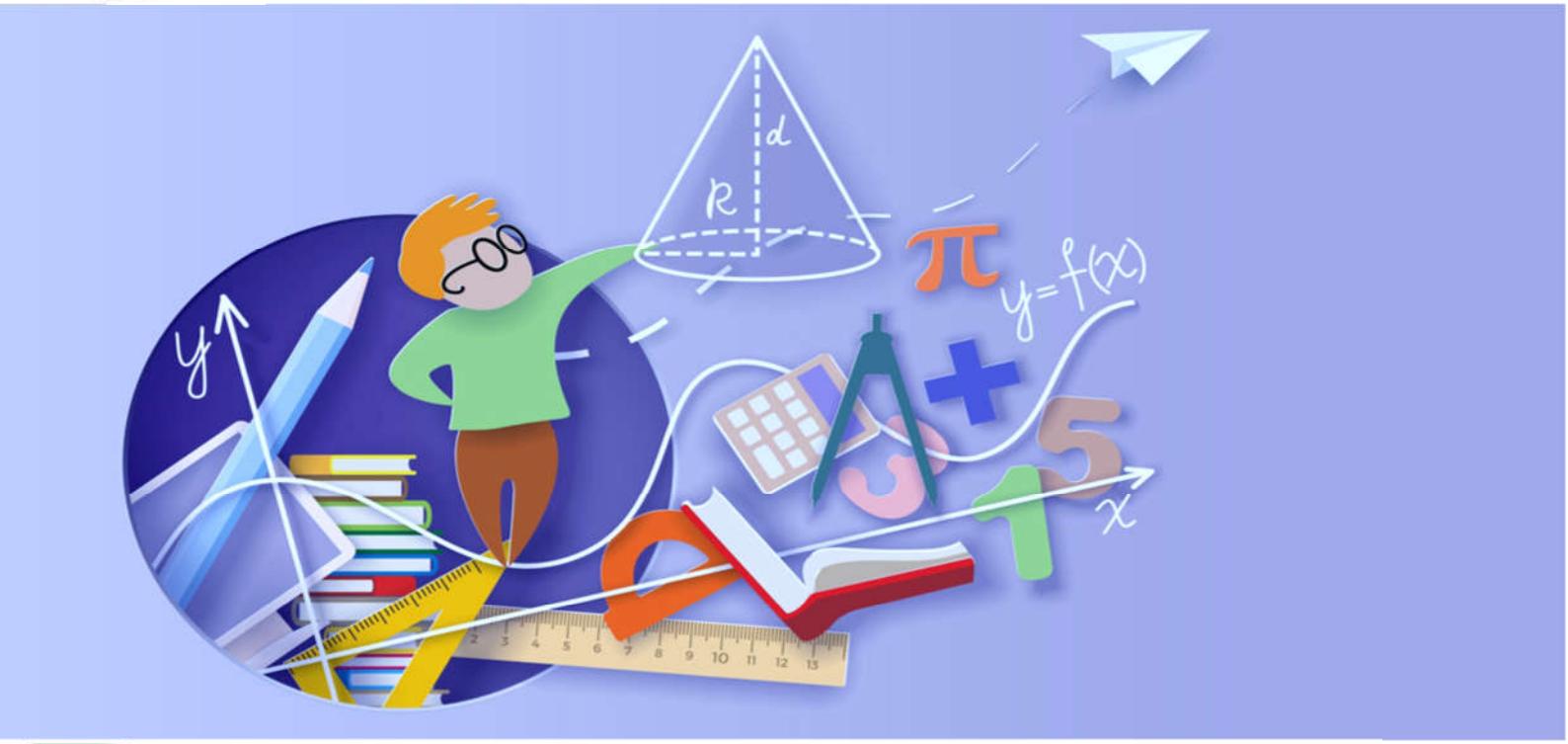
LỚP TOÁN THẦY CƯ- XÃ TẮC- TP HUẾ

Trung tâm Ứng dụng CN và dạy học MTC

SĐT: 0834 332 133



BÀI GIẢNG TOÁN 10

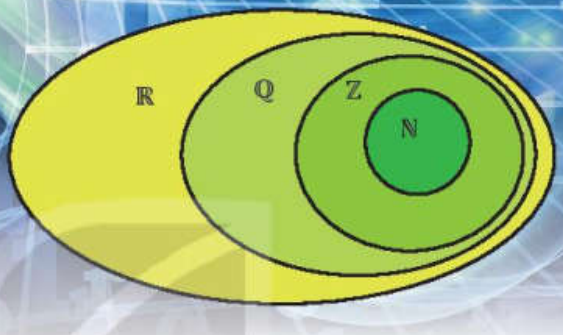


KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

TOANTHAYCU.COM

CHƯƠNG I
MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP

Chương này cung cấp những khái niệm và kí hiệu lôgic thường dùng, củng cố và mở rộng hiểu biết ban đầu về lí thuyết tập hợp đã được học ở các lớp dưới. Từ đó góp phần hình thành khả năng suy luận có lí, khả năng tiếp nhận, diễn đạt các vấn đề một cách chính xác, tạo cơ sở để học tốt các nội dung toán học khác.



Bài 1 MỆNH ĐỀ

THUẬT NGỮ
- Mệnh đề
- Mệnh đề phủ định
- Mệnh đề kéo theo, mệnh đề đảo
- Mệnh đề tương đương
- Điều kiện cần, điều kiện đủ, điều kiện cần và đủ
- Các kí hiệu: ∀, ∃

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Thiết lập và phát biểu mệnh đề phủ định, mệnh đề đảo, mệnh đề kéo theo, mệnh đề tương đương.
- Thiết lập và phát biểu các mệnh đề có chứa kí hiệu ∀, ∃.
- Xác định tính đúng sai của một mệnh đề trong những trường hợp đơn giản.

Có bao nhiêu con vật xuất hiện trong hình vẽ?



Có 5 con vật xuất hiện trong hình vẽ.



An

Có 6 con vật xuất hiện trong hình vẽ.



Khoa

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đinh Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

1. MỆNH ĐỀ, MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN

a. Mệnh đề

HĐ1. Trong các câu ở *tình huống mở đầu*:

a) Câu nào đúng?

b) Câu nào sai?

c) Câu nào không xác định được tính đúng sai?

Những câu nói của An và Khoa là những khẳng định có tính đúng hoặc sai. Người ta gọi mỗi câu như vậy là một mệnh đề lôgic (gọi tắt là mệnh đề). Những câu không xác định được tính đúng sai không phải là mệnh đề.

> Mỗi mệnh đề phải hoặc đúng hoặc sai.
> Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.

Chú ý. Người ta thường sử dụng các chữ cái P, Q, R,... để biểu thị các mệnh đề.

Ví dụ 1. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề? Câu nào không phải là mệnh đề?

a) Phương trình $3x^2 - 5x + 2 = 0$ có nghiệm nguyên;

b) $5 < 7 - 3$;

c) Có bao nhiêu dấu hiệu nhận biết hai tam giác đồng dạng?

d) Đấy là cách xử lí khôn ngoan!

Thông thường, những câu nghi vấn, câu cảm thán, câu cầu khiến không phải là mệnh đề.



Giải

Vì phương trình $3x^2 - 5x + 2 = 0$ có nghiệm nguyên $x = 1$ nên câu a là đúng. Câu b là sai. Do đó, câu a và câu b là những mệnh đề.

Câu c là câu hỏi; câu d là câu cảm thán, nêu lên ý kiến của người nói. Do đó, không xác định được tính đúng sai. Vậy các câu c và d không phải là mệnh đề.

