

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG
GTLN, GTNN
HÀM HỢP, HÀM LIÊN KẾT
HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI

(Mức độ VD-VDC)
ÔN THI TNTHPT

GTLN, GTNN HÀM HỢP, HÀM LIÊN KẾT, HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI

Dạng 1: GTLN, GTNN liên quan hàm số khi biết BBT, đồ thị

Dạng 2: GTLN, GTNN hàm liên kết khi biết BBT, đồ thị

Dạng 3: GTLN, GTNN hàm số có tham số không chứa giá tuyệt đối

Dạng 4: GTLN, GTNN hàm trị tuyệt đối chứa tham số.

A. KIẾN THỨC CHUNG

1. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D .

- Số M gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu:
$$\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$$

Kí hiệu: $M = \max_{x \in D} f(x)$ hoặc $M = \max_D f(x)$.

- Số m gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu:
$$\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$$

Kí hiệu: $m = \min_{x \in D} f(x)$ hoặc $m = \min_D f(x)$

2. Định lý

Mọi hàm số **liên tục** trên một **đoạn** đều có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên đoạn đó.

Quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm liên tục trên một đoạn

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $[a; b]$ ta làm như sau:

* Tìm các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ thuộc $(a; b)$ sao cho tại đó hàm số f có đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.

* Tính $f(x_1); f(x_2); \dots; f(x_n); f(a); f(b)$.

* So sánh các giá trị tìm được.

Số lớn nhất trong các giá trị đó là giá trị lớn nhất của hàm f trên đoạn $[a; b]$, số nhỏ nhất trong các giá trị đó là giá trị nhỏ nhất của hàm f trên đoạn $[a; b]$.

* **Nếu:**

$$+) y' > 0, \forall x \in [a; b] \Rightarrow \begin{cases} \max_{[a; b]} f(x) = f(b) \\ \min_{[a; b]} f(x) = f(a) \end{cases}$$

$$+) y' < 0, \forall x \in [a; b] \Rightarrow \begin{cases} \max_{[a; b]} f(x) = f(a) \\ \min_{[a; b]} f(x) = f(b) \end{cases}$$

Chú ý

* Quy tắc trên chỉ được sử dụng trong các bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **đoạn**.

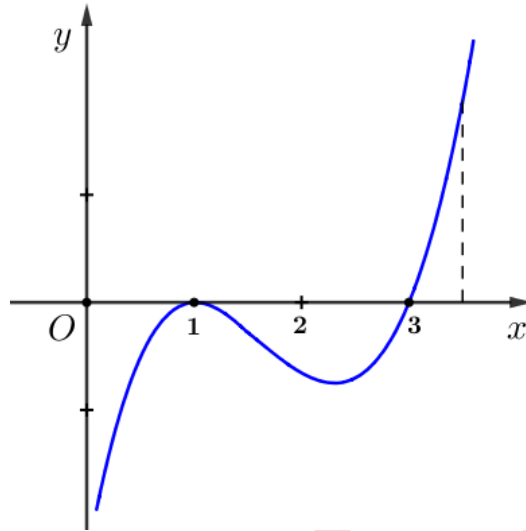
* Đối với bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **khoảng (nửa khoảng)** thì ta phải tính đạo hàm, **lập bảng biến thiên** của hàm f rồi dựa vào nội dung của bảng biến thiên để suy ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm f trên **khoảng (nửa khoảng)** đó.

* Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một **khoảng (nửa khoảng)** có thể không tồn tại.

* Với bài toán **đặt ẩn phụ** ta phải tìm điều kiện của ẩn phụ.

B. BÀI TẬP**Dạng 1: GTLN, GTNN liên quan hàm số khi biết BBT, đồ thị**

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây?

A. $x_0 = 0$.B. $x_0 = 3$.C. $x_0 = 1$.D. $x_0 = \frac{1}{2}$.**Lời giải****Chọn D**

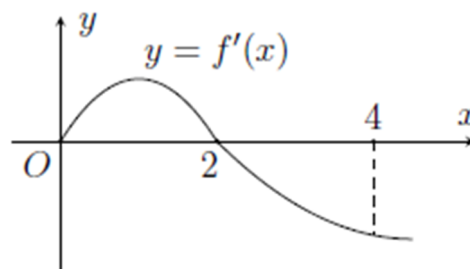
Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x) \leq 0$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$.

Do đó hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$.

Từ đó ta có GTLN của hàm số $y = f(x)$ đạt tại $x = \frac{1}{2}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.

Biết $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$.



Giá trị nhỏ nhất m , giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ là

A. $m = f(4), M = f(1)$.B. $m = f(4), M = f(2)$.C. $m = f(1), M = f(2)$.D. $m = f(0), M = f(2)$.**Lời giải**

Chọn B

Bảng biến thiên

x	0	1	2	3	4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$			$f(2)$		

Diagram showing the function values at the endpoints and the critical point: $f(0) \rightarrow f(1) \rightarrow f(2) \rightarrow f(3) \rightarrow f(4)$. Arrows indicate the path from $f(0)$ to $f(1)$ to $f(2)$ and from $f(2)$ to $f(3)$ to $f(4)$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$ ta thấy $\max_{[0;4]} f(x) = f(2)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } f(0) + f(1) - 2f(2) &= f(4) - f(3) \Leftrightarrow f(1) + f(3) - 2f(2) = f(4) - f(0) \\ &\Leftrightarrow f(1) - f(2) + f(3) - f(2) = f(4) - f(0). (*) \end{aligned}$$

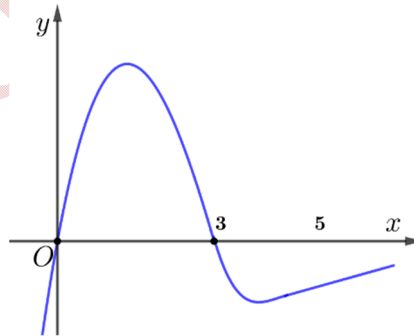
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;4]$ ta thấy

$$\begin{cases} f(1) < f(2) \\ f(3) < f(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) - f(2) < 0 \\ f(3) - f(2) < 0 \end{cases} \Rightarrow f(1) - f(2) + f(3) - f(2) < 0.$$

$$\text{Từ } (*) \Rightarrow f(4) - f(0) < 0 \Leftrightarrow f(4) < f(0).$$

Do đó: $\min_{[0;4]} f(x) = f(4)$. **Chọn B**

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(3) = f(5) - f(4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$.



A. $m = f(5), M = f(1)$.

B. $m = f(1), M = f(3)$.

C. $m = f(5), M = f(3)$.

D. $m = f(0), M = f(3)$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên

x	0	1	3	4	5
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f(x)$	$f(0)$		$f(3)$		$f(5)$

Câu 4: Từ bảng biến thiên ta thấy $M = f(3)$ nên loại đáp án A.

Mặt khác

$$f(1) < f(3); f(4) < f(3) \Rightarrow f(1) + f(4) < 2f(3) \Leftrightarrow 2f(3) - f(1) - f(4) > 0.$$

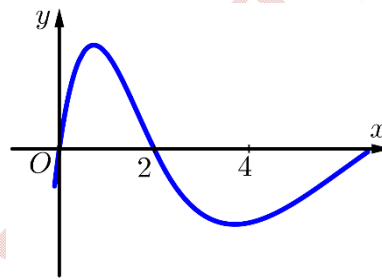
Mà $f(0) + f(1) - 2f(3) = f(5) - f(4)$ nên

$$f(0) - f(5) = 2f(3) - f(1) - f(4) > 0 \Leftrightarrow f(0) > f(5).$$

Suy ra $m = f(5)$.

Vậy $m = f(5)$, $M = f(3)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập số thực và có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho bởi hình bên dưới. Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ là



A. $f(1)$.

B. $f(0)$.

C. $f(2)$.

D. $f(4)$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ như sau:

x	0	1	2	3	4
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f(x)$					

Từ bảng biến thiên, ta có nhận xét sau: $\max_{[0;4]} f(x) = f(2)$ và $\min_{[0;4]} f(x) = f(0)$ hoặc $\min_{[0;4]} f(x) = f(4)$.

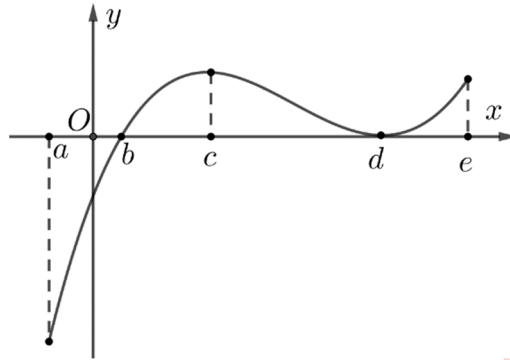
Ta lại có: $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$.

$$\Leftrightarrow f(0) - f(4) = f(2) - f(1) + f(2) - f(3) > 0, \forall x \in [0; 4].$$

Suy ra $f(0) > f(4), \forall x \in [0; 4]$.

Vậy $\min_{[0;4]} f(x) = f(4)$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; e]$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Biết rằng $f(a) + f(c) = f(b) + f(d)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[a; e]$?



A. $\begin{cases} \max_{[a;e]} f(x) = f(a) \\ \min_{[a;e]} f(x) = f(b) \end{cases}$

B. $\begin{cases} \max_{[a;e]} f(x) = f(e) \\ \min_{[a;e]} f(x) = f(b) \end{cases}$

C. $\begin{cases} \max_{[a;e]} f(x) = f(c) \\ \min_{[a;e]} f(x) = f(a) \end{cases}$

D. $\begin{cases} \max_{[a;e]} f(x) = f(d) \\ \min_{[a;e]} f(x) = f(b) \end{cases}$

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên :

x	a	b	c	d	e	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$+$
$f(x)$						

Từ bảng biến thiên $\min_{[a;e]} f(x) = f(b)$ nên loại

C.

$\max_{[a;e]} f(x) = \max \{f(a); f(e)\}$ nên loại

D.

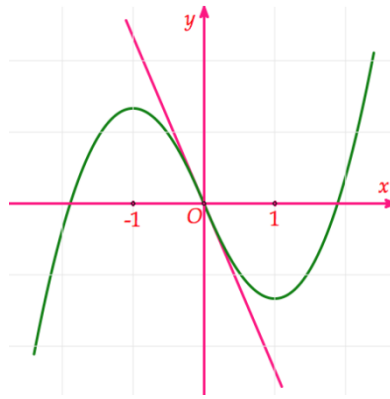
Ta có $f(b) < f(c) < f(d) < f(e)$

Mà $f(a) + f(c) = f(b) + f(d) \Rightarrow f(a) - f(d) = f(b) - f(c) < 0 \Rightarrow f(a) < f(d)$

Có $f(d) < f(e) \Rightarrow f(a) < f(e)$.

Vậy $\max_{[a;e]} f(x) = f(e)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Đường thẳng ở hình vẽ bên là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=0$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f'(x)$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m < -2$.

B. $-2 < m < 0$.

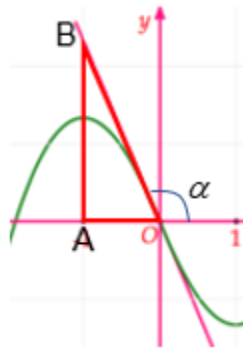
C. $0 < m < 2$.

D. $m > 2$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số nghịch biến trên $(-1;1)$ và đồng biến trên các khoảng còn lại nên $f'(x) < 0, \forall x \in (-1;1)$ và $f'(x) > 0, \forall x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \Rightarrow \min f'(x)$ khi $x \in (-1;1)$.



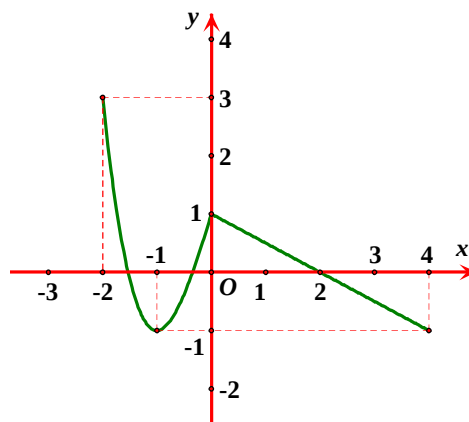
Ta có $m < f'(x)$

Quan sát đồ thị ta thấy $\tan \widehat{AOB} > 2 \Rightarrow \tan \alpha < -2 \Leftrightarrow f'(0) < -2$

Đồng thời ta có $f'(-1) = f'(1) = 0 > -2$

Vậy ta có $\min f'(x) < -2 \Leftrightarrow m < -2$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;4]$ và có đồ thị như hình bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $g(x) = f(2x)$ trên đoạn $[-1;2]$. Giá trị của $M + m$ bằng



A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 2x$ với $x \in [-1;2] \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq t = 2x \leq 4 \Rightarrow t \in [-2;4]$.

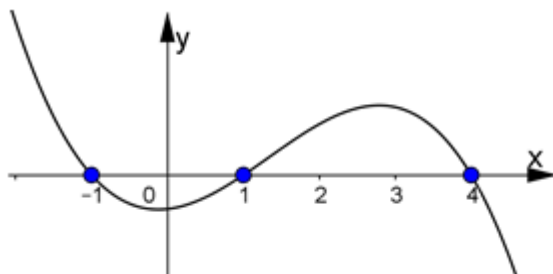
Hàm số trở thành $g(t) = f(t)$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2; 4]$ ta có:

$$M = \max_{[-1;2]} f(2x) = \max_{[-2;4]} f(t) = f(-2) = 3 \text{ và } m = \min_{[-1;3]} f(2x) = \min_{[-2;4]} f(t) = f(-1) = f(4) = -1.$$

Khi đó $M + m = 2$

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ đồng thời có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Tìm tổng của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x^2)$ trên $[-2; 2]$?



A. $f(0) + f(1)$.

B. $f(1) + f(2)$.

C. $f(1) + f(4)$.

D. $f(0) + f(4)$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $g(x) = f(x^2)$.

$$\text{Ta có } g'(x) = 2xf'(x^2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f'(x^2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 < x^2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ x < 0 \\ x^2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ x < -2 \\ -1 < x < 0 \end{cases}.$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$								

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x^2)$ là $g(-1) = g(1) = f(1)$.

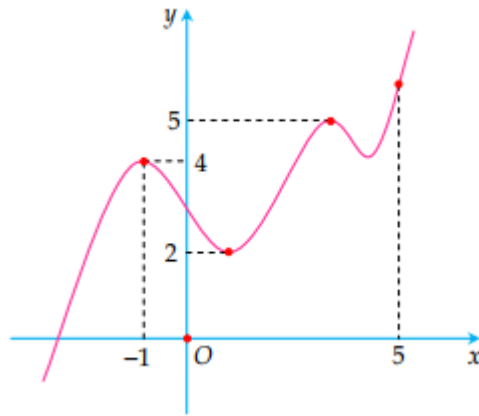
Và $g(-2) = g(2) = f(4)$, $g(0) = f(0)$, do đó $\max_{[-2;2]} g(x) = \max\{f(4), f(0)\}$.

Ta chú ý rằng:

$$\int_0^1 (-f'(x)) dx < \int_1^4 f'(x) dx \Leftrightarrow f(0) - f(1) < f(4) - f(1) \Rightarrow f(0) < f(4).$$

Vậy $\max_{[-2;2]} f(x^2) = f(4)$; $\min_{[-2;2]} f(x^2) = f(1)$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ trên $[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}]$. Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau.



A. $M + m < 7$.

B. $M \cdot m > 7$.

C. $M - m > 3$.

D. $\frac{M}{m} > 2$.

Lời giải

Chọn A

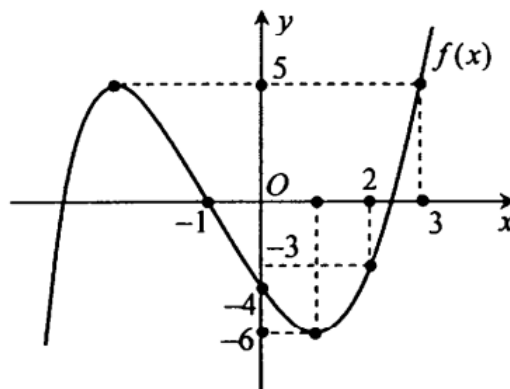
$$\text{Đặt } t = x^2 - 2x, x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right] \Rightarrow t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]$$

Xét hàm $y = f(t), t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]$, từ đồ thị ta có:

$$m = \min_{t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]} f(t) = 2, M = \max_{t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]} f(t) > 5$$

$\Rightarrow m + M > 7$. Vậy A sai.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ lần lượt M và m . Giá trị của biểu thức $T = (M - m)$ bằng

A. 6

B. 7

C. 9

D. 11

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } t = x^2 - 2x \Rightarrow \text{khi } x \in [-1; 2] \text{ thì } t \in [-1; 3]$$

Khi đó việc xét giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ trên đoạn $x \in [-1; 2]$ sẽ tương đương với việc xét giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $t \in [-1; 3]$

$$\text{Dễ thấy } \max_{t \in [-1; 3]} f(t) = f(3) = 5 = M; \min_{t \in [-1; 3]} f(t) = -6 = m$$

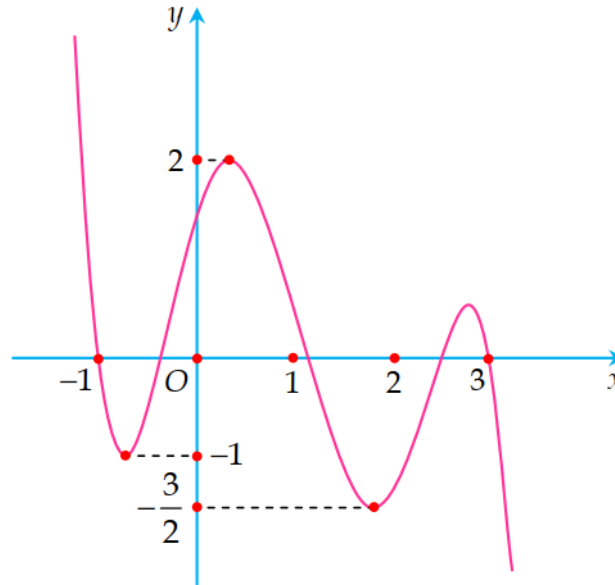
$$\text{Suy ra } M - m = 11$$

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Từ bảng ta có giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ trên đoạn $[-1; \sqrt{2}]$ tại điểm $x = 0$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M và m tương ứng là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(1 - \cos x)$ trên $[0; \frac{3\pi}{2}]$. Giá trị của $M + m$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $1 - \cos x = t$ để thấy $x \in [0; \frac{3\pi}{2}]$ thì $\cos x \in [-1; 1]$ do đó $t \in [0; 2]$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $\max_{t \in [0; 2]} f(t) = 2$ và $\min_{t \in [0; 2]} f(t) = -\frac{3}{2}$ nên $M + m = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	3	-3	4	-2	$+\infty$

Giá trị lớn nhất của hàm số $f(\sin x - 1)$ bằng

A. 4.

B. 3.

C. -3.

D. -2.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sin x - 1 \Rightarrow t \in [-2; 0]$.

Do đó $y = f(\sin x - 1) = f(t)$, $t \in [-2; 0]$.

Từ bảng biến thiên suy ra $\max_{t \in [-2; 0]} f(t) = f(-2) = 3$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-2	$+\infty$	

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(2\cos x + 1)$. Tính $M + m$.

A. 1.

B. -2.

C. -1.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

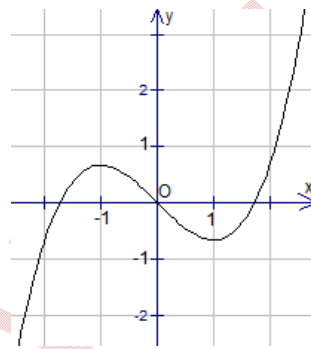
Do $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -1 \leq 2\cos x + 1 \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $t = 2\cos x + 1, t \in [-1; 3]$.

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow \max_{[-1; 3]} f(t) = 1$ và $\min_{[-1; 3]} f(t) = -2$.

$\Rightarrow M + m = 1 + (-2) = -1$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(\frac{\sin x + \sqrt{3}\cos x}{2}\right)$ trên đoạn $\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ bằng

A. $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.B. $f(0)$.C. $f\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.D. $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \frac{\sin x + \sqrt{3}\cos x}{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Vì $x \in \left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right] \Rightarrow x + \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có bảng biến thiên

t	-1	0	1
$f'(t)$	$+$	0	$-$
$f(t)$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(1)$

Ta có: $\max_{\left[\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]} f\left(\frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{2}\right) = \max_{[-1;1]} f(t)$

Hàm số $y = f(t)$ trong đoạn $t \in [-1;1]$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = 0$

Vậy $\max_{\left[\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]} f\left(\frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{2}\right) = \max_{[-1;1]} f(t) = f(0)$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[-2;2]$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(\sin x + \cos x)$ bằng

- A.** $f(-\sqrt{2})$. **B.** $f(\sqrt{2})$. **C.** $f(2)$. **D.** $f(-2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ và $-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

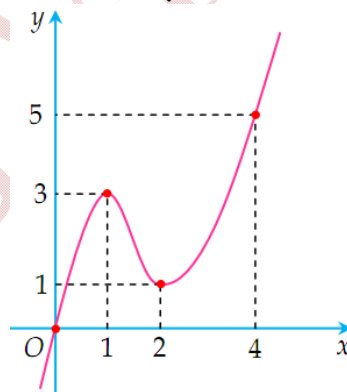
Do đó $\sin x + \cos x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}], \forall x \in \mathbb{R}$.

Vì $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \subset [-2; 2]$ và hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[-2; 2]$ nên hàm số $y = f(\sin x + \cos x)$ nghịch biến trên đoạn $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(\sin x + \cos x)$ bằng $f(-\sqrt{2})$, tại $x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(2(\sin^4 x + \cos^4 x))$. Tổng $M + m$ bằng

- A.** 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

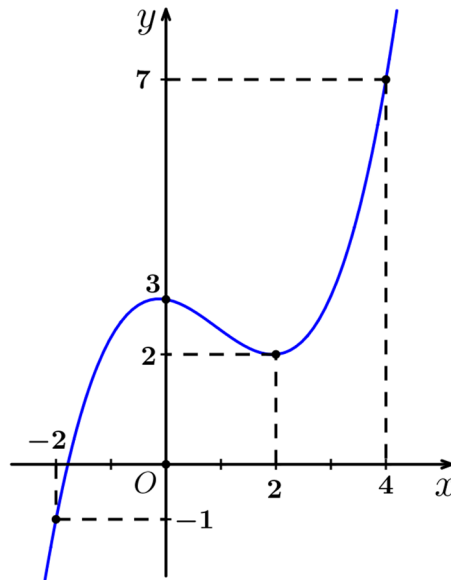
Chọn B

Ta có: $2(\sin^4 x + \cos^4 x) = 2\left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right) = 1 + \cos^2 2x \Rightarrow 1 \leq 2(\sin^4 x + \cos^4 x) \leq 2$

Ta có: $\begin{cases} M = \max_{[1;2]} f(t) = f(1) = 3 \\ m = \min_{[1;2]} f(t) = f(2) = 1 \end{cases}$

Vậy $M + m = 4$.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f[4(\sin^4 x + \cos^4 x)]$.



Giá trị $2M + 3m$ bằng

A. 3.

B. 11.

C. 20.

D. 14.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = 4(\sin^4 x + \cos^4 x) = 4((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x) \\ = 4\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) = 4 - 2\sin^2 2x. \text{ Suy ra } t \in [2; 4].$$

Từ đồ thị ta thấy $M = \max_{\mathbb{R}} g(x) = \max_{[2;4]} f(t) = 7$ và $m = \min_{\mathbb{R}} g(x) = \min_{[2;4]} f(t) = 2$.

Vậy $2M + 3m = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 20$.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3; 5]$ và có bảng biến thiên như sau

x	-3	-2	-1	1	4	5
y'	-	0	+	0	+	+
y	8		5		2	7

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(\cos 2x - 4\sin^2 x + 3)$. Giá trị của $M + m$ bằng

A. 9.

B. 4.

C. 7.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

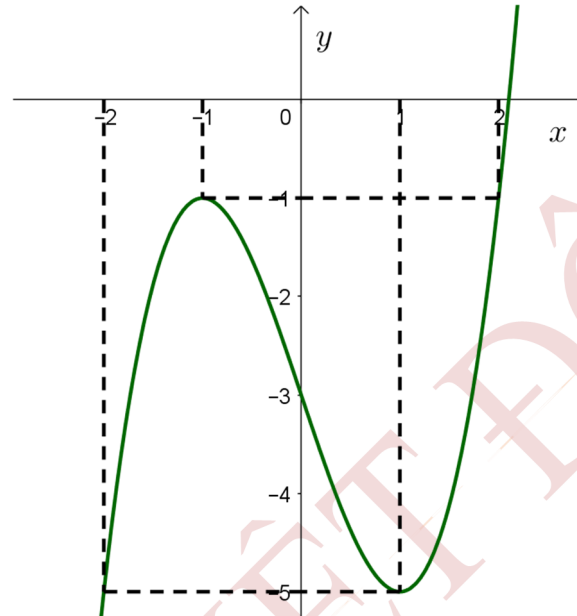
$$\text{Đặt } t = \cos 2x - 4\sin^2 x + 3 \Rightarrow t = 4 - 6\sin^2 x.$$

Vì $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ nên $t \in [-2; 4]$.

Suy ra $g(x) = f(t)$ với $t \in [-2; 4]$.

Từ bảng biến thiên ta có $\begin{cases} M = \max_{[-2;4]} f(t) = 5 \\ m = \min_{[-2;4]} f(t) = -1 \end{cases}$ nên $M + m = 4$.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m là các giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(\sqrt{2x - x^2})$. Giá trị của $2M - m$ bằng.



A. -1.

B. -3.

C. -5.

D. -2.

Lời giải

Chọn A

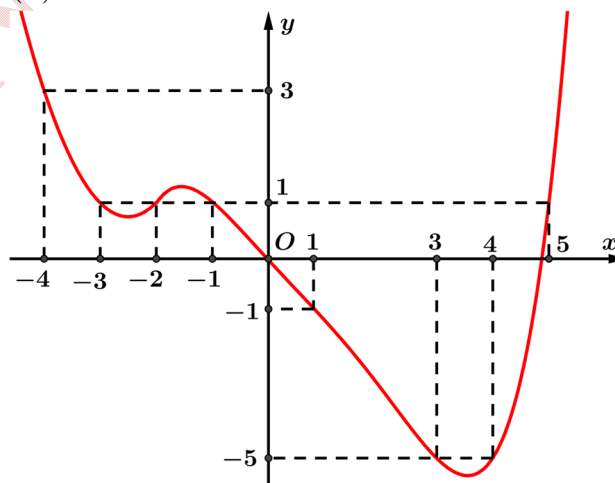
Đặt $t = \sqrt{2x - x^2}$ ta có $0 \leq t \leq 1$

Hàm số $y = f(\sqrt{2x - x^2})$ trở thành $y = f(t)$ và $0 \leq t \leq 1$

Dựa vào đồ thị ta suy ra $M = -3, m = -5$.

Vậy $2M - m = -1$.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(\left|3 - 2\sqrt{6x - 9x^2}\right|\right)$.

Giá trị của biểu thức $T = 3M + 4m$ bằng

A. $T = -27$.

B. $T = 23$.

C. $T = -3$.

D. $T = -23$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } t = 3 - 2\sqrt{6x - 9x^2}, x \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$$

$$t' = \frac{-6 + 18x}{\sqrt{6x - 9x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

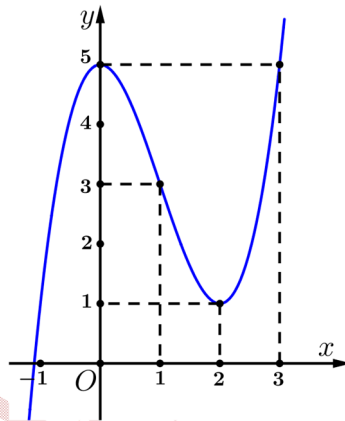
$$t(0) = 3; t\left(\frac{1}{3}\right) = 1; t\left(\frac{2}{3}\right) = 3$$

$$\Rightarrow t \in [1; 3] \Rightarrow |t| \in [1; 3]$$

$$y = f\left(\left|3 - 2\sqrt{6x - 9x^2}\right|\right) = f(|t|), |t| \in [1; 3]$$

Dựa vào đồ thị ta suy ra $M = -1, m = -5 \Rightarrow T = 3(-1) + 4(-5) = -23$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ bên.



