



Thời gian làm bài 90 phút không kể thời gian phát đề.

Thành viên tham gia. Nguyễn Thế Bình, Tô Huỳnh Cường, Lê Hoàng An, Nguyễn Minh Tuấn.

Nội dung. Đề thi gồm 50 câu với cấu trúc đề khó hơn đề minh họa 25%, hầu hết được phát triển và sáng tác bởi các thành viên của nhóm toanmath, các câu hỏi hướng tới các tính chất và biến đổi cơ bản không quá nặng tính toán phức tạp và đòi hỏi sự nhanh nhạy để giải quyết điểm mấu chốt của bài toán. Mọi ý kiến đóng góp vui lòng gửi về fanpage, trân trọng cảm ơn.

Đề bài

Câu 1. Tìm số hạng tổng quát trong khai triển của $(1 - 3x)^{2020}$?

A. $C_{2020}^k (-1)^{2020-k} \cdot 3^k \cdot x^k$.

B. $C_{2020}^k (-1)^k x^{2020-k} \cdot 3^k$.

C. $-C_{2020}^k x^k \cdot 3^k$.

D. $C_{2020}^k x^k \cdot 3^k$.

Câu 2. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$, tìm giá trị của u_5 ?

A. 162.

B. 54.

C. 18.

D. 486.

Câu 3. Thể tích của hình trụ có chiều cao $h = 3$ và diện tích đáy $S = 4$ bằng bao nhiêu?

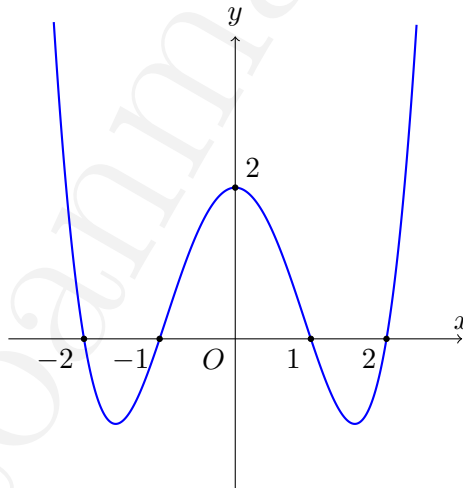
A. 12.

B. 4.

C. 24.

D. 16.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; -2)$.

B. $(-2; -1)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $(-1; 1)$.

Câu 5. Cho khối tứ diện đều có các cạnh bằng a . Thể tích của khối tứ diện đã cho bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$.

B. $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$.

C. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$.

D. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$.

Câu 6. Nghiệm của phương trình $\log_3(x + 1) + 1 = \log_3(4x + 1)$ là?

A. $x = 3$.

B. $x = -3$.

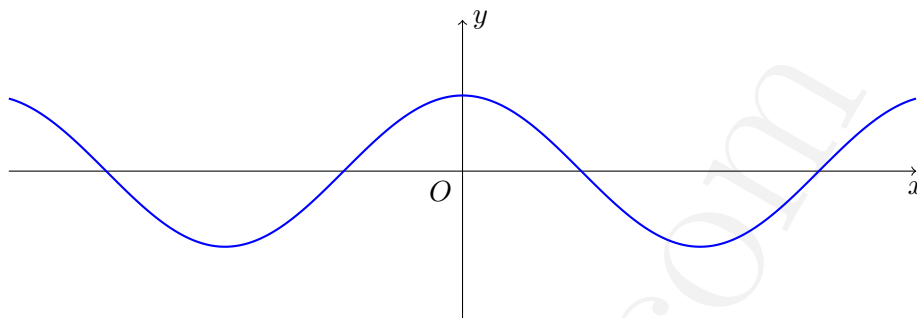
C. $x = 4$.

D. $x = 2$.

Câu 7. Nếu $\int_1^2 f(x) dx = 2 \int_2^3 f(x) dx = 3 \int_3^4 f(x) dx = 6$ thì $\int_1^4 f(x) dx$ bằng bao nhiêu?
 A. 11. B. 18. C. 6. D. 12.

Câu 8. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$, hàm số này có bao nhiêu điểm cực trị?
 A. 0. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 9. Đồ thị dưới là đồ thị của hàm số nào



A. $y = \sin x$. B. $y = \cos x$. C. $y = x^2$. D. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Câu 10. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_{\sqrt{e}} a^2$ bằng

A. $4 \ln a$. B. $\ln a$. C. $2 \ln a$. D. $\frac{1}{4} \ln a$.

Câu 11. Cho số phức $z = 3 + 4i$. Kết quả của phép toán $z \cdot \bar{z}$ là

A. 5. B. $9 + 16i$. C. 25. D. 9.

Câu 12. Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ với $x < 0$ là

A. $\ln x + C$. B. $\ln(-|x|) + C$. C. $\ln(-x) + C$. D. 0.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1; 1; 2)$. Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A lên trục Ox , A'' là hình chiếu của A' lên mặt phẳng Oxy , tọa độ điểm A'' là

A. $(1; 0; 0)$. B. $(0; 0; 0)$. C. $(0; 1; 0)$. D. $(0; 0; 2)$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x+3}{2} = \frac{1-y}{-3} = \frac{z+7}{3}$, một vector chỉ phương của d là

A. $(2; -3; 3)$. B. $(2; 3; 3)$. C. $(-3; 1; -7)$. D. $(-3; -1; 7)$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d đi qua điểm $A(1; 1; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P): 2x + 3z - y + 5 = 0$ có phương trình tham số là

A. $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{-1}$. B. $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

C. $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{3}$. D. $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S) : 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x - 12y - 36z - 3 = 0$. Tọa độ tâm mặt cầu (S) là

- A. $(3; 6; 18)$. B. $(-3; -6; -18)$. C. $(1; 2; 6)$. D. $(-1; -2; -6)$.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAD vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. $AB = a, SA = 2SD$. Mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Thể tích hình chóp $S.ABCD$ là?

