

A. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ**Định lý 1:** Mọi hàm số liên tục trên một đoạn đều có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.**Định lý 2**

- Nếu $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì $\min_{[a; b]} f(x) = f(a)$ và $\max_{[a; b]} f(x) = f(b)$.
- Nếu $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì $\min_{[a; b]} f(x) = f(b)$ và $\max_{[a; b]} f(x) = f(a)$.

Bài toán 1. Tìm GTLN & GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.**Bước 1.** Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$.Tính $f'(x) = 0$ tìm nghiệm $x_i \in [a; b]$.**Bước 2.** Tính $f(a)$, $f(b)$, $f(x_i)$.**Bước 3. Kết luận:** $\max_{[a; b]} f(x) = \max \{f(a); f(b); f(x_i)\}$ và $\min_{[a; b]} f(x) = \min \{f(a); f(b); f(x_i)\}$.**Bài toán 2. Tìm GTLN & GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$.****Bước 1.** Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$. Cho $f'(x) = 0$ tìm nghiệm.**Bước 2.** Xét dấu biểu thức $y' = f'(x)$ và lập bảng biến thiên (có tính giới hạn).**Bước 3.** Dựa vào bảng biến thiên để kết luận GTLN (GTNN nếu có).**Lưu ý:** Đạo hàm của hàm số mũ và lôgarit

- $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$. • $(e^u)' = u' \cdot e^u$. • $(e^x)' = e^x$.
- $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$. • $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$. • $(\ln u)' = \frac{u'}{u} \Rightarrow (\ln |x|)' = \frac{1}{x}$.

CÂU HỎI CÙNG MỨC ĐỘ ĐỀ MINH HỌA**Câu 1.** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng:

- A. 1. B. 37. C. 33. D. 12.

Câu 2. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 10x^2 + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- A. 2. B. -23. C. -22. D. -7.

Câu 3. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 8x^2 - 5$ trên đoạn $[-3; 1]$.Khi đó, giá trị của biểu thức $M - 2m$ bằng

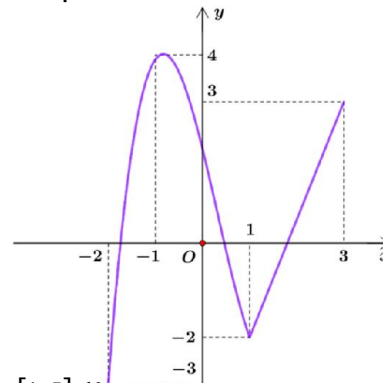
- A. 46. B. 25. C. -25. D. -46.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 3]$ có đồ thị như hình vẽ.

Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số

 $y = f(x)$ trên $[0; 3]$ lần lượt có giá trị là

- A. $\max_{[-4; 3]} y = 4, \min_{[-4; 3]} y = -3$.
 B. $\max_{[-4; 3]} y = 3, \min_{[-4; 3]} y = -3$.
 C. $\max_{[0; 3]} y = 3, \min_{[0; 3]} y = -2$.
 D. $\max_{[-4; 3]} y = 4, \min_{[-4; 3]} y = -2$.

**Câu 5.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{16}{x} + 3$ trên đoạn $[1; 5]$ là:

- A. -5. B. 20. C. $\frac{56}{5}$. D. 11.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-3; 5]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[-3; 2]$. Tính $M - m$.

x	-3	-1		2	5	
y'		+	0	-	0	+
y	4	0		3	-2	

- A. 6. B. 4. C. 5. D. 3.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x(x-3)^2(x-4), \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 5]$ bằng

- A. $f(0)$. B. $f(4)$. C. $f(3)$. D. $f(5)$.

Câu 8. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ bằng:

- A. 3. B. 5. C. 7. D. $\frac{31}{8}$.

Câu 9. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 6x - 3$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng:

- A. -3. B. $-3 - 4\sqrt{2}$. C. 25. D. 12.

Câu 10. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{8}{1+2x} + x$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng:

- A. $\frac{7}{2}$. B. $\frac{18}{5}$. C. $\frac{11}{3}$. D. $-\frac{9}{2}$.

Câu 11. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{2-x}{x+3}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng:

- A. 3. B. -2. C. $-\frac{1}{6}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 12. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + 5x + 6$ trên đoạn $[0; 4]$ bằng:

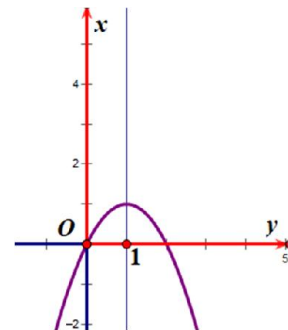
- A. 3. B. -2. C. $\frac{2}{27}$. D. 6.

Câu 13. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 9$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng:

- A. -9. B. -6. C. $\frac{13}{27}$. D. 0.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$ bằng bao nhiêu?

- A. 0.
B. -1.
C. 2.
D. 1.



Câu 15. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng:

- A. 9. B. 26. C. 25. D. 0.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

Hỏi giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên $[-1; 3]$ bằng bao nhiêu?

- A. 3.
B. -3.
C. 5.
D. 6.

x	$-\infty$	-1	0	1	3
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$	$\searrow$ -3	$\nearrow$ 5	$\searrow$ -1	$\nearrow$ 6

Câu 17. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[2; 4]$ bằng:

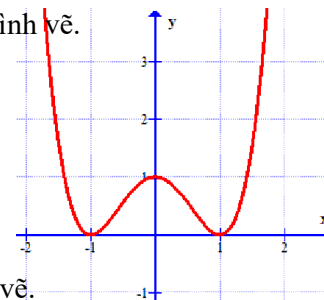
- A. 6. B. $\frac{13}{2}$. C. -6. D. $\frac{25}{4}$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ và có đồ thị như hình vẽ.

Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 1]$.

Giá trị của $M - m$ bằng

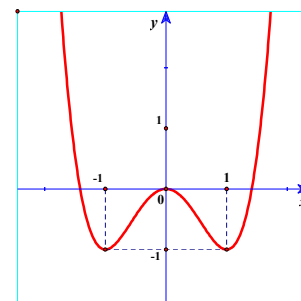
- A. 0. B. 1.
C. 2. D. 3.



Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.

Giá trị nhỏ nhất trên tập xác định của hàm số có đồ thị sau là:

- A. $\min y = -1$.
B. $\min y = 1$.
C. $\min y = 0$.
D. $\min y = -2$.



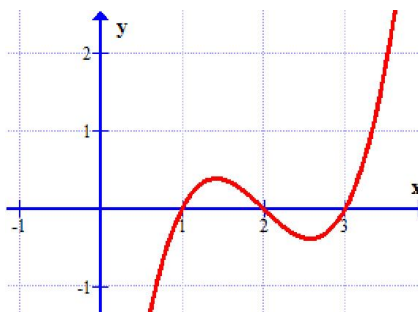
Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

Giá trị nhỏ nhất của hàm số có bảng biến thiên sau trên khoảng $[-2; 3]$ là:

- A. $\min_{[-2; 3]} y = 0$.
B. $\min_{[-2; 3]} y = -3$.
C. $\min_{[-2; 3]} y = 1$.
D. $\min_{[-2; 3]} y = 7$.

x	-2	-1	1	3
y'	+	0	-	0
y	0	$\nearrow$ 1	$\searrow$ -3	$\nearrow$ 7

Câu 21. Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $[1; 3]$ tại x_0 . Khi đó giá trị của $x_0^2 - 2x_0 + 2019$ bằng bao nhiêu?

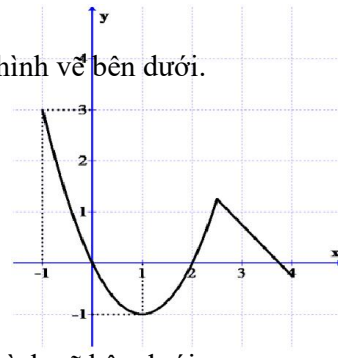
- A. 2018. B. 2019. C. 2021. D. 2022.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 4]$.

Giá trị của $M + m$ bằng

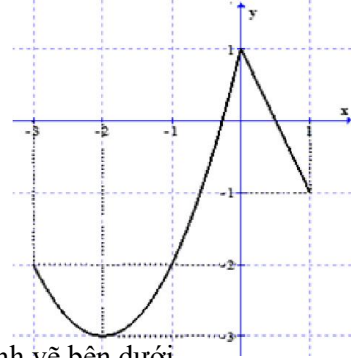
- A. 0. B. 1.
C. 2. D. 5.



Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 1]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3; 1]$. Giá trị của $2M - m$ bằng

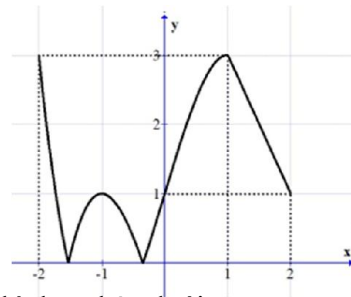
- A. 0.
B. 1.
C. 4.
D. 5.



Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2; 2]$. Giá trị của $M + m$ bằng

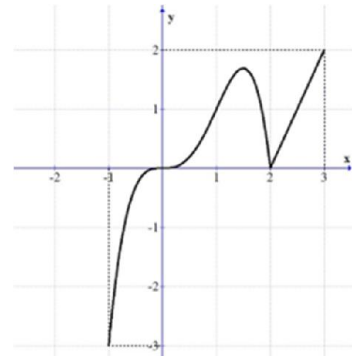
- A. 0.
B. 1.
C. 4.
D. 3.



Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M^2 + m^2$ bằng

- A. 15.
B. 11.
C. 4.
D. 13.



Câu 26. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 6x$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng

- A. $-4\sqrt{2}$. B. -4 . C. $-6\sqrt{2}$. D. 0.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)(x-2)^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

- A. $f(-1)$. B. $f(0)$. C. $f(3)$. D. $f(2)$.

B. TÌM M ĐỂ GTLN-GTNN THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN K

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $m > 4$ B. $3 < m \leq 4$ C. $m < -1$ D. $1 \leq m < 3$

- Câu 2.** Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A. $m > 4$ **B.** $2 < m \leq 4$ **C.** $m \leq 0$ **D.** $0 < m \leq 2$
- Câu 3.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0.
A. $m = 2$. **B.** $m = 6$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = 4$.
- Câu 4.** Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây là đúng?
A. $m > 10$. **B.** $8 < m < 10$. **C.** $0 < m < 4$. **D.** $4 < m < 8$.
- Câu 5.** Có một giá trị m_0 của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[0;1]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?
A. $2018m_0 - m_0^2 \geq 0$. **B.** $2m_0 - 1 < 0$. **C.** $6m_0 - m_0^2 < 0$. **D.** $2m_0 + 1 < 0$.
- Câu 6.** Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x-m^2-2}{x-m}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng -1.
A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.
- Câu 7.** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-m^2}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[-3;-2]} y = \frac{1}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A. $3 < m \leq 4$. **B.** $-2 < m \leq 3$. **C.** $m > 4$. **D.** $m \leq -2$.
- Câu 8.** Tìm giá trị dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{m^2x-1}{x+2}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 1.
A. $m = \sqrt{2}$. **B.** $m = \sqrt{3}$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = 2$.
- Câu 9.** Cho hàm số $y = \frac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -3. Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?
A. $(2;5)$. **B.** $(1;4)$. **C.** $(6;9)$. **D.** $(20;25)$.
- Câu 10.** Tìm giá trị của tham số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng 3.
A. $m = 3$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = 7$. **D.** $m = 5$
- Câu 11.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\sqrt{2}$
A. $m = \sqrt{2}$. **B.** $m = 2 + \sqrt{2}$. **C.** $m = 4 + \sqrt{2}$. **D.** $\begin{cases} m = 2 + \sqrt{2} \\ m = 4 + \sqrt{2} \end{cases}$.
- Câu 12.** Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2.
A. $\begin{cases} m = -1 \\ m = -2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$.
- Câu 13.** Có một giá trị m_0 của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[0;1]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?
A. $2018m_0 - m_0^2 \geq 0$. **B.** $2m_0 - 1 < 0$.

C. $6m_0 - m_0^2 < 0$. D. $2m_0 + 1 < 0$.

Câu 14. Nếu hàm số $y = x + m + \sqrt{1 - x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{2}$ thì giá trị của m là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $-\sqrt{2}$. C. $\sqrt{2}$. D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{x + m}{x + 1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[0;1]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1 \leq m < 3$ B. $m > 6$ C. $m < 1$ D. $3 < m \leq 6$

Câu 16. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x + m}{x + 1}$ trên $[1; 2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m > 10$. B. $8 < m < 10$. C. $0 < m < 4$. D. $4 < m < 8$.

Câu 17. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - m$. Trên $[-1; 1]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất là -1 . Tính m ?

A. $m = -6$. B. $m = -3$. C. $m = -4$. D. $m = -5$.

Câu 18. Biết S là tập giá trị của m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - m^2x^3 - 2x^2 - m$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng -16 . Tính tích các phần tử của S .

A. 2. B. -2 . C. -15 . D. -17 .

Câu 19. Gọi A, B lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x + m^2 + m}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 3]$.

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A + B = \frac{13}{2}$.

A. $m = 1; m = -2$. B. $m = -2$. C. $m = \pm 2$. D. $m = -1; m = 2$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \frac{x - m^2}{x + 8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 3]$ bằng -3 . Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?

A. $(20; 25)$. B. $(5; 6)$. C. $(6; 9)$. D. $(2; 5)$.

Câu 21. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 2]$ tại một điểm $x_0 \in (0; 2)$.

A. $0 < m < 1$ B. $m > 1$ C. $m > 2$ D. $-1 < m < 1$

Câu 22. Cho hàm số $y = \frac{1 - m \sin x}{\cos x + 2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0; 10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn -2 ?

A. 1. B. 9. C. 3. D. 6.

Câu 23. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x + m}{x^2 + x + 1}$ có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ nhỏ hơn hoặc bằng 1.

A. $m \leq 1$. B. $m \geq 1$. C. $m \geq -1$. D. $m \leq -1$.

C. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI (chứa tham số)

Dạng 1: Tìm m để $\max_{[\alpha; \beta]} y = |f(x) + m| = a$ ($a > 0$).

Phương pháp:

Cách 1: Trước tiên tìm $\max_{[\alpha; \beta]} f(x) = K$; $\min_{[\alpha; \beta]} f(x) = k$ ($K > k$).

Kiểm tra $\max \{|m + K|, |m + k|\} \geq \frac{|m + K| + |m + k|}{2} \geq \frac{|m + K - m - k|}{2} = \frac{|K - k|}{2}$.

$$\text{TH1: } \frac{|K-k|}{2} \leq a. \text{ Để } \max_{[\alpha;\beta]} y = a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k = -a \\ m+K = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -a-k \\ m = a-K \end{cases} \Rightarrow m \in \{-a-k; a-K\}.$$

$$\text{TH2: } \frac{|K-k|}{2} > a \Rightarrow m \in \emptyset.$$

Cách 2: Xét trường hợp

$$\text{TH1: } \max y = |m+K| \Leftrightarrow \begin{cases} |m+K| = a \\ |m+K| \geq |m+k| \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \max y = |m+k| \Leftrightarrow \begin{cases} |m+k| = a \\ |m+k| \geq |m+K| \end{cases}$$

Dạng 2: Tìm m để $\min_{[\alpha;\beta]} y = |f(x) + m| = a \quad (a > 0).$

Phương pháp:

Trước tiên tìm $\max_{[\alpha;\beta]} f(x) = K; \quad \min_{[\alpha;\beta]} f(x) = k \quad (K > k).$

$$\text{Để } \min_{[\alpha;\beta]} y = a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k = a \\ m+k > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m+K = -a \\ m+K < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = a-k \\ m > -k \end{cases} \vee \begin{cases} m = -a-K \\ m < -K \end{cases}. \text{ Vậy } m \in S_1 \cup S_2.$$

Dạng 3: Tìm m để $\max_{[\alpha;\beta]} y = |f(x) + m|$ không vượt quá giá trị M cho trước.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max_{[\alpha;\beta]} f(x) = K; \quad \min_{[\alpha;\beta]} f(x) = k \quad (K > k).$

$$\text{Để } \max_{[\alpha;\beta]} y \leq M \Rightarrow \begin{cases} m+k \geq -M \\ m+K \leq M \end{cases} \Leftrightarrow -M-k \leq m \leq M-K.$$

Dạng 4: Tìm m để $\min_{[\alpha;\beta]} y = |f(x) + m|$ không vượt quá giá trị a cho trước.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max_{[\alpha;\beta]} f(x) = K; \quad \min_{[\alpha;\beta]} f(x) = k \quad (K > k).$

$$\text{Để } \min_{[\alpha;\beta]} y \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k \leq a \\ m+k \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m+K \geq -a \\ m+K \leq 0 \end{cases} \vee (m+K)(m+k) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq a-k \\ m \geq -k \end{cases} \vee \begin{cases} m \geq -a-K \\ m \leq -K \end{cases} \vee -K < m < -k.$$

Dạng 5: Tìm m để $\max_{[a;b]} y = |f(x) + m|$ đạt min.

Phương pháp:

Trước tiên tìm $\max_{[a;b]} f(x) = K; \quad \min_{[a;b]} f(x) = k \quad (K > k).$

$$\text{Đề hỏi tìm } m \Rightarrow m = -\frac{K+k}{2}. \text{ Đề hỏi tìm min của } \max_{[a;b]} y \Rightarrow \text{ giá trị này là } \frac{K-k}{2}.$$

Dạng 6: Tìm m để $\min_{[a;b]} y = |f(x) + m|$ đạt min.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max_{[a;b]} f(x) = K; \quad \min_{[a;b]} f(x) = k \quad (K > k).$

$$\text{Đề hỏi tìm } m \Rightarrow (m+K)(m+k) \leq 0 \Leftrightarrow -K \leq m \leq -k. \text{ Đề hỏi tìm min của } \min_{[a;b]} y \Rightarrow \text{ giá trị này là } 0.$$

Dạng 7: Cho hàm số $y = |f(x) + m|$. Tìm m để $\max_{[a;b]} y \leq h, \min_{[a;b]} y (h > 0)$ hoặc $\min + \max =$

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max_{[a;b]} f(x) = K$; $\min_{[a;b]} f(x) = k$ ($K > k$).

TH1: $|K + m| \leq h |k + m| \xrightarrow{K+m \text{ cùng dấu } k+m} m \in S_1$.

TH2: $|k + m| \leq h |K + m| \xrightarrow{K+m \text{ cùng dấu } k+m} m \in S_2$.

Vậy $m \in S_1 \cup S_2$.

Dạng 8: Cho hàm số $y = |f(x) + m|$.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max_{[a;b]} f(x) = K$; $\min_{[a;b]} f(x) = k$ ($K > k$).

BT1: Tìm m để $\min_{[a;b]} y + \max_{[a;b]} y = \alpha \Leftrightarrow |m + K| + |m + k| = \alpha$.

BT2: Tìm m để $\min_{[a;b]} y * \max_{[a;b]} y = \beta \Leftrightarrow |m + K| * |m + k| = \beta$.

Câu 1. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S là:

- A. -16. B. 16. C. -12. D. -2.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| = 2$. Số phần tử của S là

- A. 6. B. 2. C. 1. D. 4.

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + m$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| = 5$. Số phần tử của S là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 4. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m + 3|$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 4. Tổng tất cả các phần tử của S là

- A. -6. B. -8. C. -9. D. -12.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| = 6$. Tổng tất cả các phần tử của S là

- A. 3. B. 0. C. -1. D. 2.

Câu 6. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |2x^3 - 6x + m|$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 8. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

- A. 8. B. -16. C. -32. D. -72.

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất?

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 5.

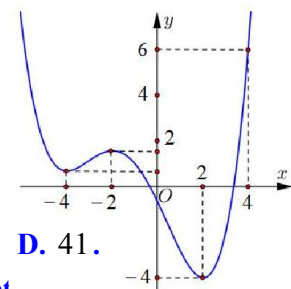
Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a

để hàm số $y = \left| f\left(\frac{8x}{x^2+1}\right) + a - 1 \right|$ có giá trị

lớn nhất không vượt quá 20?

- A. 29. B. 35. C. 31. D. 41.



- Câu 9.** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x+1} \right|$ trên $[1; 2]$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S là
- A. $-\frac{11}{3}$. B. $\frac{13}{6}$. C. $-\frac{11}{6}$. D. $\frac{1}{3}$.
- Câu 10.** Cho hàm số $y = \cos^3 x - 3\sin^2 x + m + 3$. Gọi S là tập hợp các giá trị m sao cho $2\max|y| + \min|y| = 9$. Tổng các phần tử của tập hợp S bằng:
- A. $-\frac{16}{3}$. B. -4 . C. -6 . D. -2 .
- Câu 11.** Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(2 - \cos x) + m|$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng
- A. 4. B. -16 . C. -32 . D. -12 .
- Câu 12.** Cho hàm số $f(x) = \frac{\log x + m}{\log x + 2}$ (m là tham số thực). Gọi S là tổng tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{\left[\frac{1}{10}; 1\right]} |f(x)| + \min_{\left[\frac{1}{10}; 1\right]} |f(x)| = 2$. Tìm S .
- A. $-\frac{2}{3}$. B. 2. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{10}{3}$.
- Câu 13.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^3 - mx^2 - 9x + 9m|$ trên đoạn $[-2; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- A. 3. B. 5. C. 4. D. 6.
- Câu 14.** Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = |-x^4 + 8x^2 + m|$ trên đoạn $[-1; 3]$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- A. 23. B. 24. C. 25. D. 26.
- Câu 15.** Cho hàm số $y = |x^2 - 4x + 2m - 3|$ với m là tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1; 3]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng a khi $m = b$. Tính $P = 2b - a$.
- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{13}{4}$. C. $-\frac{9}{4}$. D. 6.
- Câu 16.** Cho hàm số $y = |x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27|$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3; -1]$ có giá trị nhỏ nhất. Khi đó tích các phần tử của S là
- A. 4. B. -4 . C. 8. D. -8 .
- Câu 17.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất?
- A. 2. B. 3. C. 0. D. 1.
- Câu 18.** Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |x^2 - 2x + m|$ trên $[-1; 2]$ bằng 5.
- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

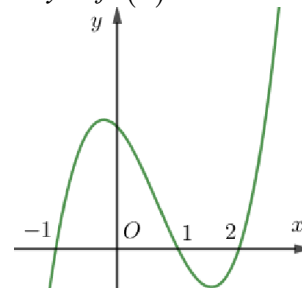
- Câu 19.** Tính tích tất cả các số thực m để hàm số $y = \left| \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 8x + m \right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 3]$ bằng 18 là.
A. 432. **B.** -216. **C.** -432. **D.** 288.
- Câu 20.** Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 2x^2 + m - 1|$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$ bằng 18. Tổng tất cả các phần tử của S bằng
A. -5. **B.** 4. **C.** -14. **D.** -10.
- Câu 21.** Tính tổng tất cả các giá trị nguyên lớn hơn 6 của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - (m+1)x + m|$ trên $[2; m-1]$ nhỏ hơn 2020.
A. 2043210. **B.** 2034201. **C.** 3421020 **D.** 3412020.
- Câu 22.** Cho hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + m \right|$. Tính tổng tất cả các số nguyên m để $\max_{[-1; 2]} y \leq 11$.
A. -19. **B.** -37. **C.** -30. **D.** -11.
- Câu 23.** Cho hàm số $f(x) = |x^2 - 2mx + 3|$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$ không lớn hơn 3?
A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.
- Câu 24.** Cho hàm số $y = |x^3 - 3x^2 - 9x + m|$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để $\max_{[-2; 3]} y < 50$. Tổng các phần tử của M là
A. 0. **B.** 737. **C.** 759. **D.** -215.
- Câu 25.** Cho hàm số $y = |x^4 - 2x^3 + x^2 + a|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để $\max_{[-1; 2]} y \leq 100$.
A. 197. **B.** 196. **C.** 200. **D.** 201.
- Câu 26.** Cho hàm số $y = |\sin x + \cos x + m|$, có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số có giá trị lớn nhất bé hơn 2.
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

D. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT HÀM ẨN, HÀM HỢP

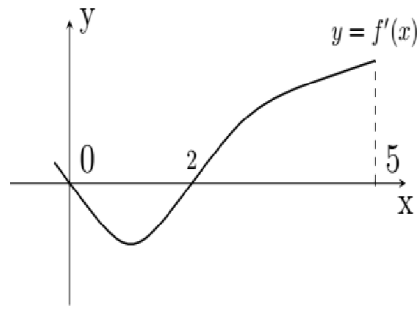
- Câu 1.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

- A.** $f(1)$.
B. $f(-1)$.
C. $f(2)$.
D. $f(0)$.

