases} x = 2 + 7t \\ y = t \\ z = -1 - 4t \end{cases}.$$

Bài toán 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mp(α) và mặt cầu (S) có phương trình như sau: $(\alpha): x + y + z + 5 = 0$, $(S): (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 25$.

a) Chứng minh: (α) cắt (S) theo một đường tròn có tâm H.

b) Gọi I là tâm mặt cầu (S). Viết phương trình đường thẳng IH.

Lời giải:

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; 0)$, bán kính $R = 5$. Ta có: $d(I, (\alpha)) = \frac{6}{\sqrt{3}} < R \Rightarrow (\alpha)$ cắt (S) theo một đường tròn có tâm H.

b) Đường thẳng IH đi qua $I(2; -1; 0)$ và nhận VTPT của (α) là $\vec{n} = (1; 1; 1)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình chính tắc: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}.$

III. XÉT VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Dùng 1 trong 2 cách như trong phần lý thuyết.

Bài toán 1: Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } \Delta_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=3-t \end{cases} ; \Delta_2: \begin{cases} x=2+2t' \\ y=3+4t' \\ z=5-2t' \end{cases} & \quad \text{b) } \Delta_1: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{-2} ; \Delta_2: \begin{cases} x=2-3t \\ y=5+3t \\ z=3-6t \end{cases} \\ \text{c) } \Delta_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{-1} ; \Delta_2: \begin{cases} x=2-2t \\ y=-2+t \\ z=1+3t \end{cases} & \quad \text{d) } \Delta_1: \begin{cases} x=2t \\ y=-1+3t \\ z=t \end{cases} ; \Delta_2: \begin{cases} x=1+3t' \\ y=-2+2t' \\ z=1+2t' \end{cases} \end{aligned}$$

Lời giải:

a) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M(1;0;3)$ và có 1 vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1;2;-1)$.

Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $N(2;3;5)$ và có 1 vectơ chỉ phương $\vec{b} = (2;4;-2)$.

Ta có: $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$, $\overrightarrow{MN} = (1;3;2)$, $[\vec{a}, \overrightarrow{MN}] = (7;-3;1) \neq \vec{0} \Rightarrow \Delta_1 // \Delta_2$.

b) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M(3;4;5)$ và có 1 vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-1;1;-2)$.

Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $N(2;5;3)$ và có 1 vectơ chỉ phương $\vec{b} = (-3;3;-6)$.

Ta có: $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$, $\overrightarrow{MN} = (-1;1;-2)$, $[\vec{a}, \overrightarrow{MN}] = \vec{0} \Rightarrow \Delta_1 \equiv \Delta_2$.

c) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M(1;2;-3)$ và có 1 vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1;3;-1)$.

Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $N(2;-2;1)$ và có 1 vectơ chỉ phương $\vec{b} = (-2;1;3)$.

Ta có: $[\vec{a}, \vec{b}] = (10;-1;7) \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{MN} = (1;-4;4)$, $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \overrightarrow{MN} = 35 \neq 0 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2$ chéo nhau.

d) Đường thẳng Δ_1 đi qua điểm $M(0;-1;0)$ và có 1 vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2;3;1)$.

Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $N(1;-2;1)$ và có 1 vectơ chỉ phương $\vec{b} = (3;2;2)$.

Ta có: $[\vec{a}, \vec{b}] = (4;-1;-5) \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{MN} = (1;-1;1)$, $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2$ cắt nhau.

Bài toán 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xác định vị trí tương đối của cặp đường thẳng

$$\text{sau theo } m \text{ với } d_m: \begin{cases} x=1+mt \\ y=m+2t \\ z=1-m-3t \end{cases} \quad \text{và } d'_m: \begin{cases} x=m-2t' \\ y=mt' \\ z=1-m+t' \end{cases}.$$

Lời giải:

Đường thẳng d_m qua điểm $A(1;m;1-m)$ và có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{d}_2$.

Đường thẳng d'_m qua điểm $B(m;0;1-m)$ và có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (-2;m;1)$.

Ta có: $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2+3m; 6-m; m^2+4) \neq \vec{0}$ do $(m^2+4 \neq 0 \forall m)$ và $\overrightarrow{AB} = (m-1;-m;0)$.

Xét $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{AB} = (2+3m)(m-1) - m(6-m) = 4m^2 - 7m - 2$.

$$\text{TH 1: } [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow d_m \text{ và } d'_m \text{ cắt nhau.}$$

$$\text{TH 2: } [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{AB} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow d_m \text{ và } d'_m \text{ chéo nhau.}$$

Bài toán 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 5+t \\ y = at \\ z = 2-t \end{cases}$ và

$$d_2: \begin{cases} x = 1+2t' \\ y = a+4t' \\ z = 2-2t' \end{cases}. \text{ Xác định } a \text{ để:}$$

a) d_1 vuông góc với d_2 .

b) d_1 song song với d_2 .

Đường thẳng d_1 có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; a; -1)$.

Đường thẳng d_2 có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (2; 4; -2)$.

a) d_1 vuông góc với $d_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow 2 + 4a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -1$.

b) d_1 song song với $d_2 \Rightarrow \vec{u}_1, \vec{u}_2$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-2a+4; 0; 0) = \vec{0} \Leftrightarrow a = 2$.

Kiểm tra lại: Với $a = 2$ thì $d_1: \begin{cases} x = 5+t \\ y = 2t \\ z = 2-t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 1+2t' \\ y = 2+4t' \\ z = 2-2t' \end{cases}$.

Chọn $A(5; 0; 2) \in d_1$, thấy $A \notin d_2$ (do hệ phương trình $\begin{cases} 5 = 1+2t' \\ 0 = 2+4t' \\ 2 = 2-2t' \end{cases}$ vô nghiệm)

Vậy khi $a = 2$ thì d_1 song song với d_2 .

Bài toán 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = 3-t \end{cases}$ và

$$\Delta_2: \begin{cases} x = 2+2t' \\ y = 3+4t' \\ z = 5-2t' \end{cases}.$$

a) Chứng minh Δ_1 và Δ_2 cùng thuộc một mặt phẳng.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ_1 và Δ_2 .

Lời giải:

Đường thẳng Δ_1 qua điểm $A(1;0;3)$ và có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1;2;-1)$.

Đường thẳng Δ_2 qua điểm $B(2;3;5)$ và có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (2;4;-2)$.

a) Ta có: $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0}$ và $\overrightarrow{AB} = (1;3;2)$.

Xét $[\overrightarrow{AB}, \vec{u}_1] = (-7;3;-1) \neq \vec{0}$. Từ đó suy ra, Δ_1 và Δ_2 song song, tức là Δ_1 và Δ_2 cùng thuộc một mặt phẳng.

b) Gọi $\vec{n}_p$ là vectơ pháp tuyến của mp(P) cần tìm.

Ta có: $\begin{cases} \vec{n}_p \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n}_p \perp \vec{u}_1 \end{cases} \Rightarrow \text{chọn } \vec{n}_p = [\overrightarrow{AB}, \vec{u}_1] = (-7;3;-1).$

Lúc đó, mặt phẳng (P) đi qua $A(1;0;3) \in \Delta_1$ và có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_p = (-7;3;-1)$.

(P): $-7(x-1)+3(y-0)-1(z-3)=0 \Leftrightarrow -7x+3y-z+10=0$.

Bài toán 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng: $\Delta_1: \frac{3-x}{7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$

$$\text{và } \Delta_2: \begin{cases} x=8+t \\ y=5+2t \\ z=8-t \end{cases}$$

a) Chứng minh Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

b) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ_1 và song song với Δ_2 .

Lời giải:

Đường thẳng Δ_1 qua điểm $A(3;1;1)$ và có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (-7;2;3)$.

Đường thẳng Δ_2 qua điểm $B(8;5;8)$ và có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (1;2;-1)$.

a) Ta có: $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-8;-4;-16) \neq \vec{0}$ và $\overrightarrow{AB} = (5;4;7)$.

Xét $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{AB} = -40-16-112 = -168 \neq 0$. Từ đó suy ra, Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

b) Gọi $\vec{n}_p$ là vectơ pháp tuyến của mp(P) cần tìm.

Ta có: $\begin{cases} \vec{n}_p \perp \vec{u}_1 \\ \vec{n}_p \perp \vec{u}_2 \end{cases} \Rightarrow \text{chọn } \vec{n}_p = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-8;-4;-16).$

Lúc đó, mặt phẳng (P) đi qua $A(3;1;1) \in \Delta_1$ và có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_p = (-8;-4;-16)$.

(P): $-8(x-3)-4(y-1)-16(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x+y+4z-11=0$.

Bài toán 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=8+t \\ y=5+2t \\ z=8-t \end{cases}$ và

$$d_2: \frac{3-x}{7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

- a) Chứng tỏ rằng hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau.
 b) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ O , song song với d_1 và d_2 .
 c) Viết phương trình đường vuông góc chung của 2 đường thẳng d_1 và d_2 .

Lời giải:

Đường thẳng d_1 qua điểm $A(8;5;8)$ và có 1 vector chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1;2;-1)$.

Đường thẳng d_2 qua điểm $B(3;1;1)$ và có 1 vector chỉ phương là $\vec{u}_2 = (-7;2;3)$.

a) Ta có: $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (8;4;16) \neq \vec{0}$ và $\vec{AB} = (-5;-4;-7)$.

Xét $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{AB} = -40 - 16 - 112 = -168 \neq 0$. Từ đó suy ra, d_1 và d_2 chéo nhau.

b) Gọi $\vec{n}_p$ là vector pháp tuyến của mp (P) cần tìm.

Ta có: $\begin{cases} \vec{n}_p \perp \vec{u}_1 \\ \vec{n}_p \perp \vec{u}_2 \end{cases} \Rightarrow$ chọn $\vec{n}_p = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (8;4;16)$.

Lúc đó, mặt phẳng (P) đi qua $O(0;0;0)$ và có 1 vector pháp tuyến là $\vec{n}_p = (8;4;16)$, có phương trình:

$$(P): 8(x-0) + 4(y-0) + 16(z-0) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 4z = 0.$$

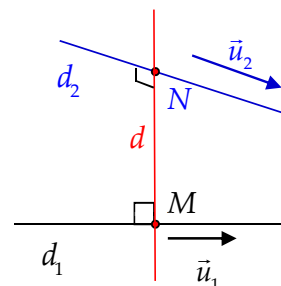
c) Gọi d là đường vuông góc chung của d_1 và d_2 , $d \cap d_1 = \{M\}$, $d \cap d_2 = \{N\}$.

Ta có: $M \in d_1 \Rightarrow M(8+t;5+2t;8-t)$, $N \in d_2 \Rightarrow N(3-7t';1+2t';1+3t')$,

$$\vec{MN} = (-7t' - t - 5; 2t' - 2t - 4; 3t' + t - 7).$$

$$\begin{cases} \vec{u}_1 \perp \vec{MN} \\ \vec{u}_2 \perp \vec{MN} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 \cdot \vec{MN} = 0 \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{MN} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7t' - t - 5 + 4t' - 4t - 8 - 3t' - t + 7 = 0 \\ 49t' + 7t + 35 + 4t' - 4t - 8 + 9t' + 3t - 21 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6t' - 6t = 6 \\ 62t' + 6t = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 0 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow M(7;3;9), N(3;1;1) \Rightarrow \vec{MN} = (-4;-2;-8).$$



Vậy đường thẳng $d \equiv MN$ đi qua điểm $N(3;1;1)$ và có 1 vector chỉ phương $\vec{u} = (2;1;4)$ nên có phương trình chính tắc là $d_2: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{4}$.

Bài toán 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 4 đường thẳng:

$$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}, d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{-4}, d_3: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}, d_4: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

- a) CMR: Hai đường thẳng d_1, d_2 cùng nằm trong 1 mặt phẳng. Viết phương trình mặt phẳng đó.
 b) CMR: Tồn tại một đường thẳng Δ cắt cả 4 đường thẳng đã cho. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng Δ .

Lời giải:

a) Đường thẳng d_1 qua điểm $A(1;2;0)$ và có 1 vector chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1;2;-2)$.

Đường thẳng d_2 qua điểm $B(2;2;0)$ và có 1 vector chỉ phương là $\vec{u}_2 = (2;4;-4)$.

Ta có: $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0}$ và $\overrightarrow{AB} = (1; 0; 0)$. Xét $[\vec{u}_1, \overrightarrow{AB}] = (0; -2; -2) \neq \vec{0}$. Từ đó suy ra, d_1 và d_2 song song, tức là d_1 và d_2 cùng thuộc một mặt phẳng.

Gọi $\vec{n}_p$ là vectơ pháp tuyến của mp(P) cần tìm. Ta có: $\begin{cases} \vec{n}_p \perp \vec{u}_1 \\ \vec{n}_p \perp \overrightarrow{AB} \end{cases} \Rightarrow$ chọn $\vec{n}_p = [\vec{u}_1, \overrightarrow{AB}] = (0; -2; -2)$.

Lúc đó, mặt phẳng (P) đi qua $A(1; 2; 0) \in \Delta_1$ và có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_p = (0; -2; -2)$.

$$(P): 0(x-1) - 2(y-2) - 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow y + z - 2 = 0.$$

b) Ta có $d_3: \begin{cases} x = 2m \\ y = m \\ z = 1 + m \end{cases}$, $d_4: \begin{cases} x = 2 + 2n \\ y = 2n \\ z = 1 - n \end{cases}$.

o Tọa độ giao điểm C của d_3 và mp(P) là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} x = 2m & (1) \\ y = m & (2) \\ z = 1 + m & (3) \\ y + z - 2 = 0 & (4) \end{cases}$$

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta có: $2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \Rightarrow C\left(1; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

o Tọa độ giao điểm D của d_4 và mp(P) là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} x = 2 + 2n & (1) \\ y = 2n & (2) \\ z = 1 - n & (3) \\ y + z - 2 = 0 & (4) \end{cases}$$

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta có: $n - 1 = 0 \Leftrightarrow n = 1 \Rightarrow D(4; 2; 0)$.

Lúc đó, dễ thấy đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là đường thẳng $\Delta \equiv CD$.

Đường thẳng Δ qua $D(4; 2; 0)$ và có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} = (2; 1; -1)$, có phương trình

$$\Delta: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases}.$$

Bài toán 8: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1; -1; 1)$ và 2 đường thẳng

$$d_1: \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 2t \\ z = -3t \end{cases}; d_2: \begin{cases} x = -\frac{4}{5} - t \\ y = -\frac{3}{5} - 2t \\ z = -5t \end{cases}. \text{ Chứng minh } A, d_1 \text{ và } d_2 \text{ cùng thuộc một mặt phẳng.}$$

Lời giải:

o Lập phương trình mp(P) chứa A và d_1 :

Đường thẳng d_1 có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; -2; -3)$.

Chọn $B(0; -1; 0) \in d_1$. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 0; -1)$.

Gọi $\vec{n}_p$ là vectơ pháp tuyến của mp(P) cần tìm.

Ta có: $\begin{cases} \vec{n}_p \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n}_p \perp \vec{u} \end{cases} \Rightarrow \text{chọn } \vec{n}_p = [\vec{u}, \overrightarrow{AB}] = (2; 4; -2)$.

Lúc đó, mặt phẳng (P) đi qua $A(1; -1; 1)$ và có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_p = (2; 4; -2)$.

(P): $2(x-1) + 4(y+1) - 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z - 2 = 0$.

- o Chỉ rõ $d_2 \subset \text{mp}(P)$. Ta có $C\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}; 0\right) \in d_2 \Rightarrow C \in \text{mp}(P)$ và $D\left(\frac{1}{5}; \frac{7}{5}; 5\right) \in d_2 \Rightarrow D \in \text{mp}(P)$.

Từ đó suy ra $d_2 \subset \text{mp}(P)$.

Kết luận: Mặt phẳng (P): $x + 2y - z - 2 = 0$ là mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán.

IV. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

1. Phương pháp:

Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ và mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} \Rightarrow A(x_0 + a_1 t) + B(y_0 + a_2 t) + C(z_0 + a_3 t) + D = 0 \quad (1)$

- o Nếu (1) vô nghiệm thì $d \cap (P) = \emptyset$.
- o Nếu (1) có nghiệm duy nhất $t = t_0$ thì d cắt (P) tại $M(x_0 + a_1 t_0; y_0 + a_2 t_0; z_0 + a_3 t_0)$
- o Nếu (1) có vô số nghiệm thì $d \subset (P)$.

Chú ý: Nếu VTCP của d cùng phương với VTPT của (P) thì $d \perp (P)$.

2. Một số bài toán minh họa

Bài toán 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, và 3 đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 2t \\ z = -3t \end{cases}$

$d_2: \begin{cases} x = -t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}; d_3: \frac{x+4}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2}$ và mặt phẳng (P): $x + y + z + 5 = 0$.

Xét vị trí tương đối của:

a) d_1 và (P).

b) d_2 và (P).

c) d_3 và (P).

Lời giải:

- a) Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = -3t \\ x + y + z + 5 = 0 \end{cases}, \text{ ta thấy hệ vô nghiệm. Suy ra } d_1 // (P).$$
- b) Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} x = -t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \\ x + y + z + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ x = -3 \\ y = -5 \\ z = 3 \end{cases}, \text{ Suy ra } d_2 \text{ cắt } (P) \text{ tại điểm } M(-3; -5; 3).$$
- c) Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} x = -4 + t \\ y = -1 + t \\ z = -2t \\ x + y + z + 5 = 0 \end{cases}, \text{ ta thấy hệ có vô số nghiệm. Suy ra } d_3 \subset (P).$$

Bài toán 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 3z - 4 = 0$ và đường

thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{4} = z$.

- a) Xác định giao điểm A của đt Δ và mặt phẳng (α) .
- b) Viết phương trình đường thẳng d qua A nằm trong mp (α) và vuông góc với Δ .

Lời giải:

a) Ta có: $\Delta: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = t \end{cases}$

Tạo độ giao điểm A của Δ và (α) là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} x = -1 + 2t & (1) \\ y = -3 + 4t & (2) \\ z = t & (3) \\ 2x - y + 3z - 4 = 0 & (4) \end{cases}$$

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta có: $2(-1 + 2t) - (-3 + 4t) + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow 3t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow A(1; 1; 1)$

b) Mặt phẳng (α) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_\alpha = (2; -1; 3)$.

Đường thẳng Δ có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = (2; 4; 1)$.

Gọi $\vec{u}_d$ là 1 vectơ chỉ phương của d . Ta có: $\begin{cases} \vec{u}_d \perp \vec{n}_\alpha \\ \vec{u}_d \perp \vec{u}_\Delta \end{cases} \Rightarrow \text{chọn } \vec{u}_d = [\vec{n}_\alpha, \vec{u}_\Delta] = (-13; 4; 10).$

Đường thẳng d qua $A(1; 1; 1)$ và có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d = (-13; 4; 10)$, có phương trình:

d:
$$\begin{cases} x = 1 - 13t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 + 10t \end{cases}$$

Bài toán 3: (DỰ BỊ D-2006) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) :

$$4x - 3y + 11z - 26 = 0 \text{ và 2 đường thẳng } d_1: \frac{x}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}; \quad d_2: \frac{x-4}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2}$$

a) Chứng minh: d_1 và d_2 chéo nhau.

b) Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trên mp(P), đồng thời cắt d_1 và d_2 .

Lời giải:

Bước 1: Xác định giao điểm A của d_1 và mp(P).

Bước 2: Xác định giao điểm B của d_2 và mp(P).

Kết luận: Đường thẳng Δ cần tìm là đường thẳng AB.

Trình bày:

$$\text{Ta có: } d_1: \begin{cases} x = -t \\ y = 3 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}; \quad d_2: \begin{cases} x = 4 + m \\ y = m \\ z = 3 + 2m \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \circ \text{ Tọa độ giao điểm C của } d_1 \text{ và mp(P) là nghiệm của hệ phương trình: } & \begin{cases} x = -t & (1) \\ y = 3 + 2t & (2) \\ z = -1 + 3t & (3) \\ 4x - 3y + 11z - 26 = 0 & (4) \end{cases} \end{aligned}$$

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta có: $23t - 46 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow C(-2; 7; 5)$.

$$\begin{aligned} \circ \text{ Tọa độ giao điểm D của } d_2 \text{ và mp(P) là nghiệm của hệ phương trình: } & \begin{cases} x = 4 + m & (1) \\ y = m & (2) \\ z = 3 + 2m & (3) \\ 4x - 3y + 11z - 26 = 0 & (4) \end{cases} \end{aligned}$$

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta có: $23m + 23 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \Rightarrow D(3; -1; 1)$.

Lúc đó, dễ thấy đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán là đường thẳng $\Delta \equiv CD$.

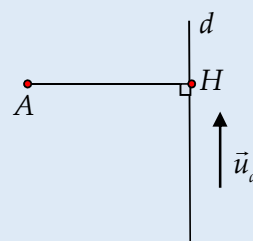
Đường thẳng Δ qua $C(-2; 7; 5)$ và có 1 vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{CD} = (5; -8; -4)$, có phương trình

$$\Delta: \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 7 - 8t \\ z = 5 - 4t \end{cases}.$$

V. HÌNH CHIẾU CỦA MỘT ĐIỂM LÊN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

1. Phương pháp

Cho điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.



Cách 1:

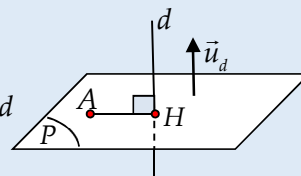
Gọi H là hình chiếu của A lên d . Ta có $H \in d \Rightarrow H(x_0 + a_1 t; y_0 + a_2 t; z_0 + a_3 t)$.

Tính $\overrightarrow{AH}$; $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}_d \Leftrightarrow \vec{u}_d \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \Rightarrow t = ? \Rightarrow H$?

Cách 2:

Gọi H là hình chiếu của A lên d .

- Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với d
- Khi đó tìm tọa độ điểm H thỏa $\{H\} = d \cap (P)$



2. Bài toán minh họa

Bài toán : Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;0)$ và đường thẳng

$$\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$$

a) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng Δ .

b) Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua đường thẳng Δ .

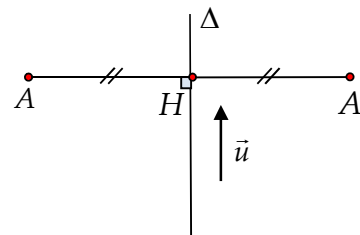
Lời giải:

a) Đường thẳng Δ có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 2; 1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng Δ .

Ta có: $H \in \Delta \Rightarrow H(2 + t; 1 + 2t; t)$; $\overrightarrow{AH} = (1 + t; 1 + 2t; t)$

$$\vec{u} \perp \overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow H\left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right).$$



b) Ta có:

A' đối xứng với A qua đường thẳng $\Delta \Leftrightarrow H$ là trung điểm của đoạn thẳng AA'

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} = \frac{1 + x_{A'}}{2} \\ 0 = \frac{0 + y_{A'}}{2} \\ -\frac{1}{2} = \frac{0 + z_{A'}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2 \\ y_{A'} = 0 \\ z_{A'} = -1 \end{cases}.$$

Vậy $A'(2; 0; -1)$.

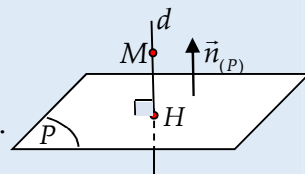
VI. HÌNH CHIẾU CỦA MỘT ĐIỂM LÊN MỘT MẶT PHẪNG

1. Phương pháp

Cho điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$.

Gọi H là hình chiếu của A lên $mp(P)$.

- Viết phương trình đường thẳng d qua A và vuông góc với $mp(P)$.
- Khi đó tìm tọa độ điểm H thỏa $\{H\} = d \cap (P)$.



2. Một số bài toán minh họa

Bài toán 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;2)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$.

- Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (P) .
- Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (P) .

Lời giải:

a) Mặt phẳng (P) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;1;1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (P) .

- Đường thẳng d qua $M(1;4;2)$ và vuông góc với (P) nhận $\vec{n} = (1;1;1)$ làm vectơ chỉ phương

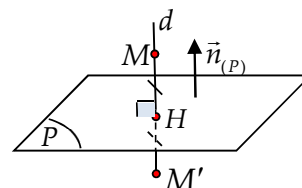
$$\text{nên có phương trình } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

- $H \in d \Rightarrow H(1+t; 4+t; 2+t);$

$$H \in (P) \Rightarrow 1+t+4+t+2+t-1=0 \Leftrightarrow t=-2. \text{ Vậy } H(-1;2;0)$$

b) Ta có: M' đối xứng với M qua $(P) \Leftrightarrow H$ là trung điểm của đoạn thẳng MM' .

Áp dụng công thức tọa độ trung điểm $\Rightarrow M'(-3;0;-2)$.



Bài toán 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x + y - z + 5 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 10 = 0$.

- Chứng minh mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C) .
- Tìm tọa độ tâm và tính bán kính của đường tròn (C) .

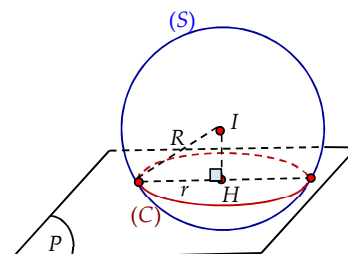
Lời giải:

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;1)$, bán kính $R=4$.

$$d(I; (P)) = \sqrt{3} < R \Rightarrow (P) \text{ cắt } (S) \text{ theo một đường tròn } (C).$$

b) Gọi H, r lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (C) .

- Áp dụng định lý Pitago ta được $r = \sqrt{R^2 - [d(I, (P))]^2} = \sqrt{13}$.



- Tìm tọa độ tâm H của đường tròn (C) .

Phân tích: Ta thấy H là hình chiếu vuông góc điểm I lên mặt phẳng (P) .

Trình bày:

Đường thẳng IH đi qua $I(1; -2; 1)$ và nhận VTPT của (P) là $\vec{n} = (1; 1; -1)$ làm vectơ chỉ phương

$$\text{nên có phương trình tham số là: } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

$$H \in IH \Rightarrow H(1+t; -2+t; 1-t); H \in (P) \Rightarrow 1+t-2+t-1+t+5=0 \Leftrightarrow t=-1. \text{ Vậy } H(0; -3; 2).$$

Bài toán 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x + y - z - 1 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 10 = 0$.

- Chứng minh mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S)
- Tìm tọa độ tiếp điểm của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) .

Lời giải:

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 1)$, bán kính $R = 4$.

Ta có: $d(I; (P)) = \sqrt{3} = R \Rightarrow (\alpha)$ cắt (S) theo một đường tròn (C) .

b) Gọi H tiếp điểm của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) .

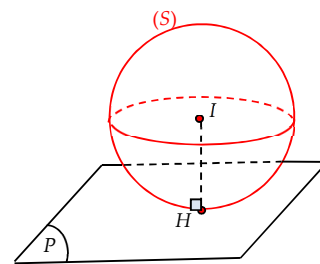
Phân tích: Ta thấy H là hình chiếu vuông góc điểm I lên mặt phẳng (P) .

Trình bày:

Đường thẳng IH đi qua $I(1; -2; 1)$ và nhận VTPT của (P) là $\vec{n} = (1; 1; -1)$ làm vectơ chỉ phương

$$\text{nên có phương trình tham số là: } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

$$H \in IH \Rightarrow H(1+t; -2+t; 1-t); H \in (P) \Rightarrow 1+t-2+t-1+t-1=0 \Leftrightarrow t=1. \text{ Vậy } H(2; -1; 0).$$



Bài toán 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết các phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = z-3$ trên mỗi mặt phẳng sau: $mp(Oxy)$, $mp(Oyz)$, $mp(Oxz)$ và $(\alpha): x + y + z - 7 = 0$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

* Trên mặt phẳng (Oxy) :

- Ta chọn $A(1; -2; 3) \in d$, $B(3; 1; 4) \in d$.
- Hình chiếu vuông góc của A trên $mp(Oxy)$ là $A_1(1; -2; 0)$.

Hình chiếu vuông góc của B trên $mp(Oxy)$ là $B_1(3;1;0)$.

Lúc đó, hình chiếu d' của d trên $mp(Oxy)$ là đường thẳng A_1B_1 .

Đường thẳng d' qua $A_1(1;-2;0)$ và có 1 vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{A_1B_1} = (2;3;0)$, có phương trình:

$$d' : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 0 \end{cases}$$

Hoàn toàn tương tự, độc giả tự giải quyết yêu cầu đối với $mp(Oxz)$, $mp(Oyz)$.

*** Trên mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 7 = 0$:**

- Ta chọn $A(1;-2;3) \in d$. (Sử dụng thuật toán hình chiếu vuông góc điểm trên mặt phẳng)

o Đường thẳng d đi qua $A(1;-2;3)$, vuông góc với (α) nên d nhận $\vec{n}_\alpha = (1;1;1)$ làm 1 vectơ chỉ

phương, có phương trình $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$

o Tọa độ hình chiếu A' của A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 + t & (1) \\ y = -2 + t & (2) \\ z = 3 + t & (3) \\ x + y + z - 7 = 0 & (4) \end{cases}$$

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta có: $1 + t + (-2 + t) + 3 + t - 7 = 0 \Leftrightarrow 3t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{3} \Rightarrow A' \left(\frac{8}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{14}{3} \right)$.

- Để ý rằng, d không song song với $mp(\alpha)$ nên tọa độ giao điểm B' là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t & (1) \\ y = -2 + 3t & (2) \\ z = 3 + t & (3) \\ x + y + z - 7 = 0 & (4) \end{cases}$$

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta có: $1 + 2t + (-2 + 3t) + 3 + t - 7 = 0 \Leftrightarrow 6t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{6} \Rightarrow B' \left(\frac{8}{3}; \frac{1}{2}; \frac{23}{6} \right)$.

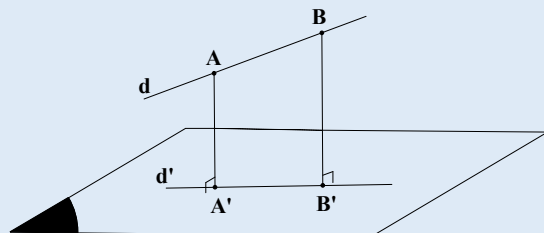
Lúc đó, hình chiếu d' của d trên $mp(\alpha)$ là đường thẳng $A'B'$.

Đường thẳng d' qua $A' \left(\frac{8}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{14}{3} \right)$ và có 1 vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{A'B'} = \left(0; \frac{5}{6}; -\frac{5}{6} \right)$, có phương trình

$$d' : \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = -\frac{1}{3} + \frac{5}{6}t \\ z = \frac{14}{3} - \frac{5}{6}t \end{cases}$$

Nhận xét: Trong cách giải trên, chúng tôi lấy thêm giao điểm (trong trường hợp cắt nhau) của d và (α) cho nhanh gọn, còn nếu thông thường (và dễ hiểu) thì chọn 2 điểm và nếu như vậy thì bài giải tương đối dài dòng! Thuật toán như sau:

- Xác định A' là hình chiếu của A trên (α) .
- Xác định B' là hình chiếu của B trên (α) .
- Đường thẳng $d' \equiv A'B'$



Bài toán 5: (HVBCVT-2000) (Bài toán hình chiếu theo phương bất kì)

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + y + z + 3 = 0$ và hai đường thẳng:

$$\Delta_1: \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3} \quad \text{và} \quad \Delta_2: \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$$

Viết phương trình hình chiếu của Δ_2 theo phương Δ_1 lên mặt phẳng (α) .

Lời giải:

Phân tích: Thực hiện hoàn toàn như bài tập trên, chỉ khác là dựng đường thẳng d song song với Δ_1 mà thôi!

Ta có: $\Delta_1: \begin{cases} x = 3 - 7t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 7 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 9 - t \end{cases}$

+ Chọn $A(7; 3; 9) \in \Delta_2$, $B(5; -1; 11) \in \Delta_2$.

- Đường thẳng d đi qua $A(7; 3; 9)$, song song với Δ_1 nên d nhận $\vec{u}_{\Delta_1} = (-7; 2; 3)$ làm 1 vectơ chỉ

phương, có phương trình $d: \begin{cases} x = 7 - 7t \\ y = 3 + 2t \\ z = 9 + 3t \end{cases}$.

- Tọa độ hình chiếu A' của A là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} x = 7 - 7t & (1) \\ y = 3 + 2t & (2) \\ z = 9 + 3t & (3) \\ x + y + z + 3 = 0 & (4) \end{cases}$$

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta có: $7 - 7t + (3 + 2t) + 9 + 3t + 3 = 0 \Leftrightarrow -2t + 22 = 0 \Leftrightarrow t = 11$.

$\Rightarrow A'(-70; 25; 42)$.

- Đường thẳng d đi qua $B(5; -1; 11)$, song song với Δ_1 nên d nhận $\vec{u}_{\Delta_1} = (-7; 2; 3)$ làm 1 vectơ chỉ

phương, có phương trình $d: \begin{cases} x = 5 - 7t \\ y = -1 + 2t \\ z = 11 + 3t \end{cases}$.

- Tọa độ hình chiếu A' của A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 5 - 7t & (1) \\ y = -1 + 2t & (2) \\ z = 11 + 3t & (3) \\ x + y + z + 3 = 0 & (4) \end{cases}$$

Thay (1), (2), (3) vào (4) ta có: $5 - 7t + (-1 + 2t) + 11 + 3t + 3 = 0 \Leftrightarrow -2t + 18 = 0 \Leftrightarrow t = 9$.

$$\Rightarrow B'(-58; 17; 38).$$

Lúc đó, hình chiếu d' của Δ_2 trên $mp(\alpha)$ là đường thẳng $A'B'$.

Đường thẳng d' qua $A'(-70; 25; 42)$ và có 1 vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{A'B'} = (12; -8; -4)$, có phương trình

$$d' : \begin{cases} x = -70 + 12t \\ y = 25 - 8t \\ z = 42 - 4t \end{cases}.$$

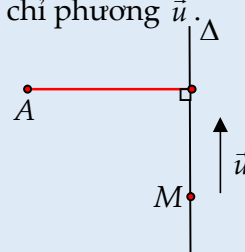
VII. KHOẢNG CÁCH TỪ ĐIỂM ĐẾN ĐƯỜNG THẲNG – KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

1. Kiến thức vận dụng

• Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng:

Cho điểm A và đường thẳng Δ ($A \notin \Delta$) đi qua điểm M và có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u}$.

Ta có: $d(A; \Delta) = \frac{|\left[\vec{u}, \overrightarrow{AM} \right]|}{|\vec{u}|}$



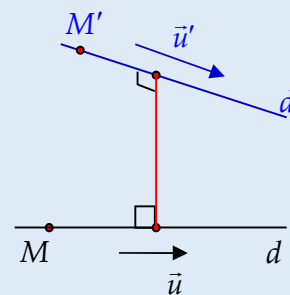
• Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

Cho 2 đường thẳng chéo nhau d, d' .

- d đi qua điểm M và có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u}$.
- d' đi qua điểm M' và có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u}'$.

Ta có: $d(d; d') = \frac{|\left[\vec{u}, \vec{u}' \right] \cdot \overrightarrow{MM'}|}{|\left[\vec{u}, \vec{u}' \right]|}$

Đặc biệt: Nếu $\Delta // \Delta'$ thì $d(\Delta; \Delta') = d(A; \Delta')$; ($A \in \Delta$).



2. Một số bài toán minh họa

Bài toán 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;1;2)$ hai đường thẳng:

$$d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 3 - 2t' \\ z = 1 \end{cases}$$

- Chứng minh 2 đường thẳng d và d' chéo nhau.
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng d và d' .
- Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d .

Lời giải:

a) Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;2;0)$ và có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u}(-1;2;3)$.

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(1;3;1)$ và có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u}'(1;-2;0)$.

$$[\vec{u}, \vec{u}'] = (6;3;0) \neq \vec{0}; \overrightarrow{MM'} = (0;1;1); [\vec{u}, \vec{u}'] \cdot \overrightarrow{MM'} = 3 \neq 0.$$

Suy ra: d và d' chéo nhau.

$$b) d(d; d') = \frac{|[\vec{u}, \vec{u}'] \cdot \overrightarrow{MM'}|}{|[\vec{u}, \vec{u}']|} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$c) \text{Ta có: } \overrightarrow{AM} = (-2;1;-2); [\vec{u}, \overrightarrow{AM}] = (-7;-8;3) \Rightarrow d(A; d) = \frac{|[\vec{u}, \overrightarrow{AM}]|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{122}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{427}}{14}.$$

Bài toán 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hai đường thẳng d, d' và mặt cầu (S) có phương

$$\text{trình } d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 2t \end{cases}; d': \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 1 - 2t' \\ z = t' \end{cases} \text{ và } (S): (x-1)^2 + y^2 + z^2 = \frac{20}{9}.$$

- Chứng minh đường thẳng d tiếp xúc với mặt cầu (S) tại tiếp điểm H . Tìm tọa độ điểm H .
- Chứng minh đường thẳng d' cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm phân biệt A, B . Tính độ dài đoạn AB và tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB .

Lời giải:

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;2;0)$ và có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u}(-1;2;2)$.

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(1;1;0)$ và có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u}'(2;-2;1)$.

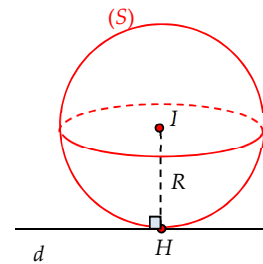
Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;0)$ và bán kính $R = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

a)

$$+) \overrightarrow{IM} = (0;2;0); [\vec{u}, \overrightarrow{IM}] = (-4;0;-2) \Rightarrow d(I; d) = \frac{\sqrt{20}}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{3} = R.$$

Suy ra d tiếp xúc với mặt cầu (S) tại tiếp điểm H .

$$+) H \in d \Rightarrow H(1-t; 2+2t; 2t); \overrightarrow{IH} = (-t; 2+2t; 2t).$$



Ta có: $\vec{u} \perp \overline{IH} \Rightarrow \vec{u} \cdot \overline{IH} = 0 \Rightarrow t = -\frac{4}{9}$. Vậy $H\left(\frac{4}{9}; \frac{10}{9}; -\frac{8}{9}\right)$.

b)

+) $\overline{IM'} = (0; 1; 0); [\vec{u'}, \overline{IM}] = (-1; 0; 2) \Rightarrow d(I; d) = \frac{\sqrt{5}}{3} < R$.

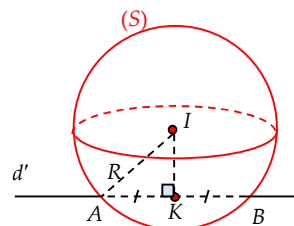
Suy ra d cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm A, B .

$$AB = 2AK = 2\sqrt{R^2 - IK^2} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$$

+) Gọi K là trung điểm của đoạn $AB \Rightarrow IK \perp d$.

$$K \in d' \Rightarrow K(1+2t'; 1-2t'; t'); \overline{IK} = (2t'; 1-2t'; t').$$

Ta có: $\vec{u'} \perp \overline{IK} \Rightarrow \vec{u'} \cdot \overline{IK} = 0 \Rightarrow t' = \frac{2}{9}$. Vậy $K\left(\frac{13}{9}; \frac{5}{9}; \frac{2}{9}\right)$.



VIII. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG – GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

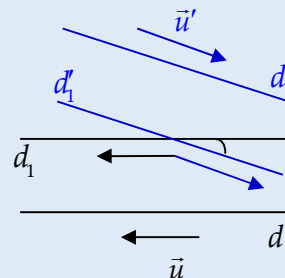
1. Kiến thức vận dụng

• Góc giữa hai đường thẳng:

Cho 2 đường thẳng d, d' có các vectơ chỉ phương lần lượt

là $\vec{u} = (a; b; c), \vec{u'} = (a'; b'; c')$.

Ta có: $\cos(d; d') = |\cos(\vec{u}, \vec{u'})| = \frac{|a.a' + b.b' + c.c'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}, 0 \leq (d; d') \leq 90^\circ$

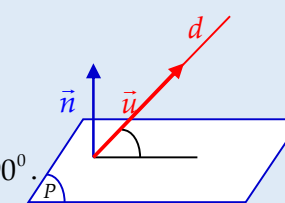


• Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$.

Mặt phẳng (P) có 1 vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$

Ta có: $\sin(d; (P)) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{|a.A + b.B + c.C|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, 0 \leq (d; (P)) \leq 90^\circ$



2. Một số bài toán minh họa

Bài toán 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hai đường thẳng d, d' và mặt phẳng (P) có

phương trình $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}; d': \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = 1 - t' \\ z = t' \end{cases}$ và $(P): 2x + 3y + z - 4 = 0$

a) Tính góc giữa hai đường thẳng d, d' .

b) Tính góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

Lời giải:

Đường thẳng d có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u}(-1;1;1)$.

Đường thẳng d' có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u}'(2;-1;1)$.

Mặt phẳng (P) có 1 vectơ pháp tuyến $\vec{n}(2;3;1)$.

$$a) \cos(d;d') = |\cos(\vec{u}, \vec{u}')| = \frac{|-1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow (d;d') \approx 61^\circ 52'.$$

$$b) \sin(d;(P)) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{|-2 + 3 + 1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{14}} = \frac{\sqrt{42}}{21} \Rightarrow (d;(P)) \approx 17^\circ 59'.$$

Bài toán 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hai đường thẳng d , d' và mặt phẳng (P) có

$$\text{phương trình } d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = t \end{cases}; d': \begin{cases} x = 1 \\ y = 1+\sqrt{2}t' \\ z = \sqrt{2}t' \end{cases}. \text{Viết phương trình đường thẳng } \Delta \text{ đi qua điểm}$$

$A(3;2;2)$, vuông góc với đường thẳng d và tạo với đường thẳng d' một góc 60° .

Lời giải:

Đường thẳng d có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u}(1;-1;1)$.

Đường thẳng d' có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u}'(0;\sqrt{2};\sqrt{2})$.

Gọi $\vec{v}(a;b;c)$, $(a^2+b^2+c^2 > 0)$ là 1 vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ .

Ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0 \Leftrightarrow a = -b - c$

$$\cos(\Delta; d') = \frac{|\sqrt{2}b + \sqrt{2}c|}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \Rightarrow \frac{|\sqrt{2}b + \sqrt{2}c|}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

+) Với $b = 0 \Rightarrow a = -c$. Chọn $a = 1, c = -1 \Rightarrow \vec{v} = (1; 0; -1)$.

$$\text{Khi đó phương trình tham số của } \Delta \text{ là } \begin{cases} x = 3+t \\ y = 2 \\ z = 2-t \end{cases}.$$

+) Với $c = 0 \Rightarrow a = -b$. Chọn $a = 1, b = -1 \Rightarrow \vec{v} = (1; -1; 0)$.

$$\text{Khi đó phương trình tham số của } \Delta \text{ là } \begin{cases} x = 3+t \\ y = 2-t \\ z = 2 \end{cases}.$$

IX. XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ ĐIỂM TRÊN ĐƯỜNG THẲNG

1. Phương pháp

- Điểm M nằm trên đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ thì $M(x_0 + a_1 t; y_0 + a_2 t; z_0 + a_3 t)$.
- Từ điều kiện ta tìm được $t = ? \Rightarrow M$?

2. Một số bài toán minh họa

Bài toán 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, Cho điểm $A(2;1;3)$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}$

, và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z - 1 = 0$.

a) Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho $AM = \sqrt{11}$.

b) Tìm tọa độ điểm N thuộc đường thẳng d sao cho $d(N, (P)) = \frac{1}{3}$

Lời giải:

$$a) M \in d \Rightarrow M(1+t; 2+t; t); AM = \sqrt{11} \Rightarrow \sqrt{(t-1)^2 + (t+1)^2 + (t-3)^2} = \sqrt{11} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$$

Vậy $M(1;2;0)$ hoặc $M(3;4;2)$.

$$b) N \in d \Rightarrow N(1+t; 2+t; t); d(N, (P)) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow |t+3| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -4 \end{cases}.$$

Vậy $N(-1;0;-2)$ hoặc $M(-3;-2;-4)$.

Bài toán 2: (Đại học khối B – 2008) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(0;1;2)$, $B(2;-2;1)$, $C(-2;0;1)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng đi qua 3 điểm A, B, C .

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - 3 = 0$ sao cho $MA = MB = MC$.