Chú ý. Những mệnh đề liên quan đến toán học (các mệnh đề ở câu a và câu b trong Ví dụ 1) được gọi là mệnh đề toán học.

Luyện tập 1. Thay dấu "?" bằng dấu "x" vào ô thích hợp trong bảng sau:

Câu	Không phải mệnh đề	Mệnh đề đúng	Mệnh đề sai
13 là số nguyên tố.	?	?	?
Tổng độ dài hai cạnh bất kì của một tam giác nhỏ hơn độ dài cạnh còn lại.	?	?	?
Bạn đã làm bài tập chưa?	?	?	?
Thời tiết hôm nay thật đẹp!	?	?	?

b. Mệnh đề chứa biến

Xét câu "n chia hết cho 2" (với n là số tự nhiên).

Ta chưa khẳng định được tính đúng sai của câu này, do đó nó chưa phải là một mệnh đề.

Tuy nhiên, nếu thay n bằng số tự nhiên cụ thể thì câu này cho ta một mệnh đề. Chẳng hạn:

- Với $n = 5$ ta được mệnh đề "5 chia hết cho 2". Đây là mệnh đề sai.
- Với $n = 10$ ta được mệnh đề "10 chia hết cho 2". Đây là mệnh đề đúng.

Ta nói rằng câu "n chia hết cho 2" là một mệnh đề chứa biến.

Xét câu "$x > 5$". Hãy tìm hai giá trị thực của x để từ câu đã cho, ta nhận được một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.

2. MỆNH ĐỀ PHỦ ĐỊNH



HĐ2. Quan sát biển báo trong hình bên.

Khoa nói: "Đây là biển báo đường dành cho người đi bộ".

An không đồng ý với ý kiến của Khoa.

Hãy phát biểu ý kiến của An dưới dạng một mệnh đề.

Để phủ định một mệnh đề P, người ta thường thêm (hoặc bớt) từ "không" hoặc "không phải" vào trước vị ngữ của mệnh đề P. Ta kí hiệu mệnh đề phủ định của mệnh đề P là $\overline{P}$.

Mệnh đề P và mệnh đề $\overline{P}$ là hai phát biểu trái ngược nhau. Nếu P đúng thì $\overline{P}$ sai, còn nếu P sai thì $\overline{P}$ đúng.

Ví dụ 2. Phát biểu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau:

P: "17 là số chính phương";

Q: "Hình hộp không phải là hình lăng trụ".

Giải

Mệnh đề phủ định của P là $\overline{P}$: "17 không phải là số chính phương".

Mệnh đề phủ định của Q là $\overline{Q}$: "Hình hộp là hình lăng trụ".

Luyện tập 2. Phát biểu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xác định tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó.

P: "2 022 chia hết cho 5";

Q: "Bất phương trình $2x + 1 > 0$ có nghiệm".

Vận dụng. Cho mệnh đề Q: "Châu Á là châu lục có diện tích lớn nhất trên thế giới". Phát biểu mệnh đề phủ định $\overline{Q}$ và xác định tính đúng sai của hai mệnh đề Q và $\overline{Q}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

3. MỆNH ĐỀ KÉO THEO, MỆNH ĐỀ ĐẢO

a. Mệnh đề kéo theo

HĐ3. Cặp từ quan hệ nào sau đây phù hợp với vị trí bị che khuất trong câu ghép ở hình bên?

A. Nếu ... thì ...

B. Tuy ... nhưng ...

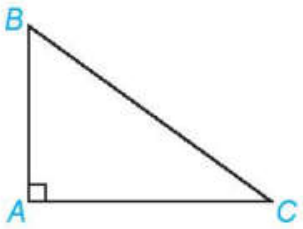
[redacted] sử dụng rượu bia khi tham gia giao thông [redacted] có thể bị xử phạt hành chính hoặc xử lí hình sự tuỳ theo mức độ vi phạm.

HĐ4. Cho hai câu sau:

P: "Tam giác ABC là tam giác vuông tại A";

Q: "Tam giác ABC có $AB^2 + AC^2 = BC^2$".

Hãy phát biểu câu ghép có dạng "Nếu P thì Q".



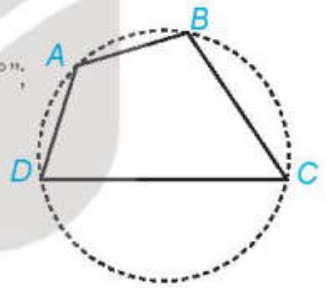
Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là một mệnh đề kéo theo và kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.

Ví dụ 3. Cho tứ giác $ABCD$, xét hai câu sau:

P: "Tứ giác $ABCD$ có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180°";

Q: "$ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn".

Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và cho biết tính đúng sai của mệnh đề đó.



Giải

$P \Rightarrow Q$: "Nếu tứ giác $ABCD$ có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° thì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn".

Mệnh đề kéo theo này là mệnh đề đúng.

Các định lí toán học là những mệnh đề đúng và thường có dạng $P \Rightarrow Q$. Khi đó ta nói:

P là giả thiết của định lí, Q là kết luận của định lí, hoặc

"P là điều kiện đủ để có Q" hoặc "Q là điều kiện cần để có P".

b. Mệnh đề đảo

HĐ5. Xét hai câu sau:

P: "Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt";

Q: "Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac > 0$".

a) Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

b) Hãy phát biểu mệnh đề $Q \Rightarrow P$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

Nhận xét. Mệnh đề đảo của một mệnh đề đúng không nhất thiết là đúng.

Ví dụ 4. Hãy phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề: "Nếu tam giác ABC là tam giác đều thì tam giác ABC là tam giác cân" và xác định tính đúng sai của mệnh đề đảo này.

Giải

Mệnh đề đảo là: "Nếu tam giác ABC là tam giác cân thì tam giác ABC là tam giác đều".

Mệnh đề đảo này là sai.

Luyện tập 3. Cho các mệnh đề P: "a và b chia hết cho c";

Q: "$a + b$ chia hết cho c".

a) Hãy phát biểu định lí $P \Rightarrow Q$. Nêu giả thiết, kết luận của định lí và phát biểu định lí này dưới dạng điều kiện cần, điều kiện đủ.

b) Hãy phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ rồi xác định tính đúng sai của mệnh đề đảo này.

4. MỆNH ĐỀ TƯƠNG ĐƯƠNG

HĐ6. Hãy xác định tính đúng sai của mệnh đề sau:

"Một số tự nhiên chia hết cho 5 nếu số đó có chữ số tận cùng bằng 0 hoặc 5 và ngược lại".

Mệnh đề ở HĐ6 có thể phát biểu dưới dạng: "Một số tự nhiên chia hết cho 5 nếu và chỉ nếu số đó có chữ số tận cùng bằng 0 hoặc 5".

Mệnh đề "P nếu và chỉ nếu Q" được gọi là một mệnh đề tương đương và kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$.

Nhận xét. Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì mệnh đề tương đương $P \Leftrightarrow Q$ đúng. Khi đó ta nói "P tương đương với Q" hoặc "P là điều kiện cần và đủ để có Q" hoặc "P khi và chỉ khi Q".

Ví dụ 5. Cho hai mệnh đề:

P: "Tứ giác $ABCD$ là hình vuông";

Q: "Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau".

Hãy phát biểu mệnh đề tương đương $P \Leftrightarrow Q$ và xác định tính đúng sai của mệnh đề tương đương này.

