

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Họ, tên thí sinh:

Số báo danh:

Câu 1. (5,0 điểm) Xét đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn $P(1) = \sqrt{2}$, $P(-1) = -\sqrt{2}$ và

$$(P(x))^2 \leq x^6 + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Chứng minh rằng đa thức $P(x)$ có nghiệm thực và có bậc nhỏ hơn 4.

b) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 2. (4,0 điểm) Cho dãy số nguyên (u_n) được xác định bởi $u_1 = 3, u_2 = 7$ và

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n, \forall n \geq 1.$$

Cho N là hợp số lẻ không chia hết cho 3 và $u_N \equiv 3 \pmod{N}$. Đặt $M = \frac{u_N}{3}$.

a) Chứng minh rằng u_N chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9.

b) Chứng minh rằng $M \equiv 1 \pmod{4N}$ và M là một hợp số.

Câu 3. (6,0 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp (O) . Lấy điểm X cố định nằm trên cung BC không chứa A của (O) . Một đường thẳng d chuyển động qua X . Các đường thẳng d_A, d_B, d_C lần lượt đối xứng với d qua BC, CA, AB . Gọi A' là giao điểm của d_B và d_C , B' là giao điểm của d_A và d_C , C' là giao điểm của d_A và d_B .

a) Chứng minh rằng AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm nằm trên (O) .

b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của tam giác $A'B'C'$ luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 4. (2,0 điểm) Cho số nguyên dương $n \geq 3$ và một số nguyên tố lẻ p . Với mỗi S là tập hợp gồm n số nguyên dương phân biệt, ta ký hiệu $l_p(S)$ là số các lũy thừa cơ số p có thể biểu diễn dưới dạng tổng của ba phần tử đôi một khác nhau thuộc S . Hãy xác định giá trị lớn nhất có thể có của $l_p(S)$ theo n, p .

Câu 5. (3,0 điểm) Cho số nguyên dương n . Hai bạn A và B cùng tham gia một trò chơi gồm n lượt. Mỗi lượt, họ độc lập giải cùng một câu đố và kết quả là mỗi người chơi hoặc giải được hoặc không giải được. Đặt $c_A(i), c_B(i)$ lần lượt là tổng số câu đố mà A, B giải được trong i lượt đầu tiên. Hỏi có bao nhiêu kịch bản có thể xảy ra để A đạt giải đặc biệt, nghĩa là sau khi kết thúc toàn bộ n lượt chơi, A không chỉ giải được nhiều câu đố hơn B ($c_A(n) > c_B(n)$), mà còn chưa bao giờ để B bỏ xa quá một câu trong suốt quá trình ($\forall i = 1, 2, \dots, n : c_B(i) - c_A(i) \leq 1$)?

----- HẾT -----

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu; Giám thị không giải thích gì thêm)

Bài toán 0.1. (Lim Olympic - Hưng Yên TST - P1)

Xét đa thức hệ số thực $P(x)$ thỏa mãn $P(1) = \sqrt{2}$, $P(-1) = -\sqrt{2}$ và

$$(P(x))^2 \leq x^6 + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

- 1 Chứng minh rằng đa thức $P(x)$ có nghiệm thực và có bậc nhỏ hơn 4.
- 2 Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn đề bài.

Lời giải.

- 1 Để ý $P(1)P(-1) < 0$ nên $P(x)$ có nghiệm thực thuộc $(-1, 1)$.

Xét $Q(x) = (x^6 + 1) - P(x)^2$ với $x \in \mathbb{R}$.

Giả sử $\deg P \geq 4$ thì $\deg Q \geq 8$, hệ số bậc cao nhất của Q là âm nên $\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) = -\infty$ nên tồn tại M sao cho $Q(M) < 0$, khi đó $(P(M))^2 > (M^6 + 1)$, vô lý.

Vậy $\deg P < 4$, điều phải chứng minh.

- 2 Viết $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d thực.

Từ $P(1) = \sqrt{2}$ và $P(-1) = -\sqrt{2}$ nên $a + b + c + d = \sqrt{2}$ và $-a + b - c + d = -\sqrt{2}$.

Suy ra $b + d = 0$ và $a + c = \sqrt{2}$ nên $P(x) = ax^3 + bx^2 + (\sqrt{2} - a)x - b$.

Ta có $Q(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $Q(1) = Q(-1) = 0$.

Viết $Q(x) = (x - 1)^t R(x)$, $R(1) \neq 0$, t nguyên dương. Giả sử t là số lẻ.

