

Câu 1 (4 điểm). Cho dãy số (x_n) như sau: $x_1 = 2025$ và

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{n^2 + 1}x_n^2}{1 + \sqrt{n^2 + 2n + 2}x_n}, \forall n = 1, 2, \dots$$

Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \dots + \frac{x_{n+1}}{x_n} \right)$.

Câu 2 (4 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(xy + f(x)) + f(y) = xf(y) + f(x + y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 3 (4 điểm). Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có đường cao AD và trực tâm H . Gọi J, K lần lượt là trung điểm của BC, HD . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của D lên AB, AC . Đường thẳng EF cắt BC tại G . Chứng minh rằng $GK \perp AJ$.

Câu 4 (4 điểm). Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (n, p) trong đó p là số nguyên tố, sao cho

$$2 + n + n^2 + \dots + n^{p-1}$$

là số chính phương.

Câu 5 (4 điểm). Hỏi có bao nhiêu hoán vị $a_1, a_2, \dots, a_{2026}$ của 2026 số nguyên dương đầu tiên thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

a) $a_{i+1} - a_i \leq 1$ với mọi $i = 1, 2, 3, \dots, 2025$.

b) Có đúng hai chỉ số i, j với $1 \leq i < j \leq 2026$ sao cho $a_i = i, a_j = j$.

Hết

Họ và tên thí sinh.....Số báo danh.....

Thí sinh không sử dụng tài liệu, máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.