

## GTLN - GTNN CỦA HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI CÓ CHỨA THAM SỐ

**KIẾN THỨC CẦN NHỚ:**

♦ Cách tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất hàm số trên đoạn  $[a; b]$

- Tìm nghiệm  $x_i (i = 1, 2, \dots)$  của  $y' = 0$  thuộc  $[a; b]$

- Tính các giá trị  $f(x_i); f(a); f(b)$  so sánh các giá trị, suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

**BÀI TẬP MẪU:**

Gọi  $S$  là tập tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = |x^3 - 3x + m|$  trên đoạn  $[0; 3]$  bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của  $S$  bằng

**A.** -16.**B.** 16.**C.** -12.**D.** -2.*Phân tích hướng dẫn giải*

**1. DẠNG TOÁN:** Đây là dạng toán max, min của hàm trị tuyệt đối có chứa tham số.

**2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:**

Cách tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất hàm số trên đoạn  $[a; b]$

- Tìm nghiệm  $x_i (i = 1, 2, \dots)$  của  $y' = 0$  thuộc  $[a; b]$

- Tính các giá trị  $f(x_i); f(a); f(b)$  so sánh các giá trị, suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

**3. HƯỚNG GIẢI:** Tìm giá trị lớn nhất hàm số  $y = |f(x)|$ , ta xét hàm số  $y = f(x)$ .

**B1:** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$ .

**B2:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |f(x)|$  tại  $\max f(x)$  hoặc  $\min f(x)$ .

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

**Lời giải****Chọn A**

Đặt  $g(x) = x^3 - 3x + m$ .

$$g'(x) = 3x^2 - 3; \quad g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [0; 3] \\ x = 1 \in [0; 3] \end{cases}.$$

$$g(0) = m; \quad g(1) = -2 + m; \quad g(3) = 18 + m.$$

$$\text{Suy ra } \max_{[0; 3]} g(x) = 18 + m; \quad \min_{[0; 3]} g(x) = -2 + m.$$

$$\text{Để giá trị lớn nhất hàm số } y = f(x) \text{ là } 16 \Leftrightarrow \begin{cases} 18+m=16 \\ -2+m>-16 \\ -2+m=-16 \\ 18+m<16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ m>-14 \\ m=-14 \\ m<-2 \end{cases}.$$

Vậy  $S = \{-2; -14\}$  nên tổng là  $-2-14 = -16$ .

**Bài tập tương tự và phát triển:**

**Câu 42.1:** Gọi tập  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^3 - 3x + m|$  trên đoạn  $[0; 2]$  bằng 3. Số phần tử của  $S$  là

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 6.

**Lời giải**

**Chọn B**

Xét  $u = x^3 - 3x + m$ . Ta có:  $u' = 3x^2 - 3$ ;  $u' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [0; 2]$ . Khi đó:

$$A = \max_{[0;2]} u = \max \{u(0), u(1), u(2)\} = \max \{m, m-2, m+2\} = m+2.$$

$$a = \min_{[0;2]} u = \min \{u(0), u(1), u(2)\} = \min \{m, m-2, m+2\} = m-2.$$

$$\text{Ta có: } \max_{[0;2]} y = \max \{|A|, |a|\} = \max \{|m+2|, |m-2|\} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} |m+2| = 3 \\ |m+2| \geq |m-2| \\ |m-2| = 3 \\ |m-2| \geq |m+2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Vậy  $S = \{\pm 1\}$ .

**Câu 42.2:** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = |x^2 + x + m|$  thỏa mãn  $\min_{[-2;2]} y = 2$ . Tổng tất cả các phần tử của  $S$  bằng

A.  $-\frac{31}{4}$ .

B.  $-8$ .

C.  $-\frac{23}{4}$ .

D.  $\frac{9}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét hàm số  $u = x^2 + x + m$  trên đoạn  $[-2; 2]$ , có:  $u' = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ .

$$\max_{[-2;2]} u = \max \left\{ u(-2), u\left(-\frac{1}{2}\right), u(2) \right\} = m+6; \min_{[-2;2]} u = \min \left\{ u(-2), u\left(-\frac{1}{2}\right), u(2) \right\} = m - \frac{1}{4}.$$

Nếu  $m - \frac{1}{4} \geq 0$  hay  $m \geq \frac{1}{4}$  thì  $\min_{[-2;2]} y = m - \frac{1}{4} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$  (thỏa mãn).

Nếu  $m + 6 \leq 0$  hay  $m \leq -6$  thì  $\min_{[-2;2]} y = -m - 6 = 2 \Leftrightarrow m = -8$  (thỏa mãn).

Nếu  $-6 < m < \frac{1}{4}$  thì  $\min_{[-2;2]} y = 0$  (không thỏa mãn).

Ta có:  $S = \left\{-8; \frac{9}{8}\right\}$ . Vậy tổng các phần tử của  $S$  bằng  $-\frac{23}{4}$ .

**Câu 42.3:** Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$  trên đoạn  $[-1; 3]$ . Có bao nhiêu số thực  $m$  để  $M = \frac{59}{2}$ ?

A. 2.

B. 6.

C. 1.

D. 4.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét hàm số:  $u = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$ .

$$\text{Có } u' = 12x^3 - 12x^2 - 24x \Rightarrow u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} \min_{[-1;3]} u = \min\{u(-1), u(0), u(2), u(3)\} = u(2) = m - 32 \\ \max_{[-1;3]} u = \max\{u(-1), u(0), u(2), u(3)\} = u(3) = m + 27 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó: } M = \max\{|m - 32|, |m + 27|\} = \frac{59}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} |m - 32| = \frac{59}{2} \\ |m - 32| \geq |m + 27| \\ |m + 27| = \frac{59}{2} \\ |m + 27| \geq |m - 32| \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}.$$

Vậy có 1 số thực  $m$  để  $M = \frac{59}{2}$ .

**Câu 42.4:** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \left| \frac{x - m^2 - m}{x + 2} \right|$  thỏa  $\max_{[1;2]} y = 1$ .

Tích các phần tử của  $S$  bằng

A. -16.

B. -4.

C. 16.

D. 4.

**Lời giải**

**Chọn B**

Xét  $u = \frac{x - m^2 - m}{x + 2}$ , ta có:  $u' = \frac{2 + m^2 + m}{(x + 2)^2} > 0, \forall x \in [1; 2], \forall m \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Do đó } A = \max_{[1;2]} u = u(2) = -\frac{m^2 + m - 2}{4}; a = \min_{[1;2]} u = u(1) = -\frac{m^2 + m - 1}{3}.$$

$$\max_{[1;2]} y = \max \left\{ \left| \frac{m^2 + m - 2}{4} \right|, \left| \frac{m^2 + m - 1}{3} \right| \right\} = 1 \Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Ta có:  $S = \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \right\}$ . Vậy tích các phần tử của  $S$  bằng  $-4$ .

**Câu 42.5:** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x+1} \right| \text{ trên } [1; 2] \text{ bằng } 2. \text{ Số phần tử của } S \text{ là}$$

**A.** 1.

**B.** 2.

**C.** 4.

**D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Xét hàm số: } u = \frac{x^2 + mx + m}{x+1}.$$

$$u' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}; u' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1; 2] \\ x = -2 \notin [1; 2] \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } u' > 0 \forall x \in [1; 2] \text{ nên } \max_{[1; 2]} y = \left\{ \left| m + \frac{4}{3} \right|, \left| m \frac{1}{2} \right| \right\}.$$

$$\max_{[1; 2]} y = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ m = -\frac{10}{3} \end{cases}. \text{ Vậy } S = \left\{ \frac{2}{3}; -\frac{10}{3} \right\}.$$

**Câu 42.6:** Xét hàm số  $f(x) = |x^2 + ax + b|$ , với  $a, b$  là tham số. Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số trên  $[-1; 3]$ . Khi  $M$  nhận giá trị nhỏ nhất tính  $T = a + 2b$ .

