

SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
ĐỒNG NAI

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT
NĂM HỌC 2025 - 2026
MÔN: TOÁN (Bảng A)

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 2 trang)

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Ngày thi: 22/01/2026

Câu 1. (4,0 điểm)

- a) Cho hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi A, B là hai điểm phân biệt nằm trên (C) đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y = x - 1$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .
- b) Cân nặng trung bình của một bé trai trong độ tuổi từ 0 đến 36 tháng có thể được tính gần đúng bởi hàm số $w(t) = 0,000341t^3 - 0,0268t^2 + 0,819t + 3,67$, trong đó t được tính bằng tháng và w được tính bằng kilôgam. Biết tốc độ thay đổi cân nặng của bé trai tại thời điểm t (tháng) được tính bằng công thức $w'(t)$. Hỏi thời điểm nào tốc độ thay đổi cân nặng của bé trai là nhỏ nhất?

KQ:

Câu 2. (4,0 điểm)

- a) Ứng với mỗi số nguyên dương $2 \leq n \leq 28$, đặt

$$S_n = \left\{ x^2 + 2026 \mid x = \overline{1, n} \right\} \text{ và } T_n = \prod_{\substack{a, b \in S_n \\ a > b}} (a - b).$$

Tìm n nhỏ nhất để $T_n \vdots 29$.

- b) Tìm tất cả các đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn

$$(x^2 - 6x + 8)P(x) = (x^2 + 2x)P(x - 2), \forall x \in \mathbb{R}.$$

KQ:

Câu 3. (2,0 điểm) Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Chứng minh (a_n) là dãy số giảm.
- b) Với mỗi số nguyên dương n , đặt $b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Tính $\lim b_n$.

KQ:

Câu 4. (2,0 điểm) Xét hàm số $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện

$$(m+n) \mid (f(m) + f(n)), \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

- a) Tính $f(3)$.
- b) Tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn điều kiện trên.

KQ:

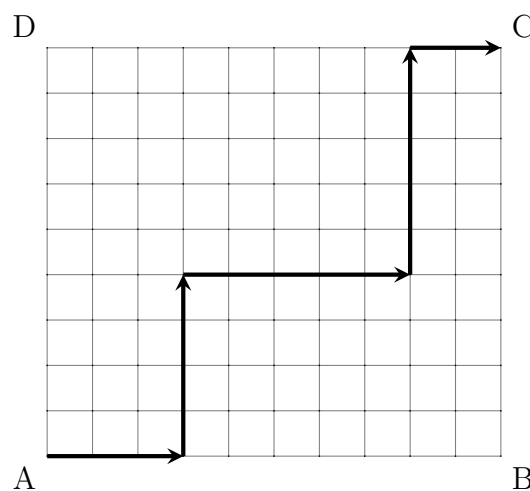
Câu 5. (4,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp trong đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H . Gọi M là trung điểm cạnh BC và S là giao điểm của tia MH với đường tròn (O) .

- a) Chứng minh rằng ba đường thẳng AS, EF, BC đồng quy.
- b) Gọi K là một điểm trên đường thẳng HM sao cho AK tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác HKD . Chứng minh rằng đường tròn tâm A bán kính AK tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác KBC .

KQ:

Câu 6. (4,0 điểm)

- a) Cho hình chữ nhật $ABCD$ gồm 8×10 ô vuông cạnh bằng 1. Xét đường đi có độ dài 18 từ A đến C dọc theo cạnh các hình vuông đó và đổi hướng đúng 4 lần. Tính số đường đi khác nhau có thể có. Dưới đây là một ví dụ đường đi thỏa yêu cầu của bài toán.
- b) Cho A là tập con của tập $\{1; 2; 3; \dots; 2026\}$ gồm nhiều hơn 1010 phần tử. Chứng minh rằng A chứa phần tử là lũy thừa của 2 hoặc chứa hai phần tử phân biệt có tổng là lũy thừa của 2.



KQ:

———— HẾT ————

Giám thị coi thi không giải thích gì thêm

SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
ĐỒNG NAIKỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT
NĂM HỌC 2025 - 2026
MÔN: TOÁN (BẢNG B)

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 04 trang, 16 câu)

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Ngày thi: 22/01/2026

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (2,0 điểm)

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(3 - x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$ là

- A. $f(0)$. B. $f(1)$. C. $f(2)$. D. $f(3)$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 2)$ và $B(3; 0; 4)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

- A. $x - y + z - 4 = 0$. B. $x - y + z - 1 = 0$. C. $x - y + z - 7 = 0$. D. $x - y + z - 3 = 0$.

Câu 3. Để chuẩn bị cho tiết học về mạng xã hội, giáo viên đã khảo sát thời gian sử dụng mạng xã hội trong một ngày của học sinh trong lớp 11A và thu được mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Thời gian sử dụng mạng xã hội (phút)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80)	[80; 90)
Số học sinh	5	10	15	7	5	3

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu nêu trên là

- A. 10. B. 12. C. 60. D. 90.

Câu 4. Có bao nhiêu cách xếp 2 học sinh nam và 3 học sinh nữ thành một hàng ngang sao cho bên cạnh học sinh nam nào cũng có ít nhất 1 học sinh nữ?

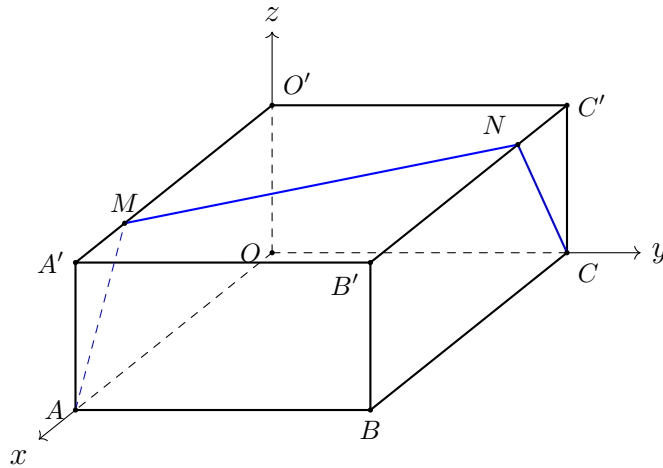
- A. 12. B. 24. C. 48. D. 96.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai (4,0 điểm)

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2$ có đồ thị (C) .