Lời giải:

$$a) \overrightarrow{AB} = (2; -3; -1), \overrightarrow{AC} = (-2; -1; -1), [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2; 4; -8)$$

Gọi $\vec{n}$ là 1 vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) . T có: $\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \Rightarrow \text{chọn } \vec{n} = (1; 2; -4).$

Vậy phương trình mặt phẳng $(ABC): 1(x-0) + 2(y-1) - 4(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 4z + 6 = 0$.

$$b) \text{Ta có: } AB^2 = 4 + 9 + 1 = 14, AC^2 = 4 + 1 + 1 = 6, \overrightarrow{BC} = (-4; 2; 0) \Rightarrow BC^2 = 20.$$

Do đó: $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A .

Vì $MA = MB = MC$ nên M nằm trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại tâm I đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

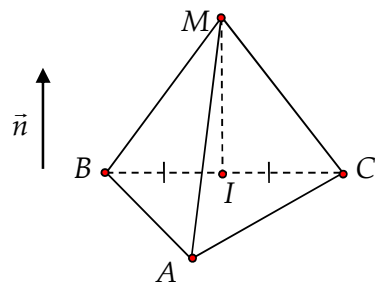
Ta có I là trung điểm của $BC \Rightarrow I(0; -1; 1)$

Đường thẳng MI đi qua điểm $I(0; -1; 1)$ và nhận $\vec{n} = (1; 2; -4)$

làm vectơ chỉ phương nên có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 4t. \end{cases}$$

$$M \in MI \Rightarrow M(t; -1 + 2t; 1 - 4t); M \in (P) \Rightarrow 2t + 2(-1 + 2t) + 1 - 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow M(2; 3; -7).$$



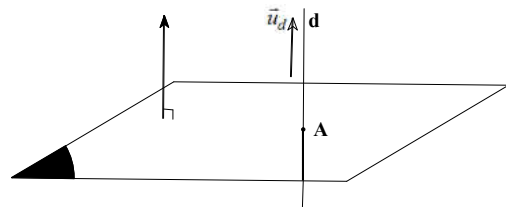
Nhận xét: Câu b có thể làm như sau: $M(x; y; z)$ thuộc (P) nên $2x + 2y + z - 3 = 0$; $MA = MB = MC$ ta được thêm 2 phương trình theo x, y, z . Giải hệ 3 phương trình ta tìm được x, y, z . Cách này dễ hiểu hơn. Độc giả làm thử nhé.

HỆ THỐNG MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VỀ LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Bài toán 1: Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và $d \perp (\alpha)$.

Phương pháp:

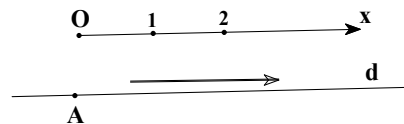
- + Đường thẳng d đi qua A
- + Đường thẳng d có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{n}_\alpha$



Bài toán 2: Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và $d // \Delta$.

Phương pháp:

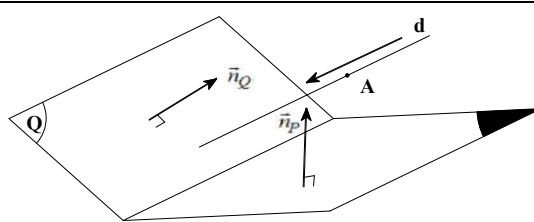
- + Mặt phẳng (α) đi qua A
- + Đường thẳng d có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta$.
- * Đặc biệt: Khi $\Delta \equiv Ox$
- + Mặt phẳng (α) đi qua A
- + Đường thẳng d có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 0; 0)$.



Bài toán 3: Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và $d // (P), d // (Q), (P)$ không song, không trùng với (Q) .

Phương pháp:

- + Đường thẳng (α) đi qua A
- + Ta có: $\begin{cases} \vec{u}_d \perp \vec{n}_P \\ \vec{u}_d \perp \vec{n}_Q \end{cases}$



Đường thẳng d có 1 vectơ chỉ phương là

$$\vec{u}_d = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q]$$

Bài toán 4: Lập phương trình đường thẳng d là giao tuyến của 2 mặt phẳng (P) và (Q) .

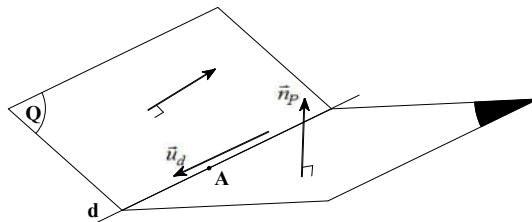
Phương pháp:

+ Đường thẳng d đi qua A (giải hệ 2 phương trình $mp(P)$ và (Q) với $x = 0$)

+ Ta có:
$$\begin{cases} \vec{u}_d \perp \vec{n}_P \\ \vec{u}_d \perp \vec{n}_Q \end{cases}$$

Đường thẳng d có 1 vectơ chỉ phương là

$$\vec{u}_d = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q]$$



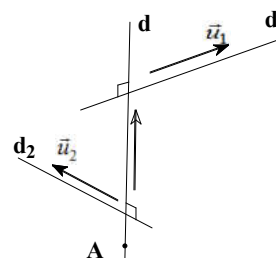
Bài toán 5: Lập phương trình đường thẳng d đi qua A và $d \perp d_1, d \perp d_2, d_1$ không song song, không trùng với d_2 .

Phương pháp:

+ Đường thẳng d đi qua A .

+ Ta có:
$$\begin{cases} \vec{u}_d \perp \vec{u}_1 \\ \vec{u}_d \perp \vec{u}_2 \end{cases}$$

Đường thẳng d có 1 vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d = [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$.



Bài toán 6: Lập phương trình đường thẳng d đi qua A và $d // (P), d \perp d'$.

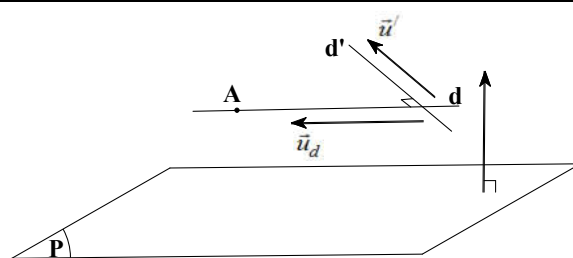
Phương pháp:

+ Đường thẳng d đi qua A .

+ Ta có:
$$\begin{cases} \vec{u}_d \perp \vec{n}_P \\ \vec{u}_d \perp \vec{u}' \end{cases}$$

Đường thẳng d có 1 vectơ chỉ phương là

$$\vec{u}_d = [\vec{n}_P, \vec{u}']$$



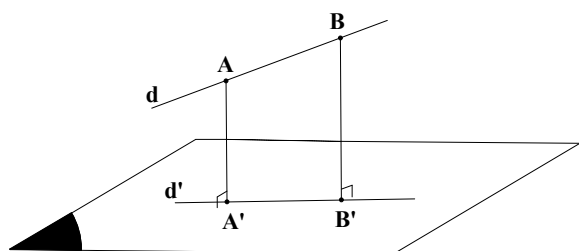
Bài toán 7: Lập phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên $mp(\alpha)$.

Phương pháp:

+ Xác định A' là hình chiếu của A trên (α) .

+ Xác định B' là hình chiếu của B trên (α) .

+ Đường thẳng $d' \equiv A'B'$



C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I. ĐỀ BÀI

Câu 1. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, phương trình chính tắc của đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 5 - 3t \\ z = 1 - 4t \end{cases} \text{ là:}$$

A. $\frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z+1}{-4}$.

B. $\frac{x+2}{-3} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-4}{1}$.

C. $\frac{x-2}{-3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z+4}{1}$.

D. $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-1}{-4}$.

Câu 2. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, đường thẳng $(d): \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 \end{cases}$ có 1 vectơ chỉ phương

là:

A. $\vec{u}(1;1;2)$.

B. $\vec{u}(1;-2;2)$.

C. $\vec{u}(1;-2;0)$.

D. $\vec{u}(0;1;2)$.

Câu 3. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, đường thẳng $(d): \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 \end{cases}$ là giao tuyến của hai

mặt phẳng $(P), (Q)$. Phương trình của $(P), (Q)$ là:

A. $(P): x = 0, (Q): z = 1$

B. $(P): x = 0, (Q): y - z - 2 = 0$

C. $(P): x = 0, (Q): y = 3$

D. $(P): x = 0, (Q): y - z = 0$

Câu 4. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao

tuyến là đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. Biết $(P) // Ox, (Q) // Oy$. Hãy chọn cặp mặt phẳng $(P),$

(Q) thoả mãn điều kiện đó?

A. $(P): y + 2z - 8 = 0, (Q): 2x - z + 5 = 0$.

B. $(P): 2x + z + 5 = 0, (Q): y + 2z - 8 = 0$.

C. $(P): 2x - y - 5 = 0, (Q): y + 2z - 8 = 0$.

D. $(P): 2x - z - 5 = 0, (Q): y - 2z + 8 = 0$.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z - 4 = 0$ và $(Q): 3x + 2y - 5z - 4 = 0$. Giao tuyến của (P) và (Q) có phương trình tham số là:

A. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 7t \\ z = 4t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 7t \\ z = -4t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 7t \\ z = 4t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 7t \\ z = 4t \end{cases}$

Câu 6. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(1;-2;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(0;0;1)$. Đường thẳng d có phương trình tham số là:

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x=1 \\ y=-2. \\ z=t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x=1-t \\ y=-2+2t. \\ z=t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x=t \\ y=-2t. \\ z=1 \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x=1-2t \\ y=-2-t. \\ z=0 \end{cases} \end{array}$$

Câu 7. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, đoạn thẳng AB với hai đầu mút lần lượt là $A(2;3;-1)$ và $B(1;2;4)$ có phương trình tham số là:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \quad (1 \leq t \leq 2). \\ z=4-5t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x=2+t \\ y=3+t \quad (-1 \leq t \leq 0). \\ z=-1-5t \end{cases} \\ \text{C. } \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \quad (0 \leq t \leq 1). \\ z=4+5t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x=2-t \\ y=3-t \quad (2 \leq t \leq 4). \\ z=-1+5t \end{cases} \end{array}$$

Câu 8. Trong không gian với hệ toạ độ $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, hãy viết phương trình của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ đồng thời nhận vectơ $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$ làm vectơ chỉ phương ?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \frac{x+2}{1} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z+6}{3}. & \text{B. } \frac{x-2}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{6}. \\ \text{C. } \frac{x+2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{3}. & \text{D. } \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{3}. \end{array}$$

Câu 9. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M(-2;1;2)$ và song song với trục Ox là:

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x=1-2t \\ y=t \\ z=2t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x=-2 \\ y=1+t. \\ z=2 \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x=-2+t \\ y=1 \\ z=2 \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x=-2t \\ y=1+t. \\ z=2t \end{cases} \end{array}$$

Câu 10. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, hãy viết phương trình của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(1;2;-1)$ và song song với hai mặt phẳng $(P): x+y-z+3=0$, $(Q): 2x-y+5z-4=0$?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \begin{cases} x=1-12t \\ y=2+7t. \\ z=-1+3t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x=1+4t \\ y=2-7t. \\ z=-1-3t \end{cases} \\ \text{C. } \frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{-7} = \frac{z-1}{-3}. & \text{D. } \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{7} = \frac{z+1}{-3}. \end{array}$$

Câu 11. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $M(2;0;-3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x-3y+5z+4=0$. Phương trình chính tắc của Δ là:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \frac{x+2}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{5}. & \text{B. } \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{5}. \\ \text{C. } \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}. & \text{D. } \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+3}{5}. \end{array}$$

Câu 12. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $M(1;2;-3)$ và

vuông góc với hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=t_1 \\ y=1-t_1 \\ z=-1+3t_1 \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x=3-t_2 \\ y=t_2 \\ z=t_2 \end{cases}$, Δ có phương trình là:

A. $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=-3 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ z=-t \end{cases}$

C. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{2}$

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$

Câu 13. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(1;1;-2)$, song song với mặt phẳng $(P): x-y-z-1=0$ và cắt đường thẳng $(d): \frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}$, phương trình của (Δ) là:

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{-3}$

B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-3}$

C. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{3}$

D. $\frac{x+5}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}$

Câu 14. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(0;1;1)$, vuông

góc với đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=-1 \end{cases}$ và cắt đường thẳng $(d_2): \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$. Phương trình

của (Δ) là:

A. $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=2-t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=-4 \\ y=3 \\ z=1+t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=0 \\ y=1+t \\ z=1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=1-t \end{cases}$

Câu 15. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho (Δ) là đường thẳng song song với (d_1) và cắt

đồng thời hai đường thẳng (d_2) và (d_3) , với $(d_1): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{3}$,

$(d_2): \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$, $(d_3): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Phương trình đường thẳng (Δ) là:

A. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$

B. $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}$

C. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$

D. $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{3}$

Câu 16. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(\Delta_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-4}$ và

$(\Delta_2): \begin{cases} x=2t \\ y=1-2t \\ z=-1-8t \end{cases}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $(\Delta_1) // (\Delta_2)$

B. $(\Delta_1) \perp (\Delta_2)$

C. $(\Delta_1) \equiv (\Delta_2)$

D. (Δ_1) và (Δ_2) chéo nhau

Câu 17. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x + 2y + z - 12 = 0$ và đường

thẳng $(\Delta): \begin{cases} x = t \\ y = 6 - 3t \\ z = 3t \end{cases}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $(\Delta) \perp (\alpha)$

B. $(\Delta) \subset (\alpha)$

C. $(\Delta) // (\alpha)$

D. (Δ) cắt (α)

Câu 18. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và

$d_2: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$ Với giá trị nào của m thì d_1 và d_2 cắt nhau?

A. $m = -1$

B. $m = 1$

C. $m = 0$

D. $m = 2$

Câu 19. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi (Δ) là đường thẳng đi qua giao điểm M của đường thẳng (d) và mặt phẳng (α) , vuông góc với (d) đồng thời nằm trong (α) , trong

đó $(d): \begin{cases} x = 2 - 11t \\ y = -5 + 27t \\ z = 4 + 15t \end{cases}; (\alpha): 2x + 5y + z + 17 = 0$. Phương trình của (Δ) là:

A. $\frac{x+48}{2} = \frac{y-41}{-5} = \frac{z+109}{4}$

B. $\frac{x+2}{-48} = \frac{y-5}{41} = \frac{z+4}{-109}$

C. $\frac{x-48}{2} = \frac{y+41}{-5} = \frac{z+109}{4}$

D. $\frac{x-2}{-48} = \frac{y+5}{41} = \frac{z-4}{-109}$

Câu 20. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ cắt nhau có phương

trình $(d_1): \begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = t \\ z = 10 + 3t \end{cases}, (d_2): \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3}$. Mặt phẳng (α) chứa (d_1) và (d_2) có phương

trình là:

A. $6x + 9y + z + 8 = 0$

B. $2x + 3y + z + 8 = 0$

C. $6x + 9y + 2z + 6 = 0$

D. $6x - 9y + z - 8 = 0$

Câu 21. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ có phương trình

$(d_1): \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{-1}, (d_2): \begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = t \\ z = 4 + t \end{cases}$. Mặt phẳng (α) chứa (d_1) và (d_2) có phương

trình là:

A. $x - z + 4 = 0$

B. $x + y - z + 4 = 0$

C. $y - z + 4 = 0$

D. $x - y + 4 = 0$

Câu 22. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau có

phương trình: $(d_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$, $(d_2): \begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = 1-t \end{cases}$. Mặt phẳng (α) song song và cách

đều (d_1) và (d_2) có phương trình là:

A. $x + 4y - 3z + 2 = 0$

B. $x + 4y - 3z + 10 = 0$

C. $x + 4y - 3z + 1 = 0$

D. $2x - y - 3z + 1 = 0$

Câu 23. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) chéo nhau có

phương trình $(d_1): \begin{cases} x = 1 \\ y = 10 + 2t \\ z = t \end{cases}$, $(d_2): \begin{cases} x = 3t \\ y = 3 - 2t \\ z = -2 \end{cases}$. Gọi (Δ) là đường thẳng vuông góc chung

của (d_1) và (d_2) . Phương trình của (Δ) là:

A. $\begin{cases} x = 2t \\ y = \frac{177}{98} + 3t \\ z = -6t - \frac{17}{49} \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = \frac{7}{3} - 46t \\ y = -147t \\ z = 246t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 6 - 4t \end{cases}$

Câu 24. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi (Δ) là đường vuông góc chung của hai đường

thẳng: $(d_1): \begin{cases} x = 2 \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và $(d_2): \begin{cases} x = 4t \\ y = \frac{7}{4} + t \\ z = \frac{11}{4} + t \end{cases}$. Phương trình của (Δ) là:

A. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = t \\ y = -8 + 5t \\ z = 1 + t \end{cases}$

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$

D. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{2}$

Câu 25. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 0)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - 4y + 3z + 19 = 0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên (α) . Tọa độ H là:

A. $(1; 2; 3)$

B. $(1; -2; 3)$

C. $(-1; -2; -2)$

D. $(-1; 2; -3)$

Câu 26. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (α) có phương trình $(\alpha): 2x - 2y + z - 3 = 0$. Tọa độ giao điểm của (Δ) và (α) là:

A. $(2; -1; 5)$

B. $(-2; -1; 5)$

C. $(2; -1; -5)$

D. $(2; 1; 5)$

Câu 27. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(\Delta): \frac{x-4}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$ và điểm $M(2; -1; 5)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên (Δ) . Tọa độ của H là:

- A. $H(4; 1; 2)$ B. $H(2; 0; 1)$ C. $H(4; 0; 2)$ D. $H(-4; 0; 2)$

Câu 28. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-7; 4; 4)$, $B(-6; 2; 3)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x - y - 2z + 19 = 0$. Gọi M là điểm thuộc (α) sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất. Tọa độ của M là:

- A. $\left(-\frac{13}{3}; 2; 2\right)$ B. $(13; 2; 2)$ C. $\left(\frac{13}{2}; 2; 2\right)$ D. $\left(-\frac{13}{4}; 2; 2\right)$

Câu 29. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 0; -3)$, $B(2; 0; -1)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x - 8y + 7z - 1 = 0$. Gọi C là điểm thuộc (α) sao cho tam giác ABC đều. Tọa độ của C là:

- A. $C(2; 2; -3)$ hay $C\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ B. $C(2; -2; -3)$ hay $C\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$
 C. $C(2; -2; 3)$ hay $C\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ D. $C(2; 2; 3)$ hay $C\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$

Câu 30. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$, $B(4; 4; 5)$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng Oxy sao cho $|MA - MB|$ có giá trị lớn nhất. Tọa độ của M là:

- A. $M\left(-\frac{7}{2}; -1; 0\right)$. B. $M\left(-\frac{7}{2}; 1; 0\right)$. C. $M\left(\frac{7}{2}; 1; 0\right)$. D. $M\left(1; \frac{7}{2}; 0\right)$.

Câu 31. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; 3; -1)$ và đường thẳng $(d): \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z-3}{1}$. Gọi (Δ) là đường thẳng qua M và vuông góc với (d) đồng thời cắt (d) . Phương trình của (Δ) là:

- A. $\frac{x-2}{6} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+1}{32}$. B. $\frac{x+2}{6} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{32}$.
 C. $\frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{-5} = \frac{z+1}{32}$. D. $\frac{x-2}{6} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+1}{-32}$.

Câu 32. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 0)$, $B(3; -1; 4)$ và đường thẳng $(d): \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{2}$. Gọi M là điểm thuộc (d) sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất. Tọa độ của M là:

- A. $M(1; -1; 2)$. B. $M(2; -2; 4)$. C. $M(-1; 1; -2)$. D. $M(-2; 2; -4)$.

Câu 33. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x + 4y + 5z + 8 = 0$. Góc giữa (d) và (α) là:

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, số đo của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(\alpha): 3y - z - 9 = 0$ và $(\beta): 2y + z + 1 = 0$ là:

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, số đo của góc tạo bởi hai đường thẳng

$$(d_1): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \text{và} \quad (d_2): \begin{cases} x = 8 - 2t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{là:}$$

- A. 90° . B. 60° . C. 30° . D. 45° .

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(\Delta_1): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = \sqrt{2}t \\ z = 2 + t \end{cases}$ và

$$(\Delta_2): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + \sqrt{2}t \\ z = 2 + mt \end{cases}. \text{ Với giá trị nào của } m \text{ thì } (\Delta_1) \text{ và } (\Delta_2) \text{ hợp với nhau một góc } 60^\circ?$$

- A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = -\frac{3}{2}$.

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$$(\Delta_1): \frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{1}, \quad (\Delta_2): \frac{x}{-6} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}. \text{ Khoảng cách giữa } (\Delta_1) \text{ và } (\Delta_2) \text{ là:}$$

- A. 9. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{14}$. D. 3.

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7), D(-5;-4;8)$. Độ dài đường cao của tứ diện xuất phát từ đỉnh D là:

- A. 14. B. 12. C. $2\sqrt{3}$. D. 11.

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = (m-1)t \\ y = (2m+1)t \\ z = 1 + (2m^2+1) \end{cases}$. Với giá trị

nào của m thì đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (Oyz) ?

- A. $m = -1$. B. $m = 1$.
C. $m = 1$ hoặc $m = -1$. D. $m = 2$.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;4)$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

Điểm H thuộc Δ có tọa độ bằng bao nhiêu thì độ dài đoạn AH nhỏ nhất?

- A. $H(2;3;3)$. B. $H(0;1;-1)$. C. $H(3;4;5)$. D. $H(-1;0;-3)$.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{m} = \frac{y+2}{2m-1} = \frac{z+3}{2}$ và mặt phẳng $(\alpha): x+3y-2z-5=0$. Với giá trị nào của m thì Δ vuông góc với (α) ?

- A. $m=3$. B. $m=-1$. C. $m=1$. D. $m=-3$.

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$, $d_2: \frac{x}{3} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+18}{4}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là:

- A. 20. B. 25. C. 15. D. $\sqrt{15}$.

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{3}$ và $d_2: \frac{x}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-3}$. Mặt phẳng (α) chứa d_1 và song song với d_2 có phương trình là:

- A. $x-y-z+3=0$. B. $x+y-z+3=0$. C. $x-y+z+3=0$. D. $x-y-3=0$.

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+y-2z-6=0$ và điểm $M(1;1;1)$. Tọa độ điểm N đối xứng với M qua (α) là:

- A. $N(3;3;-3)$. B. $N(3;3;3)$. C. $N(-3;3;3)$. D. $N(2;2;-1)$.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau có

phương trình $(d_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$ và $(d_2): \begin{cases} x=6+3t \\ y=-1-2t \\ z=-2+t \end{cases}$. Tọa độ giao điểm của (d_1) và

(d_2) là:

- A. $(3;-5;5)$ B. $(3;5;-5)$ C. $(3;2;-5)$ D. $(-3;5;-5)$

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng: $(d_1): \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{m}$ và

$(d_2): \frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z}{1}$. Với giá trị nào của m thì (d_1) và (d_2) cắt nhau?

- A. $m=2$ B. $m=-1$ C. $m=1$ D. $m=3$

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng qua hai điểm $A(2;0;1)$ và $B(-2;0;5)$ đồng thời hợp với mặt phẳng (Oxz) một góc 45° . Khoảng cách từ O tới (α) là:

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 48. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(\Delta): \begin{cases} x=3+2t \\ y=4-t \\ z=-7+t \end{cases}$ và điểm

$A(1;0;-1)$. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (Δ) . Tọa độ của A' là:

A. $(9;3;11)$

B. $(9;6;-11)$

C. $(3;2;11)$

D. $(9;6;11)$

Câu 49. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = -2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$ và

$(d_2): \begin{cases} x = -6t' \\ y = 1 + t' \\ z = 2 + 2t' \end{cases}$. Độ dài đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2) là:

A. $\sqrt{3}$

B. 6

C. 3

D. $\sqrt{17}$

Câu 50. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(d_1): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{3}$ và

$(d_2): \frac{x}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{-3}$. Đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2) có vectơ chỉ phương là:

A. $\vec{a}(-3;-3;1)$

B. $\vec{a}(3;-3;3)$

C. $\vec{a}(1;0;-1)$

D. $\vec{a}(1;-3;2)$

Câu 51. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(d_1): \frac{x-3}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{1}$ và

$(d_2): \frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-6}{1}$. Đường thẳng (Δ) vuông góc với mặt phẳng (Oxy) và cắt (d_1) ,

(d_2) lần lượt tại A và B. Khi đó, độ dài đoạn AB là:

A. 2

B. 6

C. 4

D. 3

Câu 52. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(-1;2;-3)$ và đường thẳng

$(\Delta): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$. Điểm M thuộc (Δ) có tọa độ bằng bao nhiêu thì $|\overline{MA} + \overline{MB}|$ đạt giá trị nhỏ

nhất?

A. $M(-2;-1;-4)$

B. $M(-1;0;-3)$

C. $M(2;3;0)$

D. $M(1;2;-1)$

Câu 53. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(3;-2;-4)$,

song song với mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y - 3z - 7 = 0$ và cắt đường thẳng

$d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$ tại điểm M. Tọa độ điểm M là:

A. $M(8;-4;5)$.

B. $M(8;-8;5)$.

C. $M(-2;3;1)$.

D. $M(8;8;5)$.

Câu 54. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(\Delta): \begin{cases} x = 11t \\ y = -1 - 2t \\ z = 7t \end{cases}$ và mặt phẳng

$(\alpha): 5x + my - 3z + 2 = 0$. Để (Δ) cắt (α) tại điểm có hoành độ bằng 0 thì giá trị thích hợp của m là:

A. 2.

B. -2.

C. 3.

D. -3.

Câu 55. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tam giác OAB , biết $O(0;0;0), A(4;-2;1), B(2;4;-3)$. Phương trình đường cao của tam giác OAB kẻ từ O là:

A. $\begin{cases} x = 22t \\ y = 4t \\ z = -5t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -2 + 14t \\ z = 1 - 13t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 11t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 5t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 3t \\ y = 14t \\ z = 13t \end{cases}$

Câu 56. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y + 3z + 1 = 0$ và đường

thẳng d có phương trình tham số: $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$, trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng:

- A. d vuông góc với (P) . B. d cắt (P) .
C. d song song với (P) . D. d thuộc (P) .

Câu 57. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, số đo của góc giữa 2 đường thẳng

$\Delta: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$ và $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ là

- A. 0° . B. 30° . C. 90° . D. 60° .

Câu 58. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-6} = \frac{z+1}{-8}$ và

$d_2: \frac{x-7}{-6} = \frac{y-2}{9} = \frac{z}{12}$. Vị trí tương đối giữa d_1 và d_2 là:

- A. Trùng nhau. B. Song song. C. Cắt nhau. D. Chéo nhau.

Câu 59. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, khoảng cách giữa hai đường thẳng

$d_1: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-6} = \frac{z+1}{-8}$ và $d_2: \frac{x-7}{-6} = \frac{y-2}{9} = \frac{z}{12}$ là:

- A. $\frac{\sqrt{35}}{17}$. B. $\sqrt{\frac{35}{17}}$. C. $\sqrt{\frac{854}{29}}$. D. $\sqrt{30}$.

Câu 60. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, đường thẳng đi qua hai điểm $A(1;-2;1), B(2;1;3)$ có phương trình:

- A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{2}$. B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1}$.
C. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}$. D. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}$.

Câu 61. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, toạ độ giao điểm của $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 7 = 0$ là:

- A. $M(1;-1;2)$. B. $M(2;0;-2)$. C. $M(3;-1;0)$. D. $M(-3;1;0)$.

Câu 62. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$, phương trình nào

sau đây là phương trình chính tắc của d ?

A. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{-1}$.

B. $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-3}{1}$.

C. $x-2 = y = z+3$.

D. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$.

Câu 63. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-3)$ và $B(3;-1;1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm A và B ?

A. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{1}$.

B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{4}$.

C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-3}$.

D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{4}$.

Câu 64. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): 3x+5y-z-2=0$. Tọa độ giao điểm H của d và (P) là

A. $H(1;0;1)$.

B. $H(0;0;-2)$.

C. $H(1;1;6)$.

D. $H(12;9;1)$.

Câu 65. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 1+2t \end{cases}$ và mặt phẳng

$(P): x+3y+z+1=0$. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng?

A. $d \parallel (P)$.

B. d cắt (P) .

C. $d \subset (P)$.

D. $d \perp (P)$.

Câu 66. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 3-t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 1+2t' \\ y = -1+2t' \\ z = 2-2t' \end{cases}$

Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. d cắt d'

B. d và d' chéo nhau

C. $d \equiv d'$

D. $d \parallel d'$

Câu 67. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = -3+2t \\ y = -2+3t \\ z = 6+4t \end{cases}$ và

$d': \begin{cases} x = 5+t' \\ y = -1-4t' \\ z = 20+t' \end{cases}$. Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d và d' là

A. $(-3;-2;6)$

B. $(3;7;18)$

C. $(5;-1;20)$

D. $(3;-2;1)$

Câu 68. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và

$$d': \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 3 - t' \end{cases}$$

Giá trị của tham số m để hai đường thẳng d và d' cắt nhau là

- A. $m = -1$ B. $m = 1$ C. $m = 0$ D. $m = 2$

Câu 69. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;0;1)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$. Khoảng cách từ điểm M tới đường thẳng d bằng

- A. $\sqrt{12}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{12}{\sqrt{6}}$

Câu 70. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$ và

$$d': \frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}. \text{ Khoảng cách giữa hai đường thẳng } d \text{ và } d' \text{ là}$$

- A. $\sqrt{6}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\frac{1}{\sqrt{6}}$ D. $\sqrt{2}$

Câu 71. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;-3;2)$ và đường thẳng Δ có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$. Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng Δ là

- A. $(0;-2;1)$ B. $(-1;1;-1)$ C. $(1;0;2)$ D. $(2;2;3)$

Câu 72. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;3;1), N(5;6;-2)$. Đường thẳng MN cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm A . Điểm A chia đoạn thẳng MN theo tỉ số:

- A. 2 B. -2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 73. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;4;2), B(-1;2;4)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$. Điểm $M \in \Delta$ mà $MA^2 + MB^2$ có giá trị nhỏ nhất có toạ độ là:

- A. $(-1;0;4)$ B. $(0;-1;4)$ C. $(1;0;4)$ D. $(1;0;-4)$

Câu 74. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, $A(3;3;1), B(0;2;1)$ và mp $(P): x + y + z - 7 = 0$. Đường thẳng d nằm trên (P) sao cho mọi điểm của d cách đều A và B có phương trình:

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x=t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x=t \\ y=7+3t \\ z=2t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x=-t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x=2t \\ y=7-3t \\ z=t \end{cases} \end{array}$$

Câu 75. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$ và

$d_2: \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$. Phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2 là:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-4} & \text{B. } \frac{x-7}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-9}{4} \\ \text{C. } \frac{x-7}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-9}{4} & \text{D. } \frac{x-7}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-9}{-4} \end{array}$$

Câu 76. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-1}{1}$ và

$d_2: \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=2 \end{cases}$. Đường thẳng đi qua điểm $A(0;1;1)$, vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương

trình là:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{4} & \text{B. } \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4} \\ \text{C. } \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4} & \text{D. } \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{4} \end{array}$$

Câu 77. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{a}(4;-6;2)$. Phương trình đường thẳng Δ là:

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x=-2+4t \\ y=-6t \\ z=1+2t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3t \\ z=1+t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x=4+2t \\ y=-6-3t \\ z=2+t \end{cases} \end{array}$$

Câu 78. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 4x+3y-7z+1=0$. Phương trình của đường thẳng Δ là:

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x=-1+4t \\ y=-2+3t \\ z=-3-7t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x=1+4t \\ y=2+3t \\ z=3-7t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x=1+3t \\ y=2-4t \\ z=3-7t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x=-1+8t \\ y=-2+6t \\ z=-3-14t \end{cases} \end{array}$$

Câu 79. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \\ z=3+4t \end{cases}$ và

$d_2: \begin{cases} x=3+4t' \\ y=5+6t' \\ z=7+8t' \end{cases}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } d_1 \perp d_2 & \text{B. } d_1 // d_2 \end{array}$$

C. $d_1 \equiv d_2$

D. d_1 và d_2 chéo nhau.

Câu 80. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + 3z + 1 = 0$ và đường

thẳng $d: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. $d \perp (\alpha)$

B. d cắt (α)

C. $d // (\alpha)$

D. $d \subset (\alpha)$

Câu 81. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{3}$ và

$d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{6}$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. d_1 cắt d_2

B. d_1 trùng d_2

C. $d_1 // d_2$

D. d_1 chéo d_2

Câu 82. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ và mặt phẳng

$(P): x + 3y + z + 1 = 0$. Toạ độ giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng là:

A. $(3; 0; 4)$

B. $(3; -4; 0)$

C. $(-3; 0; 4)$

D. $(3; 0; -4)$

Câu 83. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$. Phương trình nào

sau đây là phương trình đường thẳng d ?

A. $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -t \\ z = 3 + t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$

Câu 84. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 3; -1), B(1; 2; 4)$ và ba đường

thẳng (I): $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$ (II): $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-5}$ (III): $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là

đúng?

A. Chỉ có (I) là phương trình đường thẳng AB .

B. Chỉ có (III) là phương trình đường thẳng AB .

C. Chỉ có (I) và (II) là phương trình đường thẳng AB .

D. Cả (I), (II) và (III) đều là phương trình đường thẳng AB .

Câu 85. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 3; 2), B(1; 2; 1), C(1; 1; 3)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) .

Một học sinh làm như sau:

Bước 1: Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là: $G(1; 2; 2)$

Bước 2: Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) là: $\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}] = (-3; 1; 0)$

Bước 3: Phương trình tham số của đường thẳng Δ là:
$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + t \\ z = 2 \end{cases}$$

Bài giải trên **đúng** hay **sai**? Nếu sai thì **sai ở bước nào**?

A. Đúng **B.** Sai ở bước 1. **C.** Sai ở bước 2. **D.** Sai ở bước 3.

Câu 86. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua gốc tọa độ, vuông góc

với trục Ox và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$. Phương trình của d là:

A. $\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = -t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 1 \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases}$ **C.** $\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$ **D.** $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3t \\ z = t \end{cases}$

Câu 87. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng

$(P): x + 2y - z + 3 = 0$. trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. d song song với mặt phẳng (P) . **B.** d cắt mặt phẳng (P) .
C. d vuông góc với mặt phẳng (P) . **D.** d nằm trong mặt phẳng (P) .

Câu 88. Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3 \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = -2 + t \end{cases}$. Góc giữa hai đường thẳng d_1 và

d_2 là:

A. 30° . **B.** 120° . **C.** 150° . **D.** 60° .

Câu 89. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): 5x + 11y + 2z - 4 = 0$. Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) là:

A. 60° . **B.** -30° . **C.** 30° . **D.** -60° .

Câu 90. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $BB', CD, A'D'$. Góc giữa hai đường thẳng MP và $C'N$ là:

A. 30° . **B.** 120° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Câu 91. Cho hình chóp **A.** BCD có các cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc. ΔABC cân, cạnh bên bằng a , $AD = 2a$. Cosin góc giữa hai đường thẳng BD và DC là:

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $-\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{4}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 92. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2, AC = \sqrt{5}$. ΔSAC vuông cân tại A . K là trung điểm của cạnh SD . Hãy xác định cosin góc giữa đường thẳng CK và AB ?

A. $\frac{4}{\sqrt{17}}$.

B. $\frac{2}{\sqrt{11}}$.

C. $\frac{4}{\sqrt{22}}$.

D. $\frac{2}{\sqrt{22}}$.

Câu 93. Cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 5z + 8 = 0$. Đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 1 = 0$; $(\beta): x - 2z - 3 = 0$. Góc giữa d và (P) là:

A. 120° .

B. 60° .

C. 150° .

D. 30° .

Câu 94. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(3; -2; 4)$ và đường thẳng $d: \frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{-2}$. Điểm

M thuộc đường thẳng d sao cho M cách A một khoảng bằng $\sqrt{17}$. Tọa độ điểm M là

A. $(5; 1; 2)$ và $(6; 9; 2)$.

B. $(5; 1; 2)$ và $(-1; -8; -4)$.

C. $(5; -1; 2)$ và $(1; -5; 6)$.

D. $(5; 1; 2)$ và $(1; -5; 6)$.

Câu 95. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-2}$ và tạo với trục Oy góc có số đo lớn nhất. Điểm nào sau đây thuộc $mp(P)$?

A. $E(-3; 0; 4)$.

B. $M(3; 0; 2)$.

C. $N(-1; -2; -1)$.

D. $F(1; 2; 1)$.

Câu 96. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $(P): x - 2y + 2z - 1 = 0$ và 2 đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+9}{6}; \Delta_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}.$$

Gọi M là điểm thuộc đường thẳng Δ_1 , M có tọa độ là các số nguyên, M cách đều Δ_2 và (P) . Khoảng cách từ điểm M đến $mp(Oxy)$ là

A. 3.

B. $2\sqrt{2}$.

C. $3\sqrt{2}$.

D. 2.

Câu 97. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(1; 5; 0); B(3; 3; 6)$ và đường thẳng

$$d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}.$$

Gọi C là điểm trên đường thẳng d sao cho diện tích tam giác ABC

nhỏ nhất. Khoảng cách giữa 2 điểm A và C là

A. 29.

B. $\sqrt{29}$.

C. $\sqrt{33}$.

D. 7.

Câu 98. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(10; 2; 1)$ và đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{3}.$$

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường thẳng d

sao cho khoảng cách giữa d và (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(-1; 2; 3)$ đến $mp(P)$ là

A. $\frac{97\sqrt{3}}{15}$.

B. $\frac{76\sqrt{790}}{790}$.

C. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

D. $\frac{3\sqrt{29}}{29}$.

Câu 99. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Tính khoảng cách từ điểm $M(1;2;-1)$ đến mặt phẳng (P) .

- A. $\frac{11\sqrt{18}}{18}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{11}}{18}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 100. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z+2=0$ và hai

$$\text{đường thẳng } d: \begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=2+2t \end{cases}; d': \begin{cases} x=3-t' \\ y=1+t' \\ z=1-2t' \end{cases}.$$

Biết rằng có 2 đường thẳng có các đặc điểm: song song với (P) ; cắt d, d' và tạo với d góc 30° . Tính cosin góc tạo bởi hai đường thẳng đó.

- A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. C. $\sqrt{\frac{2}{3}}$. D. $\frac{1}{2}$.

II. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1D	2C	3A	4A	5A	6A	7B	8D	9C	10B
11C	12A	13B	14D	15A	16A	17B	18C	19D	20A
21C	22C	23A	24A	25D	26B	27C	28A	29B	30A
31D	32A	33C	34A	35A	36B	37D	38D	39B	40A
41C	42B	43A	44A	45D	46C	47A	48B	49C	50A
51C	52D	53B	54A	55A	56D	57C	58B	59D	60A
61C	62D	63B	64B	65A	66D	67B	68C	69C	70B
71A	72D	73A	74A	75B	76D	77C	78B	79C	80D
81C	82D	83B	84D	85C	86D	87D	88D	89C	90D
91A	92C	93B	94D	95C	96A	97B	98A	99A	100D

Câu 1. Chọn D.

Đường thẳng d đi qua điểm $A(-3;5;1)$, nhận $\vec{u}(2;-3;-4)$ làm một véc tơ chỉ phương nên có phương trình chính tắc: $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-1}{-4}$

Câu 2. Chọn C.

Câu 3. Chọn A.

Dễ thấy đường thẳng d đi qua hai điểm $A(0;1;1), B(0;3;1)$.

Tọa độ của hai điểm A, B thỏa mãn phương trình $x=0$ và phương trình $z=1$ nên d là giao

tuyến của hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $z=1$.

Câu 4. Chọn A.

Do (P) song song với Ox nên nhận véc tơ dạng $\vec{n}_p(0;a;b)$ làm véc tơ pháp tuyến.

(Q) song song với Oy nên nhận véc tơ dạng $\vec{n}_q(a';0;c')$ làm véc tơ pháp tuyến.

Trong 4 đáp án chỉ đáp án A thỏa mãn điều này.

Câu 5. Chọn A.

Cách 1: Xét hệ $\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases} (*)$

Cho $x=0$ thay vào $(*)$ tìm được $y=-8, z=-4$. Đặt $A(0;-8;-4)$

Cho $z=0$ thay vào $(*)$ tìm được $x=2, y=-1$. Đặt $B(2;-1;0)$

$\Rightarrow \vec{AB}=(2;7;4)$ là một VTCP của $(P) \cap (Q)$

Như vậy, PTTS của $(P) \cap (Q)$ là $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1+7t \\ z=4t \end{cases}$

Cách 2: Xét hệ $\begin{cases} x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases} (*)$

Cho $z=0$ thay vào $(*)$ tìm được $x=2, y=-1$. Đặt $B(2; -1; 0)$

$(P): x-2y+3z-4=0$ có VTPT $\vec{n}_P = (1; -2; 3)$

$(Q): 3x+2y-5z-4=0$ có VTPT $\vec{n}_Q = (3; 2; -5)$

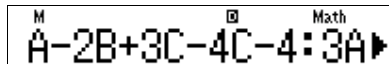
$\Rightarrow [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (4; 14; 8) \Rightarrow$ chọn $\vec{u} = (2; 7; 4)$ là một VTCP của giao tuyến $(P) \cap (Q)$

Như vậy, PTTS của $(P) \cap (Q)$ là $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 7t \\ z = 4t \end{cases}$

Cách 3: (kỹ năng máy tính cầm tay)

Xem như phím A, B, C (trên máy) là x, y, z (trong phương trình), nhập cùng lúc 2 biểu thức

$$A - 2B + 3C - 4 : 3A + 2B - 5C - 4$$



Rút tọa độ điểm $(x_0; y_0; z_0)$ từ trong các PTTS của các câu, dùng lệnh **CALC** nhập vào máy.

KQ ứng với câu nào cho 2 đáp số cùng bằng 0 thì nhận (ở bài này tạm thời nhận A và B)

Tiếp tục cho $t=1$ (ngoài nháp) vào mỗi PTTS được nhận để có bộ số $(x; y; z)$ lại thay vào 2 biểu thức đã nhập trên màn hình

Lại tìm bộ số cho 2 đáp số cùng bằng 0 (ở bài này câu A đảm bảo nên đáp án là A)

Câu 6. Chọn A.

Học thuộc lòng công thức $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ và thay số vào nhé $\begin{cases} x = 1 + 0t \\ y = -2 + 0t \\ z = 0 + 1t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$

Câu 7. Chọn B.

Phương pháp: Để tìm tọa độ các điểm đầu mút của một đoạn thẳng có phương trình tham số có điều kiện kèm theo ta thay giá trị (đầu mút) của tham số vào phương trình tìm x, y, z .

a) Với phương án A, thay $t=1$ vào PTTS ta được tọa độ điểm là $(2; 3; -1)$

nhưng $t=2$ thì ta lại được điểm $(3; 4; -6)$ khác tọa độ điểm A và điểm B

b) Với phương án B, thay $t=-1$ ta được tọa độ điểm $B(1; 2; 4)$

và $t=0$ ta được tọa độ điểm $A(2; 3; -1)$.

Lưu ý 1:

- Để viết phương trình tham số của đoạn thẳng AB ta viết phương trình tham số của đường thẳng AB , tìm giá trị t_A, t_B để từ PTTS đó ta tìm lại được tọa độ của điểm A, B

- Kết quả PTTS có kèm điều kiện của t là đoạn tạo bởi t_A, t_B

- Tuy nhiên phương pháp này chậm và rất khó để chọn phương án như cách cho đề bài này.

Lưu ý 2:

- Nếu HS nào dùng phương pháp thay tọa độ của mỗi điểm A và B vào PTTS của từng phương án (A, B, C, D) để tìm giá trị t thì chỉ khi tìm được t_A, t_B là 2 đầu mút của đoạn điều kiện được cho kèm theo PTTS, đó mới là phương án đúng.

Câu 8. Chọn D.

Lưu ý: $\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Do $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}$ nên $\vec{a} = (2; -4; 6)$. Chọn $\vec{u} = (1; -2; 3)$ là một VTCP của Δ

Ngoài ra, $M(2; 0; -1) \in \Delta$ nên Δ có phương trình: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-0}{-2} = \frac{z+1}{3}$

Câu 9. Chọn C.

Trục hoành Ox nhận vectơ đơn vị $\vec{i} = (1; 0; 0)$ làm một VTCP

Đường thẳng d song song với trục hoành cũng phải nhận $\vec{i} = (1; 0; 0)$ làm VTCP luôn.

Ngoài ra $M(-2; 1; 2) \in d$ nên viết PTTS của d ta chọn được phương án C

Câu 10. Chọn B.