Giải

Mệnh đề tương đương $P \Leftrightarrow Q$: "Tứ giác $ABCD$ là hình vuông khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau". Mệnh đề tương đương này đúng vì cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng.

Luyện tập 4. Phát biểu điều kiện cần và đủ để số tự nhiên n chia hết cho 2.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

5. MỆNH ĐỀ CÓ CHỨA KÍ HIỆU ∀, ∃

- Câu "Mọi số thực đều có bình phương không âm" là một mệnh đề. Có thể viết mệnh đề này như sau:

$$P: \text{“}\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0\text{”}.$$

- Câu "Có một số hữu tỉ mà bình phương của nó bằng 2" là một mệnh đề. Có thể viết mệnh đề này như sau:

$$Q: \text{“}\exists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 2\text{”}.$$

Kí hiệu ∀ đọc là "với mọi"; kí hiệu ∃ đọc là "tồn tại".



Em hãy xác định tính đúng sai của hai mệnh đề trên.

Luyện tập 5. Phát biểu bằng lời mệnh đề sau và cho biết mệnh đề đó đúng hay sai.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \leq 0.$$

Dưới đây ta xét mệnh đề phủ định của mệnh đề có chứa kí hiệu ∀, ∃.

Mọi số tự nhiên nhân với 1 đều bằng chính nó.





Không đúng. Có một số tự nhiên nhân với 1 không bằng chính nó.



Mệnh đề "Có một số tự nhiên nhân với 1 không bằng chính nó" là phủ định của mệnh đề "Mọi số tự nhiên nhân với 1 đều bằng chính nó".

Như vậy mệnh đề phủ định của P: "$\forall n \in \mathbb{N}, n \cdot 1 = n$" là mệnh đề $\overline{P}$: "$\exists n \in \mathbb{N}, n \cdot 1 \neq n$".

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Ví dụ 6

Viết mệnh đề phủ định của mệnh đề sau và xác định tính đúng sai của nó.

$$P: \text{“}\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0\text{”}.$$

Giải

Mệnh đề P có thể phát biểu là: "Tồn tại một số thực mà bình phương của nó cộng với 1 bằng 0".

Phủ định của mệnh đề P là: "Không tồn tại một số thực mà bình phương của nó cộng với 1 bằng 0", tức là: "Mọi số thực đều có bình phương cộng với 1 khác 0".

Ta có thể viết mệnh đề phủ định của P là $\overline{P}$: "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$". Mệnh đề phủ định này đúng.

Luyện tập 6

Trong tiết học môn Toán, Nam phát biểu: "Mọi số thực đều có bình phương khác 1".

Mai phát biểu: "Có một số thực mà bình phương của nó bằng 1".

a) Hãy cho biết bạn nào phát biểu đúng.

b) Dùng kí hiệu ∀, ∃ để viết lại các phát biểu của Nam và Mai dưới dạng mệnh đề.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Dạng 1: Nhận biết mệnh đề, mệnh đề chứa biến

1. Phương pháp

Mệnh đề là một câu khẳng định đúng hoặc một câu khẳng định sai.

- Một câu khẳng định đúng được gọi là một mệnh đề đúng, một câu khẳng định sai được gọi là mệnh đề sai.
- Câu hỏi, câu cảm tháng, câu mệnh lệnh hoặc câu chưa xác định được tính đúng sai thì không phải là mệnh đề.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Các câu sau đây, câu nào là mệnh đề, câu nào không phải là mệnh đề? Nếu là mệnh đề hãy cho biết mệnh đề đó đúng hay sai.

(1) Ở đây đẹp quá!

(2) Phương trình $x^2-3x+1=0$ vô nghiệm

(3) 16 không là số nguyên tố

(4) Hai phương trình $x^2-4x+3=0$ và $x^2-\sqrt{x+3}+1=0$ có nghiệm chung.

(5) Số π có lớn hơn 3 hay không?

(6) Italia vô địch Worldcup 2006

(7) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng có diện tích bằng nhau.

Lời giải

Câu (1) và (5) không là mệnh đề(vì là câu cảm thán, câu hỏi)

Các câu (3), (4), (6), là những mệnh đề đúng

Câu (2) và (7) là những mệnh đề sai.

Ví dụ 1: Cho các phát biểu sau, có bao nhiêu phát biểu là mệnh đề?

a) Hà Nội là thủ đô của Việt Nam.

b) $x\in\mathbb{R}, x+2>5.$

c) $x-6\le 5.$

d) Phương trình $x^2-6x+5=0$ có nghiệm.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B.

Câu b), c) là mệnh đề chứa biến.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Phát biểu nào sau đây là một mệnh đề?

A. Mùa thu Hà Nội đẹp quá!

B. Bạn có đi học không?

C. Đề thi môn Toán khó quá!

D. Hà Nội là thủ đô của Việt Nam.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phát biểu ở A, B, C là câu cảm và câu hỏi nên không là mệnh đề.

Câu 2. Câu nào sau đây không là mệnh đề?

A. Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.

B. $3<1$.

C. $4-5=1$.

D. Bạn học giỏi quá!

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vì "Bạn học giỏi quá!" là câu cảm thán không có khẳng định đúng hoặc sai.

Câu 3. Cho các phát biểu sau đây:

1. "17 là số nguyên tố"
2. "Tam giác vuông có một đường trung tuyến bằng nửa cạnh huyền"
3. "Các em C14 hãy cố gắng học tập thật tốt nhé !"
4. "Mọi hình chữ nhật đều nội tiếp được đường tròn"

Hỏi có bao nhiêu phát biểu là một đề?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

- Câu 1 là mệnh đề.
- Câu 2 là mệnh đề.
- Câu 3 không phải là mệnh đề.
- Câu 4 là mệnh đề.

Câu 4. Cho các câu sau đây:

1. "Phan-xi-păng là ngọn núi cao nhất Việt Nam".
2. "$\pi^2<9,86$".
3. "Mệt quá!".
4. "Chị ơi, mấy giờ rồi?".

Hỏi có bao nhiêu câu là mệnh đề?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mệnh đề là một khẳng định có tính đúng hoặc sai, không thể vừa đúng vừa sai.

Do đó 1,2 là mệnh đề và 3,4 không là mệnh đề.

Câu 5. Câu nào trong các câu sau không phải là mệnh đề?

A. π có phải là một số vô tỷ không?. **B.** $2+2=5$.

C. $\sqrt{2}$ là một số hữu tỷ. **D.** $\frac{4}{2}=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Câu 6. Trong các câu sau, câu nào không phải là mệnh đề?

A. Buồn ngủ quá!

B. Hình thoi có hai đường chéo vuông góc với nhau.

C. 8 là số chính phương.

D. Băng Cốc là thủ đô của Mianma.

Lời giải.

Chọn A

Câu cảm thán không phải là mệnh đề.

Câu 7. Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là không phải là mệnh đề?

a) Huế là một thành phố của Việt Nam.

b) Sông Hương chảy ngang qua thành phố Huế.

c) Hãy trả lời câu hỏi này!

d) $5+19=24.$

e) $6+81=25.$

f) Bạn có rỗi tối nay không?

g) $x+2=11.$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải.

Chọn C

Các câu c), f), g) không phải là mệnh đề

Câu 8: Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề?

a) Hãy đi nhanh lên!

b) Hà Nội là thủ đô của Việt Nam.

c) $5+7+4=15.$

d) Năm 2018 là năm nhuận.

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải.

Chọn B

Câu a) là câu cảm thán không phải là mệnh đề.