- A. $\frac{4a^2}{5}$. B. $\frac{5a^3}{2}$. C. $3a^2$. D. $4a^3$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		4		6		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$				18		$-\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng

- A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 9$. B. Hàm số có giá trị cực đại là 6.
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 9$. D. Hàm số có giá trị cực tiểu là 9.

Câu 19. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_3(12-3x) \geq 0$ là?

- A. $\left(1; \frac{13}{4}\right]$. B. $(4; +\infty)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(1; 4)$.

Câu 20. Hàm số $y = (x^3 - 3x)^e$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 5. C. 4. D. 3.

Câu 21. Bất phương trình $\log_{16}(x-3x^2) > \log_4(9+x)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên ?

- A. 1. B. 0. C. 4. D. 2.

Câu 22. Cho hình trụ có diện tích toàn phần là 4π và có thiết diện cắt bởi mặt phẳng đi qua trục là hình vuông. Tính thể tích khối trụ?

- A. $\frac{4\pi\sqrt{6}}{9}$. B. $2\pi\sqrt{3}$. C. $\frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{4\pi\sqrt{6}}{3}$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x-5)(3x+2)$. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ bằng?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 24. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \sin x$ là?

- A. $\frac{x^2}{3} + 2\cos x + C$. B. $\frac{x^2}{2} - \cos x + 2C$. C. $x^2 - \cos x + C$. D. $x^2 + \cos x + 3C$.

Câu 25. Anh Bình có niềm đam mê coi hài từ nhỏ, một ngày nọ anh gửi 10 triệu vào ngân hàng với lãi suất 0.8% mỗi tháng. Từ đó cứ đầu tháng anh Bình lại gửi thêm 10 triệu nữa. Cuối quý thứ 12

anh Bình muốn tổ chức một liveshow hài kịch cho toàn bộ thành viên toanmath, vì vậy anh muốn rút tiền từ tài khoản. Hỏi khi đó anh Bình có bao nhiêu tiền trong ngân hàng ?

- A. 419 triệu. B. 256 triệu. C. 500 triệu. D. 1 tỷ.

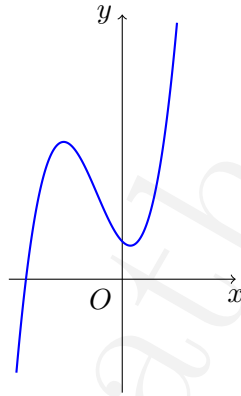
Câu 26. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = 2a, AC' = \sqrt{6}a$. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng?

- A. $3a^3$. B. $2a^2$. C. $3a^4$. D. $2a^3$.

Câu 27. Gọi a là tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của hàm số $y = \frac{5x^2 + 4x - 9}{x^2 + x - 2}$, lúc này điểm đối xứng của đồ thị $y = \frac{4x - 1}{mx - 2}$ có tọa độ (b, a) . Xác định giá trị của b ?

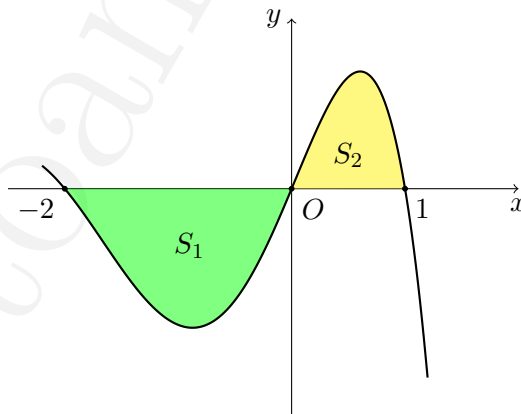
- A. -2. B. 2. C. -1. D. 1.

Câu 28. Cho hàm số $y = ax^3 - bx - cx^2 + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



- A. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$. B. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.
C. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$. D. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị $f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới.



Biết diện tích 2 hình S_1, S_2 lần lượt là 3, 2 và $f(1) = 5$. Tính giá trị $S = \int_0^1 e^x f(x) dx + \int_0^1 e^x f'(x) dx$?

- A. $S = e - 3$. B. $S = 2e - 2$. C. $S = 4e - 3$. D. $S = 5e - 3$.

Câu 30. Cho 2 số phức $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 - 2i$, trên mặt phẳng tọa độ Descartes, điểm biểu diễn số phức $w = z_1 z_2 (z_1 + z_2)$ là điểm nào dưới đây?

- A. $M(12; 4)$. B. $N(12; -4)$. C. $P(-12; 4)$. D. $Q(-12; -4)$.

Câu 31. Cho số phức $z_1 = 3 + i$ và $z_2 = -1 - 2i$, tính module của số phức $w = z_1 + z_2$?

- A. $|w| = \sqrt{5}$. B. $|w| = \sqrt{7}$. C. $|w| = \sqrt{3}$. D. $|w| = 5$.

Câu 32. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a , khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và CD là?