$(P): x + y - z + 3 = 0$ có một VTPT $\vec{n}_P = (1; 1; -1)$

$(Q): 2x - y + 5z - 4 = 0$ có một VTPT $\vec{n}_Q = (2; -1; 5)$

Suy ra $[\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (4; -7; -3)$ là một VTCP của đường thẳng Δ

Ngoài ra, $M(1; 2; -1) \in \Delta$ nên PTTS của Δ :
$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 7t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$$

Câu 11. Chọn C.

$(\alpha): 2x - 3y + 5z + 4 = 0$ có VTPT $\vec{n}_\alpha = (2; -3; 5)$

Do $\Delta \perp (\alpha)$ nên Δ nhận $\vec{n}_\alpha$ làm một VTCP.

Ngoài ra, $M(2; 0; -3) \in \Delta$ nên PTCT của Δ : $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$.

Câu 12. Chọn A.

d_1 có VTCP $\vec{u}_1 = (1; -1; 3)$; d_2 có VTCP $\vec{u}_2 = (-1; 1; 1)$

Do $\Delta \perp d_1, \Delta \perp d_2$ nên Δ có VTCP là $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-4; -4; 0)$ hay $\vec{u}_\Delta = (1; 1; 0)$

Đến đây quan sát 4 phương án ta đã chọn ra được A là phương án đúng

Tuy nhiên nếu muốn viết luôn phương trình của Δ ta sử dụng thêm $M(1; 2; -3) \in \Delta$

Câu 13. Chọn B.

Gọi M_1 là giao điểm của Δ và $d \Rightarrow M_1(-1-2t; 1+t; 1+3t)$. Suy ra $\overrightarrow{MM_1} = (-2-2t; t; 3+3t)$ là VTCP của Δ .

$$\text{Vì } \Delta // (\alpha) \text{ nên } \overrightarrow{MM_1} \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \Leftrightarrow -2 - 2t - t - 3 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{5}{6} \Rightarrow \overrightarrow{MM_1} = \left(\frac{-1}{3}; \frac{-5}{6}; \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{Suy ra } \vec{u}_\Delta = (2; 5; -3). \text{ Phương trình đường thẳng } \Delta \text{ là } \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-3}.$$

Câu 14. Chọn D.

Gọi M_1 là giao điểm của Δ và $d_2 \Rightarrow M_1(2t; 1+t; t)$. Suy ra $\overrightarrow{MM_1} = (2t; t; -1+t)$ là VTCP của Δ .

$$\text{Vì } \Delta \perp d_2 \text{ nên } \overrightarrow{MM_1} \cdot \vec{u}_{d_1} = 0 \Leftrightarrow 2t - t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MM_1} = (0; 0; -1)$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } \Delta \text{ là } \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases}.$$

Câu 15. Chọn A.

$$\text{Phương trình đường thẳng } d_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t(I) \\ z = 2t \end{cases}$$

$$\text{Giao điểm } M \text{ của } d_2 \text{ và } d_3: \text{ Thay (I) vào } d_3 \text{ ta được } t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(0; 1; 0).$$

$$\text{Phương trình mặt phẳng } (\alpha) \text{ song song } d_1 \text{ chứa } d_2 \text{ có VTPT } \vec{n}_\alpha = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-5; 2; 1) \text{ qua } M(0; 1; 0): -5x + 2y + z + 2 = 0.$$

$$\text{Phương trình mặt phẳng } (\beta) \text{ song song } d_1 \text{ chứa } d_3 \text{ có VTPT } \vec{n}_\beta = [\vec{u}_1, \vec{u}_3] = (5; 1; -2) \text{ qua } M(0; 1; 0): 5x + y - 2z + 1 = 0.$$

$$\text{Ta có } \Delta = (\alpha) \cap (\beta) \Rightarrow \Delta: \begin{cases} -5x + 2y + z + 2 = 0 \\ 5x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases} \text{ hay } \Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}.$$

Câu 16. Chọn A.

$$\text{Ta có } \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0 \end{cases} \text{ nên } (\Delta_1) // (\Delta_2).$$

Câu 17. Chọn B.

$$\Delta \text{ có VTCP } \vec{u} = (1; -3; 3) \text{ qua } M(0; 6; 0). \text{ Mặt phẳng } (\alpha) \text{ có VTPT } \vec{n} = (3; 2; 1).$$

$$\text{Ta có } \vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \Rightarrow \Delta // (\alpha) \text{ mà } M \in (\alpha) \Rightarrow \Delta \subset (\alpha).$$

Câu 18. Chọn C.

$$d_1 \text{ có VTCP } \vec{u}_1 = (m; 1; 2) \text{ qua } M_1(1; 0; -1), d_2 \text{ có VTCP } \vec{u}_2 = (-1; 2; -1) \text{ qua } M_2(1; 2; 3).$$

$$d_1 \text{ cắt } d_2 \text{ khi } \begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0 \\ [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot (-5) + 2(m-2) + 4(2m+2) = 0 \\ (-5; m-2; 2m+2) \neq \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Câu 19. Chọn D.

Tìm giao điểm M: Thay $\begin{cases} x = 2 - 11t \\ y = -5 + 27t \\ z = 4 + 15t \end{cases}$ vào (α) ta được

$$2(2 - 11t) + 5(-5 + 27t) + (4 + 15t) + 17 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow M(2; -5; 4).$$

Ta có $\begin{cases} \Delta \perp d \Rightarrow \vec{u}_\Delta \perp \vec{u}_d \\ \Delta \subset (\alpha) \Rightarrow \vec{u}_\Delta \perp \vec{n}_\alpha \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_\Delta = [\vec{u}_d, \vec{n}_\alpha] = (-48; 41; -109).$

Phương trình đường thẳng Δ là $\frac{x-2}{-48} = \frac{y+5}{41} = \frac{z-4}{-109}.$

Câu 20. Chọn A.

Mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (6, 9, 1)$ qua $M(-3; 0; 10), M \in d_1$. Phương trình mặt phẳng (α) : $6(x+3) + 9(y-0) + (z-10) = 0 \Leftrightarrow 6x + 9y + z + 8 = 0.$

Câu 21. Chọn C.

Mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (0, -1, 1)$ qua $M(2; 1; 5), M \in d_1$. Phương trình mặt phẳng (α) : $-(y-1) + (z-5) = 0 \Leftrightarrow y - z + 4 = 0.$ (đề này $(d_1), (d_2)$ không song song)

Câu 22. Chọn C.

(d_1) có VTCP là $\vec{u}_1 = (1; 2; 3)$, qua điểm $M_1(1; 2; 3).$

(d_2) có VTCP là $\vec{u}_2 = (1; -1; -1)$, qua $M_2(1; 0; 1).$

Mặt phẳng (α) có VTPT là $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (1; 4; -3)$ nên có dạng $x + 3y - 4z + D = 0.$

Ta có $d(M_1, (\alpha)) = d(M_2, (\alpha)) \Leftrightarrow \frac{|D|}{\sqrt{26}} = \frac{|-2+D|}{\sqrt{26}} \Leftrightarrow D = 1.$

Câu 23. Chọn A.

(d_1) có VTCP là $\vec{u}_1 = (0; 2; 1)$, (d_2) có VTCP là $\vec{u}_2 = (3; -2; 0).$

Gọi $M(1; 10 + 2t_1; t_1) \in (d_1)$, $N(3t_2; 3 - 2t_2; -2) \in (d_2).$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = (3t_2 - 1; -2t_2 - 7; -t_1 - 2)$

Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t_1 + 4t_2 = -16 \\ 4t_1 + 13t_2 = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -\frac{164}{49} \\ t_2 = \frac{9}{49} \end{cases}$

Do đó: $M\left(1; \frac{162}{49}; \frac{164}{49}\right)$, $N\left(\frac{27}{49}; \frac{129}{49}; -2\right)$, $\overrightarrow{MN} = -\frac{11}{49}(2; 3; -6)$

Từ đó suy ra phương trình của MN .

Cách làm trắc nghiệm:

(Δ) có VTCP là $\vec{u} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2; 3; -6)$.

Câu 24. Chọn A.

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (Δ) là đường vuông góc chung của hai đường thẳng: (d_1) có VTCP là $\vec{u}_1 = (0; -1; 1)$, (d_2) có VTCP là $\vec{u}_2 = (4; 1; 1)$.

Gọi $M(2; -t_1; 1+t_1) \in (d_1)$, $N\left(4t_2; \frac{7}{4}+t_2; \frac{11}{4}+t_2\right) \in (d_2)$.

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \left(4t_2 - 2; t_2 + t_1 + \frac{7}{4}; t_2 - t_1 + \frac{7}{4}\right)$. Ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Do đó: $M(2; 0; 1)$, $N(1; 2; 3)$, $\overrightarrow{MN} = (-1; 2; 2) = -(1; -2; -2)$

Từ đó suy ra phương trình của MN .

Cách làm trắc nghiệm:

(Δ) có VTCP là $\vec{u} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-2; 4; 4) = -2(1; -2; -2)$. Chọn A hoặc D.

Để loại A hoặc D, ta cần xét thêm nó có cắt với (d_1) hay không bằng cách giải hệ. Kết quả chọn A

Câu 25. Chọn D.

Phương trình $MH: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 4t \\ z = 3t \end{cases} \Rightarrow H(1 + 2t; -2 - 4t; 3t)$.

Từ $H \in (\alpha) \Leftrightarrow 2(1 + 2t) - 4(-2 - 4t) + 3 \cdot 3t + 19 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(-1; 2; -3)$.

Câu 26. Chọn B.

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} \\ \frac{y-1}{2} = \frac{x-3}{-2} \\ 2x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases}$$

Câu 27. Chọn C.

Gọi $H(4+t; t; 2+t) \in (\Delta)$. Ta có: $\overrightarrow{MH} = (t+2; t+1; t-3)$.

$\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Suy ra $H(4; 0; 2)$.

Câu 28. Chọn A.

Thế tọa độ A, B vào phương trình mặt phẳng (α) , thấy có giá trị ngược nhau. Suy ra A, B nằm cùng phía đối với (α) .

Gọi H là hình chiếu của A lên (α) , suy ra $H(-4; 3; 2)$.

Gọi A' đối xứng với A qua (α) , suy ra $A'(-1; 2; 0)$.

$\forall M \in (\alpha), MA + MB = MA' + MB \geq A'C \Rightarrow \min |MA + MB| = BC$ khi $M = A'B \cap (\alpha)$.

Từ đó tìm được $M\left(-\frac{13}{3}; 2; 2\right)$.

Cách làm trắc nghiệm:

Tính $MA + MB$ với điểm M cho trong đáp án. Kết quả câu A có tổng nhỏ nhất.

Câu 29. Chọn B.

$$\text{Gọi } C(a; b; c), \text{ suy ra } \begin{cases} 3a - 8b + c - 1 = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 + c + 1 = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 - 4a + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = -\frac{2}{3} \\ c = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Câu 30. Chọn A.

Phương trình $(Oxy): z = 0$

Hai điểm A và B nằm về cùng một phía đối với (Oxy) (do $z_A, z_B > 0$)

Ta có: $\forall M \in (Oxy), |MA - MB| \leq AB \Rightarrow \max |MA - MB| = AB$ khi $M = AB \cap (Oxy)$

Phương trình đường $AB: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2}$. Vậy điểm M cần tìm: $M\left(-\frac{7}{2}; -1; 0\right)$. Chọn

A.

Lưu ý: có thể tính $|MA - MB|$ với điểm M cho trong đáp án. Kết quả câu A có hiệu nhỏ nhất.

Câu 31. Chọn D.

Gọi $N = \Delta \cap d \Rightarrow N(2t; 4t; 3+t)$; Vectơ chỉ phương của $d: \vec{u} = (2; 4; 1)$

$$\overrightarrow{MN} = (2t-2; 4t-3; t+4); \Delta \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{7}$$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{MN} = \left(-\frac{6}{7}; -\frac{5}{7}; \frac{32}{7}\right) = -\frac{1}{7}(6; 5; -32)$$

$$\text{Vậy phương trình } \Delta: \frac{x-2}{6} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+1}{-32}.$$

Câu 32. Chọn A.

Vectơ chỉ phương của $d: \vec{u} = (1; -1; 2)$; $\overrightarrow{AB} = (2; -2; 4) = 2\vec{u}$ và $A \notin d \Rightarrow AB // d$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng d , C là điểm đối xứng với A qua d

Tìm được $H(0; 0; 0), C(1; -1; 0)$; $\forall M \in d, MA + MB = MC + MB \geq BC$

$$\Rightarrow \min |MA + MB| = BC \text{ khi } M = BC \cap d. \text{ Phương trình } BC: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}$$

Vậy điểm M cần tìm: $M(1; -1; 2)$

Cách 2:

$$M \in d \Leftrightarrow M(-1+t; 1-t; -2+2t)$$

$$MA + MB = \sqrt{6(1-t)^2 + 2} + \sqrt{6(t-3)^2 + 2} \geq \sqrt{(-2\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\min |MA + MB| = 4\sqrt{2} \text{ khi } \frac{1-t}{t-3} = 1 \Leftrightarrow t = 2. \text{ Chọn A.}$$

Lưu ý: sử dụng cách 2 cho trắc nghiệm sẽ nhanh hơn hoặc tính $MA + MB$ với điểm M cho trong đáp án (điểm M phải thuộc d). Kết quả câu A có tổng nhỏ nhất.

Câu 33. Chọn C.

Véc tơ chỉ phương của $d: \vec{u} = (2; 1; 1)$; Véc tơ pháp tuyến của $(\alpha): \vec{n} = (3; 4; 5)$

Gọi φ là góc giữa d và (α) ; Ta có: $\sin \varphi = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$; Do đó: $\varphi = 60^\circ$

Câu 34. Chọn A.

Véc tơ pháp tuyến của $(\alpha): \vec{n} = (0; 3; -1)$; Véc tơ pháp tuyến của $(\beta): \vec{n}' = (0; 2; 1)$

Góc φ là góc giữa (α) và (β) ; Ta có: $\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}, \vec{n}') \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$; Do đó: $\varphi = 45^\circ$

Câu 35. Chọn A.

Véc tơ chỉ phương của $d_1: \vec{u}_1 = (1; 0; 1)$; Véc tơ chỉ phương của $d_2: \vec{u}_2 = (-2; 1; 2)$

Ta có: $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \Rightarrow d_1 \perp d_2$; Vậy số đo của góc tạo bởi d_1 và d_2 là: 90°

Câu 36. Chọn B.

Véc tơ chỉ phương của $\Delta_1: \vec{u}_1 = (1; \sqrt{2}; 1)$; Véc tơ chỉ phương của $\Delta_2: \vec{u}_2 = (1; \sqrt{2}; m)$

Ta có: $\cos 60^\circ = \left| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \right| \Leftrightarrow |m+3| = \sqrt{m^2+3} \Leftrightarrow m = -1$

Câu 37. Chọn D.

Δ_1 qua điểm $A(3; -2; -1)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_1(-4; 1; 1)$

Δ_2 qua điểm $B(0; 1; 2)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_2(-6; 1; 2)$

$$\vec{AB} = (-3; 3; 3), [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (1; 2; 2). \text{ Khi đó } d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\left| [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{AB} \right|}{\left| [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \right|} = 3.$$

Câu 38. Chọn D.

Ta có $\vec{AB} = (2; -2; -3)$, $\vec{AC} = (4; 0; 6)$ suy ra $[\vec{AB}, \vec{AC}] = (-12; -24; 8) = -4(3; 6; -2)$

Mặt phẳng $(ABC): 3x + 6y - 2z - 22 = 0$, $d(D, (ABC)) = \frac{|3 \cdot (-5) + 6 \cdot (-4) - 2 \cdot 8 - 22|}{\sqrt{9 + 36 + 4}} = 11$.

Câu 39. Chọn B.

Do $d \subset (Oyz)$ nên $x = 0 \Rightarrow (m-1)t = 0 \Rightarrow m = 1$.

Câu 40. Chọn A.

Để độ dài đoạn AH nhỏ nhất khi AH vuông góc với Δ .

Gọi mặt phẳng (α) qua $A(2; 1; 4)$ và vuông góc với Δ nhận VTCP $\vec{a}_d = (1; 1; 2)$ có phương trình: $x + y + 2z - 11 = 0$. Mà $(\alpha) \cap \Delta = H(1+t; 2+t; 1+2t)$.

Xét PT: $(1+t) + (2+t) + 2(1+2t) - 11 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow H(2; 3; 3)$.

Câu 41. Chọn C.

Do $\Delta \perp (\alpha) \Rightarrow \vec{a}_{\Delta} \cdot \vec{n}_{\alpha} = 0 \Leftrightarrow 1.m + 3.(2m-1) - 2.2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Câu 42. Chọn B.

Gọi $M(-7; 5; 9) \in d_1$, $H(0; -4; -18) \in d_2$. Ta có $\vec{MH} = (7; -9; -27)$, $\vec{a}_{d_2} = (3; -1; 4)$ suy ra

$$\left[\vec{MH}, \vec{a}_{d_2} \right] = (-63; -109; 20). \text{ Vậy } d(d_1, d_2) = d(M, d_2) = \frac{\left| \left[\vec{MH}, \vec{a}_{d_2} \right] \right|}{\left| \vec{a}_{d_2} \right|} = 25.$$

Câu 43. Chọn A.

Ta thấy d_1, d_2 không cùng phương. d_1 có VTCP $\vec{a}_1 = (2; -1; 3)$, d_2 có VTCP $\vec{a}_2 = (-1; 2; -3)$, $M(-1; 1; 1) \in d_1$ suy ra $\left[\vec{a}_1, \vec{a}_2 \right] = (-3; 3; 3) = -3(1; -1; -1)$. Mặt phẳng (α) qua M nhận $\vec{n} = (1; -1; -1)$ làm VTPT có phương trình $(\alpha): x - y - z + 3 = 0$.

Câu 44. Chọn A.

Gọi d là đường thẳng qua M và vuông góc với (α) có phương trình
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Gọi $d \cap (\alpha) = H(1+t; 1+t; 1-2t)$. Xét phương trình $(1+t) + (1+t) - 2.(1-2t) - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(2; 2; -1)$, mà H là trung điểm MN nên $N(3; 3; -3)$.

Câu 45. Chọn D.

Phương trình tham số của đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 7 + s \\ z = 3 + 4s \end{cases}; (s \in \mathbb{R})$

Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2s - 3t = 5 & (1) \\ s + 2t = -8 & (2) \\ 4s - t = -5 & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} s = -2 \\ t = -3 \end{cases}$ thỏa mãn (3), tức là (d_1) và (d_2) cắt nhau.

Khi đó thế $t = -3$ vào phương trình (d_2) ta được $(-3; 5; -5)$.

Câu 46. Chọn C.

Phương trình tham số của $(d_1): \begin{cases} x = 2s \\ y = -3s \\ z = ms \end{cases}, (s \in \mathbb{R})$ và $(d_2): \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -5 + 2t \\ z = t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$

Để (d_1) và (d_2) cắt nhau thì hệ phương trình sau có nghiệm:
$$\begin{cases} 3t - 2s = 1 & (1) \\ 2t + 3s = 5 & (2) \\ ms = t & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} t=1 \\ s=1 \end{cases}$. Thế $\begin{cases} t=1 \\ s=1 \end{cases}$ vào (3) ta được $m=1$.

Câu 47. Chọn A.

Cách 1:

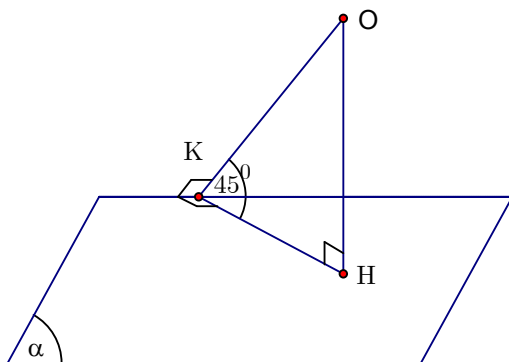
Gọi $K; H$ lần lượt là hình chiếu vuông góc điểm O lên đường thẳng AB và mặt phẳng (α) .

Ta có: $A, B \in (Oxz) \Rightarrow (\alpha) \cap (Oxz) = AB$.

$$\begin{cases} OH \perp (\alpha) \\ OK \perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HK \perp AB \\ OK \perp AB \end{cases} \Rightarrow ((Oxz), (\alpha)) = (\widehat{KH, OK}) = \widehat{OKH}$$

Suy ra tam giác OHK vuông cân tại H . Khi đó: $d(O, (\alpha)) = OH = \frac{OK}{\sqrt{2}}$.

$$\text{Mặt khác: } OK = d(O, AB) = \frac{|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{3}{\sqrt{2}}. \text{ Khi đó: } d(O, (\alpha)) = OH = \frac{OK}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}.$$



Cách 2:

Gọi $\vec{n} = (A, B, C)$ là VTPT của mặt phẳng (α) , với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-4; 0; 4)$. VTPT của mặt phẳng (Oxz) là $\vec{j} = (0; 1; 0)$

Vì $A, B \in (\alpha)$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow A = C \Rightarrow \vec{n} = (A, B, A)$

Theo giả thiết, ta có phương trình: $\frac{|B|}{\sqrt{2A^2 + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow B = \pm\sqrt{2}A$

Khi đó mặt phẳng (α) đi qua $A(2; 0; 1)$ nhận $\vec{n} = (1; \pm\sqrt{2}; 1)$ làm VTPT nên có phương trình $x \pm \sqrt{2}y + z - 3 = 0$. Vậy $d(O, (\alpha)) = \frac{3}{2}$.

Câu 48. Chọn B.

Gọi $H(3+2t; 4-t; -7+t)$ là hình chiếu của điểm A lên đường thẳng (Δ) .

Ta có: $\overrightarrow{AH} = (2+2t; 4-t; -6+t)$.

Vector chỉ phương của đường thẳng (Δ) là $\vec{n} = (2; -1; 1)$.

Vì H là hình chiếu của điểm A lên đường thẳng (Δ) nên $AH \perp (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Với $t = 1$ ta có $H(5; 3; -6)$.

Khi đó A' là điểm đối xứng với A qua (Δ) khi H là trung điểm của đoạn AA' .

$$\text{Vậy: tọa độ điểm } H \text{ là } \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A \\ x_{A'} = 2y_H - y_A \\ z_{A'} = 2z_H - z_A \end{cases} \Rightarrow A'(9; 6; -11).$$

Câu 49. Chọn C.

Gọi $M(3 - 4t; -2 + t; -1 + t) \in (d_1)$ và $N(-6t'; 1 + t'; 2 + 2t') \in (d_2)$.

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (-3 + 4t - 6t'; 3 - t + t'; 3 - t + 2t')$

Vec tơ chỉ phương của (d_1) và (d_2) lần lượt là: $\vec{u}_1 = (-4; 1; 1)$; $\vec{u}_2 = (-6; 1; 2)$

Khi đó MN là đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2) khi $\begin{cases} \overrightarrow{MN} \perp \vec{u}_1 \\ \overrightarrow{MN} \perp \vec{u}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 18t - 27t' = 18 \\ 27t - 41t' = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = 0 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} t = 1 \\ t' = 0 \end{cases}$, ta có $\overrightarrow{MN} = (1; 2; 2) \Rightarrow MN = 3$.

Câu 50. Chọn A.

Ta có: Vec tơ chỉ phương của (d_1) và (d_2) lần lượt là: $\vec{u}_1 = (2; -1; 3)$; $\vec{u}_2 = (-3; 2; -3)$

Gọi (Δ) là đường vuông góc chung của (d_1) và $(d_2) \Rightarrow \begin{cases} (\Delta) \perp (d_1) \\ (\Delta) \perp (d_2) \end{cases}$

Khi đó: vectơ chỉ phương của (Δ) là $\vec{u} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = (-3; -3; 1)$.

Câu 51. Chọn C.

Gọi $A(3 + t; -3 + 2t; 2 + t) \in (d_1)$; $B(4 + 2t'; -2 + 3t'; 6 + t') \in (d_2)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1 - t + 2t'; 1 - 2t + 3t'; 4 - t + t')$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy) là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

Khi đó (Δ) vuông góc với mặt phẳng (Oxy) khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = m \cdot \vec{k}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t - 2t' = 1 \\ 2t - 3t' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t' = -1 \end{cases} \Rightarrow AB = 4.$$

Câu 52. Chọn D.

Cách 1: Gọi $I(0; 2; 0)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Ta có: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |2\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})| = 2MI$.

Khi đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi độ dài MI ngắn nhất.

Mà M thuộc (Δ) nên MI ngắn nhất khi $MI \perp (\Delta)$.

Hay nói cách khác M là hình chiếu vuông góc của điểm I lên (Δ)

Mặt khác: $\overrightarrow{IM} = (1+t; t; -1+t)$; vectơ chỉ phương của (Δ) là $\vec{u} = (1; 1; 1)$.

vì M là hình chiếu vuông góc của điểm I lên (Δ) nên $\vec{u} \cdot \overrightarrow{IM} = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

với $t = 0$ ta có $M(1; 2; -1)$.

Cách 2: Gọi $M(1+t; 2+t; -1+t) \in (\Delta)$

Ta có $\overrightarrow{MA} = (-t; -t; 4-t)$; $\overrightarrow{MB} = (-2-t; -t; -2-t)$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (-2-2t; -2t; 2-2t) \Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = \sqrt{12t^2 + 8} \geq 2\sqrt{2}$$

Do đó: $\Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|_{\min} = 2\sqrt{2}$ khi $t = 0 \Rightarrow M(1; 2; -1)$.

Câu 53. Chọn B.

(α) có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}(3; -2; -3)$; d có vec tơ chỉ phương $\vec{u}(3; -2; 2)$

Ta có: $M = \Delta \cap d \Rightarrow M(2+3t; -4-2t; 1+2t)$; $\overrightarrow{AM}(-1+3t; -2-2t; 5+2t)$

Vì Δ song song với (α) nên:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (-1+3t)3 + (-2-2t)(-2) + (5+2t)(-3) = 0 \Leftrightarrow t = 2. \text{ Vậy: } M(8; -8; 5)$$

Câu 54. Chọn A.

Gọi $M = \Delta \cap (\alpha) \Rightarrow M(11t; -1-2t; 7t)$. Hoành độ của điểm M bằng 0 nên: $11t = 0 \Leftrightarrow t = 0$

$$\Rightarrow M(0; -1; 0) \in (\alpha) \Rightarrow 5.0 + m(-1) - 3.0 + 2 = 0 \Rightarrow m = 2.$$

Câu 55. Chọn A.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB}(-2; 6; -4), \text{ đường thẳng } AB: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -2 + 6t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$$

Gọi H là hình chiếu của O lên AB

$$\Rightarrow H \in AB \Rightarrow H(4-2t; -2+6t; 1-4t) \Rightarrow \overrightarrow{OH}(4-2t; -2+6t; 1-4t)$$

$$\text{Lại có: } \overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow (4-2t)(-2) + (-2+6t)(6) + (1-4t)(-4) = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OH}\left(\frac{22}{7}; \frac{4}{7}; -\frac{5}{7}\right) = \frac{1}{7}(22; 4; -5) = \frac{1}{7}\vec{u}$$

Đường cao OH đi qua $O(0,0,0)$ nhận vec tơ $\vec{u}(22; 4; -5)$ làm vec tơ chỉ phương nên có phương

$$\text{trình: } \begin{cases} x = 22t \\ y = 4t \\ z = -5t \end{cases}.$$

Câu 56. Chọn D.

$$\text{Xét hệ phương trình: } \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 \\ 2x + y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(-3+t) + (2-2t) + 3(1) + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Do đó hệ phương trình có vô số nghiệm. Vậy: d thuộc (P) .

Câu 57. Chọn C.

Δ có vec tơ chỉ phương $\vec{u}_{\Delta}(-1;1;1)$; d có vec tơ chỉ phương $\vec{u}_d(2;-1;3)$

$$\vec{u}_{\Delta} \cdot \vec{u}_d = (-1)2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 0 \text{ nên } (\Delta, d) = 90^\circ.$$

Câu 58. Chọn B.

d_1 có vec tơ chỉ phương $\vec{u}_1(4;-6;-8)$; d_2 có vec tơ chỉ phương $\vec{u}_2(-6;9;12)$

Ta có: $\frac{4}{-6} = \frac{-6}{9} = \frac{-8}{12}$ nên $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ cùng phương $\Rightarrow d_1$ và d_2 song song hoặc trùng nhau.

Chọn $A(2;0;-1) \in d_1$. Thay vào phương trình đường thẳng d_2 : $\frac{2-7}{-6} = \frac{0-2}{9} = \frac{-1}{12}$ (vô nghiệm)

Do đó: $A(2;0;-1) \notin d_2$. Vậy d_1 song song d_2 .

Câu 59. Chọn D.

d_1 có vec tơ chỉ phương $\vec{u}_1(4;-6;-8)$; d_2 có vec tơ chỉ phương $\vec{u}_2(-6;9;12)$

Ta có: $\frac{4}{-6} = \frac{-6}{9} = \frac{-8}{12}$ nên $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ cùng phương $\Rightarrow d_1$ và d_2 song song hoặc trùng nhau.

Chọn $A(2;0;-1) \in d_1$, $B(7;2;0) \in d_2$. Ta có: $\overrightarrow{AB}(5;2;1)$; $[\overrightarrow{AB}, \vec{u}_2] = (15; -66; 57)$

$$\text{Khi đó: } d(d_1, d_2) = d(A, d_2) = \frac{[\overrightarrow{AB}, \vec{u}_2]}{|\vec{u}_2|} = \frac{\sqrt{(15)^2 + (-66)^2 + (57)^2}}{\sqrt{(-6)^2 + (9)^2 + (12)^2}} = \sqrt{30}.$$

Câu 60. Chọn A.

Đường thẳng AB đi qua $A(1;-2;1)$ và nhận $\overrightarrow{AB}(1;3;2)$ làm vec tơ chỉ phương nên có

$$\text{phương trình: } \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{2}.$$

Câu 61. Chọn C.

Gọi M là giao điểm của đường thẳng d và (P) . $M \in d \Rightarrow M(3+t; -1-t; 2t)$

$$M \in (P): 2(3+t) - (-1-t) - (2t) - 7 = 0 \Rightarrow t = 0. \text{ Vậy: } M(3; -1; 0).$$

Câu 62. Chọn D.

d : có VTCP $\vec{u}(-1;1;1)$ và đi qua $M(2;1;0)$ nên có phương trình chính tắc: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$

Câu 63. Chọn B.

[Phương pháp tự luận]

Gọi d là đường thẳng đi qua 2 điểm $A(1;2;-3)$ và $B(3;-1;1)$. Đường thẳng d đi qua $A(1;2;-3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = \vec{AB} = (2;-3;4)$ nên có phương trình chính tắc là:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{4}.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Đường thẳng đi qua $A(1;2;-3)$ và $B(3;-1;1)$ có vectơ chỉ phương $\vec{AB} = (2;-3;4)$ nên loại phương án A và C. Xét thấy điểm $A(1;2;-3)$ thỏa mãn phương trình chính tắc ở phương án B nên chọn B là đáp án đúng.

Câu 64. Chọn B.

Đường thẳng d có phương trình tham số là:
$$\begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}.$$

Vì $H = d \cap (P)$ suy ra $H \in d \Rightarrow H(12+4t; 9+3t; 1+t)$. Mà $H \in (P): 3x + 5y - z - 2 = 0$ nên ta có: $3(12+4t) + 5(9+3t) - (1+t) - 2 = 0 \Leftrightarrow 26t + 78 = 0 \Leftrightarrow t = -3$.

Vậy $H(0;0;-2)$.

Câu 65. Chọn A.

Đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ có VTCP $\vec{u} = (1;-1;2)$.

Mặt phẳng $(P): x + 3y + z + 1 = 0$ có VTPT $\vec{n} = (1;3;1)$.

Ta có: $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1.1 + (-1).3 + 2.1 = 0$ nên $\vec{u} \perp \vec{n}$. Từ đó suy ra $d \parallel (P)$ hoặc $d \subset (P)$.

Lấy điểm $M(1;2;1) \in d$, thay vào $(P): x + 3y + z + 1 = 0$ ta được: $1 + 3.2 + 1 + 1 = 9 \neq 0$ nên $M \notin (P)$. Suy ra $d \parallel (P)$.

Câu 66. Chọn D.

Đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$ có VTCP $\vec{u} = (1;1;-1)$.

Đường thẳng $d': \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -1 + 2t' \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$ có VTCP $\vec{u}' = (2;2;-2)$.

Ta thấy $\vec{u}' = 2\vec{u}$ nên $\vec{u}, \vec{u}'$ là hai vectơ cùng phương. Suy ra $d \parallel d'$ hoặc $d \equiv d'$.

Mặt khác, lấy $M(1;2;3) \in d$, thay vào phương trình tham số của đường thẳng d' ta được:

$$\begin{cases} 1 = 1 + 2t' \\ 2 = -1 + 2t' \\ 3 = 2 - 2t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t' = 0 \\ t' = \frac{3}{2} \\ t' = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ (vô nghiệm). Suy ra } M(1;2;3) \notin d'.$$

Từ đó suy ra $d \parallel d'$.

Câu 67. Chọn B.

$$\text{Xét hệ phương trình: } \begin{cases} -3 + 2t = 5 + t' & (1) \\ -2 + 3t = -1 - 4t' & (2) \\ 6 + 4t = 20 + t' & (3) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) và (2) suy ra $t = 3$ và $t' = -2$. Thay vào phương trình (3) ta thấy nó thỏa mãn. Vậy hệ phương trình trên có nghiệm là $t = 3, t' = -2$.

Suy ra d cắt d' tại điểm có tọa độ $(3;7;18)$.

Câu 68. Chọn C.

$$\text{Xét hệ phương trình: } \begin{cases} 1 + mt = 1 - t' & (1) \\ t = 2 + 2t' & (2) \\ -1 + 2t = 3 - t' & (3) \end{cases}$$

Để đường thẳng d và d' cắt nhau thì hệ phương trình trên phải có nghiệm duy nhất.

Từ phương trình (2) và (3) suy ra $t = 2$ và $t' = 0$. Thay vào phương trình (1) suy ra $m = 0$.

Câu 69. Chọn C.

[Phương pháp tự luận]

Gọi H là hình chiếu của M trên đường thẳng d thì $H \in d \Rightarrow H(1+t; 2t; 2+t)$.

Ta có: $\overrightarrow{MH} = (t-1; 2t; t+1)$ và $\vec{u} = (1; 2; 1)$ là một VTCP của d .

Vì $MH \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow t-1+4t+t+1=0 \Leftrightarrow t=0$ nên $H(1;0;2)$.

Khoảng cách từ điểm M tới đường thẳng d bằng độ dài đoạn MH .

Ta có $MH = |\overrightarrow{MH}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Áp dụng công thức tính khoảng cách từ M tới d là: $h = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|}$, với $M_0 \in d$.

Câu 70. Chọn B.

Gọi MN là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau d và d' ($M \in d, N \in d'$).

Vì $M \in d \Rightarrow M(1+2t; -1-t; 1)$ và $N \in d' \Rightarrow N(2-t'; -2+t'; 3+t')$.

Suy ra $\overrightarrow{MN} = (1-2t-t'; -1+t+t'; 2+t')$.

Đường thẳng d và d' lần lượt có VTCP là $\vec{u}_d = (2; -1; 0)$ và $\vec{u}_{d'} = (-1; 1; 1)$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} MN \perp d \\ MN \perp d' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{u_{d'}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1-2t-t') - (-1+t+t') = 0 \\ -(1-2t-t') + (-1+t+t') + (2+t') = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ t' = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Từ đó suy ra } \overrightarrow{MN} = \left(-\frac{1}{2}; -1; \frac{1}{2}\right) \text{ và } MN = |\overrightarrow{MN}| = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng d và d' bằng $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Áp dụng công thức tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau d và d' là:

$$h = \frac{\left| \left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{u_{d'}} \right] \cdot \overrightarrow{MM'} \right|}{\left| \left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{u_{d'}} \right] \right|}, \text{ (với } M \in d, M' \in d').$$

Câu 71. Chọn A.

Gọi $H(1+t; 2t; 2+t) \in \Delta$ là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng Δ .

Ta có $\overrightarrow{MH} = (t; 2t+3; t)$ và $\overrightarrow{u_\Delta} = (1; 2; 1)$ là VTCP của đường thẳng Δ .

Vì $MH \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = 0 \Leftrightarrow t + 2(2t+3) + t = 0 \Leftrightarrow 6t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1$ nên $H(0; -2; 1)$

Câu 72. Chọn D.

A chia MN theo tỉ số k nếu $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AN}$. Ta có $A(a; 0; c) \in (Oxz)$.

$$\overrightarrow{AM} = (-2-a; 3; 1-c); \overrightarrow{AN} = (5-a; 6; -2-c). \text{ Ta có } \frac{-2-a}{5-a} = \frac{1}{2} = \frac{1-c}{-2-c} \text{ do đó } \begin{cases} a = -9 \\ c = 4 \end{cases}.$$

$$\overrightarrow{AM} = (7; 3; -3); \overrightarrow{AN} = (14; 6; -6). \text{ Vậy } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}.$$

Câu 73. Chọn A.

Do $M \in \Delta$ nên $M(1-t; -2+t; 2t)$. $MA^2 = 6t^2 - 20t + 40, MB^2 = 6t^2 - 28t + 36$. Do đó $MA^2 + MB^2 = 12t^2 - 48t + 76 = 12(t-2)^2 + 28 \geq 28$. Dấu bằng xảy ra khi $t=2$ nên $M(-1; 0; 4)$.

Câu 74. Chọn A.

Theo giả thiết d nằm trên mặt phẳng trung trực (Q) của AB . Tọa độ trung điểm của AB là

$$I\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 1\right), \overrightarrow{BA} = (3; 1; 0) \text{ là vec tơ pháp tuyến của } (Q). \text{ Phương trình của } (Q): 3x + y - 7 = 0$$

. Đường thẳng d là giao tuyến của (P) và (Q) .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{n_P} \wedge \overrightarrow{n_Q} = (1; -3; 2), M(0; 7; 0) \in (P) \cap (Q). \text{ Phương trình của } d \text{ là } \begin{cases} x = t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$$

Câu 75. Chọn B.

Gọi A, B là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 . $A(7+m; 3+3m; 9-m) \in d_1$ và $B(3-7n; 1+2n; 1+3n) \in d_2$. $\overrightarrow{AB} = (-4-n-m; -2+2n-2m; -8+3n+n)$.

Do $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6m = 0 \\ 20n - 6m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = 0 \end{cases}$ nên $A(7; 3; 9), B(3; 1; 1), \overrightarrow{AB} = (-4; -2; -8)$. Đường

thẳng AB đi qua A có phương trình $\frac{x-7}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-9}{4}$.

Câu 76. Chọn D.

Đường thẳng đi qua điểm $A(0; 1; 1)$ cắt d_2 tại B . Ta có $B(t; -t; 2)$, $\overrightarrow{AB} = (t; -t-1; 1)$ do $d_1 \perp \Delta$

nên $\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4}$. Vậy $B\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; 2\right)$, $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}; 1\right)$. Phương trình đường thẳng

$AB: \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{4}$.

Câu 77. Chọn C.

Vec tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (2; -3; 1)$ và Δ qua $M(2; 0; -1)$ nên chọn đáp án C.

Câu 78. Chọn B.

Vec tơ chỉ phương của đường thẳng Δ chính là vec tơ pháp tuyến của (α) nên $\vec{u}_\Delta = (4; 3; -7)$ và Δ đi qua $A(1; 2; 3)$ nên chọn đáp án B.

Câu 79. Chọn C.

Do các vectơ chỉ phương của d_1 và d_2 là $\vec{u}_1(2; 3; 4)$ và $\vec{u}_2(4; 6; 8)$ cùng phương với nhau nên $d_1 // d_2$ hoặc $d_1 \equiv d_2$. Mặt khác $M(1; 2; 3) \in d_1$ và $M(1; 2; 3)$ cũng thuộc d_2 nên $d_1 \equiv d_2$.

Câu 80. Chọn D.

Phương pháp tự luận

Đường thẳng d có vec tơ chỉ phương $\vec{u}(1; -2; 0)$ và đi qua điểm $A(-3; 2; 1)$

Mặt phẳng (α) có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}(2; 1; 3)$.

Dễ thấy: $\begin{cases} 2x_A + y_A + 3z_A + 1 = -6 + 2 + 3 + 1 = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{n} = 2 - 2 + 0 = 0 \end{cases}$. Vậy d nằm trong mặt phẳng (α) .

Phương pháp trắc nghiệm.

Xét hệ gồm phương trình d và phương trình (α) :
$$\begin{cases} 2x + y + 3z + 1 = 0 \\ x = -3 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{hệ vô số}$$

nghiệm

Từ đó suy ra d nằm trong mặt phẳng (α) .

Câu 81. Chọn C.

Thứ nhất ta thấy d_1 có vec tơ chỉ phương $\vec{u}_1(1; 2; 3)$; d_2 có vec tơ chỉ phương $\vec{u}_2(2; 4; 6)$.

Vậy $\vec{u}_2 = 2\vec{u}_1$. Mặt khác $A_1(1;0;3) \in d_1$ nhưng không thuộc d_2 . Từ đó suy ra $d_1 \nparallel d_2$.

Câu 82. Chọn D.**Phương pháp tự luận**

$$\text{Xét hệ gồm phương trình } d \text{ và phương trình } (P): \begin{cases} x+3y+z+1=0 \\ x=1+t \\ y=2-t \\ z=2-3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \\ z=-4 \\ t=2 \end{cases}$$

Từ đó suy ra d cắt mặt phẳng (P) tại điểm $M(3;0;-4)$.

Phương pháp trắc nghiệm

Dễ thấy tọa độ các điểm $A(3;0;4); B(3;-4;0); C(-3;0;4)$ không thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P) .

$$\text{Kiểm tra } M(3;0;-4) \text{ thỏa mãn phương trình } d: \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=2-3t \end{cases} \text{ và phương trình mặt phẳng}$$

$(P): x+3y+z+1=0$. Vậy suy ra d cắt mặt phẳng (P) tại điểm $M(3;0;-4)$.

Câu 83. Chọn B.

$$\text{Đường thẳng } d: \begin{cases} x=2t \\ y=1-t \\ z=2+t \end{cases} \text{ đi qua } A(0;1;2) \text{ và có véc tơ chỉ phương } \vec{u}(2;-1;1).$$

Từ đó loại đáp án A, C (do tọa độ của A không thỏa mãn) và đáp án D (do hai véc tơ chỉ phương không cùng phương).

Câu 84. Chọn D.

Ta có: $\overrightarrow{AB}(-1;-1;5)$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng AB .

Kiểm tra thấy tọa độ điểm A thỏa mãn cả ba phương trình (I); (II); (III)

Từ đó suy ra cả (I), (II) và (III) đều là phương trình đường thẳng AB .

Câu 85. Chọn C.

Dễ thấy $\overrightarrow{AB}(0;-1;-1); \overrightarrow{AC}(0;-2;1) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (-3;0;0)$. Vậy sai ở bước 2.

Câu 86. Chọn D.**Phương pháp tự luận**

Đường thẳng Δ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta(1;-1;-3)$.

Đường thẳng chứa trục Ox có véc tơ chỉ phương $\vec{i}(1;0;0)$.

Theo giả thiết ta có đường thẳng d có véc tơ chỉ phương là: $\vec{u} = [\vec{u}_\Delta; \vec{i}] = (0;3;-1)$

$$\text{Từ đó dễ dàng suy ra được phương trình đường thẳng } d \text{ là: } \begin{cases} x=0 \\ y=-3t \\ z=t \end{cases}$$

Phương pháp trắc nghiệm.

Kiểm tra các đường thẳng có phương trình: $\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = -t \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases}; \frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$ đều không

vuông góc với Δ .

Kiểm tra đường thẳng có phương trình $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3t \\ z = t \end{cases}$ thấy thỏa mãn yêu cầu bài toán; đó là:

+/ Tọa độ điểm O (0;0;0) thỏa mãn phương trình

+/ Véc tơ chỉ phương $\vec{u}(0;-3;1)$ vuông góc với hai véc tơ $\vec{i}(1;0;0)$ và $\vec{u}_{\Delta}(1;-1;-3)$.

Câu 87. Chọn D.

Phương pháp tự luận

Đường thẳng d có véc tơ chỉ phương $\vec{u}(4;-1;2)$ và đi qua điểm $A(3;-1;4)$

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}(1;2;-1)$.

Để thấy: $\begin{cases} x_A + 2y_A - z_A + 3 = 3 - 2 - 4 + 3 = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{n} = 4 - 2 - 2 = 0 \end{cases}$. Vậy d nằm trong mặt phẳng (P) .

Phương pháp trắc nghiệm.