Vì $R(1) \neq 0$ nên tồn tại δ sao cho $R(x)$ cùng dấu với $R(1)$ với mọi $x \in (1 - \delta, 1 + \delta)$.

Lấy $0 < h < \delta$ thì $Q(1 + h) = h^t R(1 + h)$, và $Q(1 - h) = -h^t R(1 - h)$, do đó $Q(1 + h)$ và $Q(1 - h)$ trái dấu với nhau, nên có 1 số là âm, vô lý do $Q(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vì vậy t chẵn, suy ra $Q(1) = Q'(1) = 0$, tương tự $Q(-1) = Q'(-1) = 0$.

Ta có $Q'(x) = 6x^5 - 2P(x)P'(x)$ nên $0 = Q'(1) = 6 - 2P(1)P'(1) = 6 - 2\sqrt{2}P'(1)$.

Vì thế $P'(1) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, tương tự $P'(-1) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Từ $P(x) = ax^3 + bx^2 + (\sqrt{2} - a)x - b$ suy ra $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + (\sqrt{2} - a)$.

Khi đó $3a + 2b + \sqrt{2} - a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ và $3a - 2b + \sqrt{2} - a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ nên $b = 0$, $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Vì vậy $P(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}x^3 + \frac{3\sqrt{2}}{4}x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Thử lại để có được $x^6 + 1 - P(x)^2 = \frac{1}{8}(x^2 - 1)^2(7x^2 + 8) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên đây là đa thức duy nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nhận xét.

Ngoài ra có thể sử dụng bổ đề sau để giải quyết bài toán:

Bổ đề Fermat: Nếu hàm số f có đạo hàm tại x_0 và đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Bài toán 0.2. (Lim Olympic - Hưng Yên TST - P2)

Cho dãy số nguyên (u_n) được xác định bởi $u_1 = 3, u_2 = 7$ và

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n, \forall n \geq 1.$$

Cho N là hợp số lẻ không chia hết cho 3 và $u_N \equiv 3 \pmod{N}$. Đặt $M = \frac{u_N}{3}$.

- ① Chứng minh rằng u_N chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9.
- ② Chứng minh rằng $M \equiv 1 \pmod{4N}$ và M là một hợp số.

Lời giải.

- ① Để ý vì $u_{n+2} \equiv -u_n \pmod{3}$ và $3 \mid u_1$ nên $3 \mid u_n$ với mọi n lẻ.

Xét dãy (v_n) xác định bởi $v_n = \frac{u_{2n+1}}{3}$ với mọi số tự nhiên n .

$$\text{Khi đó } u_{n+4} = 3u_{n+3} - u_{n+2} = 3(3u_{n+2} - u_{n+1}) - u_{n+2} = 8u_{n+2} - (u_{n+2} + u_n) = 7u_{n+2} - u_n.$$

Suy ra $v_0 = 1, v_1 = 6$ và $v_{n+2} = 7v_{n+1} - v_n$ với mọi số tự nhiên n .

Để ý v_n chia hết cho 3 khi và chỉ khi $n \equiv 1, 4 \pmod{6}$, hay $n \equiv 1 \pmod{3}$.

Viết $N = 2k + 1$ với k nguyên dương thì $2k + 1 \not\equiv 0 \pmod{3}$ nên $k \not\equiv 1 \pmod{3}$ nên $3 \nmid v_k$.

Từ đó $u_N = u_{2k+1} = 3v_k$ không chia hết cho 9, điều phải chứng minh.

- ② Ta cần chứng minh $v_k \equiv 1 \pmod{4N}$ và v_k là hợp số.

Vì $u_N \equiv 3 \pmod{N}$ nên $3v_k \equiv 3 \pmod{N}$ nên $v_k \equiv 1 \pmod{N}$ do $\gcd(N, 3) = 1$.

Ta có $v_n \equiv 1 \pmod{4} \iff n \equiv 0, 2 \pmod{3}$.

Vì $k \not\equiv 1 \pmod{3}$ nên $v_k \equiv 1 \pmod{4}$, kết hợp $\gcd(N, 4) = 1$ để có $v_k \equiv 1 \pmod{4N}$.

Đặt $\alpha = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ và $\beta = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ thì $u_n = \alpha^n + \beta^n$ với mọi n nguyên dương.

Ta có $N = ab$ với $a, b > 1$ là các số lẻ thì dễ dàng thấy được u_N chia hết cho u_a .

