

ĐẠI SỐ & GIẢI TÍCH 11



Tuân Diệp



Số Nhà 13 kiệt 41 Nguyễn Thiện Thuật
Phường Thuận Hòa - TP. Huế



0935 660 880

Chương III

Quy Nạp, Dãy Số, Cấp Số Cộng và Cấp Số Nhân





PP QUY NẠP - DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG, NHÂN

SBÀI 1.

PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

A. LÝ THUYẾT

1. Nguyên lý quy nạp toán học:

Giả sử $P(n)$ là một mệnh đề phụ thuộc vào số tự nhiên n . Nếu cả hai điều kiện (i) và (ii) dưới đây được thỏa mãn thì $P(n)$ đúng với mọi $n \geq m$ (m là số tự nhiên cho trước).

- (i) $P(m)$ đúng.
- (ii) Với mỗi số tự nhiên $k \geq m$, nếu $P(k+1)$ đúng.

Phương pháp chứng minh dựa trên nguyên lý quy nạp toán học gọi là phương pháp quy nạp toán học (hay gọi tắt là phương pháp quy nạp).

Một cách đơn giản, ta có thể hình dung như sau:

- Mệnh đề đã đúng khi $n=1$ nên theo kết quả ở bước 2, nó cũng đúng với $n=1+1=2$.
- Vì nó đúng với $n=2$ nên lại theo kết quả ở bước 2, nó đúng với $n=2+1=3, \dots$
- Bằng cách ấy, ta có thể khẳng định rằng mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Phương pháp giải toán.

Để chứng minh một mệnh đề $P(n)$ phụ thuộc vào số tự nhiên n đúng với mọi $n \geq m$ (m là số tự nhiên cho trước), ta thực hiện theo hai bước sau:

- **Bước 1:** Chứng minh rằng $P(n)$ đúng khi $n=1$.
- **Bước 2:** Với k là một số tự nhiên tùy ý, $k \geq m$.
 - ✧ Giả sử $P(n)$ đúng khi $n=k$, ta sẽ chứng minh $P(n)$ cũng đúng khi $n=k+1$.
 - ✧ Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta kết luận rằng $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq m$.

B. PHÂN DẠNG VÀ CÁC BÀI TẬP MINH HỌA.

DẠNG 1. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

1. Bài tập minh họa:

Bài tập 1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n , ta có:

a). $1.4 + 2.7 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$

b). $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

Lời giải.

 **Bài tập 2.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3} \quad (1)$$

Lời giải.

Bài tập 3. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} \quad (1)$$

Lời giải.

Bài tập 4. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (1)$$

Lời giải.

Bài tập 5. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có:

$$1.2+2.3+3.4+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad (1)$$

Lời giải.

 **Bài tập 6.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có:

$$1.2 + 2.5 + 3.8 + \dots + n(3n-1) = n^2(n+1) \quad (1)$$

Lời giải.

 **Bài tập 7.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có:

$$1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \quad (1)$$

Lời giải.

 **Bài tập 8.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có:

$$1.2^2 + 2.3^3 + 3.4^4 + \dots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}, n \geq 2 \quad (1)$$

Lời giải.

[illegible]

Bài tập 9. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right) \ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2 n}, n \geq 2 \quad (1)$$

Lời giải.

[illegible]

 **Bài tập 10.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$ (1)

$$\therefore \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n} \quad (1)$$

Lời giải.

 **Bài tập 11.** Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \dots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} \quad (1)$$

Lời giải.

DẠNG 2. CHỨNG MINH CHIA HẾT

1. Bài tập minh họa:

 **Bài tập 12.** Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

Lời giải.

 **Bài tập 13.** Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3

Lời giải.

 **Bài tập 14.** Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $n^3 - n$ chia hết cho 3.

Lời giải.

 **Bài tập 15.** Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $2n^3 - 3n^2 + n$ chia hết cho 6.

Lời giải.

 **Bài tập 16.** Với mỗi số nguyên dương n , gọi $u_n = 9^n - 1$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì u_n luôn chia hết cho 8.

Lời giải.

Bài tập 17. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $13^n - 1$ chia hết cho 6.

Lời giải.

Bài tập 18. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9.

Lời giải.

Bài tập 19. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $4^n + 6n + 8$ chia hết cho 9.

Lời giải.

Bài tập 20. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $7 \cdot 2^{2n-2} + 3^{2n-1}$ chia hết cho 5.

Lời giải.

Bài tập 21. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7.

Lời giải.

Bài tập 22. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ chia hết cho 133.

Lời giải.

Bài tập 23. Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $16^n - 15n - 1$ chia hết cho 225.

Lời giải.

Bài tập 24. Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $4 \cdot 3^{2n+2} + 32n - 36$ chia hết cho 32.

Lời giải.

Bài tập 25. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $3^{3n+3} - 26n - 27 : 169, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải.

Bài tập 26. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta luôn có: $2^{n+1} > 2n + 3$ (*)

Lời giải.

DẠNG 3. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

1. Bài tập minh họa:

Bài tập 27. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $3^{n-1} > n(n+2)$ (*) $\forall n \geq 4, n \in \mathbb{N}$.

Lời giải.

Bài tập 28. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $3^n > n^2 + 4n + 5$ (*), $\forall n \geq 3$

Lời giải.

Bài tập 29. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $2^n > 2n+1$ (*) $\forall n \geq 3, n \in \mathbb{N}$.

Lời giải.

Bài tập 30. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $2^n > n^2, \forall n \geq 5, n \in \mathbb{N}$

Lời giải.

Bài tập 31. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} > \frac{13}{24} \quad (*), \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$

Lời giải.

Bài tập 32. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $n^n \geq (n+1)^{n-1}$ (*) $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải.

Bài tập 33. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $(n!)^2 \geq n^n$ (*) $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải.

Bài tập 34. Chứng minh $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$ luôn là số nguyên với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải.

Bài tập 35. Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ (1)

Lời giải.

Bài tập 36. Cho $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $x + \frac{1}{x}$ là số nguyên. Chứng minh: $x^n + \frac{1}{x^n}$ là số nguyên $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM.

Câu 1. Dùng quy nạp chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên). Ở bước 1 (bước cơ sở) của chứng minh quy nạp, bắt đầu với n bằng:

- A. $n = 1$. B. $n = p$. C. $n > p$. D. $n \geq p$.

Lời giải.

Câu 2. Dùng quy nạp chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên). Ở bước 2 ta giả thiết mệnh đề $A(n)$ đúng với $n = k$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $k > p$. B. $k \geq p$. C. $k = p$. D. $k < p$.

Lời giải.

Câu 3. Khi sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên), ta tiến hành hai bước:

- Bước 1, kiểm tra mệnh đề $A(n)$ đúng với $n = p$.
- Bước 2, giả thiết mệnh đề $A(n)$ đúng với số tự nhiên bất kỳ $n = k \geq p$ và phải chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.

Trogn hai bước trên:

- A. Chỉ có bước 1 đúng. B. Chỉ có bước 2 đúng.
C. Cả hai bước đều đúng. D. Cả hai bước đều sai.

Lời giải.

Câu 4. Một học sinh chứng minh mệnh đề " $8^n + 1$ chia hết cho 7, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ " (*) như sau:

- Giả sử (*) đúng với $n = k$, tức là $8^k + 1$ chia hết cho 7.
- Ta có: $8^{k+1} + 1 = 8(8^k + 1) - 7$, kết hợp với giả thiết $8^k + 1$ chia hết cho 7 nên suy ra được $8^{k+1} + 1$ chia hết cho 7. Vậy đẳng thức (*) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Học sinh trên chứng minh đúng.
B. Học sinh chứng minh sai vì không có giả thiết qui nạp.
C. Học sinh chứng minh sai vì không dùng giả thiết qui nạp.
D. Học sinh không kiểm tra bước 1 (bước cơ sở) của phương pháp qui nạp.

Lời giải.

Câu 5. Cho $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_3 = \frac{1}{12}$.

B. $S_2 = \frac{1}{6}$.

C. $S_2 = \frac{2}{3}$.

D. $S_3 = \frac{1}{4}$.

Lời giải.

Câu 6. Cho $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n = \frac{n-1}{n}$.

B. $S_n = \frac{n}{n+1}$.

C. $S_n = \frac{n+1}{n+2}$.

D. $S_n = \frac{n+2}{n+3}$.

Lời giải.

Câu 7. Cho $S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n = \frac{n-1}{2n-1}$.

B. $S_n = \frac{n}{2n+1}$.

C. $S_n = \frac{n}{3n-2}$.

D. $S_n = \frac{n+2}{2n+5}$.

Lời giải.

Câu 8. Cho $P_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ với $n \geq 2$ và $n \in \mathbb{N}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P = \frac{n+1}{n+2}$.

B. $P = \frac{n-1}{2n}$.

C. $P = \frac{n+1}{n}$.

D. $P = \frac{n+1}{2n}$.

Lời giải.

Câu 9. Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, hệ thức nào sau đây là sai?

A. $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

B. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.

C. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

D. $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Lời giải.

Câu 10. Xét hai mệnh đề sau:

I) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, số $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3.

II) Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.

Mệnh đề nào đúng?

A. Chỉ I.

B. Chỉ II.

C. Không có.

D. Cả I và II.

Lời giải.

SBAI 2.

DÃY SỐ

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa. Một hàm số u xác định trên tập $\mathbb{N}^*$ được gọi là dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số):

$$u: \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$n \longmapsto u(n)$$

- Mỗi giá trị của hàm số u được gọi là một số hạng của dãy số,
 - ✧ $u(1)$ được gọi là số hạng thứ nhất (hay số hạng đầu),
 - ✧ $u(2)$ được gọi là số hạng thứ hai...
- Người ta thường kí hiệu các giá trị $u(1), u(2) \dots$ tương ứng bởi $u_1, u_2, \dots$.
- Ta thường kí hiệu dãy số $u = u(n)$ bởi (u_n) và gọi u_n là số hạng tổng quát của dãy số đó.
- Ta cũng thường viết dãy số (u_n) dưới dạng khai triển: $u_1, u_2, \dots, u_n$.

|| Chú ý:

- ✧ Người ta cũng gọi một hàm số u xác định trên tập hợp gồm m số nguyên dương đầu tiên (m tùy ý thuộc $\mathbb{N}^*$) là một dãy số.
- ✧ Rõ ràng, dãy số trong trường hợp này chỉ có hữu hạn số hạng (m số hạng: $u_1, u_2, \dots, u_m$).
- ✧ Vì thế, người ta còn gọi nó là dãy số hữu hạn, u_1 gọi là số hạng đầu và u_m là số hạng cuối.

Ví dụ 1. Hãy viết ba số hạng đầu của dãy số (u_n) cho bởi

a). $u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1}$.

b). $u_n = \frac{n + (-1)^n}{2n + 1}$.

c). $u_n = n + \cos^2 n$.

d). $u_n = \frac{(n+1)!}{2^n}$.

Lời giải

Ví dụ 2. Hãy viết bốn số hạng đầu của dãy số (u_n) cho bởi

a). $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 1) \end{cases}$

b). $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2}{u_n^2 + 1} \end{cases}$

c). $\begin{cases} u_1 = 15, u_2 = 9 \\ u_{n+2} = u_n - u_{n+1} \end{cases}$

d). $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = -2 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$

Lời giải

Ví dụ 3.

a). Cho dãy số (u_n) có $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = 4u_n + 7 \end{cases}$ với $n \geq 1$. Chứng minh rằng $u_n = \frac{2^{2n+1} - 7}{3}$ với $n \geq 1$.

b). Cho dãy số (u_n) có $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2n - 1 \end{cases}$ với $n \geq 1$. Chứng minh rằng $u_n = 3^n - n$ với $n \geq 1$.

Lời giải

2. Cách cho một dãy số.

Có 3 cách thông dụng

➤ **Cách 1.** Cho bằng công thức tổng quát u_n .

Ví dụ 4. cho dãy số (u_n) có $u_n = n + \cos^2 n$ hoặc $u_n = 2n^2 - 3n + 2$.