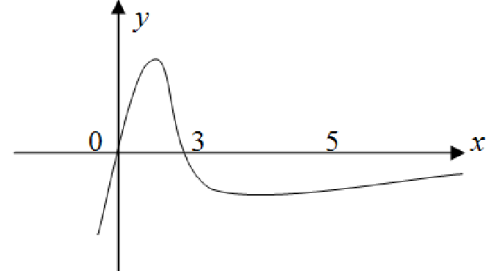


- Câu 2.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ lần lượt là:



- A. $f(2); f(5)$. B. $f(0); f(5)$. C. $f(2); f(0)$. D. $f(1); f(5)$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(3) = f(5) - f(4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$.



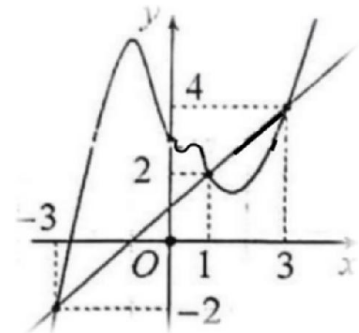
- A. $m = f(5), M = f(3)$
 B. $m = f(5), M = f(1)$
 C. $m = f(0), M = f(3)$
 D. $m = f(1), M = f(3)$

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1; 3]$.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$		-3		5		$-\infty$

- A. 15. B. $\frac{25}{3}$. C. $\frac{19}{3}$. D. 12.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề dưới đây đúng.



- A. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(3)$.
 B. $\min_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.
 C. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(0)$.
 D. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+

Hàm số $y = f(x + 2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

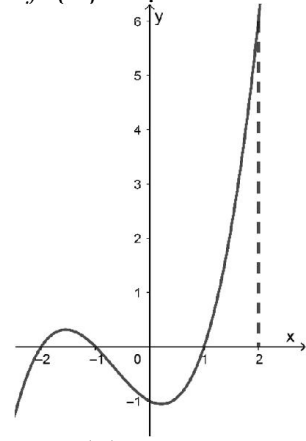
- A. $(-\infty; -2017)$ B. $(2017; +\infty)$ C. $(0; 2)$ D. $(-2017; 0)$

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây:

Biết rằng $f(-1) + f(0) < f(1) + f(2)$.

Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ lần lượt là:

- A. $f(1); f(2)$.
- B. $f(2); f(0)$.
- C. $f(0); f(2)$.
- D. $f(1); f(-1)$.

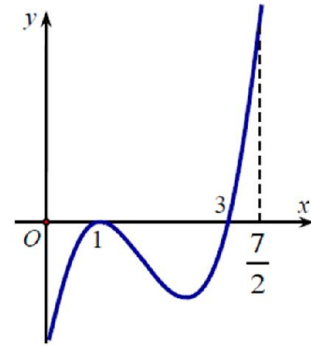


Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.

Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$

tại điểm x_0 nào dưới đây?

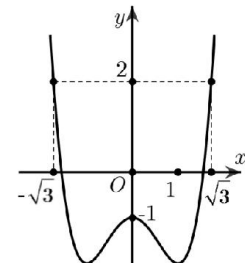
- A. $x_0 = 0$.
- B. $x_0 = \frac{7}{2}$.
- C. $x_0 = 1$.
- D. $x_0 = 3$.



Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ

Đặt $h(x) = 3f(x) - x^3 + 3x$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

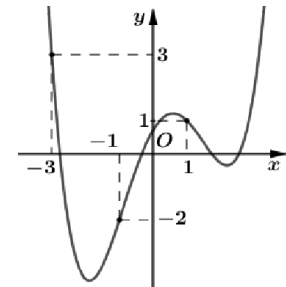
- A. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = 3f(1)$.
- B. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = 3f(-\sqrt{3})$.
- C. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = 3f(\sqrt{3})$.
- D. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = 3f(0)$.



Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ ở hình vẽ bên. Xét hàm số

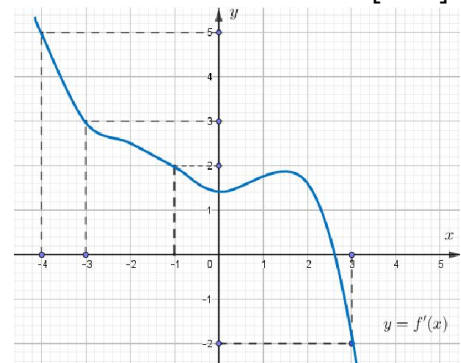
$g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\min_{[-3; 1]} g(x) = g(-1)$.
- B. $\min_{[-3; 1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$.
- C. $\min_{[-3; 1]} g(x) = g(-3)$.
- D. $\min_{[-3; 1]} g(x) = g(1)$.

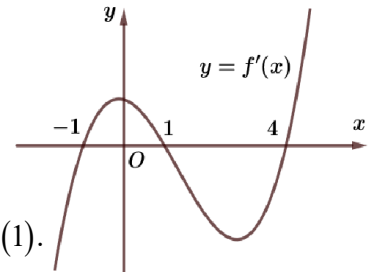


Câu 11. Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Trên đoạn $[-4; 3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm:

- A. $x_0 = -4$.
- B. $x_0 = -1$.
- C. $x_0 = 3$.
- D. $x_0 = -3$.



Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



Cho bốn mệnh đề sau:

- 1) Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị
- 2) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$
- 3) $f(1) > f(2) > f(4)$.
- 4) Trên đoạn $[-1; 4]$, giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ là $f(1)$.

Số mệnh đề đúng trong bốn mệnh đề trên là:

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3} \text{ trên đoạn } [1; 3].$$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				5		

- A. $\frac{25}{3}$. B. 15. C. $\frac{19}{3}$. D. 12.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - \sin^2 x$ trên đoạn $[-1; 1]$ là

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		0		0		0	

- A. $f(-1)$. B. $f(0)$. C. $f(2)$. D. $f(1)$.

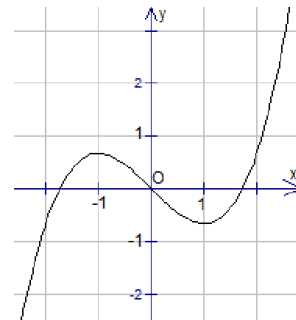
Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{[-1; 2]} f(x) = 3$. Xét hàm số $g(x) = f(3x - 1) + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\max_{[0; 1]} g(x) = -10$.

- A. 13. B. -7. C. -13. D. -1.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(\frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{2}\right)$ trên đoạn $\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ bằng

- A. $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.
 B. $f(0)$.
 C. $f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.
 D. $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

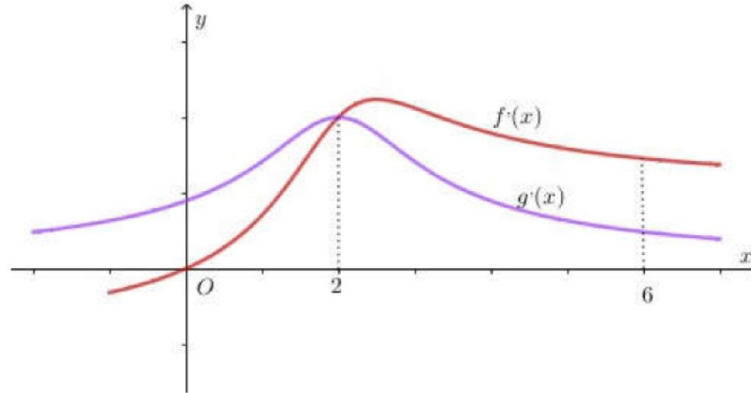


Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{x \in [0;10]} f(x) = f(2) = 4$. Xét hàm số

$g(x) = f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m$. Giá trị của tham số m để $\max_{x \in [0;2]} g(x) = 8$ là

- A. 5. B. 4. C. -1. D. 3.

Câu 18. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$, $g'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $g'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng $f(0) - f(6) < g(0) - g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[0;6]$ lần lượt là:

- A. $h(6), h(2)$. B. $h(2), h(6)$. C. $h(0), h(2)$. D. $h(2), h(0)$.

E. ỨNG DỤNG GTLN-GTNN GIẢI BÀI TOÁN THỰC TẾ

Câu 1. Ông A dự định dùng hết $6,5m^2$ kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

- A. $2,26 m^3$ B. $1,61 m^3$ C. $1,33 m^3$ D. $1,50 m^3$

Câu 2. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 243 (m/s) B. 27 (m/s) C. 144 (m/s) D. 36 (m/s)

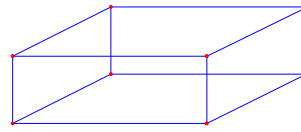
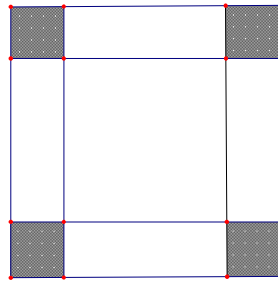
Câu 3. Ông A dự định sử dụng hết $5m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. $1,01 m^3$ B. $0,96 m^3$ C. $1,33 m^3$ D. $1,51 m^3$

Câu 4. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$ (mg / L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

- A. 4 giờ. B. 1 giờ. C. 3 giờ. D. 2 giờ.

Câu 5. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x = 3$

B. $x = 2$

C. $x = 4$

D. $x = 6$

Câu 6. Đợt xuất khẩu gạo của tỉnh A thường kéo dài trong 2 tháng (60 ngày). Người ta nhận thấy số lượng xuất khẩu gạo tính theo ngày thứ t được xác định bởi công thức $S(t) = \frac{2}{5}t^3 - 63t^2 + 3240t - 3100$ với $(1 \leq t \leq 60)$. Hỏi trong 60 ngày đó thì ngày thứ mấy có số lượng xuất khẩu gạo cao nhất.

A. 60

B. 45

C. 30

D. 25

Câu 7. Một vật chuyển động theo quy luật $S = 10t^2 - \frac{1}{3}t^3$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $S(m)$ là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 15 giây từ lúc vật bắt đầu chuyển động vận tốc $v(m/s)$ của vật đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm $t(s)$ bằng:

A. $8(s)$.

B. $20(s)$

C. $10(s)$.

D. $15(s)$.

Câu 8. Một sợi dây có chiều dài $28m$ được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài (theo đơn vị mét) của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

A. $\frac{56}{4+\pi}$.

B. $\frac{112}{4+\pi}$.

C. $\frac{84}{4+\pi}$.

D. $\frac{92}{4+\pi}$.

Câu 9. Một xưởng in có 15 máy in được cài đặt tự động và giám sát bởi một kỹ sư, mỗi máy in có thể in được 30 ấn phẩm trong 1 giờ, chi phí cài đặt và bảo dưỡng cho mỗi máy in cho 1 đợt hàng là 48.000 đồng, chi phí trả cho kỹ sư giám sát là 24.000 đồng/giờ. Đợt hàng này xưởng in nhận 6000 ấn phẩm thì số máy in cần sử dụng để chi phí in ít nhất là

A. 10 máy.

B. 11 máy.

C. 12 máy.

D. 9 máy.

Câu 10. Một chất điểm chuyển động thẳng với quãng đường biến thiên theo thời gian bởi quy luật $s(t) = t^3 - 4t^2 + 12$ (m), trong đó t (s) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Vận tốc của chất điểm đó đạt giá trị bé nhất khi t bằng bao nhiêu?

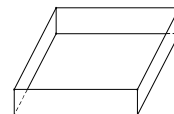
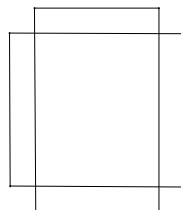
A. 2 (s).

B. $\frac{8}{3}$ (s).

C. 0 (s).

D. $\frac{4}{3}$ (s).

Câu 11. Cho một tấm nhôm hình chữ nhật có chiều dài bằng $10cm$ và chiều rộng bằng $8cm$. Người ta cắt bỏ ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$, rồi gập tấm nhôm lại (như hình vẽ) để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



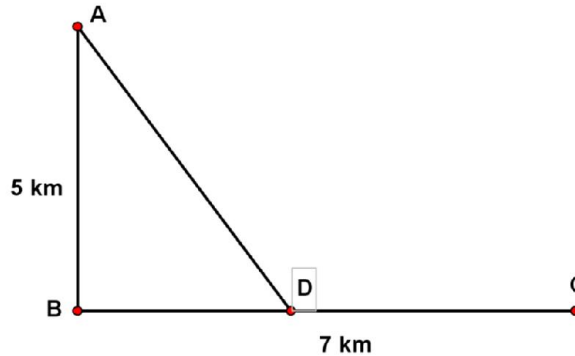
A. $x = \frac{8-2\sqrt{21}}{3}$

B. $x = \frac{10-2\sqrt{7}}{3}$

C. $x = \frac{9+\sqrt{21}}{9}$.

D. $x = \frac{9-\sqrt{21}}{3}$

Câu 12. Một đoàn cứu trợ lũ lụt đang ở vị trí A của một tỉnh miền trung muốn đến xã C để tiếp tế lương thực và thuốc men. Để đi đến C , đoàn cứu trợ phải chèo thuyền từ A đến vị trí D với vận tốc $4(km/h)$, rồi đi bộ đến vị trí C với vận tốc $6(km/h)$. Biết A cách B một khoảng $5km$, B cách C một khoảng $7km$ (hình vẽ). Hỏi vị trí điểm D cách A bao xa để đoàn cứu trợ đi đến xã C nhanh nhất?



- A. $AD = 5\sqrt{3} km$. B. $AD = 2\sqrt{5} km$. C. $AD = 5\sqrt{2} km$. D. $AD = 3\sqrt{5} km$.

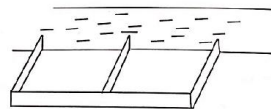
Câu 13. Một vật chuyển động theo quy luật $s = 3t^2 - t^3$. Thời điểm $t(s)$ tại đó vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất là

- A. $t = 5$. B. $t = 1$. C. $t = 2$. D. $t = 3$

Câu 14. Ông A dự định sử dụng hết $5 m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

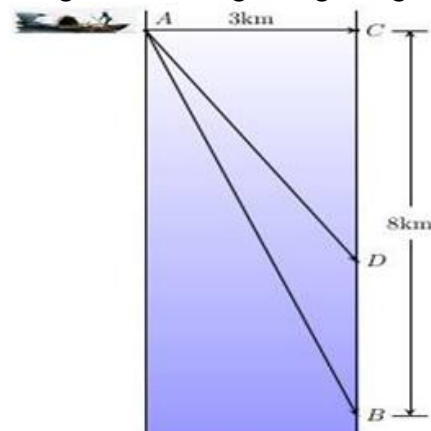
- A. $1,01 m^3$. B. $0,96 m^3$. C. $1,33 m^3$. D. $1,51 m^3$.

Câu 15. Một người nông dân có 15.000.000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60.000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50.000 đồng một mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được



- A. $3125 m^2$. B. $50 m^2$. C. $1250 m^2$. D. $6250 m^2$.

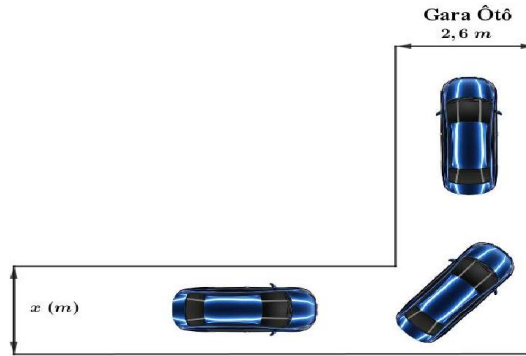
Câu 16. Một người đàn ông muốn trèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đồ diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng $3 km$ (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo trực tiếp đến B , hoặc anh có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền $6 km/h$, chạy $8 km/h$ và quãng đường $BC = 8 km$. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tính khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đến B ?



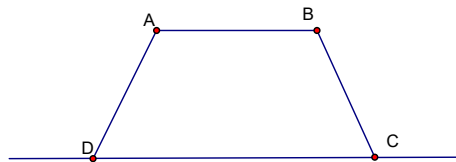
- A. $\frac{\sqrt{73}}{6}$.
B. $\frac{3}{2}$.
C. $\frac{9}{\sqrt{7}}$.
D. $1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$.

- Câu 17.** Ông Khoa muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288m^3 . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/ m^2 . Nếu ông Khoa biết xác định các kích thước của bể hợp lý thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông Khoa trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là bao nhiêu (Biết độ dày thành bể và đáy bể không đáng kể)?
A. 90 triệu đồng. **B.** 168 triệu đồng. **C.** 54 triệu đồng. **D.** 108 triệu đồng.

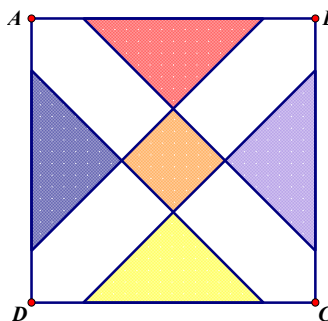
- Câu 18.** Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA ÔTÔ nhà cô Hiền. Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng $x(m)$, đoạn đường thẳng vào công GARA có chiều rộng $2,6(m)$. Biết kích thước xe ô tô là $5m \times 1,9m$ (chiều dài $\times$ chiều rộng). Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài $5m$, chiều rộng $1,9m$. Hỏi chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị bên dưới để ô tô có thể đi vào GARA được? (giả thiết ô tô không đi ra ngoài đường, không đi nghiêng và ô tô không bị biến dạng).



- A.** $x = 3,55(m)$. **B.** $x = 2,6(m)$. **C.** $x = 4,27(m)$. **D.** $3,7(m)$.
- Câu 19.** Một người nông dân có 3 tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài $12(m)$ và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ (bờ sông là đường thẳng DC không phải rào, mỗi tấm là một cạnh của hình thang). Hỏi ông ta có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu m^2 ?



- A.** $100\sqrt{3}$. **B.** $106\sqrt{3}$. **C.** $108\sqrt{3}$. **D.** $120\sqrt{3}$.
- Câu 20.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4, chính giữa có một hình vuông đồng tâm với $ABCD$. Biết rằng bốn tam giác là bốn tam giác cân. Hỏi tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

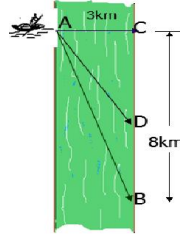


- A.** $\frac{19}{3}$. **B.** $\frac{17}{3}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{14}{3}$.

Câu 21. Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2$ và hai điểm C, D thay đổi trên nửa đường tròn đó sao cho $ABCD$ là hình thang. Diện tích lớn nhất của hình thang $ABCD$ bằng

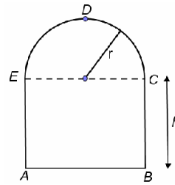
- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. C. 1. D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 22. Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo trực tiếp đến B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8$ km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tính khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đến B .



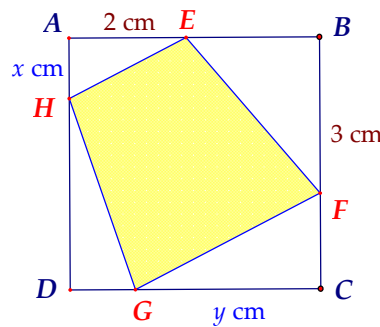
- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{9}{\sqrt{7}}$. C. $\frac{\sqrt{73}}{6}$. D. $1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$.

Câu 23. Bác thợ hàn dùng một thanh kim loại dài 250 cm để uốn thành khung cửa sổ có dạng như hình vẽ. Gọi r là bán kính của nửa đường tròn, tìm r để diện tích tạo thành đạt giá trị lớn nhất.



- A. $\frac{250}{4}$ cm. B. $\frac{125}{4}$ cm. C. $\frac{250}{\pi + 4}$ cm. D. $\frac{125}{4 + \pi}$ cm.

Câu 24. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ.



Tìm tổng $x + y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $4\sqrt{2}$. B. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. C. 7. D. 5.

Câu 25. Người ta cần xây một hồ chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3} m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây hồ là 500.000 đồng/m². Hãy xác định kích thước của hồ nước sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất và chi phí đó là:

- A. 74 triệu đồng. B. 75 triệu đồng. C. 76 triệu đồng. D. 77 triệu đồng.

A. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ**Định lý 1:** Mọi hàm số liên tục trên một đoạn đều có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.**Định lý 2**

- Nếu $y = f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì $\min_{[a; b]} f(x) = f(a)$ và $\max_{[a; b]} f(x) = f(b)$.
- Nếu $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì $\min_{[a; b]} f(x) = f(b)$ và $\max_{[a; b]} f(x) = f(a)$.

Bài toán 1. Tìm GTLN & GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.**Bước 1.** Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$.Tính $f'(x) = 0$ tìm nghiệm $x_i \in [a; b]$.**Bước 2.** Tính $f(a)$, $f(b)$, $f(x_i)$.**Bước 3.** Kết luận: $\max_{[a; b]} f(x) = \max \{f(a); f(b); f(x_i)\}$ và $\min_{[a; b]} f(x) = \min \{f(a); f(b); f(x_i)\}$.**Bài toán 2.** Tìm GTLN & GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$.**Bước 1.** Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$. Cho $f'(x) = 0$ tìm nghiệm.**Bước 2.** Xét dấu biểu thức $y' = f'(x)$ và lập bảng biến thiên (có tính giới hạn).**Bước 3.** Dựa vào bảng biến thiên để kết luận GTLN (GTNN nếu có).**Lưu ý:** Đạo hàm của hàm số mũ và lôgarit

- $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$. • $(e^u)' = u' \cdot e^u$. • $(e^x)' = e^x$.
- $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$. • $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$. • $(\ln u)' = \frac{u'}{u} \Rightarrow (\ln |x|)' = \frac{1}{x}$.