- A. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. B. $\frac{a}{4}$. C. $\frac{a}{3}$. D. a .

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 mặt cầu $(C_1) : x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 8z + 4 = 0$ và $(C_2) : (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 8$. Mặt phẳng chứa giao tuyến của (C_1) và (C_2) có phương trình là?

- A. $2y + 4z + 6 = 0$. B. $2x + 4y + 6 = 0$.
C. $2x + 4z + 6 = 0$. D. Không xác định được.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 2; 0)$, $B(2; 0; 2)$, $C(2; 1; 3)$, $D(1; 1; 3)$. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABD) có phương trình là

- A. $\begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = -2 - 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -4 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$.

Câu 35. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d) : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P) : x + y - z + 1 = 0$. Tính khoảng cách từ điểm $A\left(-\frac{3}{2}; 0; -\frac{3}{2}\right)$ đến đường thẳng (d') trong đó (d') là hình chiếu vuông góc của (d) trên mặt phẳng (P) .

- A. 2. B. $\frac{9}{\sqrt{122}}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. Khác.

Câu 36. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 27 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng?

- A. $\frac{13}{27}$. B. $\frac{14}{27}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{365}{729}$.

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 1; -2)$; $B(-1; 3; 2)$; $C(-6; 3; 6)$. Gọi điểm D_1 là điểm mà tại đó tứ giác $ABCD_1$ là hình thang cân với đáy là AB và CD_1 và D_2 là điểm mà tại đó tứ giác $ABCD_2$ là hình bình hành với ba điểm C, D_1, D_2 thẳng hàng. Khi này tính tích vô hướng của $\overrightarrow{OD_1} \cdot \overrightarrow{OD_2}$ bằng?

- A. -27. B. 27. C. -3. D. 3.

Câu 38. Cho $f(x)$ và $g(x)$ thỏa mãn $\frac{2}{(x+1)^2} f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{4}{(x+2)^2} g\left(\frac{x-2}{x+2}\right) + \frac{x-3}{x+3}$. Biết rằng

$$\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{3}} g(x) dx = 1; \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{9}} g(x) dx = 2. \text{ Tính } P = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{5}} f(x) dx + 2 \int_{\frac{5}{7}}^{\frac{3}{4}} f(x) dx$$

- A. $8 + 6 \ln \frac{7}{6} - 12 \ln \frac{10}{9}$. B. $8 + 6 \ln \frac{7}{6} + 12 \ln \frac{10}{9}$.
C. $8 - 6 \ln \frac{7}{6} + 12 \ln \frac{10}{9}$. D. $8 - 6 \ln \frac{7}{6} - 12 \ln \frac{10}{9}$.

Câu 39. Khi cắt khối nón có chiều cao $4m$ và đường kính đáy $6m$ bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón, ta thu được thiết diện có diện tích lớn nhất gần bằng với giá trị nào sau đây?

A. 11.

B. 12.

C. 13.

D. 24.

Câu 40. Tìm m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1?

A. $m = \frac{5}{2}$.

B. $m = \frac{2}{7}$.

C. $m = \frac{9}{4}$.

D. $m = 2$.

Câu 41. Cho x, y là 2 số thực thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} \log_2(x^2y^4 + 2\log_3x + 1) = 3 \\ \log_2(x^2y^4 + 4\log_3y + 3) = 4 \end{cases}$$

Biết rằng $x^3 + y + 1 = \frac{m}{n}$, với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản và $m, n > 0$. Tính $S = m + n$?

A. 135.

B. 136.

C. 137.

D. 138.

Câu 42. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x(2020 + \sqrt{2021 - x^2})$ trên tập xác định của nó. Tính $\log_2 M - m$ (làm tròn đến số hàng chục)?

A. 16.

B. 27.

C. 26.

D. 28.

Câu 43. Cho hàm số $y = |4x^4 - 4x^3 + m|$, có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn điều kiện $\max_{x \in [2;4]} y = 2020$?

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Câu 44. Biết $I = \int_0^1 x \ln(x^3 + 1) dx = \frac{\pi\sqrt{a}}{c} - \frac{b}{d}$ với a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $\frac{b}{d}$ tối giản đồng thời $c < 7$. Tính giá trị của $P = a^2 - b^2 + c^2 - d^2$?

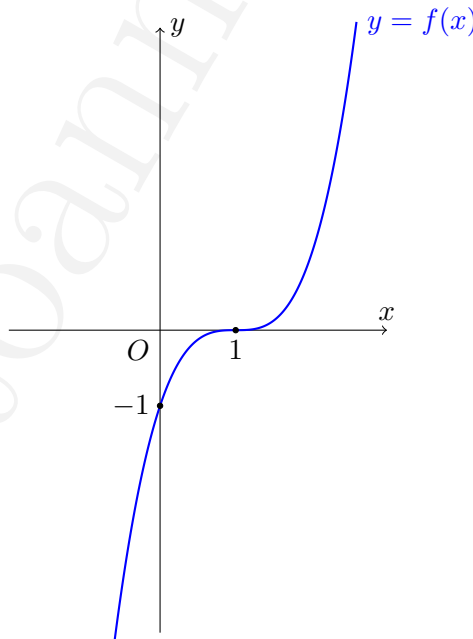
A. $P = 10$.