➤ **Cách 2:** Cho dãy số bởi hệ thức truy hồi (hay quy nạp): $\begin{cases} u_1 = \dots \\ u_{n+1} = \text{theo } u_n \end{cases}$

✧ Cho số hạng thứ nhất u_1 (hoặc một vài số hạng đầu).

✧ Với $n \geq 2$ cho một công thức tính (u_n) nếu biết u_{n-1} (hoặc vài số hạng đứng ngay trước nó).

Ví dụ 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3 \end{cases} \forall n \geq 1$. hoặc $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 1) \end{cases}$

➤ **Cách 3.** Diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hạng của dãy số.

Ví dụ 6. Cho đường tròn (O) bán kính R . Cho dãy (u_n) với u_n là độ dài cung tròn có số đo là $\frac{2\pi}{n}$ của đường tròn (O)

3. Dãy số tăng, dãy số giảm

➤ Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng $\Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$
 $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$
 $\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$ và $(u_n > 0)$.

➤ Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm $\Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$
 $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$
 $\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$ và $(u_n > 0)$.

 Ví dụ 7. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n) sau:

1). Dãy số với $u_n = 2n^3 - 5n + 1$ **2).** Dãy số (u_n) với $u_n = 3^n - n$. **3).** Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$

$$u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$$
[illegible]

- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} : u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R} : u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn $\Leftrightarrow \exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

[illegible]

Tel: 0935.660.880

[illegible]

Bài tập 2. Tìm 5 số hạng đầu và tìm công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số sau :

a). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$

b). $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

Lời giải.

Bài tập 3. Dãy số (u_n) được xác định bằng cộng thức: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3 \end{cases} \quad \forall n \geq 1.$

a). Tìm công thức của số hạng tổng quát.

b). Tính số hạng thứ 100 của dãy số.

Lời giải.

Bài tập 4. Hãy viết bốn số hạng đầu của dãy số (u_n) , dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n và chứng minh công thức đó bằng quy nạp

a). $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$

b). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2} \end{cases}$

c.) $\begin{cases} u_1 = \frac{5}{4} \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2} \end{cases}$

Lời giải

3. Bài tập rèn luyện.

Bài 1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = 5u_n$ với mọi $n \geq 1$.

a). Hãy tính u_2, u_4 và u_6 .

b). Chứng minh rằng $u_n = 2 \cdot 5^{n-1}$ với mọi $n \geq 1$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 2. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = u_n + 7$ với mọi $n \geq 1$

a). Hãy tính u_2, u_4 và u_6 .

b). Chứng minh rằng: $u_n = 7n - 6$ (1) với mọi $n \geq 1$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 3. Cho dãy số (u_n) với $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = 3u_n + 10$ với mọi $n \geq 1$.

Chứng minh rằng: $u_n = 2 \cdot 3^n - 5 \quad \forall n \geq 1$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 4. Cho dãy số (u_n) , biết $u_1 = 3, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$ với $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$

a). Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số.

b). Dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Lời giải.

[illegible]

 **Bài 5.** Cho tổng $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

- a). Tính S_1, S_2, S_3 .
- b). Dự đoán công thức tính tổng S_n và chứng minh bằng quy nạp.

Lời giải.

[illegible]

 **Bài 6.** Tìm 5 số hạng đầu và tìm công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số sau :

$$\text{a). } \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

b). $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$

Lời giải.

Bài 9. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát u_n .

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 1. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{-n}{n+1}$. Năm số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; -\frac{4}{5}; -\frac{5}{6}$.

B. $-\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; -\frac{4}{5}; -\frac{5}{6}; -\frac{6}{7}$.

C. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}$.

D. $\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

Câu 2. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n}{3^n - 1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$.

B. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{26}$.

C. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}$.

D. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}$.

Lời giải.

.....

.....

Câu 3. Cho dãy số (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \geq 0$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó là lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $-1; 2; 5$.

B. $1; 4; 7$.

C. $4; 7; 10$.

D. $-1; 3; 7$.

Lời giải.

.....

.....

Câu 4. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 3}$. Tìm số hạng u_5 .

A. $u_5 = \frac{1}{4}$.

B. $u_5 = \frac{17}{12}$.

C. $u_5 = \frac{7}{4}$.

D. $u_5 = \frac{71}{39}$.

Lời giải.

Câu 5. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot 2n$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $u_1 = -2$.

B. $u_2 = 4$.

C. $u_3 = -6$.

D. $u_4 = -8$.

Lời giải.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n}$. Tìm số hạng u_3 .

A. $u_3 = \frac{8}{3}$.

B. $u_3 = 2$.

C. $u_3 = -2$.

D. $u_3 = -\frac{8}{3}$.

Lời giải.

Câu 7. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 1) \end{cases}$. Tìm số hạng u_4 .

A. $u_4 = \frac{5}{9}$.

B. $u_4 = 1$.

C. $u_4 = \frac{2}{3}$.

D. $u_4 = \frac{14}{27}$.

Lời giải.

Câu 8. Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $u_2 = \frac{5}{2}$.

B. $u_3 = \frac{15}{4}$.

C. $u_4 = \frac{31}{8}$.

D. $u_5 = \frac{63}{16}$.

Lời giải.

Câu 9. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$. Số $\frac{8}{15}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 8.

B. 6.

C. 5.

D. 7.

Lời giải.

Câu 10. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{2n+5}{5n-4}$. Số $\frac{7}{12}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

- A. 8. B. 6. C. 9. D. 10.

Lời giải.

Câu 11. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = 2^n$. Tìm số hạng u_{n+1} .

- A. $u_{n+1} = 2^n \cdot 2$. B. $u_{n+1} = 2^n + 1$. C. $u_{n+1} = 2(n+1)$. D. $u_{n+1} = 2^n + 2$.

Lời giải.

Câu 12. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = 3^n$. Tìm số hạng u_{2n-1} .

- A. $u_{2n-1} = 3^2 \cdot 3^n - 1$. B. $u_{2n-1} = 3^n \cdot 3^{n-1}$. C. $u_{2n-1} = 3^{2n} - 1$. D. $u_{2n-1} = 3^{2(n-1)}$.

Lời giải.

Câu 13. Cho dãy số (u_n) , với $u_n = 5^{n+1}$. Tìm số hạng u_{n-1} .

- A. $u_{n-1} = 5^{n-1}$. B. $u_{n-1} = 5^n$. C. $u_{n-1} = 5 \cdot 5^{n+1}$. D. $u_{n-1} = 5 \cdot 5^{n-1}$.

Lời giải.

Câu 14. Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$. Tìm số hạng u_{n+1} .

- A. $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n+1)+3}$. B. $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n-1)+3}$. C. $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+3}$. D. $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.

Lời giải.

Câu 15. Dãy số có các số hạng cho bởi: $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$. có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

- A. $u_n = \frac{n+1}{n}$. B. $u_n = \frac{n}{n+1}$. C. $u_n = \frac{n-1}{n}$. D. $u_n = \frac{n^2 - n}{n+1}$.

Lời giải.

Câu 16. Dãy số có các số hạng cho bởi: $-1; 1; -1; 1; -1; \dots$. có số hạng tổng quát là công thức nào dưới đây?

- A. $u_n = 1$. B. $u_n = -1$. C. $u_n = (-1)^n$. D. $u_n = (-1)^{n+1}$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

Câu 17. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-2; 0; 2; 4; 6; \dots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là công thức nào dưới đây?

A. $u_n = -2n$.

B. $u_n = n - 2$.

C. $u_n = -2(n+1)$.

D. $u_n = 2n - 4$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

Câu 18. Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = n^{n-1}$.

B. $u_n = 2^n$.

C. $u_n = 2^{n+1}$.

D. $u_n = 2$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

Câu 19. Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = \frac{1}{2} + 2(n-1)$.

B. $u_n = \frac{1}{2} - 2(n-1)$.

C. $u_n = \frac{1}{2} - 2n$.

D. $u_n = \frac{1}{2} + 2n$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

Câu 20. Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = 2n - 1 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 2 + (n-1)^2$.

B. $u_n = 2 + n^2$.

C. $u_n = 2 + (n+1)^2$.

D. $u_n = 2 - (n-1)^2$.

Lời giải.

.....

.....

Câu 21. Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

B. $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n+2)}{6}$.

C. $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$.

D. $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n-2)}{6}$.

Lời giải.

Câu 22. Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = \frac{-n+1}{n}$.

B. $u_n = \frac{n+1}{n}$.

C. $u_n = -\frac{n+1}{n}$.

D. $u_n = -\frac{n}{n+1}$.

Lời giải.

Câu 23. Cho dãy số (u_n) , được xác định $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1 + n$.

B. $u_n = 1 - n$.

C. $u_n = 1 + (-1)^{2n}$.

D. $u_n = n$.

Lời giải.

Câu 24. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = 2(3^n)$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Công thức truy hồi của dãy số đó là:

A. $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 6u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_n = 3u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 3u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_n = 6u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$.

Lời giải.

Câu 25. Cho dãy số (a_n) , được xác định $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n, n \geq 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{93}{16}$.

B. $a_{10} = \frac{3}{512}$.

C. $a_{n+1} + a_n = \frac{9}{2^n}$.

D. $a_n = \frac{3}{2^n}$.

Lời giải.

VẤN ĐỀ 2. TÍNH TĂNG GIẢM CỦA DÃY SỐ.

1. Phương Pháp.

Cách 1: Khi chưa biết dãy số (u_n) dương hay âm thì ta xét dấu của biểu thức $u_{n+1} - u_n$.

➤ Nếu $u_{n+1} - u_n > 0$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng;

➤ Nếu $u_{n+1} - u_n < 0$ thì (u_n) là dãy số giảm.

☞ **Dấu hiệu nhận biết:** thường hàm đa thức, phân thức hữu tỉ.

Cách 2: Khi $\forall n \in \mathbb{N}^*$ và $(u_n > 0)$ thì có thể so sánh $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.

➤ Nếu $\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng;

➤ Nếu $\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

☞ **Dấu hiệu nhận xét:** thường hàm căn thức, hàm mũ.

Cách 3: Nếu dãy số (u_n) được cho bởi một hệ thức truy hồi $\begin{cases} u_1 = \dots \\ u_{n+1} = \text{theo } u_n \end{cases}$ thì ta có thể sử dụng phương pháp chứng minh quy nạp để chứng minh $u_{n+1} > u_n$ (hoặc $u_{n+1} < u_n$)

☞ **Chú ý:**

➤ Nếu $\exists k \in \mathbb{N}^* : u_{n+1} > u_k$ thì dãy số (u_n) không giảm.

➤ Nếu $\exists k \in \mathbb{N}^* : u_{n+1} < u_k$ thì dãy số (u_n) không tăng.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 5. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n) sau:

1). Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}$.

2). Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{n + 1}$

4). Dãy số (u_n) với $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$

Lời giải.

1). Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

2). Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3^n}{n^2}$

[illegible]

a). $u_n = \frac{1}{n} - 2$

b). $u_n = \frac{n-1}{n+1}$

c). $u_n = (-1)^n (2^n + 1)$

e). $u_n = 2n - \sqrt{4n^2 - 1}$

[illegible]

Bài tập 8. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n) được cho bởi hệ thức truy hồi sau:

$$\text{a). } \begin{cases} u_2 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad \text{b). } \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{3 + u_n} \end{cases}$$

Lời giải.

Bài tập 9. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2. \end{cases}$

- a). Tìm công thức của số hạng tổng quát.
b). Chứng minh dãy số tăng.

Lời giải.

b). (u_n) là dãy số tăng.

Lời giải.

b). $u_n = \frac{4^n - 1}{4^n + 5}$.

$$\text{d). } \begin{cases} u_1 = \sqrt{6} \\ u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n} \end{cases}.$$

[illegible]
$$\text{b). } u_n = \frac{\sqrt{n+11}}{n}.$$
[illegible]

D. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$

.....

.....

.....

Câu 27. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n = \frac{1}{2^n}$.