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.
b) Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ là $f(2)$.
c) Gốc tọa độ O là tâm đối xứng của (C) .
d) Có 2 giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y = mx$ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5$.

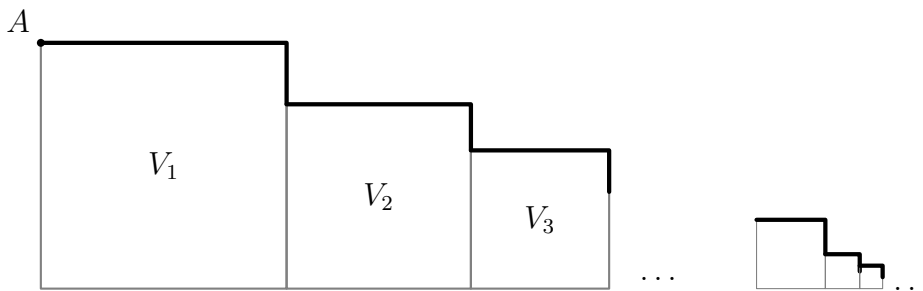
Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ có $OA = 8, OC = 6, OO' = 3$ như hình vẽ sau đây:



- $A(8; 0; 0), C(0; 6; 0)$.
- Mặt phẳng (ACO') có phương trình là $8x + 6y + 3z = 1$.
- Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (Oyz) là 8.
- Nếu lấy M, N lần lượt thuộc các cạnh $O'A', B'C'$ thì độ dài ngắn nhất của $AM + MN + NC$ là $5\sqrt{13}$.

Phần III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn (4,0 điểm)

Câu 7. Xét dãy vô hạn các hình vuông $V_1, V_2, V_3 \dots$ được đặt kề nhau như hình vẽ. Trong đó, V_1 có cạnh bằng 1 và kể từ hình vuông thứ hai trở đi, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{3}{4}$ cạnh hình vuông kề trước nó. Một con kiến xuất phát từ đỉnh A của V_1 , đi ngang sang phải và dọc xuống dưới theo các nét tô đậm của tất cả các hình vuông. Tính quãng đường đi được của con kiến.



KQ:

--	--	--	--

Câu 8. An cần mua một số hộp bánh để dùng trong những ngày Tết, cụ thể như sau:

- Hộp nhỏ: ít nhất 3 hộp và nhiều nhất 10 hộp với giá 100 nghìn đồng mỗi hộp.
- Hộp lớn: ít nhất 1 hộp và nhiều nhất 5 hộp với giá 300 nghìn đồng mỗi hộp.

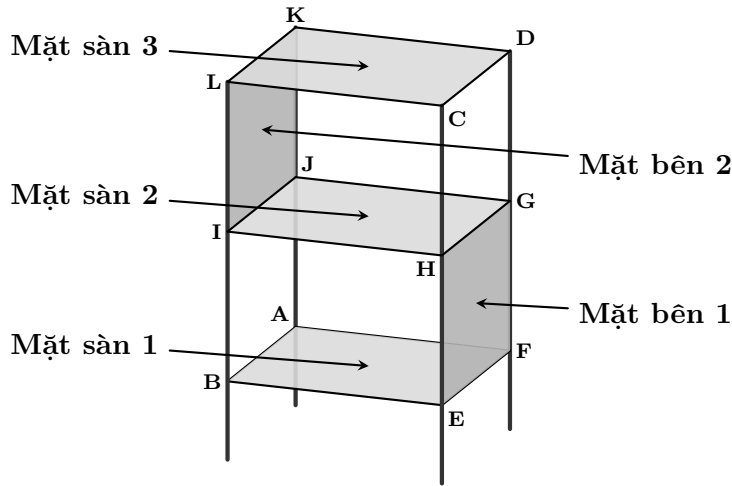
Cửa hàng sẽ miễn phí giao hàng nếu giá đơn hàng tối thiểu 900 nghìn đồng. Hỏi An cần mua tối thiểu bao nhiêu hộp bánh (gồm cả hộp nhỏ và hộp lớn) để được miễn phí giao hàng? KQ:

--	--	--	--

Câu 9. An có tấm nhôm hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 3$ dm, $AD = 18$ dm. An gấp tấm nhôm của mình theo các nếp gấp EF, GH, IJ, KL như Hình 1 để tạo nên ba mặt sàn và hai mặt bên của một cái kệ như Hình 2, trong đó $ABEF, JIHG$ và $JIHG, KLCD$ là hai hình hộp chữ nhật bằng nhau. Khối hộp chữ nhật $ABEF, KLCD$ có thể tích lớn nhất là bao nhiêu dm^3 ?



Hình 1



Hình 2

KQ:

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau, $SA = 6, SB = 8, SC = 8$. Lấy M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AB, AC, AS sao cho $AM = 1, AN = 2, AP = 3$. Khối chóp $A.MNP$ có thể tích là bao nhiêu?

KQ:

Phần IV. Tự luận (10,0 điểm)

Câu 11. (1,0 điểm) Giải phương trình $\sin 2x - \sin x = 0$.

Câu 12. (1,0 điểm) Cho dãy số (u_n) với

$$u_n = \frac{n}{n+1}$$

Chứng minh (u_n) tăng và bị chặn.