B. $P = 11$.

C. $P = 9$.

D. $P = 8$.

Câu 45. Cho hàm đa thức bậc ba $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng $f'(x) = 0$ có nghiệm. Tìm số **tiệm cận đứng** của hàm số $g(x) = \frac{(x-1)^2(x^2-3)}{f^3(x) - 3f(x)}$



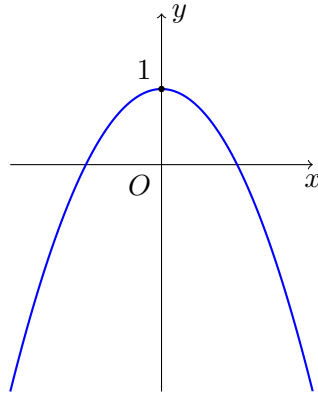
A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ, số nghiệm của phương trình $f(\tan x) = 1$ trên từng khoảng xác định $(-2\pi; 4\pi)$ là



A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Câu 47. Với $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, ta đặt $f(x) = \log\left(\tan x + \frac{1}{\cos x}\right)$ và $g(x) = \frac{10^{f(x)} - 10^{-f(x)}}{2}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $g(g^2(x + \alpha) + g^2(x - \alpha)) \geq g(m)$ nghiệm đúng với mọi x , với α là hằng số?

A. $m \leq 2 \tan^2 \alpha$.

B. $m \geq 2 \tan^2 \alpha$.

C. $m \leq \tan^2 \alpha$.

D. $m \geq \tan^2 \alpha$.

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$4 \cos x f(x) + 4f(|x|) = (\cos x + 1)(x^2 + \sin^2 x \cos x)$$

Biết rằng tích phân $\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (f(x) + f'(x))(x(f(x) + f'(x)) + f(x)) dx = \frac{a\pi}{2} \left(\frac{9\pi^2}{b} - \frac{1}{c\sqrt{d}} \right)^2$, với a, b, c, d

là các số nguyên dương, c, d là các số nguyên tố. Tính giá trị của biểu thức $S = a + b + c + d$?

A. 22.

B. 23.

C. 24.

D. 25.

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A với $AB = 1$; tam giác SCA vuông tại C , góc $\widehat{SBA} = \frac{\pi}{3}$ và góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng $\frac{\pi}{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ gần với giá trị nào sau đây nhất?

A. $V = \frac{1}{12}$.

B. $V = \frac{1}{9}$.

C. $V = \frac{1}{8}$.

D. $V = \frac{1}{6}$.

Câu 50. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 4x^2 + m$, có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-5; 5]$ để phương trình $\frac{f(f(x)) - 2f(x)}{f^2(x) - 2f(x)} = 1$ có 9 nghiệm phân biệt?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Đáp án

1. A	2. A	3. A	4. C	5. A	6. D	7. A	8. A	9. B	10. A
11. C	12. C	13. A	14. B	15. D	16. C	17. B	18. D	19. A	20. A
21. B	22. A	23. C	24. B	25. A	26. D	27. D	28. D	29. D	30. B
31. A	32. A	33. C	34. A	35. B	36. A	37. A	38. C	39. C	40. C
41. B	42. A	43. B	44. A	45. D	46. B	47. A	48. B	49. A	50. B

Lời giải một số câu khó.



Trong đề có một số câu có chút lỗi về đáp án cũng như dữ kiện, ở trong file này sẽ có chỉnh sửa một số câu như thế.

Câu 29.

Lời giải.

Trước tiên biến đổi giả thiết, ta có

$$\int_0^1 e^x f(x) dx + \int_0^1 e^x f'(x) dx = \int_0^1 [e^x f(x)]' dx = e^x f(x) \Big|_0^1 = e \cdot f(1) - 1 \cdot f(0) \quad (1)$$

Diện tích 2 hình phẳng S_1, S_2 lần lượt là 3,2 nên ta suy ra

$$\int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = f(1) - f(0) \Rightarrow f(0) = 5 - 2 = 3$$

Thay vào (1) ta được $e \cdot f(1) - f(0) = 5e - 3$.

$$\text{Vậy } \int_0^1 e^x f(x) dx + \int_0^1 e^x f'(x) dx = 5e - 3.$$

□

Câu 35.

Lời giải.

Gọi mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P) là (Q) . Ta có $(d) : \begin{cases} \text{Vector chỉ phương } \vec{u}_d(3; 2; 1) \\ \text{Điểm đi qua } B(1; 2; 0) \end{cases}$.

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n}_P(1; 1; -2)$, suy ra mặt phẳng (Q) qua $B(1; 2; 0)$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{u}_d, \vec{n}_P] = (-5; 4; 1)$. Như vậy phương trình $(Q) : -5(x - 1) + 4(y - 2) + z = 0$

$$\Leftrightarrow -5x + 5 + 4y - 8 + z = 0 \Leftrightarrow -5x + 4y + z - 3 = 0$$

Tìm một điểm thuộc d' , bằng cách cho $y = 0$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -5x + z - 3 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right) \in (d')$$

Đường thẳng d' đi qua $C\left(-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$ và có vector chỉ phương

$$\vec{u}_{d'} = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] = (-5; -4; -9)$$

$$\text{Suy ra phương trình tham số của } d' \text{ là } d' : \begin{cases} x = -5t - \frac{1}{2} \\ y = -4t \\ z = \frac{1}{2} - 9t \end{cases}.$$

Ta có $C\left(-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right) \in d' \Rightarrow \overrightarrow{AC}(1; 0; 2)$. Vector chỉ phương của d' : $\vec{u}_{d'}(-5; -4; -9)$. Vậy

$$d(A; d') = \frac{|\overrightarrow{AC}, \vec{u}_{d'}|}{|\vec{u}_{d'}|} = \frac{\sqrt{8^2 + (-1)^2 + (-4)^2}}{\sqrt{(-5)^2 + (-4)^2 + (-9)^2}} = \frac{9}{\sqrt{122}}$$

Bài toán được giải quyết. □

Câu 37.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng d qua $C(-6; 3; 6)$ và song song với đường thẳng AB là

$$d : \frac{x+6}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-6}{2}$$

Vì C, D_1, D_2 thẳng hàng nên D_1, D_2 đều thuộc d , nên ta gọi $D_1(-6-25; 3+t; 6+2t)$.