Xét hàm số $g(x) = f\left(\frac{x^3 + x^2 + x}{x^4 + 2x^2 + 1} + \frac{5}{4}\right)$, đặt $m = \min_{\mathbb{R}} g(x)$; $M = \max_{\mathbb{R}} g(x)$. Trong các khẳng định sau,

khẳng định nào đúng

A. $M + m = 6$.

B. $2M + m = 2$.

C. $2M - m = 5$.

D. $M - m = 4$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } g(x) = f\left(\frac{x^3 + x^2 + x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{5}{4}\right) \Rightarrow g'(x) = \frac{(1-x)(x+1)^3}{(x^2 + 1)^3} \cdot f'\left(\frac{x^3 + x^2 + x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{5}{4}\right)$$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(1-x)(x+1)^3}{(x^2 + 1)^3} = 0 \\ f'\left(\frac{x^3 + x^2 + x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{5}{4}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ f'\left(\frac{x^3 + x^2 + x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{5}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị của $y = f(x)$, ta suy ra $f' \left(\frac{x^3 + x^2 + x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{5}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^3 + x^2 + x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{5}{4} = 0 \\ \frac{x^3 + x^2 + x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{5}{4} = 2 \end{cases}$.

Xét hàm số $u = \frac{x^3 + x^2 + x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{5}{4}$; với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $u' = \frac{(1 - x^2)(x + 1)^2}{(x^2 + 1)^3} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

- Giới hạn $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u = \frac{5}{4}$.

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
u'	$-$	0	$+$	0	$-$
u	$\frac{5}{4}$			2	
		1			$\frac{5}{4}$

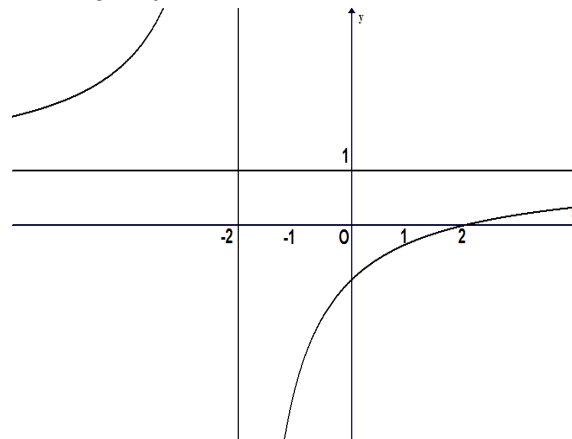
Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra phương trình $u = 0$ vô nghiệm, phương trình $u = 2$ có nghiệm kép $x = 1$.

Ta lập được bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\frac{145}{64}$	3	1	$\frac{145}{64}$	

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $m = \min_{\mathbb{R}} g(x) = 1$; $M = \max_{\mathbb{R}} g(x) = 3$. Do đó $2M - m = 5$.

Câu 24: Cho hàm bậc nhất $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(f(x))$ trên đoạn $[-2; -1]$.
 Tính $M + m$?

A. $-\frac{1}{2}$.

B. 6.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta suy ra:

+) Tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c} = 1 \Rightarrow a = c$.

+) Tiệm cận đứng: $x = -\frac{d}{c} = -2 \Rightarrow d = 2c$.

+) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; -1) \Rightarrow \frac{b}{d} = -1 \Leftrightarrow b = -d = -2c$.

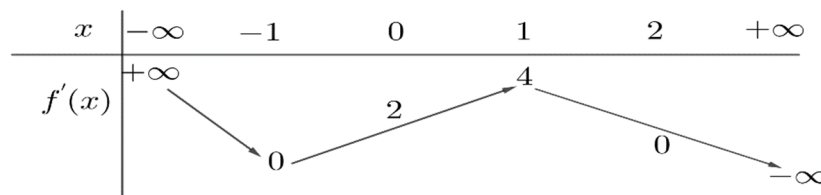
Do đó: $f(x) = \frac{cx - 2c}{cx + 2c} = \frac{x - 2}{x + 2}$.

Khi đó: $g(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x-2}{x+2} - 2}{\frac{x-2}{x+2} + 2} = \frac{x-2-2x-4}{x-2+2x+4} = \frac{-x-6}{3x+2}$.

Ta có $g'(x) = \frac{16}{(3x+2)^2} > 0 \forall x \in [-2; -1]$.

Vậy $\begin{cases} M = g(-1) = 5 \\ m = g(-2) = 1 \end{cases} \Rightarrow M + m = 6$.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có bảng biến thiên như sau:



Biết rằng $f(-1) = \frac{10}{3}$, $f(2) = 6$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

A. $\frac{10}{3}$.

B. $\frac{820}{27}$.

C. $\frac{730}{27}$.

D. 198.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$

$$g'(x) = 3[f^2(x) - 1] \cdot f'(x), \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f^2(x) = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ bảng biến thiên, ta có: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in [-1; 2] \\ x = 2 \in [-1; 2] \end{cases}$

Và $f'(x) \geq 0, \forall x \in [-1; 2]$ nên $f(x)$ đồng biến trên $[-1; 2] \Rightarrow f(x) \geq f(-1) = \frac{10}{3}$

$\Rightarrow f(x) > 1 \Rightarrow f^2(x) > 1, \forall x \in [-1; 2]$ nên (2) vô nghiệm.

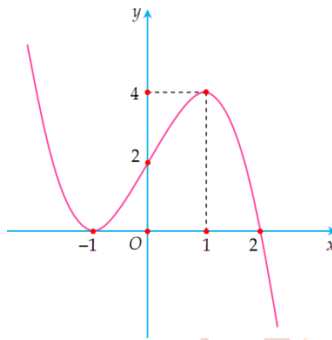
Do đó, $g'(x) = 0$ chỉ có 2 nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

Ta có $g(-1) = f^3(-1) - 3f(-1) = \left(\frac{10}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{730}{27}$.

$g(2) = f^3(2) - 3f(2) = 6^3 - 3(6) = 198$.

Vậy $\min_{[-1; 2]} g(x) = g(-1) = \frac{730}{27}$.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có đồ thị như hình vẽ.



Biết rằng $f(-1) = \frac{13}{4}, f(2) = 6$. Tổng các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$ trên $[-1; 2]$ bằng?

A. $\frac{1573}{64}$.

B. 198.

C. $\frac{37}{4}$.

D. $\frac{14245}{64}$.

Lời giải

Chọn A

Bảng biến thiên:

x	-1	2	
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	$\frac{13}{4}$		

Ta có $g'(x) = 3f^2(x)f'(x) - 3f'(x)$.

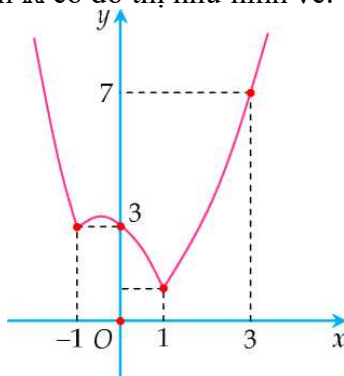
Xét trên đoạn $[-1; 2]$ có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(x)[f^2(x) - 1] = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	-1	2	
$g'(x)$	0	+	0
$g(x)$	$g(-1)$	$g(2)$	

Suy ra $\min_{[-1; 2]} g(x) = g(-1) = f^3(-1) - 3f(-1) = \frac{1573}{64}$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ:



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(x) - 2|^3 - 3(f(x) - 2)^2 + 5$. Tích $M.m$ bằng

A. 2.

B. 3.

C. 54.

D. 55.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta có $\max_{[-1;3]} f(x) = f(3) = 7$; $\min_{[-1;3]} f(x) = f(1) = 1$ ($0 < 1 < 2$).

Đặt $t = |f(x) - 2| \Rightarrow t \in [0; 5]$

Ta có $y = |f(x) - 2|^3 - 3(f(x) - 2)^2 + 5 = t^3 - 3t^2 + 5 = g(t)$

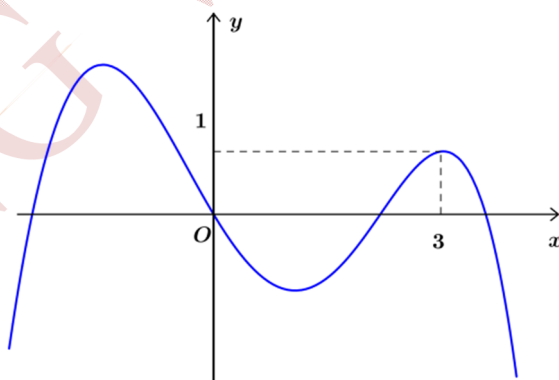
$$g'(t) = 3t^2 - 6t \Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$M = \max_{[0;5]} g(t) = \max\{g(0); g(2); g(5)\} = g(5) = 55$$

$$m = \min_{[0;5]} g(t) = \min\{g(0); g(2); g(5)\} = g(2) = 1$$

Vậy $M.m = 55$

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi S là tập các giá trị của x sao cho hàm số $g(x) = \frac{2f(x) - 1}{2f^2(x) - 2f(x) + 1}$ đạt giá trị lớn nhất. Số các phần tử của S là



A. 4.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $g(x)$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đặt $t = f(x)$ từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra $t \in (-\infty; \alpha]$ với $\alpha > 1$.

$$\text{Khi đó } g(x) = h(t) = \frac{2t - 1}{2t^2 - 2t + 1}.$$

Xét hàm $h(t) = \frac{2t - 1}{2t^2 - 2t + 1}$ trên $(-\infty; \alpha]$.

Ta có $h'(t) = \frac{-4t^2 + 4t}{(2t^2 - 2t + 1)^2}$; $h'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \in (-\infty; \alpha] \\ t = 1 \in (-\infty; \alpha] \end{cases}$.

Bảng biến thiên

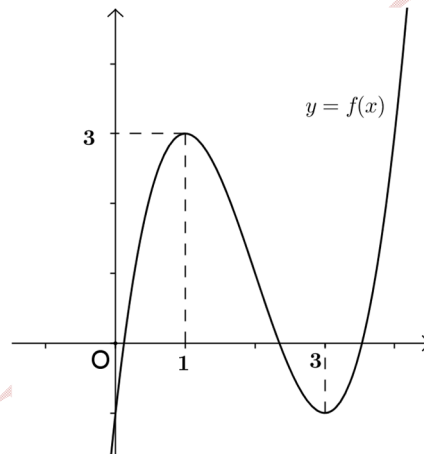
t	$-\infty$		0		1		α
$h'(t)$		-	0	+	0	-	
$h(t)$	0				1		$h(\alpha)$

$\Rightarrow \max_{\mathbb{R}} g(x) = \max_{(-\infty; \alpha]} h(t) = 1$ khi $t = 1 \Leftrightarrow f(x) = 1$.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra phương trình $f(x) = 1$ có 3 nghiệm.

Vậy tập S có 3 phần tử.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị của x sao cho hàm số $g(x) = \frac{f(f(x)) - 1}{f^2(f(x)) - f(f(x)) + 1}$ đạt giá trị lớn nhất. Số phần tử của T là

A. 1.

B. 3.

C. 7.

D. 5.

Lời giải

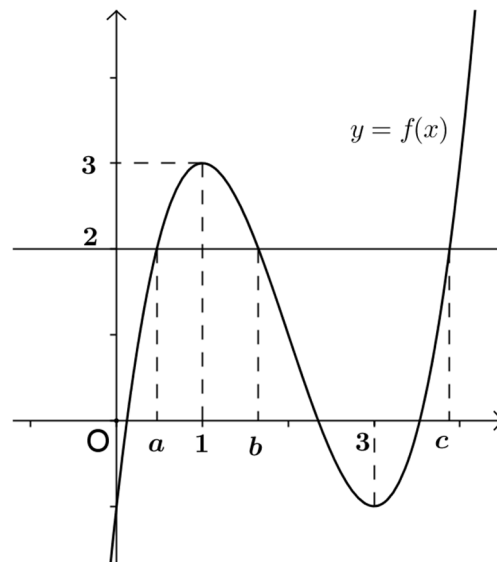
Chọn C

Đặt $\begin{cases} g(x) = g \\ t = f(f(x)) \end{cases}$. Ta có $g = \frac{t-1}{t^2-t+1} \Leftrightarrow g.t^2 - (g+1).t + (g+1) = 0$.

Để tồn tại số thực t thì $\Delta = (g+1)^2 - 4g(g+1) \geq 0 \Leftrightarrow (g+1)^2 - 4g(g+1) \geq 0 \Leftrightarrow (1-3g)(g+1) \geq 0$
 $\Leftrightarrow -1 \leq g \leq \frac{1}{3}$.

Do đó $g(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{3}$ khi

$\frac{t-1}{t^2-t+1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow f(f(x)) = 2$.



Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f(f(x)) = 2$ tương đương

$$\begin{cases} f(x) = a, & 0 < a < 1 & (1) \\ f(x) = b, & 1 < b < 3 & (2) \\ f(x) = c, & 3 < c & (3) \end{cases}$$

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của ĐTHS $y = f(x)$ và $y = a$ ($0 < a < 1$) nên có 3 nghiệm phân biệt.

Số nghiệm của phương trình (2) là số giao điểm của ĐTHS $y = f(x)$ và $y = b$ ($1 < b < 3$) nên có 3 nghiệm phân biệt.

Số nghiệm của phương trình (3) là số giao điểm của ĐTHS $y = f(x)$ và $y = c$ ($c > 3$) nên có 1 nghiệm.

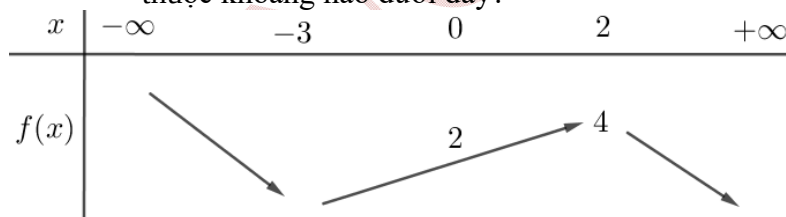
Các nghiệm tìm được phân biệt nhau nên tập T có tất cả 7 phần tử.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ và $f''(x) < 0, \forall x \in (0; +\infty)$. Biết a, x thay đổi trên đoạn $[0; 2]$ và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = \frac{\left[(f'(x))^2 + 1 \right] \left[2f'(0) + (a-x)f'(a) + 6 \right]}{\left[f(2 - \sqrt{4-2x}) + f(x) \right]^2 \left[f(2 - \sqrt{4-2x}) + f(a) \right]}$$

bằng $\frac{m}{n}$ (phân số tối giản). Tổng $m + n$

thuộc khoảng nào dưới đây?



A. (20; 25).

B. (95; 145).

C. (45; 75).

D. (75; 95).

Lời giải

Chọn C

$$\text{Có } S = \frac{\left[(f'(x))^2 + 1 \right] \left[2f'(0) + (a-x)f'(a) + 6 \right]}{\left[f(2 - \sqrt{4-2x}) + f(x) \right]^2 \left[f(2 - \sqrt{4-2x}) + f(a) \right]}$$

Ta có $x \in [0; 2] \Rightarrow 2 - \sqrt{4-2x} \in [0; 2]$. Mặt khác $f''(x) < 0, \forall x \in [0; 2]$.

Kết hợp với bảng biến thiên ta có

$$\Rightarrow \begin{cases} f(2 - \sqrt{4 - 2x}) \leq f(2) = 4 \\ f'(x) \geq f'(2) = 0 \\ f(x) \leq f(2) = 4 \end{cases}$$

Có $2f'(0) + (a-x)f'(a) + 6 \geq 2f'(0) + (a-2)f'(a) + 6$, với $x \in [0; 2]$.

$$\text{Suy ra } S \geq \frac{2f'(0) + (a-x)f'(a) + 6}{8^2[4 + f(a)]} \geq \frac{1}{64} \cdot \frac{2f'(0) + (a-2)f'(a) + 6}{4 + f(a)} \quad (1).$$

$$\text{Ta chứng minh cho } \frac{2f'(0) + (a-2)f'(a) + 6}{4 + f(a)} \geq 1 \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow f(a) + (2-a)f'(a) - 2f'(0) - 2 \leq 0 \quad (*)$$

Xét hàm số $g(a) = f(a) + (2-a)f'(a) - 2f'(0) - 2$, $a \in [0; 2]$

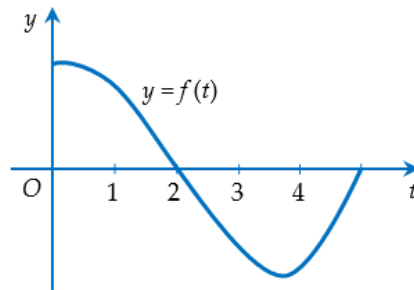
Có $g'(a) = (2-a)f''(a) \leq 0, \forall a \in [0; 2] \Rightarrow g(a) \leq g(0) = 0$

$\Rightarrow (*)$ đúng $\Rightarrow (2)$ đúng.

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow S \geq \frac{1}{64} \Rightarrow m+n=65.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x=2 \\ a=0 \end{cases}$

Câu 31: Xét hàm số $F(x) = \int_2^x f(t) dt$ trong đó hàm số $y = f(t)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Trong các giá trị dưới đây, giá trị nào là lớn nhất?



A. $F(1)$.

B. $F(2)$.

C. $F(3)$.

D. $F(0)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } F'(x) = \left(\int_2^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

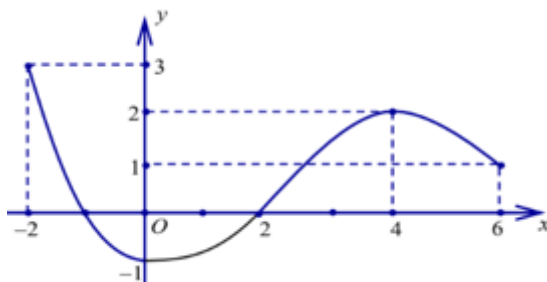
Xét trên đoạn $[0; 3]$, ta thấy $F'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy trên $[0; 2]$ hàm số $F(x)$ đồng biến nên $F(0) < F(2)$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy trên $[2; 3]$ hàm số $F(x)$ nghịch biến nên $F(3) < F(2)$.

Vậy $F(2)$ là giá trị lớn nhất.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng



- A.** $\max_{[-2;6]} f(x) = f(6)$. **B.** $\max_{[-2;6]} f(x) = f(-1)$. **C.** $\max_{[-2;6]} f(x) = f(2)$. **D.** $\max_{[-2;6]} f(x) = f(-2)$

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra ta có bảng biến thiên

x	-2	-1	2	6	
y'	+	0	-	0	+
y		$f(-1)$	$f(2)$	$f(6)$	

Diagram illustrating the function values and their relationships:

- $f(-2)$ is connected to $f(-1)$ by an arrow pointing up and right.
- $f(-1)$ is connected to $f(2)$ by an arrow pointing down and right.
- $f(2)$ is connected to $f(6)$ by an arrow pointing up and right.

$$\text{Mặt khác, lại có: } -\int_{-1}^2 f'(x) dx < \int_2^6 f'(x) dx \Leftrightarrow f(x) \Big|_{-1}^2 < f(x) \Big|_2^6$$

$$\Leftrightarrow -f(2) + f(-1) < f(6) - f(2) \Leftrightarrow f(-1) < f(6)$$

$$\text{Suy ra } \max_{[-2;6]} f(x) = f(6).$$

Dạng 2: GTLN, GTNN hàm liên kết khi biết BBT, đồ thị

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(0) = 3$, $f'(2) = -2018$ và bảng xét dấu của $f''(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(x + 2017) + 2018x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x_0 thuộc khoảng nào sau đây ?

- A.** $(0; 2)$. **B.** $(-\infty; -2017)$. **C.** $(-2017; 0)$. **D.** $(2017; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Hàm số } y = f(x + 2017) + 2018x$$

$$\text{Đặt } t = x + 2017 \Rightarrow x = t - 2017$$

$$\text{Ta được: } y = g(t) = f(t) + 2018t - 2017 \cdot 2018$$

$$g'(t) = f'(t) + 2018$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = -2018$$

Từ bảng xét dấu đề cho của hàm $f''(x)$ và $f'(0) = 3$, $f'(2) = -2018$ ta có bảng biến thiên của hàm $f'(t)$:

t	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f''(t)$		+	0	-	0	+	
$f'(t)$	$-\infty$		3		-2018		$+\infty$

Suy ra phương trình $f'(t) = -2018$ có hai nghiệm là 2 (nghiệm kép) và a với $a < 0$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(t)$:

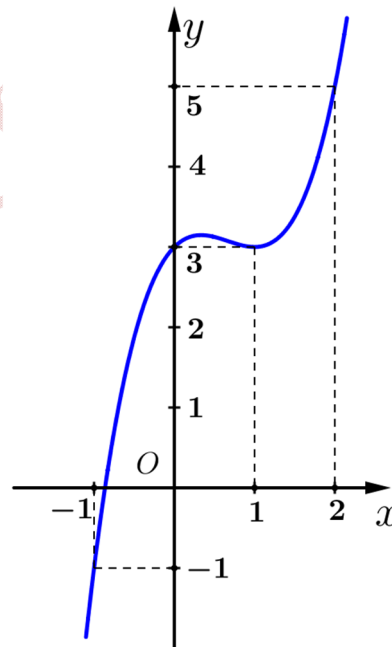
t	$-\infty$		a		2		$+\infty$
$g'(t)$		-	0	+	0	+	
$g(t)$	$+\infty$						$+\infty$

(Chọn $t = 3 \in (2; +\infty) \Rightarrow g'(t) = f'(3) + 2018 > 0$. Suy ra: trên khoảng $(2; +\infty)$ thì $g'(x) > 0$)

Suy ra hàm số $g(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = a \Leftrightarrow x = a - 1017$.

Vì $a < 0$ nên $x < -1017$.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như dưới đây



Tìm giá trị lớn nhất $\max_{[-1;2]} g(x)$ của hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - x$ trên đoạn $[-1;2]$.

- A. $\max_{[-1;2]} g(x) = g(1)$. B. $\max_{[-1;2]} g(x) = g(-1)$. C. $\max_{[-1;2]} g(x) = g(2)$. D. $\max_{[-1;2]} g(x) = g(0)$.

Lời giải

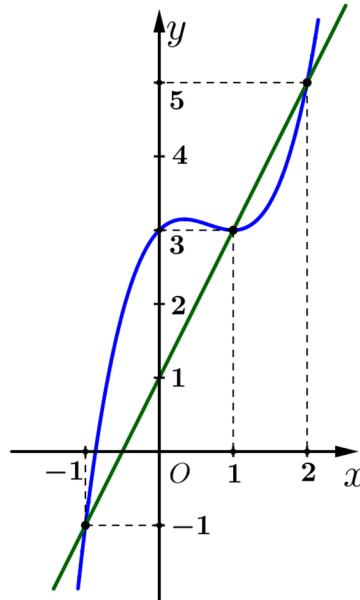
Chọn A

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - x$ trên đoạn $[-1; 2]$.

Ta có $g'(x) = f'(x) - 2x - 1$.

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x + 1$.

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ với đường thẳng $y = 2x + 1$.



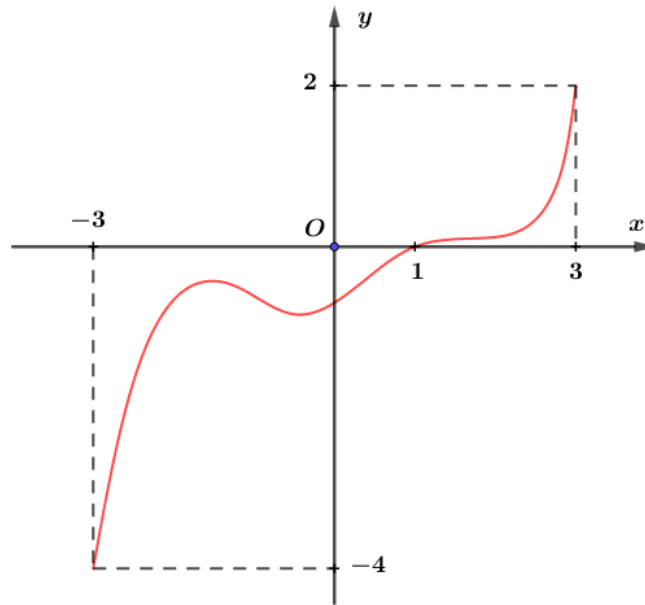
Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f'(x) = 2x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	-1	1	2
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$g(-1)$	$g(1)$	$g(2)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\max_{[-1; 2]} g(x) = g(1)$.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x-1)^2$.



Khi đó $y = g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3; 3]$ tại

A. $x = -3$.

B. $x = 3$.

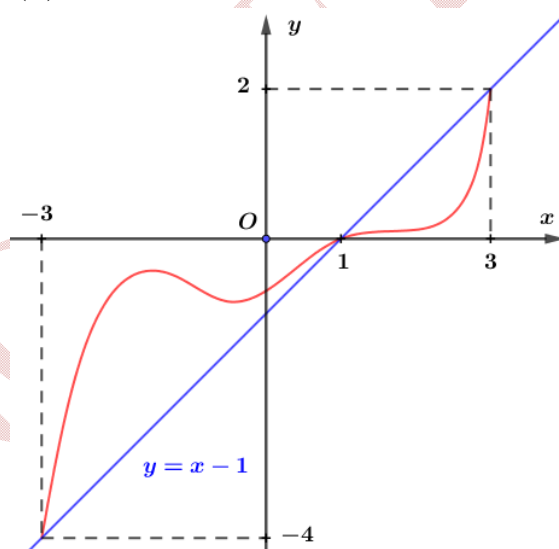
C. $x = 0$.

D. $x = 1$.

Lời giải.

Chọn A

Ta có $g(x) = 2f(x) - (x-1)^2 \Rightarrow g'(x) = 2(f'(x) - (x-1))$. Vẽ đồ thị hàm số $y = x-1$ trên cùng hệ trục tọa độ với đồ thị hàm số $y = f'(x)$.



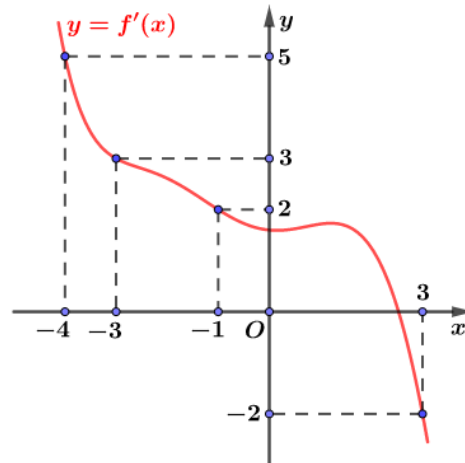
Dựa vào đồ thị ta thấy

$+ \int_{-3}^1 g'(x) dx > 0 \Rightarrow g(1) > g(-3); \int_1^3 g'(x) dx < 0 \Rightarrow g(1) > g(3)$. Do đó $y = g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3; 3]$ tại $x = 3$ hoặc $x = -3$.

+ Phân hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x); y = x-1; x = -3; x = 1$ có diện tích lớn hơn phân hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x); y = x-1; x = 1; x = 3$ nên $\int_{-3}^1 |g'(x)| dx > \int_1^3 |g'(x)| dx \Rightarrow g(3) > g(-3)$.

Vậy $y = g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-3; 3]$ tại $x = -3$.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây. Trên $[-4;3]$, hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x = -3$.B. $x = -4$.C. $x = 3$.D. $x = -1$.

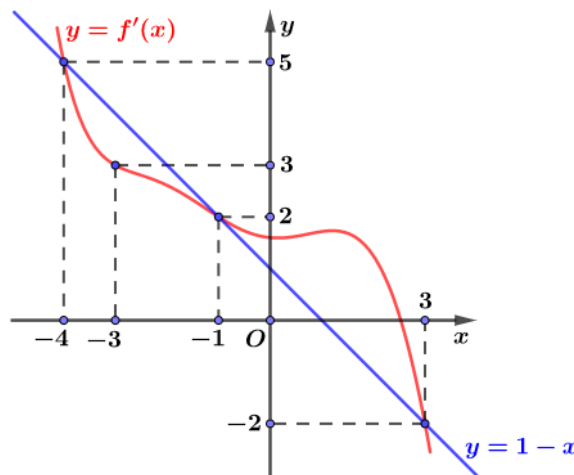
Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$ trên $[-4;3]$.

Ta có: $g'(x) = 2f'(x) - 2(1-x)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1 - x$. Trên đồ thị hàm số $f'(x)$ ta vẽ thêm đường thẳng $y = 1 - x$.