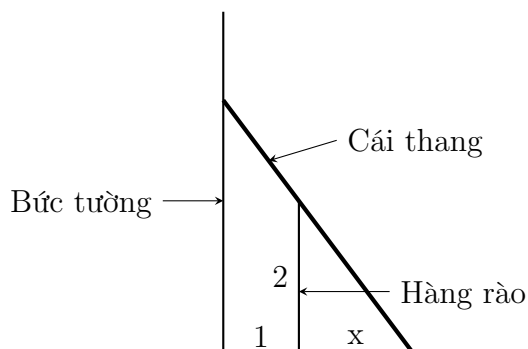
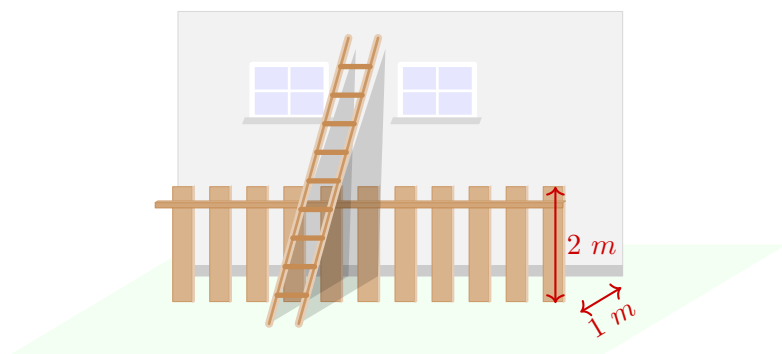
Câu 13. (1,0 điểm) Cho ba số thực dương x, y, z có tổng bằng 14, theo thứ tự lập thành một cấp số nhân và ba số $\log_2 x, \log_4 y, \log_8 z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Hãy tìm x, y và z .

Câu 14. (2,0 điểm) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a\sqrt{5}, BC = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại A . Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm cạnh BC .

a) Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

b) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(ACC'A')$.

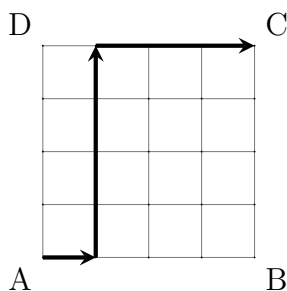
Câu 15. (3,0 điểm) Một hàng rào cao 2 mét, song song và cách bức tường của một ngôi nhà 1 mét. Đặt một cái thang sao cho đầu thang tựa vào tường, chân thang ở bên ngoài hàng rào và thân thang vừa chạm hàng rào như hình vẽ. Giả sử chiều dài thang là l mét và khoảng cách từ chân thang đến hàng rào là x mét.



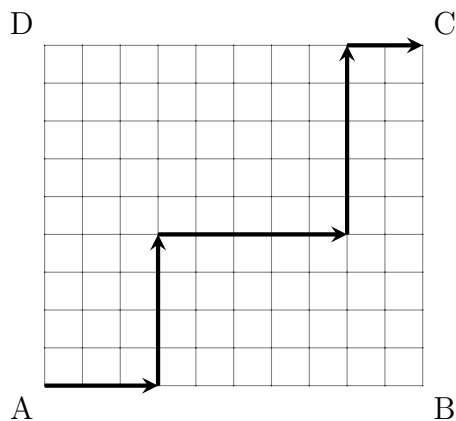
- Tính l theo x .
- Tìm giá trị nhỏ nhất của l .

Câu 16. (2,0 điểm) Cho lưới hình chữ nhật $ABCD$ gồm $m \times n$ ô vuông cạnh bằng 1 (với $m, n \in \mathbb{N}^*$). Xét đường đi có độ dài $(m + n)$ từ A đến C dọc theo các đường lưới và đổi hướng đúng k lần ($k \in \mathbb{N}^*$).

- Tính số đường đi ứng với $m = n = 4$ và $k = 2$ (hình vẽ dưới đây mô tả một trong số các đường đi).



- Tính số đường đi ứng với $m = 8, n = 10$ và $k = 4$ (hình vẽ dưới đây mô tả một trong số các đường đi).



———— HẾT ————

Giám thị coi thi không giải thích gì thêm

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (2,0 điểm)

Câu 1: [MAP] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(3-x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;3]$ là

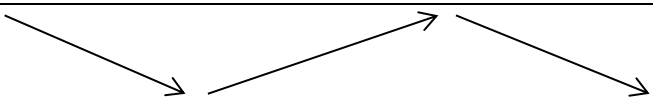
- A. $f(0)$. B. $f(1)$. C. $f(2)$. D. $f(3)$.

Chọn D

Hướng dẫn

$$\text{Có: } f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Xét bảng biến thiên:

x	-	0	+	3	-
$f(x)$					

$$\Rightarrow \max_{[0;3]} f(x) = f(3).$$

Câu 2: [MAP] Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;2)$ và $B(3;0;4)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

- A. $x - y + z - 4 = 0$. B. $x - y + z - 1 = 0$. C. $x - y + z - 7 = 0$. D. $x - y + z - 3 = 0$.

Chọn B

Hướng dẫn

Gọi mặt phẳng trung trực của AB là: (P)

Có: $\overrightarrow{AB} = 2; -2; 2 \Rightarrow$ mặt phẳng (P) có 1 vectơ pháp tuyến $\vec{n}_p = 1; -1; 1$

Mà (P) đi qua điểm $A(1;2;2) \Rightarrow (P): x - y + z - 1 = 0$

Câu 3: [MAP] Để chuẩn bị cho tiết học về mạng xã hội, giáo viên đã khảo sát thời gian sử dụng mạng xã hội trong một ngày của học sinh trong lớp 11 A và thu được mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Thời gian sử dụng mạng xã hội (phút)	$[30;40)$	$[40;50)$	$[50;60)$	$[60;70)$	$[70;80)$	$[80;90)$
Số học sinh	5	10	15	7	5	3

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu nêu trên là

- A. 10. B. 12. C. 60. D. 90.

Chọn C

Câu 4: [MAP] Có bao nhiêu cách xếp 2 học sinh nam và 3 học sinh nữ thành một hàng ngang sao cho bên cạnh học sinh nam nào cũng có ít nhất 1 học sinh nữ?