Chuyển phương trình d về dạng phương trình chính tắc: $\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{2}$

Xét hệ gồm phương trình d và phương trình (P) : $\begin{cases} x + 2y - z + 3 = 0 \\ \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{-1} \\ \frac{x-3}{4} = \frac{z-4}{2} \end{cases}$

Để thấy hệ vô số nghiệm $(x;y;z)$. Từ đó suy ra d nằm trong mặt phẳng (P) .

Câu 88. Chọn D.

Gọi $\vec{u}_1; \vec{u}_2$ lần lượt là vectơ chỉ phương của đường thẳng $d_1; d_2$.

$\vec{u}_1 = (1; 1; 0); \vec{u}_2 = (-1; 0; 1)$

Áp dụng công thức ta có $\cos(d_1, d_2) = \left| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \right| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|-1|}{\sqrt{1+1} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow (d_1, d_2) = 60^\circ$.

Câu 89. Chọn C.

Gọi $\vec{u}; \vec{n}$ lần lượt là vectơ chỉ phương, pháp tuyến của đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) .

$\vec{u} = (1; -2; 1); \vec{n} = (5; 11; 2)$

Áp dụng công thức ta có $\sin(\Delta, (P)) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|1 \cdot 5 - 11 \cdot 2 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{5^2 + 11^2 + 2^2}} = \frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow (\Delta, (P)) = 30^\circ.$$

Câu 90. Chọn D.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho $A \equiv O(0; 0; 0)$

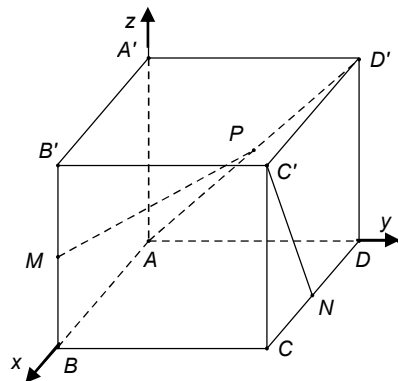
Suy ra $B(a; 0; 0); C(a; a; 0); D(0; a; 0)$

$A'(0; 0; a); B'(a; 0; a); C'(a; a; a); D'(0; a; a)$

$$M\left(a; 0; \frac{a}{2}\right); N\left(\frac{a}{2}; a; 0\right); P\left(0; \frac{a}{2}; a\right)$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MP} = \left(-a; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right); \overrightarrow{NC'} = \left(\frac{a}{2}; 0; a\right) \Rightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{NC'} = 0$$

$$\Rightarrow (MP, NC') = 90^\circ$$



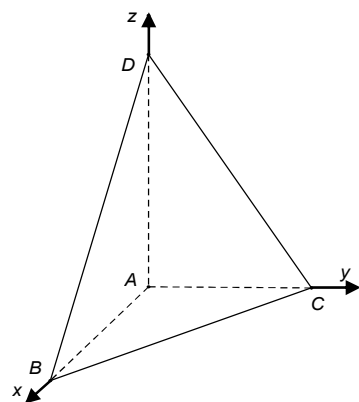
Câu 91. Chọn A.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho $A \equiv O(0; 0; 0)$

Suy ra $B(a; 0; 0); C(0; a; 0); D(0; 0; 2a)$

Ta có $\overrightarrow{DB}(a; 0; -2a); \overrightarrow{DC}(0; a; -2a)$

$$\cos(DB, DC) = \left| \cos(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) \right| = \frac{|\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}|}{|\overrightarrow{DB}| \cdot |\overrightarrow{DC}|} = \frac{4}{5}.$$



Câu 92. Chọn C.

Vì ABCD là hình chữ nhật nên $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = 1$

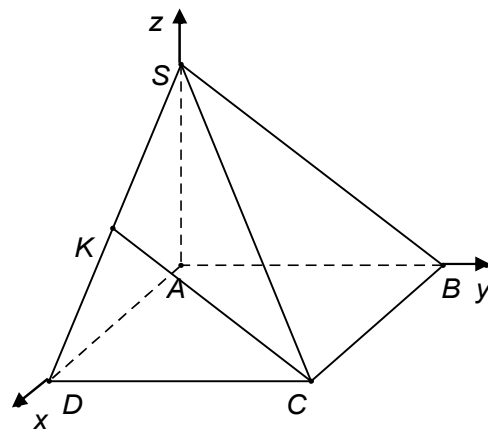
Chọn hệ trục tọa độ sao cho $A \equiv O(0; 0; 0)$

Suy ra $B(0; 2; 0); C(1; 2; 0); D(1; 0; 0)$

$$S(0; 0; \sqrt{5}); K\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{CK} = \left(-\frac{1}{2}; -2; \frac{\sqrt{5}}{2}\right); \overrightarrow{AB}(0; 2; 0)$$

$$\cos(CK, AB) = \left| \cos(\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{AB}) \right| = \frac{|\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{CK}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{4}{\sqrt{22}}.$$



Câu 93. Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{n_p}(3; 4; 5)$

$$\overrightarrow{n_d} = [\overrightarrow{n_\alpha}, \overrightarrow{n_\beta}] = (2; 1; 1)$$

$$\text{Áp dụng công thức } \sin((P), d) = \frac{|\overrightarrow{n_p} \cdot \overrightarrow{u_d}|}{|\overrightarrow{n_p}| \cdot |\overrightarrow{u_d}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 94. Chọn D.

Cách 1: $M(5+2t; 1+3t; 2-2t) \in d; \overrightarrow{AM}(2+2m; 3+3m; -2-2m)$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{17} \Leftrightarrow 17(1+m)^2 = 17 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(5;1;2) \\ M(1;-5;6) \end{cases}$$

Cách 2: Kiểm tra các điểm thuộc đường thẳng d có 2 cặp điểm trong đáp án B và C thuộc đường thẳng d . Dùng công thức tính độ dài AM suy ra đáp án C thỏa mãn.

Câu 95. Chọn C.

Gọi $\vec{n}(a;b;c); \vec{n} \neq \vec{0}$ là VTPT của (P) ; α là góc tạo bởi (P) và Oy , α lớn nhất khi $\sin \alpha$ lớn nhất. Ta có $\vec{n}$ vuông góc với $\vec{u}_d$ nên $\vec{n}(b+2c;b;c)$

$$\sin \alpha = \left| \cos(\vec{n}, \vec{j}) \right| = \frac{|b|}{\sqrt{2b^2 + 5c^2 + 4bc}}$$

Nếu $b=0$ thì $\sin \alpha = 0$.

$$\text{Nếu } b \neq 0 \text{ thì } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}c}{b} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{6}{5}}}. \text{ Khi đó, } \sin \alpha \text{ lớn nhất khi } \frac{c}{b} = -\frac{2}{5}$$

$\Rightarrow$ chọn $b=5; c=-2$

Vậy, phương trình mp (P) là $x+5y-2z+9=0$. Do đó ta có $N \in (P)$.

Câu 96. Chọn A.

Gọi $M(t-1; t; 6t-9), t \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ta có } d(M, \Delta_2) = d(M, (P)) \Leftrightarrow \frac{|\overrightarrow{M_0M}, \vec{u}|}{|\vec{u}|} = d(M, (P))$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{29t^2 - 88t + 68} = \frac{|11t - 20|}{3} \text{ với } M_0(1; 3; -1) \in \Delta_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=\frac{53}{35} \end{cases} \xrightarrow{t \in \mathbb{Z}} t=1$$

Vậy, $M(0; -1; 3) \Rightarrow d(M, (Oxy)) = 3$.

Câu 97. Chọn B.

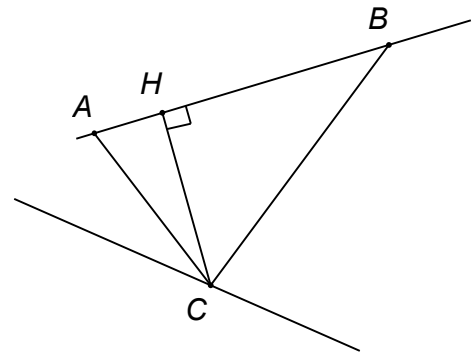
Ta có 2 đường thẳng AB và d chéo nhau.

Gọi C là điểm trên d và H là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB .

Vì $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \sqrt{11} \cdot CH$ nên S_{ABC} nhỏ nhất

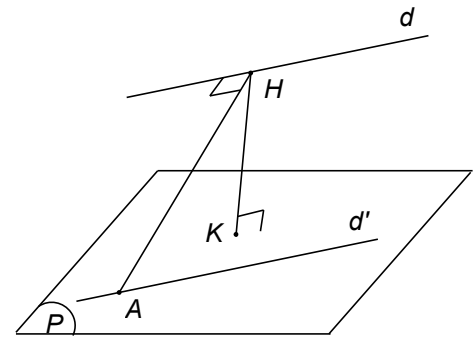
khi CH nhỏ nhất $\Leftrightarrow CH$ là đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng AB và d .

Ta có $C(1; 0; 2) \Rightarrow AC = \sqrt{29}$.



Câu 98. Chọn A.

(P) là mặt phẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng d nên (P) chứa đường thẳng d' đi qua điểm A và song song với đường thẳng d. Gọi H là hình chiếu của A trên d, K là hình chiếu của H trên (P).



Ta có $d(d, (P)) = HK \leq AH$ (AH không đổi)

$\Rightarrow$ GTLN của $d(d, (P))$ là AH

$\Rightarrow d(d, (P))$ lớn nhất khi AH vuông góc với (P).

Khi đó, nếu gọi (Q) là mặt phẳng chứa A và d thì (P) vuông góc với (Q).

$\Rightarrow \vec{n}_P = [\vec{u}_d, \vec{n}_Q] = (98; 14; -70)$

$\Rightarrow (P): 7x + y - 5z - 77 = 0 \Rightarrow d(M, (P)) = \frac{97\sqrt{3}}{15}$.

Câu 99. Chọn A.

Gọi H là hình chiếu của A trên d; K là hình chiếu của A trên (P).

Ta có $d(A, (P)) = AK \leq AH$ (Không đổi)

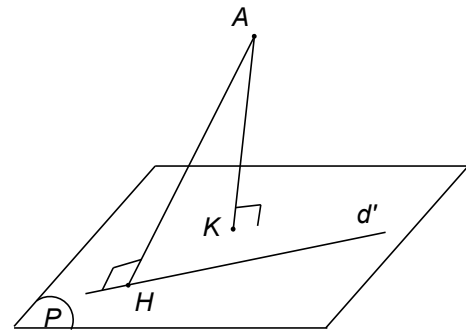
$\Rightarrow$ GTLN của $d(d, (P))$ là AH

$\Rightarrow d(A, (P))$ lớn nhất khi $K \equiv H$.

Ta có $H(3; 1; 4)$, (P) qua H và $\perp AH$

$\Rightarrow (P): x - 4y + z - 3 = 0$

Vậy $d(M, (P)) = \frac{11\sqrt{18}}{18}$.



Câu 100. Chọn D.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm, $\vec{n}_p$ là VTPT của mặt phẳng (P).

Gọi $M(1+t; t; 2+2t)$ là giao điểm của Δ và d; $M'(3-t'; 1+t'; 1-2t')$ là giao điểm của Δ và d'.

Ta có: $\overrightarrow{MM'}(2-t'-t; 1+t'-t; -1-2t'-2t)$

$MM' \parallel (P) \Leftrightarrow \begin{cases} M \notin (P) \\ MM' \perp \vec{n}_p \end{cases} \Leftrightarrow t' = -2 \Rightarrow \overrightarrow{MM'}(4-t; -1-t; 3-2t)$

Ta có $\cos 30^\circ = \cos(\overrightarrow{MM'}, \vec{u}_d) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|-6t+9|}{\sqrt{36t^2-108t+156}} \Leftrightarrow \begin{cases} t=4 \\ t=-1 \end{cases}$

Vậy, có 2 đường thẳng thoả mãn là $\Delta_1 : \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 + t \\ z = 10 + t \end{cases} ; \Delta_2 : \begin{cases} x = t' \\ y = -1 \\ z = t' \end{cases} .$

Khi đó, $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{1}{2}$.

Chủ đề 5

THỦ THUẬT CASIO GIẢI NHANH
CHUYÊN ĐỀ OXYZ

A. TÍNH NHANH THỂ TÍCH CHÓP, DIỆN TÍCH TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Ứng dụng tích có hướng tính diện tích tam giác

- Cho tam giác ABC có diện tích tam giác ABC tính theo công thức $S = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] \right|$
- Ứng dụng tính chiều cao AH của tam giác ABC : $AH = \frac{2.S_{ABC}}{BC} = \frac{\left| [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] \right|}{\left| \overrightarrow{BC} \right|}$

2. Ứng dụng tích có hướng tính thể tích hình chóp

- Thể tích hình chóp $ABCD$ được tính theo công thức $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AB} [\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}] \right|$
- Ứng dụng tính chiều cao AH của hình chóp $ABCD$: $AH = \frac{3.V_{ABCD}}{S_{BCD}} = \frac{\left| \overrightarrow{AB} [\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}] \right|}{\left| [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] \right|}$

3. Lệnh Caso

- Lệnh đăng nhập môi trường vecto MODE 8
- Nhập thông số vecto MODE 8 1 1
- Tính tích vô hướng của 2 vecto : vectoA SHIFT 5 7 vectoB
- Tính tích có hướng của hai vecto : vectoA x vectoB
- Lệnh giá trị tuyệt đối SHIFT HYP
- Lệnh tính độ lớn một vecto SHIFT HYP
- Lệnh dò nghiệm của bất phương trình MODE 7
- Lệnh dò nghiệm của phương trình SHIFT SOLVE

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Cho 4 điểm $A(1;0;1)$, $B(2;2;2)$, $C(5;2;1)$, $D(4;3;-2)$. Tính thể tích tứ diện $ABCD$

A. 6

B. 12

C. 4

D. 2

Lời giải:

- Nhập thông số ba vecto $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ vào máy tính Casio

MODE 8 1 1 2 = 1 = 2 = 0 = 2 = 1 = MODE 8 2 1 5 = 1 =
 2 = 0 = 1 = 1 = MODE 8 3 1 4 = 1 = 3 = 0 = = 2 = 1 =
 A [1 2 [B [4 2 [C [3 3 []
 1 0 -3

- Áp dụng công thức tính thể tích $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AB} \left[\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD} \right] \right| = 4$

ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 (SHIFT 5 4 X SHIFT 5 5)) ÷ 6 =
 Abs(VctA (VctB x
 4

⇒ Đáp số chính xác là C.

Bài toán 2: Cho $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Điểm D nằm trên trục Oy và thể tích tứ diện $ABCD$ bằng 5. Tọa độ của D là :

- A. $(0;-7;0)$ B. $\begin{bmatrix} (0;-7;0) \\ (0;8;0) \end{bmatrix}$ C. $(0;8;0)$ D. $\begin{bmatrix} (0;7;0) \\ (0;-8;0) \end{bmatrix}$

Lời giải:

- Ta có : $V = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AD} \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right] \right| = 5 \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right] = \pm 30$

- Tính $\left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right]$ bằng Casio ta được $\left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right] = (0;-4;-2)$

MODE 8 1 1 1 = - 1 = 2 = MODE 8 2 1 0 = - 2 = 4 = ON
 SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =
 Ans [] -4 -2]
 0

- Điểm D nằm trên Oy nên có tọa độ $D(0;y;0) \Rightarrow \overrightarrow{AD}(-2;y-1;1)$

Nếu $\overrightarrow{AD} \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right] = 30$

MODE 1 0 X (- 2) - 4 (ALPHA) - 1) - 2 X 1 - 3 0
 SHIFT CALC 1 =
 0 x (-2) - 4 (X-1) - 2
 X = -7
 L-R = 0

Ta thu được $y = -7 \Rightarrow D(0;-7;0)$

Nếu $\overrightarrow{AD} \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right] = -30$

◀ ◀ ◀ DEL + SHIFT CALC 1 =

$$0 \times (-2) - 4(X-1) - 2 = 0$$

$$X = 8$$

$$L-R = 0$$

Ta thu được $y = 8 \Rightarrow D(0;8;0)$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là B.

Bài toán 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;2;0)$, $B(3;-1;1)$, $C(1;1;1)$. Tính diện tích S của tam giác ABC

A. $S = \sqrt{3}$

B. $S = \sqrt{2}$

C. $S = \frac{1}{2}$

D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}S = 1$

Lời giải:

- Nhập 2 vecto $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ vào máy tính Casio

MODE 8 1 1 2 = - 3 = 1 = MODE 8 2 1 0 = - 1 = 1 =

VCT

A [2 -3] B [0 -1]

1 1

- Diện tích tam giác ABC được tính theo công thức: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right] \right| = 1.732... = \sqrt{3}$

ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4) ÷ 2 =

Abs(VctA×VctB)÷2

1.732050808

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là A.

Bài toán 4: Cho hai điểm $A(1;2;0)$, $B(4;1;1)$. Độ dài đường cao OH của tam giác OAB là :

A. $\frac{1}{\sqrt{19}}$

B. $\sqrt{\frac{86}{19}}$

C. $\sqrt{\frac{19}{86}}$

D. $\sqrt{\frac{54}{11}}$

Lời giải:

- Tính diện tích tam giác ABC theo công thức $S_{OAB} = \frac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB} \right] \right|$

MODE 8 1 1 1 = 2 = 0 = MODE 8 2 1 4 = 1 = 1 = ON SHIFT hyp

SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4) ÷ 2 =

VCT

Abs(VctA×VctB)÷2

3.674234614

Vì giá trị diện tích này lẻ nên ta lưu vào biến A cho dễ nhìn qJz

VCT

Ans→A

3.674234614

- Gọi h là chiều cao hạ từ O đến đáy AB ta có công thức $S_{OAB} = \frac{1}{2}h.AB \Leftrightarrow h = \frac{2S}{AB}$
- Tính độ dài cạnh $AB = |\overline{AB}|$

MODE **8** **1** **1** **3** **=** **=** **1** **=** **1** **=** **ON** **SHIFT** **hyp** **SHIFT** **5** **3** **)** **=**

Abs(VctA)

3.31662479

Giá trị này lẻ ta lại lưu vào biến B

SHIFT **RCL** **↵**

Ans→B

3.31662479

$$\Rightarrow h = \frac{2A}{B} = 2.2156... =$$

2 **ALPHA** **(←)** **÷** **ALPHA** **↵** **=**

2A÷B

2.215646838

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là D.

Bài toán 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tứ diện $ABCD$ có

$A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7), D(-5;-4;8)$. Độ dài đường cao kẻ từ D của tứ diện là:

A. 11

B. $\frac{45}{7}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Lời giải:

- Ta tính được thể tích của tứ diện $ABCD$ theo công thức $V = \frac{1}{6}|\overline{AB}[\overline{AC};\overline{AD}]| = \frac{154}{3}$

MODE **8** **1** **1** **2** **=** **=** **2** **=** **=** **3** **=** **MODE** **8** **2** **1** **4** **=** **0** **=** **6** **=**

MODE **8** **3** **1** **=** **7** **=** **=** **7** **=** **7** **=** **ON** **SHIFT** **hyp** **SHIFT** **5** **3**

SHIFT **5** **7** **(SHIFT 5 4 X SHIFT 5 5)** **)** **÷** **6** **=**

Abs(VctA.(VctB×V

51.33333333

- Gọi h là khoảng cách từ $D \Rightarrow V = \frac{1}{3}h.S_{ABC} \Rightarrow h = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{154}{S_{ABC}}$:

- Tính S_{ABC} theo công thức $S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overline{AB}[\overline{AC}]| = 14$

SHIFT **hyp** **SHIFT** **5** **3** **X** **SHIFT** **5** **4** **)** **÷** **2** **=**

$$\text{Abs}(\text{VctA} \times \text{VctB}) \div 2$$

14

Khi đó $h = \frac{154}{14} = 11$

⇒ Đáp số chính xác là A.

Bài toán 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$ và $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$.

Điểm M thuộc d để tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất có tọa độ là :

A. $M(-1;1;0)$ B. $M(3;-1;4)$ C. $M(-3;2;-2)$ D. $M(1;0;2)$

Lời giải:

○ Diện tích tam giác ABM được tính theo công thức $S = \frac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM} \right] \right| \Leftrightarrow 2S = \left| \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM} \right] \right|$

○ Với $M(-1;1;0)$ ta có $2S = 29.3938...$

MODE 8 1 1 2 = - 2 = 6 = MODE 8 2 1 - 2 = - 4 = 0 = ON SHIFT hyp
SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4) =
Abs(VctA×VctB)

29.39387691

○ Với $M(3;-1;4)$ ta có $2S = 29.3938...$

MODE 8 2 1 2 = - 6 = 4 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4) =
Abs(VctA×VctB)

29.39387691

○ Với $M(-3;2;-2)$ ta có $2S = 32.8633...$

MODE 8 2 1 - 4 = - 3 = - 2 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3
X SHIFT 5 4) =
Abs(VctA×VctB)

32.86335345

○ Với $M(1;0;2)$ ta có $2S = 28.1424...$

MODE 8 2 1 0 = - 5 = 2 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 X SHIFT hyp 4
DEL DEL SHIFT 5 4) =
Abs(VctA×VctB)

28.14249456

So sánh 4 đáp số ⇒ Đáp án chính xác là C.

Bài toán 7: Cho $A(2;-1;6)$, $B(-3;-1;-4)$, $C(5;-1;0)$, $D(1;2;1)$. Thể tích tứ diện $ABCD$ bằng :

A. 30

B. 40

C. 50

D. 60

Lời giải:

Thể tích tứ diện $ABCD$ được tính theo công thức $V = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AB} [\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}] \right| = 30$

MODE 8 1 1 - 5 = 0 = - 1 0 = MODE 8 2 1 3 = 0 = - 6 =
MODE 8 3 1 - 1 = 3 = - 5 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7
(SHIFT 5 4 X SHIFT 5 5)) ÷ 6 =

Abs(VctA·(VctB×^{VCT}D

30

Vậy đáp số chính xác là A.

Bài toán 8: Cho bốn điểm $A(a;-1;6)$, $B(-3;-1;-4)$, $C(5;-1;0)$, $D(1;2;1)$ và thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 30. Giá trị của a là :

A. 1

B. 2

C. 2 hoặc 32

D. 32

Lời giải:

- Vì điểm A chứa tham số nên ta ưu tiên vecto $\overrightarrow{BA}$ tính sau cùng. Công thức tính thể tích

$ABCD$ ta sắp xếp như sau : $V = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{BA} [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] \right|$

- Tính $[\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] = (-12; -24; 24)$

MODE 8 1 1 8 = 0 = 4 = MODE 8 2 1 4 = 3 = 5 =
ON SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

Ans
[] -E -24 24]
-12

- Ta có $V = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{BA} [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] \right| = 30 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] = \pm 180$

Với $\overrightarrow{BA} [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] = 180 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] - 180 = 0 \Rightarrow a = 2$

MODE 1 - 1 2 (ALPHA) + 3) - 2 4 X 0 + 2 4 (6 + 4)
- 1 8 0 SHIFT CALC 1 =

-12(X+3)-24×0+24
X=
L-R= 2
0

Với $\overrightarrow{BA} [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] = -180 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] + 180 = 0 \Rightarrow a = 32$

◀ ◀ ◀ ◀ DEL + SHIFT CALC 1 =

$$\begin{aligned} & -12(X+3) - 24 \times 0 + 24 \\ & X = \frac{32}{0} \\ & L-R = \end{aligned}$$

⇒ Đáp án chính xác là C.

Bài toán 9: Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(1;2;4)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $V_{OABC} = 36$

- A. $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{12} = 1$ B. $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$ C. $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{12} = 1$ D. Đáp án khác

Lời giải:

- Trong các đáp án chỉ có mặt phẳng ở đáp án A đi qua điểm $M(1;2;4)$ cho nên ta chỉ đi kiểm tra tính đúng sai của đáp án A
 - Theo tính chất của phương trình đoạn chắn thì mặt phẳng (P): $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{12} = 1$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại 3 điểm $A(3;0;0), B(0;6;0), C(0;0;12)$. Hơn nữa 4 điểm O, A, B, C lập thành một tứ diện vuông đỉnh O
 - Theo tính chất của tứ diện vuông thì $V_{OABC} = \frac{1}{6} |OA| |OB| |OC| = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 12 = 36$ (đúng)
- ⇒ Đáp án chính xác là A.

Bài toán 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(0;1;0), B(2;2;2), C(-2;3;1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$. Tìm điểm M thuộc d sao cho thể tích tứ diện $MABC$ bằng 3

- A. $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); \left(-\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; -\frac{11}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); \left(-\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$
- C. $\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$ D. $\left(\frac{3}{5}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$

Lời giải:

- Điểm M thuộc d nên có tọa độ $M(1+2t; -2-t; 3+2t)$
- Thể tích tứ diện $MABC$ được tính theo công thức $V = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AM} [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] \right|$

Tính $[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (-3; -6; 6)$

MODE 8 1 1 2 = 1 = 2 = MODE 8 2 1 - 2 = 2 = 1 =

ON SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

Ans $\begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix}$

- Ta có $V = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AM} [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] \right| = 3 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = \pm 18$

Với $\overrightarrow{AM}[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = 18 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] - 18 = 0$

MODE 1 = 3 (1 + 2 ALPHA)) = 6 (- 2 = ALPHA) = 1)
+ 6 (3 + 2 ALPHA)) = 1 8 SHIFT CALC 1 = SHIFT RCL (←)

$$\begin{aligned} & -3(1+2X) - 6(-2-X) \quad \text{Ans} \rightarrow A \\ & X = -1.25 \\ & L-R = -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

Ta được $t = -\frac{5}{4} \Rightarrow M\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Với $\overrightarrow{AM}[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = -18 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] + 18 = 0$

Rõ ràng chỉ có đáp số **A** chứa điểm M trên $\Rightarrow A$ là đáp số chính xác.

Bài toán 11: Cho $A(0;0;2)$, $B(3;0;5)$, $C(1;1;0)$, $D(4;1;2)$. Độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ đỉnh D xuống mặt phẳng (ABC) là :

A. $\sqrt{11}$

B. $\frac{1}{\sqrt{11}}$

C. 1

D. 11

Lời giải:

- o Tính thể tích tứ diện $ABCD$ theo công thức $V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB}[\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}]| = 0.5$

MODE 8 1 1 3 = 0 = 3 = MODE 8 2 1 1 = 1 = - 2 =
MODE 8 3 1 4 = 1 = 0 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7
(SHIFT 5 4 X SHIFT 5 5)) ÷ 6 =

$$\text{Abs}(\text{VctA} \cdot (\text{VctB} \times \text{VctC}))$$

0.5

- o Gọi h là chiều cao cần tìm. Khi đó $V_{ABCD} = \frac{1}{3} h \cdot S_{ABC} \Leftrightarrow h = \frac{3S}{S_{ABC}}$

Tính diện tích tam giác ABC theo công thức $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}[\overrightarrow{AC}]|$

ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4) ÷ 2 = SHIFT RCL (←)

$$\text{Abs}(\text{VctA} \times \text{VctB}) \div 2 \quad \text{Ans} \rightarrow A$$

4.974937186 4.974937186

Vậy $h = \frac{3V}{S_{ABC}} = 0.3015... = \frac{1}{\sqrt{11}} \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**.

B. TÍNH NHANH VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG – MẶT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Vị trí tương đối của 2 đường thẳng

- Cho hai đường thẳng d và d' có hai vectơ chỉ phương $\vec{u}_d$ và $\vec{u}_{d'}$ và có hai điểm M, M' thuộc hai đường thẳng trên.
- $d \parallel d'$ nếu $\vec{u}_d = k \cdot \vec{u}_{d'}$ và có không có điểm chung
- $d \equiv d'$ nếu $\vec{u}_d = k \cdot \vec{u}_{d'}$ và có một điểm chung
- d cắt d' nếu $\vec{u}_d$ không song song $\vec{u}_{d'}$ và $\overrightarrow{MM'}[\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}] = 0$
- d chéo d' nếu $\vec{u}_d$ không song song $\vec{u}_{d'}$ và $\overrightarrow{MM'}[\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}] \neq 0$

2. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

- Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d$ và vectơ pháp tuyến $\vec{n}_p$
- $d \parallel (P)$ nếu $\vec{u}_d \perp \vec{n}_p$ và không có điểm chung
- $d \equiv (P)$ nếu $\vec{u}_d \perp \vec{n}_p$ và có điểm chung
- $d \perp (P)$ nếu $\vec{u}_d = k \cdot \vec{n}_p$

3. Lệnh Caso

- Lệnh đăng nhập môi trường vecto MODE 8
- Nhập thông số vecto MODE 8 1 1
- Tính tích vô hướng của 2 vecto : vectoA SHIFT 5 7 vectoB
- Tính tích có hướng của hai vecto : vectoA x vectoB
- Lệnh giá trị tuyệt đối SHIFT HYP
- Lệnh tính độ lớn một vecto SHIFT HYP
- Lệnh dò nghiệm của bất phương trình MODE 7
- Lệnh dò nghiệm của phương trình SHIFT SOLVE

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ đường thẳng $d_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-3}$ và đường

thẳng $d_2 : \frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{-1}$. Vị trí tương đối của d_1, d_2 là :

A. Cắt nhau B. Song song C. Chéo nhau D. Vuông góc

Lời giải:

- Ta thấy $\vec{u}_{d_1}(2;1;-3)$ không tỉ lệ $\vec{u}_{d_2}(2;2;-1) \Rightarrow (d_1), (d_2)$ không song song hoặc trùng nhau
- Lấy $M_1(-1;1;-1)$ thuộc d_1 , lấy $M_2(-3;-2;-2)$ thuộc d_2 ta được $\overrightarrow{M_1M_2}(-2;-3;-1)$

Xét tích hỗn tạp $\overrightarrow{M_1M_2}[\overrightarrow{u_{d_1}}; \overrightarrow{u_{d_2}}]$ bằng máy tính Casio theo các bước :

Nhập thông số các vecto $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{u_{d_1}}, \overrightarrow{u_{d_2}}$ vào các vecto A, vecto B, vecto C

MODE **8** **1** **1** **=** **2** **=** **=** **3** **=** **=** **1** **=** **MODE** **8** **2** **1** **2** **=** **1** **=** **=** **3** **=** **MODE** **8** **3**
1 **2** **=** **2** **=** **=** **1** **=**
 VCT **A** **[** **-2** **-3** **=** **-1** **]** **B** **[** **2** **1** **=** **-3** **]** **C** **[** **2** **2** **=** **-1** **]**

Tính $\overrightarrow{M_1M_2}[\overrightarrow{u_{d_1}}; \overrightarrow{u_{d_2}}]$

ON **SHIFT** **5** **3** **SHIFT** **5** **7** **(** **SHIFT** **5** **4** **X** **SHIFT** **5** **5** **)** **=**
 VCT **A** **·** (VCT **B** **×** VCT **C**)
0

Ta thấy $\overrightarrow{M_1M_2}[\overrightarrow{u_{d_1}}; \overrightarrow{u_{d_2}}] = 0 \Rightarrow$ hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ đồng phẳng nên chúng cắt nhau
 $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài toán 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2r \\ y = -2 - 3t \\ z = 5 + 4t \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x = 7 + 3m \\ y = -2 + 2m \\ z = 1 - 2m \end{cases}$$

A. Chéo nhau

B. Cắt nhau

C. Song song

D. Trùng nhau

Lời giải:

- Ta có hai vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_d}(2; -3; 4)$ và $\overrightarrow{u_{d'}}(3; 2; -2)$ không tỉ lệ với nhau $\Rightarrow$ Không song song hoặc trùng nhau $\Rightarrow$ Đáp án **C** và **D** là sai
- Chọn hai điểm $M(1; -2; 5)$ thuộc d và $M'(7; -2; 1)$ thuộc d' .

Xét tích hỗn tạp $\overrightarrow{M_1M_2}[\overrightarrow{u_{d_1}}; \overrightarrow{u_{d_2}}]$ bằng máy tính Casio theo các bước :

Nhập thông số các vecto $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{u_{d_1}}, \overrightarrow{u_{d_2}}$ vào các vecto A, vecto B, vecto C

MODE **8** **1** **1** **7** **=** **1** **=** **=** **2** **=** **(** **=** **2** **)** **=** **1** **=** **=** **5** **=** **MODE** **8** **2** **1** **2** **=** **=**
3 **=** **4** **=** **MODE** **8** **3** **1** **3** **=** **2** **=** **=** **2** **=**
 VCT **A** **[** **6** **0** **=** **-1** **]** **B** **[** **2** **-3** **=** **4** **]** **C** **[** **3** **2** **=** **-2** **]**

- Tính $\overrightarrow{M_1M_2}[\overrightarrow{u_{d_1}}; \overrightarrow{u_{d_2}}]$

ON **SHIFT** **5** **3** **SHIFT** **5** **7** **(** **SHIFT** **5** **4** **X** **SHIFT** **5** **5** **)** **=**
 VCT **A** **·** (VCT **B** **×** VCT **C**)
-64

Ta thấy $\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \begin{bmatrix} \overrightarrow{u_{d_1}}; \overrightarrow{u_{d_2}} \end{bmatrix} = -64 \neq 0 \Rightarrow$ hai đường thẳng $(d), (d')$ không đồng phẳng nên chúng chéo nhau

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài toán 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $(d): \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 3x - 3y + 2z + 6 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. d cắt và không vuông góc với (P) **B.** $d \perp (P)$
C. d song song với (P) **D.** d nằm trong (P)

Lời giải:

- Ta có $u_d(1; -3; -1)$ và $n_p(3; -3; 2)$. Nhập hai vecto này vào máy tính Casio

MODE **8** **1** **1** **1** **=** **-** **3** **=** **-** **1** **=** **MODE** **8** **2** **1** **3** **=** **-** **3** **=** **2** **=**

A [] **B** []

-1 **2**

- Xét tích vô hướng $\overrightarrow{u_d} \cdot \overrightarrow{n_p} = 10 \Rightarrow \overrightarrow{u_d}$ không vuông góc với $\overrightarrow{n_p} \Rightarrow d, (P)$ không thể song song hoặc trùng nhau $\Rightarrow$ Đáp số đúng chỉ có thể là **A** hoặc **B**

ON **SHIFT** **5** **3** **SHIFT** **5** **7** **SHIFT** **5** **4** **=**

VctA.VctB

10

- Lại thấy $\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{n_p}$ không song song với nhau $\Rightarrow d$ không thể vuông góc với $(P) \Rightarrow$ Đáp số **B** sai
 Vậy đáp án chính xác là **A**.

Bài toán 4: Xét vị trí tương đối của đường thẳng $d: \frac{x-9}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}$ và đường thẳng

$(\alpha): x + 2y - 4z + 1 = 0$

- A.** d cắt và không vuông góc với (P) **B.** $d \perp (P)$
C. d song song với (P) **D.** d nằm trong (P)

Lời giải:

- Ta có $u_d(8; 2; 3)$ và $n_p(1; 2; -4)$. Nhập hai vecto này vào máy tính Casio

MODE **8** **1** **1** **8** **=** **2** **=** **3** **=** **MODE** **8** **2** **1** **1** **=** **2** **=** **-** **4** **=**

A [] **B** []

3 **-4**

- Xét tích vô hướng $\overrightarrow{u_d} \cdot \overrightarrow{n_p} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{u_d}$ vuông góc với $\overrightarrow{n_p} \Rightarrow d, (P)$ chỉ có thể song song hoặc d thuộc $(\alpha) \Rightarrow$ Đáp số đúng chỉ có thể là **C** hoặc **D**

ON SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4 =

VctA.VctB

0

- Lấy một điểm M bất kì thuộc d ví dụ như $M(9;1;3)$ ta thấy M cũng thuộc $(\alpha) \Rightarrow d$ và (α) có điểm chung $\Rightarrow d$ thuộc (α)

Vậy đáp án chính xác là **D**.

Bài toán 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 \\ z = -2 - 3t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 2 = 0$. Giao điểm M của d và P có tọa độ:

A. $M(3;1;-5)$ **B.** $M(2;1;-7)$ **C.** $M(4;3;5)$ **D.** $M(1;0;0)$

Lời giải:

- Điểm M thuộc d nên có tọa độ $M(1+2t;1;-2-3t)$. Điểm M cũng thuộc mặt phẳng (P) nên tọa độ điểm M phải thỏa mãn phương trình mặt phẳng $(P) \Leftrightarrow 2(1+2t)+1+(-2-3t)-2=0$
- Công việc trên là ta sẽ nhẩm ở trong đầu, để giải bài toán ta dùng máy tính Casio luôn:

2 () 1 + 2 (ALPHA)) + 1 + (- 2 - 3) = 0
 2(1+2X)+1+(-2-3X)
 X=
 L-R= 1
 0

Ta tìm được luôn $t = 1$ vậy $x = 1 + 2t = 3$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **A**.

Bài toán 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A vuông góc và cắt d

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$ **B.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$ **C.** $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ **D.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$

Lời giải:

- Đường thẳng Δ cắt d tại điểm B . Vì B thuộc d nên có tọa độ $B(1+t;t;-1+2t)$
- Ta có: $\Delta \perp d \Rightarrow \vec{u}_{\Delta} \perp \vec{u}_d \Leftrightarrow \vec{u}_{\Delta} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_d = 0$

Với $\overrightarrow{AB}(1+t-1;t-0;-1+2t-2)$ và $\vec{u}_d(1;1;2)$ ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_d = 0$

$$\Leftrightarrow 1 \cdot (1+t-1) + 1 \cdot (t-0) + 2 \cdot (-1+2t-2) = 0$$

Đó là việc nhẩm ở trong đầu hoặc viết ra nháp, nhưng nếu dùng máy tính Casio ta sẽ bấm luôn:

1 X (1 + (ALPHA) - 1) + 1 X ((ALPHA) - 0) + 2 X (- 1 + 2) = 0
 (ALPHA) - 2) (SHIFT) (CALC) 1 =

$$\begin{array}{r} 1 \times (1 + X - 1) + 1 \times (X - 1) \\ X = \\ L - R = \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{Math} \\ 1 \\ 0 \end{array}$$

Ta được luôn $t = 1 \Rightarrow B(2; 1; 1) \Rightarrow \overline{u_\Delta} = \overline{AB}(1; 1; -1)$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là B.

Bài toán 7: Cho hai điểm $A(3; 1; 0)$, $B(-9; 4; -9)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + z + 1 = 0$. Tìm tọa độ của M trên (α) sao cho $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $M\left(1; 1; -\frac{5}{2}\right)$ B. $M\left(2; \frac{1}{2}; -2\right)$ C. $M\left(1; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ D. $M\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{4}; 3\right)$

Lời giải:

- Nếu A, B, M không thẳng hàng sẽ thì ba điểm trên sẽ lập thành một tam giác. Theo bất đẳng thức trong tam giác ta có $|MA - MB| < AB$

Nếu ba điểm trên thẳng hàng thì ta có $|MA - MB| = AB$ nếu A, B nằm khác phía với (α) (điều này đúng). Theo yêu cầu của đề bài thì rõ ràng A, B, M thẳng hàng hay M là giao điểm của đường thẳng AB và (α)

- Ta có: $AB: \begin{cases} x = 3 - 12t \\ y = 1 + 3t \\ z = -9t \end{cases} \Rightarrow M(3 - 12t; 1 + 3t; -9t)$

Tìm t bằng máy tính Casio:

$\boxed{2} \boxed{)} \boxed{3} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{2} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{)} \boxed{1} \boxed{+} \boxed{3} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{)} \boxed{+} \boxed{-} \boxed{9} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{CALC}} \boxed{1} \boxed{=}$

$$\begin{array}{r} 2(3 - 12X) - (1 + 3X) \\ X = 0.1666666667 \\ L - R = 0 \end{array}$$

Ta được $t = \frac{1}{6} \Rightarrow M\left(1; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là C.

Bài toán 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: x - 1 = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 4}{3}$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + 4y + 6z + 2017 = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $d \parallel (\alpha)$ B. d cắt nhưng không vuông góc với (α)
C. $d \perp (\alpha)$ D. d nằm trên (α)

Lời giải:

- Nhập vectơ chỉ phương $\overline{u_d}(1; 2; 3)$ và vectơ pháp tuyến $\overline{n_\alpha}(2; 4; 6)$ vào máy tính Casio

$\boxed{\text{MODE}} \boxed{8} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{1} \boxed{=}$ $\boxed{2} \boxed{=}$ $\boxed{3} \boxed{=}$ $\boxed{\text{MODE}} \boxed{8} \boxed{2} \boxed{1} \boxed{2} \boxed{=}$ $\boxed{4} \boxed{=}$ $\boxed{6} \boxed{=}$

$$\vec{u}_d = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{n}_\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Tính tích vô hướng $\vec{u}_d \cdot \vec{n}_\alpha = 28 \neq 0 \Rightarrow \vec{u}_d$ không vuông góc $\vec{n}_\alpha \Rightarrow d$ và (α) không thể song song và không thể trùng nhau

$$\text{ON} \text{ [SHIFT] [5] [3] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4] [=]} \\ \text{VctA} \cdot \text{VctB}$$

28

- Lại thấy tỉ lệ $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \Rightarrow \vec{u}_d \parallel \vec{n}_\alpha \Rightarrow d \perp (\alpha)$

Vậy đáp số chính xác là C.

Bài toán 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = -2-2t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 2+t' \\ y = 1-t' \\ z = 1 \end{cases}$. Vị trí

trùng đối của hai đường thẳng là :

- A.** Chéo nhau **B.** Cắt nhau **C.** Song song **D.** Trùng nhau

Lời giải:

- Vì Xét hai vecto chỉ phương $\vec{u}_d(1;-1;-2)$ và $\vec{u}_{d'}(1;-1;0)$ không tỉ lệ với nhau $\Rightarrow$ Hai đường thẳng d và d' không thể song song hoặc trùng nhau $\Rightarrow$ Đáp án **C** và **D** loại
- Lấy hai điểm thuộc hai đường thẳng là $M(1;2;-2)$ và $M'(2;1;1)$. Nhập ba vecto vào casio

$$\text{MODE} \text{ [8] [1] [1] [2] [-] [1] [=] [1] [-] [2] [=] [1] [-] [(] [-] [2] [)] [=] \text{MODE} \text{ [8] [5] [2] [1] [1] [=] [-]} \\ \text{[1] [=] [-] [2] [=] \text{MODE} \text{ [8] [3] [1] [1] [=] [-] [1] [=] [0] [=]} \\ \vec{u}_d = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_{d'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Xét tích hỗn tạp $\overrightarrow{MM'}[\vec{u}_d; \vec{u}_{d'}] = 0$

$$\text{ON} \text{ [SHIFT] [5] [3] [SHIFT] [.] [DEL] [SHIFT] [5] [7] [(] [SHIFT] [5] [4] [X] [SHIFT] [5] [5] [)] [=]} \\ \text{VctA} \cdot (\text{VctB} \times \text{VctC})$$

0

$\Rightarrow d, d'$ đồng phẳng (nằm trên cùng một mặt phẳng) $\Rightarrow d$ cắt d'

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**.

Bài toán 10: Cho mặt phẳng $(P): x - 3y + z = 0$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$. (P) và Δ cắt nhau tại điểm có tọa độ

A. $(1; 2; -1)$ B. $(0; -1; 3)$ C. $(-1; 3; -2)$ D. $(3; 1; 0)$

Lời giải:

- Gọi giao điểm là M , vì M thuộc Δ nên $M(1+2t; 2-t; -1+t)$
- Tọa độ M thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P) nên ta có thể sử dụng máy tính Casio tìm luôn ra t

MODE 1 1 (1 + 2 ALPHA)) - 3 (2 - ALPHA)) + (- 1 + ALPHA))) SHIFT
CALC 1 =

1(1+2X)-3(2-X)+
X= 1
L-R= 0

$\Rightarrow t = 1 \Rightarrow M(3; 1; 0)$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là D.

Bài toán 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$

và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$. Cao độ giao điểm của d và mặt phẳng (ABC) là :

A. 3 B. 6 C. 9 D. -6

Lời giải:

- Mặt phẳng (ABC) đi qua 3 điểm thuộc 3 trục tọa độ vậy sẽ có phương trình là :

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 1 = 0.$$

- Gọi giao điểm là $M(-t; 2+t; 3+t)$. Sử dụng máy tính Casio tìm t

6 X (- ALPHA)) + 3 X (2 + ALPHA)) + 2 (3 + ALPHA)) - 1 SHIFT
CALC 1 =

6X(-X)+3X(2+X)+
X= 6
L-R= 0

Vậy $z = 3 + t = 9$.

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là C.