Câu 9: Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề?

a) Cố lên, sắp đói rồi!

b) Số 15 là số nguyên tố.

c) Tổng các góc của một tam giác là $180°$.

d) x là số nguyên dương.

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải.

Chọn B

Câu a), d) không là mệnh đề.

Câu 10: Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

A. Đi ngủ đi!

B. Trung Quốc là nước đông dân nhất thế giới.

C. Bạn học trường nào?

D. Không được làm việc riêng trong giờ học.

Lời giải.

Chọn B

Câu 11: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. Tổng của hai số tự nhiên là một số chẵn khi và chỉ khi cả hai số đều là số chẵn.

B. Tích của hai số tự nhiên là một số chẵn khi và chỉ khi cả hai số đều là số chẵn.

C. Tổng của hai số tự nhiên là một số lẻ khi và chỉ khi cả hai số đều là số lẻ.

D. Tích của hai số tự nhiên là một số lẻ khi và chỉ khi cả hai số đều là số lẻ.

Lời giải.

Chọn D

A là mệnh đề sai: Ví dụ: $1+3=4$ là số chẵn nhưng $1,3$ là số lẻ.

B là mệnh đề sai: Ví dụ: $2.3=6$ là số chẵn nhưng 3 là số lẻ.

C là mệnh đề sai: Ví dụ: $1+3=4$ là số chẵn nhưng $1,3$ là số lẻ.

Câu 12: Mệnh đề $\forall x\in\mathbb{R}, x^2-2+a>0$ với a là số thực cho trước. Tìm a để mệnh đề đúng

A. $a\le 2$. **B.** $a<2$. **C.** $a=2$. **D.** $a>2$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\forall x\in\mathbb{R}, x^2-2+a>0\Leftrightarrow x^2>2-a\Leftrightarrow 2-a\le 0\Leftrightarrow a\le 2$.

Câu 13: Với giá trị nào của x thì "$x^2-1=0, x\in\mathbb{N}$" là mệnh đề đúng.

A. $x=1$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=\pm 1$. **D.** $x=0$.

Lời giải

Chọn A

B. Không hiểu rõ câu hỏi và tập $\mathbb{N}$.

C. Không hiểu rõ câu hỏi và tập $\mathbb{N}$.

D. Không biết giải phương trình.

Dạng 2: Xét tính đúng sai của mệnh đề

1. Phương pháp

Một câu khẳng định đúng là mệnh đề đúng, một câu khẳng định sai là mệnh đề sai.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$:"$3x+5\le x^2$" với x là số thực. Mệnh đề nào sau đây là đúng:

A. $P(3)$. **B.** $P(4)$. **C.** $P(1)$. **D.** $P(5)$.

Hướng dẫn giải

$P(3)$: "$3.3+5\le 3^2$" $\Leftrightarrow$ "$14\le 9$" là mệnh đề sai.

$P(4)$: "$3.4+5\le 4^2$" $\Leftrightarrow$ "$17\le 16$" là mệnh đề sai.

$P(1)$: "$3.1+5\le 1^2$" $\Leftrightarrow$ "$8\le 1$" là mệnh đề sai.

$P(5)$: "$3.5+5\le 5^2$" $\Leftrightarrow$ "$20\le 25$" là mệnh đề đúng.

Ví dụ 2: Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề đúng?

A. Nếu $a\ge b$ thì $a^2\ge b^2$.

B. Nếu a chia hết cho 9 thì a chia hết cho 3.

C. Nếu em chăm chỉ thì em thành công.

D. Nếu một tam giác có một góc bằng 60^0 thì tam giác đó đều.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Mệnh đề A là một mệnh đề sai vì $b\le a<0$ thì $b^2\ge a^2$.

Mệnh đề B là mệnh đề đúng. Vì $a\vdots 9\Rightarrow \begin{cases} a=9n,\ n\in\mathbb{Z} \\ 9\vdots 3 \end{cases}\Rightarrow a\vdots 3.$

Câu C chưa là mệnh đề vì chưa khẳng định được tính đúng, sai.

Mệnh đề D là mệnh đề sai vì chưa đủ điều kiện để khẳng định một tam giác là đều.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\forall x\in\mathbb{R}$ sao cho $x+1>x$.

B. $\forall x\in\mathbb{R}$ sao cho $|x|=x$.

C. $\exists x\in\mathbb{R}$ sao cho $x-3=x^2$.

D. $\exists x\in\mathbb{R}$ sao cho $x^2<0$.

Lời giải

Chọn A

A: Đúng vì VT luôn lớn hơn VP 1 đơn vị.

B: HS nhầm trong tập hợp số tự nhiên.

C: HS nhầm là tìm được x ở VT để được số chính phương ở VP.

D: HS nhầm ở số 0.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2>1\Rightarrow x>-1$.

B. $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2>1\Rightarrow x>1$.

C. $\forall x\in\mathbb{R},\ x>-1\Rightarrow x^2>1$.

D. $\forall x\in\mathbb{R},\ x>1\Rightarrow x^2>1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $\forall x\in\mathbb{R},\ x^2>1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>1 \end{array}\right.$. Ta xét theo một chiều của mệnh đề ta thấy D đúng.

Câu 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $6\sqrt{2}$ là số hữu tỷ.

B. Phương trình $x^2+7x-2=0$ có 2 nghiệm trái dấu.

C. 17 là số chẵn.

D. Phương trình $x^2+x+7=0$ có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình $x^2+7x-2=0$ có $a.c=1.(-2)<0$ nên nó có 2 nghiệm trái dấu.

Vậy mệnh đề ở phương án B là mệnh đề đúng. Các mệnh đề còn lại đều sai.

Câu 4: Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề đúng?

A. Nếu $a \ge b$ thì $a^2 \ge b^2$.

B. Nếu a chia hết cho 9 thì a chia hết cho 3.

C. Nếu em chăm chỉ thì em thành công.

D. Nếu một tam giác có một góc bằng 60° thì tam giác đó đều.

Lời giải.

Chọn B

Mệnh đề A là một mệnh đề sai vì $b \le a < 0$ thì $a^2 \le b^2$.

Mệnh đề B là mệnh đề đúng. Vì $a \vdots 9 \Rightarrow \begin{cases} a=9n,\ n\in\mathbb{Z} \\ 9 \vdots 3 \end{cases} \Rightarrow a \vdots 3$.

Câu C chưa là mệnh đề vì chưa khẳng định được tính đúng, sai.

Mệnh đề D là mệnh đề sai vì chưa đủ điều kiện để khẳng định một tam giác là đều.

Câu 5: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

A. $-\pi < -2 \Leftrightarrow \pi^2 < 4.$

B. $\pi < 4 \Leftrightarrow \pi^2 < 16.$

C. $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow 2\sqrt{23} < 2.5.$

D. $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow -2\sqrt{23} > -2.5.$

Lời giải.

Chọn A

Xét đáp án A. Ta có: $\pi^2 < 4 \Leftrightarrow |\pi| < 2 \Leftrightarrow -2 < \pi < 2.$ Suy ra A sai.

Câu 6: Trong các mệnh đề dưới đây mệnh đề nào đúng?

A. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2+1>0$.

B. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > x$.

C. $\exists\, r \in \mathbb{Q},\ r^2 = 7$.

D. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ n+4$ chia hết cho 4.

Lời giải

Chọn A

A: Đúng vì $x^2 \ge 0$ nên $x^2+1>0$.

B: HS hiểu nhầm mọi số bình phương đều lớn hơn chính nó.