A. 12 .

B. 24 .

C. 48 .

D. 96 .

Chọn D

Hướng dẫn

- Xếp 3 nữ thành 1 hàng: $3! = 6$ cách. Khi đó tạo ra 4 vị trí trống để xếp nam: _Nữ_Nữ_Nữ_
- Xếp các bạn nam vào các vị trí trống

TH1: Hai nam đứng ở 2 vị trí khác nhau: $C_4^2 \cdot 2 = 12$ cách

Th2: Hai nam đứng cùng 1 vị trí (hai nam đứng cạnh nhau):

+, chỉ có 2 vị trí ở giữa hai nữ là hợp lệ (vì nếu đứng đầu hàng hoặc cuối hàng thì sẽ có 1 bạn nam không đứng cạnh nữ)

+, số cách: $2 \cdot 2 = 4$ cách

$\Rightarrow$ tổng số cách xếp nam: $12 + 4 = 16$ cách

Vậy cách xếp cả nam và nữ là: $16 \cdot 6 = 96$ cách.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai (4,0 điểm)

Câu 5: [MAP] Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2$ có đồ thị (C).

a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.

b) Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ là $f(2)$.

c) Gốc tọa độ O là tâm đối xứng của (C).

d) Có 2 giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y = mx$ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5$.

Hướng dẫn - S Đ S S

$$a) \quad y' = -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Bảng xét dấu của $f'(x)$:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$. Vậy a) sai

b) Dựa vào bảng xét dấu trên GTLN trên đoạn $[1; 3]$ là $f(2)$. Vậy b) đúng

c) Hàm số bậc 3 có tâm đối xứng là điểm uốn.

Thỏa mãn $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (1; 2)$ là điểm đối xứng của hàm số

Vậy c) sai

d) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và $y = mx$ là:

$$-x^3 + 3x^2 = mx \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 - mx = 0$$

$$\Leftrightarrow x(-x^2 + 3x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x^2 + 3x - m = 0 \end{cases}$$

Vậy $x_1 = 0; x_2, x_3$ là 2 nghiệm phân biệt của phương trình $-x^2 + 3x - m = 0$

$$\Delta = 9 - 4m > 0 \Rightarrow m < \frac{9}{4}$$

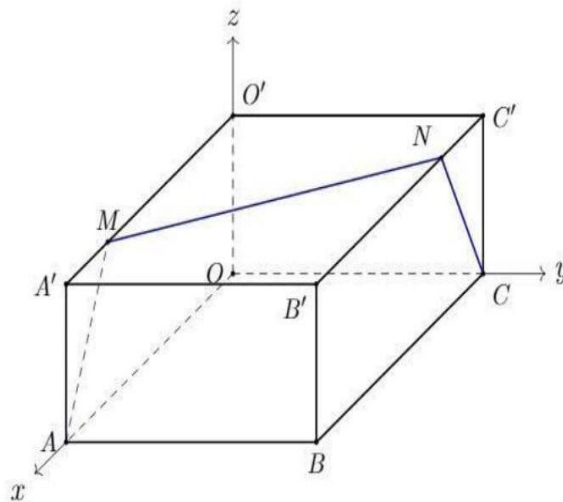
Theo vi-et ta có: $\begin{cases} x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 x_3 = m \end{cases}$

$$\text{Ta có: } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5 \Rightarrow 0 + (x_2 + x_3)^2 - 2x_2 x_3 = 5$$

$$\Leftrightarrow 9 - 2m = 5 \Leftrightarrow m = 2$$

Vậy có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn. Vậy d) sai

Câu 6: [MAP] Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $OABC \cdot O'A'B'C'$ có $OA = 8, OC = 6, OO' = 3$ như hình vẽ sau đây:



a) $A(8;0;0), C(0;6;0)$.

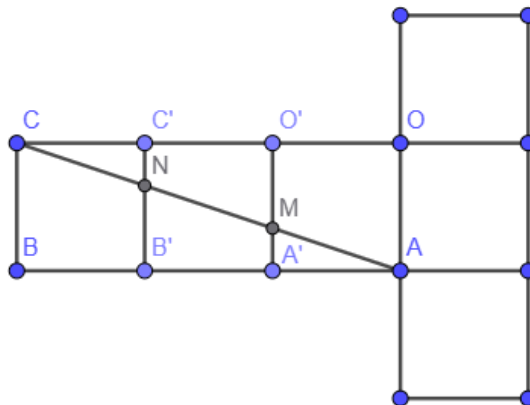
b) Mặt phẳng (ACO') có phương trình là $8x + 6y + 3z = 1$.

c) Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (Oyz) là 8.

d) Nếu lấy M, N lần lượt thuộc các cạnh $O'A', B'C'$ thì độ dài ngắn nhất của $AM + MN + NC$ là $5\sqrt{13}$.

Hướng dẫn - Đ S Đ S

- a) $A(8;0;0), C(0;6;0)$. Vậy a) đúng
- b) $O'(0;0;3)$. Phương trình mặt phẳng (ACO') là: $\frac{x}{8} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 1 \Rightarrow 3x + 4y + 8z = 24$. Vậy b) sai
- c) $d(B, (Oyz)) = BC = OA = 8$. Vậy c) đúng
- d) Trái phẳng hình ta được:

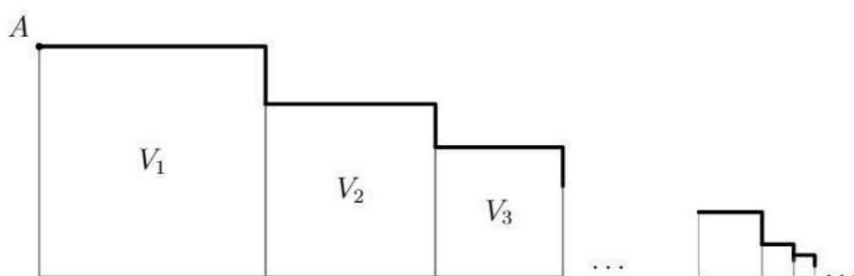


Ta có: $AM + MN + NC$ min khi A, M, N, C thẳng hàng

Khi đó: $AM + MN + NC = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(3+6+3)^2 + 8^2} = 4\sqrt{13}$. Vậy d) sai