C. TÌM HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Hình chiếu vuông góc của một điểm đến một mặt phẳng

Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ thì hình chiếu vuông góc H của M trên mặt phẳng (P) là giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (P)

- Với Δ là đường thẳng qua M và vuông góc với (P) (Δ nhận $\vec{n}_p$ làm $\vec{u}_\Delta$)

2. Hình chiếu vuông góc của một điểm đến một đường thẳng

Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-x_N}{a} = \frac{y-y_N}{b} = \frac{z-z_N}{c}$ thì hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng d là điểm H thuộc d sao cho $\overrightarrow{MH} \perp \vec{u}_d \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}_d = 0$

3. Hình chiếu vuông góc của một đường thẳng đến một mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Hình chiếu vuông góc của đường thẳng d đến mặt phẳng (P) là giao điểm của mặt phẳng (α) và mặt phẳng (P)

- (α) là mặt phẳng đi chứa d và vuông góc với (P)
- (α) nhận $\vec{u}_d$ và $\vec{n}_p$ là cặp vectơ chỉ phương
- (α) chứa mọi điểm nằm trong đường thẳng d

4. Lệnh Caso

- Lệnh đăng nhập môi trường vecto MODE 8
- Nhập thông số vecto MODE 8 1 1
- Tính tích vô hướng của 2 vecto : vectoA SHIFT 5 7 vectoB
- Tính tích có hướng của hai vecto : vectoA x vectoB
- Lệnh giá trị tuyệt đối SHIFT HYP
- Lệnh tính độ lớn một vecto SHIFT HYP
- Lệnh dò nghiệm của bất phương trình MODE 7
- Lệnh dò nghiệm của phương trình SHIFT SOLVE

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Cho mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + z + 6 = 0$ và điểm $A(2; -1; 0)$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (α) có tọa độ

- A. $(2; -2; 3)$ B. $(1; 1; -2)$ C. $(1; 0; 3)$ D. $(-1; 1; -1)$

Lời giải:

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên $(\alpha) \Rightarrow$ Đường thẳng AH song song với vectơ pháp

$$\text{tuyến } \vec{n}_\alpha(3; -2; 1) \text{ của } (\alpha) \Rightarrow (AH): \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Tọa độ điểm } A(2 + 3t; -1 - 2t; 1 + t)$$

(Phần này ta dễ dàng nhầm được mà không cần nháp)

- Để tìm t ta chỉ cần thiết lập điều kiện A thuộc (α) là xong

$$\boxed{3} \boxed{(} \boxed{2} \boxed{+} \boxed{3} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{2} \boxed{(} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{-} \boxed{2} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{)} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{+} \boxed{6} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{CALC}} \boxed{1} \boxed{=}$$

$$\begin{array}{r} 3(2+3X)-2(-1-2X) \\ X= \\ L-R= \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{Math} \\ -1 \\ 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(-1; 1; -1)$$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là D.

Bài toán 2: Tìm tọa độ của điểm M' đối xứng với điểm $M(3; 3; 3)$ qua mặt phẳng

$$(P): x + y + z - 1 = 0$$

A. $M'\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ B. $M'\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ C. $M'\left(-\frac{7}{3}; -\frac{7}{3}; -\frac{7}{3}\right)$ D. $M'\left(\frac{7}{3}; \frac{7}{3}; \frac{7}{3}\right)$

Lời giải:

- Tương tự ví dụ 1 ta nhầm được tọa độ hình chiếu vuông góc H của M lên (P) là

$$M(3+t; 3+t; 3+t)$$

- Tính t bằng Casio.

$$\boxed{3} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{+} \boxed{3} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{+} \boxed{3} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{CALC}} \boxed{1} \boxed{=}$$

$$\begin{array}{r} 3+X+3+X+3+X-1 \\ X= \\ L-R= \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{Math} \\ -2.666666667 \\ 0 \end{array}$$

$$\text{Ta thu được } t = -\frac{8}{3} \Rightarrow H\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

- Ví A' đối xứng với M qua H nên H là trung điểm của MM' . Theo quy tắc trung điểm ta suy ra được $M'\left(-\frac{7}{3}; -\frac{7}{3}; -\frac{7}{3}\right)$. $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là C.

Bài toán 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$ và

điểm $M(1; 2; -3)$. Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M lên đường thẳng d là:

A. $H(1; 2; -1)$ B. $H(1; -2; -1)$ C. $H(-1; -2; -1)$ D. $H(1; 2; 1)$

Lời giải:

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng d .

$$\text{Đường thẳng } d \text{ có phương trình tham số } \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \Rightarrow \text{Tọa độ } H(3+2t; -1+t; 1+2t)$$

$$MH \perp d \Rightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \text{ với } \overrightarrow{u_d}(2; 1; 2)$$

- Sử dụng máy tính Casio bấm:

2 () 3 + 2 (ALPHA) - 1 () + (- 1 + (ALPHA) - 2 () + 2 ((1

+ 2 (ALPHA) - - 3 () SHIFT CALC 1 =

$$\begin{array}{l} 2(3+2X-1)+(-1+X) \\ X= \\ L-R= \end{array} \begin{array}{l} \text{Math} \\ -1 \\ 0 \end{array}$$

$$\text{Khi đó } t = -1 \Rightarrow H(1; -2; -1)$$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là B.

Bài toán 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$ và điểm $A(2; -1; 1)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của A lên d . Viết phương trình mặt cầu (C) có tâm I và đi qua A

A. $x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 20$

B. $x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 5$

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 20$

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 14$

Lời giải:

- Điểm I có tọa độ $I(1-t; 2+t; -1+t)$

- Thiết lập điều kiện vuông góc $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0$

- 1 ((1 - (ALPHA) - 2 () + ((2 + (ALPHA) - - 1 () +

2 ((- 1 + 2 (ALPHA) - 1 () SHIFT CALC 1 =

$$\begin{array}{l} -1(1-X-2)+(2+X) \\ X= \\ L-R= \end{array} \begin{array}{l} \text{Math} \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow t = 0 \Rightarrow I(1; 2; -1)$$

- Với $I(1; 2; -1)$ và $A(2; -1; 1)$ ta có: $R^2 = IA^2 = |\overrightarrow{IA}|^2 = 14$

MODE 8 1 1 2 - 1 = - 1 - 2 = 1 - - 1 = ON

SHIFT hyp SHIFT 5 3 () = = x^2 =

VCT

Ans²

14

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là D.

Bài toán 5: Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$. Hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (Oxy) là :

A. $\begin{cases} x=0 \\ y=-1-t \\ z=0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1+t \\ z=0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases}$

Lời giải:

- Ta hiểu : Hình chiếu vuông góc d' của d lên mặt phẳng (Oxy) là giao tuyến của mặt phẳng (α) chứa d vuông góc với (Oxy) và mặt phẳng (Oxy)
- Mặt phẳng (α) chứa d và vuông góc với (Oxy) nên nhận vecto chỉ phương $\vec{u}(2;1;1)$ của đường thẳng d và vecto pháp tuyến $\vec{n}_{Oxy}(0;0;1)$ là cặp vecto chỉ phương

$$\Rightarrow \vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d; \vec{n}_{Oxy}] = (1; -2; 0)$$

MODE 8 1 1 2 = 1 = 1 = MODE 8 2 1 0 = 0 = 1 = ON
SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

Ans VECTOR
1 -2 0
1

Hơn nữa (α) đi qua điểm có tọa độ $(1; -1; 2)$ nên có phương trình :

$$(\alpha): 1(x-1) - 2(y+1) + 0(z-2) = 0 \Leftrightarrow (\alpha): x - 2y - 3 = 0$$

- Phương trình của d' có dạng $\begin{cases} (\alpha): x - 2y - 3 = 0 \\ (Oxy): z = 0 \end{cases}$. Chuyển sang dạng tham số ta có :

$$\vec{u}_{d'} = [\vec{n}_{Oxy}; \vec{n}_\alpha] = (-2; -1; 0)$$

MODE 8 1 1 1 = - 2 = 0 = MODE 8 2 1 0 = 0 = 1 = ON
ON SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

Ans VECTOR
-2 -1 0
-2

Có 3 đáp án thỏa mãn vecto chỉ phương có tọa độ $(-2; -1; 0)$ là B, C, D

Tuy nhiên chỉ có đáp án B chứa điểm $M(1; -1; 0)$ và điểm này cũng thuộc d'

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là B.

Bài toán 6: Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d: \begin{cases} x = \frac{7}{2} + 3t \\ y = -2t \\ z = -2t \end{cases}$ trên

$(\alpha): x + 2y - 2z - 2 = 0$

A. $\frac{x-5}{-4} = \frac{y+\frac{3}{2}}{2} = \frac{z}{1}$ B. $\frac{x+5}{-4} = \frac{y-\frac{3}{2}}{2} = \frac{z}{1}$ C. $2\frac{x-5}{4} = \frac{y+\frac{3}{2}}{2} = \frac{z}{1}$ D. $\frac{x+5}{4} = \frac{y-\frac{3}{2}}{2} = \frac{z}{1}$

Lời giải:

- Lập phương trình mặt phẳng (β) chứa d và vuông góc với (α)

$\vec{n}_\beta = [\vec{u}_d; \vec{n}_\alpha] = (8; 4; 8)$

MODE 8 1 1 3 = - 2 = - 2 = MODE 8 2 1 1 = 2 = - 2 =

ON SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

Ans 8 4 8

(β) đi qua điểm $\left(\frac{7}{2}; 0; 0\right)$ nên có phương trình $8\left(x - \frac{7}{2}\right) + 8y + 8z = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + 2z - 7 = 0$

- Ta có $d': \begin{cases} 2x + 2y + 2z - 7 = 0 \\ x + 2y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$

Tính $\vec{n}_{d'} = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_\beta] = (-8; 6; 2) \Rightarrow \vec{n}(-4; 3; 2)$ cũng là vectơ chỉ phương của d'

Đường thẳng d' lại đi qua điểm $\left(5; -\frac{3}{2}; 0\right)$ nên có phương trình: $\frac{x-5}{-4} = \frac{y+\frac{3}{2}}{2} = \frac{z}{1}$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là A.

Bài toán 7: Hình chiếu vuông góc của $A(-2; 4; 3)$ lên mặt phẳng $(P): 2x - 3y + 6z + 19 = 0$ có tọa độ là:

A. $(1; -1; 2)$ B. $\left(-\frac{20}{7}; \frac{37}{7}; \frac{3}{7}\right)$ C. $\left(-\frac{2}{5}; \frac{37}{5}; \frac{31}{5}\right)$ D. Kết quả khác

Lời giải:

- Đường thẳng Δ chứa A và vuông góc với (P) có phương trình: $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$

Điểm H là hình chiếu vuông góc của A lên (P) nên có tọa độ $H(-2 + 2t; 4 - 3t; 3 + 6t)$

- Tính t bằng Casio

2 (-) 2 + 2 ALPHA)) - 3 (4 - 3 ALPHA)) + 6 (3 + 6
ALPHA)) + 1 9 SHIFT CALC 1 =

$$2(-2+2X)-3(4-3X) \\ X = -0.428571428 \\ L-R = 0$$

Chuyển t về dạng phân thức qJz=

Ans→A

$$-\frac{3}{7}$$

Vậy $t = -\frac{3}{7} \Rightarrow H\left(-\frac{20}{7}; \frac{37}{7}; \frac{3}{7}\right)$

Vậy đáp số chính xác là **B**.

Bài toán 8: Trong không gian với hệ tọa độ Oxy cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 4 = 0$ và điểm $M(1; -2; -2)$. Tìm tọa độ điểm N đối xứng với điểm M qua mặt phẳng (P)

A. $N(3; 4; 8)$

B. $N(3; 0; -4)$

C. $N(3; 0; 8)$

D. $N(3; 4; -4)$

Lời giải:

○ Phương trình $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = -2 - t \end{cases} \Rightarrow$ Tọa độ hình chiếu $H(1+t; -2+t; -2-t)$

○ Tìm t bằng Casio ta được $t = 1$

1 + ALPHA) - 2 + ALPHA) - (- 2 - 2 - ALPHA)) - 4 SHIFT CALC 1 =

$$1+X-2+X-(-2-X)-4 \\ X = 1 \\ L-R = 0$$

Với $t = 1 \Rightarrow H(2; -1; -3) \Rightarrow N(3; 0; -4)$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**.

Bài toán 9: Cho $A(5; 1; 3), B(-5; 1; -1), C(1; -3; 0), D(3; -6; 2)$. Tọa độ của điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng (BCD) là:

A. $(-1; 7; 5)$

B. $(1; 7; 5)$

C. $(1; -7; -5)$

D. $(1; -7; 5)$

Lời giải:

○ Tính vecto chỉ phương của $(BCD): \vec{u} = [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] = (-5; -10; -10)$

MODE 8 1 1 1 - - 5 = - 3 - 1 = 0 - - 1 =

MODE 8 2 1 3 - - 5 = - 6 - 1 = 2 - - 1 =

ON SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

$$\begin{array}{r} \text{Ans} \\ \boxed{} \text{---F} \quad -10 \quad -10] \\ -5 \end{array}$$

$$(BCD) \text{ qua } B(-5;1;-1) \Rightarrow (BCD): -5(x+5) - 10(y-1) - 10(z+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 2y + 2z + 5 = 0$$

- o Gọi H là hình chiếu của A lên $(BCD) \Rightarrow H(5+t; 1+2t; 3+2t)$. Tính t

$$\begin{array}{l} \text{MODE} \quad 1 \quad 5 \quad + \quad \text{ALPHA} \quad \text{)} \quad + \quad 2 \quad (\quad 1 \quad + \quad 2 \quad \text{ALPHA} \quad \text{)} \quad \text{)} \quad + \quad 2 \quad (\quad 3 \quad + \quad 2 \quad \text{ALPHA} \quad \text{)} \quad \text{)} \\ + \quad 5 \quad \text{SHIFT} \quad \text{CALC} \quad 1 \quad = \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5+X+2(1+2X)+2(3+2X) \\ X= \\ L-R= \end{array} \quad \begin{array}{r} \text{Math} \\ -2 \\ 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow t = -2 \Rightarrow H(3; -3; -1) \Rightarrow A'(1; -7; -5)$$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là C.

Bài toán 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P): -x + y + 2z + 3 = 0$. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) .

A. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-3}$

B. $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$

C. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$

D. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-3}$

Lời giải:

- o Lập mặt phẳng (α) chứa d và vuông góc với $(P) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d; \vec{n}_P] = (1; -7; 4)$

$$\begin{array}{l} \text{MODE} \quad 8 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad = \quad 2 \quad = \quad 3 \quad = \quad \text{MODE} \quad 8 \quad 2 \quad 1 \quad - \quad 1 \quad = \quad 1 \quad = \quad 2 \quad = \quad \text{ON} \\ \text{SHIFT} \quad 5 \quad 3 \quad \times \quad \text{SHIFT} \quad 5 \quad 4 \quad = \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Ans} \\ \boxed{} \text{---F} \quad -1 \quad 4] \\ 1 \end{array}$$

$$(\alpha): (x+1) - 7y + 4(z+2) = 0 \Leftrightarrow x - 7y + 4z + 9 = 0$$

- o Đường thẳng d có phương trình tổng quát $\begin{cases} x - 7y + 4z + 9 = 0 \\ -x + y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$. Để so sánh kết quả ta phải

chuyển phương trình đường thẳng d về dạng chính tắc

Ta có: $\vec{u}_d = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_P] = (-18; -6; -6) \Rightarrow \vec{u}(3; 1; 1)$ cũng là vectơ chỉ phương của d

$$\begin{array}{l} \text{MODE} \quad 8 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad = \quad - \quad 7 \quad = \quad 4 \quad = \quad \text{MODE} \quad 8 \quad 2 \quad 1 \quad - \quad 1 \quad = \quad 1 \quad = \quad 2 \quad = \quad \text{ON} \\ \text{SHIFT} \quad 5 \quad 3 \quad \times \quad \text{SHIFT} \quad 5 \quad 4 \quad = \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \text{Ans} \rightarrow \boxed{-18} \\ & \text{VCTD} \\ & \boxed{-6} \quad \boxed{-6} \end{aligned}$$

Hơn nữa điểm $M(2;1;-1)$ cũng thuộc $d \Rightarrow$ Phương trình chính tắc $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là C.

Bài toán 11: Cho ba điểm $A(-1;3;2), B(4;0;-3), C(5;-1;4)$. Tìm tọa độ hình chiếu H của A lên đường thẳng BC .

A. $\left(\frac{77}{17}; -\frac{9}{17}; \frac{12}{17}\right)$ B. $\left(\frac{77}{17}; \frac{9}{17}; \frac{12}{17}\right)$ C. $\left(\frac{77}{17}; -\frac{9}{17}; -\frac{12}{17}\right)$ D. $\left(-\frac{77}{17}; -\frac{9}{17}; -\frac{12}{17}\right)$

Lời giải:

- Đường thẳng BC nhận vecto $\overrightarrow{BC}(1;-1;7)$ là vecto chỉ phương và đi qua điểm $B(4;0;-3)$

$$\Rightarrow BC: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -t \\ z = -3 + 7t \end{cases}$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên $BC \Rightarrow H(4+t; -t; -3+7t)$

- Mặt khác $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

MODE 1 4 + ALPHA) = = 1) = (= ALPHA) = 3) + 7 (= 3

+ 7 ALPHA) = 2) SHIFT CALC 1 =

$$\begin{aligned} & (4+X--1)-(-X-3) \triangleright \\ & X = 0.5294117647 \\ & L-R = 0 \end{aligned}$$

Chuyển t về dạng phân số qJz

Ans $\rightarrow$ A

$$\frac{9}{17}$$

$$\Rightarrow t = \frac{9}{17} \Rightarrow H\left(\frac{77}{17}; -\frac{9}{17}; \frac{12}{17}\right)$$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là A.

Bài toán 12: Tìm tọa độ điểm đối xứng của $M(-3;1;-1)$ qua đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): 4x - 3y - 13 = 0$ và $(\beta): y - 2z + 5 = 0$

A. $(-2;-5;-3)$ B. $(2;-5;3)$ C. $(5;-7;-3)$ D. $(5;-7;3)$

Lời giải:

- d là giao tuyến của 2 mặt phẳng $(\alpha); (\beta)$ nên có phương trình tổng quát: $\begin{cases} 4x - 3y - 13 = 0 \\ y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$

- o Vecto chỉ phương của d là $\vec{u}_d = [\vec{n}_\beta; \vec{n}_\beta] = (6; 8; 4) \Rightarrow$ nhận $\vec{u}(3; 4; 2)$ là vecto chỉ phương

MODE 8 1 1 4 = - 3 = 0 = MODE 8 2 1 0 = 1 = - 2 = ON
SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

Ans VCTD
[] 8 4]
6

Đường thẳng d có vecto đi qua điểm $N(4; 1; 3)$ nên có phương trình tham số $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

- o Điểm H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng d nên có tọa độ

$$M(4 + 3t; 1 + 4t; 3 + 2t)$$

Mặt khác $\overline{MH} \perp d \Rightarrow \overline{MH} \cdot \vec{u} = 0$

MODE 1 3 (4 + 3 ALPHA) - - 3) + 4 (1 + 4 ALPHA) - 1)
+ 2 (3 + 2 ALPHA) - - 1) SHIFT CALC 1 =

3(4+3X--3)+4(1+4
X= -1
L-R= 0

$$\Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(1; -3; 1)$$

M' đối xứng M qua d vậy H là trung điểm $MM' \Rightarrow M'(5; -7; 3)$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là D.

Bài toán 13: Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt

phẳng tọa độ (Oxy) là:

A. $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 - t \\ z = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}$

Lời giải:

- o Dựng mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và vuông góc với

$$(Oxy) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d; \vec{n}_{Oxy}] = (1; -2; 0)$$

MODE 8 1 1 2 = 1 = 1 = MODE 8 2 1 0 = 0 = 1 = ON
SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

Ans VCTD
[] -2 0]
1

Mặt phẳng (α) chứa điểm $N(1; -1; 2)$ nên có phương trình là:

$$(\alpha): (x-1) - 2(y+1) + 0(z-2) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 3 = 0$$

- o Đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d lên mặt phẳng $(Oxy) \Rightarrow d'$ là

$$\text{giao tuyến của } (\alpha) \text{ và } (Oxy) \Rightarrow d': \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Tính $\vec{u}_d = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_{Oxy}] = (-2; -1; 0) \Rightarrow$ nhận $\vec{u}(2; 1; 0)$ là vectơ chỉ phương

MODE 8 1 1 1 = - 2 = 0 = MODE 8 2 1 0 = 0 = 1 = ON
SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

Ans VCT
-1
-2

$$\text{Lại có } d' \text{ qua điểm có tọa độ } (1; -1; 0) \Rightarrow d': \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**.

D. TÍNH NHANH KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ thì khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) được tính theo công thức $d(M; (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

2. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-x_N}{a} = \frac{y-y_N}{b} = \frac{z-z_N}{c}$ thì khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d được tính theo công thức $d(M; d) = \frac{2 \left| \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u} \right|}{\left| \vec{u} \right|}$

Trong đó $\vec{u}(a; b; c)$ là vectơ chỉ phương của d và $N(x_N; y_N; z_N)$ là một điểm thuộc d

3. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng chéo nhau $d: \frac{x-x_M}{a} = \frac{y-y_M}{b} = \frac{z-z_M}{c}$ và $d': \frac{x-x_{M'}}{a'} = \frac{y-y_{M'}}{b'} = \frac{z-z_{M'}}{c'}$ thì khoảng cách giữa 2 đường chéo nhau này được tính theo công thức $d(d; d') = \frac{\left| \overrightarrow{MN} \cdot [\vec{u}_d; \vec{u}_{d'}] \right|}{\left| [\vec{u}_d; \vec{u}_{d'}] \right|}$

Trong đó $\vec{u}(a; b; c)$ là vectơ chỉ phương của d và $M(x_M; y_M; z_M)$ là một điểm thuộc d
 $\vec{u}(a'; b'; c')$ là vectơ chỉ phương của d' và $M'(x_{M'}; y_{M'}; z_{M'})$ là một điểm thuộc d'

4. Lệnh Caso

- Lệnh đăng nhập môi trường vecto MODE 8
- Nhập thông số vecto MODE 8 1 1
- Tính tích vô hướng của 2 vecto : vectoA SHIFT 5 7 vectoB
- Tính tích có hướng của hai vecto : vectoA x vectoB
- Lệnh giá trị tuyệt đối SHIFT HYP
- Lệnh tính độ lớn một vecto SHIFT HYP
- Lệnh dò nghiệm của bất phương trình MODE 7
- Lệnh dò nghiệm của phương trình SHIFT SOLVE

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 2z + 4 = 0$ và điểm $A(1; -2; 3)$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P)

A. $d = \frac{5}{9}$

B. $d = \frac{5}{29}$

C. $d = \frac{5}{\sqrt{29}}$

D. $d = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Lời giải:

- Ta nhớ công thức tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) :

$$d(M; (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- Áp dụng cho điểm $A(1;-2;3)$ và $(P): 3x+4y+2z+4=0$ ta sử dụng máy tính để bấm luôn :

$$d(M;(P))=\frac{5\sqrt{29}}{\sqrt{29}}=\frac{5}{\sqrt{29}}$$

⇒ Đáp số chính xác là C.

Bài toán 2: Tìm m để khoảng cách từ $A(1;2;3)$ đến mặt phẳng $(P): x+3y+4z+m=0$ bằng

$$\sqrt{26}$$

- ### A. $m=7$

- ### B. $m = 18$

- ### C. $m = 20$

- #### D. $m = -45$

Lời giải:

- Thiết lập phương trình khoảng cách : $d(A;(P)) = \frac{|1.1 + 3.2 + 4.4 + m|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \sqrt{26}$

$$\Leftrightarrow \frac{|1.1+3.2+4.4+m|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}-\sqrt{26}=0$$

(việc này ta chỉ làm ở trong đầu)

- Để tính khoảng cách trên bằng Casio đầu tiên ta nhập vế trái của phương trình vào rồi sử dụng chức năng SHIFT SOLVE.

(MODE) 1 $\frac{\square}{\square}$ SHIFT hyp 1 $\times$ 1 $+$ 3 $\times$ 2 $+$ 4 $\times$ 3 $+$ (ALPHA)) ∇ $\sqrt{\square}$ 1 x^2 $+$ 3 x^2 $+$
 4 x^2 $\blacktriangleright$ $\blacktriangleright$ $-$ $\sqrt{\square}$ 2 6 SHIFT CALC 1 $\equiv$

$$\sqrt[3]{1^2+3^2+4^2}$$
 Math r
 X= 7
 L-R= 0

Ta thu được kết quả $m = 7$

⇒ Đáp số chính xác là **A**.

Bài toán 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{3}$ và mặt

phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$. M là điểm có hoành độ âm thuộc d sao cho khoảng cách từ M đến (P) bằng 2. Tọa độ điểm M là :

- ### A. $M(-2; 3; 1)$

- ### B. $M(-1; 5; -7)$

- C. $M(-2; -5; -8)$

- D.** $M(-1;-3;-5)$

Lời giải:

- Ta biết điểm M thuộc (d) nên có tọa độ $M(t; -1+2t; -2+3t)$, biết được điều này sau khi

$$\text{chuyển } d \text{ về dạng tham số } d: \begin{cases} x = t \\ y = -1+2t \\ z = -2+3t \end{cases}$$

- Thiết lập phương trình khoảng cách: $d(M; (P)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|t+2(-1+2t)-2(-2+3t)+3|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = 2$

Nghĩ được tới đây thì ta có thể sử dụng Casio để tính rồi. Ta bấm ngắn gọn như sau

SHIFT hyp ALPHA) + 2 (- 1 + 2 ALPHA)) - 2 (- 2 + 3 ALPHA)) + 3 ALPHA)) + 3 ▼
3 ► - 2 SHIFT CALC - 5 =

Math
X= -1
L-R= 0

Khi đó $t = -1 \Rightarrow x = -1; y = -3$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là D.

Bài toán 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 2 = 0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn bán kính bằng 1. Viết phương trình mặt cầu (S) .

- A. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 8$ B. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 10$
C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 8$ D. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$

Lời giải:

- Mặt cầu $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ sẽ có tâm $I(a;b;c)$. Vì mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ nên nó chỉ có thể là đáp án C hoặc D
- Ta hiểu: Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một giao tuyến là đường tròn bán kính $r = 1$ sẽ thỏa mãn tính chất $R^2 = h^2 + r^2$ với h là khoảng cách từ tâm I tới mặt phẳng.

Tính tâm R^2 bằng Casio.

() = SHIFT hyp 2 x 2 + 1 x 1 + 2 x 1 + 2 ▼ √ 2 x 2 + 1 x 2 + 2 x 2
► ►) x 2 + 1 x 2 =
Math
(2 x 2 + 1 x 1 + 2 x 1 + 2 / √ 2 x 2 + 1 x 2 + 2)
10

$\Rightarrow R^2 = 10 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là D.

Bài toán 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-2}$. Tính

khoảng cách từ điểm $M(-2;1;-1)$ tới d

A. $\frac{5}{3}$

B. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

Lời giải:

- Nhắc lại : Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d(1;2;-2)$ và đi qua điểm $N(1;2;-2)$ có

khoảng cách từ M đến d tính theo công thức : $d(M;d) = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|}$

- Để tính khoảng cách trên bằng Casio đầu tiên ta nhập hai vectơ $\overrightarrow{MN}, \vec{u}_d$ vào máy tính.

MODE 8 1 1 1 - (- 2) = 2 - 1 = - 2 - - 1 = MODE 8 2 1 1 =
2 = - 2 =
VCT
A [3 I -1] B [1 2 -2]
-1 -2

- Tính $d(M;d) = 2.357022604 = \frac{5\sqrt{2}}{3}$

ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4) ÷ SHIFT hyp SHIFT 5 4) =
VCT
Abs(VctA×VctB)÷
2.357022604

⇒ Đáp số chính xác là D.

Bài toán 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + mt \\ z = -2t \end{cases}$ và mặt

cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 13 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt?

A. 5

B. 3

C. 2

D. 1

Lời giải:

- Mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 1$ có tâm $I(1;-3;2)$ bán kính $R = 1$

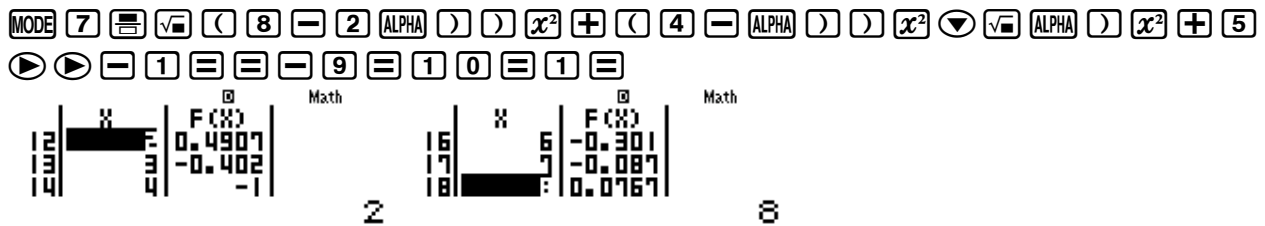
Đường thẳng d đi qua $M(2;1;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1;m;-2)$

Ta hiểu : Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm phân biệt nếu khoảng cách từ tâm I (của mặt cầu (S)) đến đường thẳng d nhỏ hơn bán kính R (của mặt cầu (S))

$$\Leftrightarrow \frac{|\overrightarrow{IM} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(8-2m)^2 + 0^2 + (4-2m)^2}}{\sqrt{1^2 + m^2 + (-2)^2}} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(8-2m)^2 + 0^2 + (4-2m)^2}}{\sqrt{1^2 + m^2 + (-2)^2}} - 1 < 0$$

- Để giải bài toán ta dùng máy tính Casio với tính năng MODE 7 dò nghiệm của bất phương trình :



Ta dễ dàng tìm được tập nghiệm của m là $\{-3; -4; -5; -6; -7\}$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là A.

Bài toán 7: Cho đường thẳng d đi qua điểm $M(0;0;1)$, có vecto chỉ phương $\vec{u}(1;1;3)$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x + y - z + 5 = 0$. Tính khoảng cách giữa d và (α)

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{6}{5}$

Lời giải:

- Ta thấy: $\vec{u} \cdot \vec{n}_p = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow d$ chỉ có thể song song hoặc trùng với (α)
- Khi đó khoảng cách giữa d và (α) là khoảng cách từ bất kì 1 điểm M thuộc d đến (α)

Ta bấm :



$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là B.

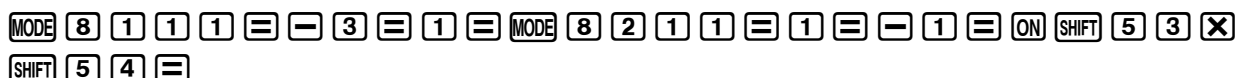
Bài toán 8: Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4 \end{cases}$. Gọi Δ' là giao tuyến của 2

mặt phẳng $(P): x - 3y + z = 0$ và $(Q): x + y - z + 4 = 0$. Tính khoảng cách giữa Δ, Δ'

- A. $\frac{12}{\sqrt{15}}$ B. $\frac{25}{\sqrt{21}}$ C. $\frac{20}{\sqrt{21}}$ D. $\frac{16}{\sqrt{15}}$

Lời giải:

- Đường thẳng Δ' có vecto chỉ phương $\vec{u}' = [\vec{n}_P; \vec{n}_Q] = (2; 2; 4)$



$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Và Δ' đi qua điểm $M'(0;2;6)$

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1;2;0)$ và đi qua điểm $M(3;-1;4)$

- Ta hiểu : khoảng cách giữa hai đường thẳng chỉ tồn tại khi chúng song song hoặc chéo nhau
- Kiểm tra sự đồng phẳng của 2 đường thẳng trên bằng tích hỗn tạp $\overrightarrow{MM'}[\vec{u};\vec{u}']$

Nhập ba vectơ $\overrightarrow{MM'}, \vec{u}, \vec{u}'$ vào máy tính Casio

MODE 8 1 1 - 3 = 3 = 2 = MODE 8 2 1 1 = 2 = 0 = MODE 8 3 1 2 =

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{C} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Xét tích hỗn tạp $\overrightarrow{MM'}[\vec{u};\vec{u}'] = -40 \neq 0 \Rightarrow \Delta, \Delta'$ chéo nhau

- Tính độ dài hai đường thẳng chéo nhau $\Rightarrow \Delta, \Delta'$ ta có công thức :

$$d = \frac{|\overrightarrow{MM'}[\vec{u};\vec{u}']|}{|\vec{u};\vec{u}'|} = 4.3640.. = \frac{20}{\sqrt{21}}$$

ON SHIFT hyp - 4 0) ÷ SHIFT hyp SHIFT 5 4 X SHIFT 5 5) =

$$\text{Abs}(-40) \div \text{Abs}(\text{Vc})$$

$$4.364357805$$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là C.

Bài toán 11: Cho hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$ và $d': \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng d, d' là :

A. $4\sqrt{2}$

B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{4}{3}$

D. $2\sqrt{3}$

Lời giải:

- Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;2;2)$ và đi qua điểm $M(2;-1;-3)$

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(1;1;-1)$

Dễ thấy hai đường thẳng d, d' song song với nhau nên khoảng cách từ d' đến d chính là khoảng cách từ điểm M' (thuộc d') đến d .

○ Gọi khoảng cách cần tìm là h ta có $h = \frac{|\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} = 1.8856... = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

MODE 8 1 1 = 1 = 2 = 2 = MODE 8 2 1 1 = 2 = 2 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3
X SHIFT 5 4) ÷ SHIFT hyp SHIFT 5 4) =

Abs(VctA×VctB)÷

1.885618083

⇒ Đáp án chính xác là B.

Bài toán 10: Cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 2 - 2t' \\ y = 3 \\ z = t' \end{cases}$. Mặt phẳng cách đều hai

đường thẳng d và d' có phương trình :

A. $x + 5y + 2z + 12 = 0$ B. $x + 5y - 2z + 12 = 0$ C. $x - 5y + 2z - 12 = 0$ D. $x + 5y + 2z - 12 = 0$

Lời giải:

○ Đường thẳng d có vecto chỉ phương $\vec{u} = (1; -1; 2)$ và đi qua điểm $M(2; 1; 0)$

Đường thẳng d' có vecto chỉ phương $\vec{u}' = (-2; 0; 1)$ và đi qua điểm $M'(2; 3; 0)$

Dễ thấy hai đường thẳng d, d' chéo nhau nên mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng trên khi mặt phẳng đó đi qua trung điểm MM' và song song với cả 2 đường thẳng đó. .

○ Mặt phẳng (P) song song với cả 2 đường thẳng nên nhận vecto chỉ phương của 2 đường thẳng là cặp vecto chỉ phương.

$$\Rightarrow \vec{n}_P = [\vec{u}; \vec{u}'] = (-1; -5; -2)$$

MODE 8 1 1 1 = - 1 = 2 = MODE 8 2 1 - 2 = 0 = 1 = ON SHIFT 5 3 X
SHIFT 5 4 =

Ans
-1 -5 -2]
- 1

(P) lại đi qua trung điểm $I(2; 2; 0)$ của MM' nên $(P): x + 5y + 2z - 12 = 0$

⇒ Đáp án chính xác là D.

Bài toán 11: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(1; 2; -1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z - 8 = 0$?

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$

Lời giải:

- Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P) khi $d(I; (P)) = R$

$$\frac{|1-4+2-8|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = 3$$

$$d(I; (P)) = 3 \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow \text{Đáp số chỉ có thể là C hoặc D}$$

- Mà ta lại có tâm mặt cầu là $I(1; 2; -1) \Rightarrow (S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$

Vậy đáp số chính xác là **D**.

Bài toán 12: Tìm điểm M trên đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-t \\ z = 2t \end{cases}$ sao cho $AM = \sqrt{6}$ với $A(0; 2; -2)$:

A. $\begin{bmatrix} (1; 1; 0) \\ (2; 1; -1) \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} (1; 1; 0) \\ (-1; 3; -4) \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} (-1; 3; -4) \\ (2; 1; -1) \end{bmatrix}$ D. Không có M thỏa

Lời giải:

- Gọi điểm M thuộc d có tọa độ theo t là $M(1+t; 1-t; 2t)$

- Ta có $AM = \sqrt{6} \Leftrightarrow |AM| = \sqrt{6} \Leftrightarrow |AM|^2 - 6 = 0$

Sử dụng máy tính Casio tìm t

$$(1+X-0)^2 + (1-X-2)^2 + (2X+2)^2 - 6 = 0$$

$$X = 0 \quad X = -2$$

- Ta tìm được hai giá trị của t

$$\text{Với } t = 0 \Rightarrow M(1; 1; 0), \text{ với } t = -2 \Rightarrow M(-1; 3; -4)$$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**.

Bài toán 13: Cho $(P): 2x - y + z - m = 0$ và $A(1; 1; 3)$. Tìm m để $d(A; (P)) = \sqrt{6}$

A. $\begin{bmatrix} m = -2 \\ m = 4 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} m = 3 \\ m = -9 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} m = -2 \\ m = 10 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} m = -3 \\ m = 12 \end{bmatrix}$

Lời giải:

- Thiết lập phương trình khoảng cách $d(A; (P)) = \sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 1 - 1 + 3 - m|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \sqrt{6}$

- Đó là khi ta nhầm, nếu vừa nhầm vừa điền luôn vào máy tính thì làm như sau (để tiết kiệm thời gian)

$$\frac{|2-1+3-m|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \sqrt{6}$$

$$\frac{|2-1+3-x|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}$$

Tìm nghiệm ta sử dụng chức năng CALC xem giá trị nào của m làm vế trái $=\sqrt{6}$ thì là đúng

$$\frac{|2-1+3-x|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \sqrt{6}$$

$\Rightarrow$ Chỉ có A hoặc C là đúng

$$\frac{|2-1+3-x|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = 0$$

Giá trị $m = 4$ không thỏa mãn vậy đáp án A sai $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là C.

Bài toán 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;-6;-2)$.

Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{MA}{MB}$

- A. $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$ B. $\frac{MA}{MB} = 2$ C. $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{3}$ D. $\frac{MA}{MB} = 3$

Lời giải:

- Mặt phẳng (Oxz) có phương trình $y = 0$
- Để tính tỉ số $\frac{MA}{MB}$ ta sử dụng công thức tỉ số khoảng cách (đã gặp ở chuyên đề hình học không gian)

Ta có: $\frac{MA}{MB} = \frac{d(A; (Oxz))}{d(B; (Oxz))}$ bất kể hai điểm A, B cùng phía hay khác phía so với (Oxz)

Ta có thể dùng máy tính Casio tính ngay tỉ số này

$$\frac{|0+3+0|}{|0+-6+0|} = \frac{1}{2}$$

Ta hiểu cả hai mẫu số của hai phép tính khoảng cách đều như nhau nên ta triệt tiêu luôn mà không cần cho vào phép tính của Casio

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là A.

Bài toán 15: Tính khoảng cách từ điểm $M(2;3;-1)$ đến đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x + y - 2z - 1 = 0$ và $(\alpha'): x + 3y + 2z + 2 = 0$.

A. $\sqrt{\frac{215}{24}}$

B. $\sqrt{\frac{205}{15}}$

C. $\frac{205}{\sqrt{15}}$

D. $\frac{215}{\sqrt{24}}$

Lời giải:

- d là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (α') nên cùng thuộc 2 mặt phẳng này $\Rightarrow$ vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng d vuông góc với cả 2 vectơ pháp tuyến của 2 mặt phẳng trên.

$$\Rightarrow \vec{u} = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_{\alpha'}] = (8; -4; 2)$$

MODE 8 1 1 1 = 1 = - 2 = MODE 8 2 1 0 = 3 = 2 = ON SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

VCT

AnS [8 -4 F]

2

- Gọi điểm $N(x; y; 0)$ thuộc đường thẳng $d \Rightarrow N\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}; 0\right)$

- Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d là: $h = \frac{[\vec{MN}; \vec{u}]}{|\vec{u}|} = 3.8265... = \sqrt{\frac{205}{14}}$

MODE 8 1 1 5 ÷ 2 = 2 = - 3 ÷ 2 = 3 = 0 = - 1 = MODE 8 2 1 8 = - 4 = 2 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4) ÷ SHIFT hyp SHIFT 5 4) =

VCT

Abs(VctA×VctB)÷

3.826598639

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là B.

Bài toán 16: Cho $A(1;1;3)$, $B(-1;3;2)$, $C(-1;2;3)$. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) là:

A. $\sqrt{3}$

B. 3

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{3}{2}$

Lời giải:

- Vecto pháp tuyến của (ABC) là $\vec{n} = [\vec{AB}; \vec{AC}] = (1; 2; 2)$

MODE 8 1 1 - 2 = 2 = - 1 = MODE 8 2 1 - 2 = 1 = 0 = ON SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

VCT

AnS [1 2 2]

1

$$\Rightarrow (ABC): 1(x-1) + 2(y-1) + 2(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 9 = 0$$

○ Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) là $h = \frac{|0+0+0-9|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = 3$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**.

Bài toán 17: Tính khoảng cách giữa cặp đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ và $d': \begin{cases} x=2-t \\ y=-1+t \\ z=t \end{cases}$

A. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{26}}{13}$ D. $\frac{\sqrt{24}}{11}$

Lời giải:

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;2;3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1;2;3)$

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(2;-1;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}'(-1;1;1)$

Dễ thấy 2 đường thẳng trên chéo nhau $\Rightarrow$ Khoảng cách cần tìm là

$$= \frac{|\overrightarrow{MM'} \cdot [\vec{u}; \vec{u}']|}{|[\vec{u}; \vec{u}']|} = 0.3922... = \frac{\sqrt{26}}{13}$$

MODE 8 1 1 1 = - 3 = - 3 = MODE 8 2 1 1 = 2 = 3 = MODE 8 3 1 -
1 = 1 = 1 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 (SHIFT 5 4 X SHIFT 5 5)) ÷
SHIFT hyp SHIFT 5 4 X SHIFT 5 5) =

$\text{Abs}(\text{VctA} \cdot (\text{VctB} \times \text{VctC}))$

0.3922322703

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**.

E. TÍNH NHANH GÓC GIỮA VECTO, ĐƯỜNG VÀ MẶT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Góc giữa hai vectơ

- Cho hai vectơ $\vec{u}(x;y;z)$ và $\vec{v}(x';y';z')$, góc giữa hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ được tính theo công thức:

$$\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x.x' + y.y' + z.z'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

- Góc giữa hai vectơ thuộc khoảng $[0^\circ; 180^\circ]$

2. Góc giữa hai đường thẳng

- Cho hai đường thẳng d và d' có hai vectơ chỉ phương $\vec{u}_d$ và $\vec{u}_{d'}$. Góc α giữa hai đường

thẳng d, d' được tính theo công thức: $\cos \alpha = \left| \cos(\vec{u}_d; \vec{u}_{d'}) \right| = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{u}_{d'}|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{u}_{d'}|}$ (tích vô hướng chia

tích độ dài)

- Góc giữa hai đường thẳng thuộc khoảng $[0^\circ; 90^\circ]$

3. Góc giữa hai mặt phẳng

- Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) có hai vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P$ và $\vec{n}_Q$. Góc α giữa hai mặt

phẳng $(P), (Q)$ được tính theo công thức: $\cos \alpha = \left| \cos(\vec{n}_P; \vec{n}_Q) \right| = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|}$

- Góc giữa hai đường thẳng thuộc khoảng $[0^\circ; 90^\circ]$

4. Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng

- Cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$. Góc

α giữa đường thẳng d và mặt phẳng (Q) được tính theo công thức $\sin \alpha = \left| \cos(\vec{u}; \vec{n}) \right|$

- Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng thuộc khoảng $[0^\circ; 90^\circ]$

5. Lệnh Caso

- Lệnh đăng nhập môi trường vecto MODE 8
- Nhập thông số vecto MODE 8 1 1
- Tính tích vô hướng của 2 vecto: vectoA SHIFT 5 7 vectoB
- Tính tích có hướng của hai vecto: vectoA x vectoB
- Lệnh giá trị tuyệt đối SHIFT HYP
- Lệnh tính độ lớn một vecto SHIFT HYP
- Lệnh dò nghiệm của bất phương trình MODE 7
- Lệnh dò nghiệm của phương trình SHIFT SOLVE

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN MINH HỌA

Bài toán 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(-2;1;0)$, $B(-3;0;4)$, $C(0;7;3)$.