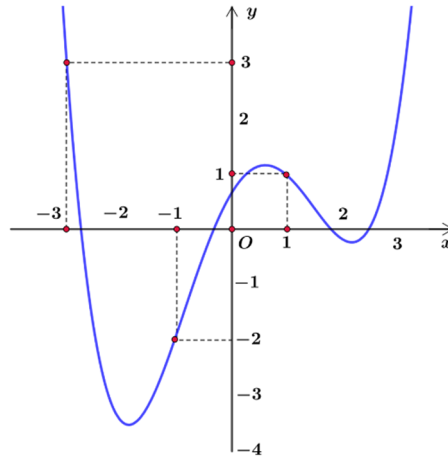
Từ đồ thị ta thấy $f'(x) = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	-4		-1		3
$g'(x)$	0	-	0	+	0
$g(x)$	$g(-4)$				
			$g(-1)$		
				$g(3)$	

Vậy $\min_{[-4;3]} g(x) = g(-1) \Leftrightarrow x = -1$.

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(1)$.

B. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$.

C. $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$.

D. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

Lời giải

Chọn D

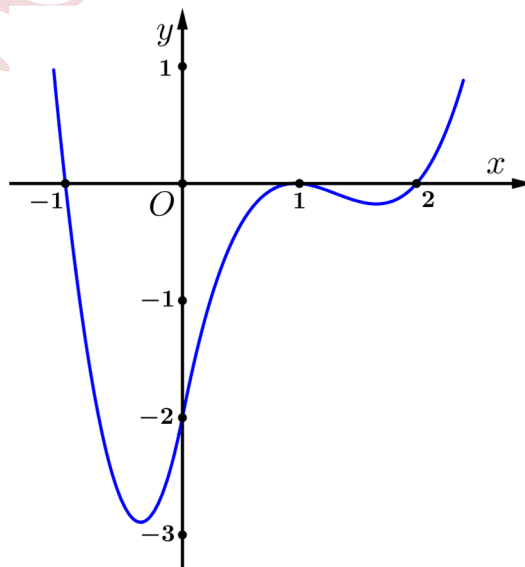
Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số đạo hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018 \Rightarrow g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$\text{Cho } g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta so sánh được $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

Câu 38: Cho $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

A. $f(2) + \frac{2}{3}$.

B. $f(-1) + \frac{2}{3}$.

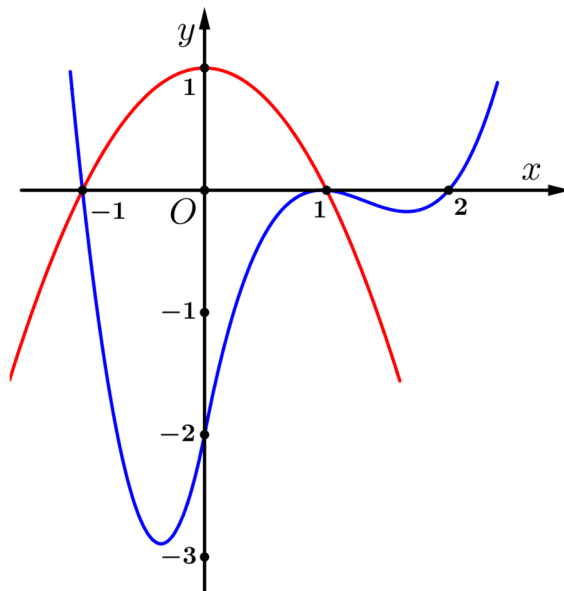
C. $\frac{2}{3}$.

D. $f(1) - \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $g'(x) = f'(x) + x^2 - 1$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x^2 + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$.



Dựa vào hình vẽ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0
y							

Từ bảng biến thiên ta thấy $\min_{[-1;2]} g(x) = g(1) = f(1) - \frac{2}{3}$.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Xét hàm số

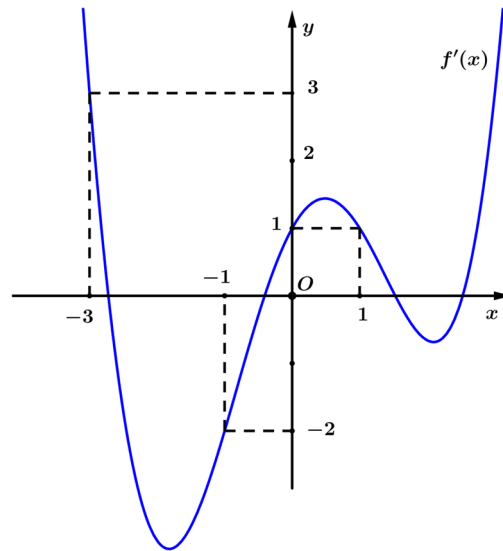
$$g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2019. \text{ Mệnh đề nào sau đây đúng.}$$

A. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(1)$.

B. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

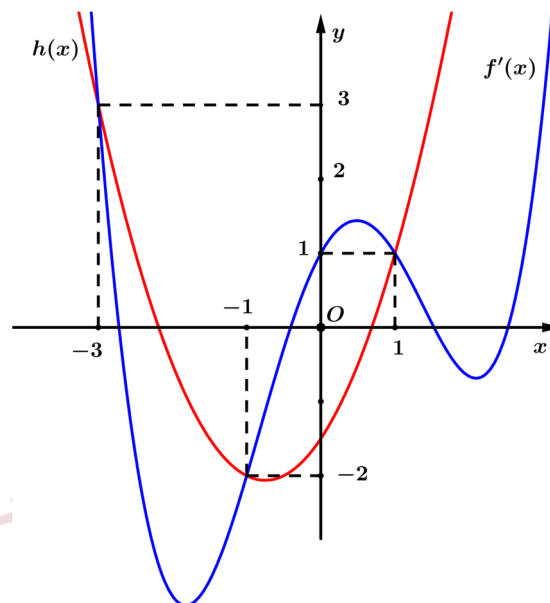
C. $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$.

D. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$.



Lời giải

Chọn B



Tính được $g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$.

Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ (*).

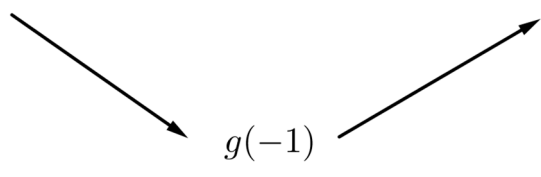
Hàm số $h(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ có đồ thị như hình vẽ.

Dựa vào tương giao của hai đồ thị $f'(x)$ và $h(x)$ ta thấy trên $[-3; 1]$ phương trình (*) có các nghiệm $x = -3$; $x = -1$; $x = 1$.

Trên $(-3; -1)$, đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía dưới đồ thị hàm số $h(x)$ nên $g'(x) < 0$.

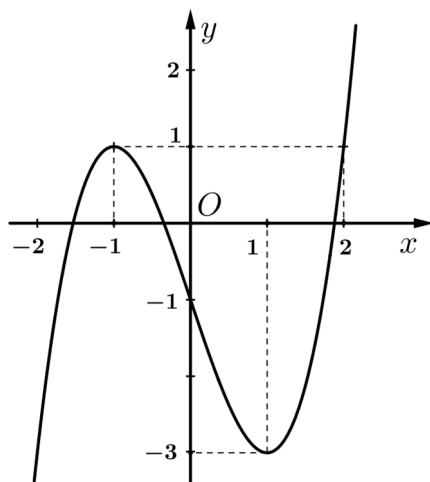
Trên $(-1; 1)$, đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên đồ thị hàm số $h(x)$ nên $g'(x) > 0$.

Ta có bảng biến thiên

x	-3	-1	1		
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
g					

Vậy $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$ khi $x = -1$.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



Gọi $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - 2019$.

Biết $g(-1) + g(1) > g(0) + g(2)$. Với $x \in [-1; 2]$ thì $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng:

A. $g(2)$.

B. $g(1)$.

C. $g(-1)$.

D. $g(0)$.

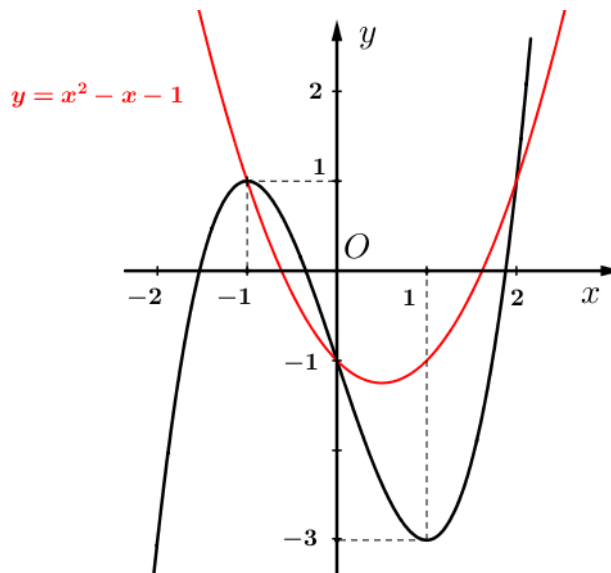
Lời giải

Chọn A

$$g'(x) = f'(x) - x^2 + x + 1.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - x - 1.$$

Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - x - 1$.



Ta suy ra bảng biến thiên hàm số $g(x)$ trên $[-1; 2]$ như sau:

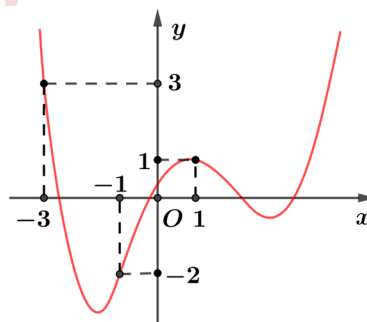
x	-1		0		2
$g'(x)$	0	+	0	-	0
$g(x)$			$g(0)$		
	$g(-1)$				$g(2)$

Ta có: $g(-1) + g(1) > g(0) + g(2) \Leftrightarrow g(-1) - g(2) > g(0) - g(1) > 0$.

$$\Rightarrow \min_{x \in [-1; 2]} g(x) = g(2).$$

Câu 41: Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2020.$$



Trong các mệnh đề dưới đây:

(I) $g(0) < g(1)$. (III) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-3; 1)$.

(II) $\min_{x \in [-3; 1]} g(x) = g(-1)$. (IV) $\max_{x \in [-3; 1]} g(x) = \max\{g(-3), g(1)\}$

Số mệnh đề đúng là:

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

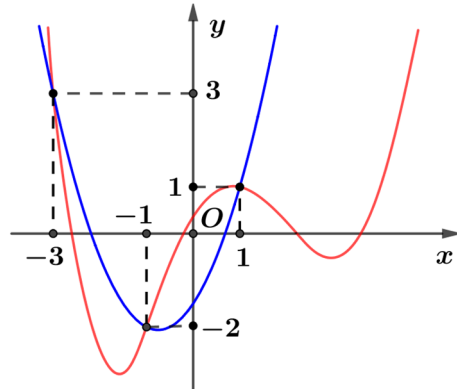
Ta có $g'(x) = f'(x) - x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đồ thị hàm số $y = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

Ta thấy trên $[-3;1]$ hai đồ thị có ba giao điểm là: $(-3;3)$, $(-1;-2)$ và $(1;1)$.

Trên khoảng $(-3;-1)$ thì $f'(x) < x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ nên $g'(x) < 0$.

Trên khoảng $(-1;1)$ thì $f'(x) > x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ nên $g'(x) > 0$.



Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $[-3;1]$:

x	-3		-1		1
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$					

Từ bảng biến thiên ta có:

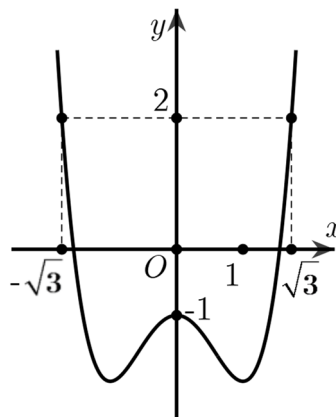
+) Mệnh đề (I) $g(0) < g(1)$ là đúng.

+) Mệnh đề (II) $\min_{x \in [-3;1]} g(x) = g(-1)$ là đúng.

+) Mệnh đề (III) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-3;1)$ là sai.

+) Mệnh đề (IV) $\max_{x \in [-3;1]} g(x) = \max\{g(-3), g(1)\}$ là đúng.

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



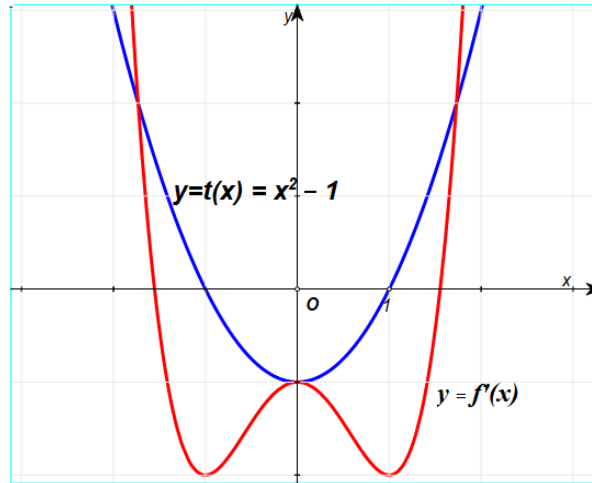
Đặt $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x - f(x) + 2020$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$. Hãy tính $M + m$.

A. $f(\sqrt{3}) + f(-\sqrt{3})$. B. $f(\sqrt{3}) - f(-\sqrt{3})$. C. $2020 + f(-\sqrt{3})$. D.

$4040 - f(\sqrt{3}) - f(-\sqrt{3})$.

Lời giải

Chọn D



Xét $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x - f(x) + 2020$, với $x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

Ta có $g'(x) = x^2 - 1 - f'(x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$
g'	$+$	0	$+$
g	$g(-\sqrt{3})$		$g(\sqrt{3})$

Do đó $M = \max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} g(x) = g(\sqrt{3}) = -f(\sqrt{3}) + 2020$,

$m = \min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]} g(x) = g(-\sqrt{3}) = -f(-\sqrt{3}) + 2020$.

Vậy $M + m = -f(\sqrt{3}) - f(-\sqrt{3}) + 4040$.

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$-\infty$	2019	-2018	$+\infty$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x) - \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x - \frac{2}{15}$ trên đoạn $[-1; 2]$?

A. 2022.

B. 2019.

C. 2020.

D. 2021.

Lời giải

Chọn D

$$g'(x) = (3x^2 - 3)f'(x^3 - 3x) - x^4 - 2x^2 + 3 = (x^2 - 1)[3f'(x^3 - 3x) - x^2 - 3]$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3f'(x^3 - 3x) - x^2 - 3 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Mà $x \in [-1; 2] \Rightarrow x^3 - 3x \in [-2; 2] \Rightarrow f'(x^3 - 3x) < 0 \Rightarrow 3f'(x^3 - 3x) - x^2 - 3 < 0$, do đó

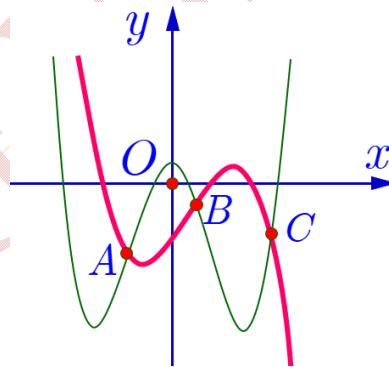
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Ta có

x		-1		1		2
g'		0	+	0	-	
g		$g(-1)$		$g(1)$		$g(2)$

Vậy $\max_{[-1; 2]} y = g(1) = f(-2) + 2 = 2021$.

Câu 44: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong nét đậm, đồ thị hàm số $y = g'(x)$ là đường cong nét mảnh như hình vẽ.



Gọi ba giao điểm A, B, C của $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ trên hình vẽ lần lượt có hoành độ là a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[a; c]$.

A. $\min_{[a; c]} h(x) = h(0)$.B. $\min_{[a; c]} h(x) = h(a)$.C. $\min_{[a; c]} h(x) = h(b)$.D. $\min_{[a; c]} h(x) = h(c)$.

Lời giải

Chọn C

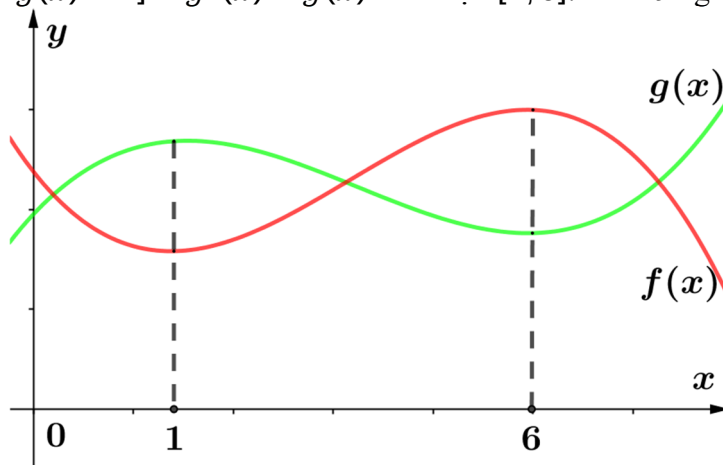
Ta có $h'(x) = f'(x) - g'(x)$

Theo đồ thị có bảng biến thiên

x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	0	-
$h(x)$		$f(a)$		$f(c)$	

Suy ra $\min_{[a;c]} h(x) = h(b)$.

Câu 45: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $x = 1, x = 6$ đều là các điểm cực trị của 2 hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đồng thời $f(1) = g(6), 2f(6) = g(1) + 3$ và $2f(-5x + 16) = 3g(5x - 9)(*)$. Gọi M, m lần lượt là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = f(x)[f(x) - 2g(x) + 1] + g^2(x) + g(x)$ trên đoạn $[1; 6]$. Tính tổng $P = M + m$.



A. $\frac{27}{4}$.

B. $\frac{23}{4}$.

C. $\frac{9}{2}$.

D. $\frac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Lần lượt thay $x = 2, x = 3$ vào $(*)$, đồng thời kết hợp điều kiện ban đầu ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2f(1) = 3g(6) - 1 \\ 2f(6) = 3g(1) - 1 \\ 2f(1) = 4g(1) - 4 \\ 2f(6) = 4g(6) - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = g(6) = 1 \\ f(6) = \frac{5}{2} \\ g(1) = 2 \end{cases}.$$

Từ giả thiết kết hợp đồ thị ta thấy rằng $g(x)$ nghịch biến trên $[1; 6]$ và $f(x)$ đồng biến trên $[1; 6]$, suy ra $g(x) \in [1; 2]; f(x) \in [1; \frac{5}{2}]$.

Đặt $u = f(x), y = g(x)$, ta có $S = u^2 - 2uy + y^2 + u + y = f(u; y)$, coi đây là hàm số theo ẩn u ta có $f'_u(u; y) = 2u - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow u = \frac{2y-1}{2}$.

Ta có $f(1; y) = y^2 - y + 2, f(\frac{5}{2}; y) = y^2 - 4y + \frac{35}{4} \Rightarrow f(\frac{5}{2}; y) - f(1; y) > 0 \forall y \in [1; 2]$.

Xét $y \in (1; \frac{3}{2}] \Rightarrow u = \frac{2y-1}{2} \notin [1; \frac{5}{2}]$ và $y \in [\frac{3}{2}; 2] \Rightarrow u = \frac{2y-1}{2} \in [1; \frac{5}{2}]$.

Với $y \in (1; \frac{3}{2}]$ (1) khảo sát hàm số $f(u; y)$ theo biến $u \in [1; \frac{5}{2}]$

$\Rightarrow f_u(u; y) \geq f(1; y) = y^2 - y + 2 \geq 1$ và $\Rightarrow f_u(u; y) \leq f(\frac{5}{2}; y) = y^2 - 4y + \frac{35}{4} \leq \frac{23}{4}$.

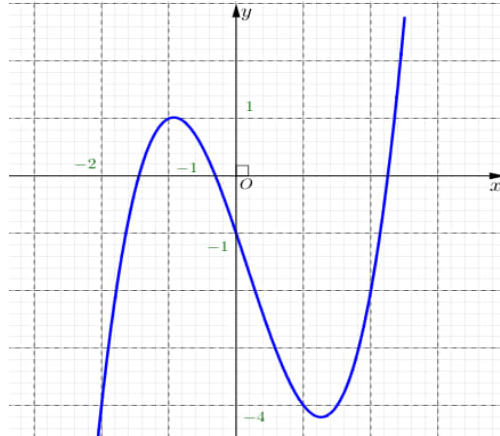
Với $y \in [\frac{3}{2}; 2]$ (2). Lập bảng biến thiên cho hàm số $f(u; y)$ theo biến $u \in [1; \frac{5}{2}]$ ta có

$$f_u(u; y) \geq f(\frac{2y-1}{2}; y) = \left(\frac{2y-1}{2}\right)^2 - y(2y-1) + y^2 + \frac{2y-1}{2} + y = \frac{8y-1}{2} \geq \frac{7}{4} \text{ và } \Rightarrow f_u(u; y) \leq f(\frac{5}{2}; y) = y^2 - 4y + \frac{35}{4} \leq \frac{23}{4}.$$

Từ (1) và (2) suy ra $\max S = M = \frac{23}{4}, \min S = m = 1 \Rightarrow P = M + m = \frac{27}{4}$.

Câu 46: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên R và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Gọi

$$g(x) = f(\sin x) - \frac{1}{3}\sin^3 x + \frac{1}{2}\sin^2 x + \sin x. \text{ Giá trị nhỏ nhất của } g(x) \text{ bằng}$$



A. $g(-1)$.

B. $g(1)$.

C. $f(-1) - \frac{1}{6}$.

D. $f(1) + \frac{7}{6}$.

Lời giải

Chọn D

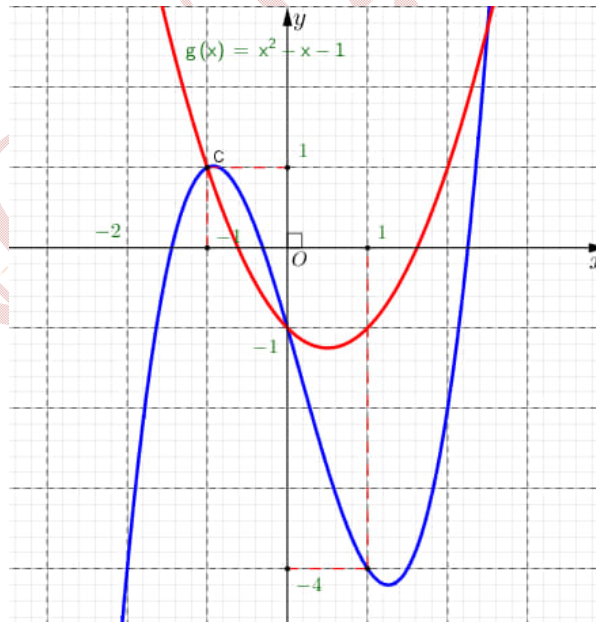
Hàm số xác định trên R , đặt $u = \sin x, u \in [-1; 1]$. Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$h(u) = f(u) - \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{2}u^2 + u \text{ trên đoạn } [-1; 1]$$

$$\text{Ta có: } h'(u) = f'(u) - u^2 + u + 1,$$

$$h'(u) = 0 \Leftrightarrow f'(u) - u^2 + u + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(u) = u^2 - u - 1$$

So sánh đồ thị hàm số $y = f'(u)$ và $y = u^2 - u - 1$ (hình vẽ)



Ta được BBT sau

u	-1	0	1
h'	+	0	-
h	$h(-1)$	$h(0)$	$h(1)$

Ta đi so sánh $h(-1) = f(-1) - \frac{1}{6}$ và $h(1) = f(1) + \frac{7}{6}$.

Để thấy diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(u)$ và $y = u^2 - u - 1$ trên đoạn $[-1; 0]$ nhỏ

hơn trên đoạn $[0; 1]$. Tức là: $\int_{-1}^0 [f'(x) - (x^2 - x - 1)] dx < \int_0^1 [(x^2 - x - 1) - f'(x)] dx$

$$\Leftrightarrow \left[f(x) - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x \right) \right]_{-1}^0 < \left[\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x \right) - f(x) \right]_0^1 \Leftrightarrow f(1) + \frac{7}{6} < f(-1) - \frac{1}{6}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ là: $f(1) + \frac{7}{6}$.

Dạng 3: GTLN, GTNN hàm số có tham số không chứa giá tuyệt đối

Câu 47: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x^3 - 3x + m)^2$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 4. Tính tổng các phần tử của S .

A. 3.

B. 6.

C. 0.

D. -5.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = (3x^2 - 3)(x^3 - 3x + m)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ x^3 - 3x + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ g(x) = x^3 - 3x = -m(2) \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x, g'(x) = 3x^2 - 3, g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

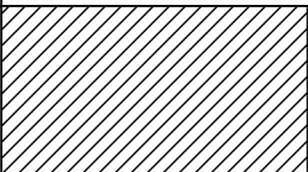
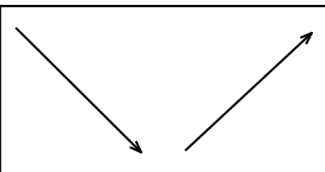
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	+
$g(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

+) TH 1: Với $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{cases}$ phương trình (2) có nghiệm không thuộc khoảng $(-1; 1)$. Khi đó

$$\begin{cases} \min_{[-1;1]} y = y(1) \\ y(1) < y(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2 = 4 \\ (m-2)^2 < (m+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0, m = 4 \\ m > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min_{[-1;1]} y = y(-1) \\ y(-1) < y(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)^2 = 4 \\ (m+2)^2 < (m-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0, m = -4 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \{-4, 4\} \text{ thỏa mãn.}$$

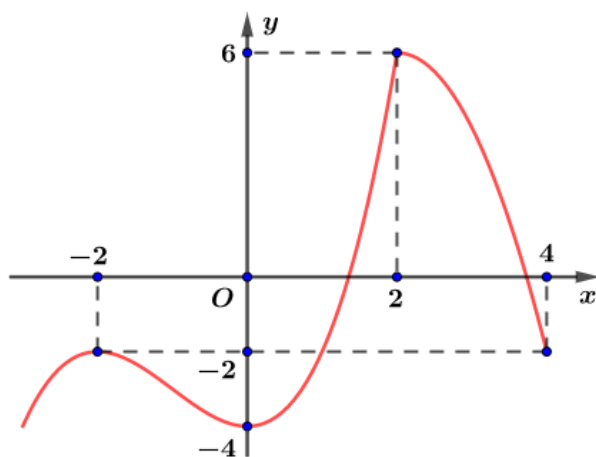
+) TH2: Với $-2 < m < 2$ phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt $x_1 < -1 < x_2 < 1 < x_3$, ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	x_1	-1	x_2	1	x_3	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y							

Suy ra $\min_{[-1;1]} y = y(x_2) = 0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn là $\{-4, 4\}$ nên tổng của chúng bằng 0.

Câu 48: Cho hàm số $y = f(x)$ trên $[-2; 4]$ như hình vẽ. Gọi S là tập chứa các giá trị của m để hàm số $y = (f(2-x) + m)^2$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2; 4]$ bằng 49. Tổng các phần tử tập S bằng.



A. -9.

B. -23.

C. -2.

D. -12.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết $\forall x \in [-2; 4]$ ta có:

$$(f(2-x) + m)^2 \leq 49 \Leftrightarrow -7 \leq f(2-x) + m \leq 7$$

$$\Leftrightarrow -7 - m \leq f(2-x) \leq 7 - m \quad (1).$$

Nhận xét: Đặt $u = 2 - x$. Xét $x \in [-2; 4]$ suy ra $u \in [-2; 4]$.

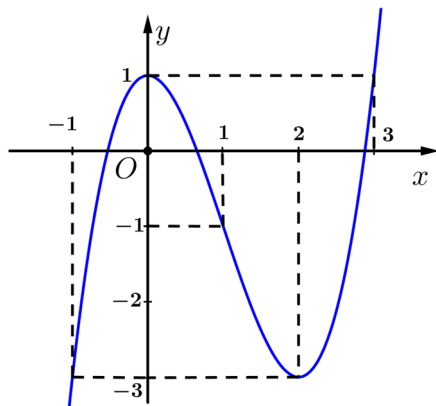
Dựa vào đồ thị ta có $-4 \leq f(u) \leq 6, \forall u \in [-2; 4]$.

$$\text{Hay } -4 \leq f(2-x) \leq 6, \forall x \in [-2; 4] \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \begin{cases} -7 - m = -4 \\ 7 - m = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = 1 \end{cases}.$$

Vậy $S = \{-3; 1\}$, do đó tổng các phần tử tập S bằng -2.