Phần III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn (4,0 điểm)

Câu 7: [MAP] Xét dãy vô hạn các hình vuông $V_1, V_2, V_3, \dots$ được đặt kề nhau như hình vẽ. Trong đó, V_1 có cạnh bằng 1 và kể từ hình vuông thứ hai trở đi, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{3}{4}$ cạnh hình vuông kề trước nó. Một con kiến xuất phát từ đỉnh A của V_1 , đi ngang sang phải và dọc xuống dưới theo các nét tô đậm của tất cả các hình vuông. Tính quãng đường đi được của con kiến.



Hướng dẫn

Đáp án: 5

V_2 có cạnh bằng $\frac{3}{4}$ cạnh V_1 ; V_3 có cạnh bằng $\frac{3}{4}$ cạnh V_2 nên các cạnh ngang là CSN lùi vô hạn với

$$u_1 = 1; q = \frac{3}{4}$$

Cạnh dọc in đậm của V_2 bằng: $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$; Cạnh dọc in đậm của V_3 bằng $\frac{3}{4}$ cạnh dọc in đậm của

V_2 nên các cạnh dọc là CSN lùi vô hạn với $u_1' = \frac{1}{4}; q' = \frac{3}{4}$

$$\text{Tổng quãng đường kiến bò là: } \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} + \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = 5$$

Câu 8: [MAP] An cần mua một số hộp bánh để dùng trong những ngày Tết, cụ thể như sau:

- Hộp nhỏ: ít nhất 3 hộp và nhiều nhất 10 hộp với giá 100 nghìn đồng mỗi hộp.
- Hộp lớn: ít nhất 1 hộp và nhiều nhất 5 hộp với giá 300 nghìn đồng mỗi hộp.

Cửa hàng sẽ miễn phí giao hàng nếu giá đơn hàng tối thiểu 900 nghìn đồng. Hỏi An cần mua tối thiểu bao nhiêu hộp bánh (gồm cả hộp nhỏ và hộp lớn) để được miễn phí giao hàng?

Hướng dẫn

Đáp án: 5

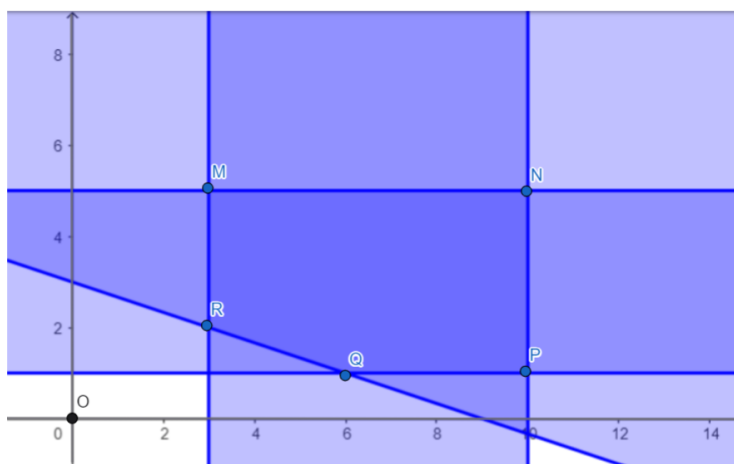
Gọi x, y (là các số nguyên dương) lần lượt là số hộp nhỏ và hộp lớn An mua, T là giá đơn hàng (đơn vị triệu đồng)

Để được miễn phí giao hàng $\Leftrightarrow T \geq 0,9$

$$\text{Theo đề ra ta có hệ bất phương trình: } \begin{cases} 3 \leq x \leq 10 \\ 1 \leq y \leq 5 \\ T = 0,1x + 0,3y \geq 0,9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 10 \\ 1 \leq y \leq 5 \\ x + 3y \geq 9 \end{cases} \quad (1)$$

Ta cần tìm cặp số $x; y$ thoả mãn hệ (1) và tổng $K_{x;y} = x + y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Biểu diễn miền nghiệm của (1)



Miền nghiệm của hệ (1) là ngũ giác $MNPQR$ với $M(3;5), N(10;5), P(10;1), Q(6;1), R(3;2)$

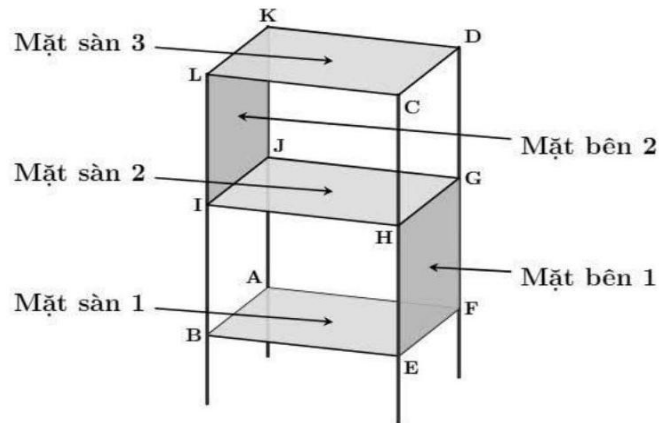
Ta có: $K_{3;5} = 8, K_{10;5} = 15, K_{10;1} = 11, K_{6;1} = 7, K_{3;2} = 5$.

$$\text{Vậy } \min K_{x;y} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Câu 9: [MAP] An có tấm nhôm hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 3\text{dm}$, $AD = 18\text{dm}$. An gấp tấm nhôm của mình theo các nếp gấp EF, GH, IJ, KL như Hình 1 để tạo nên ba mặt sàn và hai mặt bên của một cái kệ như Hình 2, trong đó $ABEF$, $JHIG$ và $JHIG$, $KLCD$ là hai hình hộp chữ nhật bằng nhau. Khối hộp chữ nhật $ABEF$, $KLCD$ có thể tích lớn nhất là bao nhiêu dm^3 ?