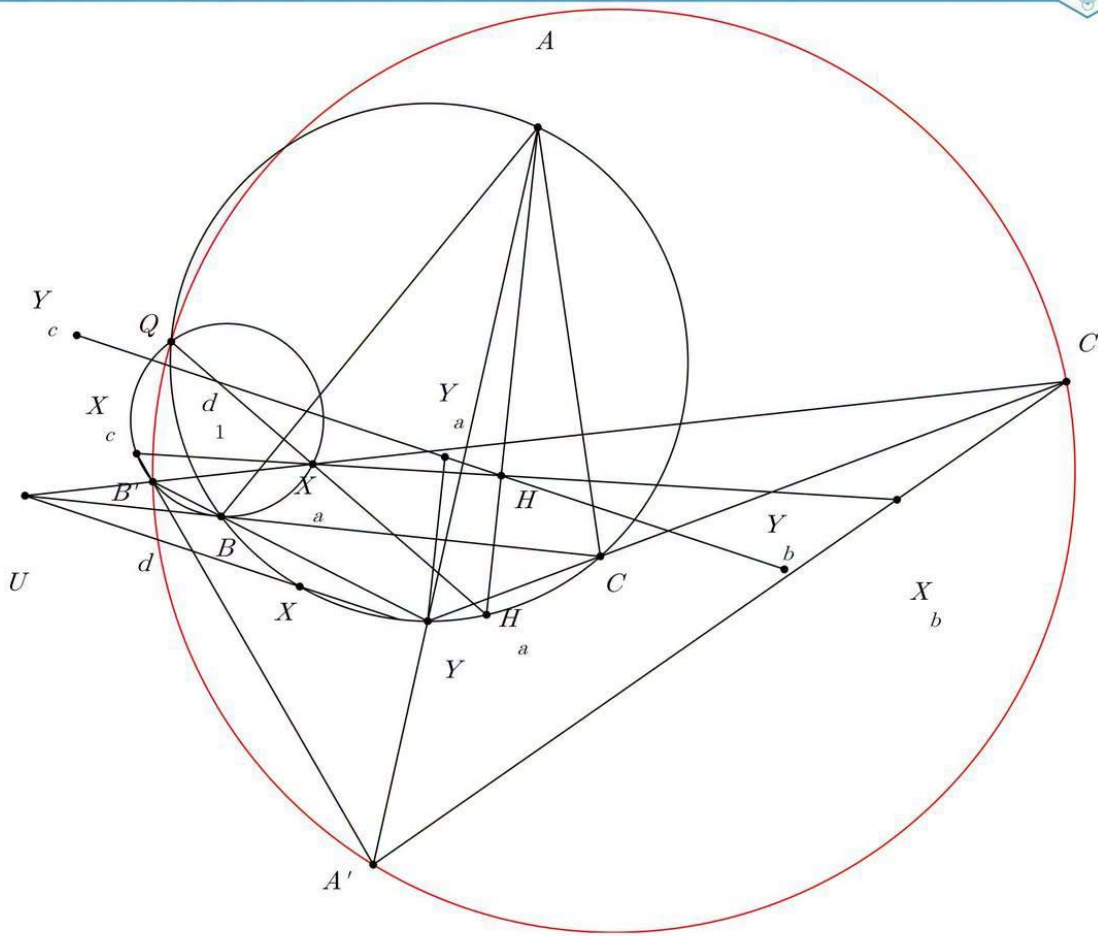
Vì thế $M = \frac{u_N}{3} = \frac{u_N}{u_b} \cdot \frac{u_b}{3}$ là hợp số do $\frac{u_b}{3}$ là số nguyên lớn hơn 1 và $u_N > u_b$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 0.3. (Lim Olympic - Hưng Yên TST - P3)

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) . Lấy điểm X cố định nằm trên cung BC không chứa A của (O) . Một đường thẳng d chuyển động qua X . Các đường thẳng d_A, d_B, d_C lần lượt đối xứng với d qua BC, CA, AB . Gọi A' là giao điểm của d_B và d_C , B' là giao điểm của d_A và d_C , C' là giao điểm của d_A và d_B .

- ① Chứng minh rằng AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm nằm trên (O) .
- ② Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của tam giác $A'B'C'$ luôn đi qua một điểm cố định.



Lời giải.

- ① Gọi $B'C'$ cắt BC tại U . Ta có: $B'C'$ là d_a do đó: d đi qua U .

Tương tự thì: $C'A'$, AB , d đồng quy. Và: AC , $A'B'$, d đồng quy.