Khi đó $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC})$ bằng :

A. $\frac{14\sqrt{118}}{354}$

B. $-\frac{14}{3\sqrt{118}}$

C. $\frac{\sqrt{798}}{57}$

D. $-\frac{\sqrt{798}}{57}$

Lời giải:

- Nhập hai vecto $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ vào máy tính Casio

MODE 8 1 1 = - 1 = - 1 = 4 = MODE 8 2 1 3 = 7 = - 1 =
 VCT
 A [- 1 - 1] B [- 3 0 4]
 4 - 1

- Tính $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = 0.4296... = -\frac{14}{3\sqrt{118}}$

ON SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4 ÷ (SHIFT hyp SHIFT 5 3) X SHIFT hyp
 SHIFT 5 4)) =
 VCT
 VctA.VctB÷(Abs(▶
 -0.4296014884

⇒ Đáp số chính xác là B.

Bài toán 2: Góc giữa hai đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và $d': \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$ là :

A. 45°

B. 90°

C. 60°

D. 30°

Lời giải:

- Đề bài yêu cầu tính góc theo đơn vị độ nên ta chuyển máy tính về chế độ độ (SHIFT) (MODE) (3)

Đường thẳng d có vecto chỉ phương $\vec{u}(1;-1;2)$, đường thẳng d' có vecto chỉ phương $\vec{u}'(2;1;1)$

- Gọi α là góc giữa hai đường thẳng $d; d'$ thì $\cos \alpha = \left| \cos(\vec{u}; \vec{u}') \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}'|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}'|}$

MODE 8 1 1 1 = - 1 = 2 = MODE 8 2 1 2 = 1 = 1 = ON
 SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp SHIFT 5 3) X SHIFT hyp
 SHIFT 5 4)) =
 VCT
 Abs(VctA.VctB÷▶
 0.5

- Ta có $\cos \alpha = 0.5 \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

Áp dụng công thức tính thể tích $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AB} \left[\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD} \right] \right| = 4$

$\boxed{=}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{COS}}$ $\boxed{\text{Ans}}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

$\cos^{-1}(\text{Ans})$

60

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là C.

Bài toán 3: Tìm m để góc giữa hai vecto $\vec{u}(1; \log_3 5; \log_m 2)$, $\vec{v}(3; \log_5 3; 4)$ là góc nhọn

A. $1 > m > \frac{1}{2}$

B. $\begin{cases} m > 1 \\ 0 < m < \frac{1}{2} \end{cases}$

C. $0 < m < \frac{1}{2}$

D. $m > 1$

Lời giải:

○ Gọi góc giữa 2 vecto $\vec{u}, \vec{v}$ là α thì $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

Để góc α nhọn thì $\cos \alpha < 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow 1 \cdot 3 + \log_3 5 \cdot \log_5 3 + 4 \cdot \log_m 2 < 0 \Leftrightarrow \log_m 2 + 1 < 0$ (1)

○ Để giải bất phương trình (1) ta sử dụng chức năng MODE 7 với thiết lập Start -2 End 2 Step 0.5

$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{7}$ $\boxed{\log_{\square}}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{)}$ $\boxed{\rightarrow}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\rightarrow}$ $\boxed{+}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{=}$ $\boxed{-}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$
 $\boxed{0}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{2}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$

Ta thấy $f(0.25) = 0.5 > 0 \Rightarrow$ Đáp án C sai

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & X & F(X) \\ \hline 5 & 1.75 & 0.5 \\ \hline 6 & 0.75 & -1.409 \\ \hline \end{array}$ Math
0.25

Ta thấy $f(1.25) = 4.1062 > 0 \Rightarrow$ Đáp số B và D sai

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & X & F(X) \\ \hline 8 & 1.5 & 4.1062 \\ \hline 9 & 2.7095 & \text{ERROR} \\ \hline \end{array}$ Math
1.25

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là A.

Bài toán 4: Tìm α để hai mặt phẳng $(P): x - \frac{1}{4}y - z + 5 = 0$ và

$(Q): x \sin \alpha + y \cos \alpha + z \sin^3 \alpha + 2 = 0$ vuông góc với nhau

A. 15°

B. 75°

C. 90°

D. Cả A, B, C đều đúng

Lời giải:

- Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P\left(1; -\frac{1}{4}; -1\right)$, mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_Q(\sin \alpha; \cos \alpha; \sin^3 \alpha)$

Để hai mặt phẳng trên vuông góc với nhau $\Leftrightarrow$ góc giữa $\vec{n}_P$ và $\vec{n}_Q$ bằng $90^\circ \Leftrightarrow \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha - \frac{1}{4} \cos \alpha - \sin^3 \alpha = 0. \text{ Đặt } P = \sin \alpha - \frac{1}{4} \cos \alpha - \sin^3 \alpha$$

- Vì đề bài đã cho sẵn đáp án nên ta sử dụng phương pháp thử đáp án bằng chức năng CALC của máy tính Casio

Với $\alpha = 15^\circ \Rightarrow P = 0 \Rightarrow$ Đáp án A đúng

`SIN ALPHA ) ) = 1 ) 4 ) cos ALPHA ) ) = sin ALPHA ) )`
`x" 3 CALC 1 5 =`

$$\sin(X) - \frac{1}{4} \cos(X) - \sin^3(X) = 0$$

Với $\alpha = 75^\circ \Rightarrow P = 0 \Rightarrow$ Đáp án B đúng

`CALC 7 5 =`

$$\sin(X) - \frac{1}{4} \cos(X) - \sin^3(X) = 0$$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là D.

Bài toán 5: Điểm $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O lên mặt phẳng (P)

.Tìm số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q): x - y - 6 = 0$

A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 90°

Lời giải:

- Mặt phẳng (P) vuông góc với OH nên nhận $\vec{OH}(2; -1; -2)$ là vectơ pháp tuyến

$$\Rightarrow (P): 2(x-2) - 1(y+1) - 2(z+2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 2z - 9 = 0$$

Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q(1; -1; 0)$

- Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và $(Q) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{OH} \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{OH}| \cdot |\vec{n}_Q|}$

`MODE 8 1 1 2 = - 1 = - 2 = MODE 8 2 1 1 = - 1 = 0 =`
`ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4 ) ÷ ( SHIFT hyp SHIFT 5 3 )`
`X SHIFT hyp SHIFT 5 4 ) ) =`

$$\text{Abs}(\text{VctA} \cdot \text{VctB}) \div$$

$$0.7071067812$$

$$\text{Vậy } \cos \alpha = 0.7071... = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$\boxed{=}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\cos}$ $\boxed{\text{Ans}}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

$\cos^{-1}(\text{Ans})$

45

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là B.

Bài toán 6: Mặt phẳng (Q) nào sau đây đi qua hai điểm $A(3;0;0)$ và $B(0;0;1)$ đồng thời tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc là 60° .

A. $\begin{cases} x - \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0 \\ x - 5y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x + 5y + 3z - 3 = 0 \\ x + \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x - 5y + 3z - 3 = 0 \\ x + 5y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x + \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0 \\ x - \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$

Lời giải:

❖ **Cách Casio**

Để thực hiện cách này ta sẽ làm các phép thử. Ta thấy tất cả các mặt phẳng xuất hiện trong đáp án đều đi qua 2 điểm A, B . Vậy ta chỉ cần tính góc giữa mặt phẳng xuất hiện trong đáp án và mặt phẳng (Oxy) là xong.

- Với mặt phẳng $(Q): x - \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_Q = (1; -\sqrt{26}; 3)$, mặt phẳng (Oxy) có vecto pháp tuyến $\vec{n} = (0; 0; 1)$

$$\text{Gọi } \alpha \text{ là góc giữa 2 mặt phẳng trên } \Rightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_Q; \vec{n}|}{|\vec{n}_Q| \cdot |\vec{n}|} = 0.5 \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{8}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{2}$ $\boxed{6}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{8}$ $\boxed{2}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$

$\boxed{\text{ON}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{hyp}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{5}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{5}$ $\boxed{7}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{5}$ $\boxed{4}$ $\boxed{)}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{(\text{SHIFT})}$ $\boxed{\text{hyp}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{5}$ $\boxed{3}$ $\boxed{)}$

$\boxed{\times}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{hyp}}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{5}$ $\boxed{4}$ $\boxed{)}$ $\boxed{)}$ $\boxed{=}$

$\text{Abs}(\text{VctA} \cdot \text{VctB}) \div$

0.5

$\Rightarrow$ Đáp án chắc chắn phải chứa mặt phẳng $(Q): x - \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0$.

- Tiếp tục thử với mặt phẳng $x - 5y + 3z - 3 = 0$ nếu thỏa thì đáp án A đúng nếu không thì đáp án D đúng

❖ **Cách tự luận**

- Gọi mặt phẳng (Q) có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$

(Q) qua $A \Rightarrow 3A + D = 0$, (Q) qua $B \Rightarrow C + D = 0$. Chọn $D = 1 \Rightarrow C = -1; A = -\frac{1}{3}$

Khi đó (Q): $-\frac{1}{3}x + By - z + 1 = 0$ và có vecto pháp tuyến $\vec{n}_Q \left(-\frac{1}{3}; B; -1 \right)$

o Góc giữa hai mặt phẳng trên là $60^\circ \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{|\vec{n}_Q; \vec{n}|}{|\vec{n}_Q| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_Q; \vec{n}|}{|\vec{n}_Q| \cdot |\vec{n}|} - \frac{1}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\left| -\frac{1}{3} \cdot 0 + B \cdot 0 - 1 \cdot 1 \right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{3} \right)^2 + B^2 + 1} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{B^2 + \frac{10}{9}}} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{B^2 + \frac{10}{9}} = 2 \Leftrightarrow B^2 + \frac{10}{9} = 4 \Leftrightarrow B^2 = \frac{26}{9} \Leftrightarrow B = \pm \frac{\sqrt{26}}{3}$$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là C.

Bài toán 7: Tính góc giữa đường thẳng $\Delta: \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng

$$(P): x + 2y - z + 5 = 0$$

A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 90°

Lời giải:

o Đường thẳng Δ có vecto chỉ phương $\vec{u}(2;1;1)$ và mặt phẳng (P) có vecto pháp tuyến $\vec{n}(1;2;-1)$

Gọi β là góc giữa giữa 2 vectơ $\vec{u}, \vec{n}$. Ta có $|\cos(\beta)| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$

MODE 8 1 1 2 = 1 = 1 = MODE 8 2 1 1 = 2 = - 1 =
ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp SHIFT 5 3)
X SHIFT hyp SHIFT 5 4)) =

Abs(VctA.VctB)÷

0.5

o Gọi α là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) $\Rightarrow \sin \alpha = |\cos \beta| = 0.5$

$$\Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

SHIFT sin Ans) =

sin⁻¹(Ans)

30

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là A.

Bài toán 8: Cho bốn điểm $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$, $C(1;0;2)$, $D(1;1;1)$. Tính góc giữa 2 đường thẳng AB và CD :

- A. 30° B. 60° C. 90° D. 120°

Lời giải:

- Đường thẳng AB nhận vecto $\overrightarrow{AB}(-1;1;1)$ là vecto chỉ phương, đường thẳng CD nhận $\overrightarrow{CD}(0;1;-1)$ là vecto chỉ phương

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB, CD và được tính theo công thức:

$$\cos \alpha = \left| \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \right| = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|}$$

- Nhập các vecto $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ vào máy tính Casio

MODE 8 1 1 - 1 = 1 = 1 = MODE 8 2 1 0 = 1 = - 1 =
 VCT [-1 | 1 | 1 |] B [0 | 1 | -1 |]
 1 -1

- Tính $\cos \alpha = \left| \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \right| = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$

ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp SHIFT 5 3)
 X SHIFT hyp SHIFT 5 4)) =
 Abs(VctA·VctB)÷
 0

Vậy đáp số chính xác là C.

Bài toán 9: Cho $\vec{u}(1;1;-2)$ và $\vec{v}(1;0;m)$. Tìm m để góc giữa hai vecto $\vec{u}, \vec{v}$ là 45°

- A. $\begin{cases} m = 2 - \sqrt{6} \\ m = 2 + \sqrt{6} \end{cases}$ B. $m = 2 - \sqrt{6}$ C. $m = 2 + \sqrt{6}$ D. Không có m thỏa

Lời giải:

- Ta có $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{1-2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{m^2+1}}$

- Để góc giữa 2 vecto trên là 45° thì $\frac{1-2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1-2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{m^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

- Để kiểm tra giá trị m thỏa mãn ta sử dụng máy tính Casio với chức năng CALC

Với $m = 2 - \sqrt{6}$

MODE 1 = 1 - 2 ALPHA) √ 6) × √ ALPHA) x² + 1
)) - = 1) √ 2 CALC 2 - √ 6) =

$$\frac{1-2x}{\sqrt{6} \times \sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow m = 2 - \sqrt{6}$ thỏa $\Rightarrow$ Đáp số đúng chỉ có thể là **A** hoặc **B**

Tiếp tục kiểm tra với $m = 2 + \sqrt{6}$

CALC 2 + √ 6) =

$$\frac{1-2x}{\sqrt{6} \times \sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -1.414213562$$

$\Rightarrow 2 + \sqrt{6}$ không thỏa $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**.

Bài toán 10: Cho hai mặt phẳng $(P): m^2x - y + (m^2 - 2)z + 2 = 0$ và $2x + m^2y - 2z + 1 = 0$ vuông góc với nhau :

A. $|m| = 2$

B. $|m| = 1$

C. $|m| = \sqrt{2}$

D. $|m| = \sqrt{3}$

Lời giải:

- Mặt phẳng (P) có vecto pháp tuyến $\vec{n}(m^2; -1; m^2 - 2)$, mặt phẳng (Q) có vecto pháp tuyến $\vec{n}'(2; m^2; -2)$
- Để hai mặt phẳng trên vuông góc nhau thì $\vec{n} \perp \vec{n}' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$
 $\Leftrightarrow m^2 \cdot 2 - m^2 + (m^2 - 2) \cdot (-2) = 0 \Leftrightarrow 4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$
 $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **A**.

Bài toán 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Xét hai điểm là trung điểm $B'C'$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AP và BC' .

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Lời giải:

- Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc là đỉnh A , tia Ox chứa AB , tia Oy chứa AD , tia Oz chứa AA' . Chọn $a=1$ khi đó: $A(0;0;0)$, $B(0;1;0)$, $D(0;1;0)$, $A'(0;0;1)$, $B'(1;0;1)$, $C'(1;1;1)$
- $\Rightarrow P\left(1;\frac{1}{2};1\right), \overline{AP}\left(1;\frac{1}{2};1\right), \overline{BC'}(0;1;1)$
- Góc giữa 2 đường thẳng AP, BC' là α thì $\cos \alpha = \frac{|\overline{AP} \cdot \overline{BC'}|}{|\overline{AP}| \cdot |\overline{BC'}|} = 0.7071... = \frac{\sqrt{2}}{2}$

[MODE] [8] [1] [1] [1] [=] [0] [.] [5] [=] [1] [=] [MODE] [8] [2] [1] [0] [=] [1] [=] [1] [=] [ON]
 [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4] [)] [÷] [(] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [)] [×]
 [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [)] [)] [=]

$$\text{Abs}(\text{VctA} \cdot \text{VctB}) \div \triangleright$$

$$0.7071067812$$

$\Rightarrow D$ là đáp số chính xác.

Bài toán 12: Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Oz và tạo với mặt phẳng

$$(Q): 2x + y - \sqrt{5}z = 0 \text{ một góc } 60^\circ.$$

A. $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ -3x + y = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} -3x + y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} -3x + y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$

Lời giải:

❖ **Cách Casio**

- Với mặt phẳng $(P): x + 3y = 0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_P = (1; 3)$, mặt phẳng (Q) có vecto pháp tuyến $\vec{n}_Q = (2; 1; -\sqrt{5})$

Gọi α là góc giữa 2 mặt phẳng trên $\Rightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_P; \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|} = 0.5 \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

MODE 8 1 1 1 = 3 = 0 = MODE 8 2 1 2 = 1 = - √ 5) = ON

SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp SHIFT 5 3) X

SHIFT hyp SHIFT 5 4)) =

$$\text{Abs}(\text{VctA} \cdot \text{VctB}) \div \triangleright$$

$$0.5$$

$\Rightarrow$ Đáp án chắc chắn phải chứa mặt phẳng $x + 3y = 0$.

- Tiếp tục thử với mặt phẳng $x - 3y = 0$ nếu thỏa thì đáp án A đúng nếu không thì đáp án C đúng

❖ **Cách tự luận**

- Gọi mặt phẳng (P) có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$. (P) chứa trục Oz thì (P) chứa 2 điểm thuộc trục Oz . Gọi hai điểm đó là $A(0; 0; 0)$ và $B(0; 0; 1)$

(P) qua $A \Rightarrow D = 0$, (P) qua $B \Rightarrow C + D = 0 \Rightarrow C = D = 0$ Chọn $A = 1$

Khi đó $(P): x + By = 0$ và có vecto pháp tuyến $\vec{n}_Q(1; B; 0)$

- Góc giữa hai mặt phẳng trên là $60^\circ \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{|\vec{n}_P; \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_Q; \vec{n}|}{|\vec{n}_Q| \cdot |\vec{n}|} - \frac{1}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{|1.2 + B.1 + 0.(-\sqrt{5})|}{\sqrt{1^2 + B^2 + 0^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (-\sqrt{5})^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|B + 2|}{\sqrt{10} \sqrt{B^2 + 1}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2|B+2| = \sqrt{10}\sqrt{B^2+1} \Leftrightarrow 4(B^2+4B+4) = 10(B^2+1) \Leftrightarrow 6B^2-16B-6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} B=3 \\ B=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là C.

Bài toán 13: Cho $(P): 3x+4y+5z+8=0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x-2y+1=0$, $(\beta): x-2z-3=0$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Khi đó:

- A. $\varphi = 30^\circ$ B. $\varphi = 45^\circ$ C. $\varphi = 60^\circ$ D. $\varphi = 90^\circ$

Lời giải:

- o d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ nên nhận d vuông góc với hai vecto pháp tuyến của hai mặt phẳng này

$$\Rightarrow \text{Vecto chỉ phương } \vec{u}_d = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_\beta] = (4; 4; 4)$$

MODE 8 1 1 1 = - 2 = 0 = MODE 8 2 1 1 = 0 = - 2 = ON
SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

Ans 1 2 4

- o Gọi γ là góc giữa $\vec{u}_d; \vec{n}_p$ ta có $|\cos \gamma| = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{n}_p|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{n}_p|} = 0.8660... = \frac{\sqrt{3}}{2}$

MODE 8 1 1 4 = 2 = 2 = MODE 8 2 1 3 = 4 = 5 = ON
SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp SHIFT 5 3) X
SHIFT hyp SHIFT 5 4)) =

Abs(VctA.VctB)÷
0.8660254038

$$\text{Ta có } \sin \varphi = |\cos \gamma| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$$

SHIFT sin Ans) =

sin⁻¹(Ans)
60

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là C

Chính xác là B.

Chủ đề 6

BÀI TẬP VẬN DỤNG CAO OXYZ



A. ĐỀ BÀI

- Câu 1. (SGD VĨNH PHÚC)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(3;4;1)$, $D(-1;3;2)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho $ABCD$ là hình thang có hai cạnh đáy AB , CD và có góc C bằng 45° .
- A. $C(5;9;5)$. B. $C(1;5;3)$. C. $C(-3;1;1)$. D. $C(3;7;4)$.

- Câu 2. (SGD VĨNH PHÚC)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = t_1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x = 1 \\ y = t_2 \\ z = 0 \end{cases}$, $d_3: \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t_3 \end{cases}$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $H(3;2;1)$ và cắt ba đường thẳng d_1 , d_2 , d_3 lần lượt tại A , B , C sao cho H là trực tâm tam giác ABC .
- A. $2x + 2y + z - 11 = 0$. B. $x + y + z - 6 = 0$. C. $2x + 2y - z - 9 = 0$. D. $3x + 2y + z - 14 = 0$.

- Câu 3. (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM)** Trong không gian với hệ tọa độ Oxy , cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O , các đỉnh $B(m;0;0)$, $D(0;m;0)$, $A'(0;0;n)$ với $m, n > 0$ và $m + n = 4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC' . Khi đó thể tích tứ diện $BDA'M$ đạt giá trị lớn nhất bằng
- A. $\frac{245}{108}$. B. $\frac{9}{4}$. C. $\frac{64}{27}$. D. $\frac{75}{32}$.

- Câu 4. (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hai mặt phẳng $4x - 4y + 2z - 7 = 0$ và $2x - 2y + z + 1 = 0$ chứa hai mặt của hình lập phương. Thể tích khối lập phương đó là
- A. $V = \frac{27}{8}$ B. $V = \frac{81\sqrt{3}}{8}$ C. $V = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ D. $V = \frac{64}{27}$

- Câu 5. (NGUYỄN KHUYẾN TPHCM)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;3;0)$, $B(0;-\sqrt{2};0)$, $M\left(\frac{6}{5};-\sqrt{2};2\right)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 2 - t \end{cases}$. Điểm C thuộc d sao cho chu vi tam giác ABC là nhỏ nhất thì độ dài CM bằng
- A. $2\sqrt{3}$. B. 4. C. 2. D. $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Câu 6. (T.T ĐIỀU HIỆN) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;1;1)$, $B(0;1;2)$, $C(-2;0;1)$ $(P): x - y + z + 1 = 0$. Tìm điểm $N \in (P)$ sao cho $S = 2NA^2 + NB^2 + NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $N\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4}; \frac{3}{4}\right)$. B. $N(3;5;1)$. C. $N(-2;0;1)$. D. $N\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; -2\right)$.

Câu 7. (LẠNG GIANG SỐ 1) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba đường thẳng

$$d_1: \begin{cases} x=1 \\ y=1, t \in \mathbb{R}; \\ z=t \end{cases} \quad d_2: \begin{cases} x=2 \\ y=u, u \in \mathbb{R}; \\ z=1+u \end{cases} \quad \Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}. \text{ Viết phương trình mặt cầu tiếp}$$

xúc với cả d_1, d_2 và có tâm thuộc đường thẳng Δ ?

- A. $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. B. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$.
C. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$. D. $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$.

Câu 8. (LẠNG GIANG SỐ 1) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;2)$; $B(0;-1;2)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 12 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất?

- A. $M(2;2;9)$. B. $M\left(-\frac{6}{11}; -\frac{18}{11}; \frac{25}{11}\right)$.
C. $M\left(\frac{7}{6}; \frac{7}{6}; \frac{31}{4}\right)$. D. $M\left(-\frac{2}{5}; -\frac{11}{5}; \frac{18}{5}\right)$.

Câu 9. (LẠNG GIANG SỐ 1) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 4 = 0$. Phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ là

- A. $d: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 - 2t (t \in \mathbb{R}). \\ z = 1 - t \end{cases}$ B. $d: \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + t (t \in \mathbb{R}). \\ z = 2 + 2t \end{cases}$
C. $d: \begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = -1 + 3t (t \in \mathbb{R}). \\ z = 4 - t \end{cases}$ D. $d: \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 3 - 3t (t \in \mathbb{R}). \\ z = 3 - 2t \end{cases}$

Câu 10. (LÝ TỰ TRỌNG – TPHCM) Trong không gian cho điểm $M(1;-3;2)$. Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua M và cắt các trục tọa độ tại A, B, C mà $OA = OB = OC \neq 0$

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 11. (LÝ TỰ TRỌNG – TPHCM) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $E(8;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) qua E và cắt nửa trục dương Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho OG nhỏ nhất với G là trọng tâm tam giác ABC .

- A. $x + y + 2z - 11 = 0$. B. $8x + y + z - 66 = 0$.

C. $2x + y + z - 18 = 0$.

D. $x + 2y + 2z - 12 = 0$.

Câu 12. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{4}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa d và tiếp xúc với (S) . Gọi M, N là tiếp điểm. Tính độ dài đoạn thẳng MN .

A. $2\sqrt{2}$.

B. $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

C. $\sqrt{6}$.

D. 4.

Câu 13. (CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;1)$. Mặt phẳng (P) thay đổi đi qua M lần lượt cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C khác O . Tính giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $OABC$.

A. 54.

B. 6.

C. 9.

D. 18.

Câu 14. (THTT - 477) Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 2 - 2t' \\ y = 3 \\ z = t' \end{cases}$. Mặt phẳng cách đều

hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình là

A. $x + 5y + 2z + 12 = 0$.

B. $x + 5y - 2z + 12 = 0$.

C. $x - 5y + 2z - 12 = 0$.

D. $x + 5y + 2z - 12 = 0$.

Câu 15. (THTT - 477) Cho hai điểm $A(3;3;1)$, $B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 7 = 0$. Đường thẳng d nằm trên (α) sao cho mọi điểm của d cách đều 2 điểm A, B có phương trình là

A. $\begin{cases} x = t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = t \\ y = 7 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = -t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 2t \\ y = 7 - 3t \\ z = t \end{cases}$.

Câu 16. (SỞ GD HÀ NỘI) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(-2;0;3)$, $M(0;0;1)$ và $N(0;3;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua các điểm M, N sao cho khoảng cách từ điểm B đến (P) gấp hai lần khoảng cách từ điểm A đến (P) . Có bao nhiêu mặt phẳng (P) thỏa mãn điều kiện?

A. Có vô số mặt phẳng (P) .

B. Chỉ có một mặt phẳng (P) .

C. Không có mặt phẳng (P) nào.

D. Có hai mặt phẳng (P) .

Câu 17. (SỞ GD HÀ NỘI) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M , cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B phân biệt. Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB .

A. $S = \sqrt{7}$.

B. $S = 4$.

C. $S = 2\sqrt{7}$.

D. $S = 2\sqrt{2}$.

Câu 18. (BẮC YÊN THÀNH) Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua điểm $M(1;9;4)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C (khác gốc tọa độ) sao cho $OA = OB = OC$.

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 19. (BIÊN HÒA – HÀ NAM) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c dương. Biết A, B, C di động trên các tia Ox, Oy, Oz sao cho $a+b+c=2$. Biết rằng khi a, b, c thay đổi thì quỹ tích tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ thuộc mặt phẳng (P) cố định. Tính khoảng cách từ $M(2016;0;0)$ tới mặt phẳng (P) .

A. 2017. B. $\frac{2014}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{2016}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{2015}{\sqrt{3}}$.

Câu 20. (SỞ BÌNH PHƯỚC) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, trong đó $a > 0, b > 0, c > 0$ và $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 7$. Biết mặt phẳng (ABC) tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{72}{7}$. Thể tích của khối tứ diện $OABC$ là

A. $\frac{2}{9}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{5}{6}$.

Câu 21. (LƯƠNG TÂM) Phương trình của mặt phẳng nào sau đây đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho thể tích tứ diện $OABC$ nhỏ nhất?

A. $6x+3y+2z+18=0$. B. $6x+3y+3z-21=0$.
C. $6x+3y+3z+21=0$. D. $6x+3y+2z-18=0$.

Câu 22. (PHAN ĐÌNH PHÙNG – HN) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x+y-z+5=0$ và hai điểm $A(1;0;2)$, $B(2;-1;4)$. Tìm tập hợp các điểm $M(x;y;z)$ nằm trên mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất.

A. $\begin{cases} x-7y-4z+7=0 \\ 3x-y+z-5=0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x-7y-4z+14=0 \\ 3x+y-z+5=0 \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x-7y-4z+7=0 \\ 3x+y-z+5=0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} 3x-7y-4z+5=0 \\ 3x+y-z+5=0 \end{cases}$.

Câu 23. (CHUYÊN ĐH VINH) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2;1)$,

$A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$. Tìm vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng

Δ đi qua M , vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng bé nhất.

A. $\vec{u}=(2;1;6)$. B. $\vec{u}=(1;0;2)$. C. $\vec{u}=(3;4;-4)$. D. $\vec{u}=(2;2;-1)$.

Câu 24. (MINH HỌA L2) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0;0;1)$, $B(m;0;0)$, $C(0;n;0)$, $D(1;1;1)$ với $m > 0; n > 0$ và $m+n=1$. Biết rằng khi m, n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua d . Tính bán kính R của mặt cầu đó?

A. $R = 1$. B. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $R = \frac{3}{2}$. D. $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 25. Cho ba điểm $A(3;1;0), B(0;-1;0), C(0;0;-6)$. Nếu tam giác $A'B'C'$ thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} = \vec{0}$ thì có tọa độ trọng tâm là:

A. $(1;0;-2)$. B. $(2;-3;0)$. C. $(3;-2;0)$. D. $(3;-2;1)$.

Câu 26. (AN LÃO) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(-2;-2;1), B(1;2;-3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$. Tìm vector chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ qua A, vuông góc với d đồng thời cách điểm B một khoảng bé nhất.

A. $\vec{u} = (2;1;6)$ B. $\vec{u} = (2;2;-1)$ C. $\vec{u} = (25;-29;-6)$ D. $\vec{u} = (1;0;2)$

Câu 27. (AN LÃO) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$.

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với D.

A. $(P): x + 2y + 5z - 4 = 0$. B. $(P): x + 2y + 5z - 5 = 0$.
C. $(P): x + 2y - z - 4 = 0$. D. $(P): 2x - y - 3 = 0$.

Câu 28. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho ba điểm $M(3;0;0), N(m,n,0), P(0;0;p)$. Biết $MN = \sqrt{13}, \widehat{MON} = 60^\circ$, thể tích tứ diện OMNP bằng 3. Giá trị của biểu thức $A = m + 2n^2 + p^2$ bằng

A. 29. B. 27. C. 28. D. 30.

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình vuông ABCD, $B(3;0;8), D(-5;-4;0)$. Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$ bằng:

A. $5\sqrt{10}$. B. $6\sqrt{10}$. C. $10\sqrt{6}$. D. $10\sqrt{5}$.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 4 điểm $A(2;4;-1), B(1;4;-1), C(2;4;3), D(2;2;-1)$. Biết $M(x;y;z)$, để $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x + y + z$ bằng

A. 7. B. 8. C. 9. D. 6.

Câu 31. Cho hình chóp S.ABCD biết $A(-2;2;6), B(-3;1;8), C(-1;0;7), D(1;2;3)$. Gọi H là trung điểm của CD, $SH \perp (ABCD)$. Để khối chóp S.ABCD có thể tích bằng $\frac{27}{2}$ (đvtt) thì có hai điểm S_1, S_2 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Tìm tọa độ trung điểm I của S_1S_2

A. $I(0;-1;-3)$. B. $I(1;0;3)$ C. $I(0;1;3)$. D. $I(-1;0;-3)$.

Câu 32. Cho điểm $I(1;7;5)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z}{3}$. Phương trình mặt cầu có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác diện tích tam giác IAB bằng $2\sqrt{6015}$ là:

A. $(x-1)^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 2018.$

B. $(x-1)^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 2017.$

C. $(x-1)^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 2016.$

D. $(x-1)^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 2019.$

Câu 33. Cho điểm $I(0;0;3)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1+t \\ y = 2t \\ z = 2+t \end{cases}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt

đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông là:

A. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{3}{2}.$

B. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{8}{3}.$

C. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{2}{3}.$

D. $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{4}{3}.$

Câu 34. Cho điểm $A(2;5;1)$ và mặt phẳng $(P): 6x + 3y - 2z + 24 = 0$, H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P) . Phương trình mặt cầu (S) có diện tích 784π và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại H , sao cho điểm A nằm trong mặt cầu là:

A. $(x-8)^2 + (y-8)^2 + (z+1)^2 = 196.$

B. $(x+8)^2 + (y+8)^2 + (z-1)^2 = 196.$

C. $(x+16)^2 + (y+4)^2 + (z-7)^2 = 196.$

D. $(x-16)^2 + (y-4)^2 + (z+7)^2 = 196.$

Câu 35. Cho mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z + 10 = 0$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$, $\Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{4}$. Mặt cầu (S) có tâm thuộc Δ_1 , tiếp xúc với Δ_2 và mặt phẳng (P) , có phương trình:

A. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$ hoặc $\left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}.$

B. $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$ hoặc $\left(x + \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}.$

C. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9.$

D. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 3.$

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P): x + 4y - 2z - 6 = 0$, $(Q): x - 2y + 4z - 6 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa giao tuyến của $(P), (Q)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều.

A. $x + y + z + 6 = 0.$ B. $x + y + z - 6 = 0.$ C. $x + y - z - 6 = 0.$ D. $x + y + z - 3 = 0.$

Câu 37. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có điểm $A(1;1;1), B(2;0;2), C(-1;-1;0), D(0;3;4)$. Trên các cạnh AB, AC, AD lần lượt lấy các điểm B', C', D' thỏa :

$\frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} = 4$. Viết phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ biết tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất ?

A. $16x + 40y - 44z + 39 = 0.$

B. $16x + 40y + 44z - 39 = 0.$

C. $16x - 40y - 44z + 39 = 0$.

D. $16x - 40y - 44z - 39 = 0$.

Câu 38. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C (khác gốc tọa độ O) sao cho M là trực tâm tam giác ABC . Mặt phẳng (α) có phương trình là:

A. $x + 2y + 3z - 14 = 0$.

B. $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} - 1 = 0$.

C. $3x + 2y + z - 10 = 0$.

D. $x + 2y + 3z + 14 = 0$.

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $N(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

A. $(P): x + y + z - 3 = 0$.

B. $(P): x + y - z + 1 = 0$.

C. $(P): x - y - z + 1 = 0$.

D. $(P): x + 2y + z - 4 = 0$.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}, d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{4}$. Phương trình mặt phẳng (α) cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 là:

A. $7x - 2y - 4z = 0$.

B. $7x - 2y - 4z + 3 = 0$.

C. $2x + y + 3z + 3 = 0$.

D. $14x - 4y - 8z + 3 = 0$.

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ gọi d đi qua $A(3;-1;1)$, nằm trong mặt phẳng $(P): x - y + z - 5 = 0$, đồng thời tạo với $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$ một góc 45° . Phương trình đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x = 3 + 7t \\ y = -1 - 8t \\ z = -1 - 15t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 3 + 7t \\ y = -1 - 8t \\ z = 1 - 15t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 3 + 7t \\ y = -1 - 8t \\ z = 1 - 15t \end{cases}$.

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d đi qua điểm $A(1;-1;2)$, song song với $(P): 2x - y - z + 3 = 0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là.

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{7}$.

B. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z+2}{7}$.

C. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{7}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{-7}$.

Câu 43. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ gọi d đi qua $A(-1;0;-1)$, cắt $\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$, sao cho góc giữa d và $\Delta_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{2}$ là nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$. B. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{-2}$. C. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{-2}$. D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$.

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-2}$. Gọi Δ là đường thẳng song song với $(P): x+y+z-7=0$ và cắt d_1, d_2 lần lượt tại hai điểm A, B sao cho AB ngắn nhất. Phương trình của đường thẳng Δ là.

A. $\begin{cases} x=12-t \\ y=5 \\ z=-9+t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x=6-t \\ y=\frac{5}{2} \\ z=-\frac{9}{2}+t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x=6 \\ y=\frac{5}{2}-t \\ z=-\frac{9}{2}+t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=6-2t \\ y=\frac{5}{2}+t \\ z=-\frac{9}{2}+t \end{cases}$.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}$ và $d_2: \begin{cases} x=-1+2t \\ y=1+t \\ z=3 \end{cases}$. Phương trình đường thẳng vuông góc với $(P): 7x+y-4z=0$ và cắt hai

đường thẳng d_1, d_2 là:

A. $\frac{x-7}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{1}$. B. $\frac{x-2}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-4}$. C. $\frac{x+2}{-7} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{4}$. D. $\frac{x-2}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{4}$.

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$ và $\Delta_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3}$. Phương trình đường thẳng song song với $d: \begin{cases} x=3 \\ y=-1+t \\ z=4+t \end{cases}$ và cắt hai

đường thẳng $\Delta_1; \Delta_2$ là:

A. $\begin{cases} x=2 \\ y=3-t \\ z=3-t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3-t \\ z=-3-t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x=-2 \\ y=-3+t \\ z=-3+t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=2 \\ y=-3+t \\ z=3+t \end{cases}$.

Câu 47. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$, và mặt phẳng $(P): 3x+5y-z-2=0$. Gọi d' là hình chiếu của d lên (P) . Phương trình tham số của d' là

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \begin{cases} x = -62t \\ y = 25t \\ z = 2 - 61t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x = 62t \\ y = -25t \\ z = 2 + 61t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x = 62t \\ y = -25t \\ z = -2 + 61t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x = 62t \\ y = -25t \\ z = 2 + 61t \end{cases} \end{array}$$

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;0;2)$, $B(3;0;2)$ và mặt cầu $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A , B và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn bán kính nhỏ nhất là:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } x - 4y - 5z + 17 = 0. & \text{B. } 3x - 2y + z - 7 = 0. \\ \text{C. } x - 4y + 5z - 13 = 0. & \text{D. } 3x + 2y + z - 11 = 0. \end{array}$$

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z + 15 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 100$. Đường thẳng Δ qua A , nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A , B . Để độ dài AB lớn nhất thì phương trình đường thẳng Δ là:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}. & \text{B. } \frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+3}{-10}. \\ \text{C. } \begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 3 \\ z = -3 + 8t \end{cases} & \text{D. } \frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{3}. \end{array}$$

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $2x - 2y - z + 9 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$. Tọa độ điểm M nằm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) đạt giá trị nhỏ nhất là:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } M\left(-\frac{11}{3}; \frac{14}{3}; \frac{13}{3}\right). & \text{B. } M\left(\frac{29}{3}; -\frac{26}{3}; -\frac{7}{3}\right). \\ \text{C. } M\left(-\frac{29}{3}; \frac{26}{3}; -\frac{7}{3}\right). & \text{D. } M\left(\frac{11}{3}; \frac{14}{3}; -\frac{13}{3}\right). \end{array}$$

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có điểm A trùng với gốc của hệ trục tọa độ, $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;b)$ ($a > 0, b > 0$). Gọi M là trung điểm của cạnh CC' . Giá trị của tỉ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau là:

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \frac{1}{3}. & \text{B. } \frac{1}{2}. & \text{C. } -1. & \text{D. } 1. \end{array}$$

Câu 52. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 4 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$. Giá trị của điểm M trên (S) sao cho $d(M, (P))$ đạt GTNN là:

$$\begin{array}{llll} \text{A. } (1;1;3). & \text{B. } \left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}; \frac{7}{3}\right). & \text{C. } \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right). & \text{D. } (1;-2;1). \end{array}$$

Câu 53. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(10;2;1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A , song song với đường thẳng d sao cho khoảng cách giữa d và (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;3)$ đến mp (P) là

- A. $\frac{97\sqrt{3}}{15}$. B. $\frac{76\sqrt{790}}{790}$. C. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$. D. $\frac{3\sqrt{29}}{29}$.

Câu 54. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Tính khoảng cách từ điểm $M(1;2;-1)$ đến mặt phẳng (P) .

- A. $\frac{11\sqrt{18}}{18}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{11}}{18}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 55. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z+2=0$ và hai

$$\text{đường thẳng } d: \begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=2+2t \end{cases}; d': \begin{cases} x=3-t' \\ y=1+t' \\ z=1-2t' \end{cases}.$$

Biết rằng có 2 đường thẳng có các đặc điểm: song song với (P) ; cắt d, d' và tạo với d góc 30° . Tính cosin góc tạo bởi hai đường thẳng đó.

- A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. C. $\sqrt{\frac{2}{3}}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 56. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;1); B(3;-2;0); C(1;2;-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A sao cho tổng khoảng cách từ B và C đến (P) lớn nhất biết rằng (P) không cắt đoạn BC . Khi đó, điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P) ?

- A. $G(-2;0;3)$. B. $F(3;0;-2)$. C. $E(1;3;1)$. D. $H(0;3;1)$.

Câu 57. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0); B(0;b;0); C(0;0;c)$ trong đó b, c dương và mặt phẳng $(P): y-z+1=0$. Biết rằng $mp(ABC)$ vuông góc với $mp(P)$ và $d(O, (ABC)) = \frac{1}{3}$, mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $b+c=1$. B. $2b+c=1$. C. $b-3c=1$. D. $3b+c=3$.

Câu 58. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;2;3); B(0;1;1); C(1;0;-2)$. Điểm $M \in (P): x+y+z+2=0$ sao cho giá trị của biểu thức $T = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ nhỏ nhất. Khi đó, điểm M cách $(Q): 2x-y-2z+3=0$ một khoảng bằng

- A. $\frac{121}{54}$. B. 24. C. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. D. $\frac{101}{54}$.

Câu 59. (ĐỀ MINH HỌA L1) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; -2; 0)$, $B(0; -1; 1)$, $C(2; 1; -1)$ và $D(3; 1; 4)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn điểm đó?

A. 1.

B. 4.

C. 7.

D. Có vô số mặt phẳng.

Câu 60. (ĐỀ MINH HỌA L1) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 2)$ và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d .

A. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$.

B. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

C. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$.

D. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$.

Câu 61. (Đề thử nghiệm 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 3; 1)$ và $B(5; 6; 2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

A. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$.

B. $\frac{AM}{BM} = 2$.

C. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$.

D. $\frac{AM}{BM} = 3$.

Câu 62. (Đề thử nghiệm 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ và $d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$.

A. $(P): 2x - 2z + 1 = 0$.

B. $(P): 2y - 2z + 1 = 0$.

C. $(P): 2x - 2y + 1 = 0$.

D. $(P): 2y - 2z - 1 = 0$.

Câu 63. (Tập chí THPT Lần 5) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; -1)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ và cách M một khoảng lớn nhất.

A. $x + 2y - z = 0$.

B. $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-1} = 1$.

C. $x - y - z = 0$.

D. $x + y + z - 2 = 0$.

Câu 64. (THPT Hai Bà Trưng Lần 1) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 0; -2)$, $B(3; -1; -4)$, $C(-2; 2; 0)$. Tìm điểm D trong mặt phẳng (Oyz) có cao độ âm sao cho thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng 2 và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (Oxy) bằng 1. Khi đó có tọa độ điểm D thỏa mãn bài toán là:

A. $D(0; 3; -1)$.

B. $D(0; -3; -1)$.

C. $D(0; 1; -1)$.

D. $D(0; 2; -1)$.

Câu 65. (THPT Hai Bà Trưng Lần 1) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(1; 2; 3)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm H , cắt Ox , Oy , Oz tại A , B , C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC . Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $(P): 3x + y + 2z - 11 = 0$.

B. $(P): 3x + 2y + z - 10 = 0$.

C. $(P): x + 3y + 2z - 13 = 0$.

D. $(P): x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Câu 66. (THPT Chuyên ĐHKH Huế Lần 1) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;4)$, điểm M nằm trên mặt phẳng (Oxy) và $M \neq O$. Gọi D là hình chiếu vuông góc của O lên AM và E là trung điểm của OM . Biết đường thẳng DE luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định. Tính bán kính mặt cầu đó.

- A. $R = 2$. B. $R = 1$. C. $R = 4$. D. $R = \sqrt{2}$.

Câu 67. (CHUYÊN ĐHKHTN HUẾ) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;4)$, điểm M nằm trên mặt phẳng (Oxy) và $M \neq O$. Gọi D là hình chiếu vuông góc của O lên AM và E là trung điểm của OM . Biết đường thẳng DE luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định. Tính bán kính mặt cầu đó.

- A. $R = 2$. B. $R = 1$. C. $R = 4$. D. $R = \sqrt{2}$.

Câu 68. (CHUYÊN ĐHKHTN HUẾ) Cho điểm $A(0;8;2)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(S): (x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 72$ và điểm $B(9;-7;23)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến (P) là lớn nhất. Giả sử $\vec{n} = (1;m;n)$ là một vectơ pháp tuyến của (P) . Lúc đó

- A. $m.n = 2$. B. $m.n = -2$. C. $m.n = 4$. D. $m.n = -4$.

Câu 69. (CHUYÊN ĐHKHTN HUẾ) Trong không gian cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3}$ và đường thẳng $d: \frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua Δ và tạo với đường thẳng d một góc lớn nhất.

- A. $19x - 17y - 20z - 77 = 0$. B. $19x - 17y - 20z + 34 = 0$.
C. $31x - 8y - 5z + 91 = 0$. D. $31x - 8y - 5z - 98 = 0$.

Câu 70. (CHUYÊN ĐHKHTN HUẾ) Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 3 = 0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) là lớn nhất. Khi đó

- A. $a+b+c = 5$. B. $a+b+c = 6$. C. $a+b+c = 7$. D. $a+b+c = 8$.

Câu 71. (LÊ HỒNG PHONG) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$ và mặt cầu (S) tâm I có phương trình $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 18$. Đường thẳng d cắt (S) tại hai điểm A, B . Tính diện tích tam giác IAB .

- A. $\frac{8\sqrt{11}}{3}$. B. $\frac{16\sqrt{11}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{11}}{6}$. D. $\frac{8\sqrt{11}}{9}$.