Hình 1



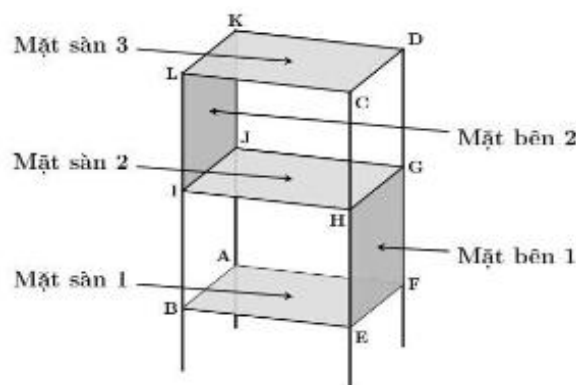
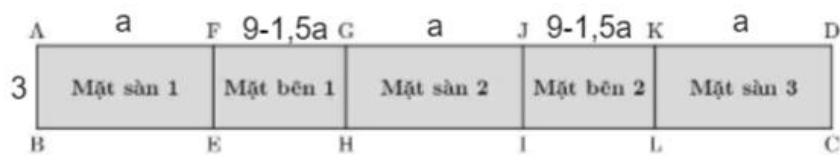
Hình 2

Hướng dẫn

Đáp án: 81

Đặt $AF = GJ = a$ với $a \in (0; 18)$. Vì cách gấp của An tạo thành khối hộp chữ nhật $ABEF$, $KLCD$ nên hai hình chữ nhật $ABEF$ và $KLCD$ bằng nhau $\Leftrightarrow AF = DK = a$.

Khi đó $CF = JK = \frac{18 - 3a}{2} = 9 - 1,5a$.



Do $CF = 9 - 1,5a > 0 \Leftrightarrow a < 6$.

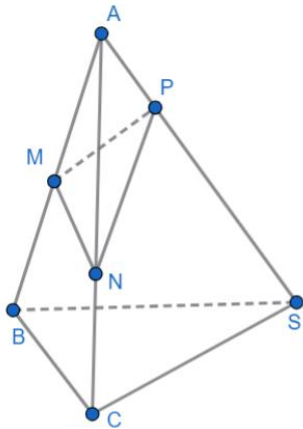
$$V_{ABEF, KLCD} = 2V_{ABEF, JHIG} = 2.EB.EH.EF = 2.a \cdot (9 - 1,5a) \cdot 3 = -9a^2 + 54a = -9(a - 3)^2 + 81 \leq 81, \forall a \in (0; 6)$$

Vậy $\max V_{ABEF, JHIG} = 81 \Leftrightarrow a = 3$.

Câu 10: [MAP] Cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau, $SA = 6, SB = 8, SC = 8$. Lấy M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AB, AC, AS sao cho $AM = 1, AN = 2, AP = 3$. Khối chóp $A.MNP$ có thể tích là bao nhiêu?

Hướng dẫn

Đáp án: 0,48



Vì hình chóp $S.ABC$ có ba cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau nên $V_{S.ABC} = \frac{1}{6} \cdot SA \cdot SB \cdot SC = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 = 48$.

Ta có: $AB = AC = 10$.

$$\frac{V_{A.MNP}}{V_{A.SBC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AP}{SA} = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow V_{A.MNP} = \frac{48}{100} = 0,48$$

Phần IV. Tự luận (10,0 điểm)

Câu 11: [MAP] (1,0 điểm) Giải phương trình $\sin 2x - \sin x = 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \sin 2x - \sin x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x \cdot \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x \cdot (2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Câu 12: [MAP] Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{n+1}$. Chứng minh (u_n) tăng và bị chặn.

Lời giải

$$\text{Có: } u_n = \frac{n}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0 \forall n \in \mathbb{N}$$

Do đó dãy u_n tăng

$$\text{Mà } 0 < u_n = \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+1} = 1 \Rightarrow \text{dãy } u_n \text{ bị chặn}$$

Câu 13: [MAP] (1,0 điểm) Cho ba số thực dương x, y, z có tổng bằng 14 , theo thứ tự lập thành một cấp số nhân và ba số $\log_2 x, \log_4 y, \log_8 z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Hãy tìm x, y và z .

Lời giải

Vì x, y, z theo thứ tự lập thành cấp số nhân $\Rightarrow y^2 = xz$ (1)

Và $\log_2 x, \log_4 y, \log_8 z$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng $\Rightarrow 2\log_4 y = \log_2 x + \log_8 z$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} \log_2 y = \log_2 x + \frac{1}{3} \log_2 z \Leftrightarrow \log_2 y = \log_2 x + \frac{1}{3} \log_2 z \Rightarrow 3\log_2 y = 3\log_2 x + \log_2 z$$

$$\Leftrightarrow \log_2 y^3 = \log_2 x^3 + \log_2 z$$

$$\Leftrightarrow \log_2 y^3 = \log_2 z \cdot x^3$$

$$\Rightarrow y^3 = z \cdot x^3 \Rightarrow z = \frac{y^3}{x^3}$$

$$\text{Thay } z = \frac{y^3}{x^3} \text{ vào (1), ta có: } y^2 = x \frac{y^3}{x^3} \Leftrightarrow 1 = \frac{y}{x^2} \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow z = x^3$$

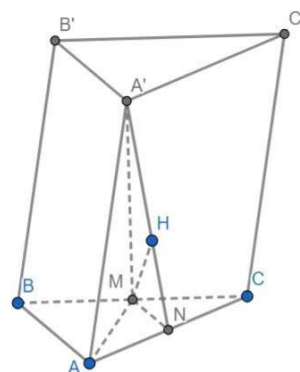
$$\text{Mà } x + y + z = 14 \Leftrightarrow x + x^2 + x^3 = 14 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ z = 8 \end{cases}$$

Câu 14: [MAP] (2,0 điểm) Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có $AA' = a\sqrt{5}, BC = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại A . Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm cạnh BC .

a) Tính thể tích khối lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$.

b) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng ($ACC'A'$) .