B. $u_n = \frac{1}{n}$.

C. $u_n = \frac{n+5}{3n+1}$.

D. $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$.

Lời giải.

Câu 28. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n = \frac{2}{3^n}$.

B. $u_n = \frac{3}{n}$.

C. $u_n = 2^n$.

D. $u_n = (-2)^n$.

Lời giải.

Câu 29. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = \frac{1}{2^n}$.

B. $u_n = \frac{3n-1}{n+1}$.

C. $u_n = n^2$.

D. $u_n = \sqrt{n+2}$.

Lời giải.

Câu 30. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = \sin n$.

B. $u_n = \frac{n^2+1}{n}$.

C. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

D. $u_n = (-1)^n \cdot (2^n + 1)$.

Lời giải.

Câu 31. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số $u_n = \frac{1}{n} - 2$ là dãy tăng.

B. Dãy số $u_n = (-1)^n (2^n + 1)$ là dãy giảm.

C. Dãy số $u_n = \frac{n-1}{n+1}$ là dãy giảm.

D. Dãy số $u_n = 2n + \cos \frac{1}{n}$ là dãy tăng.

Lời giải.

Câu 32. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Dãy số $u_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}}$ là dãy giảm.

B. Dãy số $u_n = 2n^2 - 5$ là dãy tăng.

C. Dãy số $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ là dãy giảm.

D. Dãy số $u_n = n + \sin^2 n$ là dãy tăng.

Lời giải.

DẠNG 3. Dãy số bị chặn.

1. Phương pháp.

① Nếu $u_n = \sum_{k=1}^n a_k$ thì:

➤ Thu gọn u_n , dựa vào biểu thức thu gọn để chặn u_n .

➤ Ta cũng có thể chặn tổng $\sum_{k=1}^n a_k$ bằng một tổng mà ta có thể biết được chặn trên, chặn dưới của nó.

② Nếu dãy số (u_n) cho bởi một hệ thức truy hồi thì:

➤ Dự đoán chặn trên, chặn dưới rồi chứng minh bằng phương pháp chứng minh quy nạp.

➤ Ta cũng có thể xét tính đơn điệu (nếu có) sau đó giải bất phương trình $u_{n+1} - u_n$ dựa vào đó chặn (u_n) .

2. Bài tập minh họa.

 Bài tập 12. Xét tính tăng hay giảm và bị chặn của dãy số : $u_n = \frac{2n-1}{n+3}; n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải.

Bài tập 13. Chứng minh dãy số (u_n) , với $u_n = \frac{7n+5}{5n+7}$ là một dãy số tăng và bị chặn.

Lời giải.

Bài tập 14. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 1 + (n-1) \cdot 2^n$

- Viết 5 số hạng đầu của dãy số.
- Tìm công thức truy hồi.
- Chứng minh dãy số tăng và bị chặn dưới.

Lời giải.

Bài tập 15. Cho dãy số (u_n) với $u_n = n^2 - 4n + 3$.

- Viết công thức truy hồi của dãy số.
- Chứng minh dãy số bị chặn dưới.
- Tính tổng n số hạng đầu của dãy số đã cho.

Lời giải.

Bài tập 16. Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a). $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

b). $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

c). $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

d). $u_n = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)}$

Lời giải.

 **Bài tập 20.** Cho $a > 2$. Xét dãy (U_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = a^2 \\ u_{n+1} = (u_n - a)^2 \end{cases} \forall n \in N^*$$
. Xét tính đơn điệu của dãy (U_n)

Lời giải.

 **Bài tập 21.** Cho dãy số (a_n) định bởi:
$$\begin{cases} 0 < a_n < 1; \forall n \in \mathbb{N}^* \\ a_{n+1}(1-a_n) \geq \frac{1}{4}; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

a). Chứng minh: $a_n > \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}^*(1)$

b). Xét tính đơn điệu của dãy số (a_n) .

Lời giải.

Bài tập 22. Xét tính bị chặn của dãy số: $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; n \in N^*$

Lời giải.

5. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 33. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{3n-1}{3n+1}$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

A. $\frac{1}{3}$.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 0.

Lời giải.

Câu 34. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn trên?

A. $u_n = n^2$.

B. $u_n = 2^n$.

C. $u_n = \frac{1}{n}$.

D. $u_n = \sqrt{n+1}$.

Lời giải.

Câu 35. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \cos n + \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào dưới đây?

A. 0.

B. 1.

C. $\sqrt{2}$.

D. Không bị chặn trên.

Lời giải.

Câu 36. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \sin n - \cos n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi số nào dưới đây?

A. 0.

B. -1.

C. $-\sqrt{2}$.

D. Không bị chặn dưới.

Lời giải.

Câu 37. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \sqrt{3} \cos n - \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và chặn trên lần lượt bởi các số m và M nào dưới đây?

A. $m = -2; M = 2$. B. $m = -\frac{1}{2}; M = \sqrt{3} + 1$. C. $m = -\sqrt{3} + 1; M = \sqrt{3} - 1$. D. $m = -\frac{1}{2}; M = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Câu 38. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot 5^{2n+5}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.
- B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.
- C. Dãy số (u_n) bị chặn.
- D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải.

Câu 39. Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)}, \forall n = 1; 2; 3 \dots$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.
- B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.
- C. Dãy số (u_n) bị chặn.
- D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải.

Câu 40. Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}, \forall n = 2; 3; 4; \dots$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Dãy số (u_n) bị chặn trên và không bị chặn dưới.

- B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên.
 C. Dãy số (u_n) bị chặn.
 D. Dãy số (u_n) không bị chặn.

Lời giải.

Câu 41. Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào là dãy số bị chặn?

- A. $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$. B. $u_n = n + \frac{1}{n}$. C. $u_n = 2^n + 1$. D. $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Lời giải.

Câu 42. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn?

- A. $u_n = \frac{1}{2^n}$. B. $u_n = 3^n$. C. $u_n = \sqrt{n+1}$. D. $u_n = n^2$.

Lời giải.

Câu 43. Cho dãy số (u_n) , xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\sqrt{6} \leq u_n < \frac{5}{2}$. B. $\sqrt{6} \leq u_n < 3$. C. $\sqrt{6} \leq u_n < 2$. D. $\sqrt{6} \leq u_n \leq 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Câu 44. Cho dãy số (u_n) , với $u_n = \sin \frac{\pi}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Số hạng thứ $n+1$ của dãy là $u_{n+1} = \sin \frac{\pi}{n+1}$.
 B. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.
 C. Dãy số (u_n) là một dãy số tăng.
 D. Dãy số (u_n) không tăng không giảm.

Lời giải.

Câu 45. Cho dãy số (u_n) , với $u_n = (-1)^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) là dãy số tăng.

B. Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

C. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

D. Dãy số (u_n) là dãy số không bị chặn.

Lời giải.

BÀI TẬP TỔNG ÔN TẬP

Bài 12. Xét tính bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn của các dãy số (u_n) cho bởi

a). $u_n = \frac{2n+3}{n+2}$.

b). $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

c). $u_n = n^2 + 4$.

d). $u_n = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1}$.

e). $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2n + n}}$.

f). $u_n = (-1)^n \cos \frac{\pi}{2n}$.

Lời giải

a). $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. b). $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

This image shows a blank sheet of white paper designed for handwriting practice. It features two vertical columns of horizontal dashed lines. Each column contains 10 rows of these lines, providing a guide for letter height and placement. The lines are evenly spaced and extend across the width of each respective column.

SBÀI 3.

CẤP SỐ CỘNG

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: Cấp số cộng là một dãy số (vô hạn hay hữu hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó và một số d không đổi, nghĩa là:

$$(u_n) \text{ là cấp số cộng } \Leftrightarrow \forall n \geq 1, u_{n+1} = u_n + d$$

→ Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

Ví dụ 1. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy nào là cấp số cộng

a). $u_n = 2n - 1.$

b). $u_n = (-1)^n + 2n.$

c). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 1 - u_n \end{cases} \text{ với } n \geq 1.$

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Các định lý cơ bản.

a). Định lý 1: (tính chất của số hạng)

Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$$

Hệ quả: Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow a + c = 2b$.

Ví dụ 2. Định x để 3 số $10 - 3x, 2x^2 + 3, 7 - 4x$ theo thứ tự đó lập thành 1 cấp số cộng.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

b). Định lý 2: (số hạng tổng quát) Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức sau:

$$u_n = u_1 + (n-1)d$$

d). -35 có thuộc cấp số cộng trên hay không?

This image shows a full page of primary-ruled paper. It features two vertical columns of horizontal dashed lines, designed for handwriting practice. The left column contains ten rows of lines, and the right column also contains ten rows. There are no margins, text, or other markings on the page.

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$$

c). Biết $S_n = 2576$, tìm n .

[illegible]

DẠNG 1. Chứng minh một dãy số (u_n) là cấp số cộng.

👉 Nếu A phụ thuộc vào n thì (u_n) không là cấp số cộng.

d). $u_n = v_n - v_{n-1}$ vóri $v_n = (2n+1)^2$.

[illegible]

Tel: 0935.660.880

Câu 2. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số cộng?

A. $-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}; \dots$

B. $15\sqrt{2}; 12\sqrt{2}; 9\sqrt{2}; 6\sqrt{2}; \dots$

C. $\frac{4}{5}; 1; \frac{7}{5}; \frac{9}{5}; \frac{11}{5}; \dots$

D. $\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{5}{\sqrt{3}}; \dots$

Lời giải:

Câu 3. Cho dãy số $\frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{2}; -1; -\frac{3}{2}; \dots$ là cấp số cộng với:

A. Số hạng đầu tiên là $\frac{1}{2}$, công sai là $\frac{1}{2}$.

B. Số hạng đầu tiên là $\frac{1}{2}$, công sai là $-\frac{1}{2}$.

C. Số hạng đầu tiên là 0, công sai là $\frac{1}{2}$.

D. Số hạng đầu tiên là 0, công sai là $-\frac{1}{2}$.

Lời giải:

Câu 4. Cho cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = -\frac{1}{2}$, công sai $d = \frac{1}{2}$. Năm số hạng liên tiếp đầu tiên của cấp số này là:

A. $-\frac{1}{2}; 0; 1; \frac{1}{2}; 1$.

B. $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}$.

D. $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}$.

Lời giải:

Câu 5. Viết ba số hạng xen giữa các số 2 và 22 để được một cấp số cộng có năm số hạng.

A. 7; 12; 17.

B. 6; 10; 14.

C. 8; 13; 18.

D. 6; 12; 18.

Lời giải.

Câu 6. Cho hai số -3 và 23 . Xen kẽ giữa hai số đã cho n số hạng để tất cả các số đó tạo thành cấp số cộng có công sai $d = 2$. Tìm n .

A. $n = 12$.

B. $n = 13$.

C. $n = 14$.

D. $n = 15$.

Lời giải.

Câu 7. Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đầu lần lượt là 5; 9; 13; 17; $\dots$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng.

A. $u_n = 5n + 1$.

B. $u_n = 5n - 1$.

C. $u_n = 4n + 1$.

D. $u_n = 4n - 1$.

Lời giải.

Câu 8. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -3$ và $d = \frac{1}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n+1)$.

B. $u_n = -3 + \frac{1}{2}n - 1$.

C. $u_n = -3 + \frac{1}{2}(n-1)$.

D. $u_n = -3 + \frac{1}{4}(n-1)$.

Lời giải.

Câu 9. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = 15$ và $d = -2$. Tìm u_n .

A. $u_n = -2n + 21$.

B. $u_n = -\frac{3}{2}n + 12$.

C. $u_n = -3n - 17$.

D. $u_n = \frac{3}{2}n^2 - 4$.

Lời giải.

Câu 10. Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n = 7 - 3n$.

B. $u_n = 7 - 3^n$.

C. $u_n = \frac{7}{3n}$.

D. $u_n = 7 \cdot 3^n$.

Lời giải.

Câu 11. Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. $u_n = (-1)^n (2n+1)$.

B. $u_n = \sin \frac{\pi}{n}$.

C. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} - 1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} \end{cases}$.