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Xét hàm số $g(x) = f(x^3 + 2x) + m$. Giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng 9 là:

A. $m = 10$.B. $m = 6$.C. $m = 12$.D. $m = 8$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Có } \max_{[0;1]} g(x) = 9 \Leftrightarrow \max_{[0;1]} f(x^3 + 2x) = 9 - m.$$

$$\text{Với } x \in [0; 1] \Rightarrow x^3 + 2x \in [0; 3].$$

Dựa vào đồ thị hàm số ta suy ra

$$f(x^3 + 2x) \in [-3; 1] \Rightarrow \max_{[0;1]} f(x^3 + 2x) = 1 \Rightarrow 9 - m = 1 \Rightarrow m = 8.$$

Câu 50: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $\max_{x \in [0; 10]} f(x) = f(2) = 4$. Xét hàm số $g(x) = f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m$. Giá trị của tham số m để $\max_{x \in [0; 2]} g(x) = 8$ là

A. 5.

B. 4.

C. -1.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x) = f(x^3 + x)$ trên $[0; 2]$. Đặt $t = x^3 + x, x \in [0; 2]$.

Ta có $t' = 3x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên $t \in [0; 10]$.

Vì vậy $\max_{x \in [0; 2]} f(x^3 + x) = \max_{t \in [0; 10]} f(t) = 4$ khi $t = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Mặt khác $p(x) = -x^2 + 2x + m = -(x - 1)^2 + m + 1 \leq m + 1$. Suy ra $\max_{x \in [0; 2]} p(x) = m + 1$ khi $x =$

1.

$$\text{Vậy } \max_{x \in [0; 2]} g(x) = 4 + m + 1 = m + 5 = 8 \Leftrightarrow m = 3.$$

Phương pháp trắc nghiệm

Chọn hàm $y = f(x) = 4$ thỏa mãn giả thiết: hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $\max_{x \in [0; 10]} f(x) = f(2) =$

4.

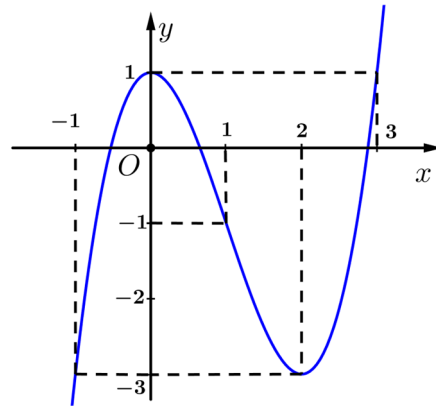
$$\text{Ta có } g(x) = f(x^3 + x) - x^2 + 2x + m = 4 - x^2 + 2x + m.$$

$$g'(x) = -2x + 2; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Xét hàm số $g(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 2]$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ta có $g(0) = 4 + m$, $g(1) = 5 + m$, $g(2) = 4 + m$.

Rõ ràng $g(0) = g(2) < g(1)$ nên $\max_{x \in [0; 2]} g(x) = g(1)$. Vậy $5 + m = 8 \Leftrightarrow m = 3$.

Câu 51: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Xét hàm số $g(x) = f(x^3 + 2x) + m$. Giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng 9 là:

A. $m = 10$.

B. $m = 6$.

C. $m = 12$.

D. $m = 8$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Có } \max_{[0;1]} g(x) = 9 \Leftrightarrow \max_{[0;1]} f(x^3 + 2x) = 9 - m.$$

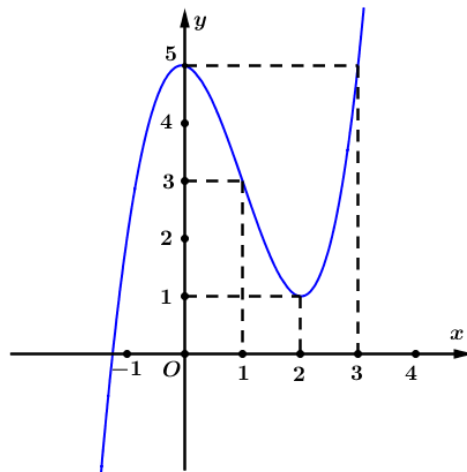
$$\text{Với } x \in [0; 1] \Rightarrow x^3 + 2x \in [0; 3].$$

Dựa vào đồ thị hàm số ta suy ra

$$f(x^3 + 2x) \in [-3; 1] \Rightarrow \max_{[0;1]} f(x^3 + 2x) = 1 \Rightarrow 9 - m = 1 \Rightarrow m = 8.$$

Câu 52: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Ký hiệu

$$g(x) = f(2\sqrt{2x} + \sqrt{1-x}) + m. \text{ Tìm điều kiện của tham số } m \text{ sao cho } \max_{[0;1]} g(x) > 2 \min_{[0;1]} g(x).$$



A. $m < 2$.

B. $m < 3$.

C. $0 < m < 5$.

D. $m > 4$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = 2\sqrt{2x} + \sqrt{1-x} \text{ ta có } t' = \frac{2}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{4\sqrt{1-x} - \sqrt{2x}}{2\sqrt{2x}\sqrt{1-x}}.$$

$$\text{Xét } t = 0 \Rightarrow 4\sqrt{1-x} - \sqrt{2x} = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{1-x} = \sqrt{2x} \Leftrightarrow 16(1-x) = 2x \Leftrightarrow x = \frac{8}{9}.$$

$$\text{Ta có } t(0) = 1; t(1) = 2\sqrt{2}; t\left(\frac{8}{9}\right) = 3 \Rightarrow t \in [1; 3].$$

$$\text{Đề } \max_{[0;1]} g(x) > 2 \min_{[0;1]} g(x) \Rightarrow \max_{[1;3]} g(t) > 2 \min_{[1;3]} g(t)$$

$$\Leftrightarrow \max_{[1;3]} (f(t) + m) > 2 \min_{[1;3]} (f(t) + m) \Leftrightarrow 5 + m > 2(1 + m) \Leftrightarrow m < 3.$$

Dạng 4: GTLN, GTNN hàm trị tuyệt đối chứa tham số. A – KIẾN THỨC CHUNG

Dạng 1: Tìm m để $\max_{[\alpha;\beta]} y = |f(x) + m| = a \quad (a > 0).$

Phương pháp:

Cách 1: Trước tiên tìm $\max_{[\alpha;\beta]} f(x) = K; \quad \min_{[\alpha;\beta]} f(x) = k \quad (K > k).$

$$\text{Kiểm tra } \max\{|m+K|, |m+k|\} \geq \frac{|m+K| + |m+k|}{2} \geq \frac{|m+K-m-k|}{2} = \frac{|K-k|}{2}.$$

$$\text{TH1: } \frac{|K-k|}{2} \leq a. \text{ Đề } \max_{[\alpha;\beta]} y = a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k = -a \\ m+K = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -a-k \\ m = a-K \end{cases} \Rightarrow m \in \{-a-k; a-K\}.$$

$$\text{TH2: } \frac{|K-k|}{2} > a \Rightarrow m \in \emptyset.$$

Cách 2: Xét trường hợp

$$\text{TH1: } \max = |m+K| \Leftrightarrow \begin{cases} |m+K| = a \\ |m+K| \geq |m+k| \end{cases}$$

$$\text{TH2: } \max = |m+k| \Leftrightarrow \begin{cases} |m+k| = a \\ |m+k| \geq |m+K| \end{cases}$$

Cách 3: Sử dụng đồ thị

Dạng 2: Tìm m để $\min_{[\alpha;\beta]} y = |f(x) + m| = a \quad (a > 0).$

Phương pháp:

Cách 1: Trước tiên tìm $\max_{[\alpha;\beta]} f(x) = K; \quad \min_{[\alpha;\beta]} f(x) = k \quad (K > k).$

$$\text{Đề } \min_{[\alpha;\beta]} y = a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k = a \\ m+k > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m+K = -a \\ m+K < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = a-k \\ m > -k \end{cases} \vee \begin{cases} m = -a-K \\ m < -K \end{cases}. \text{ Vậy } m \in S_1 \cup S_2.$$

Cách 2: Sử dụng đồ thị $|x+k|$ và $|x+K|$

Cách 3: Sử dụng bất trị tuyệt đối

Dạng 3: Tìm m để $\max_{[\alpha;\beta]} y = |f(x) + m|$ không vượt quá giá trị M cho trước.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max_{[\alpha;\beta]} f(x) = K; \quad \min_{[\alpha;\beta]} f(x) = k \quad (K > k).$

Cách 1:

$$\text{Đề } \max_{[\alpha;\beta]} y \leq M \Rightarrow \begin{cases} m+k \geq -M \\ m+K \leq M \end{cases} \Leftrightarrow -M-k \leq m \leq M-K.$$

Cách 2: Sử dụng đồ thị

Dạng 4: Tìm m để $\min_{[a;b]} y = |f(x) + m|$ không vượt quá giá trị a cho trước.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max_{[a;b]} f(x) = K$; $\min_{[a;b]} f(x) = k$ ($K > k$).

Cách 1:

$$\min_{[a;b]} y \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} m+k \leq a \\ m+k \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} m+K \geq -a \\ m+K \leq 0 \end{cases} \vee (m+K)(m+k) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq a-k \\ m \geq -k \end{cases} \vee \begin{cases} m \geq -a-K \\ m \leq -K \end{cases} \vee -K < m < -k.$$

Cách 2: Sử dụng đồ thị

Dạng 5: Tìm m để $\max_{[a;b]} y = |f(x) + m|$ đạt min.

Phương pháp:

Cách 1: Trước tiên tìm $\max_{[a;b]} f(x) = K$; $\min_{[a;b]} f(x) = k$ ($K > k$).

Đề hỏi tìm $m \Rightarrow m = -\frac{K+k}{2}$. Đề hỏi tìm min của $\max_{[a;b]} y \Rightarrow$ giá trị này là $\frac{K-k}{2}$.

Cách 2: Sử dụng đồ thị**Cách 3: Sử dụng bất trị tuyệt đối.****Cách 4: Phương pháp xấp xỉ đều.**

Dạng 6: Tìm m để $\min_{[a;b]} y = |f(x) + m|$ đạt min.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max_{[a;b]} f(x) = K$; $\min_{[a;b]} f(x) = k$ ($K > k$).

Đề hỏi tìm $m \Rightarrow (m+K)(m+k) \leq 0 \Leftrightarrow -K \leq m \leq -k$. Đề hỏi tìm min của $\min_{[a;b]} y \Rightarrow$ giá trị này là 0.

Dạng 7: Cho hàm số $y = |f(x) + m|$. Tìm m để $\max_{[a;b]} y \leq h$, $\min_{[a;b]} y (h > 0)$ hoặc $\min + \max =$

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max_{[a;b]} f(x) = K$; $\min_{[a;b]} f(x) = k$ ($K > k$).

$$\text{TH1: } |K+m| \leq h \mid k+m| \xrightarrow[K+m \text{ cùng dấu } k+m]{|K+m| \geq |k+m|} m \in S_1.$$

$$\text{TH2: } |k+m| \leq h \mid K+m| \xrightarrow[K+m \text{ cùng dấu } k+m]{|k+m| \geq |K+m|} m \in S_2.$$

Vậy $m \in S_1 \cup S_2$.

Dạng 8: Cho hàm số $y = |f(x) + m|$.

Phương pháp: Trước tiên tìm $\max_{[a;b]} f(x) = K$; $\min_{[a;b]} f(x) = k$ ($K > k$).

BT1: Tìm m để $\min_{[a;b]} y + \max_{[a;b]} y = \alpha \Leftrightarrow |m+K| + |m+k| = \alpha$.

BT2: Tìm m để $\min_{[a;b]} y * \max_{[a;b]} y = \beta \Leftrightarrow |m+K| * |m+k| = \beta$.

B – BÀI TẬP

HÀM BẬC 2

Câu 53: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để $\max_{[0;3]} |x^2 - 2x + m| = 4$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. -2. B. 2. C. -4. D. 4.

Lời giải**Chọn C**

Đặt $t = x^2 - 2x$. Với $x \in [0;3] \Rightarrow t \in [-1; 3]$.

Nên $\max_{[0;3]} |x^2 - 2x + m| = \max_{[-1;3]} |t + m| = \max\{|m-1|; |m+3|\}$.

$$\max_{[0;3]} |x^2 - 2x + m| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} |m-1| = 4 \\ |m+3| = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1=4 \\ m-1=-4 \\ m+3=4 \\ m+3=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=5 \\ m=-3 \\ m=1 \\ m=-7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \{5; -3; 1; -7\}.$$

Vậy tổng giá trị các phần tử của S bằng -4.

Câu 54: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ bằng 5?

A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Lời giải**Chọn A**

□ Xét hàm số $g(x) = x^2 + 2x + m - 4$, ta có $g'(x) = 2x + 2$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

$$g(-2) = m - 4, g(-1) = m - 5, g(1) = m - 1.$$

□ Do $m - 5 < m - 4 < m - 1$ nên giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 + 2x + m - 4|$ bằng $\max\{|m-1|; |m-5|\}$ nên có 2 trường hợp xảy.

$$\text{TH1: Nếu } \begin{cases} |m-1| > |m-5| \\ \max_{[-2;1]} y = y(1) = |m-1| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 > (m-5)^2 \\ m-1=5 \\ m-1=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m > 24 \\ m=6 \\ m=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m=6 \\ m=-4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 6.$$

$$\text{TH2: Nếu } \begin{cases} |m-1| < |m-5| \\ \max_{[-2;1]} y = y(-1) = |m-5| = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 < (m-5)^2 \\ m-5=5 \\ m-5=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m < 24 \\ m=10 \\ m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m=10 \\ m=0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy có 2 giá trị thỏa mãn.

Câu 55: Gọi M là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 + 2x + m|$ trên đoạn $[-2; 1]$. Với $m \in [-3; 3]$, giá trị lớn nhất của M bằng

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải**Chọn B**

Xét $f(x) = x^2 + 2x + m$ liên tục trên $[-2; 1]$.

Ta có: $f'(x) = 2x + 2$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \in (-2; 1)$.

$$f(-2) = m; f(1) = m + 3; f(-1) = m - 1;$$

+) Trường hợp 1: $(m-1)(m+3) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1$, lúc đó $M = \min_{[-2;1]} y = 0$.

+) Trường hợp 2: $(m-1)(m+3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases} (*)$.

Do đó: $M = \min_{[-2;1]} y = \min \{|m-1|; |m+3|\}$.

Khi $|m-1| \leq |m+3| \Leftrightarrow (m-1)^2 \leq (m+3)^2 \Leftrightarrow m \geq -1$, kết hợp với điều kiện (*) ta được $m > 1$, lúc đó:

$$M = \min_{[-2;1]} y = |m-1|.$$

Khi $|m-1| > |m+3| \Leftrightarrow m < -1$, kết hợp với điều kiện (*) ta được $m < -3$, lúc đó:

$$M = \min_{[-2;1]} y = |m+3|.$$

Xét các giá trị $m \in [-3; 3]$

$$M = \begin{cases} 0 & \text{khi } -3 \leq m \leq 1 \\ |m-1| & \text{khi } 1 < m \leq 3 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{khi } -3 \leq m \leq 1 \\ m-1 & \text{khi } 1 < m \leq 3 \end{cases}.$$

Dễ dàng nhận thấy M đạt giá trị lớn nhất bằng 2 khi $m = 3$.

Câu 56: Cho hàm số $y = |x^2 + x + m|$. Tổng tất cả giá trị thực của tham số m để $\min_{[-2;2]} y = 2$ bằng

A. $-\frac{31}{4}$.

B. -8 .

C. $-\frac{23}{4}$.

D. $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $u = x^2 + x + m$ trên đoạn $[-2; 2]$, có: $u' = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} \max_{[-2;2]} u = \max \left\{ u(-2), u\left(-\frac{1}{2}\right), u(2) \right\} = m + 6 \\ \min_{[-2;2]} u = \min \left\{ u(-2), u\left(-\frac{1}{2}\right), u(2) \right\} = m - \frac{1}{4} \end{cases}.$$

+ Nếu $m - \frac{1}{4} \geq 0$ hay $m \geq \frac{1}{4}$ thì $\min_{[-2;2]} y = m - \frac{1}{4} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$ (thỏa mãn).

+ Nếu $m + 6 \leq 0$ hay $m \leq -6$ thì $\min_{[-2;2]} y = -m - 6 = 2 \Leftrightarrow m = -8$ (thỏa mãn).

+ Nếu $-6 < m < \frac{1}{4}$ thì $\min_{[-2;2]} y = 0$ (không thỏa mãn).

Vậy có hai số thực $m = \frac{9}{4}$ và $m = -8$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Tổng các giá trị đó bằng $-\frac{23}{4}$.

Câu 57: Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m = 1$.

B. $m = 2$.

C. $m = 3$.

D. $m = 4$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x) = x^2 + 2x + m - 4$ trên đoạn $[-2; 1]$.

Ta có: $g'(x) = 2x + 2$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Bảng biến thiên:

x	-2	-1	1
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$m-4$	$m-5$	$m-1$

Từ bảng biến thiên ta luôn có: $m-5 < m-4 < m-1$

Mặt khác $f(x) = |g(x)|$, suy ra: $\max_{[-2;1]} f(x) = \max\{|m-5|; |m-1|\}$.

Nếu $|m-5| \leq |m-1| \Leftrightarrow 8m \geq 24 \Leftrightarrow m \geq 3$ thì $\max_{[-2;1]} f(x) = |m-1| = m-1 \geq 2$ (1).

Nếu $|m-5| \geq |m-1| \Leftrightarrow 8m \leq 24 \Leftrightarrow m \leq 3$ thì $\max_{[-2;1]} f(x) = |m-5| = 5-m \geq 2$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $m = 3$.

Câu 58: Cho hàm số $y = |x^2 - 4x + 2m - 3|$ với m là tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1;3]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng a khi $m = b$. Tính $P = 2b - a$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{13}{4}$.

C. $\frac{-9}{4}$.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = f(x) = x^2 - 4x + 2m - 3$ liên tục trên đoạn $[1;3]$.

+) $f'(x) = 2x - 4$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in [1;3]$.

+) $f(1) = 2m - 6$, $f(2) = 2m - 7$, $f(3) = 2m - 6$.

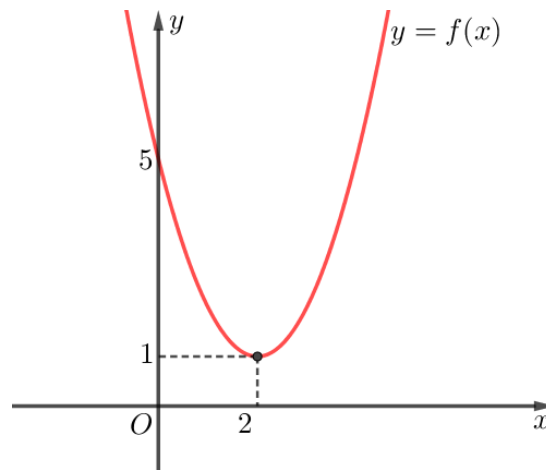
Khi đó $\max_{[1;3]} |f(x)| = \max\{|2m-6|; |2m-7|\} = M$.

Ta có: $\begin{cases} M \geq |2m-6| \\ M \geq |2m-7| = |7-2m| \end{cases} \Rightarrow 2M \geq |2m-6| + |7-2m| \geq |2m-6+7-2m| = 1 \Rightarrow M \geq \frac{1}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} |2m-6| = |2m-7| = \frac{1}{2} \\ (2m-6)(7-2m) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{13}{4}$.

Do đó $M = \frac{1}{2} = a$ khi $m = \frac{13}{4} = b \Rightarrow P = 2b - a = 6$.

Câu 59: Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = |f(x) + m|$ trên đoạn $[0;4]$ bằng 9.



A. -10.

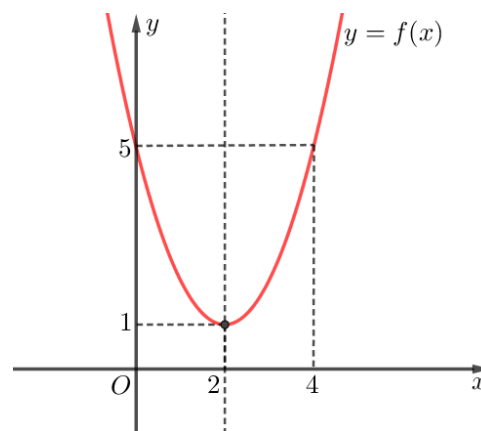
B. -6.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

Chọn B



Từ đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ta có đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 2$ là trục đối xứng, mà $f(0) = 5 \Rightarrow f(4) = 5$. Suy ra: $1 \leq f(x) \leq 5, \forall x \in [0; 4]$.

Xét hàm số $g(x) = |f(x) + m|, \forall x \in [0; 4]$.

Ta có: $\max_{[0;4]} g(x) = \max \{|m+1|; |m+5|\}$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} |m+1| \geq |m+5| \\ \max_{[0;4]} g(x) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ |m+1| = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m = 8 \\ m = -10 \end{cases} \Leftrightarrow m = -10.$

Trường hợp 2: $\begin{cases} |m+1| < |m+5| \\ \max_{[0;4]} g(x) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ |m+5| = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m = 4 \\ m = -14 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$

Vậy tổng tất cả giá trị nguyên của m là: $-10 + 4 = -6$.

Câu 60: Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$ trên đoạn $[-1; 3]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất, tính $a + 2b$.

A. 7.

B. -5.

C. -4.

D. -6.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = |x^2 + ax + b|$. Theo đề bài, M là giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1; 3]$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} M \geq f(-1) \\ M \geq f(3) \\ M \geq f(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M \geq |1 - a + b| \\ M \geq |9 + 3a + b| \\ M \geq |1 + a + b| \end{cases} \Rightarrow 4M \geq |1 - a + b| + |9 + 3a + b| + 2|-1 - a - b|$$

$$\geq |1 - a + b + 9 + 3a + b + 2(-1 - a - b)| \Rightarrow 4M \geq 8 \Rightarrow M \geq 2.$$

$$\text{Nếu } M = 2 \text{ thì điều kiện cần là } |1 - a + b| = |9 + 3a + b| = |-1 - a - b| = 2 \text{ và } 1 - a + b, 9 + 3a + b, -1 - a - b \text{ cùng dấu} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a + b = 9 + 3a + b = -1 - a - b = 2 \\ 1 - a + b = 9 + 3a + b = -1 - a - b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Ngược lại, khi $\begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$ ta có, hàm số $f(x) = |x^2 - 2x - 1|$ trên $[-1; 3]$.

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x - 1$ xác định và liên tục trên $[-1; 3]$.

$$g'(x) = 2x - 2; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1; 3]$$

$$M \text{ là giá trị lớn nhất của hàm số } f(x) \text{ trên } [-1; 3] \Rightarrow M = \max\{|g(-1)|; |g(3)|; |g(1)|\} = 2.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}. \text{ Ta có: } a + 2b = -4.$$

Câu 61: Cho biết M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 - 2ax + b|$ trên đoạn $[-1; 2]$. Khi M đạt giá trị nhỏ nhất có thể thì giá trị của biểu thức $(M + a + 3b)$ bằng:

A. $\frac{9}{8}$.

B. -2 .

C. 3 .

D. -1 .

Lời giải

Chọn D

Ta có: $M = \max_{x \in [-1; 2]} f(x)$ nên suy ra:

$$+ M \geq f(-1) = |2a + b + 1| \quad (1)$$

$$+ M \geq f(2) = |4 - 4a + b| \quad (2)$$

$$+ M \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \left|\frac{1}{4} - a + b\right| \Leftrightarrow 2M \geq \left|-\frac{1}{2} + 2a - 2b\right| \quad (3)$$

Cộng các bất đẳng thức (1), (2), (3) theo vế ta có:

$$4M \geq |2a + b + 1| + |4 - 4a + b| + \left|-\frac{1}{2} + 2a - 2b\right| \geq \left|2a + b + 1 + 4 - 4a + b - \frac{1}{2} + 2a - 2b\right| = \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow M \geq \frac{9}{8} (*).$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi dấu " $=$ " ở (1), (2), (3) cùng đồng thời xảy ra và sao cho các giá trị $(1 + 2a + b)$, $(4 - 4a + b)$, $\left(-\frac{1}{2} + 2a - 2b\right)$ cùng dấu với nhau.

$$\text{Tức điều kiện dấu " $=$ " xảy ra khi: } \begin{cases} \begin{cases} 1 + 2a + b = M = \frac{9}{8} \\ 4 - 4a + b = M = \frac{9}{8} \\ -\frac{1}{2} + 2a - 2b = M = \frac{9}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{7}{8} \end{cases} \\ \text{hoặc} \\ \begin{cases} 1 + 2a + b = M = -\frac{9}{8} \\ 4 - 4a + b = M = -\frac{9}{8} \\ -\frac{1}{2} + 2a - 2b = M = -\frac{9}{8} \end{cases} \quad (VN) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } f(x) = \left|x^2 - x - \frac{7}{8}\right|.$$

$$\text{Suy ra giá trị nhỏ nhất của } M \text{ là: } \frac{9}{8} \text{ khi } a = \frac{1}{2}, b = -\frac{7}{8}$$

$$\text{Vậy } M + a + 3b = -1.$$

Câu 62: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$, $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của $f'(0)$

A. 8 .

B. 0 .

C. 6 .

D. 4 .

Lời giải.

Chọn A

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(0) = b.$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của b với điều kiện $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [0; 1]$.

Ta có.
$$\begin{cases} f(0) = c \\ f(1) = a + b + c \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = f(1) - f(0) \\ a + 2b = 4f\left(\frac{1}{2}\right) - 4f(0) \Rightarrow b = 4f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) - 3f(0). \\ c = f(0) \end{cases}$$

$$|f(x)| \leq 1, \forall x \in [0; 1] \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq f(0) \leq 1 \\ -1 \leq f(1) \leq 1 \\ -1 \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \leq 1 \end{cases} \Rightarrow b = 4f\left(\frac{1}{2}\right) + (-f(1)) + 3(-f(0)) \leq 4 + 1 + 3 = 8.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ f(1) = -1 \\ f(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1, \\ a + b + c = -1, \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 8 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -8x^2 + 8x - 1.$

Vậy giá trị lớn nhất của $f'(0)$ bằng 8.

Câu 63: Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$, thỏa mãn điều kiện $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$. Gọi m là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho $\max_{x \in [-2; 2]} f(x) \leq m$. Khi đó m bằng

A. 8.

B. 4.

C. 3.

D. 7.

Lời giải

Chọn DĐặt $x = 2t$.Ta có $x \in [-2; 2] \Leftrightarrow t \in [-1; 1]$.

$$|f(x)| = |4at^2 + 2bt + c| = |2f(t) + 2at^2 - c| = |2f(t) + (f(1) + f(-1))t^2 - 2ct^2 - c|$$

$$\leq |2f(t)| + |(f(1) + f(-1))t^2| + 2|f(0)|t^2 + |f(0)| \leq 7.$$

Suy ra $\max_{x \in [-2; 2]} f(x) \leq 7$.Chọn $f(x) = 2x^2 - 1$ thì $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$ và $\max_{x \in [-2; 2]} f(x) = 7$.Do đó $m = 7$.

Câu 64: Có bao nhiêu số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 4x + m + 3| - 4x$ bằng -5 .

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn DXét $f(x) = x^2 - 4x + m + 3$ có $\Delta' = 1 - m$.TH1. $m \geq 1$: $f(x) \geq 0 \forall x \Leftrightarrow y = x^2 - 8x + m + 3$.

x	$-\infty$	4	$+\infty$
y	$+\infty$	$m-13$	$+\infty$

 $\min y = -5 \Leftrightarrow m = 8$ (TM).TH2. $m < 1$: $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 2 - \sqrt{1 - m}$; $x_2 = 2 + \sqrt{1 - m}$.□ Nếu $x \in (x_1; x_2)$: $y = -x^2 - 3 - m$.

$$y(x_1) = -8 + 4\sqrt{1 - m}.$$

$$y(x_2) = -8 - 4\sqrt{1 - m}.$$

$$\Rightarrow y(x_1) < y(x_2)$$

$$\Rightarrow \min_{(x_1; x_2)} y = -8 - 4\sqrt{1 - m} < -8 \text{ (Không TM).}$$

□ Nếu $x \notin (x_1; x_2)$: $y = x^2 - 8x + 3 + m$.

$$+) x_2 < 4 \Leftrightarrow 1 > m > -3:$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	4	$+\infty$
y	$+\infty$			$m-13$	$+\infty$

$$\min y = m - 13 = -5 \Leftrightarrow m = 8 \text{ (Loại).}$$

$$+) x_2 \geq 4 \Leftrightarrow m \leq -3:$$

x	$-\infty$	x_1	4	x_2	$+\infty$
y	$+\infty$				$+\infty$
		$-8+4\sqrt{1-m}$		$-8-4\sqrt{1-m}$	

$$\Rightarrow \min y = -8 - 4\sqrt{1-m} < -8 \text{ (Không TM). Vậy có 1 giá trị của } m.$$

Câu 65: Cho hàm số $f(x) = |8 \cos^4 x + a \cos^2 x + b|$, trong đó a, b là tham số thực. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số. Tính tổng $a + b$ khi M nhận giá trị nhỏ nhất.