C: HS hiểu nhầm $\sqrt{7} \in \mathbb{Q}$.

Câu 7: Hỏi trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. $"\forall x \in \mathbb{R}, x>3 \Rightarrow x^2>9"$.

B. $"\forall x \in \mathbb{R}, x>-3 \Rightarrow x^2>9"$.

C. $"\forall x \in \mathbb{R}, x^2>9 \Rightarrow x>3"$.

D. $"\forall x \in \mathbb{R}, x^2>9 \Rightarrow x>-3"$.

Lời giải

Chọn A

B, C, D sai là không biết mệnh đề kéo theo.

Dạng 3: Phủ định của mệnh đề

1. Phương pháp

Cho mệnh đề P. Mệnh đề "Không phải P" gọi là mệnh đề phủ định của P. Ký hiệu là $\overline{P}$. Nếu P đúng thì $\overline{P}$ sai, nếu P sai thì $\overline{P}$ đúng.

Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ với $x \in X$

- Mệnh đề phủ định của mệnh đề $"\forall x \in X, P(x)"$ là $"\exists x \in X, P(x)"$
- Mệnh đề phủ định của mệnh đề $"\exists x \in X, P(x)"$ là $"\forall x \in X, P(x)"$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau, cho biết mệnh đề này đúng hay sai?

P : " Hình thoi có hai đường chéo vuông góc với nhau"

Q : " 6 là số nguyên tố"

R : " Tổng hai cạnh của một tam giác lớn hơn cạnh còn lại"

S : " $5 > -3$ "

K : " Phương trình $x^4 - 2x^2 + 2 = 0$ có nghiệm "

H : " $\left(\sqrt{3} - \sqrt{12}\right)^2 = 3$ "

Lời giải

Ta có các mệnh đề phủ định là

$\overline{P}$: " Hai đường chéo của hình thoi không vuông góc với nhau", mệnh đề này sai

$\overline{Q}$: " 6 không phải là số nguyên tố", mệnh đề này đúng

$\overline{R}$: " Tổng hai cạnh của một tam giác nhỏ hơn hoặc bằng cạnh còn lại", mệnh đề này sai

$\overline{S}$: " $5 \le -3$ ", mệnh đề này sai

Ví dụ 2: Cho mệnh đề chứa biến " $P(x) : x > x^3$ " , xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $P(1)$ b) $P\left(\frac{1}{3}\right)$ c) $\forall x \in N,\ P(x)$ d) $\exists x \in N,\ \overline{P(x)}$

Lời giải

a) Ta có $P(1) : 1 > 1^3$ đây là mệnh đề sai

b) Ta có $P\left(\frac{1}{3}\right) : \frac{1}{3} > \left(\frac{1}{3}\right)^3$ đây là mệnh đề đúng

c) Ta có $\forall x \in N,\ x > x^3$ là mệnh đề sai vì $P(1)$ là mệnh đề sai

d) Ta có $\exists x \in N,\ x \le x^3$ là mệnh đề đúng vì $x - x^3 = x(1-x)(1+x) \le 0$ với mọi số tự nhiên.

Ví dụ 3: Dùng các kí hiệu để viết các câu sau và viết mệnh đề phủ định của nó.

a) Tích của ba số tự nhiên liên tiếp chia hết cho sáu

b) Với mọi số thực bình phương của nó là một số không âm.

c) Có một số nguyên mà bình phương của nó bằng chính nó.

d) Có một số hữu tỉ mà nghịch đảo của nó lớn hơn chính nó.

Lời giải

a) Ta có $P:\forall n\in N,\ n(n+1)(n+2)\vdots 6$, mệnh đề phủ định là $\overline{P}:\exists n\in N,\ n(n+1)(n+2)\not\vdots 6$.

b) Ta có $Q:\forall x\in\mathbb{R},\ x^2\geq 0$, mệnh đề phủ định là $\overline{Q}:\exists x\in\mathbb{R},\ x^2<0$

c) Ta có $R:\exists n\in Z,\ n^2=n$, mệnh đề phủ định là $\overline{R}:\forall n\in Z,\ n^2\neq n$.

d) $\exists q\in Q,\ \frac{1}{q}>q$, mệnh đề phủ định là $\forall q\in Q,\ \frac{1}{q}\leq q$.

Ví dụ 4: Xác định tính đúng sai của mệnh đề sau và tìm phủ định của nó :

a) A : "$\forall x\in R,\ x^2\geq 0$ "

b) B: " Tồn tại số tự nhiên đều là số nguyên tố".

c) C : " $\exists x\in N$, x chia hết cho $x+1$ "

d) D: "$\forall n\in N,\ n^4-n^2+1$ là hợp số "

e) E: " Tồn tại hình thang là hình vuông ".

f) F: " Tồn tại số thực a sao cho $a+1+\frac{1}{a+1}\leq 2$"

Lời giải

a) Mệnh đề A đúng và $\overline{A}:\exists x\in R,\ x^2<0$

b) Mệnh đề B đúng và $\overline{B}$: "Với mọi số tự nhiêu đều không phải là số nguyên tố"

c) Mệnh đề C đúng vì cho $x=0$ và $\overline{C}$: "$\forall x\in N, x\not\vdots (x+1)$"

d) Mệnh đề D sai vì với $n=2$ ta có $n^4-n^2+1=13$ không phải là hợp số

Mệnh đề phủ định là $\overline{D}$: "$\exists n\in N,\ n^4-n^2+1$ là số số nguyên tố"

e) Mệnh đề E đúng và $\overline{E}$: " Với mọi hình thang đều không là hình vuông ".

f) Mệnh đề F đúng và mệnh đề phủ định là $\overline{F}$: " Với mọi số thực a thì $a+1+\frac{1}{a+1}>2$"

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho mệnh đề: "$\forall x\in\mathbb{R}, x^2+3x+5>0$". Mệnh đề phủ định của mệnh đề trên là

A. $\forall x\in\mathbb{R}, x^2+3x+5\leq 0$.

B. $\exists x\in\mathbb{R}, x^2+3x+5\leq 0$.

C. $\forall x\in\mathbb{R}, x^2+3x+5<0$.

D. $\exists x\in\mathbb{R}, x^2+3x+5>0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Chú ý: Phủ định của mệnh đề "$\forall x\in\mathbb{R}, p(x)$" là "$\exists x\in\mathbb{R}, \overline{p(x)}$".

Câu 2. Cho mệnh đề "Có một học sinh trong lớp C4 không chấp hành luật giao thông". Mệnh đề phủ định của mệnh đề này là

A. Không có học sinh nào trong lớp C4 chấp hành luật giao thông.

B. Mọi học sinh trong lớp C4 đều chấp hành luật giao thông.

C. Có một học sinh trong lớp C4 chấp hành luật giao thông.

D. Mọi học sinh trong lớp C4 không chấp hành luật giao thông.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Mệnh đề phủ định là " Mọi học sinh trong lớp C4 đều chấp hành luật giao thông".