Vì tứ giác $ABCD_1$ là hình thang cân nên ta có

$$|\overrightarrow{AD_1}| = |\overrightarrow{BC}| \Leftrightarrow t^2 + 8t + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -6 \end{cases}$$

- Với $t = -2 \Rightarrow D(-2; 1; 2)$ tứ giác là hình bình hành $\Rightarrow D_2(-2; 1; 2)$
- Với $t = -6 \Rightarrow D(6; -3; -6)$ thỏa mãn là hình thang cân $ABCD_1$.

Suy ra $D_1(6; -3; -6)$. Như vậy ta có

$$\overrightarrow{OD_1} \cdot \overrightarrow{OD_2} = (-2) \cdot 6 + 1 \cdot (-3) + (2) \cdot (-6) = -12 + (-3) + (-12) = -27$$

Bài toán được giải quyết. □

Câu 38.

Lời giải.

Lấy tích phân cận từ 4 tới 3 ta được

$$\int_3^4 f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \frac{2dx}{(x-1)^2} = \int_3^4 g\left(\frac{x-2}{x+2}\right) \cdot \frac{4dx}{(x+2)^2} + \int_3^4 \frac{x-3}{x+3} dx$$

Từ đây suy ra

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{5}} f(x) dx = \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{3}} g(x) dx + \int_3^4 \frac{x-3}{x+3} dx = 1 + \int_3^4 \frac{x-3}{x+3} dx \quad (1)$$

Tiếp tục lấy tích phân từ 6 tới 7 ta được

$$\int_6^7 f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot \frac{2dx}{(x-1)^2} = \int_6^7 g\left(\frac{x-2}{x+2}\right) \cdot \frac{4dx}{(x+2)^2} + \int_6^7 \frac{x-3}{x+3} dx$$

Từ đây suy ra

$$\int_{\frac{5}{7}}^{\frac{3}{4}} f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{9}} g(x) dx + \int_6^7 \frac{x-3}{x+3} dx = 2 + \int_6^7 \frac{x-3}{x+3} dx \quad (2)$$

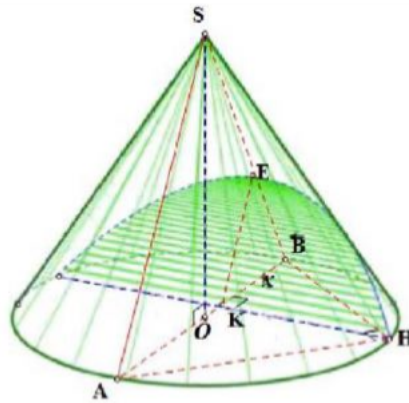
Từ (1) và (2) ta được

$$\begin{aligned} P &= 1 + \int_3^4 \frac{x-3}{x+3} dx + 2 \left(2 + \int_6^7 \frac{x-3}{x+3} dx \right) \\ &= 5 + (x - 6 \ln |x+3|) \Big|_3^4 + 2 (x - 6 \ln |x+3|) \Big|_6^7 \\ &= 8 - 6 \ln \frac{7}{6} - 12 \ln \frac{10}{9} \end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết. □

Câu 39.

Lời giải.



Xét dây cung bất kì chứa đoạn KH như hình vẽ, suy ra tồn tại đường kính $AB \perp KH$, trong tam giác SAB , $KE \parallel SA$, $E \in SB$, suy ra parabol nhận KE làm trục như hình vẽ chính là một thiết diện thỏa mãn yêu cầu bài toán ($\parallel SA$). Đặt $BK = x$ ($0 < x < 6$).

Trong tam giác ABH có

$$HK^2 = BK \cdot AK = x(b-x)$$

Trong tam giác SAB có

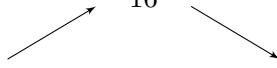
$$\frac{KE}{SA} = \frac{BK}{BA} \Leftrightarrow KE = \frac{BK}{BA} \cdot SA \Rightarrow KE = \frac{x}{6} \cdot 5$$

Thiết diện là một parabol có diện tích $S = \frac{4}{3} KH \cdot KE$, suy ra

$$S^2 = \frac{16}{9} KH^2 \cdot KE^2 = \frac{16}{9} x(6-x) \frac{25x^2}{36} = \frac{100}{81} (6x^3 - x^4) \Rightarrow S = \frac{10}{9} \sqrt{6x^3 - x^4}$$

Đặt $f(x) = 6x^3 - x^4$ với $0 < x < 6$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 18x^2 - 4x^3, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \frac{9}{2} \\ x = 6 \end{cases}.$$

x	0	$\frac{9}{2}$	6
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\frac{2187}{16}$ 		

Như vậy ta suy ra $\Rightarrow S = \frac{10}{9} \sqrt{\frac{2187}{16}} \approx 13m^2$. □

Câu 40.