Lời giải



a) Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow A'M \perp ABC \Rightarrow A'M \perp AM$

Do tam giác ABC vuông cân tại A nên $AB = AC = \frac{BC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}; AM = BM = CM = \frac{BC}{2} = a; AM \perp BC$

Xét tam giác $AA'M$ vuông tại M có: $A'M = \sqrt{AA'^2 - AM^2} = 2a$

Thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V_{ABC.A'B'C'} = A'M \cdot S_{ABC} = A'M \cdot \frac{1}{2} \cdot AM \cdot BC = 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a = 2a^3$

$$b) \text{ Vì } BM \cap ACC'A = C \Rightarrow \frac{d(B; ACC'A)}{d(M; ACC'A)} = \frac{BC}{MC} = 2 \Rightarrow d(B; ACC'A) = 2d(M; ACC'A)$$

$$\text{Gọi } N \text{ là trung điểm của } AC \Rightarrow \begin{cases} MN \parallel AB \Rightarrow MN \perp AC \\ MN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên $A'N$

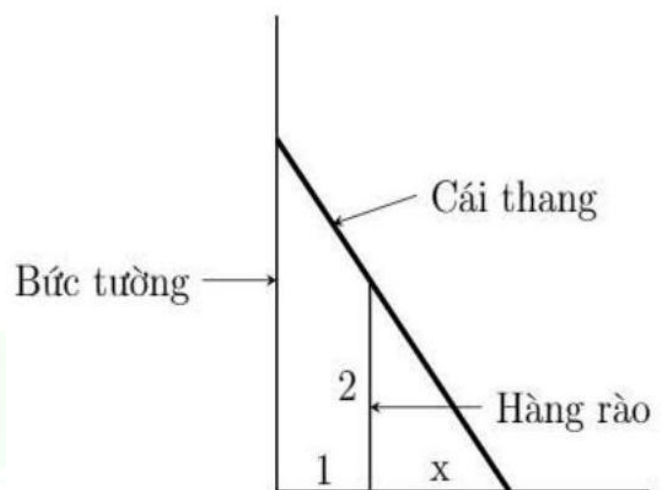
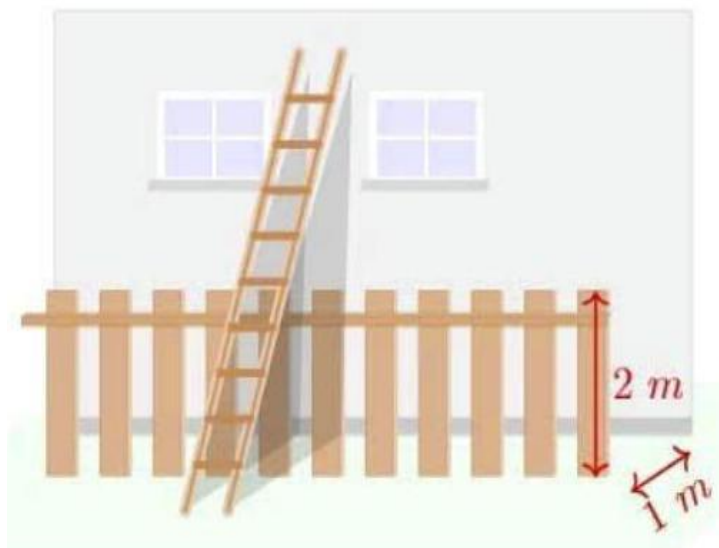
$$\text{Có: } \begin{cases} MN \perp AC \\ A'M \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp A'MN \Rightarrow \begin{cases} AC \perp MH \\ A'N \perp MH \end{cases} \Rightarrow MH \perp ACC'A' \Rightarrow d(M; ACC'A') = MH$$

Xét tam giác $A'MN$ vuông tại M có: MH là đường cao

$$\Rightarrow MH = \frac{A'M \cdot MN}{\sqrt{A'M^2 + MN^2}} = \frac{2a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2a^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{2a}{3}$$

$$\Rightarrow d(B; ACC'A') = 2d(M; ACC'A') = 2MH = \frac{4a}{3}$$

Câu 15: [MAP] (3,0 điểm) Một hàng rào cao 2 mét, song song và cách bức tường của một ngôi nhà 1 mét. Đặt một cái thang sao cho đầu thang tựa vào tường, chân thang ở bên ngoài hàng rào và thân thang vừa chạm hàng rào như hình vẽ. Giả sử chiều dài thang là l mét và khoảng cách từ chân thang đến hàng rào là x mét.

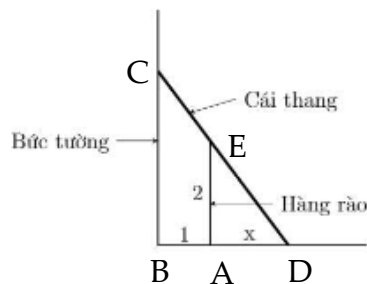


a) Tính l theo x .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của l .