A. $a + b = -8$.

B. $a + b = -9$.

C. $a + b = 0$.

D. $a + b = -7$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \cos^2 x$, $t \in [0; 1]$, ta có hàm số $g(t) = |8t^2 + at + b|$. Khi đó $M = \max_{[0;1]} g(t)$.

Do đó:

$$M \geq g(0) = |b|;$$

$$M \geq g(1) = |8 + a + b|;$$

$$M \geq g\left(\frac{1}{2}\right) = \left|2 + \frac{1}{2}a + b\right| \Rightarrow 2M \geq |4 + a + 2b|;$$

Từ đó ta có

$$4M \geq |b| + |8 + a + b| + |-4 - a - 2b| \geq |b + (8 + a + b) + (-4 - a - 2b)| = 4$$

Hay $M \geq 1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $|b| = |8 + a + b| = \frac{|-4 - a - 2b|}{2} = 1$ và $b, (8 + a + b), (-4 - a - 2b)$

$$\text{cùng dấu} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } a + b = -7.$$

Câu 66: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |\sin^2 x - 2 \sin x + m|$ bằng 1. Số phần tử của S là

A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \sin x = t (t \in [-1; 1]) \Rightarrow y = |t^2 - 2t + m|$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t^2 - 2t + m \text{ có } f'(t) = 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \in [-1; 1]$$

$$\text{Có } f(-1) = m + 3, f(1) = m - 1. \text{ Khi đó } \begin{cases} \max_{[-1;1]} f(x) = \max\{m+3; m-1\} = m+3 \\ \min_{[-1;1]} f(x) = \min\{m+3; m-1\} = m-1 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } |m+3| \geq |m-1| \Leftrightarrow m \geq -1$$

$$\Rightarrow \max f(x) = |m+3| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2(l) \\ m = -4(l) \end{cases}$$

$$\text{TH1: } |m+3| < |m-1| \Leftrightarrow m < -1$$

$$\Rightarrow \max f(x) = |m - 1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2(l) \\ m = 0(l) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Không tồn tại m thỏa mãn.

Câu 67: Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |-4\cos^2 x + 2\sin x + m + 4|$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nhỏ hơn hoặc bằng 4?

A. 12.

B. 14.

C. 13.

D. 15.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y = |-4\cos^2 x + 2\sin x + m + 4| = |4(1 - \cos^2 x) + 2\sin x + m| = |4\sin^2 x + 2\sin x + m|$.

Đặt $t = \sin x$, do $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên suy ra $t \in [0; 1]$.

Ta tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |4t^2 + 2t + m|$ trên đoạn $[0; 1]$.

Xét hàm số $f(t) = 4t^2 + 2t + m$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$, ta có:

$$f'(t) = 8t + 2; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4} \notin [0; 1].$$

$$f(0) = m; f(1) = m + 6.$$

Trường hợp 1: Nếu $m \geq 0 \Rightarrow \min_{[0;1]} y = m$. Kết hợp với giả thiết ta có $0 \leq m \leq 4$. (1)

Trường hợp 2: Nếu $m + 6 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -6 \Rightarrow \min_{[0;1]} y = -m - 6$. Kết hợp với giả thiết ta có $\begin{cases} -m - 6 \leq 4 \\ m \leq -6 \end{cases} \Leftrightarrow -10 \leq m \leq -6$. (2)

Trường hợp 3: Nếu $m(m + 6) < 0 \Leftrightarrow -6 < m < 0 \Rightarrow \min_{[0;1]} y = 0 \leq 4$. Trường hợp này thỏa mãn. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta được $m \in [-10; 4]$. Vì m là số nguyên nên $m \in \{-10, -9, -8, \dots, 2, 3, 4\}$.

Vậy có 15 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

HÀM BẬC 3

Câu 68: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3. Tập hợp S có bao nhiêu phần tử.

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x) = x^3 - 3x + m$ trên $[0; 2]$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Khi đó $f(0) = m, f(1) = m - 2, f(2) = m + 2$ suy ra GTLN của $f(x)$ bằng $m + 2$ và GTNN của $f(x)$ bằng $m - 2$.

Từ đó suy ra GTLN của $y = |x^3 - 3x + m|$ trên $[0; 2]$ bằng $\max\{|m - 2|; |m + 2|\}$.

+ Trường hợp 1: $\begin{cases} |m - 2| = 3 \\ |m + 2| \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -1 \\ |m + 2| \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$.

+ Trường hợp 2: $\begin{cases} |m + 2| = 3 \\ |m - 2| \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -5 \\ |m - 2| \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$. Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn.

Câu 69: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |2x^3 - 6x + m|$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 8. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

- A. 8. B. -16. C. -32. D. -72.

Lời giải

Chọn C

Xét $u(x) = 2x^3 - 6x + m$ trên đoạn $[0; 3]$. Dễ thấy hàm số $u(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$.

Có $u'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x = 1 \in [0; 3]$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \max_{[0;3]} u = \max \{u(0); u(1); u(3)\} = \max \{m; m-4; m+36\} = m+36 \\ \min_{[0;3]} u = \min \{u(0); u(1); u(3)\} = \min \{m; m-4; m+36\} = m-4 \end{cases}$$

$$\text{Theo bài ra } \min_{[0;3]} f(x) = \min \{|m-4|; |m+36|; 0\} = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} |m-4| = 8 \\ m-4 > 0 \\ m+36 < 0 \\ |m+36| = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 12 \\ m = -44 \end{cases}$$

Do đó $S = \{-44; 12\}$. Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng -32.

Câu 70: Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + 2m - 1|$ trên đoạn $[0; 2]$ là nhỏ nhất. Giá trị của m thuộc khoảng

- A. $(0; 1)$. B. $[-1; 0]$. C. $(\frac{2}{3}; 2)$. D. $(-\frac{3}{2}; -1)$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số: $g(x) = x^3 - 3x + 2m - 1$ liên tục và có đạo hàm trên $[0; 2]$.

Ta có: $g'(x) = 3x^2 - 3$.

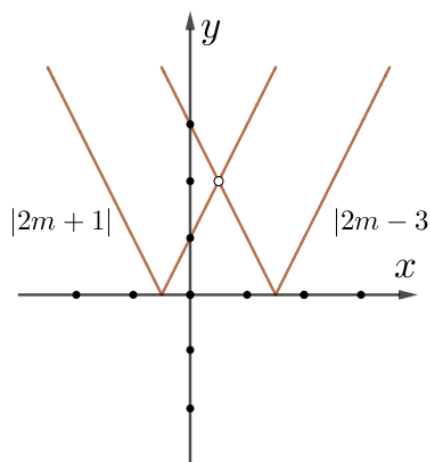
Suy ra: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0; 2] \\ x = -1 \notin [0; 2] \end{cases}$

Lúc đó: $y(0) = |2m - 1|$; $y(1) = |2m - 3|$; $y(2) = |2m + 1|$.

Vì: $2m - 3 < 2m - 1 < 2m + 1$.

Nên $\max_{[0;2]} y = \max\{|2m - 3|; |2m + 1|\} = \max\{|3 - 2m|; |2m + 1|\}$.

Xét đồ thị sau:



Dựa vào đồ thị ta nhận thấy GTLN của $\max\{|2m - 3|; |2m + 1|\} = \max\{|3 - 2m|; |2m + 1|\}$ bằng $\frac{2m+1+3-2m}{2} = 2$ khi $\frac{2m+1+2m-3}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \in (0; 1)$.

Nhận xét:

Ta có thể xét bài toán sau: Tìm GTNN của $g(m) = \max\{|M|; |N|\}$ với M, N là các biểu thức chứa tham số m .

Câu 71: Gọi S là tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ đạt giá trị lớn nhất bằng 50 trên $[-2; 4]$. Tổng các phần tử thuộc S là

A. 4.

B. 36.

C. 140.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 + m$ có $g'(x) = 3x^2 - 6x$. Xét $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ trên $[-2; 4]$ là:

$$\max_{x \in [-2; 4]} y = \max\{y(0); y(-2); y(2); y(4)\} = \max\{|m|; |m-4|; |m-20|; |m+16|\}.$$

Trường hợp 1: Giả sử $\max y = |m| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 50 \\ m = -50 \end{cases}$.

Với $m = 50$ thì $|m+16| = 66 > 50$ (loại).

Với $m = -50$ thì $|m-20| = 70 > 50$ (loại).

Trường hợp 2: Giả sử $\max y = |m-4| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 54 \\ m = -46 \end{cases}$.

Với $m = 54 \Rightarrow |m| = 54 > 50$ (loại).

Với $m = -46$ thì $|m-20| = 66 > 50$ (loại).

Trường hợp 3: Giả sử $\max y = |m-20| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 70 \\ m = -30 \end{cases}$

Với $m = 70$ thì $|m+16| = 86 > 50$ (loại).

Với $m = -30$ thì $|m+16| = 14 < 50$, $|m| = 30 < 50$; $|m-4| = 34 < 50$ (thỏa mãn).

Trường hợp 4: Giả sử $\max y = |m+16| = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 34 \\ m = -66 \end{cases}$.

Với $m = 34$ thì $|m| = 34 < 50$, $|m-4| = 30 < 50$, $|m-20| = 14 < 50$ (thỏa mãn).

Với $m = -66$ thì $|m| = 66 > 50$ (loại).

Vậy $S \in \{-30; 34\}$. Do đó tổng các phần tử của S là: $-30 + 34 = 4$.

Câu 72: Cho hàm số $y = |2x^3 - 3x^2 + m|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $\min_{x \in [-1; 3]} y \leq 3$.

A. 4.

B. 8.

C. 31.

D. 39.

Lời giải

Chọn D

Nhận xét: Đây là bài toán tìm tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối nhỏ hơn hoặc bằng một hằng số.

Hướng giải: Trong bài toán này tham số m đứng độc lập nên ta sẽ khảo sát hàm ở trong dấu giá trị tuyệt đối và sử dụng tính chất của đồ thị hàm chứa dấu giá trị tuyệt đối để giải quyết bài toán. Tuy nhiên để đưa ra đúng cho bài toán này, ta phải hết sức cẩn thận phân tích và chia trường hợp.

Lời giải:

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + m$.

Ta có $f'(x) = 6x^2 - 6x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Khi đó ta có $\begin{cases} f(-1) = m - 5 \\ f(0) = m \\ f(1) = m - 1 \\ f(3) = m + 27 \end{cases}$.

Trường hợp 1: Nếu $m - 5 > 0 \Leftrightarrow m > 5$ thì $\min_{[-1;3]} y = |m - 5| = m - 5 \leq 3 \Leftrightarrow m \leq 8$.

Vậy $5 < m \leq 8$.

Trường hợp 2: Nếu $m + 27 < 0 \Leftrightarrow m < -27$ thì $\min_{[-1;3]} y = |m + 27| = -m - 27 \leq 3 \Leftrightarrow m \geq -30$.

Vậy $-30 \leq m < -27$.

Trường hợp 3: Nếu $m - 5 \leq 0 \leq m + 27 \Leftrightarrow -27 \leq m \leq 5$ thì $\min_{[-1;3]} y = 0 \leq 3$ (thỏa mãn).

Kết hợp kết quả của cả 3 trường hợp ta được tập hợp giá trị của m là $[-30; 8] \Rightarrow$ có 39 giá trị m nguyên.

Câu 73: Cho hàm số $y = |x^3 - 3x^2 - 9x + m|$ (với m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để $\max_{[-2;3]} y < 50$. Tổng các phần tử của M bằng

A. 0.

B. 737.

C. 759.

D. -215.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ liên tục trên đoạn $[-2; 3]$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Có $f(-2) = m - 2$; $f(-1) = m + 5$; $f(3) = m - 27$.

Suy ra $\max_{[-2;3]} f(x) = m + 5$; $\min_{[-2;3]} f(x) = m - 27$.

Do đó $M = \max_{[-2;3]} y = \max\{|m + 5|; |m - 27|\}$.

$$M < 50 \Leftrightarrow \begin{cases} |m + 5| \geq |m - 27| \\ |m + 5| < 50 \\ |m + 5| < |m - 27| \\ |m - 27| < 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 22 \geq 0 \\ -50 < m + 5 < 50 \\ 2m - 22 < 0 \\ -50 < m - 27 < 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in [11; 45) \\ m \in (-23; 11) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-23; 45).$$

Do đó $S = \{-22; -21; -20; \dots; -1; 0; 1; 2; \dots; 44\}$.

Vậy tổng các phần tử của M là 737.

Câu 74: Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-5; 5]$ để $\min_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| \geq 2$.

A. 6.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\min_{[1;3]} |x^3 - 3x^2 + m| \geq 2 \Leftrightarrow |x^3 - 3x^2 + m| \geq 2; \forall x \in [1; 3]$ (1) (Do hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ liên tục trên $[1; 3]$).

Giải (1): $|x^3 - 3x^2 + m| \geq 2; \forall x \in [1; 3] \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + m \geq 2; \forall x \in [1; 3] \\ x^3 - 3x^2 + m \leq -2; \forall x \in [1; 3] \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 \geq 2 - m; \forall x \in [1; 3] \\ x^3 - 3x^2 \leq -2 - m; \forall x \in [1; 3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m \leq \min_{[1;3]}(x^3 - 3x^2) \\ -2 - m \geq \max_{[1;3]}(x^3 - 3x^2) \end{cases} (*).$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$ trên $[1; 3]$. Hàm số xác định và liên tục trên $[1; 3]$ mà $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$. Ta có: $f(1) = -2; f(3) = 0; f(2) = -4$.

Do đó $\max_{[1;3]} f(x) = 0; \min_{[1;3]} f(x) = -4$. Từ (*) suy ra $\begin{cases} 2 - m \leq -4 \\ -2 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 6 \\ m \leq -2 \end{cases}$.

$\forall \begin{cases} m \in [-5; 5] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ nên $m \in \{-5; -4; -3; -2\}$.

Vậy có 4 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2:

Đặt $t = x^3 - 3x^2$, với $x \in [1; 3] \Rightarrow t \in [-4; 0]$. Khi đó bài toán trở thành $\min_{[-4;0]} |t + m| \geq 2$.

TH1: $-m \leq -4 \Rightarrow \min_{[-4;0]} |t + m| = |-4 + m| = m - 4 \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 6$.

TH2: $-m \geq 0 \Rightarrow \min_{[-4;0]} |t + m| = |m| = -m \geq 2 \Leftrightarrow m \leq -2$.

Kết hợp với điều kiện $\begin{cases} m \in [-5; 5] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ suy ra $m \in \{-5; -4; -3; -2\}$.

Vậy có 4 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 75: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số

$y = \left| \frac{1}{3}x^3 - 9x + m + 10 \right|$ trên đoạn $[0; 3]$ không vượt quá 12. Tổng giá trị các phần tử của S bằng bao nhiêu?

A. -7.

B. 0.

C. 3.

D. 12.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + m + 10$. Dễ thấy hàm số $g(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$.

Ta có $g'(x) = x^2 - 9; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \notin [0; 3] \end{cases}$

Ta có $g(0) = m + 10; g(3) = m - 8$.

Theo yêu cầu bài toán, $\max_{[0;3]} y = \max_{[0;3]} |g(x)| \leq 12 \Leftrightarrow \begin{cases} |g(0)| \leq 12 \\ |g(3)| \leq 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m + 10| \leq 12 \\ |m - 8| \leq 12 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 2$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là -7.

Câu 76: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(x) = |x^3 - 3x^2 + m - 2|$ có giá trị nhỏ nhất trên $[-1; 1]$ không vượt quá 50. Tổng các phần tử của S bằng

A. 420.

B. 2020.

C. 412.

D. 2019.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = x^3 - 3x^2 + m - 2$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Ta có $g'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Khi đó $\begin{cases} M = \max_{[-1;1]} g(x) = \max \{g(-1); g(0); g(1)\} = \max \{m-6; m-4; m-2\} = m-2 \\ m = \min_{[-1;1]} g(x) = \min \{g(-1); g(0); g(1)\} = \min \{m-6; m-4; m-2\} = m-6 \end{cases}$.

Vậy $\min_{[-1;1]} f(x) = \min \{|m-2|; |m-6|\} \leq 50 \Leftrightarrow \begin{cases} |m-2| \leq 50 \\ |m-2| \leq |m-6| \\ |m-6| \leq 50 \\ |m-2| \geq |m-6| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -48 \leq m \leq 4 \\ 4 \leq m \leq 56 \end{cases} \Leftrightarrow -48 \leq m \leq 56$

Vậy có tổng các phần tử của S là 420.

Câu 77: Cho hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$. Có bao nhiêu số nguyên m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ không lớn hơn 2020?

A. 4045.

B. 4046.

C. 4044.

D. 4042.

Lời giải

Chọn A

Với $u = x^3 - 3x^2 + m$ có $u' = 3x^2 - 6x$; $u' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 2$

Do đó $\begin{cases} \min_{[1;3]} u = \min \{u(1); u(3); u(2)\} = \min \{m-2; m; m-4\} = m-4 \\ \max_{[1;3]} u = \max \{u(1); u(3); u(2)\} = \max \{m-2; m; m-4\} = m \end{cases}$

* Nếu $m-4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 4 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = m-4 \leq 2020 \Leftrightarrow m \leq 2024 \Rightarrow m \in \{4, \dots, 2024\}$.

* Nếu $m \leq 0 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = -m \leq 2020 \Leftrightarrow -2020 \leq m \Rightarrow m \in \{-2020; \dots; 0\}$.

* Nếu $0 < m < 4$ khi đó $\min_{[1;3]} u < 0$; $\max_{[1;3]} u > 0 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = 0$ (thỏa mãn).

Vậy $m \in \{-2020, \dots, 2024\}$ có tất cả 4045 số nguyên thỏa mãn.

Câu 78: Cho hàm số $f(x) = |x^3 - x^2 - 5x + m|$, $m \in \mathbb{R}$. Gọi S là tập hợp gồm tất cả các số nguyên m để $0 < \min_{[-2;1]} f(x) \leq 1$. Tổng các phần tử S bằng

A. 11.

B. 4.

C. 2.

D. 9.

Lời giải

Chọn C

+ Xét $u = x^3 - x^2 - 5x + m$ ta có:

* $u' = 3x^2 - 2x - 5$; $u' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$

* $u(-2) = m - 2$; $u(-1) = m + 3$; $u(1) = m - 5$

* $a = \min_{[-2;1]} u = m - 5$; $A = \max_{[-2;1]} u = m + 3$

+ Xét các trường hợp

Nếu $a, A < 0 \Rightarrow \min_{[-2;1]} f(x) = 0$ (loại).

Nếu $a \geq 0 \Rightarrow \min_{[-2;1]} f(x) = a \Rightarrow ycbt \Leftrightarrow 0 < a \leq 1 \Leftrightarrow 0 < m - 5 \leq 1 \Leftrightarrow 5 < m \leq 6 \Rightarrow m = 6$.

Nếu $A \leq 0 \Rightarrow \min_{[-2;1]} f(x) = -A \Rightarrow ycbt \Leftrightarrow 0 < -A \leq 1 \Leftrightarrow 0 < -m - 3 \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq m < -3$.

$\Rightarrow m = -4$

+ Vậy tổng các phần tử của S bằng $6 - 4 = 2$

Câu 79: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số

$y = |x^3 - mx^2 - 9x + 9m|$ trên đoạn $[-2; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x) = x^3 - mx^2 - 9x + 9m$. Dễ thấy $\min_{[-2;2]} |f(x)| \geq 0$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x \in [-2; 2]$.

Ta có: $f(x) = x^2(x - m) - 9(x - m) = (x^2 - 9)(x - m)$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \\ x = m \end{cases}$$

Do đó điều kiện cần và đủ để $f(x) = 0$ có nghiệm $x \in [-2; 2]$ là $m \in [-2; 2]$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 80: Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 12x + m + 1|$ trên đoạn $[1; 3]$ đạt nhỏ nhất.

A. $\frac{23}{2}$.

B. $\frac{7}{2}$.

C. $-\frac{23}{2}$.

D. $-\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $[1; 3]$

+) Xét $g(x) = x^3 - 12x + m + 1$ trên $[1; 3]$

$$g'(x) = 3x^2 - 12; g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 & (n) \\ x = -2 & (l) \end{cases}$$

+) Ta có:

$$f(1) = |m - 10|; f(2) = |m - 15|; f(3) = |m - 8|$$

$$\Rightarrow \max_{x \in [1; 3]} f(x) = M = \max\{|m - 8|; |m - 15|\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M \geq |m - 8| \\ M \geq |m - 15| \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2M \geq |m - 8| + |m - 15| = |m - 8| + |15 - m| \geq |m - 8 + 15 - m| \geq 7$$

$$\Rightarrow M \geq \frac{7}{2}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} |m - 8| = |m - 15| \\ (m - 8)(15 - m) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{23}{2}$$

$$\text{Vậy } m = \frac{23}{2}.$$

Câu 81: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| = 6$. Tổng tất cả các phần tử của S là

A. 3.

B. 0.

C. -1.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	1	2
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	m	$m-2$	$m+2$

+) Nếu $m < -2$ thì $\max_{[0;2]} |f(x)| = -m + 2$, $\min_{[0;2]} |f(x)| = -m - 2$

Ta có $\max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| = 6 \Leftrightarrow -m + 2 - m - 2 = 6 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa)

+) Nếu $m > 2$ thì $\max_{[0;2]} |f(x)| = m + 2$, $\min_{[0;2]} |f(x)| = m - 2$

Ta có $\max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| = 6 \Leftrightarrow m + 2 + m - 2 = 6 \Leftrightarrow m = 3$ (thỏa)

+) Nếu $-2 \leq m \leq 2$ thì $\min_{[0;2]} |f(x)| = 0$; $\max_{[0;2]} |f(x)| = \max\{|m+2|; |m-2|\} \leq 4$

$\Rightarrow \max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| < 6$ (không thỏa điều kiện đề bài)

Vậy $S = \{-3; 3\}$, Tổng các phần tử của S là 0.

Câu 82: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2m + 5$ (với m là tham số). Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để $\min_{[1;3]} |f(x)| + \max_{[1;3]} |f(x)| = 5$. Tổng số phần tử của S là

A. $-\frac{17}{2}$.

B. -3 .

C. $-\frac{23}{4}$.

D. -6 .

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2m + 5 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x$.

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(l) \\ x = 2(n) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	1	2	3
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$2m+5$	$2m+3$	$2m+1$

TH1: Nếu $2m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow \min_{[1;3]} |f(x)| + \max_{[1;3]} |f(x)| = 5 \Leftrightarrow 2m + 1 + 2m + 5 = 5 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}$ (nhận).

TH2: Nếu $2m + 1 < 0 \leq 2m + 3 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq m < -\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow \min_{[1;3]} |f(x)| + \max_{[1;3]} |f(x)| = 5 \Leftrightarrow 0 + 2m + 5 = 5 \Leftrightarrow m = 0$ (loại).

TH3: Nếu $2m + 3 < 0 < 2m + 5 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < m < -\frac{3}{2}$.

$\Rightarrow \min_{[1;3]} |f(x)| + \max_{[1;3]} |f(x)| = 5 \Leftrightarrow 0 - 2m - 1 = 5 \Leftrightarrow m = -3$ (loại).

TH4: Nếu $2m + 5 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{5}{2}$.

$$\Rightarrow \min_{[1;3]} |f(x)| + \max_{[1;3]} |f(x)| = 5 \Leftrightarrow -2m - 5 - 2m - 1 = 5 \Leftrightarrow m = -\frac{11}{4} \text{ (nhận).}$$

$$\Rightarrow S = \left\{ -\frac{1}{4}; -\frac{11}{4} \right\} \Rightarrow \text{tổng các phần tử của } S \text{ là } -3.$$

Câu 83: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m + 1$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ sao cho $\max_{[1;4]} |f(x)| \leq 3 \min_{[1;4]} |f(x)|$. Số phần tử của S là

A. 4003.

B. 4002.

C. 4004.

D. 4001.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + m + 1 \Rightarrow y' = f'(x) = 3x^2 - 6x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (l)} \\ x = 2 \end{cases}$$

$$f(1) = m - 1; f(2) = m - 3; f(4) = 17 + m.$$

$$\max_{[1;4]} f(x) = m + 17; \min_{[1;4]} f(x) = m - 3. \text{ Nếu } m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 3 \text{ thì } \max_{[1;4]} |f(x)| = m + 17,$$

$$\min_{[1;4]} |f(x)| = m - 3. \text{ Khi đó: } \max_{[1;4]} |f(x)| \leq 3 \min_{[1;4]} |f(x)| \Leftrightarrow 17 + m \leq 3(m - 3) \Leftrightarrow m \geq 13.$$

$$+ \text{ Nếu } m + 17 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -17 \text{ thì } \max_{[1;4]} |f(x)| = -m + 3, \min_{[1;4]} |f(x)| = -17 - m.$$

$$\text{Khi đó: } \max_{[1;4]} |f(x)| \leq 3 \min_{[1;4]} |f(x)| \Leftrightarrow -m + 3 \leq 3(-17 - m) \Leftrightarrow m \leq -27.$$

$$+ \text{ Nếu } (m - 3)(m + 17) < 0 \Leftrightarrow -17 < m < 3 \text{ thì}$$

$$\max_{[1;4]} |f(x)| = \max\{|m + 17|, |m - 3|\} = \max\{m + 17, 3 - m\} > 0; \min_{[1;4]} |f(x)| = 0.$$

$$\text{Khi đó, không thỏa điều kiện } \max_{[1;4]} |f(x)| \leq 3 \min_{[1;4]} |f(x)|.$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} m \leq -27 \\ m \geq 13 \end{cases} \text{ kết hợp với } m \in [-2020; 2020] \text{ ta có } m \in [-2020; -27] \cup [13; 2020]$$

Vậy 4002 giá trị nguyên của m cần tìm.

Câu 84: Gọi $g(m)$ là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = |x^3 - 6x^2 + 9x + 2m - 1|$ trên đoạn $[-1; 4]$. Biết bất phương trình $g(m) \leq \alpha$ có đúng 10 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn. Giá trị nguyên nhỏ nhất của α bằng

A. 18.

B. 11.

C. 19.

D. 21.

Lời giải

Chọn C

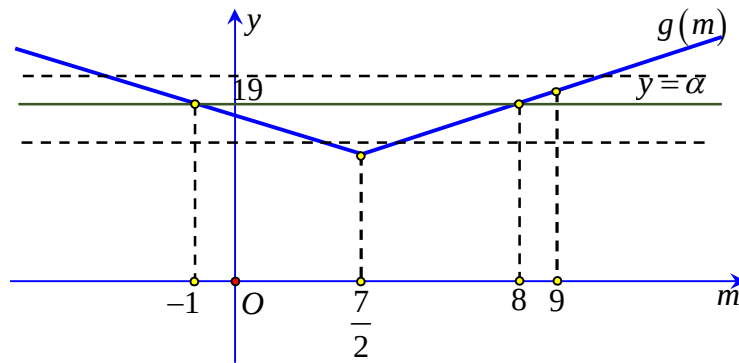
Khảo sát hàm số: $h(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2m - 1$ trên đoạn $[-1; 4]$, ta được:

$$\text{GTNN } \min_{x \in [-1;4]} h(x) = 2m - 17 \text{ và GTLN } \max_{x \in [-1;4]} h(x) = 2m + 3.$$

$$\text{Do đó: } g(m) = \max \left\{ \max_{x \in [-1;4]} h(x), -\min_{x \in [-1;4]} h(x) \right\} = \max\{(2m + 3), (-2m + 17)\}$$

$$\begin{aligned} \text{Hay ta có } g(m) &= \max\{(2m + 3), (-2m + 17)\} = \begin{cases} 2m + 3 & \text{khi } 2m + 3 \geq -2m + 17 \\ -2m + 17 & \text{khi } -2m + 17 \geq 2m + 3 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2m + 3 & \text{khi } m \geq \frac{7}{2} \\ -2m + 17 & \text{khi } m \leq \frac{7}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Đồ thị hàm số $g(m)$ như hình vẽ



Để có đúng 10 giá trị nguyên m thỏa mãn bất phương trình $g(m) \leq \alpha$ thì ta phải có: $19 \leq \alpha \leq 21$
Suy ra GTNN $\alpha = 19$. Các giá trị nguyên của m là $m = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Câu 85: Cho hàm số $f(x) = |2x^3 - 9x^2 + 12x + m|$. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20; 20)$ để với mọi bộ ba số thực $a, b, c \in [1; 3]$ thì $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh một tam giác?