CÂU HỎI CÙNG MỨC ĐỘ ĐỀ MINH HỌA**Câu 1.** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng:**A.** 1.**B.** 37.**C.** 33.**D.** 12.**Lời giải****Chọn C**

$$f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1 \text{ liên tục trên } [-1; 2] \text{ và } f'(x) = -4x^3 + 24x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{6} \quad (L) \\ x = -\sqrt{6} \quad (L) \end{cases}$$

Ta có:

$$f(-1) = 12; f(2) = 33; f(0) = 1$$

Vậy, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 33 tại $x = 2$ **Câu 2.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 10x^2 + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng**A.** 2.**B.** -23.**C.** -22.**D.** -7.**Lời giải****Chọn C**Hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[-1; 2]$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 4x^3 - 20x, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases}$$

Xét hàm số trên đoạn $[-1; 2]$ có: $f(-1) = -7; f(0) = 2; f(2) = -22$.Vậy $\min_{x \in [-1; 2]} f(x) = -22$.

- Câu 3.** Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 8x^2 - 5$ trên đoạn $[-3;1]$. Khi đó, giá trị của biểu thức $M - 2m$ bằng
- A.** 46. **B.** 25. **C.** -25. **D.** -46.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 16x; y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(n) \\ x = 2(l) \\ x = -2(n) \end{cases}.$$

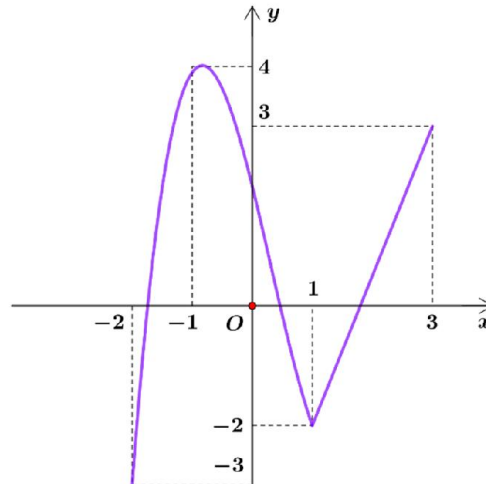
$$\text{Khi đó: } \begin{cases} y(0) = -5 \\ y(-3) = 4 \\ y(-2) = -21 \\ y(1) = -12 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó: } M = \max_{[-3;1]} y = 4; m = \min_{[-3;1]} y = -21.$$

$$\text{Vậy } M - 2m = 4 - 2 \cdot (-21) = 46.$$

Cách 2: Học sinh có thể sử dụng chức năng Table của MTCT để thực hiện cho nhanh.

- Câu 4.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;3]$ có đồ thị như hình vẽ.



Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[0;3]$ lần lượt có giá trị là

- A.** $\max_{[-4;3]} y = 4, \min_{[-4;3]} y = -3$. **B.** $\max_{[-4;3]} y = 3, \min_{[-4;3]} y = -3$.
C. $\max_{[0;3]} y = 3, \min_{[0;3]} y = -2$. **D.** $\max_{[-4;3]} y = 4, \min_{[-4;3]} y = -2$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta thấy:

Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0;3]$ là 3 và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;3]$ là -2.

- Câu 5.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{16}{x} + 3$ trên đoạn $[1;5]$ là:

- A.** -5. **B.** 20. **C.** $\frac{56}{5}$. **D.** 11.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Ta có: $y' = 1 - \frac{16}{x^2}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{16}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases} \quad (I)$$

Ta có: $\begin{cases} y(1) = 20 \\ y(4) = 11 \\ y(5) = \frac{56}{5} \end{cases}$.

Vậy $\min_{[1;5]} y = 11$ khi $x = 4$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-3; 5]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[-3; 2]$. Tính $M - m$.

x	-3	-1	2	5				
y'		+	0	-	0	+		
y	4			0		3		-2

A. 6.

B. 4.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Căn cứ vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $[-3; 5]$, ta có $M = 4, m = 0$ suy ra $M - m = 4$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x(x-3)^2(x-4), \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 5]$ bằng

A. $f(0)$.

B. $f(4)$.

C. $f(3)$.

D. $f(5)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = -x(x-3)^2(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = 4 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	0	3		4		5
$f'(x)$	0	+	0	+	0	-
$f(x)$	$f(0)$	$f(4)$				$f(5)$

Dựa vào BBT ta suy ra $\max_{x \in [0;5]} f(x) = f(4)$.

Câu 8. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ bằng:

A. 3.

B. 5.

C. 7.

D. $\frac{31}{8}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } y = x^3 - 3x + 5 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in \left[0; \frac{3}{2}\right] \\ x = -1 \notin \left[0; \frac{3}{2}\right] \end{cases}$$

$$\text{Mà } y(0) = 5, y(1) = 3, y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{31}{8}$$

Nên giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ là 5.

Câu 9. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 6x - 3$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng:

- A.** -3. **B.** $-3 - 4\sqrt{2}$. **C.** 25. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

$$f(x) = x^3 - 6x - 3 \text{ liên tục trên } [0; 2] \text{ và } f'(x) = 3x^2 - 6. \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} (l) \end{cases}$$

Ta có:

$$f(0) = -3; f(2) = -7; f(\sqrt{2}) = -3 - 4\sqrt{2}$$

Vậy, giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 2]$ bằng -3 tại $x = 0$.

Câu 10. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{8}{1+2x} + x$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng:

- A.** $\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{18}{5}$. **C.** $\frac{11}{3}$. **D.** $-\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[1; 2]$

$$\text{Ta có } f'(x) = 1 - \frac{16}{(1+2x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \in [1; 2] \\ x = -\frac{5}{2} \notin [1; 2] \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } f(1) = \frac{11}{3}; f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2}; f(2) = \frac{18}{5}.$$

$$\text{Vậy } \min_{[1; 2]} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2}.$$

Câu 11. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{2-x}{x+3}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng:

- A.** 3. **B.** -2. **C.** $-\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$f(x) = \frac{2-x}{x+3} \text{ liên tục trên } [1;3] \text{ và } f'(x) = \frac{-5}{(x-3)^2} < 0; \forall x \in [1;3].$$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1;3]$ bằng $\frac{-1}{6}$ tại $x = 3$.

Câu 12. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + 5x + 6$ trên đoạn $[0;4]$ bằng:

A. 3.

B. -2.

C. $\frac{2}{27}$.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

$f(x) = x^3 - x^2 + 5x + 6$ liên tục trên $[0;4]$ và $f'(x) = 3x^2 - 2x + 5$. Phương trình $f'(x) = 0$ vô nghiệm.

Ta có:

$$f(0) = 6; f(4) = 74.$$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;4]$ bằng 6 tại $x = 0$.

Câu 13. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 9$ trên đoạn $[1;3]$ bằng:

A. -9.

B. -6.

C. $\frac{13}{27}$.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

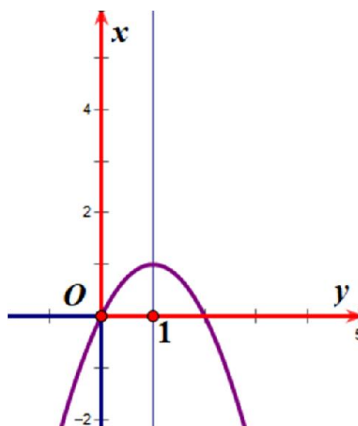
$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 16x + 16 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 16x + 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \notin [1;3] \\ x = \frac{4}{3} \in [1;3] \end{cases}.$$

$$\text{Có } f(1) = 0, f(3) = -6, f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{13}{27}.$$

$$\text{Vậy } \min_{[1;3]} f(x) = -6.$$

Nên giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ là 5.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;2]$ bằng bao nhiêu?



A. 0.

B. -1.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Theo đồ thị ta có giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0 đạt tại $x = 0$ và $x = 2$.

- Câu 15.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng:
- A. 9. B. 26. C. 25. D. 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y = x^4 - 8x^2 + 16 \Rightarrow y' = 4x^3 - 16x$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 3] \\ x = 2 \in [-1; 3] \\ x = -2 \notin [-1; 3] \end{cases}$$

Tính $y(-1) = 9; y(2) = 0; y(3) = 25$.

Vậy $\max_{[-1; 3]} y = 25$.

- Câu 16.** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	0	1	3
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-3	5	-1	6

Hỏi giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên $[-1; 3]$ bằng bao nhiêu?

- A. 3. B. -3 . C. 5. D. 6.

Lời giải

Chọn D

Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 3]$ bằng 6, đạt tại $x = 3$.

- Câu 17.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[2; 4]$ bằng:

- A. 6. B. $\frac{13}{2}$. C. -6 . D. $\frac{25}{4}$.

Lời giải

Chọn A

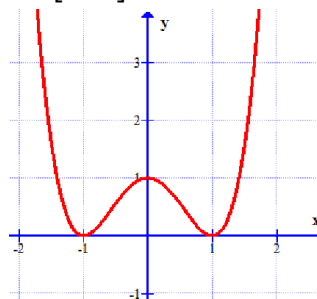
Hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[2; 4]$.

Ta có: $y' = 1 - \frac{9}{x^2}$. Cho $y' = 0$ ta được $\begin{cases} x = -3 \notin [2; 4] \\ x = 3 \in [2; 4] \end{cases}$.

Khi đó: $f(2) = \frac{13}{2}, f(3) = 6, f(4) = \frac{25}{4}$.

Vậy $\min_{[2; 4]} y = 6$.

- Câu 18.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;1]$. Giá trị của $M - m$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 2.

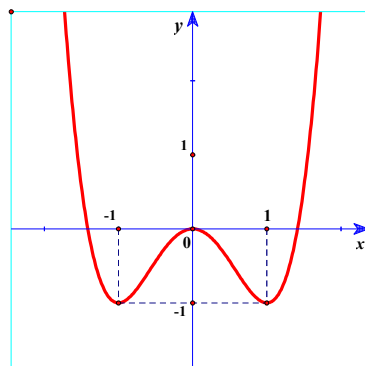
D. 3.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta thấy $M = 1, m = 0$ nên $M - m = 1$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Giá trị nhỏ nhất trên tập xác định của hàm số có đồ thị sau là:

A. $\min y = -1$.B. $\min y = 1$.C. $\min y = 0$.D. $\min y = -2$.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta thấy giá trị nhỏ nhất là -1 .

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	-2	-1	1	3	
y'	+	0	-	0	+
y	0	1	-3	7	

Giá trị nhỏ nhất của hàm số có bảng biến thiên sau trên khoảng $[-2;3]$ là:

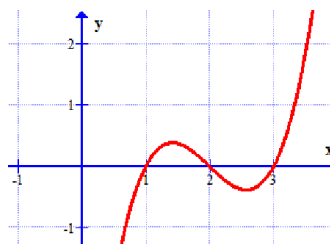
A. $\min_{[-2;3]} y = 0$.B. $\min_{[-2;3]} y = -3$.C. $\min_{[-2;3]} y = 1$.D. $\min_{[-2;3]} y = 7$.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị nhỏ nhất là -3 .

Câu 21. Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $[1;3]$ tại x_0 . Khi đó giá trị của $x_0^2 - 2x_0 + 2019$ bằng bao nhiêu?

A. 2018.

B. 2019.

C. 2021.

D. 2022.

Lời giải

Chọn B

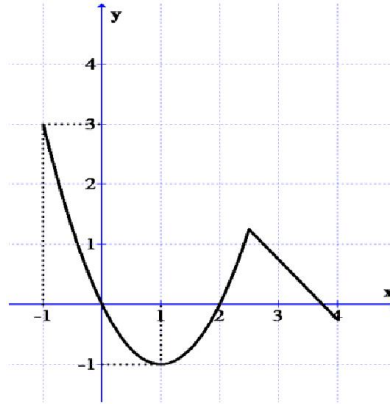
Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có BBT như sau:

x	1	2	3
y'	0	+	0
y			

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $[1;3]$ tại $x_0 = 2$.

Nên $x_0^2 - 2x_0 + 2019 = 2019$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;4]$. Giá trị của $M + m$ bằng

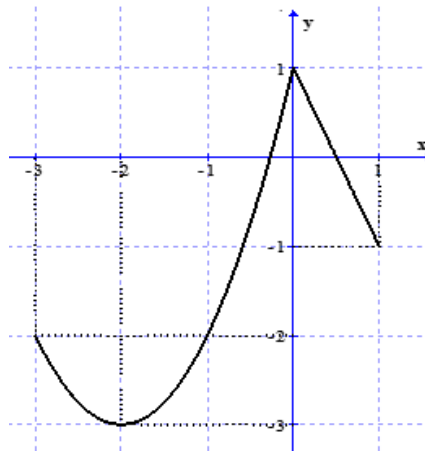
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 5.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị ta thấy $M = 3, m = -1$ nên $M + m = 2$.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3;1]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3;1]$. Giá trị của $2M - m$ bằng

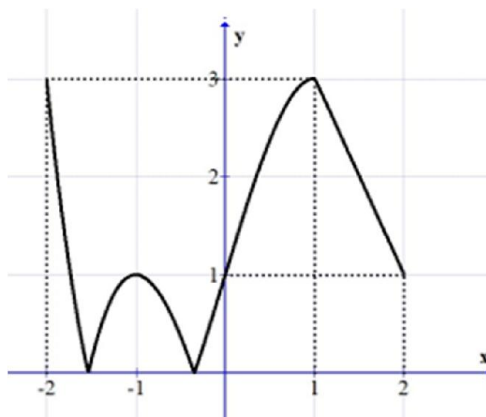
- A. 0. B. 1. C. 4. D. 5.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị ta thấy $M = 1, m = -3$ nên $2M - m = 5$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2; 2]$. Giá trị của $M + m$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 4.

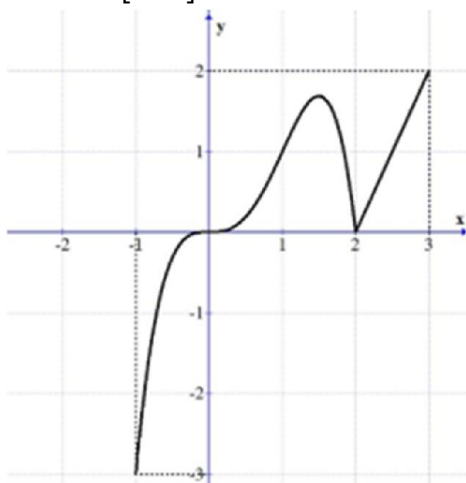
D. 3.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị ta thấy $M = 3, m = 0$ nên $M + n = 3$.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M^2 + m^2$ bằng

A. 15.

B. 11.

C. 4.

D. 13.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị ta thấy $M = 2, m = -3$ nên $M^2 + n^2 = 13$.

Câu 26. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 6x$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng

A. $-4\sqrt{2}$.

B. -4.

C. $-6\sqrt{2}$.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \in [0; 2] \\ x = -\sqrt{2} \notin [0; 2] \end{cases}$

Ta có $f(0) = 0; f(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}; f(2) = -4$.

Vậy $\min_{[0;2]} y = f(\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)(x-2)^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

- A. $f(-1)$. B. $f(0)$. C. $f(3)$. D. $f(2)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	-1		0		2
$f'(x)$	0	-	0	+	0
y	$f(-1)$				$f(2)$
			$f(0)$		

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $f(0)$.

B. TÌM M ĐỂ GTLN-GTNN THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN K

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[2;4]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $m > 4$ B. $3 < m \leq 4$ C. $m < -1$ D. $1 \leq m < 3$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = \frac{-1-m}{(x-1)^2}$$

* TH 1. $-1-m > 0 \Leftrightarrow m < -1$ suy ra y đồng biến trên $[2; 4]$ suy ra

$$\min_{[2;4]} f(x) = f(2) = \frac{2+m}{1} = 3 \Leftrightarrow m = 1 \text{ (loại)}$$

* TH 2. $-1-m < 0 \Leftrightarrow m > -1$ suy ra y nghịch biến trên $[2; 4]$ suy ra

$$\min_{[2;4]} f(x) = f(4) = \frac{4+m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5 \text{ suy ra } m > 4.$$

Câu 2. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $m > 4$ B. $2 < m \leq 4$ C. $m \leq 0$ D. $0 < m \leq 2$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}.$$

☑ Nếu $m = 1 \Rightarrow y = 1, \forall x \neq -1$. Không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

☑ Nếu $m < 1 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[1; 2]$.

Khi đó: $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3} \Leftrightarrow y(1) + y(2) = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{m+2}{3} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow m = 5$ (loại).

☑ Nếu $m > 1 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên đoạn $[1; 2]$.

Khi đó: $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3} \Leftrightarrow y(2) + y(1) = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{2+m}{3} + \frac{1+m}{2} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow m = 5$ (t/m)

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 0.

A. $m = 2$.

B. $m = 6$.

C. $m = 0$.

D. $m = 4$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1; 1]$, ta có $y' = -3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 1] \\ x = -2 \notin [-1; 1] \end{cases}$

Mà $\begin{cases} y'(-1) = m - 2 \\ y'(0) = m \\ y'(1) = m - 4 \end{cases}$

Do đó $\min_{[-1;1]} y = -4 + m = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

Vậy $m = 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 4. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m > 10$.

B. $8 < m < 10$.

C. $0 < m < 4$.

D. $4 < m < 8$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}$.

- Nếu $m = 1 \Rightarrow y = 1$ (loại).

- Nếu $m \neq 1$ khi đó $y' < 0, \forall x \in [1; 2]$ hoặc $y' > 0, \forall x \in [1; 2]$ nên hàm số đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất tại $x = 1, x = 2$.

Theo bài ra: $\max_{[1;2]} y + \min_{[1;2]} y = 8 \Leftrightarrow y(1) + y(2) = \frac{1+m}{2} + \frac{2+m}{3} = 8 \Leftrightarrow m = \frac{41}{5} \in (8; 10)$.

Câu 5. Có một giá trị m_0 của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[0; 1]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $2018m_0 - m_0^2 \geq 0$.

B. $2m_0 - 1 < 0$.

C. $6m_0 - m_0^2 < 0$.

D. $2m_0 + 1 < 0$.

Lời giải

Chọn A

+ Đặt $f(x) = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$.

+ Ta có: $y' = 3x^2 + m^2 + 1$. Dễ thấy rằng $y' > 0$ với mọi x, m thuộc $\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên $[0; 1]$. Vì thế $\min_{[0;1]} y = \min_{[0;1]} f(x) = f(0) = m + 1$.

+ Theo bài ra ta có: $m + 1 = 5$, suy ra $m = 4$.

+ Như vậy $m_0 = 4$ và mệnh đề đúng là $2018m_0 - m_0^2 \geq 0$.

- Câu 6.** Có bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x-m^2-2}{x-m}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng -1 .
A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

$y' = \frac{m^2 - m + 2}{(x-m)^2} > 0, \forall x \neq m$. Do đó hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; m)$ và $(m; +\infty)$.

Bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$	m	$+\infty$
y'	+		+
y	1	$+\infty$	1

Từ bảng biến thiên suy ra, hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;4]$ bằng -1 khi $\begin{cases} m < 0 \\ f(4) = -1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \frac{2-m^2}{4-m} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 + m - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m = 2, m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3.$$

- Câu 7.** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-m^2}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[-3;-2]} y = \frac{1}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A. $3 < m \leq 4$. **B.** $-2 < m \leq 3$. **C.** $m > 4$. **D.** $m \leq -2$.

Lời giải

Chọn B

+TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{m^2\}, [-3;-2] \subset D$.

+ Ta có $y' = \frac{-m^2-1}{(x-m^2)^2} < 0, \forall x \in D$. Nên hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

$$\text{Nên } \min_{[-3;-2]} y = \frac{1}{2} = y(-2) = \frac{-2+1}{-2-m^2} \Rightarrow -2-m^2 = -2 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow -2 < m \leq 3.$$

- Câu 8.** Tìm giá trị dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{m^2x-1}{x+2}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 1.
A. $m = \sqrt{2}$. **B.** $m = \sqrt{3}$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = 2$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ta có: $y' = \frac{2m^2+1}{(x+2)^2} > 0, \forall x \neq -2$.

Hàm số đồng biến trên đoạn $[1;3]$ nên $\max_{[1;3]} y = y(3) \Leftrightarrow \frac{3m^2-1}{5} = 1 \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$ (vì $m > 0$).

- Câu 9.** Cho hàm số $y = \frac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -3 . Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?
- A.** $(2;5)$. **B.** $(1;4)$. **C.** $(6;9)$. **D.** $(20;25)$.

Lời giải

Chọn A

+ TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-8\}$.

+ $y' = \frac{8+m^2}{(x+8)^2} > 0, \forall x \in D$

Vậy hàm số $y = \frac{x-m^2}{x+8}$ đồng biến trên $[0;3]$.

$\Rightarrow \min_{[0;3]} y = y(0) = \frac{-m^2}{8}$

Để $\min_{[0;3]} y = -3 \Leftrightarrow \frac{-m^2}{8} = -3 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{6}$.

$\Rightarrow m_0 = 2\sqrt{6} \in (2;5)$. Vậy chọn **A**.

- Câu 10.** Tìm giá trị của tham số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;4]$ bằng 3.
- A.** $m = 3$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = 7$. **D.** $m = 5$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = \frac{2-m}{(x+1)^2}$.

+ Xét $m = 2$.

$\Rightarrow$ Hàm số trở thành: $y = 2$ là hàm số hằng nên không đạt giá trị nhỏ nhất bằng 3

$\Rightarrow m = 2$ (loại)

+ Xét $m > 2$.

$\Rightarrow y' = \frac{2-m}{(x+1)^2} < 0 (\forall x \neq -1) \Rightarrow \min_{[0;4]} y = y(4) = \frac{8+m}{5}$.

$\Rightarrow \frac{8+m}{5} = 3 \Leftrightarrow m = 7$ (thỏa mãn).

+ Xét $m < 2$.

$\Rightarrow y' = \frac{2-m}{(x+1)^2} > 0 (\forall x \neq -1) \Rightarrow \min_{[0;4]} y = y(0) = m$.

$\Rightarrow m = 3$ (loại).

Vậy $m = 7$.