Câu 3. Cho mệnh đề: " Có một học sinh trong lớp 10A không thích học môn Toán". Mệnh đề phủ định của mệnh đề này là:

A. " Mọi học sinh trong lớp 10A đều thích học môn Toán".

B. " Mọi học sinh trong lớp 10A đều không thích học môn Toán".

C. " Mọi học sinh trong lớp 10A đều thích học môn Văn".

D. " Có một học sinh trong lớp 10A thích học môn Toán".

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Câu 4. Mệnh đề phủ định của mệnh đề " 2018 là số tự nhiên chẵn" là

A. 2018 là số chẵn.

B. 2018 là số nguyên tố.

C. 2018 không là số tự nhiên chẵn.

D. 2018 là số chính phương.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Câu 5. Mệnh đề: "Mọi động vật đều di chuyển" có mệnh đề phủ định là

A. Có ít nhất một động vật di chuyển.

B. Mọi động vật đều đứng yên.

C. Có ít nhất một động vật không di chuyển.

D. Mọi động vật đều không di chuyển.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Câu 6: Cho mệnh đề " $\forall x \in R, x^2 - x + 7 < 0$ ". Hỏi mệnh đề nào là mệnh đề phủ định của mệnh đề trên?

A. $\exists x \in R, x^2 - x + 7 \geq 0$.

B. $\forall x \in R, x^2 - x + 7 > 0$.

C. $\forall x \in R, x^2 - x + 7 < 0$.

D. $\nexists x \in R, x^2 - x + 7 < 0$.

Lời giải

Chọn A

B : sai là gì không dùng đúng kí hiệu của phủ định.

C : sai là gì không dùng đúng $\geq$.

D : sai kí hiệu không tồn tại.

Câu 7: Cho mệnh đề: "$\exists x \in \mathbb{R} \,|\, 2x^2 - 3x - 5 < 0$". Mệnh đề phủ định sẽ là

A. $"\forall x \in \mathbb{R} \left| 2x^2+3x-5 \ge 0"$.

B. $"\forall x \in \mathbb{R} \left| 2x^2+3x-5 > 0"$.

C. $"\exists x \in \mathbb{R} \left| 2x^2+3x-5 > 0"$.

D. $"\exists x \in \mathbb{R} \left| 2x^2+3x-5 \ge 0"$.

Lời giải

Chọn A

Đáp án A đúng vì phủ định của "∃" là "∀" và phủ định của dấu "<" là dấu "≥".

Đáp án B sai vì học sinh nhầm phủ định của dấu "<" là dấu ">".

Đáp án C sai vì học sinh không nhớ phủ định của "∃" là "∀" và phủ định dấu "<" là dấu "≥".

Đáp án D sai vì học sinh không nhớ phủ định của "∃" là "∀".

Câu 8: Mệnh đề phủ định của mệnh đề: $\forall x \in R, x^2+x+5>0$ là

A. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2+x+5 \le 0$.

B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+x+5 \le 0$.

C. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2+x+5 < 0$.

D. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+x+5 < 0$.

Lời giải

Chọn A

B: HS quên biến đổi lượng từ.

C: HS quên trường hợp dấu bằng.

D: HS quên cả đổi lượng từ và dấu bằng.

Câu 9: Mệnh đề phủ định của mệnh đề "Phương trình $ax^2+bx+c=0 \ (a \ne 0)$ vô nghiệm" là mệnh đề nào sau đây?

A. Phương trình $ax^2+bx+c=0 \ (a \ne 0)$ có nghiệm.

B.. Phương trình $ax^2+bx+c=0 \ (a \ne 0)$ có 2 nghiệm phân biệt.

C. Phương trình $ax^2+bx+c=0 \ (a \ne 0)$ có nghiệm kép.

D. Phương trình $ax^2+bx+c=0 \ (a \ne 0)$ không có nghiệm.

Lời giải

Chọn A

Đáp án A đúng vì phủ định vô nghiệm là có nghiệm.

Đáp án B sai vì học sinh nhầm phủ định vô nghiệm là phương trình sẽ có 2 nghiệm phân biệt.

Đáp án C sai vì học sinh nhầm phủ định vô nghiệm là có 1 nghiệm tức nghiệm kép.

Đáp án D sai vì học sinh không hiểu câu hỏi của đề, học sinh nghĩ vô nghiệm là không có nghiệm.

Câu 10. Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+x+5>0$.

A. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2+x+5 < 0$.

B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+x+5 < 0$.

C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+x+5 \le 0$.

D. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2+x+5 \le 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 > 0$. Suy ra mệnh đề phủ định là $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 \le 0$.

Câu 11. Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > x$".

A. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \le x$. **B.** $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > x$. **C.** $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \le x$. **D.** $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < x$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Mệnh đề $A : "\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > x" \Rightarrow \overline{A} : "\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \le x"$.

Câu 12. Cho x là số tự nhiên. Phủ định của mệnh đề "$\forall x$ chẵn, $x^2 + x$ là số chẵn" là mệnh đề:

A. $\exists x$ lẻ, $x^2 + x$ là số lẻ. **B.** $\exists x$ lẻ, $x^2 + x$ là số chẵn.

C. $\forall x$ lẻ, $x^2 + x$ là số lẻ. **D.** $\exists x$ chẵn, $x^2 + x$ là số lẻ.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mệnh đề phủ định là "$\exists x$ lẻ, $x^2 + x$ lẻ".

Câu 13. Phủ định của mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 = 0$" là

A. "$\exists x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 > 0$". **B.** "$\exists x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 \ne 0$".

C. "$\forall x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 \ne 0$". **D.** "$\forall x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 = 0$".

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Vì phủ định của mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 = 0$" là "$\forall x \in \mathbb{Q} : 2x^2 - 5x + 2 \ne 0$".

Câu 14. Cho mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$". Hỏi mệnh đề nào là mệnh đề phủ định của mệnh đề trên?

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$. **B.** $\not\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$.

C. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \ge 0$. **D.** $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \le 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phủ định của mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$" là mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \ge 0$".

Câu 15. Mệnh đề phủ định của mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 = 0$" là

A. "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 \ne 0$". **B.** "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 > 0$".

C. "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 = 0$". **D.** "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 \ne 0$".

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Mệnh đề phủ định của mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 = 0$" là "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 \ne 0$".

Câu 16. Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề $P : "\forall x \in \mathbb{N}; x^2 + x - 1 > 0"$.

A. $\overline{P} : "\forall x \in \mathbb{N}; x^2 + x - 1 > 0"$. **B.** $\overline{P} : "\exists x \in \mathbb{N}; x^2 + x - 1 \le 0"$.

C. $\overline{P} : "\exists x \in \mathbb{N}; x^2 + x - 1 > 0"$. **D.** $\overline{P} : "\forall x \in \mathbb{N}; x^2 + x - 1 \le 0"$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Dạng 4: Mệnh đề kéo theo, mệnh đề đảo và hai mệnh đề tương đương

1. Phương pháp

Cho 2 mệnh đề P và Q.

- Mệnh đề "Nếu P thì Q" gọi là mệnh đề kéo theo. Ký hiệu là $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng Q sai, và đúng trong các trường hợp con lại.
- Cho mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Khi đó mệnh đề $Q \Rightarrow P$ gọi là mệnh đề đảo của $P \Rightarrow Q$.
- Mệnh đề "P nếu và chỉ nếu Q" gọi là mệnh đề tương đương, ký hiệu $P \Leftrightarrow Q$. Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi cả hai mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng và sai trong các trường hợp còn lại.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và phát biểu mệnh đề đảo, xét tính đúng sai của nó.

a) P : " Tứ giác $ABCD$ là hình thoi" và Q : " Tứ giác $ABCD$ AC và BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường"

b) P : "$2 > 9$" và Q : "$4 < 3$"

c) P : " Tam giác ABC vuông cân tại A" và Q : " Tam giác ABC có $\widehat{A} = 2\widehat{B}$ "

d) P :" Ngày 2 tháng 9 là ngày Quốc Khánh của nước Việt Nam" và Q :" Ngày 27 tháng 7 là ngày thương binh liệt sĩ"

Lời giải

a) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là " Nếu tứ giác $ABCD$ là hình thoi thì AC và BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường", mệnh đề này đúng.