A. 10.

B. 8.

C. 25.

D. 23.

Lời giải

Chọn D

Xét $u = 2x^3 - 9x^2 + 12x + m$ trên $[1; 3]$, ta có: $u' = 6x^2 - 18x + 12$; $u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

$$\min_{[1;3]} u = \min\{u(0), u(1), u(2), u(3)\} = m + 4.$$

$$\max_{[1;3]} u = \max\{u(0), u(1), u(2), u(3)\} = m + 9.$$

Để $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh một tam giác thì ta phải có $f(a) + f(b) > f(c)$.

Chọn $f(a) = f(b) = \min_{[-2;1]} f(x)$, $f(c) = \max_{[-2;1]} f(x)$ ta có điều kiện $2 \min_{[-2;1]} f(x) > \max_{[-2;1]} f(x)$.

Ngược lại: với $2 \min_{[-2;1]} f(x) > \max_{[-2;1]} f(x)$, ta có: $f(a) + f(b) - f(c) \geq 2 \min_{[-2;1]} f(x) > \max_{[-2;1]} f(x) > 0$.

Vậy điều kiện cần và đủ để $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh một tam giác là $2 \min_{[-2;1]} f(x) > \max_{[-2;1]} f(x)$

$$\text{TH1: } m + 4 \geq 0 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = m + 4; \max_{[1;3]} f(x) = m + 9 \Rightarrow \begin{cases} m + 4 \geq 0 \\ 2(m + 4) > m + 9 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

$$\text{TH2: } m + 9 \leq 0 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = -m - 9; \max_{[1;3]} f(x) = -m - 4 \Rightarrow \begin{cases} m + 9 \leq 0 \\ 2(-m - 9) > -m - 4 \end{cases} \Leftrightarrow m < -14$$

$$\text{TH3: } (m + 4)(m + 9) < 0 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 > \max_{[1;3]} f(x) = m + 9 \text{ (loại)}$$

Vậy $m \in \{-19; -15; 2; 18; 19\}$. Có 23 số nguyên thỏa mãn.

HÀM BẬC 4

Câu 86: Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |-x^4 + 8x^2 + m|$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng 2018?

A. 0.

B. 2.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y = |-x^4 + 8x^2 + m| = |x^4 - 8x^2 - m| = |(x^2 - 4)^2 - 16 - m|.$$

Đặt $t = (x^2 - 4)^2$, vì $x \in [-1; 3]$ nên miền giá trị của t là $[0; 25]$.

Khi đó $y = f(t) = |t - 16 - m|$.

$$\text{Ta có } \max_{x \in [-1; 3]} y(x) = \max_{t \in [0; 25]} y(t) = \max\{|16 + m|; |9 - m|\}.$$

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} |16 + m| > |9 - m| \\ |16 + m| = 2018 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2002.$$

Trường hợp 2 : $\begin{cases} |16+m| < |9-m| \\ |9-m| = 2018 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2009.$

Trường hợp 3 : $\begin{cases} |16+m| = |9-m| \\ |9-m| = 2018 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$

Vậy có 2 giá trị m cần tìm.

Câu 87: Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 2x^2 + m|$. Có bao nhiêu số nguyên m để $\max_{x \in [-1;2]} f(x) \leq 100$.

A. 192.

B. 191.

C. 193.

D. 190.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = x^4 - 2x^2 + m$.

Khi đó hàm số ban đầu có dạng $f(x) = |g(x)|$.

Ta có:

$$g'(x) = 4x^3 - 4x.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Ta có:

$$g(-1) = m - 1; g(0) = m; g(1) = m - 1; g(2) = m + 8.$$

$$\text{Để } \max_{x \in [-1;2]} f(x) \leq 100 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \geq -100 \\ m + 8 \leq 100 \end{cases} \Leftrightarrow -99 \leq m \leq 92.$$

Vậy có 192 giá trị m thỏa mãn.

Câu 88: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + m$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp các giá trị của m sao cho $\max_{x \in [0;2]} |f(x)| + \min_{x \in [0;2]} |f(x)| = 7$. Tổng các phần tử của S là

A. 7.

B. -14.

C. -7.

D. 14.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + m$ liên tục trên đoạn $[0; 2]$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 4x^3 - 4x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in [0; 2] \\ x = 0 \in [0; 2] \\ x = -1 \notin [0; 2] \end{cases}.$$

Khi đó $f(0) = m; f(1) = m - 1; f(2) = m + 8$.

Suy ra $f(1) = m - 1 < f(0) = m < f(2) = m + 8$.

Đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ thu được bằng cách giữ nguyên phần đồ thị phía trên trục hoành của $(C): y = f(x)$, còn phần đồ thị phía dưới trục hoành của $(C): y = f(x)$ thì lấy đối xứng qua trục hoành lên trên. Do đó, ta có biện luận sau đây:

Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $m + 8 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -8$ thì $\begin{cases} \min_{x \in [0;2]} |f(x)| = |m + 8| = -m - 8 \\ \max_{x \in [0;2]} |f(x)| = |m - 1| = 1 - m \end{cases}$. Do đó:

$$\max_{x \in [0;2]} |f(x)| + \min_{x \in [0;2]} |f(x)| = 7 \Leftrightarrow 1 - m - m - 8 = 7 \Leftrightarrow m = -7 \text{ (loại)}.$$

Trường hợp 2. $m \leq 0 < m + 8 \Leftrightarrow -8 < m \leq 0$, thì đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ cắt trục hoành tại x_0 với $x_0 \in [0; 2]$. Do đó $\min_{x \in [0;2]} |f(x)| = 0$. Suy ra $\max_{x \in [0;2]} |f(x)| = 7$.

$$\text{Mặt khác } \max_{x \in [0;2]} |f(x)| = \max\{|m + 8|; |m - 1|\} = \max\{m + 8; 1 - m\}.$$

$$\text{Suy ra } \max_{[0;2]} |f(x)| = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m \geq m+8 \\ 1-m = 7 \\ m+8 > 1-m \\ m+8 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{7}{2} \\ m = -6(TM) \\ m > -\frac{7}{2} \\ m = -1(TM) \end{cases}.$$

Trường hợp 3. $m-1 \leq 0 < m \Leftrightarrow 0 < m \leq 1$, thì đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ cắt trục hoành tại x_0 với $x_0 \in [0; 2]$. Do đó $\min_{[0;2]} |f(x)| = 0$.

Mặt khác $\max_{[0;2]} |f(x)| = m+8$.

Suy ra $\max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| = 7 \Leftrightarrow m+8 = 7 \Leftrightarrow m = -1$ (loại).

Trường hợp 4. $m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì $\begin{cases} \min_{[0;2]} |f(x)| = m-1 \\ \max_{[0;2]} |f(x)| = m+8 \end{cases}$. Do đó:

$$\max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| = 7 \Leftrightarrow m-1 + m+8 = 7 \Leftrightarrow m = 0 \text{ (loại)}.$$

Suy ra $S = \{-1; -6\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là $(-6) + (-1) = -7$.

Câu 89: Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ trên đoạn $[-1; 3]$. Có bao nhiêu số thực m để $M = \frac{59}{2}$?

A. 2.

B. 6.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số: $u = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$.

$$\text{Có } u' = 12x^3 - 12x^2 - 24x \Rightarrow u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} \min_{[-1;3]} u = \min\{u(-1), u(0), u(2), u(3)\} = u(2) = m - 32 \\ \max_{[-1;3]} u = \max\{u(-1), u(0), u(2), u(3)\} = u(3) = m + 27 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó: } M = \max\{|m-32|, |m+27|\} = \frac{59}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-32| = \frac{59}{2} \\ |m-32| \geq |m+27| \\ |m+27| = \frac{59}{2} \\ |m+27| \geq |m-32| \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}.$$

Vậy có 1 số thực m để $M = \frac{59}{2}$.

Câu 90: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2x^3 + m$ (m là tham số thực). Tìm tổng tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[0;1]} |f(x)| + 2\min_{[0;1]} |f(x)| = 10$.

A. 4.

B. -3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta xét $f(x) = x^4 - 2x^3 + m$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$, $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0; 1] \\ x = \frac{3}{2} \notin [0; 1] \end{cases}$$

$$f(0) = m; f(1) = m - 1.$$

Ta xét các trường hợp sau:

$$\text{-Nếu } m \leq 0 \text{ thì } \max_{[0;1]} |f(x)| = 1 - m; \min_{[0;1]} |f(x)| = -m.$$

$$\text{Khi đó: } \max_{[0;1]} |f(x)| + 2\min_{[0;1]} |f(x)| = 10 \Leftrightarrow (1 - m) + 2(-m) = 10 \Leftrightarrow m = -3 \text{ (thỏa điều kiện).}$$

$$\text{-Nếu } m \geq 1 \text{ thì } \max_{[0;1]} |f(x)| = m; \min_{[0;1]} |f(x)| = m - 1.$$

$$\text{Khi đó: } \max_{[0;1]} |f(x)| + 2\min_{[0;1]} |f(x)| = 10 \Leftrightarrow m + 2(m - 1) = 10 \Leftrightarrow m = 4 \text{ (thỏa điều kiện).}$$

$$\text{-Nếu } \frac{1}{2} \leq m < 1 \text{ thì } \max_{[0;1]} |f(x)| = m; \min_{[0;1]} |f(x)| = 0.$$

$$\text{Khi đó: } \max_{[0;1]} |f(x)| + 2\min_{[0;1]} |f(x)| = 10 \Leftrightarrow m = 10 \text{ (không thỏa điều kiện).}$$

$$\text{-Nếu } 0 < m < \frac{1}{2} \text{ thì } \max_{[0;1]} |f(x)| = 1 - m; \min_{[0;1]} |f(x)| = 0.$$

$$\text{Khi đó: } \max_{[0;1]} |f(x)| + 2\min_{[0;1]} |f(x)| = 10 \Leftrightarrow 1 - m = 10 \Leftrightarrow m = -9 \text{ (không thỏa điều kiện).}$$

Do đó có hai giá trị $m = -3$ và $m = 4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy tổng tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[0;1]} |f(x)| + 2\min_{[0;1]} |f(x)| = 10$ là 1.

Câu 91: Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0; 2]$. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $[-3; 3]$ sao cho $M \leq 2m$?

A. 5.

B. 7.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a$.

$$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x; g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	1	2	
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$			$a+1$	
	a			a

$$\text{TH1: } a \leq -1 \Rightarrow m = -(a+1); M = -a \Rightarrow -2(a+1) \geq -a \Leftrightarrow a \leq -2 \Rightarrow a \in \{-3; -2\}.$$

$$\text{TH2: } -1 < a < 0 \Rightarrow m = 0; M > 0 \Rightarrow M > 2m \text{ (loại).}$$

$$\text{TH3: } a \geq 0 \Rightarrow m = a; M = a+1 \Rightarrow 2a \geq a+1 \Leftrightarrow a \geq 1 \Rightarrow a \in \{1; 2; 3\}.$$

Vậy có 5 giá trị của a thỏa mãn đề bài.

Câu 92: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a|$ trên đoạn $[-3; 2]$. Có bao nhiêu số nguyên $a \in (-2019; 2019)$ để $2m \geq M$?

A. 3209.

B. 3213.

C. 3215.

D. 3211.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a$, ta có

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Khi đó: $f(-3) = a + 243$; $f(-1) = a - 5$; $f(0) = a$; $f(2) = a - 32$.

Ta thấy: $a - 32 < a - 5 < a < a + 243, \forall a \in \mathbb{R}$.

Bảng biến thiên

x	-3	-1	0	2	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$a + 243$		a		$a - 32$

$\swarrow$ $\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 $a - 5$

□TH1: $a - 32 > 0 \Leftrightarrow a > 32$, ta có $M = \max_{[-3;2]} |f(x)| = a + 243$; $m = \min_{[-3;2]} |f(x)| = a - 32$

Ta phải có: $2(a - 32) \geq a + 243 \Leftrightarrow a \geq 307 \Rightarrow a \in [307; 2019) \Rightarrow$ có 1712 số nguyên a .

□TH2: $a + 243 < 0 \Leftrightarrow a < -243$, ta có

$$M = \max_{[-3;2]} |f(x)| = |a - 32| = -a + 32; m = \min_{[-3;2]} |f(x)| = |a + 243| = -a - 243.$$

Ta phải có: $2(-a - 243) \geq -a + 32 \Leftrightarrow a \leq -518 \Rightarrow a \in (-2019; -518] \Rightarrow$ có 1501 số nguyên a .

Suy ra tất cả có 3213 số nguyên a thỏa mãn đề bài.

Câu 93: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ không vượt quá 30. Tổng giá trị các phần tử của tập hợp S bằng bao nhiêu?

A. 120.

B. 210.

C. 108.

D. 136.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Đặt $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30$.

Ta có: $g'(x) = x^3 - 28x + 48 = (x - 2)(x^2 + 2x - 24)$.

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in [0; 2] \\ x = 4 \notin [0; 2] \\ x = -6 \notin [0; 2] \end{cases} \text{ và } g'(x) \geq 0, \forall x \in [0; 2].$$

$$\Rightarrow \max_{[0;2]} g(x) = g(2) = m + 14, \min_{[0;2]} g(x) = g(0) = m - 30.$$

$$\text{TH1: } m \leq 8: \begin{cases} m-30 \leq -22 \\ m+14 \leq 22 \\ m-30 < m+14 \end{cases} \Rightarrow |m-30| > |m+14| \Rightarrow \max_{[0;2]} f(x) = 30-m.$$

$$\max_{[0;2]} f(x) \leq 30 \Leftrightarrow 30-m \leq 30 \Leftrightarrow m \geq 0.$$

Trong trường hợp này $m \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

$$\text{TH2: } m > 8: \begin{cases} m-30 > -22 \\ m+14 > 22 \\ m-30 < m+14 \end{cases} \Rightarrow |m-30| < |m+14| \Rightarrow \max_{[0;2]} f(x) = m+14.$$

$$\max_{[0;2]} f(x) \leq 30 \Leftrightarrow m+14 \leq 30 \Leftrightarrow m \leq 16.$$

Trong trường hợp này $m \in \{9;10;11;...;16\}$.

Vậy $S = \{0;1;2;...;16\}$ nên tổng giá trị các phần tử của S là $0+1+2+...+16 = 16 \cdot \frac{17}{2} = 136$.

*** Bình luận một chút về việc tại sao lại chọn $m > 8, m \leq 8$.**

Từ việc phân chia các trường hợp sau:

$$\text{TH1: } m \geq 30 \Rightarrow \max_{[0;2]} f(x) = m+14.$$

$$\text{TH2: } m \leq -14 \Rightarrow \max_{[0;2]} f(x) = 30-m.$$

$$\text{TH3: } -14 < m < 30 \Rightarrow \max_{[0;2]} f(x) = \max\{|m+14|; |m-30|\} = \max\{m+14; 30-m\}.$$

Vậy ta lại phải giải bất phương trình: $m+14 \geq 30-m \Leftrightarrow m \geq 8$.

Rõ ràng giá trị $m=8$ xuất hiện ở trên và trong quá trình biện luận thì ta thấy không cần hai điểm chia $m=30$ và $m=-14$ nữa.

$$\text{Cách 2: Ta có: } y_{cbt} \Leftrightarrow \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \right| \leq 30, \forall x \in [0;2]$$

$$\Leftrightarrow -30 \leq \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \leq 30, \forall x \in [0;2]$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^4 + 14x^2 - 48x \leq m \leq -\frac{1}{4}x^4 + 14x^2 - 48x + 60, \forall x \in [0;2]$$

$$\Leftrightarrow \max_{[0;2]} \left(-\frac{1}{4}x^4 + 14x^2 - 48x \right) \leq m \leq \min_{[0;2]} \left(-\frac{1}{4}x^4 + 14x^2 - 48x + 60 \right)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq m \leq 16.$$

$$\text{Do } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow S = \{0;1;2;...;16\}.$$

Vậy tổng giá trị các phần tử của tập hợp S là $0+1+2+...+16 = 16 \cdot \frac{17}{2} = 136$.

$$\text{Cách 3: Đặt } t = \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x - 30, \forall x \in [0;2]$$

$$\text{Ta có: } t' = x^3 - 28x + 48 = (x-2)(x^2 + 2x - 24).$$

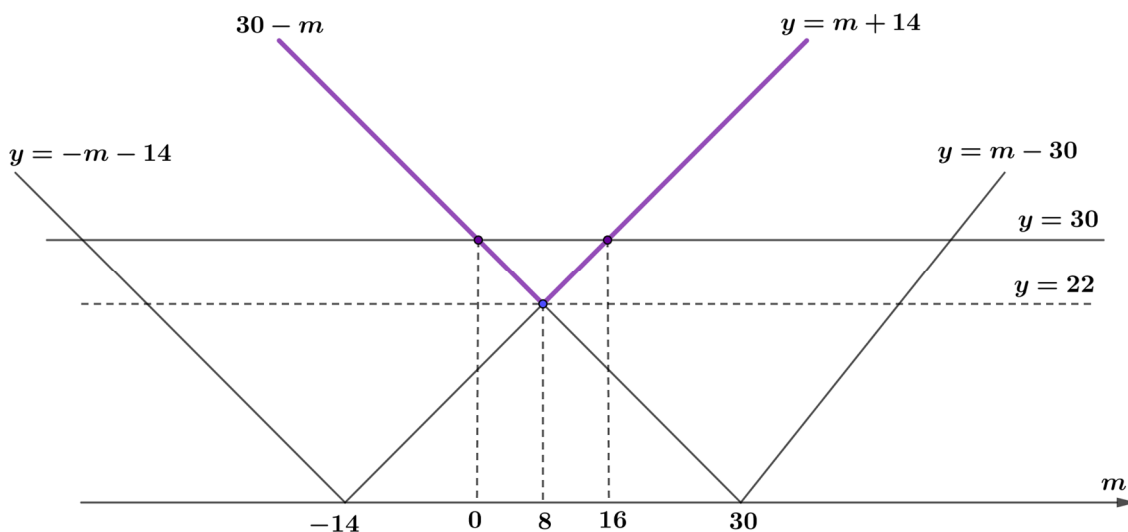
$$t' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \in [0;2] \\ x = 4 \notin [0;2] \\ x = -6 \notin [0;2] \end{cases} \text{ và } t' \geq 0, \forall x \in [0;2].$$

$$\Rightarrow \max_{[0;2]} t = t(2) = 14, \min_{[0;2]} t = t(0) = -30.$$

Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ chính là

$$\max_{[-30; 14]} |t + m| = \max\{|m - 30|; |m + 14|\} = g(m).$$

Ta có đồ thị của $g(m)$ là phần in đậm trong hình vẽ:



Dựa vào đồ thị ta có $g(m) \leq 30 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 16$. Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow S = \{0; 1; 2; \dots; 16\}$.

Vậy tổng giá trị các phần tử của tập hợp S là $0 + 1 + 2 + \dots + 16 = 16 \cdot \frac{17}{2} = 136$.

Câu 94: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + m$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| = 5$. Số phần tử của S là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + m$.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	1	2
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	m	$m+1$	m

+) Nếu $m < -1$ thì $\max_{[0;2]} |f(x)| = -m$, $\min_{[0;2]} |f(x)| = -m - 1$

Ta có $\max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| = 5 \Leftrightarrow -m - m - 1 = 5 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa)

+) Nếu $m > 0$ thì $\max_{[0;2]} |f(x)| = m + 1$, $\min_{[0;2]} |f(x)| = m$

Ta có $\max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| = 5 \Leftrightarrow m + 1 + m = 5 \Leftrightarrow m = 2$ (thỏa)

+) Nếu $-1 \leq m \leq 0$ thì $\min_{[0;2]} |f(x)| = 0$; $\max_{[0;2]} |f(x)| = \max\{|m|; |m + 1|\} \leq 1$

$\Rightarrow \max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| < 5$ (không thỏa điều kiện đề bài)

Vậy $S = \{-3; 2\}$, có 2 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Phương án nhiều A, học sinh xét thiếu trường hợp

Phương án nhiều C, học sinh sai dấu khi đổi vì phân hàm số ở bước cuối

Phương án nhiều D, học sinh nhầm nhận 2 giá trị $m = 0; m = -1$

Câu 95: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + m$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| = 5$. Số phần tử của S là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + m$.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1. \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	1	2	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$				

$m \rightarrow m+1 \rightarrow m$

+) Nếu $m < -1$ thì $\max_{[0;2]} |f(x)| = -m$, $\min_{[0;2]} |f(x)| = -m - 1$

Ta có $\max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| = 5 \Leftrightarrow -m - m - 1 = 5 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa)

+) Nếu $m > 0$ thì $\max_{[0;2]} |f(x)| = m + 1$, $\min_{[0;2]} |f(x)| = m$

Ta có $\max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| = 5 \Leftrightarrow m + 1 + m = 5 \Leftrightarrow m = 2$ (thỏa)

+) Nếu $-1 \leq m \leq 0$ thì $\min_{[0;2]} |f(x)| = 0$; $\max_{[0;2]} |f(x)| = \max\{|m|; |m + 1|\} \leq 1$

$\Rightarrow \max_{[0;2]} |f(x)| + \min_{[0;2]} |f(x)| < 5$ (không thỏa điều kiện đề bài)

Vậy $S = \{-3; 2\}$, có 2 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Phương án nhiều A, học sinh xét thiếu trường hợp

Phương án nhiều C, học sinh sai dấu khi đổi vì phân hàm số ở bước cuối

Phương án nhiều D, học sinh nhầm nhận 2 giá trị $m = 0; m = -1$

Câu 96: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left| \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}(m^2 - 2)x^3 - m^2x^2 + m \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ luôn bé hơn hoặc bằng 5?

A. 0.

B. 4.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}(m^2 - 2)x^3 - m^2x^2 + m$ trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có $g'(x) = x^3 + (m^2 - 2)x^2 - 2m^2x = x(x - 2)(x + m^2) \leq 0, \forall x \in [0; 2]$

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $[0; 2]$

Để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left| \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}(m^2 - 2)x^3 - m^2x^2 + m \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ luôn bé hơn hoặc

$$\text{bằng } 5 \Leftrightarrow \begin{cases} g(0) \leq 5 \\ g(2) \geq -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5 \\ 4 + \frac{8}{3}(m^2 - 2) - 4m^2 + m \geq -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{53}}{4} \leq m \leq \frac{3+\sqrt{53}}{4} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-1; 0; 1; 2\}.$$

Câu 97: Cho hàm số $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + m \right|$. Tính tổng tất cả các số nguyên m để $\max_{[-1;2]} y \leq 11$.

A. -19.

B. -37.

C. -30.

D. -11.

Lời giải

Chọn C

+ Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 + m$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$.

+ Ta có $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

$$+ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 2] \\ x = 1 \in [-1; 2] \\ x = 2 \in [-1; 2] \end{cases}$$

$$+ f(-1) = \frac{9}{4} + m; f(0) = m; f(1) = \frac{1}{4} + m; f(2) = m.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \max_{[-1;2]} f(x) = \max \{f(-1); f(0); f(1); f(2)\} = f(-1) = m + \frac{9}{4} \\ \min_{[-1;2]} f(x) = \min \{f(-1); f(0); f(1); f(2)\} = f(0) = f(2) = m \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \max_{[0;3]} y = \max \left\{ \left| m + \frac{9}{4} \right|, |m| \right\}, \text{ theo yêu cầu bài toán } \max_{[0;3]} y \leq 11 \Leftrightarrow \begin{cases} \left| m + \frac{9}{4} \right| \leq 11 \\ \left| m + \frac{9}{4} \right| \geq |m| \\ |m| \leq 11 \\ |m| \geq \left| m + \frac{9}{4} \right| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{53}{4} \leq m \leq \frac{35}{4} \\ m \geq -\frac{9}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{9}{8} \leq m \leq \frac{35}{4} \\ -11 \leq m \leq -\frac{9}{8} \end{cases} \Leftrightarrow -11 \leq m \leq \frac{35}{4}.$$

Vì m nguyên nên $m = \{-11; -10; \dots; 8\}$.

Kết luận: Tổng các số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $-11 - 10 - 9 - \dots + 8 = -30$.

Câu 98: Cho hàm số $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + m|$. Khi m thuộc $[-3; 3]$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 2]$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Xét $u(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + m$ liên tục trên $[0; 2]$.

Ta có $u'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x, u'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1. \\ x = 2 \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} u(0) = m \\ u(1) = m + 1. \\ u(2) = m \end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases} \min_{[0;2]} u(x) = m \\ \max_{[0;2]} u(x) = m + 1. \end{cases}$

$\min_{[0;2]} f(x) = \min\{0; |m|; |m + 1|\}$ hoặc $\min_{[0;2]} f(x) = 0$, với $m \in [-3; 3]$ (*).

Trường hợp 1: $m(m + 1) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0$.

$\min_{[0;2]} f(x) = 0$

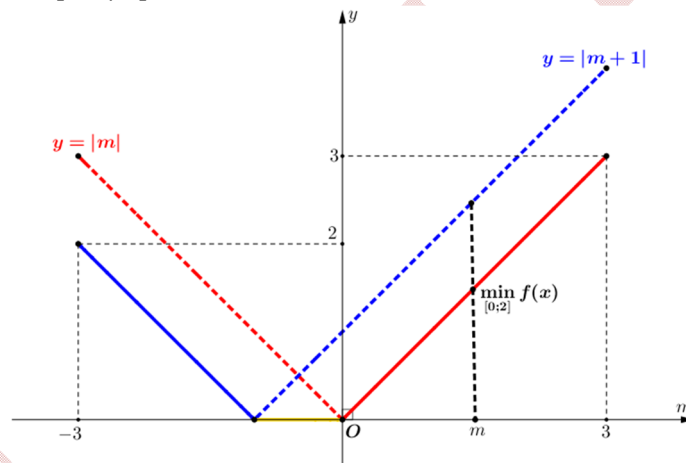
Trường hợp 2: $m > 0$ kết hợp với (*) ta có: $0 < m \leq 3$.

$\min_{[0;2]} f(x) = |m|$.

Trường hợp 3: $m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$ kết hợp với (*) ta có $-3 \leq m < -1$.

$\min_{[0;2]} f(x) = |m + 1|$.

Khi đó: $\min_{[0;2]} f(x) = \begin{cases} |m|, m \in [0; 3] \\ |m + 1|, m \in [-3; -1]. \\ 0, m \in [-1; 0] \end{cases}$



Dựa vào đồ thị ta thấy $\min_{[0;2]} f(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 3 khi $m = 3$.

Câu 99: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left| \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}(m^2 - 2)x^3 - m^2x^2 + m \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ luôn bé hơn hoặc bằng 5.

A. 0.

B. 4.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số: $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}(m^2 - 2)x^3 - m^2x^2 + m$ trên đoạn $[0; 2]$ hàm số liên tục.

$g'(x) = x^3 + (m^2 - 2)x^2 - 2m^2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -m^2 \end{cases}$

+) Nếu $m = 0 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(0) = 0 \\ g(2) = -\frac{4}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow \max_{[0;2]} |g(x)| = \max\{|g(0)|; |g(2)|\} = \frac{4}{3} < 5$ (1) (Thỏa mãn)

$$\begin{aligned}
 +) \text{ Nếu } m \neq 0 \Rightarrow g'(x) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -m^2 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(0) = m \\ g(2) = -\frac{4m^2}{3} + m - \frac{4}{3} = m - \frac{4m^2 + 4}{3} \quad (\forall m \neq 0) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Nhận thấy: $g(0) = m > g(2) = -\frac{4m^2 + 4}{3} + m, \forall m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Mặt khác $m - \frac{4m^2 + 4}{3} < 0, \forall m \in \mathbb{R}$

$$+) \text{ TH1: } m > 0: |g(2)| = \left| -\frac{4m^2 + 4}{3} + m \right| = \frac{4m^2 + 4}{3} - m = \frac{4m^2 - 3m + 4}{3} > m = g(0), \forall m > 0.$$

$$\Rightarrow \max_{[0;2]} |g(x)| = |g(2)| = \frac{4m^2 + 4}{3} - m(*).$$

$$+) \text{ TH2: } m < 0: |g(2)| = \left| -\frac{4m^2 + 4}{3} + m \right| = \frac{4m^2 + 4}{3} - m = \frac{4m^2 - 3m + 4}{3} > |m| = g(0), \forall m < 0.$$

$$\Rightarrow \max_{[0;2]} |g(x)| = |g(2)| = \frac{4m^2 + 4}{3} - m(**).$$

Vậy từ (*) và (**) ta có:

$$\max_{[0;2]} |g(x)| = |g(2)| = \frac{4m^2 - 3m + 4}{3} \leq 5 \Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{185}}{8} \leq m \leq \frac{3 + \sqrt{185}}{8}$$

$$\text{Do: } \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \{-1; 1; 2\} \quad (2)$$

KL: Từ (1) và (2) ta tìm được: $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

Câu 100: Cho hàm số $f(x) = |8x^4 + ax^2 + b|$, trong đó a, b là tham số thực. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 1. Hãy chọn khẳng định đúng?