- Câu 11.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng $\sqrt{2}$

A. $m = \sqrt{2}$.

B. $m = 2 + \sqrt{2}$.

C. $m = 4 + \sqrt{2}$.

D. $\begin{cases} m = 2 + \sqrt{2} \\ m = 4 + \sqrt{2} \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

$$y' = 3x^2 - 6x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Trên $[-1;1]$ thì $y'_{(-1)} = m - 4; y'_{(0)} = m; y'_{(1)} = m - 2$

nên $\min_{[-1;1]} y = \sqrt{2} \Leftrightarrow m - 4 = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = 4 + \sqrt{2}$

Câu 12. Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x - m^2 + m}{x + 1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2 .

A. $\begin{cases} m = -1 \\ m = -2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Hàm số đã cho liên tục trên $[0;1]$.

Ta có: $y' = \frac{1 - (-m^2 + m)}{(x+1)^2} = \frac{m^2 - m + 1}{(x+1)^2} > 0; \forall x \in D$.

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[0;1]$.

Trên $[0;1]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 0$.

Ta có: $y(0) = -2 \Leftrightarrow -m^2 + m = -2 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$.

Câu 13. Có một giá trị m_0 của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[0;1]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $2018m_0 - m_0^2 \geq 0$. B. $2m_0 - 1 < 0$.

C. $6m_0 - m_0^2 < 0$. D. $2m_0 + 1 < 0$.

Lời giải

+ Đặt $f(x) = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$.

+ Ta có: $y' = 3x^2 + m^2 + 1$. Dễ thấy rằng $y' > 0$ với mọi x, m thuộc $\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên $[0;1]$. Vì thế $\min_{[0;1]} y = \min_{[0;1]} f(x) = f(0) = m + 1$.

+ Theo bài ra ta có: $m + 1 = 5$, suy ra $m = 4$.

+ Như vậy $m_0 = 4$ và mệnh đề đúng là $2018m_0 - m_0^2 \geq 0$.

Câu 14. Nếu hàm số $y = x + m + \sqrt{1 - x^2}$ có giá trị lớn nhất bằng $2\sqrt{2}$ thì giá trị của m là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $-\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Xét hàm số $y = x + m + \sqrt{1 - x^2}$

Tập xác định: $D = [-1;1]$.

Ta có: $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = x \\ 1-x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > x \geq 0 \\ \sqrt{1-x^2} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > x \geq 0 \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > x \geq 0 \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ta có: $y(-1) = -1 + m$, $y(1) = 1 + m$, $y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} + m$.

Do hàm số $y = x + m + \sqrt{1-x^2}$ liên tục trên $[-1;1]$ nên $\max_{[-1;1]} y = m + \sqrt{2}$.

Theo bài ra thì $\max_{[-1;1]} y = 2\sqrt{2}$, suy ra $m + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$.

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[0;1]} y = 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $1 \leq m < 3$

B. $m > 6$

C. $m < 1$

D. $3 < m \leq 6$

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Với $m = 1 \Rightarrow y = 1$, $\forall x \in [0;1]$ thì $\min_{[0;1]} y \neq 3$.

Suy ra $m \neq 1$. Khi đó $y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}$ không đổi dấu trên từng khoảng xác định.

TH 1: $y' > 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì $\min_{[0;1]} y = y(0) \Rightarrow m = 3$ (loại).

TH 2: $y' < 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì $\min_{[0;1]} y = y(1) \Rightarrow m = 5$ (thỏa mãn).

Câu 16. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ trên $[1;2]$ bằng 8 (m là tham số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m > 10$.

B. $8 < m < 10$.

C. $0 < m < 4$.

D. $4 < m < 8$.

Lời giải

Nếu $m = 1$ thì $y = 1$ (không thỏa mãn tổng của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất bằng 8)

Nếu $m \neq 1$ thì hàm số đã cho liên tục trên $[1;2]$ và $y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}$.

Khi đó đạo hàm của hàm số không đổi dấu trên đoạn $[1;2]$.

$$\text{Do vậy } \min_{x \in [1;2]} y + \max_{x \in [1;2]} y = y(1) + y(2) = \frac{m+1}{2} + \frac{m+2}{3} = 8 \Leftrightarrow m = \frac{41}{5}.$$

Câu 17. Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - m$. Trên $[-1;1]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất là -1 . Tính m ?

A. $m = -6$.

B. $m = -3$.

C. $m = -4$.

D. $m = -5$.

Lời giải

Chọn C

Xét $[-1;1]$ có $y' = 6x^2 - 6x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1;1] \\ x = 1 \in [-1;1] \end{cases}.$$

Khi đó

$$y(-1) = -5 - m; y(0) = -m; y(1) = -1 - m$$

Ta thấy $-5 - m < -1 - m < -m$ nên $\min_{[-1;1]} y = -5 - m$.

Theo bài ra ta có $\min_{[-1;1]} y = -1$ nên $-5 - m = -1 \Leftrightarrow m = -4$.

Câu 18. Biết S là tập giá trị của m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - m^2x^3 - 2x^2 - m$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -16 . Tính tích các phần tử của S .

A. 2.

B. -2.

C. -15.

D. -17.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 3m^2x^2 - 4x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 3m^2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 - 3m^2x - 4 = 0 \quad (\Delta = 9m^2 + 64) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3m^2 + \sqrt{9m^2 + 64}}{8} > 1 \\ x = \frac{3m^2 - \sqrt{9m^2 + 64}}{8} < 0 \end{cases}$$

Nên hàm số đơn điệu trên $(0;1)$.

Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;1]$ bằng -16 nên

$$y(0) + y(1) = -16 \Leftrightarrow -m + (-m^2 - m - 1) = -16 \Leftrightarrow -m^2 - 2m + 15 = 0.$$

Vậy $m_1.m_2 = -15$.

Câu 19. Gọi A, B lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$.

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A+B = \frac{13}{2}$.

A. $m = 1; m = -2$.

B. $m = -2$.

C. $m = \pm 2$.

D. $m = -1; m = 2$.

Lời giải

Xét hàm số $y = \frac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn $[2;3]$.

$$y' = \frac{-m^2 - m - 1}{(x-1)^2} < 0 \quad \forall x \in [2;3] \Rightarrow A = f(3) = \frac{m^2 + m + 3}{2}, B = f(2) = \frac{m^2 + m + 2}{1}.$$

$$A+B = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \frac{m^2 + m + 3}{2} + \frac{m^2 + m + 2}{1} = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}.$$

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \frac{x-m^2}{x+8}$ với m là tham số thực. Giả sử m_0 là giá trị dương của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ bằng -3 . Giá trị m_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng cho dưới đây?

A. $(20;25)$.

B. $(5;6)$.

C. $(6;9)$.

D. $(2;5)$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = \frac{x-m^2}{x+8}$ trên đoạn $[0;3]$.

Ta có: $y' = \frac{8+m^2}{(x+8)^2} > 0, \forall x \in [0;3] \Rightarrow$ hàm số $f(x) = \frac{x-m^2}{x+8}$ đồng biến trên đoạn $[0;3]$

$$\Rightarrow \min_{[0;3]} f(x) = f(0) = \frac{-m^2}{8}.$$

Theo giả thiết, ta có: $\min_{[0;3]} f(x) = -3 \Leftrightarrow \frac{-m^2}{8} = -3 \Leftrightarrow m^2 = 24 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2\sqrt{6} \\ m = -2\sqrt{6} \end{cases}.$

Mà $m > 0, m \in \mathbb{R} \Rightarrow m = 2\sqrt{6} \approx 4,9 \in (2;5).$

Câu 21. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ tại một điểm $x_0 \in (0;2).$

A. $0 < m < 1$

B. $m > 1$

C. $m > 2$

D. $-1 < m < 1$

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$. Hàm số liên tục trên $[0;2] \Leftrightarrow \begin{cases} -m < 0 \\ -m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \end{cases}$

Ta có $y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2} = \frac{(x+m)^2 - 1}{(x+m)^2}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -m-1 \\ x_2 = -m+1 \end{cases}.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1	$-m$	0	x_2	2	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y								

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 \in (0;2)$ nên $0 < -m+1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1$

So với điều kiện hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$. Ta có $0 < m < 1$.

CÓ THỂ GIẢI NHƯ SAU:

Điều kiện xác định $x \neq -m$

Hàm số liên tục trên đoạn $[0;2]$ nên $-m \notin [0;2] \Rightarrow \begin{cases} -m < 0 \\ -m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \end{cases} (*)$

$$y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2} = \frac{(x+m)^2 - 1}{(x+m)^2}$$

$$y' = 0 \text{ có hai nghiệm là } \begin{cases} x_1 = -m+1 \\ x_2 = -m-1 \end{cases},$$

$x_1 - x_2 = 2$ nên chỉ có nhiều nhất một nghiệm thuộc $(0;2)$

Ta thấy $-m+1 > -m-1, \forall m$ và do đó để hàm số liên tục và đạt giá trị nhỏ nhất trên $[0;2]$ tại một điểm $x_0 \in (0;2)$ thì $0 < -m+1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1 (**)$

Từ $(*)$, $(**)$ ta có $0 < m < 1$

- Câu 22.** Cho hàm số $y = \frac{1-m \sin x}{\cos x + 2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;10]$ để giá trị nhỏ nhất của hàm số nhỏ hơn -2 ?
- A. 1. B. 9. C. 3. D. 6.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = \frac{1-m \sin x}{\cos x + 2} \Leftrightarrow y \cos x + m \sin x = 1 - 2y$.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi: $y^2 + m^2 \geq 1 - 4y + 4y^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - m^2 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{1 + 3m^2}}{3} \leq y \leq \frac{2 + \sqrt{1 + 3m^2}}{3}.$$

$$\text{Theo đề bài, ta có: } \begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}} y = \frac{2 - \sqrt{1 + 3m^2}}{3} < -2 \\ m \in [0;10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1 + 3m^2} > 8 \\ m \in [0;10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 > 63 \\ m \in [0;10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 21 \\ m \in [0;10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

- Câu 23.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m}{x^2+x+1}$ có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ nhỏ hơn hoặc bằng 1.
- A. $m \leq 1$. B. $m \geq 1$. C. $m \geq -1$. D. $m \leq -1$.

Lời giải

Chọn A

+ TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

+ $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$

$$+ y' = \frac{-x^2 - 2mx + 1 - m}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2mx + 1 - m = 0 \quad (*)$$

$\Delta_{(*)} = m^2 - m + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2, \forall m \in \mathbb{R}$

+ BBT:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
y'		-	0	+	0	-
y		0	$f(x_1)$	$f(x_2)$	0	

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f(x_2) = \frac{1}{2x_2 + 1}$ với $x_2 = -m + \sqrt{m^2 - m + 1}$

$$YCBT \Leftrightarrow \frac{1}{-2m + 2\sqrt{m^2 - m + 1} + 1} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - 2m + 2\sqrt{m^2 - m + 1} \geq 1 \quad (\text{vì } f(x_2) > 0 \Rightarrow 2x_2 + 1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2 - m + 1} \geq m \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \geq 0 \\ m^2 - m + 1 \geq m^2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 1$$

C. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI (chứa tham số)

Dạng 1: Tìm m để $\max_{[a; \beta]} y = |f(x) + m| = a \quad (a > 0)$.

Phương pháp:

Cách 1: Trước tiên tìm $\max_{[a; \beta]} f(x) = K; \quad \min_{[a; \beta]} f(x) = k \quad (K > k)$.

$$\text{Kiểm tra } \max \{|m+K|, |m+k|\} \geq \frac{|m+K| + |m+k|}{2} \geq \frac{|m+K-m-k|}{2} = \frac{|K-k|}{2}.$$

$$\text{TH1: } \frac{|K-k|}{2} \leq a. \text{ Để } \max_{[a; \beta]} y = a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k = -a \\ m+K = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -a-k \\ m = a-K \end{cases} \Rightarrow m \in \{-a-k; a-K\}.$$

$$\text{TH2: } \frac{|K-k|}{2} > a \Rightarrow m \in \emptyset.$$

Cách 2: Xét trường hợp

$$\text{TH1: } \max = |m+K| \Leftrightarrow \begin{cases} |m+K| = a \\ |m+K| \geq |m+k| \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \max = |m+k| \Leftrightarrow \begin{cases} |m+k| = a \\ |m+k| \geq |m+K| \end{cases}$$

Dạng 2: Tìm m để $\min_{[a; \beta]} y = |f(x) + m| = a \quad (a > 0)$.

Phương pháp:

Trước tiên tìm $\max_{[a; \beta]} f(x) = K; \quad \min_{[a; \beta]} f(x) = k \quad (K > k)$.

$$\text{Để } \min_{[a; \beta]} y = a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k = a \\ m+k > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m+K = -a \\ m+K < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = a-k \\ m > -k \end{cases} \vee \begin{cases} m = -a-K \\ m < -K \end{cases}. \text{ Vậy } m \in S_1 \cup S_2.$$

Dạng 3: Tìm m để $\max_{[a; \beta]} y = |f(x) + m|$ không vượt quá giá trị M cho trước.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max_{[a; \beta]} f(x) = K; \quad \min_{[a; \beta]} f(x) = k \quad (K > k)$.

$$\text{Để } \max_{[a; \beta]} y \leq M \Rightarrow \begin{cases} m+k \geq -M \\ m+K \leq M \end{cases} \Leftrightarrow -M-k \leq m \leq M-K.$$

Dạng 4: Tìm m để $\min_{[a; \beta]} y = |f(x) + m|$ không vượt quá giá trị a cho trước.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max_{[a; \beta]} f(x) = K; \quad \min_{[a; \beta]} f(x) = k \quad (K > k)$.

$$\text{Để } \min_{[a; \beta]} y \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k \leq a \\ m+k \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m+K \geq -a \\ m+K \leq 0 \end{cases} \vee (m+K)(m+k) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq a-k \\ m \geq -k \end{cases} \vee \begin{cases} m \geq -a-K \\ m \leq -K \end{cases} \vee -K < m < -k.$$

Dạng 5: Tìm m để $\max_{[a;b]} y = |f(x) + m|$ đạt min.

Phương pháp:

Trước tiên tìm $\max_{[a;b]} f(x) = K; \quad \min_{[a;b]} f(x) = k \ (K > k).$

Đề hỏi tìm $m \Rightarrow m = -\frac{K+k}{2}$. Đề hỏi tìm min của $\max_{[a;b]} y \Rightarrow$ giá trị này là $\frac{K-k}{2}$.

Dạng 6: Tìm m để $\min_{[a;b]} y = |f(x) + m|$ đạt min.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max_{[a;b]} f(x) = K; \quad \min_{[a;b]} f(x) = k \ (K > k).$

Đề hỏi tìm $m \Rightarrow (m+K)(m+k) \leq 0 \Leftrightarrow -K \leq m \leq -k$. Đề hỏi tìm min của $\min_{[a;b]} y \Rightarrow$ giá trị này là 0.

Dạng 7: Cho hàm số $y = |f(x) + m|$. Tìm m để $\max_{[a;b]} y \leq h, \min_{[a;b]} y (h > 0)$ hoặc $\min + \max =$

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max_{[a;b]} f(x) = K; \quad \min_{[a;b]} f(x) = k \ (K > k).$

TH1: $|K + m| \leq h \Rightarrow |K + m| \leq h \Rightarrow \frac{|K+m| \geq |k+m|}{K+m \text{ cùng dấu } k+m} \rightarrow m \in S_1.$

TH2: $|k + m| \leq h \Rightarrow |k + m| \leq h \Rightarrow \frac{|k+m| \geq |K+m|}{K+m \text{ cùng dấu } k+m} \rightarrow m \in S_2.$

Vậy $m \in S_1 \cup S_2.$

Dạng 8: Cho hàm số $y = |f(x) + m|$.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max_{[a;b]} f(x) = K; \quad \min_{[a;b]} f(x) = k \ (K > k).$

BT1: Tìm m để $\min_{[a;b]} y + \max_{[a;b]} y = \alpha \Leftrightarrow |m+K| + |m+k| = \alpha.$

BT2: Tìm m để $\min_{[a;b]} y * \max_{[a;b]} y = \beta \Leftrightarrow |m+K| * |m+k| = \beta.$

Câu 1. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S là:

A. -16.

B. 16.

C. -12.

D. -2.

Lời giải

Chọn A

Xét $u = x^3 - 3x + m$ trên đoạn $[0;3]$ có $u' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [0;3].$

Khi đó $\begin{cases} \max_{[0;3]} u = \max \{u(0), u(1), u(3)\} = \max \{m, m-2, m+18\} = m+18 \\ \min_{[0;3]} u = \min \{u(0), u(1), u(3)\} = \min \{m, m-2, m+18\} = m-2 \end{cases}$

Suy ra $\max_{[0;3]} f(x) = \max \{|m-2|, |m+18|\} = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} |m+18| = 16 \\ |m+18| \geq |m-2| \\ |m-2| = 16 \\ |m-2| \geq |m+18| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = -14 \end{cases}$

Do đó tổng tất cả các phần tử của S bằng -16.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| = 2$. Số phần tử của S là

A. 6.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Do hàm số $f(x) = \frac{x+m}{x+1}$ liên tục trên $[0;1]$

Khi $m = 1$ hàm số là hàm hằng nên $\max_{[0;1]} f(x) = \min_{[0;1]} f(x) = 1$

Khi $m \neq 1$ hàm số đơn điệu trên đoạn $[0;1]$ nên

+ Khi $f(0); f(1)$ cùng dấu thì $\max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| = |f(0)| + |f(1)| = |m| + \left| \frac{m+1}{2} \right|$.

+ Khi $f(0); f(1)$ trái dấu thì $\min_{[0;1]} |f(x)| = 0, \max_{[0;1]} |f(x)| = \max \{ |f(0)|; |f(1)| \} = \max \left\{ |m|; \left| \frac{m+1}{2} \right| \right\}$.

TH1: $f(0) \cdot f(1) \geq 0 \Leftrightarrow m(m+1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 0 \end{cases}$.

$\max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| = 2 \Leftrightarrow |m| + \left| \frac{m+1}{2} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{5}{3} \end{cases}$ (thỏa mãn).

TH2: $f(0) \cdot f(1) < 0 \Leftrightarrow m(m+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 0$

$\max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| = 2 \Rightarrow \begin{cases} |m| = 2 \\ \left| \frac{m+1}{2} \right| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m = -5 \end{cases}$ (không thỏa mãn).

Số phần tử của S là 2.

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + m$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| = 5$. Số phần tử của S là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + m$.

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	0	1	2
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	m	$m+1$	m

+) Nếu $m < -1$ thì $\max_{[0;2]} |f(x)| = -m$, $\min_{[0;2]} |f(x)| = -m-1$

Ta có $\max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| = 5 \Leftrightarrow -m - m - 1 = 5 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa)

+) Nếu $m > 0$ thì $\max_{[0;2]} |f(x)| = m+1$, $\min_{[0;2]} |f(x)| = m$

Ta có $\max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| = 5 \Leftrightarrow m+1+m=5 \Leftrightarrow m=2$ (thỏa)

+) Nếu $-1 \leq m \leq 0$ thì $\min_{[0;2]} |f(x)| = 0$; $\max_{[0;2]} |f(x)| = \max\{|m|; |m+1|\} \leq 1$

$\Rightarrow \max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| < 5$ (không thỏa điều kiện đề bài)

Vậy $S = \{-3; 2\}$, có 2 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 4. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + m + 3|$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng 4. Tổng tất cả các phần tử của S là

A. -6.

B. -8.

C. -9.

D. -12.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm $g(x) = x^2 - 2x + m + 3$. Dễ thấy hàm số $g(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$

Ta có $g'(x) = 2x - 2$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Do đó $\max_{[-1;2]} |x^2 - 2x + m + 3| = \max\{|m+2|; |m+3|; |m+6|\}$.

Ta thấy $m+2 < m+3 < m+6$ với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Suy ra $\max_{[-1;2]} y$ chỉ có thể là $|m+6|$ hoặc $|m+2|$.

Nếu $\max_{[-1;2]} y = |m+6|$ thì $\begin{cases} |m+6| = 4 \\ |m+6| \geq |m+2| \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$.

Nếu $\max_{[-1;2]} y = |m+2|$ thì $\begin{cases} |m+2| = 4 \\ |m+2| \geq |m+6| \end{cases} \Leftrightarrow m = -6$.

Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng -8.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| = 6$. Tổng tất cả các phần tử của S là

A. 3.

B. 0.

C. -1.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$.

$f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	0	1	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	m		$m+2$
		$m-2$	

+) Nếu $m < -2$ thì $\max_{[0;2]} |f(x)| = -m + 2$, $\min_{[0;2]} |f(x)| = -m - 2$

Ta có $\max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| = 6 \Leftrightarrow -m + 2 - m - 2 = 6 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa)

+) Nếu $m > 2$ thì $\max_{[0;2]} |f(x)| = m + 2$, $\min_{[0;2]} |f(x)| = m - 2$

Ta có $\max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| = 6 \Leftrightarrow m + 2 + m - 2 = 6 \Leftrightarrow m = 3$ (thỏa)

+) Nếu $-2 \leq m \leq 2$ thì $\min_{[0;2]} |f(x)| = 0$; $\max_{[0;2]} |f(x)| = \max\{|m+2|; |m-2|\} \leq 4$

$\Rightarrow \max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| < 6$ (không thỏa điều kiện đề bài)

Vậy $S = \{-3; 3\}$, Tổng các phần tử của S là 0.

Câu 6. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |2x^3 - 6x + m|$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 8. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 8.

B. -16.

C. -32.

D. -72.

Lời giải

Chọn C

Xét $u(x) = 2x^3 - 6x + m$ trên đoạn $[0; 3]$. Dễ thấy hàm số $u(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$.

Có $u'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x = 1 \in [0; 3]$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \max_{[0;3]} u = \max\{u(0); u(1); u(3)\} = \max\{m; m-4; m+36\} = m+36 \\ \min_{[0;3]} u = \min\{u(0); u(1); u(3)\} = \min\{m; m-4; m+36\} = m-4 \end{cases}$$

$$\text{Theo bài ra } \min_{[0;3]} f(x) = \min\{|m-4|; |m+36|; 0\} = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} |m-4| = 8 \\ m-4 > 0 \\ m+36 < 0 \\ |m+36| = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 12 \\ m = -44 \end{cases}$$

Do đó $S = \{-44; 12\}$. Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng -32.

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm $g(x) = x^2 + 2x + m - 4$. Dễ thấy hàm số $g(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 1]$.

Ta có $g'(x) = 2x + 2$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Do đó $\max_{[-2;1]} |x^2 + 2x + m - 4| = \max\{|m-1|; |m-4|; |m-5|\}$.

Ta thấy $m-5 < m-4 < m-1$ với mọi $m \in \mathbb{R}$.