Mệnh đề đảo là $Q \Rightarrow P$:"Nếu tứ giác $ABCD$ có AC và BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường thì $ABCD$ là hình thoi ", mệnh đề này sai.

b) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là " Nếu $2 > 9$ thì $4 < 3$ ", mệnh đề này đúng vì mệnh đề P sai.

Mệnh đề đảo là $Q \Rightarrow P$: " Nếu $4 < 3$ thì $2 > 9$ ", mệnh đề này đúng vì mệnh đề Q sai.

c) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là " Nếu tam giác ABC vuông cân tại A thì $\widehat{A} = 2\widehat{B}$ ", mệnh đề này đúng

Mệnh đề đảo là $Q \Rightarrow P$: " Nếu tam giác ABC có $\widehat{A} = 2\widehat{B}$ thì nó vuông cân tại A", mệnh đề này sai

d) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là " Nếu ngày 2 tháng 9 là ngày Quốc Khánh của nước Việt Nam thì ngày 27 tháng 7 là ngày thương binh liệt sĩ"

Mệnh đề đảo là $Q \Rightarrow P$: " Nếu ngày 27 tháng 7 là ngày thương binh liệt sĩ thì ngày 2 tháng 9 là ngày Quốc Khánh của nước Việt Nam"

Hai mệnh đề trên đều đúng vì mệnh đề P, Q đều đúng

Ví dụ 2: Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ bằng hai cách và và xét tính đúng sai của nó

a) P : "Tứ giác $ABCD$ là hình thoi" và Q :" Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau"

b) P : " Bất phương trình $\sqrt{x^2-3x}>1$ có nghiệm" và Q : " $\sqrt{(-1)^2-3.(-1)}>1$ "

Lời giải

a) Ta có mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng vì mệnh đề $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow P$ đều đúng và được phát biểu bằng hai cách như sau:

"Tứ giác $ABCD$ là hình thoi khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau" và

"Tứ giác $ABCD$ là hình thoi nếu và chỉ nêu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau"

b) Ta có mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng vì mệnh đề P, Q đều đúng(do đó mệnh đề $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow P$ đều đúng) và được phát biểu bằng hai cách như sau:

" Bất phương trình $\sqrt{x^2-3x}>1$ có nghiệm khi và chỉ khi $\sqrt{(-1)^2-3.(-1)}>1$ " và

" Bất phương trình $\sqrt{x^2-3x}>1$ có nghiệm nếu và chỉ nếu $\sqrt{(-1)^2-3.(-1)}>1$ "

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho định lí "Nếu hai tam giác bằng nhau thì diện tích chúng bằng nhau". Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hai tam giác bằng nhau là điều kiện cần để diện tích chúng bằng nhau.

B. Hai tam giác bằng nhau là điều kiện cần và đủ để chúng có diện tích bằng nhau.

C. Hai tam giác có diện tích bằng nhau là điều kiện đủ để chúng bằng nhau.

D. Hai tam giác bằng nhau là điều kiện đủ để diện tích chúng bằng nhau.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

- "Hai tam giác bằng nhau" là điều kiện đủ.
- "Diện tích bằng nhau" là điều kiện cần.

Câu 2: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào có **mệnh đề đảo** là đúng?

A. Nếu a và b cùng chia hết cho c thì $a+b$ chia hết cho c.

B. Nếu hai tam giác bằng nhau thì diện tích bằng nhau.

C. Nếu a chia hết cho 3 thì a chia hết cho 9.

D. Nếu một số tận cùng bằng 0 thì số đó chia hết cho 5.

Lời giải

Chọn C

Nếu a chia hết cho 9 thì a chia hết cho 3 là mệnh đề đúng.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào không phải là định lí?

A. $\exists x \in \mathbb{N}$, x^2 chia hết cho $3 \Rightarrow x$ chia hết cho 3.

B. $\exists x \in \mathbb{N}$, x^2 chia hết cho $6 \Rightarrow x$ chia hết cho 3.

C. $\forall x \in \mathbb{N},\ x^2$ chia hết cho $9 \Rightarrow x$ chia hết cho 9.

D. $\exists x \in \mathbb{N},\ x$ chia hết cho 4 và $6 \Rightarrow x$ chia hết cho 12.

Lời giải

Chọn D

Định lý sẽ là: $\forall x \in \mathbb{N},\ x$ chia hết cho 4 và $6 \Rightarrow x$ chia hết cho 12.

Câu 4: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là định lí?

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x > -2 \Rightarrow x^2 > 4$.

B. $\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$.

C. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$.

D. Nếu $a+b$ chia hết cho 3 thì a, b đều chia hết cho 3.

Lời giải

Chọn B

Dạng 5: Mệnh đề với kí hiệu với mọi, tồn tại

1. Phương pháp

- Kí hiệu $\forall$: đọc là với mọi, $\exists$: đọc là tồn tại
- Mệnh đề phủ định của mệnh đề "$\forall x \in X,\ P(x)$" là "$\exists x \in X,\ \overline{P(x)}$".
- Mệnh đề phủ định của mệnh đề "$\exists x \in X,\ P(x)$" là "$\forall x \in X,\ \overline{P(x)}$".

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Câu 1: Mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 3$" khẳng định rằng:

A. Bình phương của mỗi số thực bằng 3.

B. Có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng 3.

C. Chỉ có một số thực có bình phương bằng 3.

D. Nếu x là số thực thì $x^2 = 3$.

Lời giải

Chọn B.

Câu 2: Kí hiệu X là tập hợp các cầu thủ x trong đội tuyển bóng rổ, $P(x)$ là mệnh đề chứa biến "x cao trên $180\ cm$". Mệnh đề "$\forall x \in X, P(x)$"khẳng định rằng:

A. Mọi cầu thủ trong đội tuyển bóng rổ đều cao trên $180\ cm$.

B. Trong số các cầu thủ của đội tuyển bóng rổ có một số cầu thủ cao trên $180\ cm$.

C. Bất cứ ai cao trên $180\ cm$ đều là cầu thủ của đội tuyển bóng rổ.

D. Có một số người cao trên $180\ cm$ là cầu thủ của đội tuyển bóng rổ.

Lời giải

Chọn A.

Câu 3: Mệnh đề nào sau đây là phủ định của mệnh đề: "Mọi động vật đều di chuyển".

A. Mọi động vật đều không di chuyển.

B. Mọi động vật đều đứng yên.

C. Có ít nhất một động vật không di chuyển.

D. Có ít nhất một động vật di chuyển.

Lời giải

Chọn C.

Phủ định của "mọi" là "có ít nhất"

Phủ định của "đều di chuyển" là "không di chuyển".

Câu 4: Phủ định của mệnh đề: "Có ít nhất một số vô tỷ là số thập phân vô hạn tuần hoàn" là mệnh đề nào sau đây:

A. Mọi số vô tỷ đều là số thập phân vô hạn tuần hoàn.

B. Có ít nhất một số vô tỷ là số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

C. Mọi số vô tỷ đều là số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

D. Mọi số vô tỷ đều là số thập phân tuần hoàn.

Lời giải

Chọn C.

Phủ định của "có ít nhất" là "mọi"

Phủ định của "tuần hoàn" là "không tuần hoàn".

Câu 5: Cho mệnh đề A : "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$" Mệnh đề phủ định của A là:

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$.

B. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$.