A. $a < 0, b < 0$.

B. $a > 0, b > 0$

C. $a < 0, b > 0$.

D. $a > 0, b < 0$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1.

$$\text{Xét } g(x) = 8x^4 + ax^2 + b, g'(x) = 32x^3 + 2ax = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{a}{16} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \max_{[-1;1]} f(x) = 1 \Rightarrow g(0) = b \in [-1; 1].$$

TH1. $a > 0$. Ta có $g(1) = g(-1) = 8 + a + b > 1$. Suy ra $\max_{[-1;1]} f(x) > 1$ không thỏa YCBT.

TH2. $a < 0$.

Nếu $-\frac{a}{16} > 1 \Leftrightarrow a < -16$. Ta có $g(1) = g(-1) = 8 + a + b < -1$. Suy ra $\max_{[-1;1]} f(x) > 1$ không thỏa YCBT.

YCBT.

Nếu $-\frac{a}{16} < 1 \Leftrightarrow a > -16$.

Ta có BBT

x	-1	$-\frac{\sqrt{-a}}{4}$	0	$\frac{\sqrt{-a}}{4}$	1
$g'(x)$		- 0 + 0 - 0 +			
$g(x)$	$8 + a + b$	$b - \frac{a^2}{32}$	b	$b - \frac{a^2}{32}$	$8 + a + b$

$$\bullet \max_{[-1;1]} f(x) = b = 1. \text{ Khi đó YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{a^2}{32} \geq -1 \\ 8 + a + b \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \leq 64 \\ a \leq -8 \end{cases} \Leftrightarrow a = -8 \text{ (thỏa } a > -16)$$

$$\bullet \max_{[-1;1]} f(x) = 8 + a + b = 1. \text{ Khi đó, YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} b \leq 1 \\ b - \frac{a^2}{32} \geq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \geq -8 \\ \frac{a^2}{32} + a + 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -8 \\ -24 \leq a \leq -8 \end{cases} \Leftrightarrow a = -8 \Rightarrow b = 1.$$

$$\bullet \max_{[-1;1]} f(x) = \left| b - \frac{a^2}{32} \right| = 1. \text{ Khi đó, YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} b - \frac{a^2}{32} = -1 \\ 8 + a + b \leq 1 \\ b \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{a^2}{32} - 1 \\ 6 + a + \frac{a^2}{32} \leq 0 \\ a \geq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Vậy $a = -8, b = 1$ thỏa YCBT.

Cách 2.

Đặt $t = x^2$ khi đó ta có $g(t) = 8t^2 + at + b$.

Vì $x \in [-1; 1]$ nên $t \in [0; 1]$.

Theo yêu cầu bài toán thì ta có: $0 \leq g(t) \leq 1$ với mọi $t \in [0; 1]$ và có dấu bằng xảy ra.

Đồ thị hàm số $g(t)$ là một parabol có bề lõm quay lên trên do đó điều kiện trên dẫn đến hệ điều kiện sau xảy ra:

$$\begin{cases} -1 \leq g(0) \leq 1 \\ -1 \leq g(1) \leq 1 \\ -1 \leq \frac{-\Delta}{32} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq b \leq 1 \\ -1 \leq 8 + a + b \leq 1 \\ -32 \leq 32b - a^2 \leq 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq b \leq 1 (1) \\ -1 \leq 8 + a + b \leq 1 (2) \\ -32 \leq a^2 - 32b \leq 32 (3) \end{cases}$$

Lấy (1) + 32(3) ta có: $-64 \leq a^2 \leq 64$ do đó $-8 \leq a \leq 8$.

Lấy (3) + 32(2) ta có: $-64 \leq a^2 + 32a + 256 \leq 64$

Suy ra: $a^2 + 32a + 192 \leq 0 \Leftrightarrow -24 \leq a \leq -8$.

Khi đó ta có $a = -8$ và $b = 1$.

Kiểm tra: $g(t) = 8t^2 - 8t + 1 = 2(2t - 1)^2 - 1$

Vì $0 \leq t \leq 1$ nên $-1 \leq 2t - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (2t - 1)^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq g(t) = 2(2t - 1)^2 - 1 \leq 1$.

Vậy $\max|g(t)| = 1$ khi $t = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ (t/m).

Câu 101: Biết đồ thị hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đúng ba điểm chung với trục hoành và

$f(1) = -1; f'(1) = 0$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để bất

phương trình $|f(x) - m| \leq 12$ nghiệm đúng $\forall x \in [0; 2]$. Số phần tử của S là

A. 10.

B. 11.

C. 11.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đúng ba điểm chung với trục hoành nên đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành tại gốc tọa độ, suy ra $f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ (I).

Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$.

Theo giả thiết $\begin{cases} f(1) = -1 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = -1 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases}$ (II).

Từ (I) và (II) suy ra $a = 1; b = -2; c = 0 \Rightarrow f(x) = x^4 - 2x^2$.

Xét hàm số $y = x^4 - 2x^2 - m$ trên đoạn $[0; 2]$.

Để thấy hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[0; 2]$ và có $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0; 2] \\ x = 1 \in [0; 2] \\ x = -1 \notin [0; 2] \end{cases}$.

Khi đó $y(0) = -m; y(1) = -m-1; y(2) = -m+8 \Rightarrow \begin{cases} \max_{[0;2]} y = -m+8 \\ \min_{[0;2]} y = -m-1 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \text{Theo bài ra } |x^4 - 2x^2 - m| \leq 12, \forall x \in [0; 2] &\Leftrightarrow \max\{|-m-1|; |-m+8|\} \leq 12 \Leftrightarrow \begin{cases} |-m+8| \leq 12 \\ |-m+8| \geq |-m-1| \\ |-m-1| \leq 12 \\ |-m-1| \geq |-m+8| \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq m \leq 20 \\ m \leq \frac{7}{2} \\ -13 \leq m \leq 11 \\ m \geq \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq m \leq \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} \leq m \leq 11 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 11. \end{aligned}$$

Suy ra S có 11 phần tử.

HÀM HỮA TỬ

Câu 102: Cho hàm số $f(x) = \frac{x+m^2}{x+1}$ (m là số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho

$$\max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| = 14. \text{ Số phần tử của S là}$$

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $f(x)$ là hàm số liên tục, đơn điệu hoặc là hàm hằng và không âm trên $[0; 1]$, $f(0) = m^2$, $f(1) = \frac{m^2+1}{2}$, $f(-m^2) = 0$.

$$\text{Do đó } \max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| = 14 \Leftrightarrow m^2 + \frac{m^2+1}{2} = 14 \Leftrightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 3$$

Vậy số phần tử của S là 2.

Câu 103: Cho hàm số $f(x) = \frac{x+m}{x+1}$. Gọi S là tập hợp các giá trị của m sao cho $\max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| = 2$. Số phần tử của S là

A. 6.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy hàm số $f(x) = \frac{x+m}{x+1}$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$, $f(0) = m; f(1) = \frac{m+1}{2}$ và đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $x = -m$

TH 1. Nếu $0 \leq -m \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0$ thì $\max_{[0;1]} |f(x)| = \max\left\{|m|; \left|\frac{m+1}{2}\right|\right\}; \min_{[0;1]} |f(x)| = 0$.

$$\text{Do đó } \max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} |m| = 2 \\ \left| \frac{m+1}{2} \right| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m = 3 \\ m = -5 \end{cases}$$

$$\text{TH 2. Nếu } -m < 0 \Leftrightarrow m > 0 \text{ thì } \max_{[0;1]} |f(x)| = \max \left\{ m; \frac{m+1}{2} \right\}; \min_{[0;1]} |f(x)| = \min \left\{ m; \frac{m+1}{2} \right\}$$

$$\text{Do đó } \max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| = 2 \Leftrightarrow m + \frac{m+1}{2} = 2 \Leftrightarrow m = 1.$$

$$\text{TH 3. Nếu } -m > 1 \Leftrightarrow m < -1 \text{ thì } \max_{[0;1]} |f(x)| = \max \left\{ -m; -\frac{m+1}{2} \right\}; \min_{[0;1]} |f(x)| = \min \left\{ -m; -\frac{m+1}{2} \right\}$$

$$\text{Ta có } \max_{[0;1]} |f(x)| + \min_{[0;1]} |f(x)| = 2 \Leftrightarrow -m - \frac{m+1}{2} = 2 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{3}.$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 104: Cho hàm số $f(x) = \frac{x-m^2+m}{x+1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập các giá trị của m sao cho $\max_{[1;2]} |f(x)| = 2 \min_{[1;2]} |f(x)|$. Tích tất cả các phần tử của S là

A. 1.

B. 2.

C. -5.

D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Do $f'(x) = \frac{m^2-m+1}{(x+1)^2} > 0 \forall m \in \mathbb{R}, \forall x \in [1;2]$ nên hàm số đơn điệu trên đoạn $[1;2]$.

$$f(1) = \frac{-m^2+m+1}{2}; f(2) = \frac{-m^2+m+2}{3}$$

+Khi $f(1); f(2)$ trái dấu hoặc $f(1).f(2) = 0$ thì $\min_{[1;2]} |f(x)| = 0$, từ yêu cầu của bài toán $\max_{[1;2]} |f(x)| =$

$2 \min_{[1;2]} |f(x)|$ suy ra $\max_{[1;2]} |f(x)| = 0 \Rightarrow f(1) = f(2) = 0$ điều này không xảy ra vì hàm số $f(x) = \frac{x-m^2+m}{x+1}$ là hàm số đơn điệu trên $[1;2]$.

$$+\text{Khi } f(1); f(2) \text{ cùng dương} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = \frac{-m^2+m+1}{2} > 0 \\ f(2) = \frac{-m^2+m+2}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m < 1 \\ m^2-m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m^2-m < 1$$

$$\text{Thì } \max_{[1;2]} |f(x)| = |f(2)| = \frac{-m^2+m+2}{3}; \min_{[1;2]} |f(x)| = |f(1)| = \frac{-m^2+m+1}{2}$$

Để $\max_{[1;2]} |f(x)| = 2 \min_{[1;2]} |f(x)|$ thì $\frac{-m^2+m+2}{3} = 2 \cdot \frac{-m^2+m+1}{2} \Leftrightarrow m^2-m = \frac{1}{2}$ thỏa mãn điều kiện $m^2-m < 1$ và phương trình $m^2-m - \frac{1}{2} = 0$ cho ta hai giá trị m có tích bằng $-\frac{1}{2}$.

$$+\text{Khi } f(1); f(2) \text{ cùng âm} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = \frac{-m^2+m+1}{2} < 0 \\ f(2) = \frac{-m^2+m+2}{3} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m > 1 \\ m^2-m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow m^2-m > 2$$

$$\text{thì } \max_{[1;2]} |f(x)| = |f(1)| = -\frac{-m^2+m+1}{2}; \min_{[1;2]} |f(x)| = |f(2)| = -\frac{-m^2+m+2}{3}$$

Để $\max_{[1;2]} |f(x)| = 2 \min_{[1;2]} |f(x)|$ thì $\frac{-m^2+m+1}{2} = 2 \cdot \frac{-m^2+m+2}{3} \Leftrightarrow m^2-m = 5$ thỏa mãn điều kiện $m^2-m > 2$ và phương trình $m^2-m - 5 = 0$ cho ta hai giá trị m có tích bằng -5 .

Từ hai trường hợp trên ta suy ra S có bốn phần tử và tích của chúng bằng $-\frac{1}{2} \cdot -5 = \frac{5}{2}$.

$$+\text{ Nếu } h(0).h(1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{-1}{2} \\ m > 0 \end{cases}$$

$$\max_{[0;1]} g(t) + \min_{[0;1]} g(t) = |4m| + |2m+1| = 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-5}{6}(n) \\ m = \frac{1}{2}(l) \end{cases}$$

$$+ \text{ Nếu } h(0).h(1) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{2} \leq m \leq 0 \Rightarrow \min_{[0;1]} g(t) = 0$$

$$\max_{[0;1]} g(t) + \min_{[0;1]} g(t) = 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |4m| = 4 \\ |2m + 1| = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1(l) \\ m = \frac{3}{2}(l) \\ m = \frac{-5}{2}(l) \end{cases}$$

Vậy tổng các phần tử của S là $\frac{-1}{3}$.

Câu 105: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x) = \left| \frac{-4x+m}{x-3} \right| \text{ trên đoạn } [-2; 2] \text{ bằng } 6. \text{ Tổng tất cả các phần tử của } S \text{ bằng}$$

A. -16.

B. 16.

C. 2.

D. 14.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Xét hàm số } g(x) = \frac{-4x+m}{x-3}, x \in [-2; 2], \text{ ta có } g'(x) = \frac{12-m}{(x-3)^2}.$$

$$g(-2) = -\frac{8+m}{5}, g(2) = 8-m.$$

$$\text{Do đó : } \max_{[-2;2]} f(x) = \max \left\{ \left| -\frac{8+m}{5} \right|, |8-m| \right\} = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} \left| -\frac{8+m}{5} \right| = 6 \\ \left| -\frac{8+m}{5} \right| \geq |8-m| \\ |8-m| = 6 \\ |8-m| \geq \left| -\frac{8+m}{5} \right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 14 \end{cases}.$$

Vậy $S = \{2; 14\}$. Vậy tổng các giá trị của S bằng 16.

Câu 106: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-m}{1-x}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để $\min_{[-2;0]} |f(x)| = 2$. Tổng các phần tử của tập S là

A. 2.

B. -8.

C. -5.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$+) D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

$$*) \text{ Với } m = 2. \text{ Ta có } f(x) = \frac{2x-2}{1-x} = -2 \text{ nên } \min_{[-2;0]} |f(x)| = 2. \text{ Vậy } m = 2 \text{ (nhận).}$$

*) Với $m \neq 2$. Khi đó, $f'(x) = \frac{2-m}{(1-x)^2}, \forall x \neq 1$.

+) Ta có $f(-2) = \frac{-m-4}{3}, f(0) = -m; f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - m \Leftrightarrow x = \frac{m}{2}$. Ta xét các trường hợp sau:

TH1: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại một điểm có hoành độ thuộc $[-2; 0]$, tức là $-2 \leq \frac{m}{2} \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0$. Khi đó $\min_{[-2; 0]} |f(x)| = 0$ (loại).

TH2: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không cắt trục hoành hoặc cắt trục hoành tại một điểm có hoành độ nằm ngoài đoạn $[-2; 0]$, tức là $\begin{cases} \frac{m}{2} < -2 \\ \frac{m}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m > 0 \end{cases} (*)$.

Khi đó:

$$\min_{[-2; 0]} |f(x)| = \min \left\{ |f(-2)|; |f(0)| \right\} = \min \left\{ \left| \frac{-m-4}{3} \right|; |-m| \right\} = \min \left\{ \left| \frac{m+4}{3} \right|; |m| \right\}.$$

+) Nếu $\left| \frac{m+4}{3} \right| \leq |m| \Leftrightarrow |m+4| \leq 3|m| \Leftrightarrow (m+4)^2 \leq (3m)^2 \Leftrightarrow (4-2m)(4m+4) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -1 \end{cases} (**) \text{ thì } \min_{[-2; 0]} |f(x)| = \left| \frac{m+4}{3} \right|.$$

Ta có $\left| \frac{m+4}{3} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m+4=6 \\ m+4=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \text{ (loại, } m \neq 2) \\ m=-10 \text{ (nhận)} \end{cases}$ (do điều kiện (*) và (**)).

+) Nếu $\left| \frac{m+4}{3} \right| > |m| \Leftrightarrow -1 < m < 2$ thì $\min_{[-2; 0]} |f(x)| = |m|$.

Ta có $|m| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \text{ (loại)} \\ m=-2 \text{ (loại)} \end{cases}$.

Suy ra $S = \{2; -10\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là -8 .

Câu 107: Cho hàm số $f(x) = \frac{x+2020}{x-m}$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m sao cho $\max_{[0; 2019]} |f(x)| = 2020$.

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $f(x)$ xác định với mọi $x \neq m$.

*Nếu $m = -2020$ thì $f(x) = 1, \forall x \neq -2020$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

* Nếu $m \neq -2020$ thì $f(x)$ đơn điệu trên mỗi khoảng $(-\infty; m)$ và $(m; +\infty)$ nên yêu cầu bài toán

$$\max_{[0; 2019]} |f(x)| = 2020 \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [0; 2019] \\ \max\{|f(0)|; |f(2019)|\} = 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [0; 2019] \\ \max\left\{\frac{2020}{|m|}; \frac{4039}{|m-2019|}\right\} = 2020 \end{cases} \cdot \text{Ta xét hai}$$

trường hợp sau:

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} m \notin [0; 2019] \\ \frac{2020}{|m|} = 2020 \\ \frac{4039}{|m-2019|} \leq 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 2019 \\ m = \pm 1 \\ \frac{4039}{|m-2019|} \leq 2020 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} m \notin [0; 2019] \\ \frac{4039}{|m-2019|} = 2020 \\ \frac{2020}{|m|} \leq 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 2019 \\ m = \frac{4082419}{2020} \approx 2021 \\ m = \frac{4074341}{2020} \approx 2017 \\ \frac{2020}{|m|} \leq 2020 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{4082419}{2020} \approx 2021.$$

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 108: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x+1} \right| \text{ trên } [1; 2] \text{ bằng } 2. \text{ Số phần tử của } S \text{ là}$$

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét hàm số: } u = \frac{x^2 + mx + m}{x+1}.$$

$$u' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}; u' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1; 2] \\ x = -2 \notin [1; 2] \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } u' > 0 \forall x \in [1; 2] \text{ nên } \max_{[1; 2]} y = \left\{ \left| m + \frac{4}{3} \right|, \left| m \frac{1}{2} \right| \right\}.$$

$$\max_{[1; 2]} y = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ m = -\frac{10}{3} \end{cases}. \text{ Vậy } S = \left\{ \frac{2}{3}; -\frac{10}{3} \right\}.$$

Câu 109: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2} \right|$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 3. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

A. $-\frac{8}{3}$.

B. 5.

C. $\frac{5}{3}$.

D. -1.

Lời giải.

Chọn D

Xét hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2}$, $[-1; 1]$. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ và $f'(x) = \frac{x^2 - 4x}{(x - 2)^2}$.

Xét $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \notin [-1; 1] \end{cases}$. Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

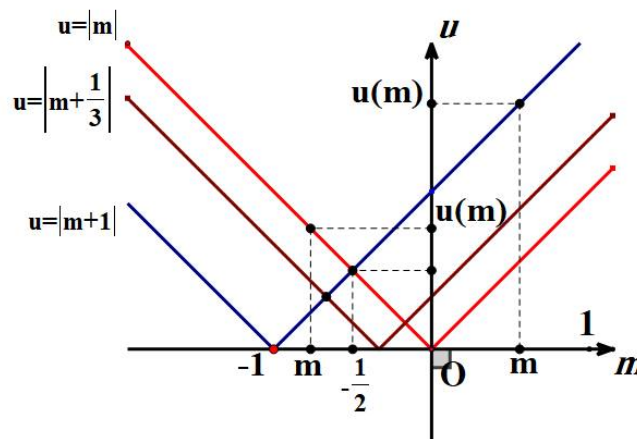
x	-1 0 1			
$f'(x)$		+ 0 -		
$f(x)$		$f(-1)$ $f(0)$ $f(1)$		

Ta có: $f(-1) = -m - \frac{1}{3}$, $f(0) = -m$, $f(1) = -m - 1$.

Suy ra: $\max_{[-1; 1]} g(x) = \max \{|f(-1)|; |f(0)|; |f(1)|\}$.

Với $g(x) = |f(x)| = \left| \frac{x^2 - mx + 2m}{x - 2} \right|$. Ta có $\max_{[-1; 1]} g(x) = \max \{|f(-1)|; |f(0)|; |f(1)|\}$.

Dựa vào đồ thị các hàm số $u = |m|$; $u = |m + 1|$; $u = \left| m + \frac{1}{3} \right|$.



Xét với $m \geq -\frac{1}{2}$. Ta có $\max_{[-1; 1]} g(x) = |f(1)| = m + 1 = 3 \Rightarrow m = 2$.

Xét với $m < \frac{-1}{2}$. Ta có $\max_{[-1;1]} g(x) = |f(0)| = -m = 3 \Rightarrow m = -3$.

Vậy $S = \{-3; 2\}$.

Câu 110: Cho hàm số $y = \left| \frac{x^2 - (m+1)x + 2m+2}{x-2} \right|$ (với m là tham số thực). Hỏi $\max_{[-1;1]} y$ có giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = \left| \frac{x^2 - x + 2}{x-2} - m \right| = |t - m|$, trong đó $t = \frac{x^2 - x + 2}{x-2} \in [-2; -1], \forall x \in [-1; 1]$.

$$t' = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} \Rightarrow t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in (-1; 1) \\ x = 4 \notin (-1; 1) \end{cases}$$

$$t(-1) = -\frac{4}{3}, t(0) = -1, t(1) = -2$$

Do đó $\max_{[-1;1]} y = \max_{[-1;1]} |t - m| = \max \{|m+2|, |m+1|\} = \max \{|m+2|, |-m-1|\}$

$$\geq \frac{|m+2| + |-m-1|}{2} \geq \frac{|(m+2) + (-m-1)|}{2} = \frac{1}{2}.$$

Dấu bằng đạt tại $m+2 = -m-1 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$.

Câu 111: Cho hàm số $f(x) = \left| \frac{x^2 + (m-2)x + 2-m}{x-1} \right|$, trong đó m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m thỏa mãn $\min_{[2;3]} f(x) + 2\max_{[2;3]} f(x) = \frac{1}{2}$. Số phần tử của tập S là

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$f(x) = \left| \frac{x^2 + (m-2)x + 2-m}{x-1} \right| = \left| \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1} + m \right|.$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$ trên đoạn $[2; 3]$, ta có

$g'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \geq 0, \forall x \in [2; 3]$ ($g'(x) = 0$ tại $x = 2$). Suy ra, tập giá trị của $g(x)$ trên $[2; 3]$ là đoạn $[g(2); g(3)] = \left[2; \frac{5}{2}\right]$.

Đặt $t = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$, hàm số $f(x)$ trên $[2; 3]$ trở thành hàm số $h(t) = |t + m|$ xét trên $\left[2; \frac{5}{2}\right]$. Khi đó:

$$\min_{[2;3]} f(x) = \min_{\left[2; \frac{5}{2}\right]} h(t);$$

$$\max_{[2;3]} f(x) = \max_{\left[2; \frac{5}{2}\right]} h(t) = \max \left\{ |m+2|; \left| m + \frac{5}{2} \right| \right\} = \frac{|(m+2) + (m+\frac{5}{2})| + |(m+2) - (m+\frac{5}{2})|}{2} = \left| m + \frac{9}{4} \right| + \frac{1}{4} \quad *) \text{ Xét}$$

$$(m+2) \left(m + \frac{5}{2} \right) \leq 0 \Leftrightarrow m \in \left[-\frac{5}{2}; -2 \right] \quad (1)$$

Khi đó, $\min_{[2;3]} f(x) = 0$. Suy ra

$$\min_{[2;3]} f(x) + 2\max_{[2;3]} f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| 2m + \frac{9}{2} \right| + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{9}{4} \text{ (thoaman(1))}$$

*) Xét $(m+2)\left(m+\frac{5}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{5}{2} \\ m > -2 \end{cases} (2)$. Khi đó

$$\min_{[2;3]} f(x) = \min_{\left[1;\frac{5}{2}\right]} h(t) = \min \left\{ \left| m+2 \right|; \left| m+\frac{5}{2} \right| \right\} = \frac{|(m+2)+(m+\frac{5}{2})| - |(m+2)-(m+\frac{5}{2})|}{2} = \left| m+\frac{9}{4} \right| - \frac{1}{4} \quad \text{Suy ra}$$

$$\min_{[2;3]} f(x) + 2\max_{[2;3]} f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| m+\frac{9}{4} \right| - \frac{1}{4} + 2 \left| m+\frac{9}{4} \right| + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| m+\frac{9}{4} \right| = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \left| m+\frac{9}{4} \right| = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{13}{6} \\ m = -\frac{7}{3} \end{cases} (L).$$

Vậy $S = \left\{ -\frac{9}{4} \right\}$. Suy ra, số phần tử của tập S bằng 1.

Câu 112: Cho hàm số $y = \left| \frac{x^4+ax+a}{x+1} \right|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1; 2]$. Có bao nhiêu số nguyên a sao cho $M \geq 2m$?

A. 15.

B. 14.

C. 16.

D. 13.

Lời giải

Chọn C

Xét $u = \frac{x^4+ax+a}{x+1}$ trên đoạn $[1; 2]$, ta có $u' = \frac{3x^4+4x^3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [1; 2]$.

Do đó, $\max_{[1;2]} u = u(2) = a + \frac{16}{3}, \min_{[1;2]} u = u(1) = a + \frac{1}{2}$.

$$\text{TH1: } a + \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} M = a + \frac{16}{3} \\ m = a + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{1}{2} \geq 0 \\ a + \frac{16}{3} \geq 2\left(a + \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{13}{3}.$$

$$\text{TH2: } a + \frac{16}{3} \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} M = -\left(a + \frac{1}{2}\right) \\ m = -\left(a + \frac{16}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{16}{3} \leq 0 \\ -\left(a + \frac{1}{2}\right) \geq -2\left(a + \frac{16}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{61}{6} \leq a \leq -\frac{16}{3}.$$

$$\text{TH3: } \left(a + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(a + \frac{16}{3}\right) \leq 0 \Rightarrow m = 0, M = \max \left\{ \left| a + \frac{1}{2} \right|, \left| a + \frac{16}{3} \right| \right\} \Rightarrow M > 2m \text{ (thỏa mãn)}.$$

Ta có: $-\frac{61}{6} \leq a \leq \frac{13}{3}, a \in \{-10; \dots; 4\}$. Vậy có 15 số nguyên thỏa mãn.

Câu 113: Xét hàm số $f(x) = \left| \frac{mx-2\sqrt{x+4}}{2x+4} \right|$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn điều kiện $0 < \min_{[-1;1]} f(x) < 1$?

A. 4.

B. 8.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Xét hàm số $g(x) = \frac{mx-2\sqrt{x+4}}{2x+4}$ liên tục trên $[-1; 1]$ và $f(x) = |g(x)|$.

Ta có $g(0) = -1; g(1) = \frac{m-2\sqrt{5}}{6}; g(-1) = \frac{-m-2\sqrt{3}}{2}$.

- Nếu $\begin{cases} g(-1) \geq 0 \\ g(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2\sqrt{5} \\ m \leq -2\sqrt{3} \end{cases}$ thì $\min_{[-1;1]} f(x) = 0$, không thỏa mãn bài toán.

- Nếu $\begin{cases} g(-1) < 0 \\ g(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{5}$

Mà m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Ta có $g'(x) = \frac{4m + \frac{2x+12}{\sqrt{x+4}}}{(2x+4)^2}$.

TH1: $m \geq 0$.

Khi đó $g'(x) > 0 \forall x \in [-1; 1]$. Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[-1; 1]$.

Mà $g(0) = -1 \Rightarrow g(1) > -1$. Do đó $-1 < g(1) < 0$. Vậy $0 < \min_{[-1;1]} f(x) < 1$ hay $m \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ thỏa mãn bài toán.

TH2: $m < 0$.

Xét hàm số $h(x) = \frac{2x+12}{\sqrt{x+4}}$ trên $[-1; 1]$. Ta có $h'(x) = \frac{x+2}{(x+4)\sqrt{x+4}} > 0 \forall x \in [-1; 1]$.

Khi đó dễ thấy $h(x) \in \left[\frac{10}{\sqrt{3}}; \frac{14}{\sqrt{5}}\right]$.

* Khi $m = -1 \Rightarrow 4m + h(x) > 0 \forall x \in [-1; 1] \Rightarrow g'(x) > 0 \forall x \in [-1; 1]$ hay hàm số $g(x)$ đồng biến trên $[-1; 1]$. Khi đó $-1 < g(1) < 0$ nên $0 < \min_{[-1;1]} f(x) < 1$. Vậy $m = -1$ thỏa mãn.