Lời giải.

Ta có: $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$. Do hệ số $a > 0 \Rightarrow$ để hàm số nghịch biến trên đoạn $[x_1, x_2]$ có độ dài bằng 1 thì $x_2 - x_1 = 1$, từ đây suy ra $y' = 3x^2 + 6x + m$, hay y' có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 - x_1 = 1$. Điều này tương đương với $\Delta' = 9 - 3m > 0 \Rightarrow m < 3$. Ta có

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 = 1 &\Rightarrow (x_2 - x_1)^2 = 1 \Rightarrow x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2 = 1 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1 \\ &\Rightarrow 4 - \frac{4}{3}m = 1 \Rightarrow m = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết. □

Câu 41.

Lời giải.

Điều kiện. $x, y > 0, x^2y^4 + 2\log_3x + 1 > 0, x^2y^4 + 4\log_3y + 3 > 0$.

Biến đổi hệ phương trình ta được

$$\begin{cases} \log_2(x^2y^4 + 2\log_3x + 1) = 3 \\ \log_2(x^2y^4 + 4\log_3y + 3) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^4 + \log_3x^2 + 1 = 8 \\ x^2y^4 + \log_3y^4 + 3 = 16 \end{cases}$$

Cộng vế theo vế của hệ trên ta được $2x^2y^4 + \log_3(x^2y^4) = 20$ (*).

Đặt $t = x^2y^4, t > 0$, thì phương trình (*) trở thành $2t + \log_3t = 20$.

Xét hàm số $f(t) = 2t + \log_3t \Rightarrow f'(t) = 2 + \frac{1}{t \ln 3} > 0, \forall t > 0$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$, do đó phương trình $f(t) = 20$ có tối đa một nghiệm. Mặt khác $f(9) = 20$ do vậy $t = 9$ là nghiệm duy nhất của phương trình trên. Như vậy ta tìm được $x^2y^4 = 9$, thế lần lượt vào 2 phương trình đầu của hệ ta giải được $x = \frac{1}{3}, y = 3$, suy ra $x^3 + y + 1 = \frac{109}{27}$. □

Câu 42.

Lời giải.

Tập xác định. $2021 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 2021 \Rightarrow -\sqrt{2021} \leq x \leq \sqrt{2021}$.

Ta có

$$y' = 2020 + \sqrt{2021 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{2021 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{2020\sqrt{2021 - x^2} + 2021 - 2x^2}{\sqrt{2021 - x^2}} = 0$$

Đặt $t = \sqrt{2021 - x^2}, t \geq 0$, phương trình trở thành

$$2020t + 2021 + 2t^2 - 2.2021 = 0 \Rightarrow 2t^2 + 2020t - 2021 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{2022}{2}(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{2021 - x^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{505} \\ x = -2\sqrt{505} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(2\sqrt{505}) = 90832,65 \\ f(-2\sqrt{505}) = -90832,65 \\ f(\sqrt{2021}) = 90810,17 \\ f(-\sqrt{2021}) = -90810,17 \end{cases}$$

Như vậy ta được $\log_2 M - 3^m = 16,47$. □

Câu 43.

Lời giải.

Xét $u = 4x^4 - 4x^3 + m$ trên $[2; 4]$ có $u' = 16x^3 - 12x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ x = 0 \end{cases}$. Ta có

$$A = \max_{[2;4]} u = \max \left\{ u(2), u\left(\frac{3}{4}\right), u(0), u(4) \right\} = \max \left\{ m + 32, m - \frac{27}{64}, m, m + 768 \right\} = m + 768$$

$$a = \min_{[2;4]} u = \min \left\{ u(2), u\left(\frac{3}{4}\right), u(0), u(4) \right\} = \min \left\{ m + 32, m - \frac{27}{64}, m, m + 768 \right\} = m - \frac{27}{64}$$

Từ đây ta suy ra được

$$\max_{[2;4]} y = \max \left\{ |m + 768|; \left| m - \frac{27}{64} \right| \right\} = 2020$$

Như vậy ta giải được 4 giá trị của m để $\max_{[2;4]} y = 2020$. □

Câu 44.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x \ln(x^3 + 1) dx = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \frac{3x^2}{x^3 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{x[(x^3 + 1) - 1]}{x^3 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{3}{2} \int_0^1 x dx + \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{(x + x^2) - x^2}{x^3 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{3}{4} x^2 \Big|_0^1 + \frac{3}{2} \left(\int_0^1 \frac{x dx}{x^2 - x + 1} - \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^3 + 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{(2x - 1) + 1}{x^2 - x + 1} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(x^3 + 1)}{x^3 + 1} \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \ln |x^3 + 1| \Big|_0^1 + \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{d(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} + \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \ln |x^2 - x + 1| \Big|_0^1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \Big|_0^1 = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Như vậy ta tính được $P = 10$. □

Câu 45.

Lời giải.

Phương trình $f'(x)$ bằng 0 có nghiệm, nhưng dựa vào đồ thị của $f(x)$ thì ta thấy $f(x)$ không có cực trị mà xung quanh điểm 1, hàm không thay đổi đáng kể giá trị nên ta có thể đoán $f'(x) = 0$ có nghiệm

kép là 1, do đó $f'(x) = a(x-1)^2$.

$$\text{Do đó } f(x) = \int a(x-1)^2 dx = \frac{a}{3}(x-1)^3 + C. \text{ Mà } \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ a = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)^3$$

Rút gọn hàm $g(x)$ được

$$g(x) = \frac{(x-1)^2(x^2-3)}{f(x)(f^2(x)-3)} = \frac{x^2-3}{(x-1)[(x-1)^6-3]}$$

Như vậy $g(x)$ có 3 tiệm cận đứng là $x=1, x=1 \pm \sqrt[6]{3}$. □

Câu 46.