Do đó áp dụng định lý *Desargues* ta có: AA' , BB' , CC' đồng quy tại Y . Gọi Y_a , Y_b , Y_c đối xứng Y qua BC , CA , AB lần lượt. Theo tính chất đối xứng ta có: Y_bY_c song song d . Tương tự thì ta thu được: Y_a , Y_b , Y_c thẳng hàng (cùng nằm trên đường thẳng song song d) dẫn đến theo tính chất đường thẳng *Steiner* đảo thì: $Y \in (O)$.

- ② Gọi H là trực tâm tam giác ABC .

Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là các đường thẳng đối xứng với XH qua BC, CA, AB .

Gọi H_a là điểm đối xứng của H qua BC . Ta có $H_a \in (O)$. Gọi Q là giao điểm thứ hai của d_1 với (O) . Gọi Q_a, Q_b, Q_c lần lượt là các điểm đối xứng của Q qua BC, CA, AB . Vì $Q \in d_1$ nên $Q_a \in XH$.

Theo tính chất điểm *Anti-Steiner* ta có: d_1, d_2, d_3 đồng quy tại điểm cố định $Q \in (O)$.

Gọi X_a, X_b, X_c lần lượt là các điểm đối xứng của X qua BC, CA, AB .

Vì $X \in (O)$ nên theo tính chất *Steiner*: X_a, X_b, X_c, H thẳng hàng.

Ta có: $d_1 = QX_a$, $d_2 = QX_b$, $d_3 = QX_c$.

Do (d_2, d_b) và (d_3, d_c) lần lượt là ảnh của (XH, d) qua các phép đối xứng nên: $\angle(d_2, d_b) = \angle(d_3, d_c)$.

Mà $A' = d_b \cap d_c$, suy ra: $\angle QX_bA' = \angle QX_cA'$.

Do đó: Q, X_b, A', X_c đồng viên. Tương tự: Q, X_c, B', X_a đồng viên, Q, X_a, C', X_b đồng viên.

Vậy ta thu được: Q là điểm *Miquel* của tứ giác toàn phần: $(A'B', B'C', C'A', X_bX_c)$ dẫn đến: $Q \in (A'B'C')$. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ luôn đi qua điểm cố định Q .

Bài toán 0.4. (Lim Olympic - Hưng Yên TST - P4)

Cho số nguyên dương $n \geq 3$ và một số nguyên tố lẻ p . Với mỗi S là tập hợp gồm n số nguyên dương phân biệt, ta ký hiệu $l_p(S)$ là số các lũy thừa cơ số p có thể biểu diễn dưới dạng tổng của ba phần tử đôi một khác nhau thuộc S . Hãy xác định giá trị lớn nhất có thể của $l_p(S)$ theo n, p .

Lời giải.

Giả sử các lũy thừa cơ số p biểu diễn được là $p^{a_1} < p^{a_2} < \dots < p^{a_t}$, ta cần tìm giá trị lớn nhất của t .

Gọi A_i là tập gồm 3 phần tử sao cho tổng các phần tử trong A_i bằng p^{a_i} , với $i = 1, 2, \dots, t$.

Ta có $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_t| \leq n$.

Nhận xét. Với mỗi $i \geq 2$, ta có $A_i \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{i-1}) \neq \emptyset$.

Giả sử phản chứng, tức $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{i-1}) \subset A_i$.

Khi đó cứ với $x \in A_i$ thì tồn tại $j < i$ sao cho $x \in A_j$ thì $x < \sum_{a \in A_j} a = p^j \leq p^{i-1}$.

Từ đó tổng các phần tử của A_i bé hơn $3p^{i-1} < p^i$, vô lý. Nhận xét được chứng minh.

Từ nhận xét trên ta có $|A_1| = 3, |A_2 \setminus A_1| \geq 1, |A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)| \geq 1, \dots$

Do đó $n \geq |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_t| \geq 3 + 1 + 1 + \dots + 1 = 3 + (t - 1) = t + 2$.

Vì vậy $t \leq n - 2$. Dấu bằng xảy ra chẳng hạn với tập

$$S = \{1, 2, p^2 - 3, p^3 - 3, \dots, p^{n-2} - 3\}$$

Vậy giá trị lớn nhất của $l_p(S)$ bằng $n - 2$.