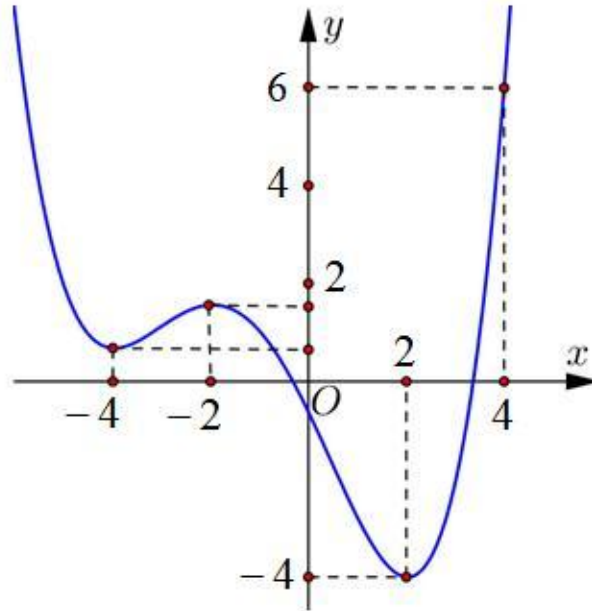
Suy ra $\max_{[-2;1]} |x^2 + 2x + m - 4| = \max\{|m-1|; |m-5|\}$.

$$\max\{|m-1|; |m-5|\} \geq \frac{|m-1| + |m-5|}{2} \geq \frac{m-1+5-m}{2} = 2.$$

Vậy GTNN của $\max\{|m-1|; |m-5|\}$ bằng 2.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $|m-1|=|m-5| \Leftrightarrow m=3$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để hàm số $y = \left| f\left(\frac{8x}{x^2+1}\right) + a - 1 \right|$ có giá trị lớn nhất không vượt quá 20?

A. 29.

B. 35.

C. 31.

D. 41.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \frac{8x}{x^2+1}$. Ta có: $t' = \frac{-8x^2+8}{(x^2+1)^2}$; $t' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

BBT:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	
t'		$-$	0	$+$	0	$-$
t	0			4		0
			-4			

$\Rightarrow t \in [-4; 4]$.

Hàm số $y = \left| f\left(\frac{8x}{x^2+1}\right) + a - 1 \right|$ trở thành $g(t) = |f(t) + a - 1|, t \in [-4; 4]$.

Đặt $h(t) = f(t) + a - 1, t \in [-4; 4]$, ta có: $h'(t) = f'(t)$.

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \in [-4; 4] \\ t = -2 \in [-4; 4] \\ t = 2 \in [-4; 4] \end{cases}$$

Ta có: $h(-4) \approx 0,8 + a - 1 = a - 0,2$; $h(4) = 6 + a - 1 = a + 5$;

$h(-2) \approx 1,6 + a - 1 = a + 0,6$; $h(2) = -4 + a - 1 = a - 5$.

$$\max_{\mathbb{R}} y = \max_{[-4;4]} |h(t)| = \max \{|a+5|; |a-5|\}.$$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} |a+5| \leq 20 \\ |a-5| \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -20 \leq a+5 \leq 20 \\ -20 \leq a-5 \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -25 \leq a \leq 15 \\ -15 \leq a \leq 25 \end{cases} \Leftrightarrow -15 \leq a \leq 15.$$

Vậy có tất cả 31 giá trị nguyên của tham số a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x) = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x+1} \right| \text{ trên } [1;2] \text{ bằng } 2. \text{ Tổng tất cả các phần tử của } S \text{ là}$$

A. $-\frac{11}{3}.$

B. $\frac{13}{6}.$

C. $-\frac{11}{6}.$

D. $\frac{1}{3}.$

Lời giải

Chọn C

Xét $u(x) = \frac{x^2 + mx + m}{x+1}$ trên đoạn $[1;2]$. Dễ thấy $u(x)$ liên tục trên đoạn $[1;2]$.

$$\text{Ta có } u' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1;2] \\ x = -2 \notin [1;2] \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \max_{[1;2]} u(x) = \max \{u(1); u(2)\} = \max \left\{ m + \frac{1}{2}; m + \frac{4}{3} \right\} = m + \frac{4}{3} \\ \min_{[1;2]} u(x) = \min \{u(1); u(2)\} = \min \left\{ m + \frac{1}{2}; m + \frac{4}{3} \right\} = m + \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \max_{[1;2]} f(x) = \max \left\{ \left| m + \frac{1}{2} \right|; \left| m + \frac{4}{3} \right| \right\} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left| m + \frac{1}{2} \right| = 2 \\ \left| m + \frac{1}{2} \right| \geq \left| m + \frac{4}{3} \right| \\ \left| m + \frac{4}{3} \right| = 2 \\ \left| m + \frac{4}{3} \right| \geq \left| m + \frac{1}{2} \right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{5}{2} \\ m = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Vậy tổng các phần tử của S là $-\frac{11}{6}.$

Câu 10. Cho hàm số $y = \cos^3 x - 3\sin^2 x + m + 3$. Gọi S là tập hợp các giá trị m sao cho $2 \max |y| + \min |y| = 9$. Tổng các phần tử của tập hợp S bằng:

A. $-\frac{16}{3}.$

B. $-4.$

C. $-6.$

D. $-2.$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y = \cos^3 x - 3\sin^2 x + m + 3 = \cos^3 x + 3\cos^2 x + m$.

$$\text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow t \in [-1;1], \text{ xét } g(t) = t^3 + 3t^2 + m \text{ có } g'(t) = 3t^2 + 6t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 0. \end{cases}$$

BBT:

t	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$
$g'(t)$	0		-	0	+	
$g(t)$	$m+2$		m		$m+4$	

Từ đó: $\min_{[-1;1]} g(t) = g(0) = m$; $\max_{[-1;1]} g(t) = g(1) = m + 4$.

+ **TH1:** $m(m+4) \geq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$,

$$2 \max |y| + \min |y| = 2 \max_{[-1;1]} |g(t)| + \min_{[-1;1]} |g(t)| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 2(m+4) + m = 9 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ m = \frac{-13}{3} \end{cases}$$

+ **TH2:** $m(m+4) < 0 \Leftrightarrow m \in (-4; 0)$, $\min_{[-1;1]} |g(t)| = 0$,

$$2 \max |y| + \min |y| = 2 \max_{[-1;1]} |g(t)| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} m+4 \leq -m \\ -2m = 9 \\ -m \leq m+4 \\ 2(m+4) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-9}{2} (l) \\ m = \frac{1}{2} (l) \end{cases}$$

Vậy $S = \left\{ \frac{-13}{3}, \frac{1}{3} \right\}$

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(2 - \cos x) + m|$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

- A.** 4. **B.** -16. **C.** -32. **D.** -12.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 2 - \cos x$ ta có $t \in [1; 3]$. Khi đó bài toán trở thành tìm m để hàm số $y = |t^3 - 3t + m|$ với $\forall t \in [1; 3]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2.

Xét $u(t) = t^3 - 3t + m$ trên đoạn $[1; 3]$. Ta có hàm số $u(t)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$.

$$u'(t) = 3t^2 - 3; u'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \notin (1; 3) \\ t = 1 \notin (1; 3) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} \max_{[1;3]} u(t) = \max \{u(1); u(3)\} = \max \{m+18; m-2\} = m+18 \\ \min_{[1;3]} u(t) = \min \{u(1); u(3)\} = \min \{m+18; m-2\} = m-2 \end{cases}$$

Yêu cầu bài tập: $\min_{[1;3]} y = 2$.

Trường hợp 1: $m-2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$

$$\Rightarrow \min_{[1;3]} y = |m-2| = m-2; \min_{[1;3]} y = 2 \Leftrightarrow m-2 = 2 \Leftrightarrow m = 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

Trường hợp 2: $m+18 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -18$

$$\Rightarrow \min_{[1;3]} y = |m+18| = -(m+18); \min_{[1;3]} y = 2 \Leftrightarrow -(m+18) = 2 \Leftrightarrow m = -20 \text{ (thỏa mãn)}$$

Trường hợp 3: $(m+18)(m-2) \leq 0 \Leftrightarrow -18 \leq m \leq 2 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = 0 \neq 2$ (loại)

Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng -16 . Chọn phương án B.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = \frac{\log x + m}{\log x + 2}$ (m là tham số thực). Gọi S là tổng tất cả các giá trị của m sao cho

$$\max_{\left[\frac{1}{10}; 1\right]} |f(x)| + \min_{\left[\frac{1}{10}; 1\right]} |f(x)| = 2. \text{ Tìm } S.$$

A. $-\frac{2}{3}$.

B. 2.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{10}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \log x$; $x \in \left[\frac{1}{10}; 1\right] \Rightarrow t \in [-1; 0]$

Xét hàm số $g(t) = \frac{t+m}{t+2}$ liên tục trên $[-1; 0]$

Khi đó: $\max_{\left[\frac{1}{10}; 1\right]} |f(x)| = \max_{[-1; 0]} |g(t)|$; $\min_{\left[\frac{1}{10}; 1\right]} |f(x)| = \min_{[-1; 0]} |g(t)|$

TH1: Khi $m = 2$ hàm số là hàm hằng $g(t) = 1$ nên

$$\max_{[-1; 0]} |g(t)| = \min_{[-1; 0]} |g(t)| = 1 \Rightarrow \max_{\left[\frac{1}{10}; 1\right]} |f(x)| + \min_{\left[\frac{1}{10}; 1\right]} |f(x)| = \max_{[-1; 0]} |g(t)| + \min_{[-1; 0]} |g(t)| = 2 \Rightarrow \text{nhận } m = 2$$

TH2: Khi $m \neq 2$ hàm số đơn điệu trên đoạn $[-1; 0]$ nên:

+ TH2.1: $g(-1) \cdot g(0) > 0 \Leftrightarrow m(m-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \end{cases}$. Khi đó:

$$\max_{\left[\frac{1}{10}; 1\right]} |f(x)| + \min_{\left[\frac{1}{10}; 1\right]} |f(x)| = 2 \Leftrightarrow \max_{[-1; 0]} |g(t)| + \min_{[-1; 0]} |g(t)| = 2$$

$$\Leftrightarrow |g(0)| + |g(-1)| = 2 \Rightarrow \left| \frac{m}{2} \right| + |m-1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 & (L) \\ m = -\frac{2}{3} & (N) \end{cases}$$

+ TH2.2: $f(-1) \cdot f(0) \leq 0 \Leftrightarrow m(m-1) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1$ Khi đó:

$$\min_{[-1; 0]} |g(t)| = 0, \max_{[-1; 0]} |g(t)| = \max \{ |g(0)|; |g(-1)| \} = \max \left\{ \left| \frac{m}{2} \right|; |m-1| \right\}$$

Do đó:

$$\max_{\left[\frac{1}{10}; 1\right]} |f(x)| + \min_{\left[\frac{1}{10}; 1\right]} |f(x)| = 2 \Leftrightarrow \max_{[-1; 0]} |g(t)| + \min_{[-1; 0]} |g(t)| = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left| \frac{m}{2} \right| = 2 \\ |m-1| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 4 & (L) \\ m = 3 & (L) \\ m = -1 & (L) \end{cases}$$

Vậy $S = \frac{4}{3}$

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^3 - mx^2 - 9x + 9m|$ trên đoạn $[-2; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Đặt $f(x) = x^3 - mx^2 - 9x + 9m$. Dễ thấy $\min_{[-2;2]} |f(x)| \geq 0$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi phương trình

$f(x) = 0$ có nghiệm $x \in [-2; 2]$.

Ta có: $f(x) = x^2(x - m) - 9(x - m) = (x^2 - 9)(x - m)$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \\ x = m \end{cases}$$

Do đó điều kiện cần và đủ để $f(x) = 0$ có nghiệm $x \in [-2; 2]$ là $m \in [-2; 2]$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 14. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = -x^4 + 8x^2 + m$ trên đoạn $[-1; 3]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 23.

B. 24.

C. 25.

D. 26.

Lời giải

Ta có $y = f(x) = -x^4 + 8x^2 + m = |x^4 - 8x^2 - m| = |(x^2 - 4)^2 - 16 - m|$.

Đặt $t = (x^2 - 4)^2$, vì $x \in [-1; 3]$, suy ra $t \in [0; 25]$.

Khi đó $y = g(t) = |t - 16 - m|$.

Ta có $\min_{[-1;3]} f(x) = \min_{[0;25]} g(t) = \min\{|m - 9|, |m + 16|\}$.

Nếu $m - 9 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 9$, khi đó $\min_{[-1;3]} f(x) = m - 9 \geq 0$, khi đó $\min_{[-1;3]} \left(\min_{[-1;3]} f(x) \right) = 0$, khi $m = 9$.

Nếu $m + 16 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -16$, khi đó $\min_{x \in [-1;3]} f(x) = -m - 16 \geq 0$, khi đó $\min_{[-1;3]} \left(\min_{[-1;3]} f(x) \right) = 0$, khi $m = -16$.

Nếu $(m - 9)(m + 16) < 0 \Leftrightarrow -16 < m < 9$, khi đó $\min_{x \in [-1;3]} f(x) = 0$, khi đó $\min_{[-1;3]} \left(\min_{[-1;3]} f(x) \right) = 0$.

Vậy $\min_{[-1;3]} \left(\min_{[-1;3]} f(x) \right) = 0$, khi $-16 \leq m \leq 9$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$, nên có 26 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 15. Cho hàm số $y = |x^2 - 4x + 2m - 3|$ với m là tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1; 3]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng a khi $m = b$. Tính $P = 2b - a$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{13}{4}$.

C. $\frac{-9}{4}$.

D. 6.

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x) = x^2 - 4x + 2m - 3$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$.

+) $f'(x) = 2x - 4$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in [1; 3]$.

+) $f(1) = 2m - 6$, $f(2) = 2m - 7$, $f(3) = 2m - 6$.

Khi đó $\max_{[1;3]} |f(x)| = \max\{|2m - 6|; |2m - 7|\} = M$.

Ta có: $\begin{cases} M \geq |2m - 6| \\ M \geq |2m - 7| = |7 - 2m| \end{cases} \Rightarrow 2M \geq |2m - 6| + |7 - 2m| \geq |2m - 6 + 7 - 2m| = 1 \Rightarrow M \geq \frac{1}{2}$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} |2m-6| = |2m-7| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{13}{4} \\ (2m-6)(7-2m) \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } M = \frac{1}{2} = a \text{ khi } m = \frac{13}{4} = b \Rightarrow P = 2b - a = 6.$$

- Câu 16.** Cho hàm số $y = |x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27|$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3; -1]$ có giá trị nhỏ nhất. Khi đó tích các phần tử của S là
- A. 4. B. -4. C. 8. **D. -8.**

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 + x^2 + (m^2 + 1)x + 27$ liên tục trên đoạn $[-3; -1]$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2x + m^2 + 1 > 0$ với $\forall x \in [-3; -1]$.

Ta có $f(-3) = 6 - 3m^2$; $f(-1) = 26 - m^2$.

Khi đó $\max_{[-3; -1]} |f(x)| = \max \{|6 - 3m^2|; |26 - m^2|\} = M$.

$$\text{Lại có } \begin{cases} M \geq |6 - 3m^2| \\ M \geq |26 - m^2| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M \geq |6 - 3m^2| \\ 3M \geq |3m^2 - 78| \end{cases} \Rightarrow 4M \geq 72 \Leftrightarrow M \geq 18.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} |6 - 3m^2| = |26 - m^2| = 18 \\ (6 - 3m^2)(3m^2 - 78) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2\sqrt{2} \\ m = -2\sqrt{2} \end{cases}.$$

Vậy với $\begin{cases} m = 2\sqrt{2} \\ m = -2\sqrt{2} \end{cases}$ thì giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-3; -1]$ có giá trị nhỏ nhất.

Khi đó tích các giá trị là $2\sqrt{2} \cdot (-2\sqrt{2}) = -8$.

- Câu 17.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất?
- A. 2. B. 3. C. 0. **D. 1.**

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m$ liên tục trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có $f'(x) = x^3 - 19x + 30$

$$+ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \notin [0; 2] \\ x = 3 \notin [0; 2] \\ x = 2 \in [0; 2] \end{cases}.$$

+ Ta có: $f(0) = m$; $f(2) = m + 26$.

Khi đó $\max_{[0; 2]} f(x) = \max \{m; m + 26\} = m + 26$; $\min_{[0; 2]} f(x) = \min \{m; m + 26\} = m$.

Suy ra $\max_{[0; 2]} |f(x)| = \max \{|m|; |m + 26|\} = M$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} M \geq |m| = |-m| \\ M \geq |m + 26| \end{cases} \Rightarrow 2M \geq |-m| + |m + 26| \Leftrightarrow M \geq \frac{|-m| + |m + 26|}{2} \geq \frac{|-m + m + 26|}{2} = 13.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} |m| = |m+26| = 13 \\ -m(m+26) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -13.$

Do đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 13 khi $m = -13.$

Vậy có 1 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 18. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |x^2 - 2x + m|$ trên $[-1; 2]$ bằng 5.

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

+) Đặt $g(x) = x^2 - 2x + m.$

+) Ta có: $g'(x) = 2x - 2 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

$$+) \begin{cases} g(-1) = m + 3 \\ g(1) = m - 1 \\ g(2) = m \end{cases}.$$

+) Suy ra $\begin{cases} \min_{[-1; 2]} g(x) = m - 1 \\ \max_{[-1; 2]} g(x) = m + 3 \end{cases}$. Vậy $\min_{[-1; 2]} |g(x)| = \min \{0; |m - 1|; |m + 3|\}$

Ta xét các trường hợp sau:

TH1:.

$$\begin{cases} |m - 1| = 5 \\ |m - 1| \leq |m + 3| \end{cases} \Leftrightarrow m = 6.$$

TH2:.

$$\begin{cases} |m + 3| = 5 \\ |m - 1| \geq |m + 3| \end{cases} \Leftrightarrow m = -8$$

Vậy có hai giá trị của tham số m thỏa mãn.

Câu 19. Tính tích tất cả các số thực m để hàm số $y = \left| \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 8x + m \right|$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 3]$ bằng 18 là.

A. 432.

B. -216.

C. -432.

D. 288.

Lời giải

+ Xét hàm số $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 8x + m$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$.

+ Ta có $f'(x) = 4x^2 - 12x + 8.$

$$+ f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0; 3] \\ x = 2 \in [0; 3] \end{cases}.$$

$$+ f(0) = m; f(1) = \frac{10}{3} + m; f(2) = \frac{8}{3} + m; f(3) = 6 + m.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \max_{[0; 3]} f(x) = \max \{f(0); f(1); f(2); f(3)\} = f(3) = m + 6 \\ \min_{[0; 3]} f(x) = \min \{f(0); f(1); f(2); f(3)\} = f(0) = m \end{cases}.$$

Suy ra $\min_{[0;3]} y = \min \{0; |m|; |m+6|\}$.

TH1.

$$\begin{cases} |m| = 18 \\ |m| \leq |m+6| \end{cases} \Leftrightarrow m = 18.$$

TH2.

$$\begin{cases} |m+6| = 18 \\ |m| \geq |m+6| \end{cases} \Leftrightarrow m = -24.$$

Kết luận: tích các số thực m thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $-24.18 = -432$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 2x^2 + m - 1|$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$ bằng 18. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -5.

B. 4.

C. -14.

D. -10.

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = x^4 - 2x^2 + m - 1$ liên tục trên đoạn $[0; 2]$.

$$g'(x) = 4x^3 - 4x.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin [0; 2] \\ x = 0 \in [0; 2] \\ x = 1 \in [0; 2] \end{cases}$$

$$g(0) = m - 1, \quad g(1) = m - 2, \quad g(2) = m + 7.$$

$$\Rightarrow \min_{x \in [0; 2]} g(x) = m - 2, \quad \max_{x \in [0; 2]} g(x) = m + 7.$$

$$\Rightarrow \min_{x \in [0; 2]} f(x) = \min \{0; |m - 2|; |m + 7|\}.$$

Trường hợp 1:

$$\begin{cases} |m - 2| = 18 \\ |m - 2| \leq |m + 7| \end{cases} \Leftrightarrow m = 20.$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} |m + 7| = 18 \\ |m - 2| \geq |m + 7| \end{cases} \Leftrightarrow m = -25.$$

Suy ra $m \in \{20; -25\}$.

Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng -5.

Câu 21. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên lớn hơn 6 của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - (m+1)x + m|$ trên $[2; m-1]$ nhỏ hơn 2020.

A. 2043210.

B. 2034201.

C. 3421020

D. 3412020.

Lời giải

+) Xét hàm số $f(x) = x^2 - (m+1)x + m$ liên tục trên $[2; m-1]$ với $m > 6$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 2x - (m+1); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{m+1}{2} \in [2; m-1].$$

$$\text{Khi đó: } f(2) = 2 - m; f\left(\frac{m+1}{2}\right) = -\frac{(m-1)^2}{4}; f(m-1) = 2 - m.$$

$$\text{+) Vì } -\frac{(m-1)^2}{4} \leq 2 - m < 0, \forall m > 6 \text{ nên}$$

$$\max_{[2; m-1]} f(x) = \max \left\{ f(2); f\left(\frac{m+1}{2}\right); f(m-1) \right\} = 2 - m;$$

$$\text{và } \min_{[2; m-1]} f(x) = \min \left\{ f(2); f\left(\frac{m+1}{2}\right); f(m-1) \right\} = -\frac{(m-1)^2}{4}.$$

$$\text{Do đó: } \min_{[2; m-1]} y = \min \left\{ |2 - m|; \left| -\frac{(m-1)^2}{4} \right| \right\} = |2 - m|$$

$$+) \text{ Theo yêu cầu bài toán: } |2 - m| < 2020 \Leftrightarrow -2020 < 2 - m < 2020 \Leftrightarrow -2018 < m < 2022$$

$$+) \text{ Vì } m \in \mathbb{Z} \text{ và } m > 6 \text{ nên } m \in \{7; 8; 9; \dots; 2021\}.$$

$$+) \text{ Vậy tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số } m \text{ là: } \sum_{n=7}^{2021} n = \frac{(7 + 2021)2015}{2} = 2043210.$$

Câu 22. Cho hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + m \right|$. Tính tổng tất cả các số nguyên m để $\max_{[-1; 2]} y \leq 11$.

A. -19.

B. -37.

C. -30.

D. -11.

Lời giải

$$+ \text{ Xét hàm số } f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + m \text{ liên tục trên đoạn } [-1; 2].$$

$$+ \text{ Ta có } f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x.$$

$$+ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 2] \\ x = 1 \in [-1; 2] \\ x = 2 \in [-1; 2] \end{cases}.$$

$$+ f(-1) = \frac{9}{4} + m; f(0) = m; f(1) = \frac{1}{4} + m; f(2) = m.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \max_{[-1; 2]} f(x) = \max \{ f(-1); f(0); f(1); f(2) \} = f(-1) = m + \frac{9}{4} \\ \min_{[-1; 2]} f(x) = \min \{ f(-1); f(0); f(1); f(2) \} = f(0) = f(2) = m \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \max_{[0; 3]} y = \max \left\{ \left| m + \frac{9}{4} \right|, |m| \right\}$$

$$\text{theo yêu cầu bài toán } \max_{[0; 3]} y \leq 11 \Leftrightarrow \begin{cases} \left| m + \frac{9}{4} \right| \leq 11 \\ \left| m + \frac{9}{4} \right| \geq |m| \\ |m| \leq 11 \\ |m| \geq \left| m + \frac{9}{4} \right| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{53}{4} \leq m \leq \frac{35}{4} \\ m \geq -\frac{9}{8} \\ -11 \leq m \leq 11 \\ m \leq -\frac{9}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{9}{8} \leq m \leq \frac{35}{4} \\ -11 \leq m \leq -\frac{9}{8} \end{cases} \Leftrightarrow -11 \leq m \leq \frac{35}{4}.$$

Vì m nguyên nên $m = \{-11; -10; \dots; 8\}$.