Lời giải.

Đặt $t = \tan x$, ta có $f(\tan x) = 1 \Leftrightarrow f(t) = 1$, dựa vào đồ thị của $f(x)$ thì đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm duy nhất $(0;1)$ nên

$$f(t) = 1 \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow \tan x = 0 \Leftrightarrow -2\pi < x = k\pi < 4\pi \Leftrightarrow -2 < k < 4$$

Như vậy có 5 giá trị nguyên k thỏa. □

Câu 47.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \log\left(\tan x + \frac{1}{\cos x}\right) = \log\left(\frac{\sin x + 1}{\cos x}\right)$, từ đây ta suy ra được

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{10^{f(x)} - 10^{-f(x)}}{2} = \frac{\frac{\sin x + 1}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x + 1}}{2} \\ &= \frac{\sin^2 x + 2 \sin x - \cos^2 x + 1}{2 \cos x (\sin x + 1)} = \frac{2 \sin^2 x + 2 \sin x}{2 \cos x (\sin x + 1)} \\ &= \frac{2 \sin x (\sin x + 1)}{2 \cos x (\sin x + 1)} = \tan x \end{aligned}$$

Mặt khác với $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ thì $g(x) = \tan x$ là hàm đồng biến, do vậy bất phương trình

$$\begin{aligned} g(g^2(x+\alpha) + g^2(x-\alpha)) &\geq g(m) \Leftrightarrow g^2(x+\alpha) + g^2(x-\alpha) \geq m \\ &\Leftrightarrow \tan^2(x+\alpha) + \tan^2(x-\alpha) \geq m \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} y &= [\tan(x+\alpha) + \tan(x-\alpha)]^2 - 2 \tan(x+\alpha) \tan(x-\alpha) \\ &\geq -2 \tan(x+\alpha) \tan(x-\alpha) = -2 \cdot \frac{\sin(x+\alpha) \sin(x-\alpha)}{\cos(x+\alpha) \cos(x-\alpha)} \\ &= 2 \cdot \frac{\cos 2x - \cos 2\alpha}{\cos 2x + \cos 2\alpha} \end{aligned}$$

Giá trị nhỏ nhất của y chỉ tồn tại khi và chỉ khi

$$\tan(x+\alpha) = -\tan(x-\alpha) = \tan(\alpha-x) \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \cos 2x = 1$$

Do đó $y \geq 2 \cdot \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = 2 \tan^2 \alpha \Rightarrow m \leq 2 \tan^2 \alpha$.

Như vậy với $m \leq 2 \tan^2 \alpha$ thì bất phương trình nghiệm đúng với mọi x . $\square$

Câu 48.

Lời giải.

Trước tiên ta xét dạng tích phân sau.

Bài toán. Xét dạng tích phân $I = \int_{-a}^a (u + u') (v + v') dx$, trong đó u là hàm chẵn, v là hàm lẻ.

Ta có chú ý. Xét hàm $f(x)$ liên tục và xác định trên tập D , khi đó

- Nếu $f(x)$ là hàm chẵn thì $f'(x)$ là hàm lẻ.
- Nếu $f(x)$ là hàm lẻ thì $f'(x)$ là hàm chẵn.

Ta có tính chất của hàm chẵn và hàm lẻ.

Nếu $f(x)$ là hàm chẵn thì

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx \\ \text{ii)} \quad & \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx = 2 \int_{-a}^0 f(x) dx \end{aligned}$$

Nếu $f(x)$ là hàm lẻ thì

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx \\ \text{ii)} \quad & \int_{-a}^a f(x) dx = 0 \end{aligned}$$

Ngoài ra ta có thể nhận xét ngay rằng nếu $u(x)$ là hàm chẵn và $v(x)$ là hàm lẻ thì $u(x) \cdot v(x)$ là hàm lẻ. Quay lại với tích phân đầu, ta có biến đổi

$$I = \int_{-a}^a (uv + uv' + u'v + u'v') dx = \int_{-a}^a (uv' + u'v) dx = [uv]_{-a}^a = 2 [uv]_0^a$$

Trở lại với bài toán. Từ giả thiết ta thay x bởi $-x$ ta được

$$4 \cos x f(-x) + 4 f(|x|) = (\cos x + 1) (x^2 + \sin^2 x \cos x)$$

Từ đây suy ta được $f(x) = x^2 + \sin^2 x \cos x$ là hàm chẵn.