**A.**  $T = 3$ .

**B.**  $T = 4$ .

**C.**  $T = -4$ .

**D.**  $T = 2$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Ta có: } \max \{|A|, |B|\} \geq \frac{|A+B|}{2} \quad (1). \text{ Dấu } = \text{ xảy ra khi } A = B.$$

$$\text{Ta có: } \max \{|A|, |B|\} \geq \frac{|A-B|}{2} \quad (2). \text{ Dấu } = \text{ xảy ra khi } A = -B.$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = x^2 + ax + b, \text{ có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{a}{2}.$$

$$\text{Trường hợp 1: } -\frac{a}{2} \notin [-1; 3] \Leftrightarrow a \notin [-6; 2]. \text{ Khi đó } M = \max \{|1-a+b|, |9+3a+b|\}.$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có } M \geq |4+2a| > 8.$$

$$\text{Trường hợp 2: } -\frac{a}{2} \in [-1; 3] \Leftrightarrow a \in [-6; 2]. \text{ Khi đó } M = \max \left\{ |1-a+b|, |9+3a+b|, \left| b - \frac{a^2}{4} \right| \right\}.$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức (1) và (2) ta có } M \geq \max \left\{ \left| 5 + a + b \right|, \left| b - \frac{a^2}{4} \right| \right\} \Leftrightarrow M \geq \frac{1}{8} |20 + 4a + a^2|$$

$$\Leftrightarrow M \geq \frac{1}{8} |16 + (a + 2)^2|.$$

Suy ra  $M \geq 2$ .

$$\text{Ta có: } M \text{ nhận giá trị nhỏ nhất có thể được là } M = 2 \text{ khi } \begin{cases} a = -2 \\ 5 + a + b = \frac{-a^2}{2} - b \\ 1 - a + b = 9 + 3a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Vậy  $a + 2b = -4$ .

**Câu 42.7:** Cho hàm số  $y = |x^3 - 3x^2 + m|$  (với  $m$  là tham số thực). Hỏi  $\max_{[1;2]} y$  có giá trị nhỏ nhất bằng

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

**Chọn C**

Xét hàm số  $t = x^3 - 3x^2$  với  $x \in [1; 2]$ .

Ta có  $t' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (1; 2) \\ x = 2 \notin (1; 2) \end{cases}; t(1) = -2, t(2) = -4$ . Nên  $\max_{[1;2]} t = -2$  và  $\min_{[1;2]} t = -4$ .

$$\text{Do đó } \max_{[1;2]} y = \max_{[1;2]} |m + t| = \max \{ |m - 4|; |m - 2| \}$$

$$= \max \{ |m - 4|; |2 - m| \} \geq \frac{|m - 4| + |2 - m|}{2} \geq \frac{|(m - 4) + (2 - m)|}{2} = 1.$$

Dấu bằng đạt tại  $m - 4 = 2 - m \Leftrightarrow m = 3$ .

**Câu 42.8:** Cho hàm số  $f(x) = |8x^4 + ax^2 + b|$ , trong đó  $a, b$  là tham số thực. Tìm mối liên hệ giữa  $a$  và  $b$  để giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[-1; 1]$  bằng 1.

A.  $b - 8a = 0$ .

B.  $b - 4a = 0$ .

C.  $b + 4a = 0$ .

D.  $b + 8a = 0$ .

Lời giải

**Chọn D**

Đặt  $t = x^2$ , vì  $x \in [-1; 1]$  nên  $t \in [0; 1]$ .

Ta có:  $g(t) = 8t^2 + at + b$ , đây là parabol có bề lõm quay lên và có tọa độ đỉnh là

$$I \left( -\frac{a}{6}; -\frac{a^2}{32} + b \right)$$

**Trường hợp 1:**  $-\frac{a}{6} \in [0; 1]$ . Theo yêu cầu bài toán ta có:

$$\begin{cases} -1 \leq g(0) \leq 1 \\ -1 \leq g(1) \leq 1 \\ -1 \leq -\frac{a^2}{32} + b \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq b \leq 1 \\ -1 \leq 8 + a + b \leq 1 \\ -32 \leq 32b - a^2 \leq 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq b \leq 1 & (1) \\ -1 \leq 8 + a + b \leq 1 & (2) \\ -32 \leq a^2 - 32b \leq 32 & (3) \end{cases}$$

Lấy (1) + 32(3) ta có :  $-64 \leq a^2 \leq 64$  do đó  $-8 \leq a \leq 8$ .

Lấy (3) + 32(2) ta có :  $-64 \leq a^2 + 32a + 256 \leq 64$

Suy ra :  $a^2 + 32a + 192 \leq 0 \Leftrightarrow -24 \leq a \leq -8$ .

Khi đó ta có :  $a = -8$  và  $b = 1$ .

**Thử lại:**  $g(t) = 8t^2 - 8t + 1 = 2(2t - 1)^2 - 1$

Vì  $0 \leq t \leq 1$  nên  $-1 \leq 2t - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (2t - 1)^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq g(t) = 2(2t - 1)^2 - 1 \leq 1$ .

Ta có:  $\max |g(t)| = 1$  khi  $t = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ . Nên  $a = -8$  và  $b = 1$  (thỏa mãn).

**Trường hợp 2 :**  $-\frac{a}{6} \notin [0; 1]$ . Theo yêu cầu bài toán ta có:

$$\begin{cases} -1 \leq g(0) \leq 1 \\ -1 \leq g(1) \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq b \leq 1 \\ -1 \leq 8 + a + b \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq b \leq 1 \\ -1 \leq 8 + a + b \leq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow -2 \leq a + 8 \leq 2 \Leftrightarrow -10 \leq a \leq -6$  (loại).

Vậy  $a = -8$  và  $b = 1$ .

**Câu 42.9:** Cho hàm số  $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn  $[0; 2]$ . Có bao nhiêu số nguyên  $a$  thuộc đoạn  $[-3; 3]$  sao cho  $M \leq 2m$ ?

**A.** 5.

**B.** 7.

**C.** 6.

**D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét hàm số  $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a$ .

$$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x; \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

|         |   |   |   |
|---------|---|---|---|
| $x$     | 0 | 1 | 2 |
| $g'(x)$ | + | 0 | - |
| $g(x)$  |   |   |   |

**TH1:**  $a \leq -1 \Rightarrow m = -(a+1); M = -a \Rightarrow -2(a+1) \geq -a \Leftrightarrow a \leq -2 \Rightarrow a \in \{-3; -2\}$ .

**TH2:**  $-1 < a < 0 \Rightarrow m = 0; M > 0 \Rightarrow M > 2m$  (loại).

**TH3:**  $a \geq 0 \Rightarrow m = a; M = a+1 \Rightarrow 2a \geq a+1 \Leftrightarrow a \geq 1 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3\}$ .

Vậy có 5 giá trị của  $a$  thỏa mãn đề bài.

**Câu 42.10:** Cho hàm số  $y = \left| \frac{x^4 + ax + a}{x+1} \right|$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

hàm số trên đoạn  $[1; 2]$ . Có bao nhiêu số nguyên  $a$  sao cho  $M \geq 2m$ ?

**A.** 15.

**B.** 14.

**C.** 16.

**D.** 13.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét  $u = \frac{x^4 + ax + a}{x+1}$  trên đoạn  $[1; 2]$ , ta có  $u' = \frac{3x^4 + 4x^3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [1; 2]$ .

Do đó,  $\max_{[1; 2]} u = u(2) = a + \frac{16}{3}, \min_{[1; 2]} u = u(1) = a + \frac{1}{2}$ .