Bài toán 0.5. (Lim Olympic - Hưng Yên TST - P5)

Cho số nguyên dương n . Hai bạn A và B cùng tham gia một trò chơi gồm n lượt. Mỗi lượt, họ đọc lập giải cùng một câu đố và kết quả là mỗi người chơi hoặc giải được hoặc không giải được. Đặt $c_A(i), c_B(i)$ lần lượt là tổng số câu đố mà A, B giải được trong i lượt đầu tiên. Hỏi có bao nhiêu kịch bản có thể xảy ra để A đạt giải đặc biệt, nghĩa là sau khi kết thúc toàn bộ n lượt chơi, A không chỉ giải được nhiều câu đố hơn B ($c_A(n) > c_B(n)$), mà còn chưa bao giờ để B bỏ xa quá một câu trong suốt quá trình ($\forall i = 1, 2, \dots, n : c_B(i) - c_A(i) \leq 1$)?

Lời giải.

Với mỗi $i = 0, 1, \dots, n$, đặt $d_i = c_A(i) - c_B(i)$. Ta xem $(d_i)_{i=0}^n$ như một quỹ đạo xuất phát từ $d_0 = 0$.

Ở mỗi lượt, quỹ đạo có một trong bốn loại bước:

Kết quả của lượt chơi	$d_i - d_{i-1}$
Chỉ A giải được	1
Chỉ B giải được	-1
Cả hai cùng giải được	0
Cả hai cùng không giải được	0

Điều kiện để A đạt giải đặc biệt tương đương với

$$d_i \geq -1 \quad (1 \leq i \leq n), \quad d_n > 0.$$

Gọi $U_n(r)$ là số quỹ đạo không bị ràng buộc, có độ dài n , xuất phát từ 0 và kết thúc tại r .

Ta biến mỗi bước của quỹ đạo thành hai bước lên hoặc xuống như sau:

Bước ban đầu	Hai bước tương ứng
1	lên, lên
-1	xuống, xuống
0 ứng với cả hai cùng giải được	lên, xuống
0 ứng với cả hai cùng không giải được	xuống, lên

Đây là một song ánh giữa các quỹ đạo độ dài n kết thúc tại r và các quỹ đạo gồm $2n$ bước lên, xuống, kết thúc tại độ cao $2r$. Nếu quỹ đạo mới có a bước lên và $2n - a$ bước xuống thì

$$a - (2n - a) = 2r,$$

suy ra $a = n + r$, do đó $U_n(r) = C_{2n}^{n+r}$.

Bây giờ cố định $r \geq 1$. Xét một quỹ đạo kết thúc tại r nhưng vi phạm điều kiện $d_i \geq -1$.

Gọi t là thời điểm đầu tiên quỹ đạo đạt tới -2 .

Ta xét phần quỹ đạo từ thời điểm 0 đến thời điểm t : đổi mỗi bước 1 thành -1 , mỗi bước -1 thành 1, còn hai loại bước 0 được giữ nguyên. Khi đó, phần quỹ đạo này kết thúc tại 2 thay vì -2 .

Phần quỹ đạo sau thời điểm t có tổng độ thay đổi bằng $r - (-2) = r + 2$.

Vì thế quỹ đạo mới kết thúc tại $2 + (r + 2) = r + 4$.

Ngược lại, mọi quỹ đạo kết thúc tại $r + 4$ đều phải đi qua 2. Phần quỹ đạo mới từ đầu đến lần đầu tiên đạt 2, ta thu được một quỹ đạo kết thúc tại r và vi phạm điều kiện $d_i \geq -1$.

Do đó, số quỹ đạo vi phạm kết thúc tại r bằng $U_n(r + 4)$.

Bởi vậy, số quỹ đạo hợp lệ kết thúc tại r là $U_n(r) - U_n(r + 4) = C_{2n}^{n+r} - C_{2n}^{n+r+4}$.

Cộng theo $r = 1, 2, \dots, n$, ta được

$$\sum_{r=1}^n (C_{2n}^{n+r} - C_{2n}^{n+r+4}) = \sum_{r=1}^{\min\{4, n\}} C_{2n}^{n+r}.$$

Vậy số kịch bản cần tính bằng $\sum_{r=1}^{\min\{4, n\}} C_{2n}^{n+r}$.

Nhận xét.

Bài toán trên liên quan tới bài toán quỹ đạo nổi tiếng sau:

Bài toán bỏ phiếu bầu cử: Cho hai ứng cử viên A và B , biết rằng A nhận a phiếu bầu cử, B nhận b phiếu bầu cử và $a > b$. Hỏi có bao nhiêu cách kiểm phiếu sao cho trong suốt quá trình thì số phiếu của A luôn lớn hơn số phiếu B ? Đáp số: $\frac{a-b}{a+b} C_{a+b}^a$.