

ĐỀ CHÍNH THỨC

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ HỌC SINH (7.0 điểm)

Câu 1. (3.0 điểm)

Cho tam giác ABC đều cạnh a .

- 1) Tính độ dài các vector: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
- 2) Xác định điểm M sao cho: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$.

Câu 2. (3.0 điểm)

Cho tam giác ABC , gọi M là trung điểm của BC và I là trung điểm của AM .

- 1) Chứng minh rằng: $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.
- 2) Với điểm O bất kỳ. Chứng minh: $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OI}$.

Câu 3. (1.0 điểm)

Cho tam giác ABC . Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$. Hãy phân tích $\overrightarrow{AI}$ theo hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

II. PHẦN RIÊNG (3.0 điểm)

*Học sinh học chương trình nào thì chỉ được làm phần dành riêng cho chương trình đó
(Phần 1 hoặc phần 2)*

Phần 1. Dành cho chương trình Chuẩn.

Câu 4.a. (3.0 điểm)

- 1) Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{EF}$.
- 2) Tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi M, N là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh rằng: M, N, G thẳng hàng.

Phần 2. Dành cho chương trình Nâng cao.

Câu 4.b. (3.0 điểm)

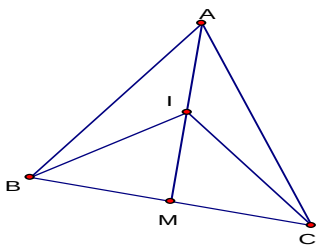
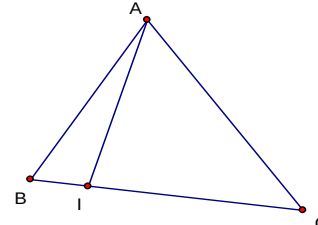
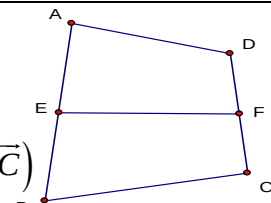
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(2; 1), B(1; 1), C(3; 4)$.

- 1) Chứng minh A, B, C không thẳng hàng. Xác định điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
- 2) Xác định điểm N trên trục Oy sao cho $|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + 4\overrightarrow{NC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

.....**HẾT**.....

Họ và tên học sinh:.....SBD:.....

ĐÁP ÁN

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1 (3đ)	1) (2.0đ)	$\left \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} \right = \left \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \right $ $= \left \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} \right = \left \vec{0} \right = 0$ $\left \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \right = \left \overrightarrow{CB} \right = CB = a$	0.5 0.5 0.5+0.5
	2) (1.0đ)	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$ M là đỉnh của hình bình hành ABMC.	1.0
2 (3đ)	1) (1.5đ)	$2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IM}$ $= 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IM}) = 2\vec{0} = \vec{0}$ 	0.5 0.5+0.5
	2) (1.5đ)	$2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OI}) = \vec{0}$ $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 4\overrightarrow{OI} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OI}$	0.75 0.5 0.25
3 (1đ)		$2CI = 3BI \Leftrightarrow BI = \frac{2}{3}BC$ Ta có: $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$ 	0.25 0.25 0.25 0.25
4a (3đ)	1) (1.5đ)	$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD}$ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC}$ $\Rightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BE}) + 2\overrightarrow{EF} + (\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{FC})$ $= \vec{0} + 2\overrightarrow{EF} + \vec{0} = 2\overrightarrow{EF}$ 	0.5 0.5 0.25 0.25

	2) (1.5đ)	$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM} - \overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GA}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{GM} = 2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}$ $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{GN} - \overrightarrow{GA} = \frac{2}{5}\overrightarrow{GC} - \frac{2}{5}\overrightarrow{GA}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{GN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{GC} + \frac{3}{5}\overrightarrow{GA}$ $\Leftrightarrow 5\overrightarrow{GN} = 2\overrightarrow{GC} + 3\overrightarrow{GA}$ $\overrightarrow{GM} + 5\overrightarrow{GN} = 2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GC} + 3\overrightarrow{GA}$ $= 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{GM} = -5\overrightarrow{GN}.$ Vậy G, M, N thẳng hàng.	0.5 0.5 0.25 0.25
4b (3đ)	1) (1.5đ)	$\overrightarrow{AB} = (-1; 0), \overrightarrow{AC} = (1; 3)$ Ta có $\frac{-1}{1} \neq \frac{0}{3}$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Vậy A, B, C không thẳng hàng. Giả sử D(x; y). Vì ABCD là hình bình hành nên ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $\Leftrightarrow (-1; 0) = (3 - x; 4 - y) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x = -1 \\ 4 - y = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}. \text{ Vậy } D(4; 4).$	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25
	2) (1.5đ)	$N \in Oy \Rightarrow N(0; y_N)$ $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + 4\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + 3\overrightarrow{NC}$ $= 3\overrightarrow{NG} + 3\overrightarrow{NC} \text{ (với G là trọng tâm } \triangle ABC)$ $= 3(\overrightarrow{NG} + \overrightarrow{NC})$ $= 6\overrightarrow{NI} \text{ (với I là trung điểm của GC).}$ Ta có $G(2; 2), I\left(\frac{5}{2}; 3\right)$. $ \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + 4\overrightarrow{NC} = 6\overrightarrow{NI} = 6 \overrightarrow{NI} = NI.$ $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + 4\overrightarrow{NC}$ nhỏ nhất khi NI nhỏ nhất $\Leftrightarrow N$ là hình chiếu của I trên Oy. $\Leftrightarrow N(0; 3).$	0.25 0.5 0.25 0.25 0.25đ