**TH1:**  $a + \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} M = a + \frac{16}{3} \\ m = a + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{1}{2} \geq 0 \\ a + \frac{16}{3} \geq 2\left(a + \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{13}{3}.$

**TH2:**  $a + \frac{16}{3} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} M = -\left(a + \frac{1}{2}\right) \\ m = -\left(a + \frac{16}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{16}{3} \leq 0 \\ -\left(a + \frac{1}{2}\right) \geq -2\left(a + \frac{16}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{61}{6} \leq a \leq -\frac{16}{3}.$

**TH3:**  $\left(a + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(a + \frac{16}{3}\right) \leq 0 \Rightarrow m = 0, M = \max \left\{ \left| a + \frac{1}{2} \right|, \left| a + \frac{16}{3} \right| \right\} \Rightarrow M > 2m$  (thỏa mãn).

Ta có:  $-\frac{61}{6} \leq a \leq \frac{13}{3}, a \in \{-10; \dots; 4\}$ . Vậy có 15 số nguyên thỏa mãn.

**Câu 42.11:** Cho hàm số  $f(x) = |8\cos^4 x + a\cos^2 x + b|$ , trong đó  $a, b$  là tham số thực. Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số. Tính tổng  $a+b$  khi  $M$  nhận giá trị nhỏ nhất.

**A.**  $a+b = -8$ .

**B.**  $a+b = -9$ .

**C.**  $a+b = 0$ .

**D.**  $a+b = -7$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt  $t = \cos^2 x$ ,  $t \in [0; 1]$ , ta có hàm số  $g(t) = |8t^2 + at + b|$ . Khi đó  $M = \max_{[0;1]} g(t)$ .

Do đó:

$$M \geq g(0) = |b|;$$

$$M \geq g(1) = |8 + a + b|;$$

$$M \geq g\left(\frac{1}{2}\right) = \left|2 + \frac{1}{2}a + b\right| \Rightarrow 2M \geq |4 + a + 2b|;$$

Từ đó ta có

$$4M \geq |b| + |8 + a + b| + |-4 - a - 2b| \geq |b + (8 + a + b) + (-4 - a - 2b)| = 4$$

Hay  $M \geq 1$ .

Điều đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $|b| = |8 + a + b| = \frac{|-4 - a - 2b|}{2} = 1$  và  $b, (8 + a + b), (-4 - a - 2b)$  cùng dấu  $\Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 1 \end{cases}$ .

Vậy  $a + b = -7$ .

**Câu 42.12:** Cho hàm số  $y = |2x - x^2 - \sqrt{(x+1)(3-x)} + m|$ . Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số  $m$  để  $\max y = 3$ ?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 4.

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số xác định khi:  $(x+1)(3-x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$ .

Đặt  $t = \sqrt{(x+1)(3-x)} = \sqrt{3+2x-x^2}$  ( $t \in [0; 2]$ ) và  $2x - x^2 = t^2 - 3$ .

Khi đó ta cần tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |t^2 - t - 3 + m|$  trên đoạn  $[0; 2]$ .

Với  $u = t^2 - t - 3 + m$  ta có:  $\max_{[0;2]} u = m - 1; \min_{[0;2]} u = m - \frac{13}{4}$ .

Do đó  $\max y = \max \left\{ |m - 1|; \left| m - \frac{13}{4} \right| \right\} = 3 \Leftrightarrow m = 4; m = \frac{1}{4}$ .

**Câu 42.13:** Cho hàm số  $y = |2x - x^2 - \sqrt{(x+1)(3-x)} + m|$ . Khi giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $\frac{17}{8}$ .

B.  $\frac{9}{8}$ .

C.  $\frac{7}{8}$ .

D.  $\frac{15}{8}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số xác định khi:  $(x+1)(3-x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$ .

Đặt  $t = \sqrt{(x+1)(3-x)} = \sqrt{3+2x-x^2}$  ( $t \in [0; 2]$ ) và  $2x - x^2 = t^2 - 3$ .

Khi đó ta cần tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |t^2 - t - 3 + m|$  trên đoạn  $[0; 2]$ .

Với  $u = t^2 - t - 3 + m$  ta có:  $\max_{[0;2]} u = m - 1; \min_{[0;2]} u = m - \frac{13}{4}$ .

$$\text{Do đó } \max y = \max \left\{ |m-1|; \left| m - \frac{13}{4} \right| \right\} \geq \frac{|m-1| + \left| \frac{13}{4} - m \right|}{2} \geq \frac{\left| m-1 + \frac{13}{4} - m \right|}{2} = \frac{9}{8}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } |m-1| = \left| \frac{13}{4} - m \right| = \frac{9}{8} \Leftrightarrow m = \frac{17}{8}.$$

**Câu 42.14:** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các số nguyên  $m$  để hàm số  $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m \right|$  có giá trị lớn nhất trên đoạn  $[0; 2]$  không vượt quá 20. Tổng các phần tử của  $S$  bằng

**A.** -195.                      **B.** 210.                      **C.** 195.                      **D.** -210.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Xét } u = \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m \text{ trên đoạn } [0; 2] \text{ có } u' = x^3 - 19x + 30; \quad u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 3 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó: } \max_{[0;2]} u = \max \{u(0); u(2)\} = \max \{m; m+6\} = m+6; \min_{[0;2]} u = m.$$

$$\text{Do đó: } \max_{[0;2]} y = \max \{|m|; |m+6|\} \leq 20 \Leftrightarrow \begin{cases} |m| \leq |m+6| \leq 20 \\ |m+6| \leq |m| \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -13 \leq m \leq -6 \\ -20 \leq m \leq -13 \end{cases} \Leftrightarrow -20 \leq m \leq -6$$

$$\text{Mà } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m \in \{-20; -19; \dots, -6\}. \text{ Vậy } S = -\sum_{k=6}^{20} k = -195.$$

**Câu 42.15:** Cho hàm số  $y = |2x^3 - 3x^2 + m|$ . Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để  $\min_{[-1;3]} f(x) \leq 3$ ?

**A.** 4.                      **B.** 8.                      **C.** 31.                      **D.** 39.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Xét } u = 2x^3 - 3x^2 + m, \text{ ta có: } u' = 6x^2 - 6x; \quad u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} \min_{[-1;3]} u = \min \{u(-1), u(3), u(0), u(1)\} = \min \{m-5, m+27, m, m-1\} = m-5 \\ \max_{[-1;3]} u = \max \{u(-1), u(3), u(0), u(1)\} = \max \{m-5, m+27, m, m-1\} = m+27 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } m - 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 5 \Rightarrow \min_{[-1;3]} f(x) = m - 5 \leq 3 \Leftrightarrow m \leq 8 \Rightarrow m \in \{5; 6; 7; 8\}.$$

TH2:

$$m + 27 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -27 \Rightarrow \min_{[-1;3]} f(x) = -(m + 27) \leq 3 \Leftrightarrow m \geq -30 \Rightarrow m \in \{-30; -29; -28; -27\}.$$

$$\text{TH3: } (m - 5)(m + 27) < 0 \Leftrightarrow -27 < m < 5 \Rightarrow \min_{[-1;3]} f(x) = 0 \text{ (thỏa mãn)}.$$

$$\text{Vậy } m \in \{-30; -29; -28; \dots; 7; 8\}.$$

**Câu 42.16:** Cho hàm số  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [0; 1]$ . Tìm giá trị lớn nhất của  $f'(0)$ .

**A.** 8.

**B.** 0.

**C.** 6.

**D.** 4.

**Lời giải.**

**Chọn A**

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(0) = b.$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của  $b$  với điều kiện  $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [0; 1]$ .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(0) = c \\ f(1) = a + b + c \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = f(1) - f(0) \\ a + 2b = 4f\left(\frac{1}{2}\right) - 4f(0) \Rightarrow b = 4f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) - 3f(0). \\ c = f(0) \end{cases}$$

$$|f(x)| \leq 1, \forall x \in [0; 1] \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq f(0) \leq 1 \\ -1 \leq f(1) \leq 1 \\ -1 \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \leq 1 \end{cases} \Rightarrow b = 4f\left(\frac{1}{2}\right) + (-f(1)) + 3(-f(0)) \leq 4 + 1 + 3 = 8.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ f(1) = -1 \\ f(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1, \\ a + b + c = -1, \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 8 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -8x^2 + 8x - 1.$$

Vậy giá trị lớn nhất của  $f'(0)$  bằng 8.