Kết luận: tổng các số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $-11 - 10 - 9 - \dots + 8 = -30$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = |x^2 - 2mx + 3|$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$ không lớn hơn 3?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Ta có giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$ không lớn hơn 3, tức là $\max_{[1; 2]} f(x) \leq 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2mx + 3 \leq 3, \forall x \in [1; 2] \\ x^2 - 2mx + 3 \geq -3, \forall x \in [1; 2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \geq x, \forall x \in [1; 2] \\ 2m \leq \frac{x^2 + 6}{x}, \forall x \in [1; 2] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m \geq \max_{[1; 2]}(x) & (1) \\ 2m \leq \min_{[1; 2]}\left(\frac{x^2 + 6}{x}\right) & (2) \end{cases}.$$

+) (1) $\Leftrightarrow 2m \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 1$.

+) Xét hàm $g(x) = \frac{x^2 + 6}{x} = x + \frac{6}{x}$ với $x \in [1; 2]$ có $g'(x) = 1 - \frac{6}{x^2}$.

Suy ra: $g'(x) < 0, \forall x \in [1; 2] \Rightarrow \min_{[1; 2]} g(x) = g(2) = 5$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow m \leq \frac{5}{2}$.

Vậy $1 \leq m \leq \frac{5}{2}$, mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2\}$.

Câu 24. Cho hàm số $y = |x^3 - 3x^2 - 9x + m|$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để $\max_{[-2; 3]} y < 50$. Tổng các phần tử của M là

A. 0.

B. 737.

C. 759.

D. -215.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ liên tục trên đoạn $[-2; 3]$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Có $f(-2) = m - 2$; $f(-1) = m + 5$; $f(3) = m - 27$.

Suy ra $\max_{[-2; 3]} f(x) = m + 5$; $\min_{[-2; 3]} f(x) = m - 27$.

Do đó $M = \max_{[-2; 3]} y = \max\{|m + 5|; |m - 27|\}$.

$$M < 50 \Leftrightarrow \begin{cases} |m+5| \geq |m-27| \\ |m+5| < 50 \\ |m-27| < 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-22 \geq 0 \\ -50 < m+5 < 50 \\ 2m-22 < 0 \\ -50 < m-27 < 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in [11; 45) \\ m \in (-23; 11) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-23; 45).$$

Do đó $S = \{-22; -21; -20; \dots; -1; 0; 1; 2; \dots; 44\}$.

Vậy tổng các phần tử của M là 737.

Câu 25. Cho hàm số $y = |x^4 - 2x^3 + x^2 + a|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để $\max_{[-1; 2]} y \leq 100$.

A. 197.

B. 196.

C. 200.

D. 201.

Lời giải

Xét $u = x^4 - 2x^3 + x^2 + a$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$.

$$u' = 4x^3 - 6x^2 + 2x.$$

$$u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 2] \\ x = 1 \in [-1; 2] \\ x = \frac{1}{2} \in [-1; 2] \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} M = \max_{[-1; 2]} u = \max \left\{ u(-1), u(0), u\left(\frac{1}{2}\right), u(1), u(2) \right\} = u(-1) = u(2) = a + 4 \\ m = \min_{[-1; 2]} u = \min \left\{ u(-1), u(0), u\left(\frac{1}{2}\right), u(1), u(2) \right\} = u(0) = u(1) = a \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \max_{[-1; 2]} y = \max \{|a+4|, |a|\} \leq 100 \Leftrightarrow \begin{cases} |a+4| \leq |a| \leq 100 \\ |a| \leq |a+4| \leq 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -100 \leq a \leq -2 \\ -2 \leq a \leq 96 \end{cases}.$$

Vậy $a \in \{-100, -99, \dots, 96\}$ có 197 số nguyên thỏa mãn.

Câu 26. Cho hàm số $y = |\sin x + \cos x + m|$, có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số có giá trị lớn nhất bé hơn 2.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = \sin x + \cos x + m$, có tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $-\sqrt{2} + m \leq \sin x + \cos x + m \leq \sqrt{2} + m, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $-\sqrt{2} + m \leq f(x) \leq \sqrt{2} + m, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy: $\max_D y = |m + \sqrt{2}|$ hoặc $\max_D y = |m - \sqrt{2}|$.

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} |m + \sqrt{2}| < 2 \\ |m - \sqrt{2}| \leq |m + \sqrt{2}| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 - \sqrt{2} < m < 2 - \sqrt{2} \\ m \geq 0 \end{cases}$$

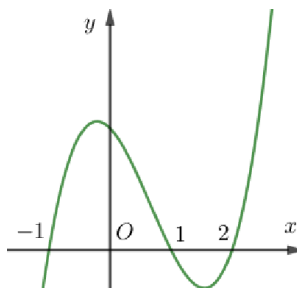
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |m - \sqrt{2}| < 2 \\ |m + \sqrt{2}| \leq |m - \sqrt{2}| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 + \sqrt{2} < m < 2 + \sqrt{2} \\ m \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m < 2 - \sqrt{2} \\ -2 + \sqrt{2} < m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 + \sqrt{2} < m < 2 - \sqrt{2}.$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 0$. Vậy chỉ có một giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

D. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT HÀM ẨN, HÀM HỢP

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

A. $f(1)$.

B. $f(-1)$.

C. $f(2)$.

D. $f(0)$.

Lời giải

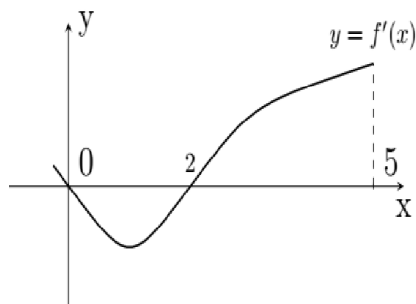
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Từ đồ thị hàm $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		$f(-1)$	$f(1)$	$f(2)$	$+\infty$

Từ đó suy ra giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 2]$ là $f(1)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ lần lượt là:



A. $f(2); f(5)$.

B. $f(0); f(5)$.

C. $f(2); f(0)$.

D. $f(1); f(5)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có bảng biến thiên.

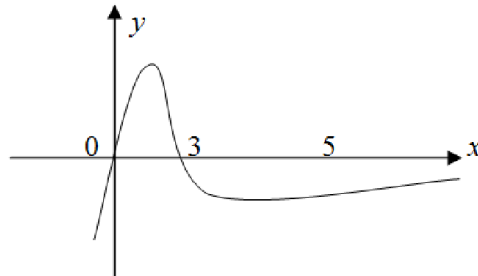
x	0	2	5
f'	0	0	
f	$f(0)$	$f(2)$	$f(5)$

Khi đó:
$$\begin{cases} \min_{[0;5]} f(x) = f(2) \\ f(3) > f(2) \end{cases},$$

mà $f(0) + f(3) = f(2) + f(5) \Rightarrow f(0) + f(2) < f(2) + f(5) \Rightarrow f(0) < f(5)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $y = f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ lần lượt là: $f(2); f(5)$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(3) = f(5) - f(4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$.



A. $m = f(5), M = f(3)$ **B.** $m = f(5), M = f(1)$

C. $m = f(0), M = f(3)$ **D.** $m = f(1), M = f(3)$

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$

x	0	3	5	
$f'(x)$	0	+	0	-
$f(x)$	$f(0)$	$f(3)$	$f(5)$	

$\Rightarrow M = f(3)$ và $f(1) < f(3), f(4) < f(3)$

$f(5) - f(0) = f(1) - f(3) + f(4) - f(3) < 0 \Rightarrow f(5) < f(0) \Rightarrow m = f(5)$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$		-3		5		$-\infty$

A. 15. **B.** $\frac{25}{3}$. **C.** $\frac{19}{3}$. **D.** 12.

Lời giải

$g'(x) = (4 - 2x)f'(4x - x^2) + x^2 - 6x + 8 = (2 - x)[2f'(4x - x^2) + 4 - x]$.

Với $x \in [1;3]$ thì $4 - x > 0; 3 \leq 4x - x^2 \leq 4$ nên $f'(4x - x^2) > 0$.

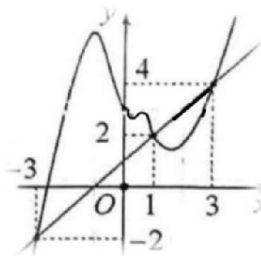
Suy ra $2f'(4x - x^2) + 4 - x > 0, \forall x \in [1;3]$.

Bảng biến thiên

x	1	2	3
g'	+	0	-
g	$g(1)$	$g(2)$	$g(3)$

Suy ra $\max_{[1;3]} g(x) = g(2) = f(4) + 7 = 12$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề dưới đây đúng.



- A. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(3)$. B. $\min_{[-3;3]} g(x) = g(1)$. C. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(0)$. D. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

Lời giải

Chọn D

$$g(x) = 2f(x) - (x+1)^2 \Rightarrow g'(x) = 2f'(x) - 2(x+1)$$

Dựa vào đồ thị ta thấy

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Và

$$\text{với } x \in (-\infty; -3): f'(x) < x+1 \Rightarrow g'(x) < 0$$

$$\text{với } x \in (-3; 1): f'(x) > x+1 \Rightarrow g'(x) > 0,$$

$$\text{với } x \in (1; 3): f'(x) < x+1 \Rightarrow g'(x) < 0$$

$$\text{với } x \in (3; +\infty): f'(x) > x+1 \Rightarrow g'(x) > 0$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$					

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(x + 2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây?

- A.** $(-\infty; -2017)$ **B.** $(2017; +\infty)$ **C.** $(0; 2)$ **D.** $(-2017; 0)$

Lời giải

Dựa vào bảng xét dấu của $f''(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f'(x)$		3		-2018	

Đặt $t = x + 2017$.

Ta có $y = f(x + 2017) + 2018x = f(t) + 2018t - 2017 \cdot 2018 = g(t)$.

$g'(t) = f'(t) + 2018$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ suy ra phương trình $g'(t)$ có một nghiệm đơn $\alpha \in (-\infty; 0)$ và một nghiệm kép $t = 2$.

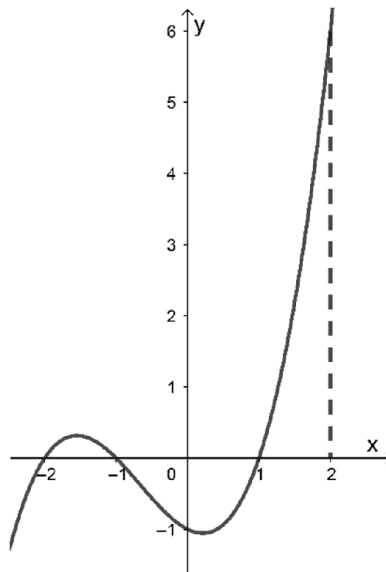
Ta có bảng biến thiên $g(t)$

Hàm số $g(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t_0 = \alpha \in (-\infty; 0)$.

Suy ra hàm số $y = f(x + 2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 mà

$x_0 + 2017 \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow x_0 \in (-\infty; -2017)$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ dưới đây:



Biết rằng $f(-1) + f(0) < f(1) + f(2)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ lần lượt là:

- A.** $f(1); f(2)$. **B.** $f(2); f(0)$. **C.** $f(0); f(2)$. **D.** $f(1); f(-1)$.

Lời giải

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ như sau

x	-1	0	1	2
y'		-	0	+
y	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$

Nhận thấy

☐ $\min_{[-1;2]} f(x) = f(1)$

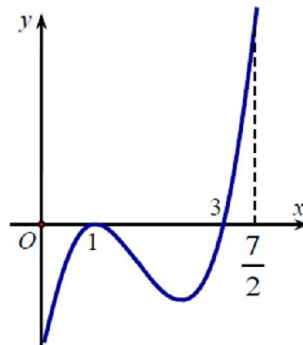
☐ Để tìm $\max_{[-1;2]} f(x)$ ta so sánh $f(-1)$ và $f(2)$.

Theo giả thiết, $f(-1) + f(0) < f(1) + f(2) \Leftrightarrow f(2) - f(-1) > f(0) - f(1)$.

Từ bảng biến thiên, ta có $f(0) - f(1) > 0$. Do đó $f(2) - f(-1) > 0 \Leftrightarrow f(2) > f(-1)$.

Hay $\max_{[-1;2]} f(x) = f(2)$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây?

A. $x_0 = 0$.

B. $x_0 = \frac{7}{2}$.

C. $x_0 = 1$.

D. $x_0 = 3$.

Lời giải

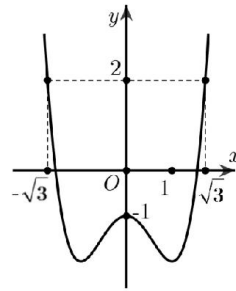
Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ như sau:

x	0	1	3	$\frac{7}{2}$		
$f'(x)$		-	0	-	0	+
$f(x)$	$f(0)$		$f(3)$		$f\left(\frac{7}{2}\right)$	

Do đó hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 = 3$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ



Đặt $h(x) = 3f(x) - x^3 + 3x$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

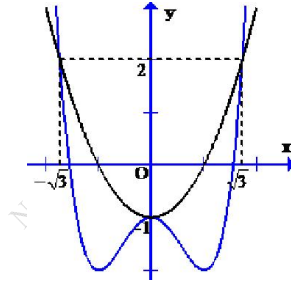
- A.** $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = 3f(1)$. **B.** $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = 3f(-\sqrt{3})$.
C. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = 3f(\sqrt{3})$. **D.** $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = 3f(0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $h'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 3 \Leftrightarrow h'(x) = 3[f'(x) - (x^2 - 1)]$.

Đồ thị hàm số $y = x^2 - 1$ là một parabol có tọa độ đỉnh $C(0; -1)$, đi qua $A(-\sqrt{3}; 2)$, $B(\sqrt{3}; 2)$.



Từ đồ thị hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = x^2 - 1$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$.

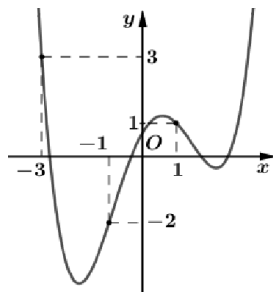
x	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$
$h'(x)$	$-$	0	$-$
$h(x)$	$h(-\sqrt{3})$		$h(\sqrt{3})$

Với $h(-\sqrt{3}) = 3f(-\sqrt{3})$, $h(\sqrt{3}) = 3f(\sqrt{3})$.

Vậy $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} h(x) = 3f(-\sqrt{3})$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ ở hình vẽ bên. Xét hàm số

$g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$, mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1).$

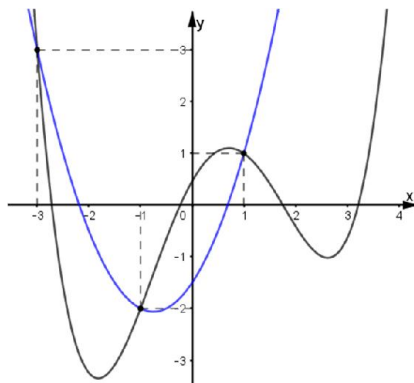
B. $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}.$

C. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3).$

D. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(1).$

Lời giải

Chọn A



Ta có $g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = f'(x) - \left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right).$

Vẽ parabol $(P): y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$. Ta thấy (P) đi qua các điểm có tọa độ $(-3; 3)$, $(-1; 2)$, $(1; 1)$.

□ Trên khoảng $(-3; -1)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía dưới (P) nên

$$f'(x) < \left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow g'(x) < 0.$$

□ Trên khoảng $(-1; 1)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên (P) nên

$$f'(x) > \left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow g'(x) > 0.$$

□ Trên khoảng $(1; +\infty)$ đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía dưới (P) nên

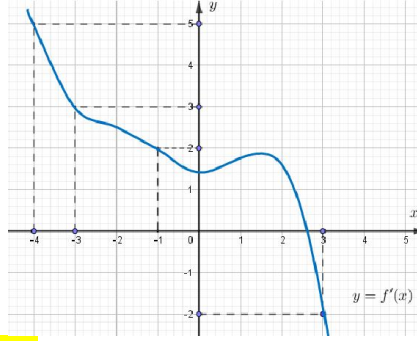
$$f'(x) < \left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow g'(x) < 0.$$

Bảng biến thiên

x	-3	-1	1	$+\infty$	
g'	$-$	0	$+$	0	$+$
g	$g(-3)$	$g(-1)$	$g(1)$	$-\infty$	

Từ bảng biến thiên, ta có $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1).$

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Trên đoạn $[-4; 3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm:



A. $x_0 = -4$.

B. $x_0 = -1$.

C. $x_0 = 3$.

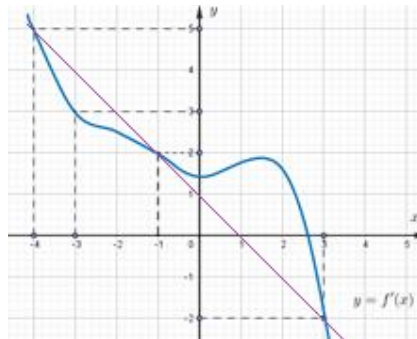
D. $x_0 = -3$.

Lời giải

Chọn B

$$g(x) = 2f(x) + (1-x)^2 \Rightarrow g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x) \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1-x$$

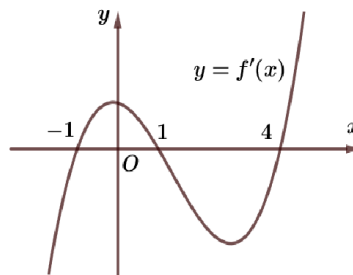
Vẽ hai đồ thị $y = f'(x)$ và $y = 1-x$ trên cùng một hệ trục



Từ đồ thị ta thấy $g'(x) > 0, \forall x \in (-4; -1)$ và $g'(x) < 0, \forall x \in (-1; 3)$

Vậy giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-4; 3]$ đạt tại điểm $x_0 = -1$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R . Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



Cho bốn mệnh đề sau:

- 1) Hàm số $y = f(x)$ có hai cực trị
- 2) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$
- 3) $f(1) > f(2) > f(4)$.
- 4) Trên đoạn $[-1; 4]$, giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ là $f(1)$.

Số mệnh đề đúng trong bốn mệnh đề trên là:

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta thấy:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; 4)$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 1) \cup (4; +\infty)$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$					

Dựa vào bảng biến thiên đáp án đúng là mệnh đề số 3 và 4

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$g(x) = f(4x - x^2) + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \frac{1}{3}$ trên đoạn $[1; 3]$.

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		5		
		-3			$-\infty$

A. $\frac{25}{3}$.

B. 15.

C. $\frac{19}{3}$.

D. 12.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x) = f'(4x - x^2) \cdot (4 - 2x) + x^2 - 6x + 8 = 2(2 - x) \left[f'(4x - x^2) + \frac{4 - x}{2} \right]$

Xét thấy $\forall x \in [1; 3] \Rightarrow 3 \leq 4x - x^2 \leq 4 \Rightarrow f'(4x - x^2) > 0$

Mặt khác $\frac{4 - x}{2} > 0 \quad \forall x \in [1; 3]$

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$$g(1) = f(3) + \frac{19}{3} < f(4) + \frac{17}{3} = 5 + \frac{17}{3} = \frac{32}{3}$$

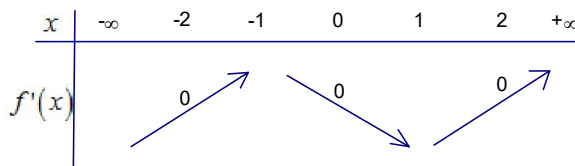
$$g(3) = f(3) + \frac{19}{3} < f(4) + \frac{19}{3} = 5 + \frac{19}{3} = \frac{34}{3}$$

$$g(2) = 5 + 7 = 12.$$

$$\Rightarrow g(1) < g(3) < g(2)$$

Vậy $\max_{[1; 3]} g(x) = 12$ tại $x = 2$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - \sin^2 x$ trên đoạn $[-1; 1]$ là



- A. $f(-1)$. B. $f(0)$. C. $f(2)$. D. $f(1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x \in [-1; 1] \Rightarrow 2x \in [-2; 2]$.

Từ bảng biến thiên của $y = f'(x)$ thì bảng biến thiên $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$					

Ta thấy $\forall x \in [-1; 1]$ ta có $\begin{cases} f(2x) \leq f(0) \\ -\sin^2 x \leq 0 = \sin(0) \end{cases}$, do đó $g(x) \leq g(0) = f(0)$.

Dấu “=” xảy ra khi $x = 0$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{[-1; 2]} f(x) = 3$. Xét hàm số $g(x) = f(3x-1) + m$.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $\max_{[0; 1]} g(x) = -10$.

- A. 13. B. -7. C. -13. D. -1.

Lời giải

Chọn C

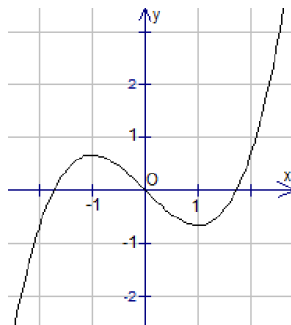
Đặt $u = 3x - 1 \Rightarrow g(x) = f(u) + m$.

$x \in [0; 1] \Rightarrow u \in [-1; 2]$.

Do $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $\max_{[0; 1]} g(x) = \max_{[-1; 2]} (f(u) + m) = \max_{[-1; 2]} f(u) + m = 3 + m$.