Lời giải.

Câu 12. Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào không phải là cấp số cộng?

A. $u_n = -4n + 9$.

B. $u_n = -2n + 19$.

C. $u_n = -2n - 21$.

D. $u_n = -2^n + 15$.

Lời giải.

DẠNG 2: Tìm số hạng đầu tiên u_1 , công sai d của cấp số cộng, tìm số hạng thứ k của cấp số cộng, tính tổng k số hạng đầu tiên.

1. Phương pháp.

- Ta thiết lập một hệ phương trình gồm hai ẩn u_1 và d . Sau đó giải hệ phương trình này tìm được u_1 và d .
- Khi tìm số hạng thứ k , trước tiên ta tìm u_1 và d . Rồi áp dụng công thức: $u_k = u_1 + (k-1)d$
- Khi tính tổng của k số hạng đầu tiên, ta phải tìm u_1 và d . Sau đó áp dụng công thức:

$$S_k = \frac{k(u_1 + u_k)}{2} = \frac{k[2u_1 + (k-1)d]}{2}$$

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 2. Tìm số hạng đầu tiên, công sai, số hạng thứ 20 và tổng của 20 số hạng đầu tiên của các cấp số cộng sau, biết rằng:

a). $\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases}$

b). $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$

c). $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ s_{12} = 129 \end{cases}$

d). $\begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 16 \end{cases}$

Lời giải.

[illegible]

$$1). \begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35 \end{cases}$$

$$2). \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases}$$

$$3). \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 16 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 84 \end{cases}$$

$$4). \begin{cases} S_5 = 5 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot u_5 = 45 \end{cases}$$

5).
$$\begin{cases} S_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases}$$

$$6). \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 20 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 = 170 \end{cases}$$

$$7). \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = -12 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 8 \end{cases}$$

$$8). \begin{cases} u_1 + u_5 = \frac{5}{3} \\ u_3 \cdot u_4 = \frac{65}{72} \end{cases}$$

[illegible]

3. Bài tập rèn luyện.

 **Bài 1.** Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết:

$$\text{a). } \begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59 \end{cases}$$

$$\text{b). } \begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases}$$

$$\text{c). } \begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4 \end{cases}$$

$$\text{d). } \begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases}$$

$$\text{e). } \begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$$

$$\text{f). } \begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ s_3 = 21 \end{cases}$$

Lời giải.

[illegible]

 **Bài 2.** Xác định số hạng đầu, công sai và số hạng thứ n của các cấp số cộng sau, biết rằng:

a). $\begin{cases} S_{12} = 34 \\ S_{18} = 45 \end{cases}$

b). $\begin{cases} u_5 = 10 \\ S_{10} = 5 \end{cases}$

c). $\frac{S_{20}}{5} = \frac{S_{10}}{3} = \frac{S_5}{2}$

$$\text{d). } \begin{cases} S_{20} = 2S_{10} \\ S_{15} = 3S_5 \end{cases}$$

Lời giải.

[illegible]

[illegible]

4. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 13. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -5$ và $d = 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_{15} = 34$.

B. $u_{15} = 45$.

C. $u_{13} = 31$.

D. $u_{10} = 35$.

Lời giải.

Câu 14. Một cấp số cộng có 8 số hạng. Số hạng đầu là 5, số hạng thứ tám là 40. Khi đó công sai d của cấp số cộng đó là bao nhiêu?

A. $d = 4$.

B. $d = 5$.

C. $d = 6$.

D. $d = 7$.

Lời giải.

Câu 15. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4$ và $d = -5$. Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

A. $S_{100} = 24350$.

B. $S_{100} = -24350$.

C. $S_{100} = -24600$.

D. $S_{100} = 24600$.

Lời giải.

Câu 16. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = \frac{1}{4}$ và $d = -\frac{1}{4}$. Gọi S_5 là tổng 5 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_5 = -\frac{5}{4}$.

B. $S_5 = \frac{4}{5}$.

C. $S_5 = \frac{5}{4}$.

D. $S_5 = -\frac{4}{5}$.

Lời giải.

Câu 17. Số hạng tổng quát của một cấp số cộng là $u_n = 3n + 4$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

B. $S_n = \frac{7(3^n - 1)}{2}$.

C. $S_n = \frac{3n^2 + 5n}{2}$.

D. $S_n = \frac{3n^2 + 11n}{2}$.

Lời giải.

Câu 18. Xét các số nguyên dương chia hết cho 3. Tổng số 50 số nguyên dương đầu tiên đó bằng:

A. 7650.

B. 7500.

C. 3900.

D. 3825.

Lời giải.

Câu 19. Cho cấp số cộng (u_n) có $d = -2$ và $S_8 = 72$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 .

A. $u_1 = 16$.

B. $u_1 = -16$.

C. $u_1 = \frac{1}{16}$.

D. $u_1 = -\frac{1}{16}$.

Lời giải.

Câu 20. Một cấp số cộng có số hạng đầu là 1, công sai là 4, tổng của n số hạng đầu là 561. Khi đó số hạng thứ n của cấp số cộng đó là u_n có giá trị là bao nhiêu?

A. $u_n = 57$.

B. $u_n = 61$.

C. $u_n = 65$.

D. $u_n = 69$.

Lời giải.

Câu 21. Một cấp số cộng có 12 số hạng. Biết rằng tổng của 12 số hạng đó bằng 144 và số hạng thứ mười hai bằng 23. Khi đó công sai d của cấp số cộng đã cho là bao nhiêu?

A. $d = 2$.

B. $d = 3$.

C. $d = 4$.

D. $d = 5$.

Lời giải.

Câu 22. Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng là $S_n = \frac{3n^2 - 19n}{4}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng đã cho.

A. $u_1 = 2; d = -\frac{1}{2}$.

B. $u_1 = -4; d = \frac{3}{2}$.

C. $u_1 = -\frac{3}{2}; d = -2$.

D. $u_1 = \frac{5}{2}; d = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Câu 23. Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng là $S_n = n^2 + 4n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng đã cho.

- A. $u_n = 2n + 3$. B. $u_n = 3n + 2$. C. $u_n = 5 \cdot 3^{n-1}$. D. $u_n = 5 \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^{n-1}$.

Lời giải.

Câu 24. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2 + u_8 + u_9 + u_{15} = 100$. Tính tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

- A. $S_{16} = 100$. B. $S_{16} = 200$. C. $S_{16} = 300$. D. $S_{16} = 400$.

Lời giải.

Câu 25. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$ và $u_{14} = 18$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng đã cho.

- A. $u_1 = -21; d = 3$. B. $u_1 = -20; d = -3$. C. $u_1 = -22; d = 3$. D. $u_1 = -21; d = -3$.

Lời giải.

Câu 26. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 2001$ và $u_5 = 1995$. Khi đó u_{1001} bằng:

- A. $u_{1001} = 4005$. B. $u_{1001} = 4003$. C. $u_{1001} = 3$. D. $u_{1001} = 1$.

Lời giải.

Câu 27. Cho cấp số cộng (u_n) , biết: $u_n = -1, u_{n+1} = 8$. Tính công sai d của cấp số cộng đó.

- A. $d = -9$. B. $d = 7$. C. $d = -7$. D. $d = 9$.

Lời giải.

Câu 28. Cho cấp số cộng (u_n) . Hãy chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau:

- A. $\frac{u_{10} + u_{20}}{2} = u_5 + u_{10}$. B. $u_{90} + u_{210} = 2u_{150}$. C. $u_{10} \cdot u_{30} = u_{20}$. D. $\frac{u_{10} \cdot u_{30}}{2} = u_{20}$.

Lời giải.

Câu 29. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2 + u_{23} = 60$. Tính tổng S_{24} của 24 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho.

- A. $S_{24} = 60$. B. $S_{24} = 120$. C. $S_{24} = 720$. D. $S_{24} = 1440$.

Lời giải.

Câu 30. Một cấp số cộng có 6 số hạng. Biết rằng tổng của số hạng đầu và số hạng cuối bằng 17; tổng của số hạng thứ hai và số hạng thứ tư bằng 14. Tìm công sai d của cấp số cộng đã cho.

- A. $d = 2$. B. $d = -3$. C. $d = 4$. D. $d = 5$.

Lời giải.

Câu 31. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 u_7 = 75 \end{cases}$. Tìm công sai d của cấp số cộng đã cho.

- A. $d = \frac{1}{2}$. B. $d = \frac{1}{3}$. C. $d = 2$. D. $d = 3$.

Lời giải.

Câu 32. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 + u_7 = 26 \\ u_2^2 + u_6^2 = 466 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases} u_1 = 13 \\ d = -3 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} u_1 = 10 \\ d = -3 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 4 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} u_1 = 13 \\ d = -4 \end{cases}$.

Lời giải.

Câu 33. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 15 \\ u_1 + u_6 = 27 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = 3 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = -3 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} u_1 = 18 \\ d = 3 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = 4 \end{cases}$.

Lời giải.

Câu 34. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = 36 \\ u_2 u_3 = 54 \end{cases}$. Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n) biết $d < 10$.

A. $d = 3$.

B. $d = 4$.

C. $d = 5$.

D. $d = 6$.

Lời giải.

Câu 35. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \end{cases}$. Tính u_2 .

A. $u_2 = 3$.

B. $u_2 = 6$.

C. $u_2 = 9$.

D. $u_2 = 12$.

Lời giải.

DẠNG 3: Dựa vào tính chất của cấp số cộng, chứng minh đẳng thức:

1. Phương pháp.

➤ **Định lý 1:** (tính chất của số hạng)

Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$$

➤ **Hệ quả:** Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow a + c = 2b$.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 4. Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, chứng minh rằng:

a). $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$

b). $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$

c). $a^2 + ab + b^2, a^2 + ac + c^2, b^2 + bc + c^2$ là cấp số cộng.

Lời giải.

Bài tập 5. Cho a, b, c là 3 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Chứng minh:

a). $a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab$ cũng là 3 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng.

b). $2(a + b + c)^3 = 9[a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b)]$

Lời giải.

Bài tập 6. Cho a^2, b^2, c^2 lập thành 1 cấp số cộng có công sai khác không.

Chứng minh rằng $\frac{1}{b+c}; \frac{1}{c+a}; \frac{1}{a+b}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Lời giải.

Bài tập 7. Cho cấp số cộng : a, b, c . Chứng minh rằng:

$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}; \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}; \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}, (a > 0; b > 0; c > 0)$ theo thứ tự đó cũng lập thành CSC.

Lời giải.

DẠNG 4. Tính tổng và tìm x .

1. Phương pháp.

- Sử dụng công thức tìm số hạng tổng quát $u_n = u_1 + (n-1)d$ để tìm u_1 và công sai d .
- Sau đó áp dụng công thức tính tổng

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$$

2. Bài tập minh họa.

 **Bài tập 8.** Cho cấp số cộng: $u_1; u_2; u_3; \dots$ có công sai d .

- 1). Biết $u_2 + u_{22} = 40$. Tính S_{23}
- 2). Biết $u_1 + u_4 + u_7 + u_{10} + u_{13} + u_{16} = 147$. Tính $u_6 + u_{11}$ và $u_1 + u_6 + u_{11} + u_{16}$
- 3). Biết $u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 224$. Tính: S_{19}
- 4). Biết $u_{23} + u_{57} = 29$. Tính: $u_{10} + u_{70} + u_{157} + 3u_1$

Lời giải.

Bài tập 9. Tính các tổng sau:

a). $S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2n+1)$

b). $S = 1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2) + (3n+1) + (3n+4)$

c). $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$

Lời giải.

Bài tập 10. Tính các tổng sau

a). $A = 15 + 20 + 25 + \dots + 7515$.

b). $B = 1000^2 - 999^2 + 998^2 - 997^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

Lời giải

Bài tập 11

- a). Cho phương trình $1+6+11+16+\dots+x=970$. Tìm x biết $1, 6, 11, \dots, x$ là một cấp số cộng.
b). Giải phương trình $(x+1)+(x+4)+(x+7)+\dots+(x+28)=155$, biết $1, 4, 7, \dots, 28$ là một cấp số cộng.