**Câu 42.17:** Cho hàm số  $y = |x^4 - 2x^3 + x^2 + a|$ . Có bao nhiêu số thực  $a$  để  $\min_{[-1;2]} y + \max_{[-1;2]} y = 10$ ?

**A.** 2.

**B.** 5.

**C.** 3.

**D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Xét } u = x^4 - 2x^3 + x^2 + a \text{ trên đoạn } [-1; 2], \text{ ta có: } u' = 4x^3 - 6x^2 + 2x; u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} M = \max_{[-1;2]} u = \max \left\{ u(-1), u(0), u\left(\frac{1}{2}\right), u(1) \right\} = u(-1) = u(2) = a+4 \\ m = \min_{[-1;2]} u = \min \left\{ u(-1), u(0), u\left(\frac{1}{2}\right), u(1) \right\} = u(0) = u(1) = a \end{cases}$$

**TH1:**  $m \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$ . Khi đó:  $\min_{[-1;2]} y = m$ ;  $\max_{[-1;2]} y = M$

$$\text{Ta có điều kiện: } \begin{cases} a \geq 0 \\ a+a+4=10 \end{cases} \Leftrightarrow a=3.$$

**TH2:**  $M \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -4$ . Khi đó:  $\min_{[-1;2]} y = -M$ ;  $\max_{[-1;2]} y = -m$ .

$$\text{Ta có điều kiện: } \begin{cases} a \leq -4 \\ -(a+4)-a=10 \end{cases} \Leftrightarrow a=-7.$$

**TH3:**  $m < 0 < M \Leftrightarrow -4 < a < 0$ .

$$\text{Khi đó: } \min_{[-1;2]} y = 0; \max_{[-1;2]} y = \max \{|a+4|, |a|\} = \max \{a+4, -a\} < 10.$$

$$\text{Suy ra } \min_{[-1;2]} y + \max_{[-1;2]} y < 0+10=10 \text{ (loại).}$$

$$\text{Vậy } a \in \{3; -7\}.$$

**Câu 42.18:** Cho hai số thực  $x; y$  thỏa mãn  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 + \sqrt{y^2 + 6y + 10} = \sqrt{6 + 4x - x^2}$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $T = \left| \sqrt{x^2 + y^2} - a \right|$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn  $[-10; 10]$  của tham số  $a$  để  $M \geq 2m$ ?

A. 17.

B. 16.

C. 15.

D. 18.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Biến đổi giả thiết có: } x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 + \sqrt{y^2 + 6y + 10} = \sqrt{6 + 4x - x^2}$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 6y + 10 + \sqrt{y^2 + 6y + 10} = 6 + 4x - x^2 + \sqrt{6 + 4x - x^2} \quad (*)$$

Đặt  $f(t) = t + \sqrt{t}$ ,  $t \in [0; +\infty)$ . Ta có  $f(t)$  đồng biến trên  $[0; +\infty)$ .

$$\text{Do đó ta có: } (*) \Leftrightarrow f(\sqrt{y^2 + 6y + 10}) = f(\sqrt{6 + 4x - x^2}) \Leftrightarrow y^2 + 6y + 10 = 6 + 4x - x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4 = 4x - 6y \leq \sqrt{(4^2 + 6^2)(x^2 + y^2)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{13} - 3 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3 + \sqrt{13} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - a \in [\sqrt{13} - 3 - a; 3 + \sqrt{13} - a].$$

$$\text{TH1: } \sqrt{13} - 3 - a \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \sqrt{13} - 3 - a \\ M = 3 + \sqrt{13} - a \end{cases} \Rightarrow ycbt \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{13} - 3 - a \geq 0 \\ 3 + \sqrt{13} - a \geq 2(\sqrt{13} - 3 - a) \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{13} - 9 \leq a \leq 9 + \sqrt{13}.$$

$$\text{TH2: } \sqrt{13} - 3 - a \leq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = -(\sqrt{13} + 3 - a) \\ M = -(-3 + \sqrt{13} - a) \end{cases} \Rightarrow ycbt \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \sqrt{13} - a \leq 0 \\ -(\sqrt{13} - 3 - a) \geq -2(\sqrt{13} + 3 - a) \end{cases} \Leftrightarrow 3 + \sqrt{13} \leq a \leq 9 + \sqrt{13}$$

$$\text{TH3: } (\sqrt{13} - 3 - a)(3 + \sqrt{13} - a) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{13} - 3 < a < \sqrt{13} + 3 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ M > 0 \end{cases} (M \geq 2m).$$

$$\text{Vậy } a \in [\sqrt{13} - 9; 9 + \sqrt{13}]. \text{ Đối chiếu với } a \in [-10; 10] \Rightarrow a \in \{-5; \dots; 10\}.$$

**Câu 42.19:** Cho hàm số  $f(x) = |2x^3 - 9x^2 + 12x + m|$ . Có bao nhiêu số nguyên  $m \in (-20; 20)$  để với mọi bộ ba số thực  $a, b, c \in [1; 3]$  thì  $f(a), f(b), f(c)$  là độ dài ba cạnh một tam giác?

A. 10.

B. 8.

C. 25.

D. 23.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Xét } u = 2x^3 - 9x^2 + 12x + m \text{ trên } [1; 3], \text{ ta có: } u' = 6x^2 - 18x + 12; u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$\min_{[1;3]} u = \min \{u(0), u(1), u(2), u(3)\} = m + 4.$$

$$\max_{[1;3]} u = \max \{u(0), u(1), u(2), u(3)\} = m + 9.$$

Để  $f(a), f(b), f(c)$  là độ dài ba cạnh một tam giác thì ta phải có  $f(a) + f(b) > f(c)$ .

Chọn  $f(a) = f(b) = \min_{[-2;1]} f(x), f(c) = \max_{[-2;1]} f(x)$  ta có điều kiện  $2 \min_{[-2;1]} f(x) > \max_{[-2;1]} f(x)$ .

Ngược lại: với  $2 \min_{[-2;1]} f(x) > \max_{[-2;1]} f(x)$ , ta có:  $f(a) + f(b) - f(c) \geq 2 \min_{[-2;1]} f(x) > \max_{[-2;1]} f(x) > 0$ .

Vậy điều kiện cần và đủ để  $f(a), f(b), f(c)$  là độ dài ba cạnh một tam giác là  $2 \min_{[-2;1]} f(x) > \max_{[-2;1]} f(x)$

$$\text{TH1: } m + 4 \geq 0 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = m + 4; \max_{[1;3]} f(x) = m + 9 \Rightarrow \begin{cases} m + 4 \geq 0 \\ 2(m + 4) > m + 9 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

$$\text{TH2: } m + 9 \leq 0 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = -m - 9; \max_{[1;3]} f(x) = -m - 4 \Rightarrow \begin{cases} m + 9 \leq 0 \\ 2(-m - 9) > -m - 4 \end{cases} \Leftrightarrow m < -14$$

$$\text{TH3: } (m + 4)(m + 9) < 0 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 > \max_{[1;3]} f(x) = m + 9 \text{ (loại)}$$

Vậy  $m \in \{-19; -15; 2; \dots; 18; 19\}$ . Có 23 số nguyên thỏa mãn.

**Câu 42.20:** Cho hàm số  $f(x) = |x^3 - 3x + m|$ . Có bao nhiêu số nguyên  $m \in (-20; 20)$  để với mọi bộ ba số thực  $a, b, c \in [-2; 1]$  thì  $f(a), f(b), f(c)$  là độ dài ba cạnh của một tam giác nhọn.