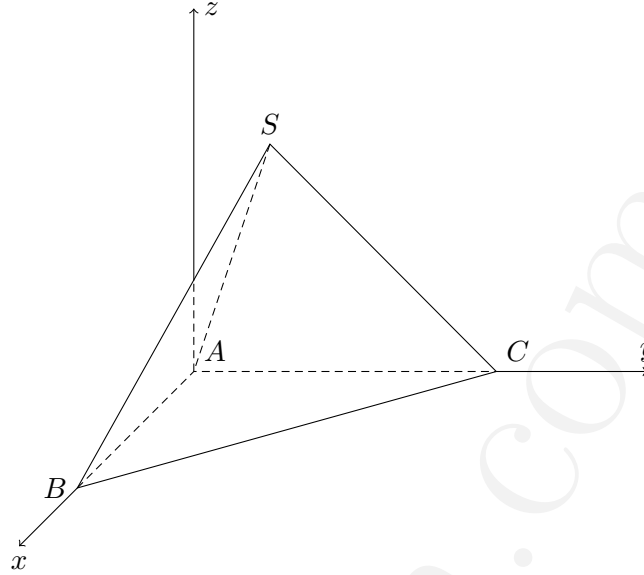
Áp dụng tính chất ở trên ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (f(x) + f'(x)) (xf(x) + [xf(x)]') dx \\ &= xf^2(x) \Big|_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = 2 \frac{3\pi}{4} \cdot f^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{2} \left(\frac{9\pi^2}{16} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 \end{aligned}$$

Như vậy ta tính được $S = 23$. □

Câu 49. Xin lỗi mọi người vì câu này đáng lẽ ra giả thiết phải cho $\widehat{SAB} = \frac{\pi}{3}$, tuy nhiên không sao chúng ta sẽ tự làm khó mình một chút, đề sẽ được sửa thành chọn đáp án gần đúng nhé!

Lời giải.



Chọn hệ trục $Axyz$ như hình vẽ với $B(1;0;0)$, $C(0;1;0)$ và $S(x;y;z)$, ta có tam giác SCA vuông tại C nên $CS \perp AC$, vì vậy

$$\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (x; y-1; z) \cdot (0; 1; 0) = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

Góc $\widehat{SBA} = \frac{\pi}{3}$ nên

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BS}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BS}|} = \frac{(-1; 0; 0) \cdot (x-1; 1; z)}{\sqrt{1} \sqrt{(x-1)^2 + 1 + z^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{(x-1)^2 + 1 + z^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 3(x-1)^2 - 1 \\ x < 1 \end{cases}$$

Vector pháp tuyến của các mặt phẳng (SAB) và (SAC) là

$$\begin{cases} \vec{n}_1 = [\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AB}] = [(x; 1; z), (1; 0; 0)] = (0; z; -1) \\ \vec{n}_2 = [\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AC}] = [(x; 1; z), (0; 1; 0)] = (-z; 0; x) \end{cases}$$

Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng $\frac{\pi}{3}$ nên

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|-x|}{\sqrt{z^2 + 1} \sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{1}{2}$$

Hay

$$\frac{x^2}{(z^2 + 1)(x^2 + z^2)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x^2}{(3(x-1)^2 - 1 + 1)[x^2 + 3(x-1)^2 - 1]} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 0,35 \\ x \approx 1,96 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Như vậy, chiều cao của hình chóp $S.ABC$ là

$$d(S, (ABC)) = |z| = \sqrt{3(x-1)^2 - 1} \approx 0,52$$

Thể tích khối chóp $S.ABC$

$$V = \frac{1}{3} \cdot d(S, (ABC)) \cdot S_{ABC} \approx \frac{1}{3} \cdot 0,52 \cdot \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{13}{150} \approx \frac{1}{12}$$

□

Câu 50.

Lời giải.

Xét phương trình $\frac{f(f(x)) - 2f(x)}{f^2(x) - 2f(x)} = 1$.

(*)

Đặt $f(x) = t$, phương trình trở thành $\frac{f(t) - 2t}{t^2 - 2t} = 1, t \notin \{0; 2\}$, phương trình tương đương

$$f(t) = t^2 \Leftrightarrow t^3 - 4t^2 + m = t^2 \Leftrightarrow m = -t^3 + 5t^2$$

Xét $g(t) = -t^3 + 5t^2, g'(t) = -3t^2 + 10t, g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{10}{3} \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên

t	$-\infty$	0	$\frac{10}{3}$	$+\infty$		
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	$+\infty$			$\frac{500}{27}$		$-\infty$

Để (*) có 9 nghiệm thì phương trình $m = g(t)$ phải có 3 nghiệm, suy ra $m \in \left(0; \frac{500}{27}\right)$

(1)

Và $f(x) = t$ cũng phải có 3 nghiệm $\Rightarrow x^3 - 4x^2 + m = t \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - t = -m$.

Xét $h(x) = -x^3 + 4x^2 + t \Rightarrow h'(x) = -3x^2 + 8x, h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{8}{3} \end{cases}$.

x	$-\infty$	0	$\frac{8}{3}$	$+\infty$		
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$+\infty$			$\frac{256}{27} + t$		$-\infty$

Để phương trình có 3 nghiệm thì $m \in \left(t; \frac{256}{27} + t\right)$.

Mà ta lại có $m \in \left(0; \frac{500}{27}\right)$ theo (1) và $m \in [-5; 5]$, suy ra

$$m \in \left(0; \frac{256}{27} + 5\right) \Leftrightarrow m \in \left(0; \frac{391}{27}\right) \Rightarrow m \in (0; 5]$$

Như vậy có 5 giá trị m thỏa mãn.

Xét lại điều kiện $t \notin \{0; 2\}$. Ta có

$$m = -t^3 + 5t^2 = -0 + 0 = 0 \text{ (thỏa)}.$$

Vì $m \in (0; 5]$ và $m = -t^3 + 5t^2 = -2^3 + 5 \cdot 2^2 = 12$ (thỏa).

Vậy có 5 giá trị m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

□

toanmath.com