* Khi $m \in \{-3; -2\} \Rightarrow 4m + h(x) < 0 \forall x \in [-1; 1] \Rightarrow g'(x) < 0 \forall x \in [-1; 1]$ hay hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $[-1; 1]$. Khi đó $g(-1) > g(0) \Rightarrow -1 < g(-1) < 0$ nên $0 < \min_{[-1;1]} f(x) < 1$. Vậy $m \in \{-3; -2\}$ thỏa mãn.

Do đó $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ hay có 8 giá trị nguyên của m .

Cách 2

Nhận thấy $f(x)$ liên tục trên $[-1; 1]$ nên tồn tại giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Ta có $\begin{cases} f(x) \geq 0, \forall x \in [-1; 1] \\ f(0) = 1 \end{cases}$ nên suy ra $0 \leq \min_{x \in [-1;1]} f(x) \leq 1$.

Vậy điều kiện $0 < \min_{x \in [-1;1]} f(x) < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \min_{x \in [-1;1]} f(x) > 0 \quad (1) \\ \min_{x \in [-1;1]} f(x) \neq 1 \quad (2) \end{cases}$

□ Ta có (1) $\Leftrightarrow$ Phương trình $mx - 2\sqrt{x+4} = 0$ vô nghiệm trên $[-1; 1]$

$\Leftrightarrow$ Phương trình $m = \frac{2\sqrt{x+4}}{x}$ vô nghiệm trên $[-1; 1] \setminus \{0\}$

Xét hàm số $g(x) = \frac{2\sqrt{x+4}}{x}, \forall x \in [-1; 1] \setminus \{0\}$

$$g'(x) = \frac{-x-8}{x^2\sqrt{x+4}} < 0, \forall x \in [-1; 1] \setminus \{0\}$$

Bảng biến thiên

x	-1	0	1
$g'(x)$	-	-	
$g(x)$	$-2\sqrt{3}$ $\nearrow -\infty$	$+\infty$ $\searrow 2\sqrt{5}$	

Từ bảng biến thiên suy ra điều kiện phương trình $m = \frac{2\sqrt{x+4}}{x}$ vô nghiệm trên $[-1; 1] \setminus \{0\} \Leftrightarrow -2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{5}$.

Do m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

□ Để giải (2) trước hết ta đi tìm điều kiện để $\min_{x \in [-1;1]} f(x) = 1$.

Do $f(0) = 1$ nên $\min_{x \in [-1;1]} f(x) = f(0)$, mà $0 \in (-1; 1)$, suy ra $x = 0$ là điểm cực trị của hàm số $f(x)$.

Đặt $h(x) = \frac{mx - 2\sqrt{x+4}}{2x+4} \Rightarrow h'(0) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$. Do đó với m nguyên thì (2) chắc chắn xảy ra.

Vậy $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ thỏa mãn điều kiện (2)

Kết luận: Có 8 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

HÀM SỐ KHÁC

Câu 114: Cho hàm số $y = \left| 2x - x^2 - \sqrt{(x+1)(3-x)} + m \right|$. Khi giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{17}{8}$.

B. $\frac{9}{8}$.

C. $\frac{7}{8}$.

D. $\frac{15}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định khi: $(x+1)(3-x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$.

Đặt $t = \sqrt{(x+1)(3-x)} = \sqrt{3+2x-x^2}$ ($t \in [0; 2]$) và $2x - x^2 = t^2 - 3$.

Khi đó ta cần tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = |t^2 - t - 3 + m|$ trên đoạn $[0; 2]$.

Với $u = t^2 - t - 3 + m$ ta có: $\max_{[0;2]} u = m - 1; \min_{[0;2]} u = m - \frac{13}{4}$.

Do đó $\max y = \max \left\{ |m-1|; \left| m - \frac{13}{4} \right| \right\} \geq \frac{|m-1| + \left| \frac{13}{4} - m \right|}{2} \geq \frac{|m-1 + \frac{13}{4} - m|}{2} = \frac{9}{8}$.

Dấu bằng xảy ra $|m-1| = \left| \frac{13}{4} - m \right| = \frac{9}{8} \Leftrightarrow m = \frac{17}{8}$.

Câu 115: Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |e^{2x} - 4e^x + m|$ trên đoạn $[0; \ln 4]$ bằng 6?

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Xét $x \in [0; \ln 4]$. Đặt $t = e^x \Rightarrow t \in [1; 4]$. Đặt $g(t) = t^2 - 4t + m$ với $t \in [1; 4]$.

Đạo hàm: $g'(t) = 2t - 4$. Xét $g'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Ta có: $g(1) = m - 3; g(2) = m - 4; g(4) = m$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của $f(x) = |e^{2x} - 4e^x + m|$ trên $[0; \ln 4]$ sẽ thuộc $A = \{|m-3|; |m-4|; |m|\}$.

➤ Xét $|m-4| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 10 \Rightarrow A = \{7; 6; 10\} \\ m = -2 \Rightarrow A = \{5; 6; 2\} \end{cases}$.

Ta thấy $m = 10$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\min f(x) = 6$.

➤ Xét $|m-3| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 9 \Rightarrow A = \{5; 6; 9\} \\ m = -3 \Rightarrow A = \{7; 6; 3\} \end{cases}$ (không thỏa mãn).

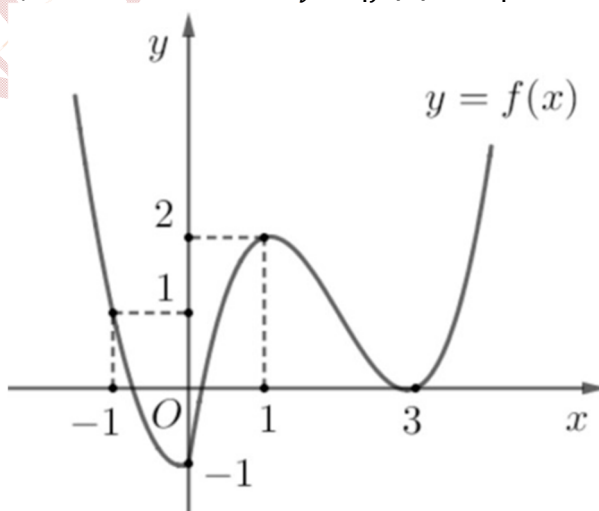
➤ Xét $|m| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \Rightarrow A = \{2; 3; 6\} \\ m = -6 \Rightarrow A = \{10; 9; 6\} \end{cases}$.

Ta thấy $m = -6$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\min f(x) = 6$.

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

HÀM HỢP

Câu 116: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tổng tất cả các giá trị thực của m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x) + m|$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng 2019 là



A. 2020.

B. 3.

C. 2018.

D. -1.

Lời giải

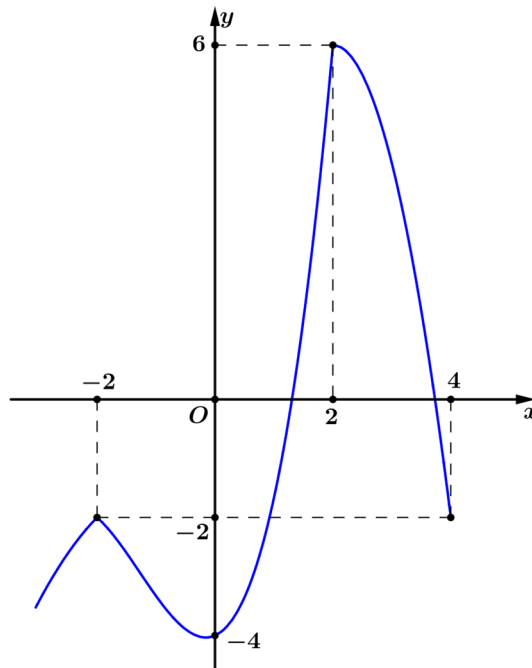
Chọn D

Đặt $g(x) = f(x) + m$. Khi đó

$$\begin{cases} \max_{[-3;1]} g(x) = g(1) = f(1) + m = m + 2 \\ \min_{[-3;1]} g(x) = g(0) = f(0) + m = m - 1 \end{cases}$$

Do đó $\max_{[-3;1]} y = \max\{|m+2|, |m-1|\} = 2019 \Leftrightarrow \begin{cases} |m+2| \leq |m-1| = 2019 \\ |m-1| < |m+2| = 2019 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2017 \\ m = -2018 \end{cases}$
 Vậy tổng các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $2017 - 2018 = -1$.

Câu 117: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ với $x \in [-2; 4]$ như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = [f(2-x) + m]^2$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2; 4]$ bằng 49. Tính tổng các phần tử của S .



A. -23.

B. -12.

C. -9.

D. -2.

Lời giải

Chọn D

Vì $x \in [-2; 4]$ nên suy ra $2-x \in [-2; 4]$.

Dựa vào hình vẽ ta thấy $-4 \leq f(x) \leq 6, \forall x \in [-2; 4]$

$$\Rightarrow -4 \leq f(2-x) \leq 6, \forall x \in [-2; 4]$$

$$\Leftrightarrow -4+m \leq f(2-x)+m \leq 6+m, \forall x \in [-2; 4]$$

$$\text{Theo đề bài ta có } \max_{[-2;4]} y = 49 \Leftrightarrow \begin{cases} 6+m=7 \\ -4+m \in [-7;7) \\ -4+m=-7 \\ 6+m \in (-7;7] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m \in [-3;11) \\ m=-3 \\ m \in (-13;1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-3 \end{cases}$$

Suy ra $S = \{-3; 1\}$. Vậy tổng các phần tử của S là $-3+1 = -2$.

Câu 118: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |f(2 - \cos x) + m|$ bằng 2. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 4.

B. -16.

C. -32.

D. -12.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 2 - \cos x$ ta có $t \in [1; 3]$. Khi đó bài toán trở thành tìm m để hàm số $y = |t^3 - 3t + m|$ với $\forall t \in [1; 3]$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2.

Xét $u(t) = t^3 - 3t + m$ trên đoạn $[1; 3]$. Ta có hàm số $u(t)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$.

$$u'(t) = 3t^2 - 3; u'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \notin (1; 3) \\ t = 1 \notin (1; 3) \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} \max_{[1;3]} u(t) = \max\{u(1); u(3)\} = \max\{m+18; m-2\} = m+18 \\ \min_{[1;3]} u(t) = \min\{u(1); u(3)\} = \min\{m+18; m-2\} = m-2 \end{cases}.$$

Yêu cầu bài tập: $\min_{[1;3]} y = 2$.

Trường hợp 1: $m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$

$$\Rightarrow \min_{[1;3]} y = |m - 2| = m - 2; \min y = 2 \Leftrightarrow m - 2 = 2 \Leftrightarrow m = 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

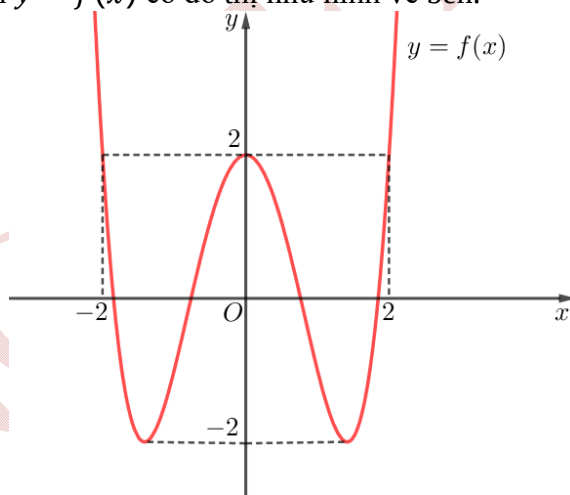
Trường hợp 2: $m + 18 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -18$

$$\Rightarrow \min_{[1;3]} y = |m + 18| = -(m + 18); \min y = 2 \Leftrightarrow -(m + 18) = 2 \Leftrightarrow m = -20 \text{ (thỏa mãn)}$$

Trường hợp 3: $(m + 18)(m - 2) \leq 0 \Leftrightarrow -18 \leq m \leq 2 \Rightarrow \min_{[1;3]} f(x) = 0 \neq 2 \text{ (loại)}$

Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng -16 . Chọn phương án B.

Câu 119: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0; 20]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |2f(x) + m + 4| - f(x) - 3|$ trên đoạn $[-2; 2]$ không bé hơn 1?

A. 18.

B. 19.

C. 20.

D. 21.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào hình vẽ ta có: $-2 \leq f(x) \leq 2, \forall x \in [-2; 2] \quad (*)$.

$$\Rightarrow 2f(x) + 4 \geq 0, \forall x \in [-2; 2].$$

Vì $m \in [0; 20]$ nên $2f(x) + m + 4 \geq 0$

$$\text{suy ra } |2f(x) + m + 4| = 2f(x) + m + 4, \forall x \in [-2; 2].$$

Ta có:

$$g(x) = |2f(x) + m + 4| - f(x) - 3| = |2f(x) + m + 4 - f(x) - 3| = |f(x) + m + 1|, \quad \forall x \in [-2; 2].$$

$$\text{+) Với } m = 0 \Rightarrow g(x) = |f(x) + 1|, \forall x \in [-2; 2].$$

$$(*) \Leftrightarrow -1 \leq f(x) + 1 \leq 3, \forall x \in [-2; 2].$$

$$\Rightarrow 0 \leq |f(x) + 1| \leq 3, \forall x \in [-2; 2] \Leftrightarrow 0 \leq g(x) \leq 3, \forall x \in [-2; 2].$$

$$\Rightarrow \min_{[-2; 2]} g(x) = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ không thỏa yêu cầu bài toán.}$$

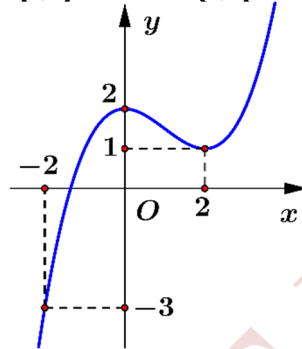
$$+) \text{ Với } m \in [1; 20] \Rightarrow f(x) + m + 1 \geq 0 \Rightarrow g(x) = f(x) + m + 1.$$

$$\text{Từ } (*) \text{ ta có: } f(x) + m + 1 \geq m - 1 \Rightarrow \min_{[-2; 2]} g(x) = m - 1.$$

$$\text{Yêu cầu bài toán: } \min_{[-2; 2]} g(x) \geq 1 \Leftrightarrow m - 1 \geq 1 \Leftrightarrow m \geq 2 \Rightarrow m \in [2; 20].$$

Vậy có 19 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 120: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Đặt hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + 2) + m$. Tổng tất cả các giá trị của tham số m để $\max_{[0; 2]} |g(x)| + \min_{[0; 2]} |g(x)| = 11$ bằng



A. 6.

B. 5.

C. 11.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Đạo hàm: } g'(x) &= (3x^2 - 6x)f'(x^3 - 3x^2 + 2) \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x = 0 \\ x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \\ x^3 - 3x^2 + 2 = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 2 \\ x = 1 \vee x = 1 - \sqrt{3} \vee x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 0 \vee x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(0) = f(2) + m = 1 + m \\ g(1) = f(0) + m = 2 + m \\ g(2) = f(-2) + m = -3 + m \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{TH1. } g(1) \cdot g(2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 3 \end{cases}.$$

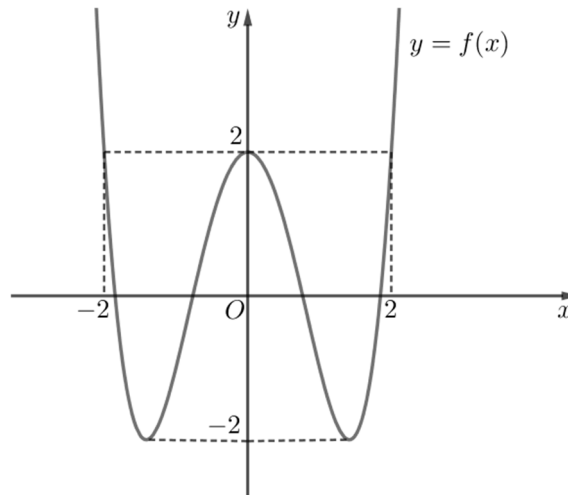
$$\text{Khi đó: } \max_{[0; 2]} |g(x)| + \min_{[0; 2]} |g(x)| = 11 \Leftrightarrow |m - 3| + |m + 2| = 11 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = -5 \end{cases}.$$

$$\text{TH2. } g(1) \cdot g(2) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 3.$$

$$\text{Khi đó: } \max_{[0; 2]} |g(x)| + \min_{[0; 2]} |g(x)| = 11 \Leftrightarrow \begin{cases} |m - 3| = 11 \\ |m + 2| = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 14 \\ m = -8 \\ m = 9 \\ m = -13 \end{cases}.$$

$$\text{Đổi chiều điều kiện: } \begin{cases} m = 6 \\ m = -5 \end{cases}.$$

Câu 121: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0; 20]$ sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |2f(x) + m + 4| - f(x) - 3$ trên đoạn $[-2; 2]$ không bé hơn 1?

A. 18.

B. 19.

C. 20.

D. 21.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào hình vẽ ta có: $-2 \leq f(x) \leq 2, \forall x \in [-2; 2]$ (*).

$$\Rightarrow 2f(x) + 4 \geq 0, \forall x \in [-2; 2].$$

Vì $m \in [0; 20]$ nên $2f(x) + m + 4 \geq 0$

$$\text{suy ra } |2f(x) + m + 4| = 2f(x) + m + 4, \forall x \in [-2; 2].$$

Ta có:

$$g(x) = |2f(x) + m + 4| - f(x) - 3 = |2f(x) + m + 4 - f(x) - 3| = |f(x) + m + 1|, \forall x \in [-2; 2].$$

$$+ \text{ Với } m = 0 \Rightarrow g(x) = |f(x) + 1|, \forall x \in [-2; 2].$$

$$(*) \Leftrightarrow -1 \leq f(x) + 1 \leq 3, \forall x \in [-2; 2].$$

$$\Rightarrow 0 \leq |f(x) + 1| \leq 3, \forall x \in [-2; 2] \Leftrightarrow 0 \leq g(x) \leq 3, \forall x \in [-2; 2].$$

$$\Rightarrow \min_{[-2; 2]} g(x) = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ không thỏa yêu cầu bài toán.}$$

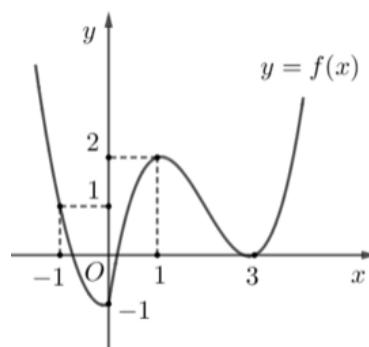
$$+ \text{ Với } m \in [1; 20] \Rightarrow f(x) + m + 1 \geq 0 \Rightarrow g(x) = f(x) + m + 1.$$

$$\text{Từ } (*) \text{ ta có: } f(x) + m + 1 \geq m - 1 \Rightarrow \min_{[-2; 2]} g(x) = m - 1.$$

$$\text{Yêu cầu bài toán: } \min_{[-2; 2]} g(x) \geq 1 \Leftrightarrow m - 1 \geq 1 \Leftrightarrow m \geq 2 \Rightarrow m \in [2; 20].$$

Vậy có 19 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 122: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tổng các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = \sqrt{|f(x) + m|}$ trên đoạn $[-1; 3]$ nhỏ hơn hoặc bằng $2\sqrt{505}$.

A. -2019.

B. 2018.

C. -1.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $u = f(x) + m$ trên đoạn $[-1; 3]$ có

$$\max_{[-1;3]} u = u(1) = f(1) + m = m + 2 \text{ và } \min_{[-1;3]} u = u(0) = f(0) + m = m - 1$$

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x) + m|$ trên đoạn $[-1; 3]$ là $\max\{|m + 2|, |m - 1|\}$

Do đó $\max_{[-1;3]} g(x) = \max\{\sqrt{|m + 2|}, \sqrt{|m - 1|}\}$. Suy ra, hàm số đã cho có giá trị lớn nhất nhỏ hơn hoặc

$$\text{bằng } 2\sqrt{505} \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} |m + 2| \leq |m - 1| \leq 2020(1) \\ |m - 1| \leq |m + 2| \leq 2020(2) \end{cases}$$

Ta có

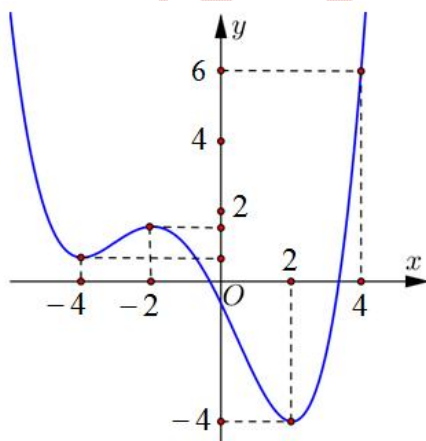
$$+) (1) \Leftrightarrow \begin{cases} |m + 2| \leq |m - 1| \\ |m - 1| \leq 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{1}{2} \\ -2019 \leq m \leq 2021 \end{cases} \Leftrightarrow -2019 \leq m \leq -\frac{1}{2}$$

$$+) (2) \Leftrightarrow \begin{cases} |m - 1| \leq |m + 2| \\ |m + 2| \leq 2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{1}{2} \\ -2022 \leq m \leq 2018 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq 2018$$

Từ hai trường hợp trên suy ra $-2019 \leq m \leq 2018$.

Vì vậy, tổng các giá trị nguyên thỏa mãn bài toán là $T = -2019$.

Câu 123: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để hàm số $y = \left| f\left(\frac{8x}{x^2+1}\right) + a - 1 \right|$ có giá trị lớn nhất không vượt quá 20?

A. 29.

B. 35.

C. 31.

D. 41.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = \frac{8x}{x^2+1}. \text{ Ta có: } t' = \frac{-8x^2+8}{(x^2+1)^2}; t' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

BBT:

x	-4	-3		-1		0	2		4	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$		4			3			1		
	-4			2				-3		

Có bao nhiêu giá trị của tham số $m \in [-4; 4]$ để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(|x^3| + 3|x|) + f(m)$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng $\frac{11}{2}$?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = g(x)$ trên đoạn $[-4; 4]$.

Ta có $\begin{cases} x \in [-4; 4] \Rightarrow -x \in [-4; 4] \\ g(-x) = g(x) \end{cases} \Rightarrow y = g(x)$ là hàm số chẵn trên $[-4; 4]$.

Do đó: $\max_{[-1; 1]} g(x) = \max_{[0; 1]} g(x) = \frac{11}{2}$.

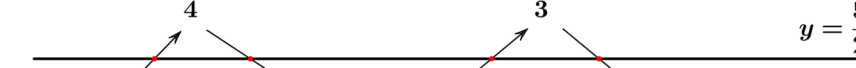
Xét $x \in [0; 1]$ khi đó: $g(x) = f(x^3 + 3x) + f(m)$

Đặt $u = x^3 + 3x$, $u' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in [0; 1]$. Suy ra $u(0) \leq u \leq u(1) \Leftrightarrow 0 \leq u \leq 4$.

Hàm số trở thành $h(u) = f(u) + f(m)$ với $u \in [0; 4]$.

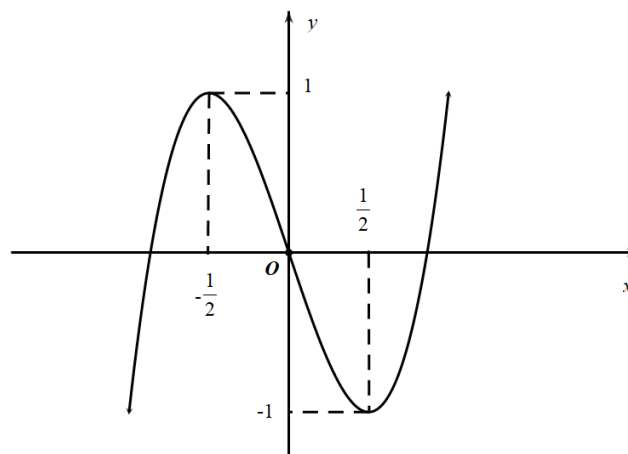
$$\max_{[0; 1]} g(x) = \max_{[0; 4]} h(u) = f(0) + f(m) = 3 + f(m)$$

Mà $\max_{[0; 1]} g(x) = \frac{11}{2} \Rightarrow 3 + f(m) = \frac{11}{2} \Leftrightarrow f(m) = \frac{5}{2}$.

x	-4	-3	-1	0	2	4			
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	 The graph shows a piecewise linear function $f(x)$ defined by the points $(-4, -4)$, $(-3, 4)$, $(-1, 2)$, $(0, 3)$, $(2, -3)$, and $(4, 1)$. The line segments are labeled with their slopes: 4, 3, 2, -3, and 1. The function is continuous and differentiable at all points except at the corners.								

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ suy ra có 4 giá trị của m .

Câu 125: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Đặt $g(x) = |f(x)| - \sqrt{1 - 2|x|} + f\left(\frac{\sqrt{1+2m} - \sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}}\right)$. Với giá trị nào của m thì giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ là 0?

A. $-\frac{1}{2}$.

B. 0.

C. $\frac{1}{2}$.

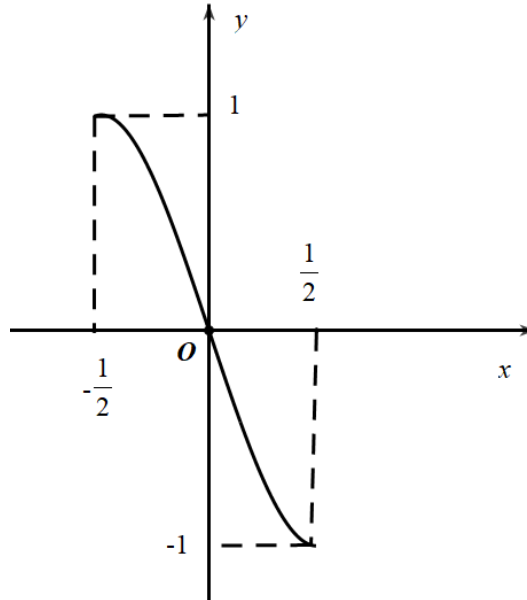
D. Không tồn tại.

Lời giải

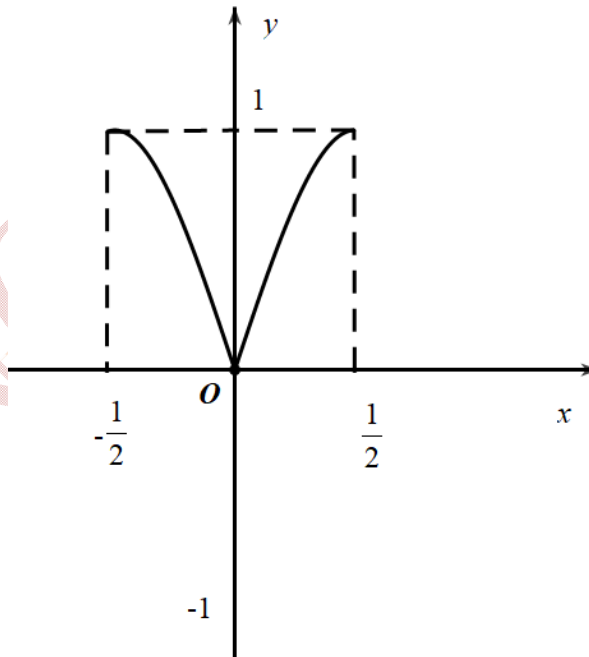
Chọn A

Với $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ điều kiện xác định của $g(x)$ là: $1 - 2|x| \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Trên tập $D = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ hàm số $f(x)$ có đồ thị



Do đó đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có dạng:



Ta có $0 \leq |f(x)| \leq 1, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ và $0 \leq 1 - 2|x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\sqrt{1 - 2|x|} \leq 0$
 $\Rightarrow -1 \leq |f(x)| - \sqrt{1 - 2|x|} \leq 1$.

Do đó $\min_{\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]} g(x) = -1 + f\left(\frac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}}\right)$ với $x = 0$.

Theo yêu cầu bài toán $\min_{\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]} g(x) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}}\right) = 1$.

Đặt $t = \frac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}}, m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Ta có $t' = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+2m}} + \frac{1}{\sqrt{1-2m}} \right) > 0, \forall m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right) \Rightarrow t$ đồng biến trên $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right] \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$.

Khi đó $f(t) = 1 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+2m}-\sqrt{1-2m}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Vậy $m = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.