A. 18.

B. 16.

C. 14.

D. 12.

Lời giải

Chọn B

Xét  $u = x^3 - 3x + m$  trên đoạn, ta có:  $u' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ .

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} \max_{[-2;1]} u = \max \{u(-2), u(1), u(-1)\} = \max \{m-2, m-2, m+2\} = m+2 \\ \min_{[-2;1]} u = \min \{u(-2), u(1), u(-1)\} = \min \{m-2, m-2, m+2\} = m-2 \end{cases}$$

Để  $f(a), f(b), f(c)$  là độ dài ba cạnh của một tam giác nhọn ta phải có  $f^2(a) + f^2(b) > f^2(c)$ .

Chọn  $f(a) = f(b) = \min_{[-2;1]} f(x); f(c) = \max_{[-2;1]} f(x)$  ta có điều kiện

$$2 \left( \min_{[-2;1]} f(x) \right)^2 > \left( \max_{[-2;1]} f(x) \right)^2.$$

Ngược lại với  $2 \left( \min_{[-2;1]} f(x) \right)^2 > \left( \max_{[-2;1]} f(x) \right)^2$ , ta có

$$f^2(a) + f^2(b) - f^2(c) \geq 2 \left( \min_{[-2;1]} f(x) \right)^2 - \left( \max_{[-2;1]} f(x) \right)^2 > 0.$$

Vậy điều kiện cần và đủ để  $f(a), f(b), f(c)$  là độ dài ba cạnh của một tam giác là

$$2 \left( \min_{[-2;1]} f(x) \right)^2 > \left( \max_{[-2;1]} f(x) \right)^2.$$

$$\text{TH1: } (m-2)(m+2) < 0 \Rightarrow 2 \min_{[-2;1]} f(x) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0^2 > \left( \max_{[-2;1]} f(x) \right)^2 \text{ (loại).}$$

$$\text{TH2: } m-2 \geq 0.$$

$$\Rightarrow \min_{[-2;1]} f(x) = m-2; \max_{[-2;1]} f(x) = m+2 \Rightarrow \begin{cases} m-2 \geq 0 \\ 2(m-2)^2 > (m+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 6 + 4\sqrt{2}.$$

$$\text{TH3: } m+2 \leq 0.$$

$$\Rightarrow \min_{[-2;1]} f(x) = -(m+2); \max_{[-2;1]} f(x) = -(m-2) \Rightarrow \begin{cases} m+2 \leq 0 \\ 2(m+2)^2 > (m-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow m < -6 - 4\sqrt{2}.$$

Suy ra  $m \in \{-19, -18, \dots, -12, 12, 13, \dots, 19\}$ . Vậy có 16 số nguyên  $m$  thỏa mãn.

**Câu 42.21:** Gọi tập  $S$  là tập hợp giá trị thực của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^3 - 3x + m|$  trên đoạn  $[0; 2]$  bằng 3. Số phần tử của  $S$  là

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 6.

## Lời giải

## Chọn B

Xét  $u = x^3 - 3x + m$  có:  $u' = 3x^2 - 3$ ;  $u' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [0; 2]$ . Khi đó:

$$A = \max_{[0;2]} u = \max \{u(0), u(1), u(2)\} = \max \{m, m-2, m+2\} = m+2.$$

$$a = \min_{[0;2]} u = \min \{u(0), u(1), u(2)\} = \min \{m, m-2, m+2\} = m-2.$$

$$\text{Vậy } \max_{[0;2]} y = \max \{|A|, |a|\} = \max \{|m+2|, |m-2|\} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} |m+2| = 3 \\ |m+2| \geq |m-2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}.$$

**Câu 42.22:** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = |x^4 - 8x^2 + m|$  trên đoạn  $[-1; 1]$  bằng 5. Tổng tất cả các phần tử của  $S$  bằng

A. -7.

B. 7.

C. 5.

D. -5.

## Lời giải

## Chọn B

Xét hàm số  $g(x) = x^4 - 8x^2 + m, x \in [-1; 1]$ , ta có  $g'(x) = 4x^3 - 16x$ ;  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$ .

$$g(-1) = g(1) = -7 + m, \quad g(0) = m.$$

$$\text{Do đó: } \max_{[-1;1]} f(x) = \max \{|-7+m|, |m|\} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} |-7+m| = 5 \\ |-7+m| \geq |m| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 5 \end{cases}$$

Vậy  $S = \{2; 5\}$ . Vậy tổng các giá trị của  $S$  bằng 7.

**Câu 42.23:** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = \left| \frac{-4x+m}{x-3} \right|$  trên đoạn  $[-2; 2]$  bằng 6. Tổng tất cả các phần tử của  $S$  bằng

A. -16.

B. 16.

C. 2.

D. 14.

## Lời giải

## Chọn B

Xét hàm số  $g(x) = \frac{-4x+m}{x-3}, x \in [-2; 2]$ , ta có  $g'(x) = \frac{12-m}{(x-3)^2}$ .

$$g(-2) = -\frac{8+m}{5}, \quad g(2) = 8-m.$$

$$\text{Do đó : } \max_{[-2;2]} f(x) = \max \left\{ \left| -\frac{8+m}{5} \right|, |8-m| \right\} = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} \left| -\frac{8+m}{5} \right| = 6 \\ \left| -\frac{8+m}{5} \right| \geq |8-m| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=14 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} |8-m| = 6 \\ |8-m| \geq \left| -\frac{8+m}{5} \right| \end{cases}$$

Vậy  $S = \{2; 14\}$ . Vậy tổng các giá trị của  $S$  bằng 16.

**Câu 42.24:** Có bao nhiêu giá trị thực của tham số  $m$  để giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^2 + 2x + m - 4|$  trên đoạn  $[-2; 1]$  bằng 4?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

**Chọn B**

$f(x) = x^2 + 2x + m - 4$  có  $f'(x) = 2x + 2$ ,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ . Do đó

$$\max_{[-2;1]} |x^2 + 2x + m - 4| = \max \{|m-1|; |m-4|; |m-5|\}.$$

Ta thấy  $m-5 < m-4 < m-1$  với mọi  $m \in \mathbb{R}$ , suy ra  $\max_{[-2;1]} y$  chỉ có thể là  $|m-5|$  hoặc  $|m-1|$ .

$$\text{Nếu } \max_{[-2;1]} y = |m-5| \text{ thì } \begin{cases} |m-5| = 4 \\ |m-5| \geq |m-1| \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

$$\text{Nếu } \max_{[-2;1]} y = |m-1| \text{ thì } \begin{cases} |m-1| = 4 \\ |m-1| \geq |m-5| \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

Vậy  $m \in \{1; 5\}$ .

**Câu 42.25:** Cho hàm số  $y = \frac{2x-m}{x+2}$  với  $m$  là tham số,  $m \neq -4$ . Biết  $\min_{x \in [0;2]} f(x) + \max_{x \in [0;2]} f(x) = -8$ . Giá trị của tham số  $m$  bằng

A. 10.

B. 8.

C. 9.

D. 12.

Lời giải

**Chọn D**

Xét hàm số xác định trên tập  $D = [0; 2]$

Ta có  $y' = \frac{4+m}{(x+2)^2}$ . Nhận xét  $\forall m \neq -4$  hàm số luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên  $[0; 2]$  nên

giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên  $[0; 2]$  luôn đạt được tại  $x = 0$ ,  $x = 2$ .

$$\text{Theo bài ra ta có } f(0) + f(2) = -8 \Leftrightarrow \frac{-m}{2} + \frac{4-m}{4} = -8 \Leftrightarrow m = 12.$$

**Câu 42.26:** Cho hàm số  $f(x) = |2x^3 - 3x^2 + m|$ . Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để  $\min_{[-1;3]} f(x) \leq 3$ ?

A. 4.

B. 8.

C. 31.

D. 39.

Lời giải

Chọn D

Xét  $u = 2x^3 - 3x^2 + m$  có  $u' = 6x^2 - 6x$ ;  $u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ .

Do đó  $\begin{cases} \min_{[-1;3]} u = \min \{u(-1), u(3), u(0), u(1)\} = \min \{m-5, m+27, m, m-1\} = m-5 \\ \max_{[-1;3]} u = \max \{u(-1), u(3), u(0), u(1)\} = \max \{m-5, m+27, m, m-1\} = m+27 \end{cases}$

+ Nếu  $m-5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 5$  thì  $\min_{[-1;3]} f(x) = m-5 \leq 3 \Leftrightarrow m \leq 8 \Rightarrow m \in \{5; 6; 7; 8\}$ .

+ Nếu  $m+27 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -27$  thì  $\min_{[-1;3]} f(x) = -(m+27) \leq 3 \Leftrightarrow m \geq -30$ .

$\Rightarrow m \in \{-30; -29; -28; -27\}$ .

Nếu  $(m-5)(m+27) < 0 \Leftrightarrow -27 < m < 5$  thì  $\min_{[-1;3]} f(x) = 0$  (thỏa mãn).

Vậy  $m \in \{-30; \dots; 8\}$  có tất cả 39 số nguyên thỏa mãn.

**Câu 42.27:** Cho hàm số  $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ . Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để  $\min_{[1;3]} f(x) \leq 3$ ?

A. 4.

B. 10.

C. 6.

D. 11.

Lời giải

Chọn D

Với  $u = x^3 - 3x^2 + m$  có  $u' = 3x^2 - 6x$ ;  $u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ .

Do đó  $\begin{cases} \min_{[1;3]} u = \min \{u(1), u(3), u(0), u(2)\} = \min \{m-2, m, m-4\} = m-4 \\ \max_{[1;3]} u = \max \{u(1), u(3), u(0), u(2)\} = \max \{m-2, m, m-4\} = m \end{cases}$

+ Nếu  $m-4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 4$  thì  $\min_{[1;3]} f(x) = m-4 \leq 3 \Leftrightarrow m \leq 7 \Rightarrow m \in \{4; 5; 6; 7\}$ .

+ Nếu  $m \leq 0$  thì  $\min_{[1;3]} f(x) = -m \leq 3 \Leftrightarrow m \geq -3 \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0\}$ .

+ Nếu  $0 < m < 4$  thì  $\min_{[1;3]} u < 0$ ;  $\max_{[1;3]} u > 0 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = 0$  (thỏa mãn).

Vậy  $m \in \{-3; \dots; 7\}$  có tất cả 11 số nguyên thỏa mãn.

**Câu 42.28:** Cho hàm số  $y = |x^2 + x + m|$ . Tổng tất cả giá trị thực của tham số  $m$  để  $\min_{[-2;2]} y = 2$  bằng

A.  $-\frac{31}{4}$ .B.  $-8$ .C.  $-\frac{23}{4}$ .D.  $\frac{9}{4}$ .

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số  $u = x^2 + x + m$  trên đoạn  $[-2; 2]$ , có:  $u' = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ .

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} \max_{[-2; 2]} u = \max \left\{ u(-2), u\left(-\frac{1}{2}\right), u(2) \right\} = m + 6 \\ \min_{[-2; 2]} u = \min \left\{ u(-2), u\left(-\frac{1}{2}\right), u(2) \right\} = m - \frac{1}{4} \end{cases}$$

+ Nếu  $m - \frac{1}{4} \geq 0$  hay  $m \geq \frac{1}{4}$  thì  $\min_{[-2; 2]} y = m - \frac{1}{4} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$  (thỏa mãn).

+ Nếu  $m + 6 \leq 0$  hay  $m \leq -6$  thì  $\min_{[-2; 2]} y = -m - 6 = 2 \Leftrightarrow m = -8$  (thỏa mãn).

+ Nếu  $-6 < m < \frac{1}{4}$  thì  $\min_{[-2; 2]} y = 0$  (không thỏa mãn).

Vậy có hai số thực  $m = \frac{9}{4}$  và  $m = -8$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Tổng các giá trị đó bằng  $-\frac{23}{4}$ .

**Câu 42.29:** Gọi  $\alpha, \beta$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x) = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$  trên đoạn  $[-3; 2]$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên  $m \in (-2019; 2019)$  để  $2\beta \geq \alpha$ .

A. 3209.

B. 3215.

C. 3211.

D. 3213.

**Lời giải**

**Chọn D**

Xét hàm số  $y = g(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \Rightarrow y' = g'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$ .

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$g(0) = m; g(-1) = m - 5; g(2) = m - 32; g(-3) = 243 + m.$$

$$\max_{[-3; 2]} g = m + 243; \min_{[-3; 2]} g = m - 32.$$

+ Nếu  $m - 32 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 32$  thì  $\alpha = m + 243, \beta = m - 32$ . Khi đó:  $2\beta \geq \alpha \Leftrightarrow m \geq 307$ .

+ Nếu  $m + 243 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -243$  thì  $\alpha = -(m - 32); \beta = -(m + 243)$ .

Khi đó:  $2\beta \geq \alpha \Leftrightarrow m \leq -518$ .

+ Nếu  $-243 < m < 32 \Leftrightarrow (m - 32)(m + 243) < 0$  thì

$$\max \{|m + 243|, |m - 32|\} = \max \{m + 243, 32 - m\} > 0; \beta = 0.$$

Khi đó, không thỏa điều kiện  $2\beta \geq \alpha$ .

Do đó:  $-2019 < m \leq -518$  hoặc  $307 \leq m < 2019$ .

Vậy 3213 số.

**Câu 42.30:** Cho hàm số  $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn  $[0; 2]$ . Có bao nhiêu số nguyên  $a$  thuộc đoạn  $[-3; 3]$  sao cho  $M \leq 2m$ ?

A. 3.

B. 7.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số  $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a$ .

$$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x; \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

|         |                                                                                |   |   |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| $x$     | 0                                                                              | 1 | 2 |
| $g'(x)$ | +                                                                              | 0 | - |
| $g(x)$  | $  \begin{array}{ccc}  & \nearrow^{a+1} & \searrow \\  a & & a  \end{array}  $ |   |   |

Do  $2m \geq M > 0$  nên  $m > 0$  suy ra  $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in [0; 2]$ .

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a+1 < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -1 \\ a > 0 \end{cases}.$$

Nếu  $a < -1$  thì  $M = -a, m = -a - 1 \Rightarrow 2(-a - 1) \geq -a \Leftrightarrow a \leq -2$ .

Nếu  $a > 0$  thì  $M = a + 1, m = a \Rightarrow 2a \geq a + 1 \Leftrightarrow a \geq 1$ .

Do đó  $a \leq -2$  hoặc  $a \geq 1$ , do  $a$  nguyên và thuộc đoạn  $[-3; 3]$  nên  $a \in \{-3; -2; 1; 2; 3\}$ .

Vậy có 5 giá trị của  $a$  thỏa mãn đề bài.

**Câu 42.31:** Xét hàm số  $f(x) = |x^2 + ax + b|$ , với  $a, b$  là tham số. Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số trên  $[-1; 3]$ . Khi  $M$  nhận giá trị nhỏ nhất có thể được, tính  $a + 2b$ .

A. 3.

B. 4.

C. -4.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có  $\max\{|A|, |B|\} \geq \frac{|A+B|}{2}$  (1). Dấu = xảy ra khi  $A = B$ .

Ta có  $\max\{|A|, |B|\} \geq \frac{|A-B|}{2}$  (2). Dấu = xảy ra khi  $A = -B$ .

Xét hàm số  $g(x) = x^2 + ax + b$ , có  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-a}{2}$ .

**Trường hợp 1:**  $\frac{-a}{2} \notin [-1; 3] \Leftrightarrow a \notin [-6; 2]$ . Khi đó  $M = \max \{|1 - a + b|, |9 + 3a + b|\}$ .

Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có  $M \geq |4 + 2a| > 8$ .

**Trường hợp 2:**  $\frac{-a}{2} \in [-1; 3] \Leftrightarrow a \in [-6; 2]$ . Khi đó  $M = \max \left\{ |1 - a + b|, |9 + 3a + b|, \left| b - \frac{a^2}{4} \right| \right\}$ .

Áp dụng bất đẳng thức (1) và (2) ta có  $M \geq \max \left\{ |5 + a + b|, \left| b - \frac{a^2}{4} \right| \right\} \Leftrightarrow M \geq \frac{1}{8} |20 + 4a + a^2|$   
 $\Leftrightarrow M \geq \frac{1}{8} |16 + (a + 2)^2|$ .

Suy ra  $M \geq 2$ .

Vậy  $M$  nhận giá trị nhỏ nhất có thể được là  $M = 2$  khi  $\begin{cases} a = -2 \\ 5 + a + b = \frac{-a^2}{2} - b \\ 1 - a + b = 9 + 3a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$ .

Do đó  $a + 2b = -4$ .

**Câu 42.32:** Có bao nhiêu số thực  $m$  để hàm số  $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$  có giá trị lớn nhất trên đoạn  $[-3; 2]$  bằng  $\frac{275}{2}$ ?

A. 4.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

**Chọn D**

$$y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m| \leq \frac{275}{2}, \forall x \in [-3; 2] \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \leq \frac{275}{2}; \forall x \in [-3; 2] \\ 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \geq -\frac{275}{2}; \forall x \in [-3; 2] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - \frac{275}{2} \leq -3x^4 + 4x^3 + 12x^2; \forall x \in [-3; 2] \\ m + \frac{275}{2} \geq -3x^4 + 4x^3 + 12x^2; \forall x \in [-3; 2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - \frac{275}{2} \leq \min g(x); \forall x \in [-3; 2] \\ m + \frac{275}{2} \geq \max g(x); \forall x \in [-3; 2] \end{cases}$$

Xét  $g(x) = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2; \forall x \in [-3; 2]$

Khảo sát hàm số trên đoạn  $[-3; 2]$  ta được  $\min = -243; \max = 32$ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - \frac{275}{2} \leq -243 \\ m + \frac{275}{2} \geq 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{211}{2} \\ m \geq -\frac{211}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{211}{2}$$

Như vậy  $m = -\frac{211}{2} \Leftrightarrow y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m| \leq \frac{275}{2}; \forall x \in [-3; 2]$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi  $m = -\frac{211}{2}$  nên có 1 giá trị cần tìm.

**Câu 42.33:** Cho hàm số  $y = |x^2 + 2x + m - 4|$  (với  $m$  là tham số thực). Hỏi  $\max_{[-2;1]} y$  có giá trị nhỏ nhất là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Đặt  $t = x^2 + 2x - 4$ , ta có  $t' = 2x + 2$ .

$$t' = 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \in (-2; 1).$$

$$t(-2) = -4, \quad t(-1) = -5, \quad t(1) = -1.$$

Suy ra:  $\max_{[-2;1]} (t + m) = m - 1, \min_{[-2;1]} (t + m) = m - 5$ , do đó

$$\begin{aligned} \max_{[-2;1]} y &= \max_{[-2;1]} |t + m| = \max \{|m - 5|, |m - 1|\} = \max \{|m - 5|, |1 - m|\} \geq \frac{|m - 5| + |1 - m|}{2} \\ &\geq \frac{|(m - 5) + (1 - m)|}{2} = 2 \text{ dấu bằng đặt tại } m - 5 = 1 - m \Leftrightarrow m = 3. \end{aligned}$$

**Câu 42.34:** Cho hàm số  $y = |x^3 - 3x^2 + m|$  (với  $m$  là tham số thực). Hỏi  $\max_{[1;2]} y$  có giá trị nhỏ nhất là bao

nhiều?

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số:  $t = x^3 - 3x^2$  với  $x \in [1; 2]$ .

$$\text{Ta có } t' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (1; 2) \\ x = 2 \notin (1; 2) \end{cases}; \quad t(1) = -2, \quad t(2) = -4. \text{ Nên } \max_{[1;2]} t = -2 \text{ và } \min_{[1;2]} t = -4.$$

$$\text{Do đó } \max_{[1;2]} y = \max_{[1;2]} |m + t| = \max \{|m - 4|; |m - 2|\}$$

$$= \max \{|m - 4|; |2 - m|\} \geq \frac{|m - 4| + |2 - m|}{2} \geq \frac{|(m - 4) + (2 - m)|}{2} = 1.$$

Dấu bằng đặt tại  $m - 4 = 2 - m \Leftrightarrow m = 3$ .

**Câu 42.35:** Cho hàm số  $y = \left| \frac{x^2 - (m+1)x + 2m + 2}{x - 2} \right|$  (với  $m$  là tham số thực). Hỏi  $\max_{[-1;1]} y$  có giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

A.  $\frac{3}{2}$ .B.  $\frac{1}{2}$ .

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có  $y = \left| \frac{x^2 - x + 2}{x - 2} - m \right| = |t - m|$ , trong đó  $t = \frac{x^2 - x + 2}{x - 2} \in [-2; -1], \forall x \in [-1; 1]$ .

$$t' = \frac{x^2 - 4x}{(x - 2)^2} \Rightarrow t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in (-1; 1) \\ x = 4 \notin (-1; 1) \end{cases}.$$

$$t(-1) = -\frac{4}{3}, t(0) = -1, t(1) = -2$$

Do đó  $\max_{[-1; 1]} y = \max_{[-1; 1]} |t - m| = \max \{|m + 2|, |m + 1|\} = \max \{|m + 2|, |-m - 1|\}$

$$\geq \frac{|m + 2| + |-m - 1|}{2} \geq \frac{|(m + 2) + (-m - 1)|}{2} = \frac{1}{2}.$$

Dấu bằng đạt tại  $m + 2 = -m - 1 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$ .

**Câu 42.36:** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x + 1} \right| \text{ trên } [1; 2] \text{ bằng } 2. \text{ Số phần tử của } S \text{ là}$$

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

**Chọn C**

Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

Xét hàm số:  $f(x) = \frac{x^2 + mx + m}{x + 1}$ .

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1; 2] \\ x = -2 \notin [1; 2] \end{cases}.$$

$$f'(x) > 0, \forall x \in [1; 2] \text{ nên } \max_{[1; 2]} y = \max \left\{ \left| m + \frac{4}{3} \right|, \left| m + \frac{1}{2} \right| \right\}$$

$$\max_{[1; 2]} y = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left| m + \frac{4}{3} \right| = 2 \\ \left| m + \frac{4}{3} \right| > \left| m + \frac{1}{2} \right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ m = -\frac{5}{2} \end{cases}.$$

Vậy có hai giá trị của  $m$  thỏa mãn.

**Câu 42.37:** Cho hàm số  $y = |x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27|$ . Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn  $[-3; -1]$  có giá trị nhỏ nhất bằng

A. 26.

B. 18.

C. 28.

D. 16.

Lời giải

**Chọn B**

Xét  $u = x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27$  trên đoạn  $[-3; -1]$  ta có:  $u' = 3x^2 + 2x + m^2 + 1 > 0, \forall x$ .

Do đó  $A = \max_{[-3; -1]} u = u(-1) = 26 - m^2$ ;  $a = \min_{[-3; -1]} u = u(-3) = 6 - 3m^2$ .

Do  $M = \max_{[-3; -1]} y = \max \{|26 - m^2|, |6 - 3m^2|\}$  và  $4M \geq 3|26 - m^2| + |6 - 3m^2| \geq 72$ .

Vậy  $M \geq 18$ .

Dấu bằng xảy ra khi  $|26 - m^2| = |6 - 3m^2| = 18 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{2}$ .