Để $\max_{[0; 1]} g(x) = 10 \Leftrightarrow m = -13$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(\frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{2}\right)$ trên đoạn $\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ bằng

- A. $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$. B. $f(0)$. C. $f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$. D. $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } t = \frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\text{Vì } x \in \left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right] \Rightarrow x + \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1; 1].$$

Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có bảng biến thiên

t	-1	0	1
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$		$f(0)$	
	$f(-1)$		$f(1)$

$$\text{Ta có: } \max_{\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]} f\left(\frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{2}\right) = \max_{[-1; 1]} f(t) \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Vậy } \max_{\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]} f\left(\frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{3}\right).$$

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{x \in [0; 10]} f(x) = f(2) = 4$. Xét hàm số $g(x) = f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m$. Giá trị của tham số m để $\max_{x \in [0; 2]} g(x) = 8$ là

A. 5.

B. 4.

C. -1.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

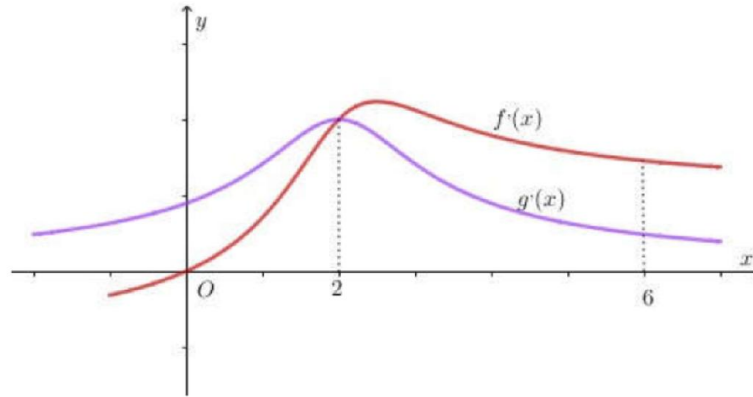
$$\text{Đặt } t = x^3 + x. \text{ Vì } x \in [0; 2] \Rightarrow t \in [0; 10].$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \max_{x \in [0; 2]} g(x) &= \max_{x \in [0; 2]} [f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m] \leq \max_{x \in [0; 2]} f(x^3 + x) + \max_{x \in [0; 2]} [-x^2 + 2x + m] \\ &= \max_{t \in [0; 10]} f(t) + 1 + m \quad (\text{với } t = x^3 + x \text{ và } \max_{x \in [0; 2]} [-x^2 + 2x + m] = 1 + m). \\ &\leq \max_{x \in [0; 10]} f(x) + 1 + m = 4 + 1 + m = 5 + m. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } \max_{x \in [0; 2]} g(x) = 5 + m \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{Theo giả thiết, ta có: } \max_{x \in [0; 2]} g(x) = 8 \Leftrightarrow m + 5 = 8 \Leftrightarrow m = 3.$$

Câu 18. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$, $g'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $g'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng $f(0) - f(6) < g(0) - g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ lần lượt là:

- A.** $h(6), h(2)$. **B.** $h(2), h(6)$. **C.** $h(0), h(2)$. **D.** $h(2), h(0)$.

Lời giải

Ta có $h'(x) = f'(x) - g'(x)$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên:

x	0	2	6
$h'(x)$		- 0 +	
$h(x)$	$h(0)$	$h(2)$	$h(6)$

$$\text{Và } f(0) - f(6) < g(0) - g(6) \Leftrightarrow f(0) - g(0) < f(6) - g(6).$$

$$\text{Hay } h(0) < h(6).$$

$$\text{Vậy } \max_{[0;6]} h(x) = h(6); \min_{[0;6]} h(x) = h(2).$$

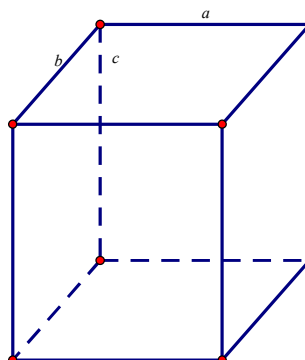
E. ỨNG DỤNG GTLN-GTNN GIẢI BÀI TOÁN THỰC TẾ

Câu 1. Ông A dự định dùng hết $6,5m^2$ kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

- A.** $2,26m^3$ **B.** $1,61m^3$ **C.** $1,33m^3$ **D.** $1,50m^3$

Lời giải

Chọn D



Giả sử hình hộp chữ nhật có kích thước như hình vẽ. Ta có dung tích của bể cá: $V = abc$

Mặt khác theo giả thiết ta có: $\begin{cases} ab + 2bc + 2ac = 6,5 \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 + 6bc = 6,5 \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{6,5 - 2b^2}{6b} \\ a = 2b \end{cases}$

Khi đó $V = 2b^2 \cdot \frac{6,5 - 2b^2}{6b} \Leftrightarrow V = \frac{6,5b - 2b^3}{3}$.

Xét hàm số: $f(b) = \frac{6,5b - 2b^3}{3}$. Có BBT

b	0	$\frac{\sqrt{39}}{6}$	$+\infty$
$f'(b)$	+	0	-
$f(b)$	0	$f\left(\frac{\sqrt{39}}{6}\right)$	$-\infty$

Vậy bể cá có dung tích lớn nhất là: $f\left(\frac{\sqrt{39}}{6}\right) = 1,50 \text{ m}^3$.

Câu 2. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 243 (m/s)

B. 27 (m/s)

C. 144 (m/s)

D. 36 (m/s)

Lời giải

Chọn D

Ta có: $v = s' = -t^2 + 12t$; $v' = -2t + 12$; $v' = 0 \Leftrightarrow t = 6$.
BBT

t	0	6	9
v'	+	0	-
v		36	

Nhìn bbt ta thấy vận tốc đạt giá trị lớn nhất khi $t = 6$. Giá trị lớn nhất là $v(6) = 36 \text{ m/s}$.

Câu 3. Ông A dự định sử dụng hết 5 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $1,01 \text{ m}^3$

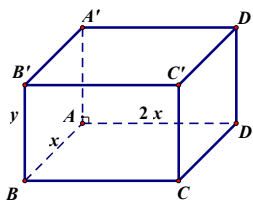
B. $0,96 \text{ m}^3$

C. $1,33 \text{ m}^3$

D. $1,51 \text{ m}^3$

Lời giải

Chọn A



Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá (điều kiện $x, y > 0$).

Ta có thể tích bể cá $V = 2x^2y$.

Theo đề bài ta có: $2xy + 2.2xy + 2x^2 = 5 \Leftrightarrow 6xy + 2x^2 = 5$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5-2x^2}{6x} \quad (\text{Điều kiện } y > 0 \Leftrightarrow 5-2x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < \sqrt{\frac{5}{2}})$$

$$\Rightarrow V = 2x^2 \frac{5-2x^2}{6x} = \frac{5x-2x^3}{3} \Rightarrow V' = \frac{5-6x^2}{3} \Rightarrow V' = 0 \Leftrightarrow 5-6x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

x	0	$\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\sqrt{\frac{5}{2}}$
V'	+	0	-
V	0	$\frac{5\sqrt{30}}{27}$	0

$$\Rightarrow V_{\max} = \frac{5\sqrt{30}}{27} \approx 1,01 m^3.$$

Câu 4. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t) = \frac{t}{t^2+1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

A. 4 giờ.

B. 1 giờ.

C. 3 giờ.

D. 2 giờ.

Lời giải

Xét hàm số $c(t) = \frac{t}{t^2+1}$, ($t > 0$).

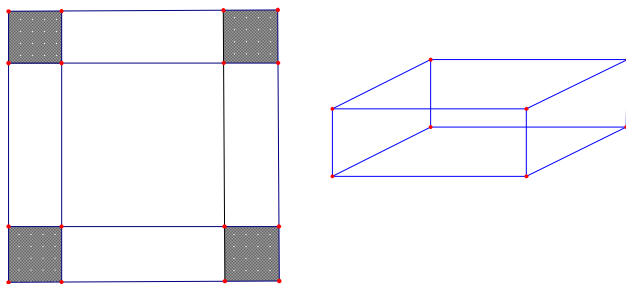
$$c'(t) = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}.$$

$$c'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-1 \end{cases}.$$

t	0	1	$+\infty$
$c'(t)$	+	0	-
$c(t)$	0	$\frac{1}{2}$	0

Với $t = 1$ giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất.

Câu 5. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

A. $x = 3$ B. $x = 2$ C. $x = 4$ D. $x = 6$

Lời giải

Chọn BTa có : $h = x$ (cm) là đường cao hình hộpVì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là: $12 - 2x$ (cm)Vậy diện tích đáy hình hộp $S = (12 - 2x)^2$ (cm²). Ta có: $\begin{cases} x > 0 \\ 12 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 6)$ Thể tích của hình hộp là: $V = S.h = x.(12 - 2x)^2$ Xét hàm số: $y = x.(12 - 2x)^2 \forall x \in (0; 6)$ Ta có : $y' = (12 - 2x)^2 - 4x(12 - 2x) = (12 - 2x)(12 - 6x)$; $y' = 0 \Leftrightarrow (12 - 2x).(12 - 6x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 6$ (loại).

x	0		2		6	
y'		+	0	-		
y						

Suy ra với $x = 2$ thì thể tích hộp là lớn nhất và giá trị lớn nhất đó là $y(2) = 128$.

Câu 6. Đợt xuất khẩu gạo của tỉnh A thường kéo dài trong 2 tháng (60 ngày). Người ta nhận thấy số lượng xuất khẩu gạo tính theo ngày thứ t được xác định bởi công thức $S(t) = \frac{2}{5}t^3 - 63t^2 + 3240t - 3100$ với $(1 \leq t \leq 60)$. Hỏi trong 60 ngày đó thì ngày thứ mấy có số lượng xuất khẩu gạo cao nhất.

A. 60

B. 45

C. 30

D. 25

Lời giải

Chọn B

$$S(t) = \frac{2}{5}t^3 - 63t^2 + 3240t - 3100 \Rightarrow S'(t) = \frac{6}{5}t^2 - 126t + 3240$$

$$\text{Ta có: } S'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 45 \\ t = 60 \end{cases}$$

x	1	45	60		
S'		+	0	-	0
S			51575		
	77.4				50900

Câu 7. Một vật chuyển động theo quy luật $S = 10t^2 - \frac{1}{3}t^3$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $S(m)$ là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng

thời gian 15 giây từ lúc vật bắt đầu chuyển động vận tốc $v(m/s)$ của vật đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm $t(s)$ bằng:

- A. $8(s)$. B. $20(s)$ C. $10(s)$. D. $15(s)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } S = 10t^2 - \frac{1}{3}t^3 \Rightarrow v(t) = S' = 20t - t^2.$$

Xét hàm số $v(t); t \in [0; 15]$, ta có: $v'(t) = 20 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 10$.

$v(0) = 0; v(15) = 75; v(10) = 100$. Do đó: $\max_{[0; 15]} v(t) = 100 \Leftrightarrow t = 10$.

Câu 8. Một sợi dây có chiều dài $28m$ được cắt thành hai đoạn để làm thành một hình vuông và một hình tròn. Tính chiều dài (theo đơn vị mét) của đoạn dây làm thành hình vuông được cắt ra sao cho tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất?

- A. $\frac{56}{4+\pi}$. B. $\frac{112}{4+\pi}$. C. $\frac{84}{4+\pi}$. D. $\frac{92}{4+\pi}$.

Lời giải

Gọi chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông là $x(m)$ ($0 < x < 28$)

$\Rightarrow$ chiều dài của đoạn dây làm thành hình tròn là $28 - x(m)$

+) Diện tích hình vuông là: $\left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$

+) Bán kính hình tròn là: $R = \frac{28-x}{2\pi}$

$\Rightarrow$ Diện tích hình tròn: $\pi R^2 = \pi \left(\frac{28-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{784-56x+x^2}{4\pi}$

+) Tổng diện tích hai hình: $\frac{x^2}{16} + \frac{784-56x+x^2}{4\pi} = \left(\frac{\pi+4}{16\pi}\right)x^2 - \frac{14}{\pi}x + \frac{196}{\pi}$

Xét $f(x) = \left(\frac{\pi+4}{16\pi}\right)x^2 - \frac{14}{\pi}x + \frac{196}{\pi}$. Nhận thấy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{14}{\pi} \cdot \frac{16\pi}{2(\pi+4)} = \frac{112}{\pi+4}$$

Vậy chiều dài của đoạn dây làm thành hình vuông để tổng diện tích của hai hình đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{112}{4+\pi} m$

Câu 9. Một xưởng in có 15 máy in được cài đặt tự động và giám sát bởi một kỹ sư, mỗi máy in có thể in được 30 ấn phẩm trong 1 giờ, chi phí cài đặt và bảo dưỡng cho mỗi máy in cho 1 đợt hàng là 48.000 đồng, chi phí trả cho kỹ sư giám sát là 24.000 đồng/giờ. Đợt hàng này xưởng in nhận 6000 ấn phẩm thì số máy in cần sử dụng để chi phí in ít nhất là

- A. 10 máy. B. 11 máy. C. 12 máy. D. 9 máy.

Lời giải

Chọn A

Gọi x ($0 < x < 15$) là số máy in cần sử dụng để in lô hàng.

Chi phí cài đặt và bảo dưỡng là $48000x$.

Số giờ in hết số ấn phẩm là $\frac{6000}{30x}$, chi phí giám sát là $\frac{6000}{30x} \cdot 24000 + \frac{48000}{x}$.

Tổng chi phí in là $P(x) = 48000x + \frac{4800000}{x}$.

$$P'(x) = 48000 - \frac{4800000}{x^2}; P'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = -10 (L) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	10	15	
$P'(x)$		-	0	+
$P(x)$				

$\swarrow$ $P(10)$ $\searrow$

Vậy chi phí in nhỏ nhất là 10 máy.

Câu 10. Một chất điểm chuyển động thẳng với quãng đường biến thiên theo thời gian bởi quy luật $s(t) = t^3 - 4t^2 + 12$ (m), trong đó t (s) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Vận tốc của chất điểm đó đạt giá trị bé nhất khi t bằng bao nhiêu?

A. 2 (s).

B. $\frac{8}{3}$ (s).

C. 0 (s).

D. $\frac{4}{3}$ (s).

Lời giải

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 8t.$$

$$v'(t) = 6t - 8. \text{ Có } v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3}.$$

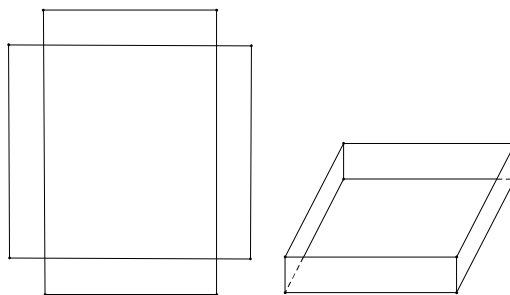
t	0	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
v'	-	0	+
v	0	$-\frac{16}{3}$	$+\infty$

$\swarrow$ $\searrow$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min_{[0; +\infty)} v = v\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{16}{3}.$

Vậy vận tốc của chất điểm đó đạt giá trị bé nhất khi $t = \frac{4}{3}.$

Câu 11. Cho một tấm nhôm hình chữ nhật có chiều dài bằng 10cm và chiều rộng bằng 8cm. Người ta cắt bỏ ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gấp tấm nhôm lại (như hình vẽ) để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x = \frac{8-2\sqrt{21}}{3}$

B. $x = \frac{10-2\sqrt{7}}{3}$

C. $x = \frac{9+\sqrt{21}}{9}.$

D. $x = \frac{9-\sqrt{21}}{3}$

Lời giải

Chọn D

Ta có : $h = x$ (cm) là đường cao hình hộp

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là: $10 - 2x$ (cm) và $8 - 2x$ (cm)

Vậy diện tích đáy hình hộp $S = (10 - 2x)(8 - 2x)$ (cm²). Ta có: $\begin{cases} x > 0 \\ 10 - 2x > 0 \\ 8 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 4)$

Thể tích của hình hộp là: $V = S.h = x.(10 - 2x).(8 - 2x)$

Xét hàm số: $y = x.(10 - 2x).(8 - 2x) \forall x \in (0; 4)$

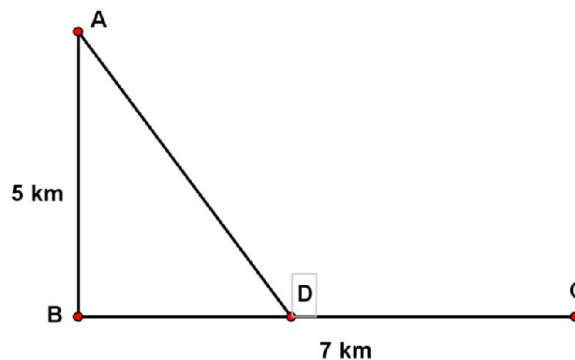
Ta có : $y' = 12x^2 - 72x + 80$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9 + \sqrt{21}}{3} > 4 \text{ (l)} \\ x = \frac{9 - \sqrt{21}}{3} \text{ (n)} \end{cases}$$

x	0	$\frac{9 - \sqrt{21}}{3}$	4
y'	+	0	-
y			

Suy ra với $x = \frac{9 - \sqrt{21}}{3}$ thì thể tích hộp là lớn nhất và giá trị lớn nhất.

Câu 12. Một đoàn cứu trợ lũ lụt đang ở vị trí A của một tỉnh miền trung muốn đến xã C để tiếp tế lương thực và thuốc men. Để đi đến C , đoàn cứu trợ phải chèo thuyền từ A đến vị trí D với vận tốc $4(km/h)$, rồi đi bộ đến vị trí C với vận tốc $6(km/h)$. Biết A cách B một khoảng $5km$, B cách C một khoảng $7km$ (hình vẽ). Hỏi vị trí điểm D cách A bao xa để đoàn cứu trợ đi đến xã C nhanh nhất?



A. $AD = 5\sqrt{3} km$.

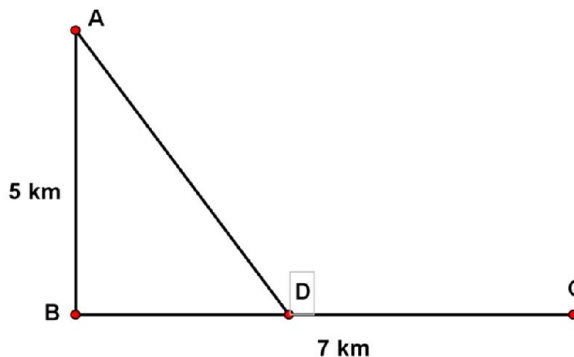
B. $AD = 2\sqrt{5} km$.

C. $AD = 5\sqrt{2} km$.

D. $AD = 3\sqrt{5} km$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $AD = x \text{ (km)}, (x > 0)$. Ta có

$$BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = \sqrt{x^2 - 25} \quad (x \geq 5)$$

$$CD = BC - BD = 7 - \sqrt{x^2 - 25}$$

Thời gian đi từ A đến C là: $T(x) = \frac{AD}{4} + \frac{DC}{6} = \frac{x}{4} + \frac{7 - \sqrt{x^2 - 25}}{6}$

$$T'(x) = \frac{1}{4} + \frac{-2x}{12\sqrt{x^2 - 25}} = \frac{3\sqrt{x^2 - 25} - 2x}{12\sqrt{x^2 - 25}}$$

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 - 25} = 2x \Leftrightarrow x = 3\sqrt{5}$$

Bảng biến thiên

x	5	$3\sqrt{5}$	$+\infty$	
T'		+	0	-
T	$\frac{29}{12}$		$\frac{14+5\sqrt{5}}{12}$	$+\infty$

Do đó $\min_{x \in [5; +\infty)} T(x) = T(3\sqrt{5}) = \frac{14 + 5\sqrt{5}}{12}$

Vậy $AD = 3\sqrt{5} \text{ (km)}$.

Câu 13. Một vật chuyển động theo quy luật $s = 3t^2 - t^3$. Thời điểm $t(s)$ tại đó vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất là

A. $t = 5$.

B. $t = 1$.

C. $t = 2$.

D. $t = 3$

Lời giải

Chọn B

Vận tốc của chuyển động là $v = s'$ tức là $v(t) = 6t - 3t^2, t > 0$

$$v'(t) = 6 - 6t, v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Bảng biến thiên:

t	0	1	$+\infty$
$v'(t)$	+	0	-
$v(t)$			



Hàm số $v(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$

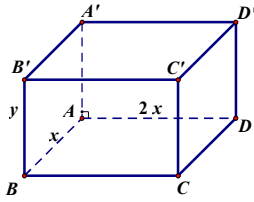
$$\Leftrightarrow \max v(t) = 3 \text{ khi } t = 1.$$

Câu 14. Ông A dự định sử dụng hết 5 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A.** $1,01 \text{ m}^3$. **B.** $0,96 \text{ m}^3$. **C.** $1,33 \text{ m}^3$. **D.** $1,51 \text{ m}^3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá (điều kiện $x, y > 0$).

Ta có thể tích bể cá $V = 2x^2y$.

Theo đề bài ta có: $2xy + 2.2xy + 2x^2 = 5 \Leftrightarrow 6xy + 2x^2 = 5$

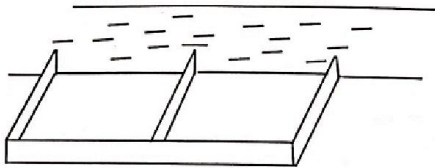
$$\Leftrightarrow y = \frac{5 - 2x^2}{6x} \quad (\text{Điều kiện } y > 0 \Leftrightarrow 5 - 2x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < \sqrt{\frac{5}{2}})$$

$$\Rightarrow V = 2x^2 \frac{5 - 2x^2}{6x} = \frac{5x - 2x^3}{3} \Rightarrow V' = \frac{5 - 6x^2}{3} \Rightarrow V' = 0 \Leftrightarrow 5 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

x	0	$\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\sqrt{\frac{5}{2}}$
V'	+	0	-
V	0	$\frac{5\sqrt{30}}{27}$	0

$$\Rightarrow V_{\max} = \frac{5\sqrt{30}}{27} \approx 1,01 \text{ m}^3.$$

Câu 15. Một người nông dân có 15.000.000 đồng muốn làm một cái hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông (như hình vẽ) để làm một khu đất có hai phần chữ nhật để trồng rau. Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60.000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50.000 đồng một mét. Tìm diện tích lớn nhất của đất rào thu được



- A.** 3125 m^2 . **B.** 50 m^2 . **C.** 1250 m^2 . **D.** 6250 m^2 .

Lời giải

Chọn D

Gọi x là chiều dài 1 mặt hàng rào hình chữ E (trong ba mặt song song, $x > 0$).

Gọi y là chiều dài mặt hàng rào hình chữ E song song với bờ sông ($y > 0$).

$$\text{Số tiền phải làm là: } x.3.50000 + y.60000 = 15.000.000 \Leftrightarrow y = \frac{500 - 5x}{2}.$$

$$\text{Diện tích đất: } S = x.y = x \cdot \frac{500 - 5x}{2} = 250x - \frac{5}{2}x^2$$

Ta có: $S' = 250 - 5x$.

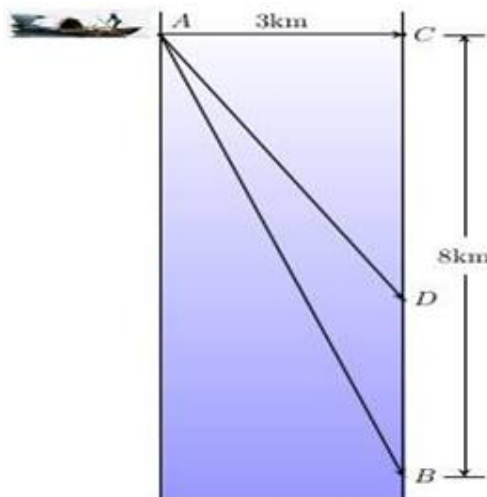
$$S' = 0 \Leftrightarrow 250 - 5x \Leftrightarrow x = 50.$$

Bảng biến thiên:

x	0	50	$+\infty$
S'		+	0 -
S	0	6250	$-\infty$

Vậy: $\max_{(0;+\infty)} S = 6250 \text{ (m}^2\text{)}$ khi $x = 50$.