Lời giải

Câu 36. Cho các số $-4; 1; 6; x$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tìm x .

- A. $x=7$. B. $x=10$. C. $x=11$. D. $x=12$.

Lời giải.

Câu 37. Biết các số $C_n^1; C_n^2; C_n^3$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với $n > 3$. Tìm n .

- A. $n=5$. B. $n=7$. C. $n=9$. D. $n=11$.

Lời giải.

Câu 38. Nếu các số $5+m$; $7+2m$; $17+m$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì m bằng bao nhiêu?
A. $m=2$. **B.** $m=3$. **C.** $m=4$. **D.** $m=5$.

Lời giải.

Câu 39. Với giá trị nào của x và y thì các số -7 ; x ; 11 ; y theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng?
A. $x=1$; $y=21$. **B.** $x=2$; $y=20$. **C.** $x=3$; $y=19$. **D.** $x=4$; $y=18$.

Lời giải.

Câu 40. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -5$ và $d = 3$. Số 100 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng?
A. Thứ 15. **B.** Thứ 20. **C.** Thứ 35. **D.** Thứ 36.

Lời giải.

DẠNG 5. Tìm các số hạng của cấp số cộng.

1. Phương pháp.

➤ Gọi u_1 là số hạng đầu là cấp số cộng, d là công sai thì cấp số cộng có dạng

$$u_1; u_1 + d; u_1 + 2d; u_1 + 3d \dots$$

Đặt biệt:

➤ Nếu dãy của cấp số cộng có 3 số hạng, 5 số hạng, 7 số hạng thì ta gọi như sau:

$$u_1 - 2d; u_1 - d; u_1; u_1 + d; u_1 + 2d$$

➤ Nếu dãy của cấp số cộng có 4 số hạng, 6 số hạng, 8 số hạng thì ta gọi như sau:

$$u_1 - 3d; u_1 - d; u_1 + d; u_1 + 3d$$

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 12. Giữa các số 7 và 35 hãy đặt thêm sáu số nữa để được một cấp số cộng.

Lời giải

Lời giải

Lời giải

[illegible]

Bài tập 15. Một tam giác vuông có chu vi bằng $3a$, và 3 cạnh lập thành một CSC. Tính độ dài ba cạnh của tam giác theo a .

Lời giải

[illegible]

 **Bài tập 16.** Tìm 3 số hạng liên tiếp của một CSC biết tổng của chúng bằng 15 và tổng bình phương của chúng bằng 83.

Lời giải

.....

.....

.....

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Bài tập 17. Tìm 5 số hạng liên tiếp của một CSC biết tổng của chúng bằng 40 và tổng bình phương của chúng bằng 480.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Bài tập 18. Tìm 4 số hạng liên tiếp của một CSC biết tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương của chúng bằng 30.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Bài tập 18. Một CSC có 7 số hạng với công sai d dương và số hạng thứ tư bằng 11. Hãy tìm các số hạng còn lại của CSC đó, biết hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 6.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Lời giải

Lời giải

Lời giải

Lời giải

Lời giải

Bài 6. Cho cấp số cộng $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ với công sai $d \neq 0$ và tất cả các số hạng đều dương.

Chứng minh:
$$\frac{1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2}} + \frac{1}{\sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{u_{n-1}} + \sqrt{u_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_n}}$$

Lời giải

Bài 7. Một cấp số cộng có tính chất với mọi số nguyên dương m và n khác nhau, có các tổng

S_m và S_n thỏa hệ thức: $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$. Chứng minh: $\frac{u_m}{u_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$

Lời giải

Bài 8. Cho tam giác ABC có $\tan \frac{A}{2}, \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2}$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Chứng minh $\cos A, \cos B, \cos C$ theo thứ tự cũng lập thành cấp số cộng.

[illegible][illegible]

b). $S_{4n} - S_{2n} = \frac{1}{3} S_{6n}$

[illegible]

D. $S = -n$.

[illegible]

D. $T = 5651526$.

[illegible]

D. $T = 500050$.

.....

.....

Câu 44. Cho cấp số cộng $u_1; u_2; u_3; \dots; u_n$ có công sai d , các số hạng của cấp số cộng đã cho đều khác 0. Với giá trị nào của d thì dãy số $\frac{1}{u_1}; \frac{1}{u_2}; \frac{1}{u_3}; \dots; \frac{1}{u_n}$ là một cấp số cộng?

- A. $d = -1$. B. $d = 0$. C. $d = 1$. D. $d = 2$.

Lời giải.

Câu 45. Nếu $a; b; c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì dãy số nào sau đây lập thành cấp số cộng?

- A. $2b^2; a^2; c^2$. B. $-2b; -2a; -2c$. C. $2b; a; c$. D. $2b; -a; -c$.

Lời giải.

Câu 46. Nếu $\frac{1}{b+c}; \frac{1}{c+a}; \frac{1}{a+b}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì dãy số nào sau đây lập thành cấp số cộng?

- A. $b^2; a^2; c^2$. B. $c^2; a^2; b^2$. C. $a^2; b^2; c^2$. D. $a^2; c^2; b^2$.

Lời giải.

Câu 47. Cho $a; b; c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a^2 + c^2 + 2ac = 4b^2$. B. $a^2 + c^2 = 2ab - 2bc$. C. $a^2 - c^2 = ab - bc$. D. $a^2 - c^2 = 2ab - 2bc$.

Lời giải.

Câu 48. Ba góc của một tam giác vuông tạo thành cấp số cộng. Hai góc nhọn của tam giác có số đo (độ) là:

- A. 20° và 70° . B. 45° và 45° . C. 20° và 45° . D. 30° và 60° .

Lời giải.

Câu 49. Ba góc A, B, C ($A < B < C$) của tam giác tạo thành cấp số cộng, biết góc lớn nhất gấp đôi góc bé nhất. Hiệu số đo độ của góc lớn nhất với góc nhỏ nhất bằng:

- A. 40° . B. 45° . C. 60° . D. 80° .

Lời giải.

Câu 50. Một tam giác vuông có chu vi bằng 3 và độ dài các cạnh lập thành một cấp số cộng. Độ dài các cạnh của tam giác đó là:

- A. $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}$. B. $\frac{1}{3}; 1; \frac{5}{3}$. C. $\frac{3}{4}; 1; \frac{5}{4}$. D. $\frac{1}{4}; 1; \frac{7}{4}$.

Lời giải.

Câu 51. Một rạp hát có 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 25 ghế. Mỗi dãy sau có hơn dãy trước 3 ghế. Hỏi rạp hát có tất cả bao nhiêu ghế?

- A. 1635. B. 1792. C. 2055. D. 3125.

Lời giải.

Câu 52. Người ta trồng 3003 cây theo một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây,...Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?

- A. 73. B. 75. C. 77. D. 79.

Lời giải.

Câu 53. Một chiếc đồng hồ đánh chuông, kể từ thời điểm 0 (giờ) thì sau mỗi giờ thì số tiếng chuông được đánh đúng bằng số giờ mà đồng hồ chỉ tại thời điểm đánh chuông. Hỏi một ngày đồng hồ đó đánh bao nhiêu tiếng chuông?

- A. 78. B. 156. C. 300. D. 48.

Lời giải.

Câu 54. Trên một bàn cờ có nhiều ô vuông, người ta đặt 7 hạt dẻ vào ô đầu tiên, sau đó đặt tiếp vào ô thứ hai số hạt nhiều hơn ô thứ nhất là 5, tiếp tục đặt vào ô thứ ba số hạt nhiều hơn ô thứ hai là 5,... và cứ thế tiếp tục đến ô thứ n . Biết rằng đặt hết số ô trên bàn cờ người ta phải sử dụng 25450 hạt. Hỏi bàn cờ đó có bao nhiêu ô vuông?

- A. 98. B. 100. C. 102. D. 104.

Lời giải.

Câu 55. Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước đến để khoan giếng nước. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80.000 đồng, kể từ mét khoan thứ 2 giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50m mới có nước. Vậy hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

- A. 5.2500.000 đồng. B. 10.125.000 đồng. C. 4.000.000 đồng. D. 4.245.000 đồng.

Lời giải.

[illegible]

Câu 56. (Quỳnh Lưu Nghệ An) Một cơ sở khoan giếng đưa ra định mức giá như sau: Giá từ mét khoan đầu tiên là 100000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá mỗi mét tăng thêm 30000 đồng so với giá của mét khoan ngay trước đó. Một người muốn kí hợp đồng với cơ sở khoan giếng này để khoan giếng sâu 20 mét lấy nước dùng cho sinh hoạt gia đình. Hỏi sau khi hoàn thành việc khoan giếng, gia đình đó phải thanh toán cho cơ sở khoan giếng số tiền bằng bao nhiêu?

A. 8800000. B. 7700000. C. 9980000. D. 6670000.

Lời giải

[illegible]

Câu 57. (Phan Đình Tùng Hà Tĩnh) Một vườn trồng cây giống có dạng tam giác. Biết rằng hàng đầu tiên trồng 5 cây giống và cứ hàng sau được trồng nhiều hơn hàng đứng liền trước nó là 3 cây. Hỏi hàng thứ 10 có bao nhiêu cây giống được trồng?

A. 53. **B.** 48. **C.** 35. **D.** 32.

Lời giải

Câu 58. (Đặng Thành Nam) Sinh nhật lần thứ 18 của An vào ngày 01 tháng 05 năm 2019. Bạn An muốn mua một chiếc máy ảnh giá 3850000 đồng để làm quà sinh nhật cho chính mình nên An quyết định bỏ ống heo 1000 đồng vào ngày 01 tháng 02 năm 2019. Trong các ngày tiếp theo, ngày sau An bỏ ống heo nhiều hơn ngày trước 1000 đồng. Hỏi đến ngày sinh nhật của mình, An có bao nhiêu tiền (tính đến ngày 30 tháng 04 năm 2019)?

A. 4095000 đồng. **B.** 89000 đồng. **C.** 4005000 đồng. **D.** 3960000 đồng.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 80. (THPT Kim Liên 2018) Một công ty trách nhiệm hữu hạn thực hiện việc trả lương cho người lao động theo phương thức sau: Người lao động sẽ được nhận 36 triệu đồng cho năm làm việc đầu tiên, và kể từ năm làm việc thứ hai, mức lương sẽ tăng thêm 3 triệu đồng mỗi năm. Hãy tính tổng số tiền lương một người lao động được nhận sau 5 năm làm việc cho công ty.

A. 210 triệu đồng. **B.** 100 triệu đồng. **C.** 120 triệu đồng. **D.** 420 triệu đồng.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

TỔNG ÔN TẬP CẤP SỐ CỘNG

Bài 12. Cho cấp số cộng (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -9 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$. Tìm u_{25} .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 13. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết

a). $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases}$ b). $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7 \end{cases}$ c). $\begin{cases} -u_3 + u_7 = 8 \\ u_2 u_7 = 75 \end{cases}$ d). $\begin{cases} u_5 = 4u_3 \\ u_2 u_6 = -11 \end{cases}$

Lời giải

.....

.....

.....

Bài 14. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết

a). $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = 36 \\ u_2 u_3 = 54 \end{cases}$.

b). $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1 u_2 u_3 = -21 \end{cases}$.

c). $\begin{cases} u_1 + u_7 = 4 \\ u_3^2 + u_7^2 = 122 \end{cases}$.

d). $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \end{cases}$.

Lời giải

Bài 15. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết

$$\begin{array}{llll} \text{a).} \begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ S_{12} = 129 \end{cases} & \text{b).} \begin{cases} S_{16} = \frac{152\sqrt{2}}{3} \\ S_{21} = 3S_{10} \end{cases} & \text{c).} \begin{cases} u_1 = 1 \\ 5S_5 = S_{10} \end{cases} & \text{d).} \begin{cases} S_5 - S_2 - u_5 = 0,1 \\ S_4 + u_7 = 0,1 \end{cases} \end{array}$$

Lời giải

Bài 16. Cho cấp số cộng (u_n) , biết $u_{2015} + u_{2016} = 500$. Tính tổng 4030 số hạng đầu tiên của cấp số cộng.