Hướng dẫn

Đặt các điểm như hình vẽ sau:



a) Có: $AE \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{BC} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow BC = \frac{AE \cdot BD}{AD} = \frac{2 \cdot (x+1)}{x}$

$$\Rightarrow l = CD = \sqrt{BC^2 + BD^2} = \sqrt{\frac{4(x+1)^2}{x^2} + (x+1)^2} = \sqrt{(x+1)^2 \cdot \left(\frac{4}{x^2} + 1\right)} = (x+1) \sqrt{\frac{4+x^2}{x^2}}$$

$$\Leftrightarrow l = \frac{x+1}{x} \sqrt{4+x^2}$$

b) Có: $l^2 = \frac{x^2 + 2x + 1 \cdot 4 + x^2}{x^2} = \frac{x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^2} = f(x) \quad x \neq 0$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4x^3 + 6x^2 + 10x + 8 \cdot x^2 - 2x \cdot x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^4} = \frac{2x^5 + 2x^4 - 8x^2 - 8x}{x^4}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^5 + 2x^4 - 8x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x^4 + x^3 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{4} \\ x = -1 \end{cases}$$

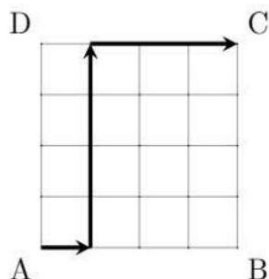
Xét bảng biến thiên với $x > 0$:

x	-	$\sqrt[3]{4}$	+
f(x)			

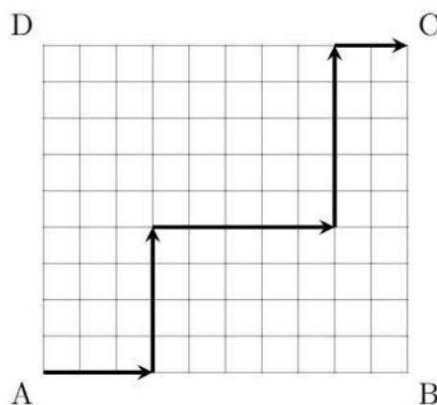
$$\Rightarrow \min f(x) = f(\sqrt[3]{4}) \Rightarrow \min l = \sqrt{f(\sqrt[3]{4})} \approx 4,16.$$

Câu 16: [MAP] (2,0 điểm) Cho lưới hình chữ nhật $ABCD$ gồm $m \times n$ ô vuông cạnh bằng 1 (với $m, n \in \mathbb{N}^*$). Xét đường đi có độ dài ($m+n$) từ A đến C dọc theo các đường lưới và đổi hướng đúng k lần ($k \in \mathbb{N}^*$).

a) Tính số đường đi ứng với $m=n=4$ và $k=2$ (hình vẽ dưới đây mô tả một trong số các đường đi).



b) Tính số đường đi ứng với $m=8, n=10$ và $k=4$ (hình vẽ dưới đây mô tả một trong số các đường đi).



Lời giải:

Vì độ dài đường đi bằng $m+n$ nên trong suốt quá trình đi từ A đến C :

- Ta chỉ được đi theo hai hướng:
 - o Song song với cạnh AB (đi sang phải)
 - o Song song với cạnh AD (đi lên trên)
- Tổng số đơn vị đi sang phải là m
- Tổng số đơn vị đi lên trên là n

Mỗi lần đổi hướng thì đường đi bị chia thành các đoạn thẳng liên tiếp. Do đổi hướng đúng k lần nên toàn bộ đường đi gồm đúng $k+1$ đoạn thẳng.

a) Khi $m=n=4$ và $k=2$

Bước 1. Xác định số đoạn của đường đi

Vì đổi hướng đúng 2 lần nên đường đi gồm: $2+1=3$ đoạn thẳng

Ba đoạn này lần lượt song song với các cạnh của hình chữ nhật và hai đoạn kề nhau phải khác hướng

Bước 2. Xét các khả năng về hướng đi

Với 3 đoạn thẳng, chỉ có hai khả năng:

- Khả năng 1:
 - Đoạn thứ nhất song song với cạnh AB
 - Đoạn thứ hai song song với cạnh AD
 - Đoạn thứ ba song song với cạnh AB
- Khả năng 2:
 - Đoạn thứ nhất song song với cạnh AD

Đoạn thứ hai song song với cạnh AB

Đoạn thứ ba song song với cạnh AD

Bước 3. Đếm số đường đi cho từng khả năng

- Khả năng 1

Tổng độ dài theo phương song song với cạnh AB là 4

Độ dài này được phân chia vào hai đoạn (đoạn thứ nhất và đoạn thứ ba), mỗi đoạn phải có độ dài dương.

$\Rightarrow$ Số cách phân chia: $C_{4-1}^{2-1} = C_3^1 = 3$

$\Rightarrow$ Tổng độ dài theo phương song song với cạnh AD là 4, chỉ có một đoạn, nên chỉ có 1 cách Vay số đường đi trong khả năng này là: $3.1 = 3$ cách

- Khả năng 2: Lập luận hoàn toàn tương tự, ta cũng được 3 đường đi

Do đó khi $m = n = 4$ và $k = 2$, ta có 6 đường đi.

b) Vì đổi hướng đúng 444 lần nên đường đi gồm: $4 + 1 = 5$ đoạn thẳng

Các khả năng về hướng đi: với 5 đoạn thẳng, có hai khả năng

- Khả năng 1:

Các đoạn song song với cạnh AB chiếm 3 đoạn

Các đoạn song song với cạnh AD chiếm 2 đoạn

- Khả năng 2:

Các đoạn song song với cạnh AD chiếm 3 đoạn

Các đoạn song song với cạnh AB chiếm 2 đoạn

Ở khả năng 1:

- Tổng độ dài theo phương song song với cạnh AB là 8, được chia vào 3 đoạn, mỗi đoạn có độ dài dương.

Số cách: $C_{8-1}^{3-1} = C_7^2 = 21$

- Tổng độ dài theo phương song song với cạnh AD là 10, được chia vào 2 đoạn.

Số cách: $C_{10-1}^{2-1} = C_9^1 = 9$

$\Rightarrow$ Tổng số cách ở khả năng 1 là: $21.9 = 189$

Tương tự khả năng 2 có: $C_9^2.C_7^1 = 252$ cách

Do đó khi $m = 8, n = 10$ và $k = 4$, ta có $189 + 252 = 441$ đường đi.

---HẾT---