Câu 72. (HAI BÀ TRUNG - HUẾ) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$.

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

- Câu 73. (HAI BÀ TRƯNG – HUẾ)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;0;-2), B(3;-1;-4), C(-2;2;0)$. Điểm D trong mặt phẳng (Oyz) có cao độ âm sao cho thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng 2 và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (Oxy) bằng 1. Khi đó có tọa độ điểm D thỏa mãn bài toán là:
- A.** $D(0;3;-1)$. **B.** $D(0;-3;-1)$. **C.** $D(0;1;-1)$. **D.** $D(0;2;-1)$.
- Câu 74.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;11;-5)$ và mặt phẳng $(P): 2mx + (m^2 + 1)y + (m^2 - 1)z - 10 = 0$. Biết rằng khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A . Tìm tổng bán kính của hai mặt cầu đó.
- A.** $2\sqrt{2}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $7\sqrt{2}$. **D.** $12\sqrt{2}$.
- Câu 75.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;0;0), B(0;2;0), C(0;0;6)$ và $D(1;1;1)$. Kí hiệu d là đường thẳng đi qua D sao cho tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến d lớn nhất. Hỏi đường thẳng d đi qua điểm nào dưới đây?
- A.** $M(-1;-2;1)$. **B.** $N(5;7;3)$. **C.** $P(3;4;3)$. **D.** $Q(7;13;5)$.
- Câu 76.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(5;5;0), B(1;2;3), C(3;5;-1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 5 = 0$. Tính thể tích V của khối tứ diện $SABC$ biết đỉnh S thuộc mặt phẳng (P) và $SA = SB = SC$.
- A.** $V = \frac{145}{6}$. **B.** $V = 145$. **C.** $V = \frac{45}{6}$. **D.** $V = \frac{127}{3}$.
- Câu 77.** Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $6cm$ và $SA = SB = SC = 4\sqrt{3}(cm)$. Gọi D là điểm đối xứng của B qua C . Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SABD$ bằng ?
- A.** $5cm$ **B.** $3\sqrt{2}cm$ **C.** $\sqrt{26}cm$ **D.** $\sqrt{37}cm$

B. ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

1D	2A	3C	4A	5C	6A	7A	8D	9C	10C
11D	12B	13C	14D	15A	16A	17A	18D	19D	20A
21D	22C	23B	24A	25A	26D	27A	28A	29B	30A
31C	32B	33B	34A	35A	36B	37A	38A	39A	40D
41D	42A	43A	44B	45B	46A	47C	48D	49A	50A
51D	52C	53A	54A	55D	56C	57A	58D	59C	60B
61A	62B	63A	64A	65D	66A	67A	68D	69D	70C
71A	72A	73A	74D	75B	76A	77D			

Câu 1. Chọn D.

Cách 1. $\overrightarrow{AB} = (2; 2; 1)$.

Đường thẳng CD có phương trình là $CD: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$.

Suy ra $C(-1 + 2t; 3 + 2t; 2 + t)$; $\overrightarrow{CB} = (4 - 2t; 1 - 2t; -1 - t)$, $\overrightarrow{CD} = (-2t; -2t; -t)$.

Ta có $\cos \widehat{BCD} = \frac{(4 - 2t)(-2t) + (1 - 2t)(-2t) + (-1 - t)(-t)}{\sqrt{(4 - 2t)^2 + (1 - 2t)^2 + (-1 - t)^2} \sqrt{(-2t)^2 + (-2t)^2 + (-t)^2}}$

Hay $\frac{(4 - 2t)(-2t) + (1 - 2t)(-2t) + (-1 - t)(-t)}{\sqrt{(4 - 2t)^2 + (1 - 2t)^2 + (-1 - t)^2} \sqrt{(-2t)^2 + (-2t)^2 + (-t)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$.

Lần lượt thay t bằng $3; 1; -1; 2$ (tham số t tương ứng với tọa độ điểm C ở các phương án A, B, C, D), ta thấy $t = 2$ thỏa (1).

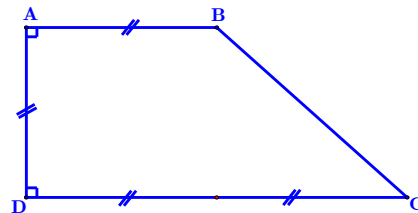
Cách 2.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 2; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (-2; 1; 2)$. Suy ra

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ và $AB = AD$. Theo giả thiết, suy ra

$\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$. Kí hiệu $C(a; b; c)$, ta có

$\overrightarrow{DC} = (a + 1; b - 3; c - 2)$, $2\overrightarrow{AB} = (4; 4; 2)$. Từ đó $C(3; 7; 4)$.

**Câu 2. Chọn A.**

Gọi $A(a; 0; 0)$, $B(1; b; 0)$, $C(1; 0; c)$.

$\overrightarrow{AB} = (1 - a; b; 0)$, $\overrightarrow{BC} = (0; -b; c)$, $\overrightarrow{CH} = (2; 2; 1 - c)$, $\overrightarrow{AH} = (3 - a; 2; 1)$.

Yêu cầu bài toán

$$\begin{cases} [\overline{AB}, \overline{BC}] \cdot \overline{CH} = 0 \\ \overline{AB} \cdot \overline{CH} = 0 \\ \overline{BC} \cdot \overline{AH} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2bc + 2c(a-1) + (1-c)b(a-1) = 0 \\ a = b+1 \\ c = 2b \end{cases} \Rightarrow 9b^2 - 2b^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Nếu $b = 0$ suy ra $A \equiv B$ (loại).

Nếu $b = \frac{9}{2}$, tọa độ $A\left(\frac{11}{2}; 0; 0\right)$, $B\left(1; \frac{9}{2}; 0\right)$, $C(1; 0; 9)$. Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) là $2x + 2y + z - 11 = 0$.

Câu 3. Chọn C.

Tọa độ điểm $C(m; m; 0), C'(m; m; n), M\left(m; m; \frac{n}{2}\right)$

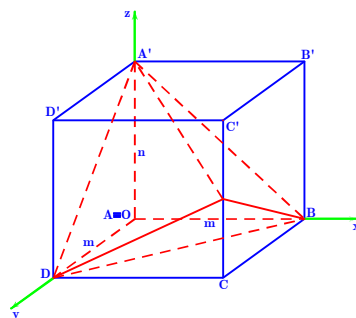
$\overline{BA'} = (-m; 0; n), \overline{BD} = (-m; m; 0), \overline{BM} = \left(0; m; \frac{n}{2}\right)$

$[\overline{BA'}, \overline{BD}] = (-mn; -mn; -m^2)$

$$V_{BDA'M} = \frac{1}{6} |[\overline{BA'}, \overline{BD}] \cdot \overline{BM}| = \frac{m^2 n}{4}$$

$$\text{Ta có } m.m.(2n) \leq \left(\frac{m+m+2n}{3}\right)^3 = \frac{512}{27} \Rightarrow m^2 n \leq \frac{256}{27}$$

$$\Rightarrow V_{BDA'M} \leq \frac{64}{27}$$



Câu 4. Chọn A.

Theo bài ra hai mặt phẳng $4x - 4y + 2z - 7 = 0$ và $2x - 2y + z + 1 = 0$ chứa hai mặt của hình lập phương. Mà hai mặt phẳng $(P): 4x - 4y + 2z - 7 = 0$ và $(Q): 2x - 2y + z + 1 = 0$ song song với nhau nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng sẽ bằng cạnh của hình lập phương.

$$\text{Ta có } M(0; 0; -1) \in (Q) \text{ nên } d((Q), (P)) = d(M, (P)) = \left| \frac{-2-7}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2}} \right| = \frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy thể tích khối lập phương là: } V = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{8}.$$

Câu 5. Chọn C.

Do AB có độ dài không đổi nên chu vi tam giác ABC nhỏ nhất khi $AC + CB$ nhỏ nhất.

$$\text{Vì } C \in d \Rightarrow C(t; 0; 2-t) \Rightarrow AC = \sqrt{(\sqrt{2}t - 2\sqrt{2})^2 + 9}, BC = \sqrt{(\sqrt{2}t - \sqrt{2})^2 + 4}$$

$$\Rightarrow AC + CB = \sqrt{(\sqrt{2}t - 2\sqrt{2})^2 + 9} + \sqrt{(\sqrt{2}t - \sqrt{2})^2 + 4}.$$

$$\text{Đặt } \vec{u} = (\sqrt{2}t - 2\sqrt{2}; 3), \vec{v} = (-\sqrt{2}t + \sqrt{2}; 2) \text{ áp dụng bất đẳng thức } |\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(\sqrt{2}t - 2\sqrt{2})^2 + 9} + \sqrt{(\sqrt{2}t - \sqrt{2})^2 + 4} \geq \sqrt{(\sqrt{2} - 2\sqrt{2})^2 + 25}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ}$$

$$\text{khi } \frac{\sqrt{2}t - 2\sqrt{2}}{-\sqrt{2}t + \sqrt{2}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow t = \frac{7}{5} \Rightarrow C\left(\frac{7}{5}; 0; \frac{3}{5}\right) \Rightarrow CM = \sqrt{\left(\frac{6}{5} - \frac{7}{5}\right)^2 + 2 + \left(2 - \frac{3}{5}\right)^2} = 2.$$

Câu 6. Chọn A.

Gọi I là trung điểm BC và J là trung điểm AI . Do đó $I\left(-1; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ và $J\left(0; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$.

$$\text{Khi đó } S = 2NA^2 + 2NI^2 + \frac{1}{2}BC^2 = 4NJ^2 + IJ^2 + \frac{1}{2}BC^2.$$

Do đó S nhỏ nhất khi NJ nhỏ nhất. Suy ra J là hình chiếu của N trên (P) .

$$\text{Phương trình đường thẳng } NJ: \begin{cases} x = t \\ y = \frac{3}{4} - t \\ z = \frac{5}{4} + t \end{cases}$$

$$\text{Tọa độ điểm } J \text{ là nghiệm của hệ: } \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x = t \\ y = \frac{3}{4} - t \\ z = \frac{5}{4} + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{5}{4} \\ z = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Câu 7. Chọn A.

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(1; 1; 0)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_{d_1} = (0; 0; 1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(2; 0; 1)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_{d_2} = (0; 1; 1)$.

Gọi I là tâm của mặt cầu. Vì $I \in \Delta$ nên ta tham số hóa $I(1+t; t; 1+t)$, từ đó

$$\vec{IM_1} = (-t; 1-t; -1-t), \quad \vec{IM_2} = (1-t; -t; -t).$$

Theo giả thiết ta có $d(I; d_1) = d(I; d_2)$, tương đương với

$$\frac{\left| \vec{IM_1} \cdot \vec{u}_{d_1} \right|}{\left| \vec{u}_{d_1} \right|} = \frac{\left| \vec{IM_2} \cdot \vec{u}_{d_2} \right|}{\left| \vec{u}_{d_2} \right|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(1-t)^2 + t^2}}{1} = \frac{\sqrt{2(1-t)^2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow t = 0$$

Suy ra $I(1; 0; 1)$ và bán kính mặt cầu là $R = d(I; d_1) = 1$. Phương trình mặt cầu cần tìm là

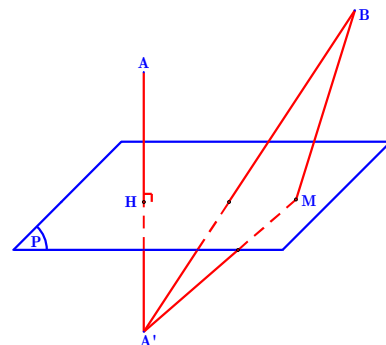
$$(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1.$$

Câu 8. Chọn D.

Thay tọa độ $A(1; 0; 2)$; $B(0; -1; 2)$ vào phương trình mặt phẳng (P) , ta được $P(A)P(B) > 0 \Rightarrow$ hai điểm A, B cùng phía với đối với mặt phẳng (P) .

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P) . Ta có

$$MA + MB = MA' + MB \geq A'B.$$



Nên $\min(MA + MB) = A'B$ khi và chỉ khi M là giao điểm của $A'B$ với (P) .

$$\text{Phương trình } AA': \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad (AA' \text{ đi qua } A(1;0;2) \text{ và có vectơ chỉ phương } \overrightarrow{n_{(P)}} = (1;2;-1)).$$

Gọi H là giao điểm của AA' trên (P) , suy ra tọa độ của H là $H(0;-2;4)$, suy ra

$$A'(-1;-4;6), \text{ nên phương trình } A'B: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 - 4t \end{cases}.$$

Vì M là giao điểm của $A'B$ với (P) nên ta tính được tọa độ $M\left(-\frac{2}{5}; -\frac{11}{5}; \frac{18}{5}\right)$.

Câu 9. Chọn C.

Vectơ chỉ phương của $\Delta: \vec{u}_{\Delta}(1;1;-1)$, vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_{(P)}} = (1;2;2)$.

$$\text{Vì } \begin{cases} d \perp \Delta \\ d \subset (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_d \perp \vec{u}_{\Delta} \\ \vec{u}_d \perp \vec{n}_{(P)} \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_d = [\vec{u}_{\Delta}; \vec{n}_{(P)}] = (4;-3;1).$$

$$\text{Tọa độ giao điểm } H = \Delta \cap (P) \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \\ x + 2y + 2z - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow t = -2 \Rightarrow H(-2;-1;4).$$

Lại có $(d; \Delta) \cap (P) = d$, mà $H = \Delta \cap (P)$. Suy ra $H \in d$.

Vậy đường thẳng d đi qua $H(-2;-1;4)$ và có VTCP $\vec{u}_d = (4;-3;1)$ nên có phương trình

$$d: \begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = -1 + 3t \\ z = 4 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Câu 10. Chọn C.

Giả sử mặt phẳng (α) cần tìm cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại

$A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c) (a,b,c \neq 0)$

$$(\alpha): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1; (\alpha) \text{ qua } M(1;-3;2) \text{ nên: } (\alpha): \frac{1}{a} - \frac{3}{b} + \frac{2}{c} = 1(*)$$

$$OA = OB = OC \neq 0 \Rightarrow |a| = |b| = |c| \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a = b = c(1) \\ a = b = -c(2) \\ a = -b = c(3) \\ a = -b = -c(4) \end{cases}$$

Thay (1) vào (*) ta có phương trình vô nghiệm

$$\text{Thay (2),(3),(4) vào (*) ta được tương ứng } a = -4, a = 6, a = \frac{-3}{4}$$

Vậy có 3 mặt phẳng.

Câu 11. Chọn D.

Cách 1:

Với đáp án A: $A(11;0;0); B(0;11;0); C(0;0;\frac{11}{2}) \Rightarrow G(\frac{11}{3}; \frac{11}{3}; \frac{11}{6}) \Rightarrow OG^2 = \frac{121}{4}$

Với đáp án B: $A(\frac{33}{4};0;0); B(0;66;0); C(0;0;66) \Rightarrow G(\frac{11}{4}; 22; 22) \Rightarrow OG^2 = \frac{15609}{16}$

Với đáp án C: $A(9;0;0); B(0;18;0); C(0;0;18) \Rightarrow G(3; \frac{18}{3}; \frac{18}{3}) \Rightarrow OG^2 = 81$

Với đáp án D: $A(-12;0;0); B(0;6;0); C(0;0;6) \Rightarrow G(-4; 2; 2) \Rightarrow OG^2 = 24$

Cách 2 :

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a, b, c > 0$. Theo đề bài ta có: $\frac{8}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Cần tìm

giá trị nhỏ nhất của $a^2 + b^2 + c^2$.

Ta có $(a^2 + b^2 + c^2)(4 + 1 + 1) \geq (a \cdot 2 + b \cdot 1 + c \cdot 1)^2 \Rightarrow 6(a^2 + b^2 + c^2) \geq (2a + b + c)^2$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(4 + 1 + 1)} &\geq (a \cdot 2 + b \cdot 1 + c \cdot 1) \\ &\geq (2a + b + c) \left(\frac{8}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \\ &\geq (4 + 1 + 1)^2 = 36 \end{aligned}$$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \geq 6^3$. Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a^2}{4} = b^2 = c^2 \Rightarrow a = 2b = 2c$.

Vậy $a^2 + b^2 + c^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 216 khi $a = 12, b = c = 6$.

Vậy phương trình mặt phẳng là: $\frac{x}{12} + \frac{y}{6} + \frac{z}{6} = 1$ hay $x + 2y + 2z - 12 = 0$.

Câu 12. Chọn B.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1), R = \sqrt{2}$

Đường thẳng d nhận $\vec{u} = (2; -1; 4)$ làm

vecto chỉ phương

Gọi H là hình chiếu của I lên đường thẳng d .

$$H \in d \Leftrightarrow H(2t+2; -t; 4t)$$

Lại có:

$$\overrightarrow{IH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (2t+1; -t-2; 4t-1) \cdot (2; -1; 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(2t+1) - t - 2 + 4(4t-1) = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

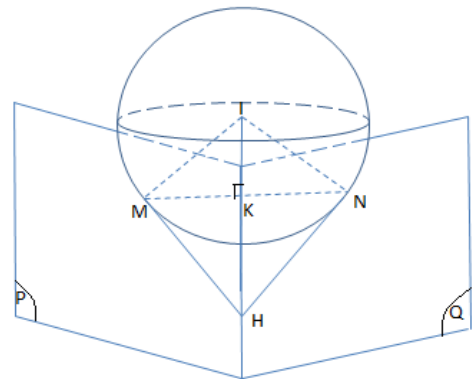
Suy ra tọa độ điểm $H(2;0;0)$.

$$\text{Vậy } IH = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

$$\text{Suy ra: } HM = \sqrt{6-2} = 2$$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng HI .

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{MK^2} = \frac{1}{MH^2} + \frac{1}{MI^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}. \text{ Suy ra: } MK = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow MN = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$



Câu 13. Chọn C.

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0,0,c)$ với $a, b, c > 0$.

Phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Vì: $M \in (P) \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

Thể tích khối tứ diện $OABC$ là: $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{1}{c}}$

Hay $1 \geq 3\sqrt[3]{\frac{2}{abc}} \Leftrightarrow 1 \geq \frac{54}{abc}$ Suy ra: $abc \geq 54 \Leftrightarrow \frac{1}{6}abc \geq 9$. Vậy: $V_{OABC} \geq 9$.

Câu 14. Chọn D.

d_1 qua $A(2;1;0)$ và có VTCP là $\vec{u}_1 = (1;-1;2)$;

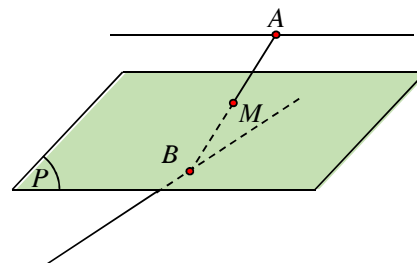
d_2 qua $B(2;3;0)$ và có VTCP là $\vec{u}_2 = (-2;0;1)$.

Có $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-1;-5;-2)$; $\overrightarrow{AB} = (0;2;0)$, suy ra

$[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{AB} = -10$, nên d_1, d_2 là chéo nhau.

Vậy mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 là đường thẳng song song với d_1, d_2 và đi qua trung điểm $I(2;2;0)$ của đoạn thẳng AB .

Vậy phương trình mặt phẳng (P) cần lập là: $x + 5y + 2z - 12 = 0$.

**Câu 15. Chọn A.**

Mọi điểm trên d cách đều hai điểm A, B nên d nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn AB .

Có $\overrightarrow{AB} = (-3;-1;0)$ và trung điểm AB là $I\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 1\right)$ nên mặt phẳng trung trực của AB là:

$$-3\left(x - \frac{3}{2}\right) - \left(y - \frac{5}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 7 = 0.$$

Mặt khác $d \subset (\alpha)$ nên d là giao tuyến của hai mặt phẳng: $\begin{cases} 3x + y - 7 = 0 \\ x + y + z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - 3x \\ z = 2x \end{cases}$.

$$\text{Vậy phương trình } d: \begin{cases} x = t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Câu 16. Chọn A.

Giả sử (P) có phương trình là: $ax + by + cz + d = 0$ ($a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$)

Vì $M \in (P) \Rightarrow c + d = 0 \Leftrightarrow d = -c$.

Vì $N \in (P) \Rightarrow 3b + c + d = 0$ hay $b = 0$ vì $c + d = 0$.

$$\Rightarrow (P): ax + cz - c = 0.$$

$$\text{Theo bài ra: } d(B, (P)) = 2d(A, (P)) \Leftrightarrow \frac{|-2a + 3c - c|}{\sqrt{a^2 + c^2}} = 2 \frac{|a - c|}{\sqrt{a^2 + c^2}} \Leftrightarrow |c - a| = |a - c|$$

Vậy có vô số mặt phẳng (P) .

Câu 17. Chọn A.

Cách 1: Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

$$\text{Có } OM = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \text{ nên } M \text{ nằm trong mặt cầu}$$

Khi đó diện tích AOB lớn nhất khi $OM \perp AB$. Khi đó $AB = 2\sqrt{R^2 - OM^2} = 2\sqrt{7}$ và

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} OM \cdot AB = \sqrt{7}$$

Cách 2: gọi H là hình chiếu của O xuống đường thẳng d , đặt $OH = x$ ($0 < x \leq 1$) Khi đó

$$AB = 2\sqrt{R^2 - OH^2} = 2\sqrt{8 - x^2} \text{ và } S_{AOB} = \frac{1}{2} OH \cdot AB = x\sqrt{8 - x^2}.$$

Khảo sát hàm số $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$ trên $(0;1]$ thu được giá trị lớn nhất của hàm số là $\sqrt{7}$ Đạt được tại $x = 1$

Câu 18. Chọn D.

Giả sử mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm khác gốc tọa độ là

$A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a, b, c \neq 0$.

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;9;4)$ nên $\frac{1}{a} + \frac{9}{b} + \frac{4}{c} = 1$ (1).

Vì $OA = OB = OC$ nên $|a| = |b| = |c|$, do đó xảy ra 4 trường hợp sau:

+) TH1: $a = b = c$.

Từ (1) suy ra $\frac{1}{a} + \frac{9}{a} + \frac{4}{a} = 1 \Leftrightarrow a = 14$, nên phương trình mp (α) là $x + y + z - 14 = 0$.

+) TH2: $a = b = -c$. Từ (1) suy ra $\frac{1}{a} + \frac{9}{a} - \frac{4}{a} = 1 \Leftrightarrow a = 6$, nên pt mp (α) là $x + y - z - 6 = 0$.

+) TH3: $a = -b = c$. Từ (1) suy ra $\frac{1}{a} - \frac{9}{a} + \frac{4}{a} = 1 \Leftrightarrow a = -4$, nên pt mp (α) là $x - y + z + 4 = 0$.

+) TH4: $a = -b = -c$. Từ (1) có $\frac{1}{a} - \frac{9}{a} - \frac{4}{a} = 1 \Leftrightarrow a = -12$, nên pt mp (α) là $x - y - z + 12 = 0$.

Vậy có 4 mặt phẳng thỏa mãn.

Câu 19. Chọn D.

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn OA

$$\Rightarrow (\alpha) \text{ đi qua điểm } D\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right) \text{ và có VTPT } \overrightarrow{OA} = (a; 0; 0) = a(1; 0; 0) \Rightarrow (\alpha): x - \frac{a}{2} = 0.$$

Gọi (β) là mặt phẳng trung trực của đoạn OB

$$\Rightarrow (\beta) \text{ đi qua điểm } E\left(0; \frac{a}{2}; 0\right) \text{ và có VTPT } \overrightarrow{OB} = (0; a; 0) = a(0; 1; 0) \Rightarrow (\beta): y - \frac{a}{2} = 0.$$

Gọi (γ) là mặt phẳng trung trực của đoạn OC

$$\Rightarrow (\gamma) \text{ đi qua điểm } F\left(0; 0; \frac{a}{2}\right) \text{ và có VTPT } \overrightarrow{OC} = (0; 0; a) = a(0; 0; 1) \Rightarrow (\gamma): z - \frac{a}{2} = 0.$$

$$\text{Gọi } I \text{ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện } OABC \Rightarrow I = (\alpha) \cap (\beta) \cap (\gamma) \Rightarrow I\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right).$$

$$\text{Mà theo giả thiết, } a + b + c = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = 1 \Rightarrow I \in (P): x + y + z = 1.$$

$$\text{Vậy, } d(M, (P)) = \frac{|2016 - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{2015}{\sqrt{3}}.$$

Câu 20. Chọn A.

$$\text{Cách 1: Ta có } (ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

$$\text{Mặt cầu } (S) \text{ có tâm } I(1; 2; 3) \text{ và bán kính } R = \sqrt{\frac{72}{7}}.$$

$$\text{Mặt phẳng } (ABC) \text{ tiếp xúc với } (S) \Leftrightarrow d(I, (ABC)) = R \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} - 1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \sqrt{\frac{72}{7}}.$$

$$\text{Mà } \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 7 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{7}{2}.$$

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có

$$(1^2 + 2^2 + 3^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \right)^2 = 7^2 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{7}{2}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} \\ \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow a = 2, b = 1, c = \frac{2}{3}, \text{ khi đó } V_{OABC} = \frac{1}{6}abc = \frac{2}{9}.$$

$$\text{Cách 2: Ta có } (ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \text{ mặt cầu } (S) \text{ có tâm } I(1; 2; 3), R = \sqrt{\frac{72}{7}}.$$

$$\text{Ta có } (ABC) \text{ tiếp xúc với mặt cầu } (S) \Leftrightarrow d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} - 1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \sqrt{\frac{72}{7}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|7 - 1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \sqrt{\frac{72}{7}} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 7 - \frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} - \frac{7}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{OABC} = \frac{1}{6}abc = \frac{2}{9}.$$

Cách 3: Giống **Cách 2** khi đến $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{7}{2}$.

Đến đây ta có thể tìm a, b, c bằng bất đẳng thức như sau:

$$\text{Ta có } 7^2 = \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}\right)^2 = \left(1 \cdot \frac{1}{a} + 2 \cdot \frac{1}{b} + 3 \cdot \frac{1}{c}\right)^2 \leq (1^2 + 2^2 + 3^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{7}{2}$$

Mà $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{7}{2} \Rightarrow$ Dấu "=" của BĐT xảy ra $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$, kết hợp với giả thiết

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 7 \text{ ta được } a=2, b=1, c=\frac{2}{3}. \text{ Vậy: } V_{OABC} = \frac{1}{6}abc = \frac{2}{9}.$$

$$\text{Ta có } \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow V_{OABC} = \frac{1}{6}abc = \frac{2}{9}.$$

Cách 4: Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = \sqrt{\frac{72}{7}}$.

Phương trình mặt phẳng (ABC): $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 7 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{a}}{\frac{7}{7}} + \frac{\frac{2}{b}}{\frac{7}{7}} + \frac{\frac{3}{c}}{\frac{7}{7}} = 1 \text{ nên } M\left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right) \in (ABC)$$

Thay tọa độ $M\left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right)$ vào phương trình mặt cầu (S) ta thấy đúng nên $M \in (S)$.

Suy ra: (ABC) tiếp xúc với (S) thì M là tiếp điểm.

Do đó: (ABC) qua $M\left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right)$, có VTPT là $\overrightarrow{MI} = \left(\frac{6}{7}; \frac{12}{7}; \frac{18}{7}\right) \rightarrow \vec{n} = (1; 2; 3)$

$$(ABC) \text{ có phương trình: } x + 2y + 3z - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{\frac{2}{3}} = 1 \Rightarrow a=2, b=1, c=\frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{6}abc = \frac{2}{9}$$

Câu 21. Chọn D.

Giả sử $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ ($a, b, c > 0$)

$$(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (1)$$

$$M(1;2;3) \text{ thuộc } (ABC): \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1.$$

$$\text{Thể tích tứ diện } OABC: V = \frac{1}{6}abc$$

$$\text{Áp dụng BDT Côsi ta có: } 1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}} \Rightarrow 1 \geq \frac{27.6}{abc} \Rightarrow \frac{1}{6}abc \geq 27 \Rightarrow V \geq 27$$

$$\text{Ta có: } V \text{ đạt giá trị nhỏ nhất} \Leftrightarrow V = 27 \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 9 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (ABC): 6x + 3y + 2z - 18 = 0.$$

Câu 22. Chọn C.

Ta thấy hai điểm A, B nằm cùng 1 phía với mặt phẳng (P) và AB song song với (P) .

Điểm $M \in (P)$ sao cho tam giác ABM có diện tích nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot d(M; AB)}{2} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow d(M; AB) \text{ nhỏ nhất, hay } M \in \Delta = (P) \cap (Q), (Q) \text{ là}$$

mặt phẳng đi qua AB và vuông góc với (P) .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (1; -1; 2), \text{ vtcp của } (P) \quad \overrightarrow{n_{(P)}} = (3; 1; -1)$$

$$\text{Suy ra vtcp của } (Q): \overrightarrow{n_{(Q)}} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_{(P)}}] = (-1; 7; 4)$$

$$\text{PTTQ } (Q): -1(x-1) + 7y + 4(z-2) = 0 \Leftrightarrow x - 7y - 4z + 7 = 0$$

$$\text{Quỹ tích } M \text{ là } \begin{cases} x - 7y - 4z + 7 = 0 \\ 3x + y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

Câu 23. Chọn B.

Gọi (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với d .

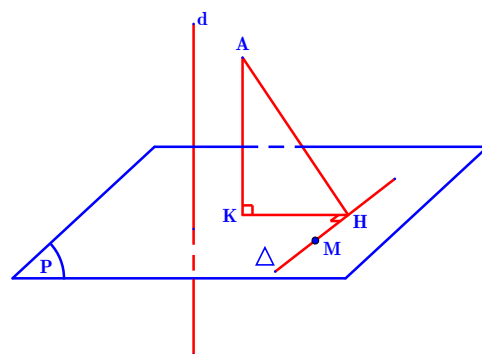
$$\text{Phương trình của } (P): 2x + 2y - z + 9 = 0.$$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên $\Delta, (P)$.

$$\text{Ta có } K(-3; -2; -1)$$

$$d(A, \Delta) = AH \geq AK$$

Vậy khoảng cách từ A đến Δ bé nhất khi Δ đi qua M, K . Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 0; 2)$



Câu 24. Chọn A.

Gọi $I(1;1;0)$ là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (Oxy)

$$\text{Ta có: Phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng } (ABC) \text{ là: } \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + z = 1$$

Suy ra phương trình tổng quát của (ABC) là $nx + my + mnz - mn = 0$

$$\text{Mặt khác } d(I; (ABC)) = \frac{|1 - mn|}{\sqrt{m^2 + n^2 + m^2 n^2}} = 1 \text{ (vì } m + n = 1) \text{ và } ID = 1 = d(I; (ABC)).$$

Nên tồn tại mặt cầu tâm I (là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng Oxy) tiếp xúc với (ABC) và đi qua D . Khi đó $R = 1$.

Câu 25. Chọn A.

* Cách diễn đạt thứ nhất:

Gọi G, G' theo thứ tự lần lượt là trọng tâm tam giác $ABC, A'B'C'$. Với mọi điểm T trong không gian có:

$$(1): \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{TA} - \overrightarrow{TA'}) + (\overrightarrow{TB} - \overrightarrow{TB'}) + (\overrightarrow{TC} - \overrightarrow{TC'}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \overrightarrow{TA'} + \overrightarrow{TB'} + \overrightarrow{TC'} \quad (2)$$

Hệ thức (2) chứng tỏ. Nếu $T \equiv G$ tức là $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0}$ thì ta cũng có $\overrightarrow{TA'} + \overrightarrow{TB'} + \overrightarrow{TC'} = \vec{0}$ hay $T \equiv G'$ hay (1) là hệ thức cần và đủ để hai tam giác $ABC, A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

$$\text{Ta có tọa độ của } G \text{ là: } G = \left(\frac{3+0+0}{3}; \frac{1-1+0}{3}; \frac{0+0-6}{3} \right) = (1; 0; -2)$$

Đó cũng là tọa độ trọng tâm G' của $\Delta A'B'C'$

* Cách diễn đạt thứ hai:

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{A'G'} + \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{B'G'} + \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{C'G'} + \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{A'G'} + \overrightarrow{B'G'} + \overrightarrow{C'G'}) + 3\overrightarrow{G'G} = \vec{0} \quad (2)$$

Nếu G, G' theo thứ tự lần lượt là trọng tâm tam giác $ABC, A'B'C'$ nghĩa là

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{A'G'} + \overrightarrow{B'G'} + \overrightarrow{C'G'} \text{ thì } (2) \Leftrightarrow \overrightarrow{G'G} = \vec{0} \Leftrightarrow G' \equiv G$$

Tóm lại (1) là hệ thức cần và đủ để hai tam giác $ABC, A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

$$\text{Ta có tọa độ của } G \text{ là: } G = \left(\frac{3+0+0}{3}; \frac{1-1+0}{3}; \frac{0+0-6}{3} \right) = (1; 0; -2). \text{ Đó cũng là tọa độ trọng tâm } G' \text{ của } \Delta A'B'C'$$

Câu 26. Chọn D.

Cách 1 (Tự luận)

Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với d , B' là hình chiếu của B lên (P)

Khi đó đường thẳng Δ chính là đường thẳng AB' và $\vec{u} = \overrightarrow{B'A}$

$$\text{Ta có } (P): \begin{cases} \text{Qua } A(-2; -2; 1) \\ \text{VTPT } \vec{n}_P = \vec{u}_d = (2; 2; -1) \end{cases} \Rightarrow (P): 2x + 2y - z + 9 = 0$$

$$\text{Gọi } d' \text{ là đường thẳng qua } B \text{ và song song } d' \Rightarrow d' \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$$

B' là giao điểm của d' và $(P) \Rightarrow B'(-3; -2; -1) \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{B'A} = (1; 0; 2)$

Cách 2: Không cần viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với d .

Gọi d' là đường thẳng qua B và song song $d' \Rightarrow d' \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$

$B' \in d' \Rightarrow \overrightarrow{B'A} = (-2t - 3; -2t - 4; t + 4)$

$AB' \perp d \Rightarrow \vec{u}_d \cdot \overrightarrow{B'A} = 0 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{B'A} = (1; 0; 2)$

Câu 27. Chọn A.

Cách 1 (Tự luận)

Đường thẳng d qua $M(2; 1; 0)$ và có VTCP $\vec{u}_d = (1; 2; -1)$

Ta có: $AB \perp d$ và $AB \perp Oz$ nên AB có VTCP là: $\vec{u}_{AB} = [\vec{u}_d, \vec{k}] = (2; -1; 0)$

(P) chứa d và AB nên (P) đi qua $M(2; 1; 0)$, có VTPT là: $\vec{n} = [\vec{u}_d, \vec{u}_{AB}] = (1; 2; 5)$

$\Rightarrow (P): x + 2y + 5z - 4 = 0$

Cách 2: Dùng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.

Đường thẳng d qua 2 điểm $M(2; 1; 0)$ và $N(3; 3; -1)$

Giả sử mp (P) cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$

$\Rightarrow (P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

$AB \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \Rightarrow a = 2b \quad (1)$

(P) chứa d nên d cũng đi qua $M, N \Rightarrow \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 1 \quad (2), \quad \frac{3}{a} + \frac{3}{b} + \frac{-1}{c} = 1 \quad (3)$

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow a = 4, b = 2, c = \frac{4}{5} \Rightarrow (P): x + 2y + 5z - 4 = 0$

Câu 28. Chọn A.

$\overrightarrow{OM} = (3; 0; 0), \overrightarrow{ON} = (m; n; 0) \Rightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 3m$

$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = |\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}| \cos 60^\circ \Rightarrow \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}{|\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \frac{1}{2}$

$MN = \sqrt{(m-3)^2 + n^2} = \sqrt{13}$. Suy ra $m = 2; n = \pm 2\sqrt{3}$

$[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}] \cdot \overrightarrow{OP} = 6\sqrt{3}p \Rightarrow V = \frac{1}{6} |6\sqrt{3}p| = 3 \Rightarrow p = \pm\sqrt{3}$

Vậy $A = 2 + 2.12 + 3 = 29$.

Câu 29. Chọn B.

Ta có trung điểm BD là $I(-1; -2; 4)$, $BD = 12$ và điểm A thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $A(a; b; 0)$.

$$ABCD \text{ là hình vuông} \Rightarrow \begin{cases} AB^2 = AD^2 \\ AI^2 = \left(\frac{1}{2}BD\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)^2 + b^2 + 8^2 = (a+5)^2 + (b+4)^2 \\ (a+1)^2 + (b+2)^2 + 4^2 = 36 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - 2a \\ (a+1)^2 + (6-2a)^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = \frac{17}{5} \\ b = -\frac{14}{5} \end{cases} \Rightarrow A(1; 2; 0) \text{ hoặc } A\left(\frac{17}{5}; -\frac{14}{5}; 0\right) (\text{loại}).$$

Với $A(1; 2; 0) \Rightarrow C(-3; -6; 8)$.

Câu 30. Chọn A.

Gọi G là trọng tâm của $ABCD$ ta có: $G\left(\frac{7}{3}; \frac{14}{3}; 0\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 &= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \\ &\geq GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } M \equiv G\left(\frac{7}{3}; \frac{14}{3}; 0\right) \Rightarrow x + y + z = 7. \end{aligned}$$

Câu 31. Chọn C.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{AB} &= (-1; -1; 2), \overrightarrow{AC} = (1; -2; 1) \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \overrightarrow{DC} &= (-2; -2; 4), \overrightarrow{AB} = (-1; -1; 2) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow ABCD \text{ là hình thang và} \end{aligned}$$

$$S_{ABCD} = 3S_{ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vì } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} \Rightarrow SH = 3\sqrt{3}$$

Lại có H là trung điểm của $CD \Rightarrow H(0; 1; 5)$

$$\text{Gọi } S(a; b; c) \Rightarrow \overrightarrow{SH} = (-a; 1-b; 5-c) \Rightarrow \overrightarrow{SH} = k \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right] = k(3; 3; 3) = (3k; 3k; 3k)$$

$$\text{Suy ra } 3\sqrt{3} = \sqrt{9k^2 + 9k^2 + 9k^2} \Rightarrow k = \pm 1$$

$$+) \text{ Với } k = 1 \Rightarrow \overrightarrow{SH} = (3; 3; 3) \Rightarrow S(-3; -2; 2)$$

$$+) \text{ Với } k = -1 \Rightarrow \overrightarrow{SH} = (-3; -3; -3) \Rightarrow S(3; 4; 8)$$

Suy ra $I(0; 1; 3)$

Câu 32. Chọn B.

Gọi H là hình chiếu của $I(1; 7; 5)$ trên $d \Rightarrow H(0; 0; -4) \Rightarrow IH = d(I; d) = 2\sqrt{3}$

$$S_{\Delta AIB} = \frac{IH \cdot AB}{2} \Rightarrow AB = \frac{2S_{\Delta AIB}}{IH} = \sqrt{8020} \Rightarrow R^2 = IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = 2017$$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y-7)^2 + (z-5)^2 = 2017$.

Câu 33. Chọn B.

- Gọi $H(-1+t; 2t; 2+t) \in d$ là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d
 $\Rightarrow \overrightarrow{IH} = (-1+t; 2t; -1+t)$

- Ta có vectơ chỉ phương của $d: \vec{a}_d = (1; 2; 1)$ và $IH \perp d$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IH} \cdot \vec{a}_d = 0 \Leftrightarrow -1 + t + 4t - 1 + t = 0 \Leftrightarrow -2 + 6t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow H\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$$

$$\Rightarrow IH = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

- Vì tam giác IAB vuông tại I và $IA = IB = R$. Suy ra tam giác IAB vuông cân tại I , do đó bán kính:

$$R = IA = AB \cos 45^\circ = 2IH \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}IH = \sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

- Vậy phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{8}{3}$.

Câu 34. Chọn A.

- Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) . Suy ra $d: \begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = 5 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$

- Vì H là hình chiếu vuông góc của A trên (P) nên $H = d \cap (P)$.

Vì $H \in d$ nên $H(2 + 6t; 5 + 3t; 1 - 2t)$.

- Mặt khác, $H \in (P)$ nên ta có: $6(2 + 6t) + 3(5 + 3t) - 2(1 - 2t) + 24 = 0 \Leftrightarrow t = -1$

Do đó, $H(-4; 2; 3)$.

- Gọi I, R lần lượt là tâm và bán kính mặt cầu.

Theo giả thiết diện tích mặt cầu bằng 784π , suy ra $4\pi R^2 = 784\pi \Rightarrow R = 14$.

Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại H nên $IH \perp (P) \Rightarrow I \in d$.

Do đó tọa độ điểm I có dạng $I(2 + 6t; 5 + 3t; 1 - 2t)$, với $t \neq -1$.

- Theo giả thiết, tọa độ điểm I thỏa mãn:

$$\begin{cases} d(I, (P)) = 14 \\ AI < 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|6(2 + 6t) + 3(5 + 3t) - 2(1 - 2t) + 24|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2}} = 14 \\ \sqrt{(6t)^2 + (3t)^2 + (-2t)^2} < 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \\ -2 < t < 2 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

Do đó: $I(8; 8; -1)$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S): (x-8)^2 + (y-8)^2 + (z+1)^2 = 196$.

Câu 35. Chọn A.

- $\Delta_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$; Δ_2 đi qua điểm $A(2; 0; -3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}_2 = (1; 1; 4)$.

- Giả sử $I(2 + t; t; 1 - t) \in \Delta_1$ là tâm và R là bán kính của mặt cầu (S) .

• Ta có: $\overrightarrow{AI} = (t; t; 4-t) \Rightarrow [\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{a_2}] = (5t-4; 4-5t; 0) \Rightarrow d(I; \Delta_2) = \frac{|\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{a_2}|}{|\overrightarrow{a_2}|} = \frac{|5t-4|}{3}$

$d(I, (P)) = \frac{|2+t-2t-2(1-t)+10|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{|t+10|}{3}$.

• (S) tiếp xúc với Δ_2 và $(P) \Leftrightarrow d(I, \Delta_2) = d(I, (P)) \Leftrightarrow |5t-4| = |t+10| \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{7}{2} \\ t = -1 \end{cases}$.

• Với $t = \frac{7}{2} \Rightarrow I\left(\frac{11}{2}; \frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right), R = \frac{9}{2} \Rightarrow (S): \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$.

• Với $t = -1 \Rightarrow I(1; -1; 2), R = 3 \Rightarrow (S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$.

Câu 36. Chọn B.

Chọn $M(6; 0; 0), N(2; 2; 2)$ thuộc giao tuyến của $(P), (Q)$

Gọi $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ lần lượt là giao điểm của (α) với các trục Ox, Oy, Oz

$\Rightarrow (\alpha): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 (a, b, c \neq 0)$

(α) chứa $M, N \Rightarrow \begin{cases} \frac{6}{a} = 1 \\ \frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} = 1 \end{cases}$

Hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều $\Rightarrow OA = OB = OC \Rightarrow |a| = |b| = |c|$

Vậy phương trình $x + y + z - 6 = 0$.

Câu 37. Chọn A.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: $4 = \frac{AB}{AB'} + \frac{AC}{AC'} + \frac{AD}{AD'} \geq 3\sqrt[3]{\frac{AB \cdot AC \cdot AD}{AB' \cdot AC' \cdot AD'}}$

$\Rightarrow \frac{AB' \cdot AC' \cdot AD'}{AB \cdot AC \cdot AD} \geq \frac{27}{64} \Rightarrow \frac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{AB' \cdot AC' \cdot AD'}{AB \cdot AC \cdot AD} \geq \frac{27}{64} \Rightarrow V_{AB'C'D'} \geq \frac{27}{64} V_{ABCD}$

Để $V_{AB'C'D'}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{AD'}{AD} = \frac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{AB'} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AB} \Rightarrow B'\left(\frac{7}{4}; \frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right)$

Lúc đó mặt phẳng $(B'C'D')$ song song với mặt phẳng (BCD) và đi qua $B'\left(\frac{7}{4}; \frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right)$

$\Rightarrow (B'C'D'): 16x + 40y - 44z + 39 = 0$.

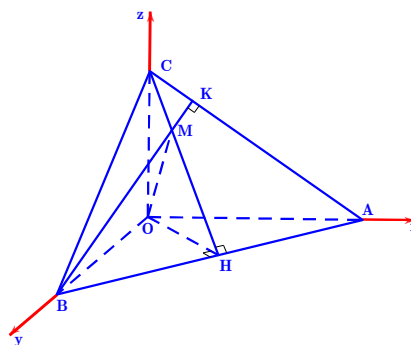
Câu 38. Chọn A.

Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB ,

K là hình chiếu vuông góc của B trên AC . M là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $M = BK \cap CH$

Ta có: $\left. \begin{matrix} AB \perp CH \\ AB \perp CO \end{matrix} \right\} \Rightarrow AB \perp (COH) \Rightarrow AB \perp OM$ (1) (1)

Chứng minh tương tự, ta có: $AC \perp OM$ (2).



Từ (1) và (2), ta có: $OM \perp (ABC)$

Ta có: $\overrightarrow{OM}(1;2;3)$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và có một VTPT là $\overrightarrow{OM}(1;2;3)$ nên có phương trình là: $(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0 \Leftrightarrow x+2y+3z-14=0$.

Cách 2:

+Do A, B, C lần lượt thuộc các trục Ox, Oy, Oz nên $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ ($a, b, c \neq 0$).

Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

+Do M là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ M \in (ABC) \end{cases}$. Giải hệ điều kiện trên ta được

a, b, c

Vậy phương trình mặt phẳng: $x+2y+3z-14=0$.

Câu 39. Chọn A.

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ lần lượt là giao điểm của (P) với các trục Ox, Oy, Oz

$$\Rightarrow (P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 (a, b, c \neq 0)$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} N \in (P) \\ NA = NB \\ NA = NC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \\ |a-1| = |b-1| \\ |a-1| = |c-1| \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 3 \Rightarrow x + y + z - 3 = 0$$

Câu 40. Chọn D.

Ta có d_1 đi qua $A(2;2;3)$ và có $\overrightarrow{u_{d_1}} = (2;1;3)$, d_2 đi qua $B(1;2;1)$ và có $\overrightarrow{u_{d_2}} = (2;-1;4)$

$$\overrightarrow{AB} = (-1;1;-2); [\overrightarrow{u_{d_1}}; \overrightarrow{u_{d_2}}] = (7;-2;-4);$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{u_{d_1}}; \overrightarrow{u_{d_2}}] \cdot \overrightarrow{AB} = -1 \neq 0 \text{ nên } d_1, d_2 \text{ chéo nhau.}$$

Do (α) cách đều d_1, d_2 nên (α) song song với $d_1, d_2 \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha} = [\overrightarrow{u_{d_1}}; \overrightarrow{u_{d_2}}] = (7;-2;-4)$

$$\Rightarrow (\alpha) \text{ có dạng } 7x - 2y - 4z + d = 0$$

$$\text{Theo giả thiết thì } d(A, (\alpha)) = d(B, (\alpha)) \Leftrightarrow \frac{|d-2|}{\sqrt{69}} = \frac{|d-1|}{\sqrt{69}} \Leftrightarrow d = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow (\alpha): 14x - 4y - 8z + 3 = 0$$

Câu 41. Chọn D.

Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_\Delta} = (1;2;2)$

d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d} = (a;b;c)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_p = (1; -1; 1)$

$d \subset (P) \Rightarrow \vec{a}_d \perp \vec{n}_p \Leftrightarrow b = a + c; (1)$

$$(\Delta, d) = 45^\circ \Leftrightarrow \cos(\Delta, d) = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{|a + 2b + 2c|}{3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(a + 2b + 2c)^2 = 9(a^2 + b^2 + c^2); (2)$$

Từ $\Delta_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}$ và $\Delta_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3}$, ta có: $14c^2 + 30ac = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 15a + 7c = 0 \end{cases}$

Với $c = 0$, chọn $a = b = 1$, phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$

Với $15a + 7c = 0$, chọn $a = 7 \Rightarrow c = -15; b = -8$, phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} x = 3 + 7t \\ y = -1 - 8t \\ z = 1 - 15t \end{cases}$

Câu 42. Chọn A.

Δ có vectơ chỉ phương $\vec{a}_\Delta = (1; -2; 2)$

d có vectơ chỉ phương $\vec{a}_d = (a; b; c)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_p = (2; -1; -1)$

Vì $d // (P)$ nên $\vec{a}_d \perp \vec{n}_p \Leftrightarrow \vec{a}_d \cdot \vec{n}_p = 0 \Leftrightarrow 2a - b - c = 0 \Leftrightarrow c = 2a - b$

$$\cos(\Delta, d) = \frac{|5a - 4b|}{3\sqrt{5a^2 - 4ab + 2b^2}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(5a - 4b)^2}{5a^2 - 4ab + 2b^2}}$$

Đặt $t = \frac{a}{b}$, ta có: $\cos(\Delta, d) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{(5t - 4)^2}{5t^2 - 4t + 2}}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{(5t - 4)^2}{5t^2 - 4t + 2}$, ta suy ra được: $\max f(t) = f\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

Do đó: $\max[\cos(\Delta, d)] = \sqrt{\frac{5\sqrt{3}}{27}} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{1}{5}$

Chọn $a = 1 \Rightarrow b = -5, c = 7$

Vậy phương trình đường thẳng d là $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{7}$

Câu 43. Chọn A.

Gọi $M = d \cap \Delta_1 \Rightarrow M(1 + 2t; 2 + t; -2 - t)$

d có vectơ chỉ phương $\vec{a}_d = \vec{AM} = (2t + 2; t + 2; -1 - t)$

Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{a}_2 = (-1; 2; 2)$

$$\cos(d; \Delta_2) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{t^2}{6t^2 + 14t + 9}}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{6t^2 + 14t + 9}$, ta suy ra được $\min f(t) = f(0) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Do đó $\min[\cos(\Delta, d)] = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2; 2-1)$

Vậy phương trình đường thẳng d là $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$

Câu 44. Chọn B.

$$A \in d_1 \Rightarrow A(1+2a; a; -2-a)$$

$$B \in d_2 \Rightarrow B(1+b; -2+3b; 2-2b)$$

$$\Delta \text{ có vectơ chỉ phương } \overrightarrow{AB} = (b-2a; 3b-a-2; -2b+a+4)$$

$$(P) \text{ có vectơ pháp tuyến } \overrightarrow{n_p} = (1; 1; 1)$$

Vì $\Delta // (P)$ nên $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{n_p} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n_p} = 0 \Leftrightarrow b = a-1$. Khi đó $\overrightarrow{AB} = (-a-1; 2a-5; 6-a)$

$$AB = \sqrt{(-a-1)^2 + (2a-5)^2 + (6-a)^2} = \sqrt{6a^2 - 30a + 62} = \sqrt{6\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{49}{2}} \geq \frac{7\sqrt{2}}{2}; \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } a = \frac{5}{2} \Rightarrow A\left(6; \frac{5}{2}; -\frac{9}{2}\right), \overrightarrow{AB} = \left(-\frac{7}{2}; 0; \frac{7}{2}\right)$$

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A\left(6; \frac{5}{2}; -\frac{9}{2}\right)$ và vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = (-1; 0; 1)$

$$\text{Vậy phương trình của } \Delta \text{ là } \begin{cases} x = 6 - t \\ y = \frac{5}{2} \\ z = -\frac{9}{2} + t \end{cases}$$

Câu 45. Chọn B.

Gọi d là đường thẳng cần tìm

$$\text{Gọi } A = d \cap d_1, B = d \cap d_2$$

$$A \in d_1 \Rightarrow A(2a; 1-a; -2+a); B \in d_2 \Rightarrow B(-1+2b; 1+b; 3)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-2a+2b-1; a+b; -a+5)$$

$$(P) \text{ có vectơ pháp tuyến } \overrightarrow{n_p} = (7; 1; -4)$$

$d \perp (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_p}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \text{có một số } k \text{ thỏa } \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{n_p}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a+2b-1=7k \\ a+b=k \\ -a+5=-4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a+2b-7k=1 \\ a+b-k=0 \\ -a+4k=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ k=-1 \end{cases}$$

d đi qua điểm $A(2;0;-1)$ và có vector chỉ phương $\vec{a_d} = \vec{n_p} = (7;1-4)$

Vậy phương trình của d là $\frac{x-2}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-4}$

Câu 46. Chọn A.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm

Gọi $A = \Delta \cap \Delta_1, B = \Delta \cap \Delta_2$

$A \in \Delta_1 \Rightarrow A(-1+3a; 2+a; 1+2a); B \in \Delta_2 \Rightarrow B(1+b; 2b; -1+3b)$

$\vec{AB} = (-3a+b+2; -a+2b-2; -2a+3b-2)$

d có vector chỉ phương $\vec{a_d} = (0;1;1)$

$\Delta // d \Leftrightarrow \vec{AB}, \vec{a_d}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \text{có một số } k \text{ thỏa } \vec{AB} = k\vec{a_d} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a+b+2=0 \\ -a+2b-2=k \\ -2a+3b-2=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a+b=-2 \\ -a+2b-k=2 \\ -2a+3b-k=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ k=-1 \end{cases}$$

Ta có $A(2;3;3); B(2;2;2)$

Δ đi qua điểm $A(2;3;3)$ và có vector chỉ phương $\vec{AB} = (0;-1;-1)$

Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases} x=2 \\ y=3-t \\ z=3-t \end{cases}$

Câu 47. Chọn C.

Cách 1:

Gọi $A = d \cap (P)$

$A \in d \Rightarrow A(12+4a; 9+3a; 1+a)$

$A \in (P) \Rightarrow a = -3 \Rightarrow A(0;0;-2)$

d đi qua điểm $B(12;9;1)$

Gọi H là hình chiếu của B lên (P)

(P) có vector pháp tuyến $\vec{n_p} = (3;5;-1)$

BH đi qua $B(12;9;1)$ và có vector chỉ phương $\vec{a_{BH}} = \vec{n_p} = (3;5;-1)$

$$BH: \begin{cases} x=12+3t \\ y=9+5t \\ z=1-t \end{cases}$$

$H \in BH \Rightarrow H(12+3t; 9+5t; 1-t)$

$H \in (P) \Rightarrow t = -\frac{78}{35} \Rightarrow H\left(\frac{186}{35}; -\frac{15}{7}; \frac{113}{35}\right)$

$\vec{AH} = \left(\frac{186}{35}; -\frac{15}{7}; \frac{183}{35}\right)$

d' đi qua $A(0;0;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}_{d'} = (62; -25; 61)$

Vậy phương trình tham số của d' là
$$\begin{cases} x = 62t \\ y = -25t \\ z = -2 + 61t \end{cases}$$

Cách 2:

⊙ Gọi (Q) qua d và vuông góc với (P)

d đi qua điểm $B(12;9;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}_d = (4;3;1)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_p = (3;5;-1)$

(Q) qua $B(12;9;1)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_Q = [\vec{a}_d, \vec{n}_p] = (-8;7;11)$

$(Q): 8x - 7y - 11z - 22 = 0$

⊙ d' là giao tuyến của (Q) và (P)

Tìm một điểm thuộc d' , bằng cách cho $y = 0$

Ta có hệ
$$\begin{cases} 3x - z = 2 \\ 8x - 11z = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow M(0;0;-2) \in d'$$

d' đi qua điểm $M(0;0;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}_{d'} = [\vec{n}_p, \vec{n}_Q] = (62; -25; 61)$

Vậy phương trình tham số của d' là
$$\begin{cases} x = 62t \\ y = -25t \\ z = -2 + 61t \end{cases}$$

Câu 48. Chọn D.

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$, bán kính $R = 5$. Do $IA = \sqrt{17} < R$ nên AB luôn cắt (S) . Do đó (α) luôn cắt (S) theo đường tròn (C) có bán kính $r = \sqrt{R^2 - (d(I, (\alpha)))^2}$. Để bán kính r nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I, (\alpha))$ lớn nhất.

Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với $\text{mp}(ABC)$.

Ta có $\vec{AB} = (1; -1; -1)$, $\vec{AC} = (-2; -3; -2)$ suy ra (ABC) có vectơ pháp tuyến

$\vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}] = (-1; 4; -5)$

(α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = [\vec{n}, \vec{AB}] = (-9; -6; -3) = -3(3; 2; 1)$

Phương trình $(\alpha): 3(x-2) + 2(y-1) + 1(z-3) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y + z - 11 = 0$.

Câu 49. Chọn A.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$, bán kính $R = 10$. Do $d(I, (\alpha)) < R$ nên Δ luôn cắt (S) tại A, B .

Khi đó $AB = \sqrt{R^2 - (d(I, \Delta))^2}$. Do đó, AB lớn nhất thì $d(I, (\Delta))$ nhỏ nhất nên Δ qua H , với H là hình chiếu vuông góc của I lên (α) .

$$\text{Phương trình } BH: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 + t \end{cases}$$

$$H \in (\alpha) \Rightarrow 2(2 + 2t) - 2(3 - 2t) + 5 + t + 15 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow H(-2; 7; 3).$$

Do vậy $\overrightarrow{AH} = (1; 4; 6)$ là véc tơ chỉ phương của Δ . Phương trình của $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$

Câu 50. Chọn A.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 1)$.

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) : $d(I; (P)) = 6 < R$ nên (P) cắt (S) .

Khoảng cách từ M thuộc (S) đến (P) lớn nhất $\Rightarrow M \in (d)$ đi qua I và vuông góc với (P)

$$\text{Phương trình } (d): \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Ta có: $M \in (d) \Rightarrow M(3 + 2t; -2 - 2t; 1 - t)$

$$\text{Mà: } M \in (S) \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{10}{3} \Rightarrow M_1\left(\frac{29}{3}; -\frac{26}{3}; -\frac{7}{3}\right) \\ t = -\frac{10}{3} \Rightarrow M_2\left(-\frac{11}{3}; \frac{14}{3}; \frac{13}{3}\right) \end{cases}$$

Thử lại ta thấy: $d(M_1, (P)) > d(M_2, (P))$ nên $M\left(-\frac{11}{3}; \frac{14}{3}; \frac{13}{3}\right)$ thỏa yêu cầu bài toán

Câu 51. Chọn D.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow C(a; a; 0) \Rightarrow C'(a; a; b) \Rightarrow M\left(a; a; \frac{b}{2}\right)$$

Cách 1.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MB} = \left(0; -a; -\frac{b}{2}\right); \overrightarrow{BD} = (-a; a; 0) \text{ và } \overrightarrow{A'B} = (a; 0; -b)$$

$$\text{Ta có } \vec{u} = [\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{BD}] = \left(\frac{ab}{2}; \frac{ab}{2}; -a^2\right) \text{ và } [\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{A'B}] = (-a^2; -a^2; -a^2)$$

Chọn $\vec{v} = (1; 1; 1)$ là VTPT của $(A'BD)$

$$(A'BD) \perp (MBD) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} - a^2 = 0 \Leftrightarrow a = b \Rightarrow \frac{a}{b} = 1$$

Cách 2.

$$AB = AD = BC = CD = a \Rightarrow \begin{cases} A'B = A'D \\ MB = MD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'X \perp BD \\ MX \perp BD \end{cases} \text{ với } X \text{ là trung điểm } BD$$

$$\Rightarrow \left[\widehat{(A'BD)}; \widehat{(MBD)} \right] = \left(\widehat{A'X}; \widehat{MX} \right)$$

$X\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$ là trung điểm BD

$$\overrightarrow{A'X} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; -b\right); \overrightarrow{MX} = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$$

$$(A'BD) \perp (MBD) \Rightarrow A'X \perp MX$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A'X} \cdot \overrightarrow{MX} = 0 \Rightarrow -\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{2} = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = 1$$

Câu 52. Chọn C.

Ta có: $d(M, (P)) = 3 > R = 2 \Rightarrow (P) \cap (S) = \emptyset$.

Đường thẳng d đi qua I và vuông góc với (P) có pt:
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Tọa độ giao điểm của d và (S) là: $A\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}; \frac{7}{3}\right), B\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$

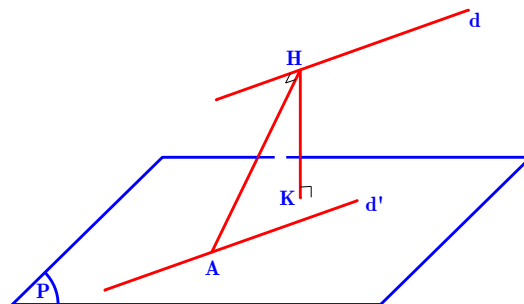
Ta có: $d(A, (P)) = 5 \geq d(B, (P)) = 1. \Rightarrow d(A, (P)) \geq d(M, (P)) \geq d(B, (P)).$

Vậy: $\Rightarrow d(M, (P))_{\min} = 1 \Leftrightarrow M \equiv B$.

Câu 53. Chọn A.

(P) là mặt phẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng d nên (P) chứa đường thẳng d' đi qua điểm A và song song với đường thẳng d .

Gọi H là hình chiếu của A trên d , K là hình chiếu của H trên (P) .



Ta có $d(d, (P)) = HK \leq AH$ (AH không đổi)

$\Rightarrow$ GTLN của $d(d, (P))$ là AH

$\Rightarrow d(d, (P))$ lớn nhất khi AH vuông góc với (P) .

Khi đó, nếu gọi (Q) là mặt phẳng chứa A và d thì (P) vuông góc với (Q) .

$$\Rightarrow \vec{n}_P = [\vec{u}_d, \vec{n}_Q] = (98; 14; -70)$$

$$\Rightarrow (P): 7x + y - 5z - 77 = 0 \Rightarrow d(M, (P)) = \frac{97\sqrt{3}}{15}.$$

Câu 54. Chọn A.

Gọi H là hình chiếu của A trên d ; K là hình chiếu của A trên (P) .

Ta có $d(A, (P)) = AK \leq AH$ (Không đổi)

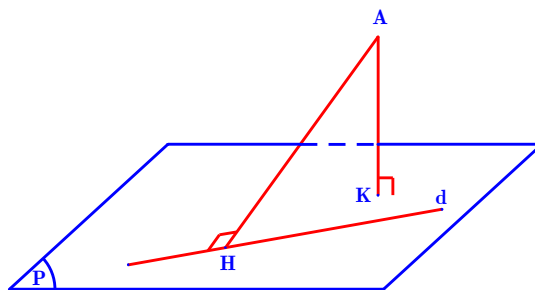
$\Rightarrow$ GTLN của $d(d, (P))$ là AH

$\Rightarrow d(A, (P))$ lớn nhất khi $K \equiv H$.

Ta có $H(3; 1; 4)$, (P) qua H và $\perp AH$

$\Rightarrow (P): x - 4y + z - 3 = 0$

Vậy $d(M, (P)) = \frac{11\sqrt{18}}{18}$.



Câu 55. Chọn D.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm, $\vec{n}_p$ là VTPT của mặt phẳng (P) .

Gọi $M(1+t; t; 2+2t)$ là giao điểm của Δ và d ; $M'(3-t'; 1+t'; 1-2t')$ là giao điểm của Δ và d'

Ta có: $\overline{MM'}(2-t'-t; 1+t'-t; -1-2t'-2t)$

$MM' \parallel (P) \Leftrightarrow \begin{cases} M \notin (P) \\ \overline{MM'} \perp \vec{n}_p \end{cases} \Leftrightarrow t' = -2 \Rightarrow \overline{MM'}(4-t; -1-t; 3-2t)$

Ta có $\cos 30^\circ = \cos(\overline{MM'}, \vec{u}_d) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|-6t+9|}{\sqrt{36t^2-108t+156}} \Leftrightarrow \begin{cases} t=4 \\ t=-1 \end{cases}$

Vậy, có 2 đường thẳng thỏa mãn là $\Delta_1: \begin{cases} x=5 \\ y=4+t \\ z=10+t \end{cases}; \Delta_2: \begin{cases} x=t' \\ y=-1 \\ z=t' \end{cases}$.

Khi đó, $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{1}{2}$.

Câu 56. Chọn C.

Gọi I là trung điểm đoạn BC ; các điểm B', C', I' lần lượt là hình chiếu của B, C, I trên (P) .

Ta có tứ giác $BCC'B'$ là hình thang và II' là đường trung bình.

$\Rightarrow d(B, (P)) + d(C, (P)) = BB' + CC' = 2II'$.

Mà $II' \leq IA$ (với IA không đổi)

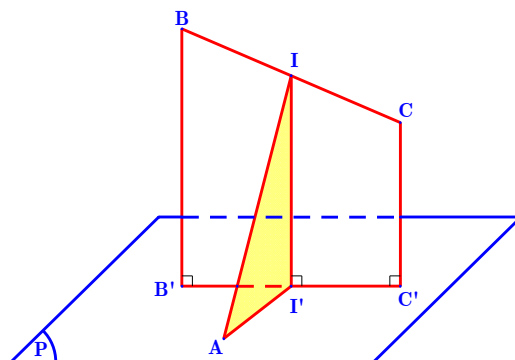
Do vậy, $d(B, (P)) + d(C, (P))$ lớn nhất khi

$I' \equiv A$

$\Rightarrow (P)$ đi qua A và vuông góc $\overline{IA}$ với

$I(2; 0; -1)$.

$\Rightarrow (P): -x + 2z - 1 = 0 \Rightarrow E(1; 3; 1) \in (P)$.



Câu 57. Chọn A.

Ta có phương trình mp(ABC) là $\frac{x}{1} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

$$(ABC) \perp (P) \Rightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0 \Rightarrow b = c \quad (1)$$

$$\text{Ta có } d(O, (ABC)) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 8 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow b = c = \frac{1}{2} \Rightarrow b + c = 1.$$

Câu 58. Chọn D.

Gọi $M(x; y; z)$. Ta có $T = 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 - 8x - 8y + 6z + 31$

$$\Rightarrow T = 6 \left[\left(x - \frac{2}{3} \right)^2 + \left(y - \frac{2}{3} \right)^2 + \left(z + \frac{1}{2} \right)^2 \right] + \frac{145}{6}$$

$$\Rightarrow T = 6MI^2 + \frac{145}{6} \text{ với } I \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{2} \right)$$

$\Rightarrow T$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất $\Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I trên (P)

$$\Rightarrow M \left(-\frac{5}{18}; -\frac{5}{18}; -\frac{13}{9} \right).$$

Câu 59. Chọn C.

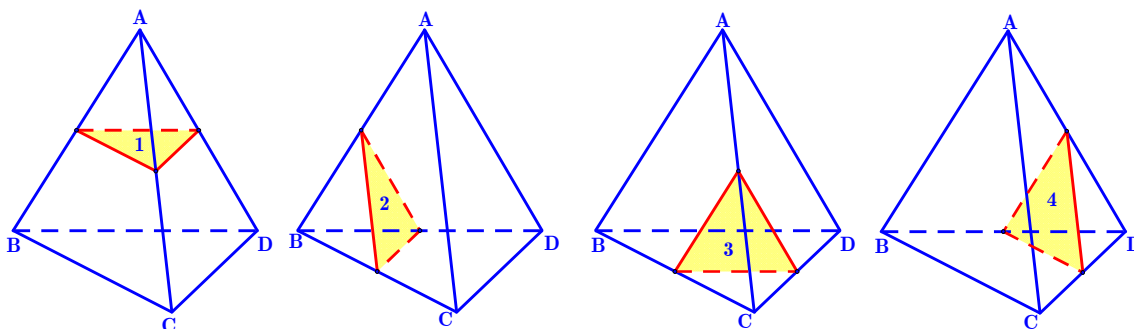
Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 1)$; $\overrightarrow{AC} = (1; 3; -1)$; $\overrightarrow{AD} = (2; 3; 4)$.

$$\text{Suy ra: } [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-4; 0; -4) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = -24 \neq 0$$

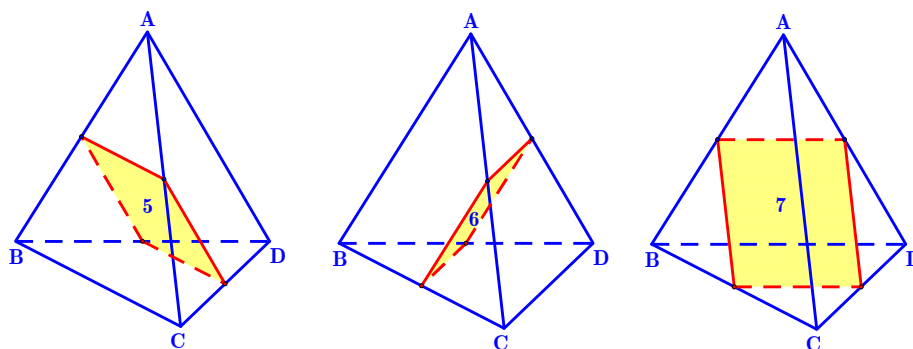
$\Rightarrow 4$ điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

Khi đó, mặt phẳng cách đều cả 4 điểm A, B, C, D sẽ có hai loại:

Loại 1: Có 1 điểm nằm khác phía với 3 điểm còn lại (đi qua các trung điểm của 3 cạnh chung đỉnh) $\Rightarrow$ có 4 mặt phẳng như thế).



Loại 2: Có 2 điểm nằm khác phía với 2 điểm còn lại (đi qua các trung điểm của 4 cạnh thuộc hai cặp cạnh chéo nhau) $\Rightarrow$ có 3 mặt phẳng như thế).



Vậy có tất cả 7 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Câu 60. Chọn B.

Do Δ cắt d nên tồn tại giao điểm giữa chúng. Gọi $B = \Delta \cap d \Leftrightarrow \begin{cases} B \in \Delta \\ B \in d \end{cases}$.

Phương trình tham số của d : $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ z = t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Do $B \in d$, suy ra $B(t+1; t; t-1)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (t; t; 2t-3)$$

Do $A, B \in \Delta$ nên $\overrightarrow{AB}$ là vector chỉ phương của Δ .

Theo đề bài, Δ vuông góc d nên $\overrightarrow{AB} \perp \vec{u}$ ($\vec{u} = (1; 1; 2)$ là vector chỉ phương của d). Suy ra

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0. \text{ Giải được } t = 1 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1; 1; -1). \text{ Vậy } \Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}.$$

Câu 61. Chọn A.

Ta có: $M \in (Oxz) \Rightarrow M(x; 0; z); \overrightarrow{AB} = (7; 3; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{59}; \overrightarrow{AM} = (x+2; -3; z-1)$ và

$$\text{Ta có: } A, B, M \text{ thẳng hàng} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB} \quad (k \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 7k \\ -3 = 3k \\ z-1 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ -1 = k \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-9; 0; 0).$$

$$\text{Và } \overrightarrow{BM} = (-14; -6; -2) \Rightarrow BM = \sqrt{118} = 2AB$$

Câu 62. Chọn B.

Ta có: d_1 đi qua điểm $A(2; 0; 0)$ và có VTCP $\vec{u}_1 = (-1; 1; 1)$.

và d_2 đi qua điểm $B(0; 1; 2)$ và có VTCP $\vec{u}_2 = (2; -1; -1)$. Vì (P) song song với hai đường thẳng d_1 và d_2 nên VTPT của (P) là $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (0; 1; -1)$

Khi đó (P) có dạng $y - z + D = 0 \Rightarrow$ loại đáp án A và C.

Lại có (P) cách đều d_1 và d_2 nên (P) đi qua trung điểm $M\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$ của AB . Do đó

$$(P): 2y - 2z + 1 = 0$$

Câu 63. Chọn A.

Gọi H là hình chiếu của M trên $(P) \Rightarrow \Delta MHO$ vuông tại $H \Rightarrow MH \leq MO$
 $\Rightarrow MH_{\max} = MO$. Khi đó (P) đi qua M và vuông góc với $MO \Rightarrow \overrightarrow{MO}(1; 2; -1)$ là vectơ pháp tuyến của $(P) \Rightarrow$ phương trình của mặt phẳng (P) là $1(x-0) + 2(y-0) - 1(z-0) = 0$ hay $x + 2y - z = 0$.

Câu 64. Chọn A.

Vì $D \in (Oyz) \Rightarrow D(0; b; c)$, do cao độ âm nên $c < 0$.

Khoảng cách từ $D(0; b; c)$ đến mặt phẳng $(Oxy): z = 0$ bằng 1 $\Leftrightarrow \frac{|c|}{1} = 1 \Rightarrow c = -1$ (do $c < 0$).

Suy ra tọa độ $D(0; b; -1)$. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; -1; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (-4; 2; 2)$; $\overrightarrow{AD} = (-2; b; 1)$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (2; 6; -2) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = -4 + 6b - 2 = 6b - 6 = 6(b-1)$$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = |b-1|$$

$$\text{Mà } V_{ABCD} = 2 \Leftrightarrow |b-1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D(0; 3; -1) \\ D(0; -1; -1) \end{cases}. \text{ Chọn đáp án } D(0; 3; -1).$$

Câu 65. Chọn D.

Do tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA , OB , OC đôi một vuông góc nên nếu H là trực tâm của tam giác ABC dễ dàng chứng minh được $OH \perp (ABC)$ hay $OH \perp (P)$.

Vậy mặt phẳng (P) đi qua điểm $H(1; 2; 3)$ và có VTPT $\overrightarrow{OH}(1; 2; 3)$ nên phương trình (P) là $(x-1) + 2(y-2) + 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 3z - 14 = 0$.

Câu 66. Chọn A.

Ta có tam giác OAM luôn vuông tại O . Gọi I là trung điểm của OA (Điểm I cố định).

Ta có tam giác ADO vuông tại D có ID là đường trung tuyến nên $ID = \frac{1}{2}OA = 2$ (1)

Ta có IE là đường trung bình của tam giác OAM nên IE song song với AM mà $OD \perp AM \Rightarrow OD \perp IE$ Mặt khác tam giác EOD cân tại E . Từ đó suy ra IE là đường trung trực của OD

$$\text{Nên } \widehat{DOE} = \widehat{ODE}; \widehat{IOD} = \widehat{IDO} \Rightarrow \widehat{IDE} = \widehat{IOE} = 90^\circ \Rightarrow ID \perp DE \quad (2)$$

Vậy DE luôn tiếp xúc với mặt cầu tâm I bán kính $R = \frac{OA}{2} = 2$

Câu 67. Chọn A.

Ta có tam giác OAM luôn vuông tại O .

Gọi I là trung điểm của OA (Điểm I cố định)

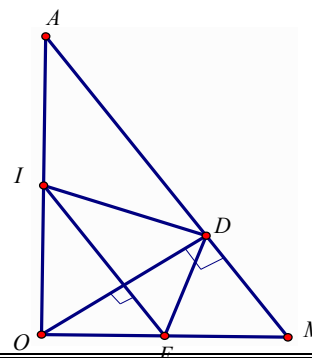
Ta có tam giác ADO vuông tại D có ID là

đường trung tuyến nên $ID = \frac{1}{2}OA = 2$ (1)

Ta có IE là đường trung bình của tam giác OAM

nên IE song song với AM mà $OD \perp AM \Rightarrow OD \perp IE$

Mặt khác tam giác EOD cân tại E . Từ đó suy ra



IE là đường trung trực của OD

Nên $\widehat{DOE} = \widehat{ODE}$; $\widehat{IOD} = \widehat{IDO} \Rightarrow \widehat{IDE} = \widehat{IOE} = 90^\circ \Rightarrow ID \perp DE$ (2)

Vậy DE luôn tiếp xúc với mặt cầu tâm I bán kính $R = \frac{OA}{2} = 2$

Câu 68. Chọn D.

Mặt phẳng (P) qua A có dạng $a(x-0) + b(y-8) + c(z-2) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz - 8b - 2c = 0$.

Điều kiện tiếp xúc:

$$d(I; (P)) = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|5a - 3b + 7c - 8b - 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|5a - 11b + 5c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 6\sqrt{2}. (*)$$

$$\begin{aligned} \text{Mà } d(B; (P)) &= \frac{|9a - 7b + 23c - 8b - 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|9a - 15b + 21c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|5a - 11b + 5c + 4(a - b + 4c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \leq \\ &\leq \frac{|5a - 11b + 5c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + 4 \frac{|a - b + 4c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \leq 6\sqrt{2} + 4 \frac{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 18\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{1} = \frac{b}{-1} = \frac{c}{4}$. Chọn $a = 1; b = -1; c = 4$ thỏa mãn (*).

Khi đó $(P): x - y + 4z = 0$. Suy ra $m = -1; n = 4$. Suy ra: $m.n = -4$.

Câu 69. Chọn D.

Đường thẳng d có VTCP là $\vec{u}_1 = (3; 1; 2)$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3; 0; -1)$ và có VTCP là $\vec{u} = (1; 2; 3)$.

Do $\Delta \subset (P)$ nên $M \in (P)$. Giả sử VTPT của (P) là $\vec{n} = (A; B; C), (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$.

Phương trình (P) có dạng $A(x-3) + B(y) + C(z+1) = 0$.

Do $\Delta \subset (P)$ nên $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow A + 2B + 3C = 0 \Leftrightarrow A = -2B - 3C$.

Gọi α là góc giữa d và (P) . Ta có

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|3A + B + 2C|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|3(-2B - 3C) + B + 2C|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{(-2B - 3C)^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{|-5B - 7C|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{5B^2 + 12BC + 10C^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}} \sqrt{\frac{(5B + 7C)^2}{5B^2 + 12BC + 10C^2}}. \end{aligned}$$

$$\text{TH1: Với } C = 0 \text{ thì } \sin \alpha = \sqrt{\frac{5}{14}} = \frac{\sqrt{70}}{14}.$$

$$\text{TH2: Với } C \neq 0 \text{ đặt } t = \frac{B}{C} \text{ ta có } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{14}} \sqrt{\frac{(5t + 7)^2}{5t^2 + 12t + 10}}.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{(5t+7)^2}{5t^2+12t+10}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = \frac{-50t^2+10t+112}{(5t^2+12t+10)^2}$.

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -50t^2+10t+112 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{8}{5} \Rightarrow f\left(\frac{8}{5}\right) = \frac{75}{14} \\ t = -\frac{7}{5} \Rightarrow f\left(-\frac{7}{5}\right) = 0 \end{cases}.$$

Và $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(t) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(5t+7)^2}{5t^2+12t+10} = 5$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		$-\frac{7}{5}$		$\frac{8}{5}$		$+\infty$
$f'(t)$		-	0	+	0	-	
$f(t)$	5				$\frac{75}{14}$		5

Từ đó ta có $\text{Max} f(t) = \frac{75}{14}$ khi $t = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{B}{C} = \frac{8}{5}$. Khi đó $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \sqrt{f\left(\frac{8}{5}\right)} = \frac{\sqrt{75}}{14}$.

So sánh TH1 và TH2 ta có $\sin \alpha$ lớn nhất là $\sin \alpha = \frac{\sqrt{75}}{14}$ khi $\frac{B}{C} = \frac{8}{5}$.

Chọn $B = -8 \Rightarrow C = -5 \Rightarrow A = 31$.

Phương trình (P) là $31(x-3) - 8y - 5(z+1) = 0 \Leftrightarrow 31x - 8y - 5z - 98 = 0$.

Câu 70. Chọn C.

Mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = 3$.

Gọi d là đường thẳng đi qua $I(1;2;3)$ và vuông góc (P)

Suy ra phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

Gọi A, B lần lượt là giao của d và (S), khi đó tọa độ A, B ứng với t là nghiệm của

$$\text{phương trình } (1+2t-1)^2 + (2-2t-2)^2 + (3+t-3)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

Với $t = 1 \Rightarrow A(3;0;4) \Rightarrow d(A;(P)) = \frac{13}{3}$.

Với $t = -1 \Rightarrow B(-1;4;2) \Rightarrow d(B;(P)) = \frac{5}{3}$.

Với mọi điểm $M(a;b;c)$ trên (S) ta luôn có $d(B;(P)) \leq d(M;(P)) \leq d(A;(P))$.

Vậy khoảng cách từ M đến (P) là lớn nhất bằng $\frac{13}{3}$ khi $M(3;0;4)$

Do đó $a+b+c=7$.

Câu 71. Chọn A.

Đường thẳng d đi qua điểm $C(1;0;-3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;2;-1)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$, bán kính $R=3\sqrt{2}$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d .

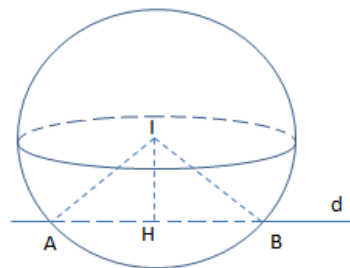
Khi đó: $IH = \frac{|\overrightarrow{IC}, \vec{u}|}{|\vec{u}|}$, với $\overrightarrow{IC} = (0;-2;-2)$;

$$2x + y - 3z - 4 = 0$$

$$\text{Vậy } IH = \frac{\sqrt{6^2 + 2^2 + 2^2}}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{\sqrt{66}}{3}$$

$$\text{Suy ra } HB = \sqrt{18 - \frac{22}{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Vậy, } S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IH \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{66}}{3} \cdot \frac{8\sqrt{6}}{3} = \frac{8\sqrt{11}}{3}.$$



Câu 72. Chọn A.

Ta chọn hệ trục tọa độ sao cho các đỉnh của hình lập phương có tọa độ như sau:

$$A(0;0;0) \quad B(2;0;0) \quad C(2;2;0) \quad D(0;2;0)$$

$$A'(0;0;2) \quad B'(2;0;2) \quad C'(2;2;2) \quad D'(0;2;2)$$

$$\overrightarrow{AB'} = (2;0;2), \quad \overrightarrow{AD'} = (0;2;2),$$

$$\overrightarrow{BD} = (-2;2;0), \quad \overrightarrow{BC'} = (0;2;2)$$

* Mặt phẳng $(AB'D')$ qua $A(0;0;0)$ và nhận vectơ

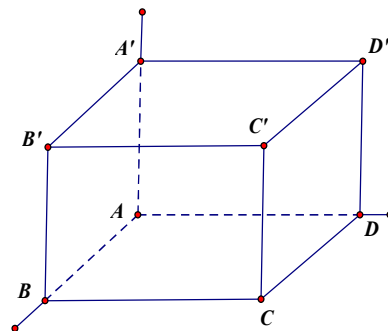
$$\vec{n} = \frac{1}{4} [\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AD'}] = (-1;-1;1) \text{ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình } (AB'D') \text{ là:}$$

$$x + y - z = 0.$$

* Mặt phẳng $(BC'D)$ qua $B(2;0;0)$ và nhận vectơ $\vec{m} = \frac{1}{4} [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC'}] = (1;1;-1)$ làm vectơ

pháp tuyến.

Phương trình $(BC'D)$ là: $x + y - z - 2 = 0$.



Suy ra hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$ song song với nhau nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng chính là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BC'D)$:

$$d(A, (BC'D)) = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Cách khác: Thấy khoảng cách cần tìm $d((AB'D'), (BC'D)) = \frac{1}{3} AC' = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$

Câu 73. Chọn A.

Vì $D \in (Oyz) \Rightarrow D(0; b; c)$, do cao độ âm nên $c < 0$.

Khoảng cách từ $D(0; b; c)$ đến mặt phẳng $(Oxy): z = 0$ bằng 1

$$\Leftrightarrow \frac{|c|}{1} = 1 \Rightarrow c = -1 \text{ (do } c < 0 \text{)}.$$

Suy ra tọa độ $D(0; b; -1)$. Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (1; -1; -2), \overrightarrow{AC} = (-4; 2; 2); \overrightarrow{AD} = (-2; b; 1)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2; 6; -2)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = -4 + 6b - 2 = 6b - 6 = 6(b - 1)$$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD}| = |b - 1|$$

Mà $V_{ABCD} = 2 \Leftrightarrow |b - 1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D(0; 3; -1) \\ D(0; -1; -1) \end{cases}$. Chọn đáp án $D(0; 3; -1)$.

Câu 74. Chọn D.

Gọi $I(a; b; c)$, r lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu. Do mặt cầu tiếp xúc với (P) nên ta có

$$r = d(I, (P)) = \frac{|2ma + (m^2 + 1)b + (m^2 - 1)c - 10|}{(m^2 + 1)\sqrt{2}} = \frac{|(b - c)m^2 + 2ma + b - c - 10|}{(m^2 + 1)\sqrt{2}}$$

$$|(b + c)m^2 + 2ma + b - c - 10| = r(m^2 + 1)\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} (b + c - r\sqrt{2})m^2 + 2ma + b - c - r\sqrt{2} - 10 = 0 & (1) \\ (b + c + r\sqrt{2})m^2 + 2ma + b - c + r\sqrt{2} - 10 = 0 & (2) \end{cases}$$

TH1: $(b + c - r\sqrt{2})m^2 + 2ma + b - c - r\sqrt{2} - 10 = 0 \quad (1)$

Do m thay đổi vẫn có mặt cầu cố định tiếp xúc với (P) nên yêu cầu bài toán trở thành tìm điều kiện a, b, c sao cho (1) không phụ thuộc vào m . Do đó (1) luôn đúng với mọi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b + c - r\sqrt{2} = 0 \\ a = 0 \\ b - c - r\sqrt{2} - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = r\sqrt{2} + 5 = 0 \\ a = 0 \\ c = -5 \end{cases} \quad \text{Suy ra } I(0; 5 + r\sqrt{2}; -5) \Rightarrow (S): x^2 + (y - 5 - r\sqrt{2})^2 + (z + 5)^2 = r^2.$$

$$\text{Lại có } A \in (S) \text{ nên suy ra: } 4 + (-11 - 5 - r\sqrt{2})^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 - 12\sqrt{2}r + 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2\sqrt{2} \\ r = 10\sqrt{2} \end{cases}$$

TH2: $(b + c + r\sqrt{2})m^2 + 2ma + b - c + r\sqrt{2} - 10 = 0$ làm tương tự TH1 (trường hợp này không thỏa đề bài)

Tóm lại: Khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A và có tổng bán kính là: $12\sqrt{2}$ suy ra chọn D

Câu 75. Chọn B.

Ta có phương trình mặt phẳng qua A, B, C là: $(ABC): \frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 2x + 3y + z - 6 = 0$.

Để thấy $D \in (ABC)$. Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên d .

Suy ra $d(A, d) + d(B, d) + d(C, d) = AA' + BB' + CC' \leq AD + BD + CD$. Dấu bằng xảy ra khi $A' \equiv B' \equiv C' \equiv D$. Hay tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến d lớn nhất khi d là

$$\text{đường thẳng qua } D \text{ và vuông góc với mặt phẳng } (ABC) \Rightarrow d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 3t; N \in d \\ z = 1 + t \end{cases} \text{ suy ra}$$

chọn B

Câu 76. Chọn A.

Gọi $S(a; b; c) \in (P) \Rightarrow a + b + c + 5 = 0(1)$.

Ta có: $AS = \sqrt{(a-5)^2 + (b-5)^2 + c^2}$,

$BS = \sqrt{(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2}, CS = \sqrt{(a-3)^2 + (b-5)^2 + (c+1)^2}$

$$\begin{aligned} \text{Do } SA = SB = SC &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + (b-5)^2 + (c+1)^2} \\ \sqrt{(a-5)^2 + (b-5)^2 + c^2} = \sqrt{(a-3)^2 + (b-5)^2 + (c+1)^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 6b - 8c - 21 = 0 \\ 4a + 2c - 15 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} 4a + 6b - 8c - 21 = 0 \\ 4a + 2c - 15 = 0 \\ a + b + c + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -\frac{23}{2} \\ c = -\frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow S = \left(6; -\frac{23}{2}; -\frac{9}{2} \right).$$

Lại có: $\overrightarrow{AB}(-4; -3; 3), \overrightarrow{AC}(-2; 0; -1)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (3; -10; -6); \overrightarrow{AS} = \left(1; -\frac{23}{2}; -\frac{9}{2}\right) \Rightarrow \left| (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{AS} \right| = 145 \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{145}{6}$$

Câu 77. Chọn D.

Cách 1 : Dựng CG vuông góc với (ABC) , Qua E dựng mặt phẳng vuông góc với SB , mặt phẳng này cắt CG tại F. Suy ra F là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABD. Đặt $SF = R$

Xét hình chữ nhật : $FGSH \Rightarrow FC = SH - FG = SH - \sqrt{R^2 - CH^2} \quad (1)$

Lại có : $FC = \sqrt{R^2 - CB^2} \quad (2)$. Từ (1) và (2) suy ra $SH - \sqrt{R^2 - CH^2} = \sqrt{R^2 - CB^2}$

$$6 - \sqrt{R^2 - 12} = \sqrt{R^2 - 36} \Rightarrow 5 - \sqrt{R^2 - 12} = 0 \Rightarrow R = \sqrt{37} \text{ (cm)} \text{ Suy ra chọn D}$$

Cách 2 :

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Ta có : $C(0;0;0), A(-3\sqrt{3};-3;0), B(-3\sqrt{3};3;0), S(-2\sqrt{3};0;6)$

$$F \in CG \Rightarrow F(0;0;t) \Rightarrow FA = FS \Leftrightarrow \sqrt{36+t^2} = \sqrt{12+(t-6)^2}$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow SC = \sqrt{37} \text{ (cm)} \text{ suy ra chọn D}$$