Lời giải

Bài 17. Cho một cấp số cộng có bảy số hạng với công sai dương và số hạng thứ tư bằng 11. Hãy tìm các số hạng còn lại của cấp số cộng đó, biết hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 6.

Lời giải

Bài 18. Tính tổng của tất cả các số hạng của một cấp số cộng có số hạng đầu bằng 102, số hạng thứ hai bằng 105 và số hạng cuối bằng 999.

Lời giải

Bài 19. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2 \end{cases} (n \geq 1)$. Xét dãy số (v_n) , biết $v_n = u_{n+1} - u_n$, $(n \geq 1)$.

a). Chứng minh (v_n) là một cấp số cộng. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó.

b). Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

Lời giải

Bài 20. Cho cấp số cộng $u_1, u_2, \dots, u_n$, trong đó $u_i \neq 0$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Chứng minh rằng

a). $\frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \dots + \frac{1}{u_{n-1} u_n} = \frac{n-1}{u_1 u_n}$.

b). $\frac{1}{u_1 u_n} + \frac{1}{u_2 u_{n-1}} + \dots + \frac{1}{u_{n-1} u_2} + \frac{1}{u_n u_1} = \frac{2}{u_1 + u_n} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} \right)$.

Lời giải

Bài 21. Cho cấp số cộng $u_1, u_2, \dots, u_n$, trong đó $u_i > 0$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2}} + \frac{1}{\sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{u_{n-1}} + \sqrt{u_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_1}}$.

Lời giải

Bài 22. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình

a). $x^3 - 3x^2 + mx + b = 0$ có ba nghiệm lập thành cấp số cộng.

b). $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m+1 = 0$ có bốn nghiệm lập thành cấp số cộng.

Lời giải

[illegible]

SBÀI 4.

CẤP SỐ NHÂN

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa.

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn) mà trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó và một số q không đổi, nghĩa là:

$$(u_n) \text{ là cấp số nhân } u_{n+1} = u_n \cdot q \quad (\forall n \geq 1)$$

- Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.
- Đặt biệt
 - ✧ Khi $q = 0$, cấp số nhân có dạng $u_1, 0, 0, \dots, 0, \dots$
 - ✧ Khi $q = 1$, cấp số nhân có dạng $u_1, u_1, u_1, \dots, u_1, \dots$
 - ✧ Khi $u_1 = 0$, thì với mọi q , cấp số nhân có dạng $0, 0, 0, \dots, 0, \dots$

Ví dụ 1. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là cấp số nhân

a). $u_n = (-1)^n \cdot 3^{3n+1}$.

b). $u_n = n + 3$.

Lời giải

2. Số hạng tổng quát.

Định lý 1: Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội $q \neq 0$ thì số hạng tổng quát (u_n) của nó được tính bởi công thức:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \quad (\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$$

Ví dụ 2. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) , biết

a). $\begin{cases} u_5 - u_1 = 15 \\ u_4 - u_2 = 6 \end{cases}$.

b). $\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_3 + u_5 = 240 \end{cases}$.

c). $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$.

d). $\begin{cases} u_2 - u_4 + u_5 = 10 \\ u_3 - u_5 + u_6 = 20 \end{cases}$.

Lời giải

[illegible]

3. Tính chất các số hạng.

Định lý 2: Nếu (u_n) là một cấp số nhân thì kể từ số hạng thứ hai, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số nhân hữu hạn) bằng tích của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là:

$$u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1} \text{ với } (\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$$

Hệ quả: Nếu là ba số a, b, c khác 0 , thì “ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số nhân khi và chỉ khi

$$b^2 = a.c$$

Ví dụ 3. Các số $x+6y$, $5x+2y$, $8x+y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $x-1$, $y+2$, $x-3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tìm x và y .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

4. Tổng n số hạng đầu tiên.

Định lý 3: Giả sử (u_n) là một cấp số nhân có công bội $q \neq 0$.

Gọi $S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ (S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân).

Ta có:

$$\begin{cases} S_n = nu_1 & ; q = 1 \\ S_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q} & ; q \neq 1 \end{cases}$$

Ví dụ 4. Cho cấp số nhân có $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$.

- a). Tìm số hạng đầu tiên và công bội. b). Tính tổng của 10 số hạng đầu tiên.
c). Tổng của bao nhiêu số hạng đầu sẽ bằng 765. d). Số 12288 là số hạng thứ mấy?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B. PHÂN DẠNG VÀ BÀI TẬP MINH HỌA.

DẠNG 1: Chứng minh một dãy (u_n) là cấp số nhân.

1. Phương pháp.

- **Cách 1.** Chứng minh $u_{n+1} = u_n \cdot q$ ($\forall n \geq 1$) trong đó q là một số không đổi.
- **Cách 2.** Nếu $u_n \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì ta lập tỉ số $T = \frac{u_{n+1}}{u_n}$
- ✎ T là hằng số thì $u_n \neq 0$ là cấp số nhân có công bội $q = T$.
- ✎ T phụ thuộc vào n thì (u_n) không là cấp số nhân.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 1. Xét trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân, (nếu có) tìm công bội của cấp số nhân đó:

a). $u_n = (-3)^{2n+1}$

b). $u_n = (-1)^n \cdot 5^{3n+2}$

c). $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$

d). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{9}{u_n} \end{cases}$

Lời giải.

Bài tập 2. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9, (n \geq 1) \end{cases}$

a). Chứng minh dãy số (v_n) với $v_n = u_n + 3, n \geq 1$ là một cấp số nhân.

b). Tìm công thức tổng quát của dãy số (u_n) .

Lời giải

- a). Chứng minh dãy số (v_n) với $v_n = \frac{u_n}{n}$ là một cấp số nhân.
b). Tìm công thức tổng quát của dãy số (u_n) .

Lời giải

[illegible]

 **Bài tập 4.** Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}, \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

- a). Chứng minh dãy số (v_n) với $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$ là một cấp số nhân.
- b). Tìm công thức tổng quát của dãy số (u_n) .

Lời giải

[illegible]

b). Tìm công thức tổng quát của dãy số (v_n) .

Câu 2. Trong các dãy số sau, dãy số nào không phải là một cấp số nhân?

- A. 2; 4; 8; 16; ... B. 1; -1; 1; -1; ... C. 1^2 ; 2^2 ; 3^2 ; 4^2 ; ... D. a ; a^3 ; a^5 ; ... ($a \neq 0$).

Lời giải.

Câu 3. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

- A. 1; 2; 4; 8; ... B. 3 ; 3^2 ; 3^3 ; 3^4 ; ... C. 4 ; 2 ; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; ... D. $\frac{1}{\pi}$; $\frac{1}{\pi^2}$; $\frac{1}{\pi^4}$; ...

Lời giải.

Câu 4. Dãy số $u_n = 3 + 3^n$ là một cấp số nhân với:

- A. Công bội là 3 và số hạng đầu tiên là 1.
B. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 1.
C. Công bội là 4 và số hạng đầu tiên là 2.
D. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 2.

Lời giải.

Câu 5. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -2$ và $q = -5$. Viết bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

A. -2; 10; 50; -250. B. -2; 10; -50; 250. C. -2; -10; -50; -250. D. -2; 10; 50; 250.

Lời giải.

Câu 6. Cho cấp số nhân $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots; \frac{1}{4096}$. Hỏi số $\frac{1}{4096}$ là số hạng thứ mấy trong cấp số nhân đã cho?

A. 11. B. 12. C. 10. D. 13.

Lời giải.

Câu 7. Một cấp số nhân có hai số hạng liên tiếp là 16 và 36. Số hạng tiếp theo là:

A. 720. B. 81. C. 64. D. 56.

Lời giải.

Câu 8. Dãy số nào sau đây là cấp số nhân?

A. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 1, n \geq 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = -3u_n, n \geq 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3, n \geq 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} u_1 = \frac{\pi}{2} \\ u_n = \sin\left(\frac{\pi}{n-1}\right), n \geq 1 \end{cases}$

Lời giải.

Câu 9. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3}{2} \cdot 5^n$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (u_n) không phải là cấp số nhân.

B. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 5$ và số hạng đầu $u_1 = \frac{3}{2}$.

C. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = 5$ và số hạng đầu $u_1 = \frac{15}{2}$.

D. (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = \frac{5}{2}$ và số hạng đầu $u_1 = 3$.

Lời giải.

Câu 10. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$.

B. $u_n = \frac{1}{3^n} - 1$.

C. $u_n = n + \frac{1}{3}$.

D. $u_n = n^2 - \frac{1}{3}$.

Lời giải.

Câu 11. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n = 7 - 3n$.

B. $u_n = 7 - 3^n$.

C. $u_n = \frac{7}{3n}$.

D. $u_n = 7 \cdot 3^n$.

Lời giải.

Câu 12. Cho dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_n \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

A. $u_1; u_3; u_5; \dots$

B. $3u_1; 3u_2; 3u_3; \dots$

C. $\frac{1}{u_1}; \frac{1}{u_2}; \frac{1}{u_3}; \dots$

D. $u_1 + 2; u_2 + 2; u_3 + 2; \dots$

Lời giải.

Câu 13. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là 3; 9; 27; 81; Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số nhân đã cho.

A. $u_n = 3^{n-1}$.

B. $u_n = 3^n$.

C. $u_n = 3^{n+1}$.

D. $u_n = 3 + 3^n$.

Lời giải.

Câu 14. Tìm x để các số 2; 8; x ; 128 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x = 14$.

B. $x = 32$.

C. $x = 64$.

D. $x = 68$.

Lời giải.

Câu 15. Với giá trị x nào dưới đây thì các số -4 ; x ; -9 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân?

A. $x = 36$.

B. $x = -\frac{13}{2}$.

C. $x = 6$.

D. $x = -36$.

Lời giải.

Câu 16. Tìm $b > 0$ để các số $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{b}$; $\sqrt{2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $b = -1$.

B. $b = 1$.

C. $b = 2$.

D. $b = -2$.

Lời giải.

Câu 17. Tìm tất cả giá trị của x để ba số $2x-1$; x ; $2x+1$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

B. $x = \pm \frac{1}{3}$.

C. $x = \pm \sqrt{3}$.

D. $x = \pm 3$.

Lời giải.

Câu 18. Tìm x để ba số $1+x$; $9+x$; $33+x$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x=1$.

B. $x=3$.

C. $x=7$.

D. $x=3$; $x=7$.

Lời giải.

Câu 19. Với giá trị x, y nào dưới đây thì các số hạng lần lượt là -2 ; x ; -18 ; y theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân?

A. $\begin{cases} x=6 \\ y=-54 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=-10 \\ y=-26 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=-6 \\ y=-54 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=-6 \\ y=54 \end{cases}$

Lời giải.

Câu 20. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là x ; 12 ; y ; 192 . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x=1$; $y=144$.

B. $x=2$; $y=72$.

C. $x=3$; $y=48$.

D. $x=4$; $y=36$.

Lời giải.

Câu 21. Thêm hai số thực dương x và y vào giữa hai số 5 và 320 để được bốn số 5 ; x ; y ; 320 theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\begin{cases} x=25 \\ y=125 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=20 \\ y=80 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=15 \\ y=45 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=30 \\ y=90 \end{cases}$

Lời giải.

Câu 22. Ba số hạng đầu của một cấp số nhân là $x-6$; x và y . Tìm y , biết rằng công bội của cấp số nhân là 6 .

A. $y=216$.

B. $y=\frac{324}{5}$.

C. $y=\frac{1296}{5}$.

D. $y=12$.

Lời giải.

Câu 23. Hai số hạng đầu của của một cấp số nhân là $2x+1$ và $4x^2-1$. Số hạng thứ ba của cấp số nhân là:

- A. $2x-1$. B. $2x+1$. C. $8x^3-4x^2-2x+1$. D. $8x^3+4x^2-2x-1$.