**Câu 42.38:** Xét các số thực dương  $x, y$  thỏa mãn  $2018^{\frac{2(x^2-y+1)}{(x+1)^2}} = \frac{2x+y}{(x+1)^2}$ . Giá trị nhỏ nhất  $P_{\min}$  của biểu

thức  $P = 2y - 3x$  bằng

**A.**  $P_{\min} = \frac{3}{4}$ .

**B.**  $P_{\min} = \frac{5}{6}$ .

**C.**  $P_{\min} = \frac{7}{8}$ .

**D.**  $P_{\min} = \frac{1}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:

$$2018^{\frac{2(x^2-y+1)}{(x+1)^2}} = \frac{2x+y}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow 2(x^2 - y + 1) = \log_{2018}(2x + y) - \log_{2018}(x^2 + 2x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_{2018}(x^2 + 2x + 1) + 2(x^2 + 2x + 1) = \log_{2018}(2x + y) + 2(2x + y) (*)$$

Xét hàm:  $f(t) = \log_{2018} t + 2t, t > 0$ .

$$\text{Suy ra: } f'(t) = \frac{1}{t \ln 2018} + 2 > 0, \forall t > 0.$$

Do đó hàm  $f(t)$  đồng biến trên khoảng  $(0; +\infty)$ .

$$\text{Mà } (*) \Leftrightarrow f(x^2 + 2x + 1) = f(2x + y) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x + y \Leftrightarrow y = x^2 + 1.$$

$$\text{Khi đó: } P = 2y - 3x = 2x^2 - 3x + 2 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \geq \frac{7}{8}.$$

$$\text{Kết luận: } P_{\min} = \frac{7}{8} \text{ khi } x = \frac{3}{4}.$$

**Câu 42.39:** Cho hàm số  $f(x) = |8x^4 + ax^2 + b|$ , trong đó  $a, b$  là tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[-1; 1]$  bằng 1. Hãy chọn khẳng định đúng?

**A.**  $a < 0, b < 0$

**B.**  $a > 0, b > 0$

**C.**  $a < 0, b > 0$

**D.**  $a > 0, b < 0$

**Lời giải**

**Chọn C**

**Cách 1.**

$$\text{Xét } g(x) = 8x^4 + ax^2 + b, \quad g'(x) = 32x^3 + 2ax = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{a}{16} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \max_{[-1;1]} f(x) = 1 \Rightarrow g(0) = b \in [-1;1].$$

**TH1.**  $a > 0$ . Ta có  $g(1) = g(-1) = 8 + a + b > 1$ . Suy ra  $\max_{[-1;1]} f(x) > 1$  không thỏa YCBT.

**TH2.**  $a < 0$ .

Nếu  $-\frac{a}{16} > 1 \Leftrightarrow a < -16$ . Ta có  $g(1) = g(-1) = 8 + a + b < -1$ . Suy ra  $\max_{[-1;1]} f(x) > 1$  không thỏa YCBT.

$$\text{Nếu } -\frac{a}{16} < 1 \Leftrightarrow a > -16.$$

Ta có BBT

|         |         |                        |            |                       |            |   |
|---------|---------|------------------------|------------|-----------------------|------------|---|
| $x$     | -1      | $-\frac{\sqrt{-a}}{4}$ | 0          | $\frac{\sqrt{-a}}{4}$ | 1          |   |
| $g'(x)$ |         | -                      | 0          | +                     | 0          | + |
| $g(x)$  | $8+a+b$ |                        | $b$        |                       | $8+a+b$    |   |
|         |         | $\searrow$             | $\swarrow$ | $\searrow$            | $\swarrow$ |   |
|         |         | $b-\frac{a^2}{32}$     |            | $b-\frac{a^2}{32}$    |            |   |

$$\bullet \max_{[-1;1]} f(x) = b = 1. \text{ Khi đó YCBT } \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{a^2}{32} \geq -1 \\ 8 + a + b \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \leq 64 \\ a \leq -8 \end{cases} \Leftrightarrow a = -8 \text{ (thỏa } a > -16)$$

$$\bullet \max_{[-1;1]} f(x) = 8 + a + b = 1. \text{ Khi đó, YCBT } \Leftrightarrow \begin{cases} b \leq 1 \\ b - \frac{a^2}{32} \geq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \geq -8 \\ \frac{a^2}{32} + a + 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -8 \\ -24 \leq a \leq -8 \end{cases} \Leftrightarrow a = -8 \Rightarrow b = 1.$$

$$\bullet \max_{[-1;1]} f(x) = \left| b - \frac{a^2}{32} \right| = 1. \text{ Khi đó, YCBT } \Leftrightarrow \begin{cases} b - \frac{a^2}{32} = -1 \\ 8 + a + b \leq 1 \\ b \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{a^2}{32} - 1 \\ 6 + a + \frac{a^2}{32} \leq 0 \\ a \geq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Vậy  $a = -8, b = 1$  thỏa YCBT.

**Cách 2.**

Đặt  $t = x^2$  khi đó ta có  $g(t) = 8t^2 + at + b$ .

Vì  $x \in [-1; 1]$  nên  $t \in [0; 1]$ .

Theo yêu cầu bài toán thì ta có:  $0 \leq g(t) \leq 1$  với mọi  $t \in [0; 1]$  và có dấu bằng xảy ra.

Đồ thị hàm số  $g(t)$  là một parabol có bề lõm quay lên trên do đó điều kiện trên dẫn đến hệ điều kiện sau xảy ra :

$$\begin{cases} -1 \leq g(0) \leq 1 \\ -1 \leq g(1) \leq 1 \\ -1 \leq \frac{-\Delta}{32} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq b \leq 1 \\ -1 \leq 8 + a + b \leq 1 \\ -32 \leq 32b - a^2 \leq 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq b \leq 1 \\ -1 \leq 8 + a + b \leq 1 \\ -32 \leq a^2 - 32b \leq 32 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Lấy (1) + 32(3) ta có :  $-64 \leq a^2 \leq 64$  do đó  $-8 \leq a \leq 8$ .

Lấy (3) + 32(2) ta có :  $-64 \leq a^2 + 32a + 256 \leq 64$

Suy ra :  $a^2 + 32a + 192 \leq 0 \Leftrightarrow -24 \leq a \leq -8$ .

Khi đó ta có  $a = -8$  và  $b = 1$ .

Kiểm tra :  $g(t) = 8t^2 - 8t + 1 = 2(2t - 1)^2 - 1$

Vì  $0 \leq t \leq 1$  nên  $-1 \leq 2t - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (2t - 1)^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq g(t) = 2(2t - 1)^2 - 1 \leq 1$ .

Vậy  $\max |g(t)| = 1$  khi  $t = 1 \Rightarrow x = \pm 1$  (t/m).

**Câu 42.40:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số

$y = |\sin^2 x - 2 \sin x + m|$  bằng 1. Số phần tử của S là

A. 0

B. 1

B. 4

D. 3

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt  $\sin x = t$  ( $t \in [-1; 1]$ )  $\Rightarrow y = |t^2 - 2t + m|$

Xét hàm số  $f(t) = t^2 - 2t + m$  có  $f'(t) = 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \in [-1; 1]$

Có  $f(-1) = m + 3$ ,  $f(1) = m - 1$ . Khi đó  $\begin{cases} \max_{[-1; 1]} f(x) = \max \{m + 3; m - 1\} = m + 3 \\ \min_{[-1; 1]} f(x) = \min \{m + 3; m - 1\} = m - 1 \end{cases}$

TH1:  $|m + 3| \geq |m - 1| \Leftrightarrow m \geq -1$

$$\Rightarrow \max f(x) = |m+3| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 & (l) \\ m = -4 & (l) \end{cases}$$

$$\text{TH1: } |m+3| < |m-1| \Leftrightarrow m < -1$$

$$\Rightarrow \max f(x) = |m-1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 & (l) \\ m = 0 & (l) \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Không tồn tại  $m$  thỏa mãn