- Câu 16.** Một người đàn ông muốn trèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đồ diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo trực tiếp đến B , hoặc anh có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8$ km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tính khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đến B ?



A. $\frac{\sqrt{73}}{6}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{9}{\sqrt{7}}$.

D. $1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $DC = x$ km, ($0 \leq x \leq 8$).

Ta có: $AD = \sqrt{9 + x^2}$, $DB = 8 - x$.

Thời gian đi từ A đến B được tính bằng công thức $f(x) = \frac{\sqrt{9 + x^2}}{6} + \frac{8 - x}{8}$.

$$f'(x) = \frac{x}{6\sqrt{9 + x^2}} - \frac{1}{8}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{9 + x^2}} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 16x^2 = 9(9 + x^2) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}} \text{ (thỏa mãn điều kiện } 0 \leq x \leq 8 \text{)}.$$

Mặt khác, $f(0) = \frac{3}{2}$, $f(8) = \frac{\sqrt{73}}{6}$, $f\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$.

Vậy thời gian ngắn nhất để người đàn ông đi từ A đến B là $1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$ (giờ).

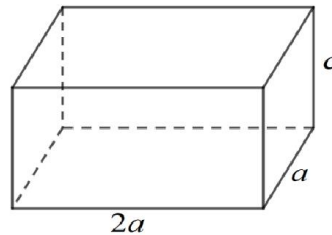
- Câu 17.** Ông Khoa muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 288m^3 . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/ m^2 . Nếu ông Khoa biết xác định các kích thước của bể hợp lý thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông Khoa trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là bao nhiêu (Biết độ dày thành bể và đáy bể không đáng kể)?
- A.** 90 triệu đồng. **B.** 168 triệu đồng. **C.** 54 triệu đồng. **D.** 108 triệu đồng.

Lời giải

Chọn D

Theo bài ra ta có để chi phí thuê nhân công là thấp nhất thì ta phải xây dựng bể sao cho tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy là nhỏ nhất.

Gọi ba kích thước của bể là $a, 2a, c$ ($a(m) > 0, c(m) > 0$).



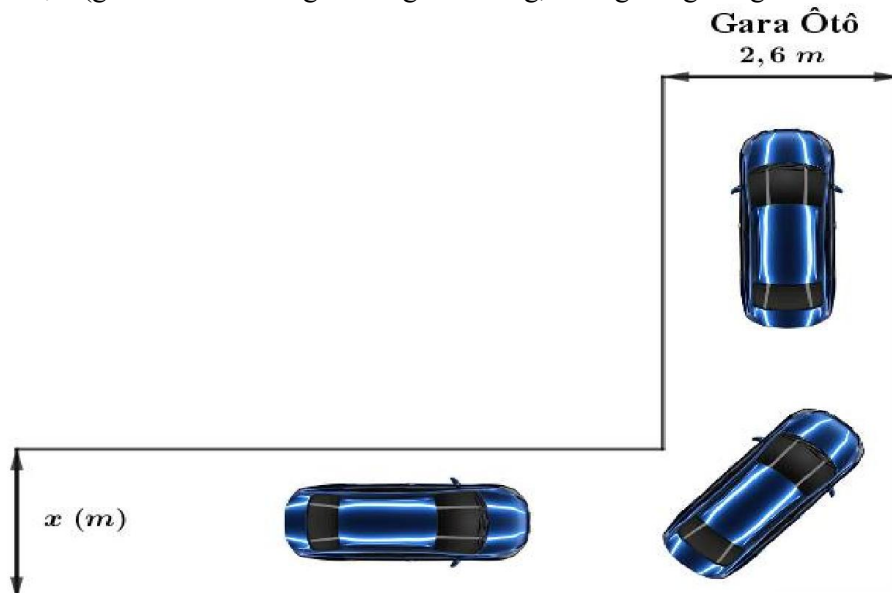
Ta có diện tích các mặt cần xây là $S = 2a^2 + 4ac + 2ac = 2a^2 + 6ac$.

Thể tích bể $V = a \cdot 2a \cdot c = 2a^2c = 288 \Rightarrow c = \frac{144}{a^2}$.

Suy ra $S = 2a^2 + 6a \cdot \frac{144}{a^2} = 2a^2 + \frac{864}{a} = 2a^2 + \frac{432}{a} + \frac{432}{a} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{2a^2 \cdot \frac{432}{a} \cdot \frac{432}{a}} = 216$.

Vậy $S_{\min} = 216\text{m}^2$, khi đó chi phí thấp nhất là $216 \cdot 500000 = 108$ triệu đồng.

- Câu 18.** Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA ÔTÔ nhà cô Hiền. Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng $x(m)$, đoạn đường thẳng vào công GARA có chiều rộng $2,6(m)$. Biết kích thước xe ô tô là $5m \times 1,9m$ (chiều dài $\times$ chiều rộng). Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài $5m$, chiều rộng $1,9m$. Hỏi chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị bên dưới để ô tô có thể đi vào GARA được? (giả thiết ô tô không đi ra ngoài đường, không đi nghiêng và ô tô không bị biến dạng).



A. $x = 3,55(m)$.

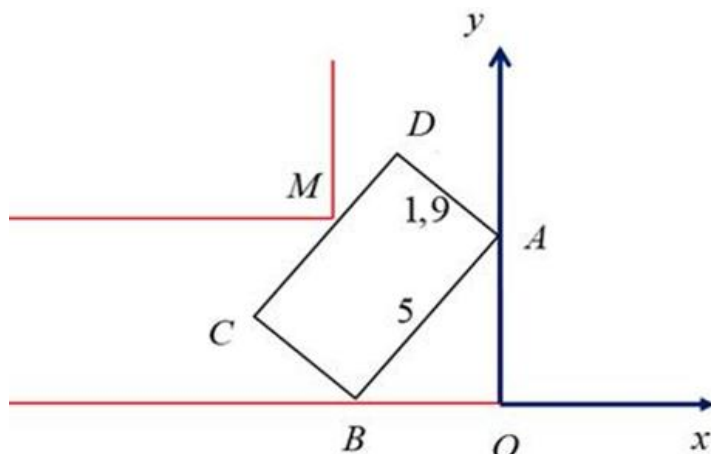
B. $x = 2,6(m)$.

C. $x = 4,27(m)$.

D. $3,7(m)$.

Lời giải

Chọn D

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.Khi đó $M(-2, 6; x)$.Gọi $B(-a; 0)$, suy ra $A(0; \sqrt{25-a^2})$. Phương trình $AB: \frac{x}{-a} + \frac{y}{\sqrt{25-a^2}} - 1 = 0$.Do $CD \parallel AB$ nên phương trình $CD: \frac{x}{-a} + \frac{y}{\sqrt{25-a^2}} - T = 0$.Mà khoảng cách giữa AB và CD bằng 1,9 nên

$$\frac{|T-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{25-a^2}}\right)^2}} = 1,9 \Rightarrow T = 1 + \frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}}$$

Điều kiện để ô tô đi qua được là M, O nằm khác phía đối với bờ là đường thẳng CD .

$$\text{Suy ra: } \frac{-2,6}{-a} + \frac{x}{\sqrt{25-a^2}} - 1 - \frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq \sqrt{25-a^2} + \frac{9,5}{a} - \frac{2,6 \times \sqrt{25-a^2}}{a} \text{ đúng với mọi } a \in (0; 5).$$

$$\Leftrightarrow x \geq \max_{(0;5)} f(a)$$

Xét hàm số $f(a) = \sqrt{25-a^2} + \frac{9,5}{a} - \frac{2,6\sqrt{25-a^2}}{a}$ trên $(0; 5)$

$$\text{Ta có: } f'(a) = \frac{-a}{\sqrt{25-a^2}} - \frac{19}{2a^2} + \frac{65}{a^2\sqrt{25-a^2}}$$

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{65}{a^2\sqrt{25-a^2}} = \frac{a}{\sqrt{25-a^2}} + \frac{19}{2a^2} \Leftrightarrow 65 = a^3 + \frac{19}{2}\sqrt{25-a^2}$$

$$\Leftrightarrow 2(65 - a^3) = 19\sqrt{25-a^2} \Leftrightarrow 4a^6 - 520a^3 + 361a^2 + 7875 = 0$$

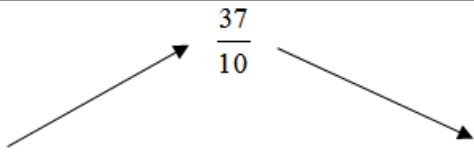
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ 2(9 + 3a + a^2) = \frac{19(3+a)}{\sqrt{25-a^2} + 4} \quad (*) \end{cases}$$

Xét phương trình (*). Với mọi $a \in (0; 5)$ ta luôn có:

$$\begin{cases} VP = \frac{19(3+a)}{\sqrt{25-a^2}+4} < \frac{19(3+a)}{4} \\ VT - \frac{19(3+a)}{4} = 2(9+3a+a^2) - \frac{19(3+a)}{4} = \frac{1}{4}(8a^2+5a+15) > 0 \end{cases}$$

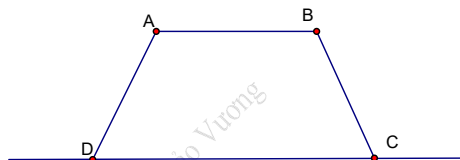
Suy ra phương trình (*) vô nghiệm.

Bảng biến thiên:

a	0	3	5
$f'(a)$	+	0	-
$f(a)$			

Từ bảng biến thiên ta có: $\max_{(0;5)} f(a) = \frac{37}{10}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của x là 3,7.

Câu 19. Một người nông dân có 3 tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài 12(m) và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như hình vẽ (bờ sông là đường thẳng DC không phải rào, mỗi tấm là một cạnh của hình thang). Hỏi ông ta có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu m^2 ?



A. $100\sqrt{3}$.

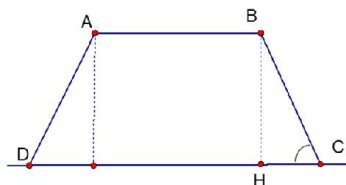
B. $106\sqrt{3}$.

C. $108\sqrt{3}$.

D. $120\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Kẻ đường cao BH , gọi số đo 2 góc ở đáy CD của hình thang là $x, x \in (0^\circ; 90^\circ)$.

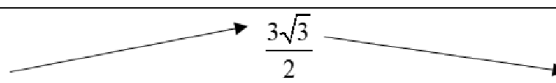
Diện tích mảnh vườn là:

$$S = \frac{1}{2} BH (AB + CD) = \frac{1}{2} BC \cdot \sin x (2 \cdot AB + 2 BC \cdot \cos x) = \frac{1}{2} AB^2 (2 \sin x + \sin 2x)$$

Xét hàm số $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x$ với $x \in (0^\circ; 90^\circ)$ có $f'(x) = 2 \cos x + 2 \cos 2x$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x + 2 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

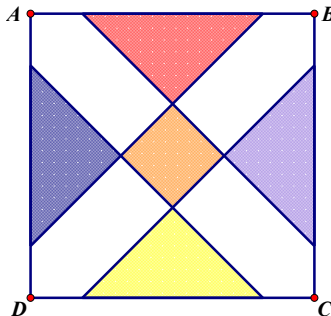
Do $x \in (0^\circ; 90^\circ)$ nên ta nhận $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 60^\circ$. Ta có bảng biến thiên:

x	0°	60°	90°
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Từ bảng biến thiên ta thấy: $\max_{(0^\circ; 90^\circ)} f(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ đạt được tại $x = 60^\circ$.

$\Rightarrow \max S = 108\sqrt{3} (m^2)$ khi góc ở đáy CD của hình thang bằng 60° ($\widehat{C} = \widehat{D} = 60^\circ$).

Câu 20. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4, chính giữa có một hình vuông đồng tâm với $ABCD$. Biết rằng bốn tam giác là bốn tam giác cân. Hỏi tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ nhất bằng bao nhiêu?



A. $\frac{19}{3}$.

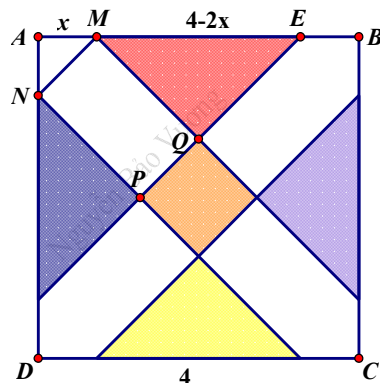
B. $\frac{17}{3}$.

C. $\frac{16}{3}$.

D. $\frac{14}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $AM = x$ ($0 < x < 4$) $\Rightarrow ME = 4 - 2x$.

$$2MQ^2 = (4 - 2x)^2$$

$$\Leftrightarrow MQ^2 = 2(2 - x)^2$$

$$\Leftrightarrow MQ = \sqrt{2(2 - x)}$$

Gọi S tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ.

$$S = 4 \cdot \frac{MQ^2}{2} + PQ^2 = 2MQ^2 + MN^2 = (4 - 2x)^2 + (x\sqrt{2})^2 = 6x^2 - 16x + 16$$

$$S' = 12x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{4}{3}$	4
S'	-	0	+
S		$\frac{16}{3}$	

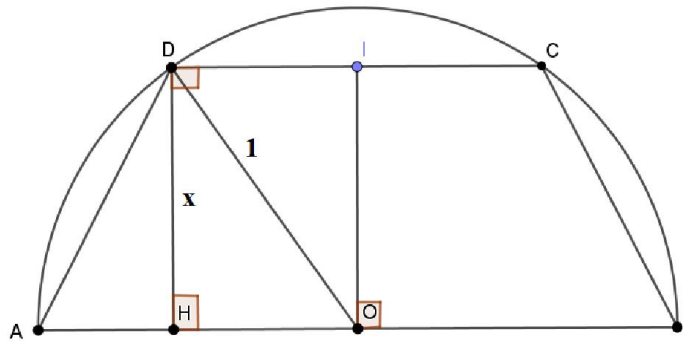
Vậy $S_{\min} = \frac{16}{3}$

Câu 21. Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2$ và hai điểm C, D thay đổi trên nửa đường tròn đó sao cho $ABCD$ là hình thang. Diện tích lớn nhất của hình thang $ABCD$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. C. 1. D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên AB , I là trung điểm của đoạn CD và O là trung điểm của AB . Đặt $DH = x$, $0 < x < 1$. Ta có $DC = 2DI = 2OH = 2\sqrt{OD^2 - DH^2} = 2\sqrt{1 - x^2}$.

Diện tích của hình thang $ABCD$ là $S = f(x) = \frac{(AB + CD)DH}{2} = (1 + \sqrt{1 - x^2})x$.

Ta có $f'(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2} + 1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} + 1 - 2x^2 = 0$ (*)

Đặt $t = \sqrt{1 - x^2}$, (điều kiện $t \geq 0$) khi đó phương trình (*) trở thành $2t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$.

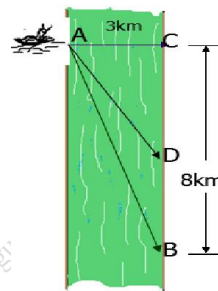
$t = -1$ loại. $t = \frac{1}{2}$ ta có $\sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	1	

Vậy diện tích lớn nhất của hình thang $ABCD$ bằng $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

- Câu 22.** Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo trực tiếp đến B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8$ km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tính khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đến B .



A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{9}{\sqrt{7}}$.

C. $\frac{\sqrt{73}}{6}$.

D. $1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$.

Lời giải

○ Cách 1: Anh chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B

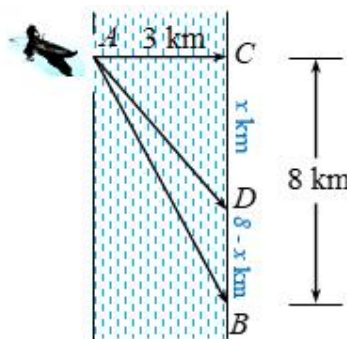
Thời gian chèo thuyền trên quãng đường AC : $\frac{3}{6} = 0,5$ (giờ)

Thời gian chạy trên quãng đường CB : $\frac{8}{8} = 1$ (giờ)

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là 1,5 (giờ).

○ Cách 2: chèo trực tiếp trên quãng đường $AB = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}$ mất $\frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1^h 26'$.

○ Cách 3:



Gọi x (km) là độ dài quãng đường BD ; $8-x$ (km) là độ dài quãng đường CD .

Thời gian chèo thuyền trên quãng đường $AD = \sqrt{x^2+9}$ là: $\frac{\sqrt{x^2+9}}{6}$ (giờ)

Thời gian chạy trên quãng đường DB là: $\frac{8-x}{8}$ (giờ)

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8}$ trên khoảng $(0; 8)$

Ta có $f'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+9} = 4x \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}}$

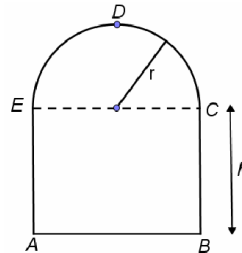
Bảng biến thiên

x	0	$\frac{9}{\sqrt{7}}$	8
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$	$\frac{\sqrt{73}}{6}$

Dựa vào BBT ta thấy thời gian ngắn nhất để di chuyển từ A đến B là $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1^h 20'$.

Vậy khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B là $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1^h 20'$.

Câu 23. Bác thợ hàn dùng một thanh kim loại dài 250 cm để uốn thành khung cửa sổ có dạng như hình vẽ. Gọi r là bán kính của nửa đường tròn, tìm r để diện tích tạo thành đạt giá trị lớn nhất.



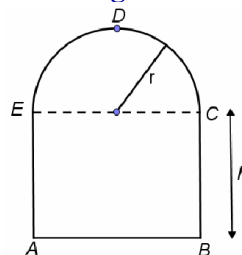
A. $\frac{250}{4}$ cm.

B. $\frac{125}{4}$ cm.

C. $\frac{250}{\pi+4}$ cm.

D. $\frac{125}{4+\pi}$ cm.

Lời giải



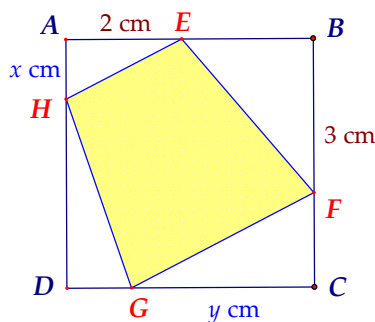
* Gọi S_1 , S_2 lần lượt là diện tích của nửa hình tròn và hình chữ nhật. Khi đó:

$$S_1 = \frac{1}{2}\pi r^2; S_2 = 2rh; \text{ với } 2h = 250 - (\pi r + 2r) \text{ nên } S_2 = 250r - \pi r^2 - 2r^2.$$

* Suy ra diện tích hình cần tìm $S = \frac{1}{2}\pi r^2 + 250r - \pi r^2 - 2r^2 = -\frac{1}{2}\pi r^2 - 2r^2 + 250r$. Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $S(r) = -\frac{1}{2}\pi r^2 - 2r^2 + 250r$ với $0 < r < 125$.

* Ta có $S'(r) = -(\pi + 4)r + 250$; $S'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{250}{\pi + 4}$. Đây là cực trị duy nhất của hàm số đồng thời $S'(r)$ đổi dấu từ dương sang âm khi r qua $\frac{250}{\pi + 4}$ nên hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm này.

Câu 24. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ.



Tìm tổng $x + y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $4\sqrt{2}$.

B. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

C. 7.

D. 5.

Lời giải

Ta có $S_{EFGH} = S_{ABCD} - (S_{AHE} + S_{DHG} + S_{GCF} + S_{EBF})$.

Để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $S_{AHE} + S_{DHG} + S_{GCF}$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $S_{AHE} = \frac{1}{2}AE \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x = x$; $S_{DHG} = \frac{1}{2}DH \cdot DG$; $S_{GCF} = \frac{1}{2}CG \cdot CF = \frac{1}{2}3y$.

Đặt $S = S_{AHE} + S_{DHG} + S_{GCF}$ thì $S = \frac{1}{2}(2x + 3y + 36 - 6x - 6y + xy) = \frac{1}{2}(36 + xy - 4x - 3y)$ (1).

Mặt khác ta lại có $\triangle AEH \sim \triangle CGF \Rightarrow \frac{AH}{CF} = \frac{AE}{CG} \Rightarrow xy = 6$ (2).

Thay (2) vào (1) ta có $S = \frac{1}{2} \left[42 - \left(4x + \frac{18}{x} \right) \right]$.

Ta có S lớn nhất khi $4x + \frac{18}{x}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow 4x = \frac{18}{x} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Khi $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ thì $y = 2\sqrt{2}$. Vậy $x + y = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.

Câu 25. Người ta cần xây một hồ chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3} m^3$.

Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây hồ là 500.000 đồng/m². Hãy xác định kích thước của hồ nước sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất và chi phí đó là:

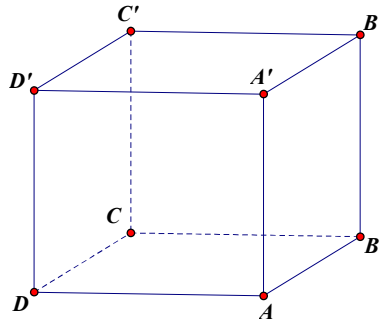
A. 74 triệu đồng.

B. 75 triệu đồng.

C. 76 triệu đồng.

D. 77 triệu đồng.

Lời giải



Giả sử khối hộp chữ nhật là $ABCD.A'B'C'D'$ và $AB = x$, $AD = 2x$ và $AA' = h$ ($x, h > 0$).

$$\text{Ta có } V = x \cdot 2x \cdot h \Leftrightarrow 2x^2 h = \frac{500}{3} \Leftrightarrow h = \frac{250}{3x^2}.$$

$$\text{Diện tích cần xây là } S = 2x^2 + 2(xh + 2xh) = 2x^2 + 6xh.$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $S = 2x^2 + \frac{500}{x}$ với $x > 0$.

$$\text{Ta có } 2x^2 + \frac{250}{x} + \frac{250}{x} \geq 3\sqrt[3]{2x^2 \cdot \frac{250}{x} \cdot \frac{250}{x}} \Leftrightarrow 2x^2 + \frac{250}{x} + \frac{250}{x} \geq 150.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } 2x^2 = \frac{250}{x} \Leftrightarrow x = 5.$$

S nhỏ nhất là 150 khi $x = 5$.

Số tiền chi phí là $150 \cdot 500000 = 75000000$ hay 75 triệu đồng.

—

Nguyễn Bảo Vương