Lời giải.

Câu 24. Một cấp số nhân có 6 số hạng, số hạng đầu bằng 2 và số hạng thứ sáu bằng 486. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho.

- A. $q=3$. B. $q=-3$. C. $q=2$. D. $q=-2$.

Lời giải.

Câu 25. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=-3$ và $q=\frac{2}{3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $u_5=-\frac{27}{16}$. B. $u_5=-\frac{16}{27}$. C. $u_5=\frac{16}{27}$. D. $u_5=\frac{27}{16}$.

Lời giải.

Câu 26. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=2$ và $u_2=-8$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $S_6=130$. B. $u_5=256$. C. $S_5=256$. D. $q=-4$.

Lời giải.

Câu 27. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $q = -2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

- A. Số hạng thứ 5.
C. Số hạng thứ 7.

- B. Số hạng thứ 6.
D. Không là số hạng của cấp số đã cho.

Lời giải.

Câu 28. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$ và $q = -\frac{1}{10}$. Số $\frac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

- A. Số hạng thứ 103.
C. Số hạng thứ 105.

- B. Số hạng thứ 104.
D. Không là số hạng của cấp số đã cho.

Lời giải.

Câu 29. Một cấp số nhân có công bội bằng 3 và số hạng đầu bằng 5. Biết số hạng chính giữa là 32805. Hỏi cấp số nhân đã cho có bao nhiêu số hạng?

- A. 18. B. 17. C. 16. D. 9.

Lời giải.

Câu 30. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_n = 81$ và $u_{n+1} = 9$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $q = \frac{1}{9}$. B. $q = 9$. C. $q = -9$. D. $q = -\frac{1}{9}$.

Lời giải.

Câu 31. Một dãy số được xác định bởi $u_1 = -4$ và $u_n = -\frac{1}{2}u_{n-1}$, $n \geq 2$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số đó là:

A. $u_n = 2^{n-1}$.

B. $u_n = (-2)^{n-1}$.

C. $u_n = -4(2^{-n+1})$.

D. $u_n = -4\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Lời giải.

Câu 32. Một cấp số nhân có số hạng thứ bảy bằng $\frac{1}{2}$, công bội bằng $\frac{1}{4}$. Hỏi số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng bao nhiêu?

A. 4096.

B. 2048.

C. 1024.

D. $\frac{1}{512}$.

Lời giải.

Câu 33. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -6$ và $u_6 = -486$. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho, biết rằng $u_3 > 0$.

A. $q = -3$.

B. $q = -\frac{1}{3}$.

C. $q = \frac{1}{3}$.

D. $q = 3$.

Lời giải.

Câu 34. Cho cấp số nhân $u_1; u_2; u_3; \dots$ với $u_1 = 1$. Tìm công bội q để $4u_2 + 5u_3$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $q = -\frac{2}{5}$.

B. $q = 0$.

C. $q = \frac{2}{5}$.

D. $q = 1$.

Lời giải.

Câu 35. Một cấp số nhân có số hạng thứ hai bằng 4 và số hạng thứ sáu bằng 64, thì số hạng tổng quát của cấp số nhân đó có thể tính theo công thức nào dưới đây?

A. $u_n = 2^{n-1}$.

B. $u_n = 2^n$.

C. $u_n = 2^{n+1}$.

D. $u_n = 2n$.

Lời giải.

Câu 36. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_k = u_1 \cdot q^{k-1}$.

B. $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$.

C. $u_k = \sqrt{u_{k+1} \cdot u_{k+2}}$.

D. $u_k = u_1 + (k-1)q$.

Lời giải.

Câu 37. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 \neq 0$ và $q \neq 0$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $u_7 = u_4 \cdot q^3$.

B. $u_7 = u_4 \cdot q^4$.

C. $u_7 = u_4 \cdot q^5$.

D. $u_7 = u_4 \cdot q^6$.

Lời giải.

Câu 38. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 \neq 0$ và $q \neq 0$. Với $1 < k < m$, đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A. $u_m = u_k \cdot q^k$.

B. $u_m = u_k \cdot q^m$.

C. $u_m = u_k \cdot q^{m-k}$.

D. $u_m = u_k \cdot q^{m+k}$.

Lời giải.

Câu 39. Cho một cấp số nhân có 15 số hạng. Đẳng thức nào sau đây là sai?

A. $u_1 \cdot u_{15} = u_2 \cdot u_{14}$.

B. $u_1 \cdot u_{15} = u_5 \cdot u_{11}$.

C. $u_1 \cdot u_{15} = u_6 \cdot u_9$.

D. $u_1 \cdot u_{15} = u_{12} \cdot u_4$.

Lời giải.

Câu 40. Cho một cấp số nhân có n số hạng ($n > k > 55$). Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $u_1 \cdot u_n = u_2 \cdot u_{n-1}$.

B. $u_1 \cdot u_n = u_5 \cdot u_{n-4}$.

C. $u_1 \cdot u_n = u_{55} \cdot u_{n-55}$.

D. $u_1 \cdot u_n = u_k \cdot u_{n-k+1}$.

Lời giải.

Câu 41. Một cấp số nhân có ba số hạng là a, b, c (theo thứ tự đó) trong đó các số hạng đều khác 0 và công bội $q \neq 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{bc}$.

B. $\frac{1}{b^2} = \frac{1}{ac}$.

C. $\frac{1}{c^2} = \frac{1}{ba}$.

D. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$.

Lời giải.

DẠNG 2: Xác định số hạng đầu, công bội, xác định số hạng thứ k , tính tổng của n số hạng đầu tiên:

1. Phương pháp.

- Dựa vào giả thuyết, ta lập một hệ phương trình chứa công bội q và số hạng đầu u_1 , giải hệ phương trình này tìm được q và u_1 .
- Để xác định số hạng thứ k , ta sử dụng công thức: $u_k = u_1 \cdot q^{k-1}$.
- Để tính tổng của n số hạng, ta sử dụng công thức: $S_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1$.
- Nếu $q = 1$ thì $u_1 = u_2 = u_3 = \dots = u_n$, do đó $S_n = nu_1$.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 6. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

a).
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases}$$

b).
$$\begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43. \end{cases}$$

Lời giải

Bài tập 7. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) , biết

a).
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ S_8 = \frac{3^8 - 1}{2} \end{cases}$$

b).
$$\begin{cases} S_4 = 40 \\ S_8 = 680 \end{cases}$$

Lời giải

 Bài tập 8. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) , biết

$$\text{a). } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 49 \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \frac{1}{u_5} \right) \\ u_1 + u_3 = 35 \end{cases}$$

b).
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 64 \end{cases}.$$

Lời giải

 **Bài tập 9.** Tìm công bội của cấp số nhân (u_n) , biết

a).
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 26 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 364 \end{cases}$$

b).
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85 \end{cases}$$

Lời giải

$$\text{a). } \begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$$

$$\text{b). } \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$$

c). $\begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases}$

$$\text{d). } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 64 \end{cases}$$

$$\text{e). } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} = \frac{7}{12} \end{cases}$$

$$\text{f). } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 30 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 340 \end{cases}$$

[illegible]

Câu 42. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n) , biết $\begin{cases} u_6 = 192 \\ u_7 = 384 \end{cases}$.

A. $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = 2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 3 \end{cases}$

D. $\begin{cases} u_1 = 5 \\ q = 3 \end{cases}$

Lời giải.

Câu 43. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 - u_2 = 36 \\ u_5 - u_3 = 72 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ q = 2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} u_1 = 6 \\ q = 2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 3 \end{cases}$

Lời giải.

Câu 44. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_{20} = 8u_{17} \\ u_1 + u_5 = 272 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $q = 2$.

B. $q = -4$.

C. $q = 4$.

D. $q = -2$.

Lời giải.

Câu 45. Một cấp số nhân có năm số hạng mà hai số hạng đầu tiên là các số dương, tích của số hạng đầu và số hạng thứ ba bằng 1, tích của số hạng thứ ba và số hạng cuối bằng $\frac{1}{16}$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đã cho.

A. $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ q = 2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$

C. $\begin{cases} u_1 = -2 \\ q = -\frac{1}{2} \end{cases}$

D. $\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2} \\ q = -2 \end{cases}$

Lời giải.

Câu 46. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$. Tính u_3 .

A. $u_3 = 10$.

B. $u_3 = 15$.

C. $u_3 = 20$.

D. $u_3 = 25$.

Lời giải.

Câu 47. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 64 \end{cases}$. Tính u_2 .

A. $u_2 = 4$.

B. $u_2 = 6$.

C. $u_2 = 8$.

D. $u_2 = 10$.

Lời giải.

Câu 48. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 49 \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \frac{1}{u_5} \right) \\ u_1 + u_3 = 35 \end{cases} \text{ Tính } P = u_1 + 4q^2.$$

A. $P = 24$.

B. $P = 29$.

C. $P = 34$.

D. $P = 39$.

Lời giải.

Câu 49. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 26 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 364 \end{cases}$. Tìm q biết rằng $q > 1$.

A. $q = \frac{5}{4}$.

B. $q = 4$.

C. $q = \frac{4}{3}$.

D. $q = 3$.

Lời giải.

Dạng 3: Tìm cấp số nhân (u_n) dựa vào các tính chất.

1. Phương pháp.

- Gọi $u_1, u_1q, u_1q^2, \dots$ là cấp số nhân cần tìm hoặc $a, b, c, \dots$ là cấp số nhân cần tìm.
- Dựa vào tính chất $b^2 = a.c$ để thiết lập phương trình.

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 11. Tìm a, b biết rằng: $1, a, b$ là 3 số hạng liên tiếp của cấp số cộng và $1, a^2, b^2$ là 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Bài tập 12. Tìm số hạng đầu của CSN biết công bội bằng 3, tổng số các số hạng là 728 và số hạng cuối bằng 486.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Bài tập 13. Cho 3 số tạo thành một cấp số cộng có tổng 21. Nếu thêm 2, 3, 9 lần lượt vào số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba tạo thành một cấp số nhân. Tìm 3 số đó.

Lời giải

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Bài tập 14. Cho 3 số dương có tổng là 65 lập thành một cấp số nhân tăng, nếu bớt một đơn vị ở số hạng thứ nhất và 19 đơn vị ở số hạng thứ ba ta được một cấp số cộng. Tìm 3 số đó.

[illegible]

[illegible]

Tel: 0935.660.880

[illegible][illegible][illegible]112 *Lớp Toán Thầy-Diệp Tuấn*

Bài tập 21. Cho một cấp số nhân có bảy số hạng, số hạng thứ tư bằng 6 và số hạng thứ bảy gấp 243 lần số hạng thứ hai. Hãy tìm số hạng thứ hai của cấp số nhân đó.

Lời giải

Bài tập 22. Tìm ba số khác nhau có tổng bằng 114 có thể coi là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, hoặc coi là các số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ hai mươi lăm của một cấp số cộng. Tìm các số đó.

Lời giải

 **Bài tập 23.** Tìm ba số khác nhau tạo thành cấp số cộng có tổng bằng 6, biết rằng nếu hoán đổi vị trí số hạng thứ nhất và số hạng thứ hai đồng thời giữ nguyên số hạng thứ ba ta được cấp số nhân.

Lời giải

[illegible]

Bài tập 24. Cho bốn số nguyên dương, trong đó ba số đầu lập thành cấp số cộng, ba số sau lập thành cấp số nhân. Biết rằng tổng của số hạng đầu và cuối bằng 37, tổng của hai số hạng giữa bằng 36. Tìm bốn số đó.

Lời giải

[illegible]

Bài tập 25. Cho ba số khác nhau lập thành cấp số cộng, bình phương các số đó lập thành cấp số nhân. Tìm các số đó.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 26. Tìm các số dương x, y sao cho $2x+1, 2x-y, 2y+1$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $(y+3)^2, xy+4, (x-1)^2$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tìm x và y .

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 50. Các số $x+6y, 5x+2y, 8x+y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $x-1, y+2, x-3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính $x^2 + y^2$.

- A. $x^2 + y^2 = 40$. B. $x^2 + y^2 = 25$. C. $x^2 + y^2 = 100$. D. $x^2 + y^2 = 10$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Câu 51. Ba số $x; y; z$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội q khác 1; đồng thời các số $x; 2y; 3z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0. Tìm giá trị của q .

- A. $q = \frac{1}{3}$. B. $q = \frac{1}{9}$. C. $q = -\frac{1}{3}$. D. $q = -3$.

Lời giải.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

D. $P = 32$.

[illegible]

D. $q = \frac{3}{2}$.

[illegible]

D. $q = \frac{21 + \sqrt{73}}{24}$.

[illegible]

Câu 55. Bốn góc của một tứ giác tạo thành cấp số nhân và góc lớn nhất gấp 2^7 lần góc nhỏ nhất. Tổng của góc lớn nhất và góc bé nhất bằng:

- A. 56° . B. 102° . C. 252° . D. 168° .

Lời giải.

Dạng 4: Tính tổng của một dãy (u_n) là cấp số nhân.

1. Phương pháp.

Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q .

➤ Áp dụng công thức tổng $S_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ ($q \neq 1$)

Đặc biệt: Đối với dãy số $S = a + aa + aaa + \dots + \underset{n \text{ số } a}{aa \dots a}$ ta làm như sau.

➤ Nếu $a = 10$ thì áp dụng trực tiếp $S_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ ($q \neq 1$) với $u_1 = 10, q = 10$

➤ Nếu $a \neq 10$ ($a = 1, 2, \dots, 9, 11$) thì ta tách về số 10 bằng cách

$$\begin{aligned} 9 &= 10 - 1 \\ 99 &= 100 - 1 = 10^2 - 1 \\ 999 &= 1000 - 1 = 10^3 - 1 \end{aligned}$$

➤ **Hoặc** $8 = \frac{8}{9} \cdot 9 = \frac{8}{9}(10 - 1)$

$$88 = \frac{8}{9} \cdot 99 = \frac{8}{9}(100 - 1) = \frac{8}{9}(10^2 - 1)$$

...

2. Bài tập minh họa.

Bài tập 27. Tính các tổng sau

a). $S = 1 + \pi + \pi^2 + \dots + \pi^{100}.$

b). $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}.$

Lời giải

Bài tập 28. Tính các tổng sau

a). $S = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots9}_{n \text{ số } 9}.$

b). $S = 7 + 77 + 777 + \dots + \underbrace{77\dots7}_{n \text{ số } 7}.$

c). $S = 15 + 155 + 1555 + \dots + \underbrace{1555\dots5}_{n \text{ số } 5}$

Lời giải

Bài tập 29. Tính các tổng sau

a). $S = 1 + 2.3 + 3.3^2 + \dots + (n+1).3^n.$

b). $S = 1 + 4.5 + 7.5^2 + \dots + (3n-2).5^n.$

Lời giải

Bài tập 30. Tính tổng $S = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \dots + \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^2$ với $x \neq 0$.

Lời giải

Bài tập 31. Tính các tổng sau:

a). $S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$

b). $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$

c). $S_n = \left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(9 + \frac{1}{9}\right)^2 + \dots + \left(3^n + \frac{1}{3^n}\right)^2$

d). $S_n = 6 + 66 + 666 + \dots + \underbrace{666\dots6}_{n \text{ số } 6}$

Lời giải

3. Bài tập rèn luyện

 **Bài 1.** Cho tổng $A = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots1}_n$.

Chứng minh rằng $A = \frac{10^{n+1} - 9(n+1) - 1}{81}$

Lời giải

 **Bài 2.** Tính tổng $B = 7 + 77 + 777 + \dots + \underbrace{777\dots7}_n$

Lời giải

 **Bài 3.** Cho cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 \neq 0$ và $q \neq 0, q \neq \pm 1$. Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên. Chứng minh: $S_n(S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$

Lời giải

6. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 56. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và $q = -2$. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

A. $S_{10} = -511$.

B. $S_{10} = -1025$.

C. $S_{10} = 1025$.

D. $S_{10} = 1023$.

Lời giải.

Câu 57. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là 1; 4; 16; 64; ... Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n = 4^{n-1}$.

B. $S_n = \frac{n(1+4^{n-1})}{2}$.

C. $S_n = \frac{4^n - 1}{3}$.

D. $S_n = \frac{4(4^n - 1)}{3}$.

Lời giải.

Câu 58. Cho cấp số nhân có các số hạng lần lượt là $\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; \dots; 2048$. Tính tổng S của tất cả các số hạng của cấp số nhân đã cho.

A. $S = 2047,75$.

B. $S = 2049,75$.

C. $S = 4095,75$.

D. $S = 4096,75$.

Lời giải.

Câu 59. Tính tổng $S = -2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - \dots + (-2)^{n-1} + (-2)^n$ với $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$.

A. $S = 2n$.

B. $S = 2^n$.

C. $S = \frac{-2(1-2^n)}{1-2}$.

D. $S = -2 \cdot \frac{1-(-2)^n}{3}$.

Lời giải.

Câu 60. Một cấp số nhân có 6 số hạng với công bội bằng 2 và tổng số các số hạng bằng 189. Tìm số hạng cuối u_6 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_6 = 32$.

B. $u_6 = 104$.

C. $u_6 = 48$.

D. $u_6 = 96$.

Lời giải.

Câu 61. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -6$ và $q = -2$. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho bằng 2046. Tìm n .

A. $n = 9$.

B. $n = 10$.

C. $n = 11$.

D. $n = 12$.

Lời giải.

Câu 62. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = 5^n - 1$. Tìm số hạng thứ 4 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_4 = 100$.

B. $u_4 = 124$.

C. $u_4 = 500$.

D. $u_4 = 624$.

Lời giải.

Câu 63. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = \frac{3^n - 1}{3^{n-1}}$. Tìm số hạng thứ 5 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_5 = \frac{2}{3^4}$.

B. $u_5 = \frac{1}{3^5}$.

C. $u_5 = 3^5$.

D. $u_5 = \frac{5}{3^5}$.

Lời giải.

Câu 64. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -2$ và $u_5 = 54$. Tính tổng 1000 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho.

A. $S_{1000} = \frac{1-3^{1000}}{4}$.

B. $S_{1000} = \frac{3^{1000}-1}{2}$.

C. $S_{1000} = \frac{3^{1000}-1}{6}$.

D. $S_{1000} = \frac{1-3^{1000}}{6}$.

Lời giải.

Câu 65. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng của hai số hạng đầu tiên bằng 4, tổng của ba số hạng đầu tiên bằng 13. Tính tổng của năm số hạng đầu tiên của cấp số nhân đã cho, biết công bội của cấp số nhân là một số dương.

A. $S_5 = \frac{181}{16}$.

B. $S_5 = 141$.

C. $S_5 = 121$.

D. $S_5 = \frac{35}{16}$.

Lời giải.

Câu 66. Gọi $S = 9 + 99 + 999 + \dots + 999\dots 9$ (n số 9) thì S nhận giá trị nào sau đây?

A. $S = \frac{10^n - 1}{9}$.

B. $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{9} \right)$.

C. $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) - n$.

D. $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) + n$.

Lời giải.

Câu 67. Gọi $S = 1 + 11 + 111 + \dots + 111\dots 1$ (n số 1) thì S nhận giá trị nào sau đây?

A. $S = \frac{10^n - 1}{81}$.

B. $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{81} \right)$.

C. $S = 10 \left(\frac{10^n - 1}{81} \right) - n$.

D. $S = \frac{1}{9} \left[10 \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) - n \right]$.

Lời giải.

Câu 68. Biết rằng $S = 1 + 2.3 + 3.3^2 + \dots + 11.3^{10} = a + \frac{21.3^b}{4}$. Tính $P = a + \frac{b}{4}$.

A. $P = 1$.

B. $P = 2$.

C. $P = 3$.

D. $P = 4$.

Lời giải.

Vấn đề 5: Chứng minh đẳng thức dựa vào tính chất của cấp số nhân

1. Phương pháp.

- Dựa vào tính chất a, b, c là cấp số nhân $\Leftrightarrow b^2 = a.c$
- Biến đổi về trái thành về phải.
- Hoặc biến đổi tương đương $A = B \Leftrightarrow A - B = 0$

2. Ví dụ minh họa.

Bài tập 32. Cho a, b, c, d là bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân. Chứng minh:

- a). $(ab + bc + ca)^3 = abc(a + b + c)^3$ b). $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$
- c). $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$ d). $(b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2 = (a - d)^2$
- e). $a^2 b^2 c^2 \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) = a^3 + b^3 + c^3$

Lời giải

Bài tập 33. Cho ba số dương a, b, c lập thành CSN.

Chứng minh: $\frac{1}{3}(a + b + c), \sqrt{\frac{1}{3}(ab + bc + ca)}, \sqrt[3]{abc}$ cũng lập thành CSN.

Lời giải

Bài tập 34. Cho 3 số a, b, c là 3 số hạng liên tiếp của cấp số nhân.
 Chứng minh rằng: $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$

Lời giải

Bài tập 35. Cho a, b, c là CSC thỏa $a + b + c = \frac{3\pi}{4}$. Chứng minh $\tan a, \tan b, \tan c$ theo thứ tự đó lập thành CSN.

Lời giải

Bài tập 36. Chứng minh rằng nếu a, b, c lập thành một cấp số nhân khi và chỉ khi $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ lập thành một cấp số nhân.

Lời giải

Bài tập 37. Cho a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Chứng minh rằng

c). $(a+b+c)(a-b+c) = a^2 + b^2 + c^2.$

[illegible]

$$\text{c). } a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3.$$

[illegible]

Bài tập 39. Cho ba số $\frac{2}{b-a}, \frac{1}{b}, \frac{2}{b-c}$ ($b \neq 0, b \neq a, b \neq c$) tạo thành cấp số cộng. Chứng minh a, b, c tạo thành cấp số nhân.

Lời giải

Bài tập 40. Trong tam giác ABC có $AB = c, BC = a, CA = b$. Các cạnh a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng

a). $\sin A + \sin C = 2 \sin B$.

b). $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Bài tập 41. Cho A, B, C là ba góc của một tam giác.

Chứng minh rằng nếu $\tan \frac{A}{2}, \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2}$ lập thành một cấp số cộng thì $\cos A, \cos B, \cos C$ cũng lập thành một cấp số cộng.

Lời giải

[illegible]

 Bài tập 42. Trong tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.

Chứng minh rằng nếu $\cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}, \cot \frac{C}{2}$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng thì ba cạnh a, b, c theo thứ tự đó cũng lập thành một cấp số cộng.

Lời giải

[illegible]

 **Bài tập 43.** Cho tam giác ABC thỏa mãn $\tan A, \tan B, \tan C$ theo thứ tự lập thành cấp số công.

Chứng minh rằng

a). $\tan A \cdot \tan C = 3$.

b). $\cos(A - C) = 2 \cos B.$

Lời giải

Bài tập 44. Trong tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.
 Chứng minh rằng nếu $\cot A$, $\cot B$, $\cot C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng thì ba cạnh a^2 , b^2 , c^2 theo thứ tự đó cũng lập thành một cấp số cộng.

Lời giải

TOÁN THỰC TẾ

7. Câu hỏi trắc nghiệm.

Câu 69. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp (có diện tích là $12\,288\text{ m}^2$). Tính diện tích mặt trên cùng.

- A. 6 m^2 . B. 8 m^2 . C. 10 m^2 . D. 12 m^2 .

Lời giải.

Câu 70. Một du khách vào chuồng đua ngựa đặt cược, lần đầu đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cược trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách trên thắng hay thua bao nhiêu?

- A. Hòa vốn. B. Thua 20000 đồng. C. Thắng 20000 đồng. D. Thua 40000 đồng.

Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	