C. Không tồn tại $x : x^2 - x + 7 < 0$.

D. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$.

Lời giải

Chọn D.

Phủ định của $\forall$ là $\exists$

Phủ định của $<$ là $\geq$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tìm mệnh đề **sai.**

A. $"\forall x; x^2 + 2x + 3 > 0"$.

B. $"\forall x; x^2 \geq x"$.

C. $"\exists x; x^2 + 5x + 6 = 0"$.

D. $"\exists x; x < \frac{1}{x}"$.

Lời giải.

Chọn B.

Chọn $x = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 < x$. Vậy mệnh đề B sai

Câu 2: Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$.

B. $\exists n \in \mathbb{N}, n < 0$.

C. $\exists n \in \mathbb{Q}, x^2 = 2$.

D. $\forall x \in \mathbb{Z}, \frac{1}{x} > 0$.

Lời giải

Chọn A

Chọn A Vì $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 3. Mệnh đề nào sau là mệnh đề **sai**?

A. $\forall x\in\mathbb{R}:x^2>0$.

B. $\exists x\in\mathbb{R}:x>x^2$

C. $\exists n\in\mathbb{N}:n^2=n$.

D. $\forall n\in\mathbb{N}$ thì $n\le 2n$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $0\in\mathbb{R}$ và $0^2=0$ nên mệnh đề $\forall x\in\mathbb{R}:x^2>0$ là mệnh đề sai.

Câu 4. Chọn mệnh đề **sai.**

A. "$\forall x\in\mathbb{R}:x^2>0$". **B.** " $\exists n\in\mathbb{N}:n^2=n$". **C.** "$\forall n\in\mathbb{N}:n\le 2n$". **D.** "$\exists x\in\mathbb{R}:x<1$".

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Với $x=0\in\mathbb{R}$ thì $x^2=0$ nên "$\forall x\in\mathbb{R}:x^2>0$" sai.

Câu 5. Tìm mệnh đề đúng.

A. $"\exists x;x^2+3=0"$

B. $"\exists x;x^4+3x^2+2=0"$

C. $"\forall x\in\mathbb{Z};x^5>x^2$ ".

D. $"\forall n\in\mathbb{N};\left((2n+1)^2-1\right)\vdots 4"$

Lời giải.

Chọn C.

$(2n+1)^2-1=4n^2+4n=4\left(n^2+n\right)\vdots 4;\forall n\in\mathbb{N}$. Vậy mệnh đề C đúng

Câu 6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\exists n\in\mathbb{N}$, $n^2+11n+2$ chia hết cho 11.

B. $\exists n\in\mathbb{N}$, n^2+1 chia hết cho 4.

C. Tồn tại số nguyên tố chia hết cho 5.

D. $\exists n\in\mathbb{Z}$, $2x^2-8=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

+ Xét đáp án A. Khi $n=3$ thì giá trị của $\left(n^2+11n+2\right)$ bằng $44\vdots 11$ nên đáp án A đúng

+ Xét đáp án B. Khi $n=2k,k\in\mathrm{N}\Rightarrow n^2+1=4k^2+1$ không chia hết cho 4, $k\in\mathrm{N}$.

Khi $n=2k+1,k\in\mathrm{N}\Rightarrow n^2+1=(2k+1)^2+1=4k^2+4k+2$ không chia hết cho 4, $k\in\mathrm{N}$.

+ Xét đáp án C. Tồn tại số nguyên tố 5 chia hết cho 5 nên đáp án C đúng

+ Xét đáp án D. Phương trình $2x^2-8=0\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=-2;\ x=2\in Z$ nên đáp án D đúng.

Câu 7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\forall x\in\mathbb{R}$, $(x-1)^2\ne x-1$.

B. $\forall x\in\mathbb{R},|x|<3\Leftrightarrow x<3$.

C. $\exists n\in\mathbb{N},n^2+1$ chia hết cho 4.

D. $\forall n\in\mathbb{N}$, n^2+1 không chia hết cho 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

A sai vì với $x=1$ thì $(x-1)^2=x-1$.

B sai vì khi $x=-4<3$ nhưng $|x|=4>3$.

C sai vì

- Nếu $n=2k\ (k\in\mathbb{N})$ thì $n^2+1=4k^2+1$ số này không chia hết cho 4.
- Nếu $n=2k+1\ (k\in\mathbb{N})$ thì $n^2+1=4k^2+4k+2$ số này cũng không chia hết cho 4.

D đúng vì

- Nếu $n=3k\ (k\in\mathbb{N})$ thì $n^2+1=9k^2+1$ số này không chia hết cho 3.
- Nếu $n=3k\pm1\ (k\in\mathbb{N}^*)\lim\limits_{x\to\infty}$ thì $n^2+1=9k^2\pm6k+2$ số này không chia hết cho 3.

Bài 2 TẬP HỢP VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

THUẬT NGỮ

- Tập hợp, tập con, tập hợp bằng nhau, tập rỗng
- Hợp, giao, hiệu của hai tập hợp, phần bù của một tập con
- Biểu đồ Ven

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết các khái niệm cơ bản về tập hợp.
- Thực hiện các phép toán trên tập hợp và vận dụng giải một số bài toán có nội dung thực tiễn.
- Sử dụng biểu đồ Ven để biểu diễn tập hợp và các phép toán trên tập hợp.

Câu lạc bộ Lịch sử có 12 thành viên (không có hai bạn nào trùng tên), tổ chức hai chuyên đề trên một phần mềm họp trực tuyến. Tên các thành viên tham gia mỗi chuyên đề được hiển thị trên màn hình (H.1.1).



Hình 1.1

Bài học này sẽ giúp em trả lời câu hỏi trên bằng kiến thức cơ bản về tập hợp và các phép toán trên tập hợp.

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ TẬP HỢP

a. Tập hợp

HĐ1. Trong tình huống trên, gọi A là tập hợp những thành viên tham gia Chuyên đề 1, B là tập hợp những thành viên tham gia Chuyên đề 2.

a) Nam có là một phần tử của tập hợp A không? Ngân có là một phần tử của tập hợp B không?

b) Hãy mô tả các tập hợp A và B bằng cách liệt kê các phần tử.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

HĐ2. Cho tập hợp:

C = {châu Á; châu Âu; châu Đại Dương; châu Mĩ; châu Nam Cực; châu Phi}.

a) Hãy chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp C.

b) Tập hợp C có bao nhiêu phần tử?

Có thể mô tả một tập hợp bằng một trong hai cách sau:

Cách 1. Liệt kê các phần tử của tập hợp;

Cách 2. Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

$a \in S$: phần tử a thuộc tập hợp S.

$a \notin S$: phần tử a không thuộc tập hợp S.

Ví dụ 1. Cho $D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là số nguyên tố}, 5 < n < 20\}$.

a) Dùng kí hiệu $\in$, $\notin$ để viết câu trả lời cho câu hỏi sau: Trong các số 5; 12; 17; 18, số nào thuộc tập D, số nào không thuộc tập D?

b) Viết tập hợp D bằng cách liệt kê các phần tử. Tập hợp D có bao nhiêu phần tử?

Giải

a) $5 \notin D$; $12 \notin D$; $17 \in D$; $18 \notin D$.

b) D = {7; 11; 13; 17; 19}. Tập hợp D có 5 phần tử.

Chú ý. Số phần tử của tập hợp S được kí hiệu là $n(S)$. Chẳng hạn, tập hợp A trong HĐ1 có số phần tử là 7, ta viết $n(A) = 7$.



Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là tập rỗng, kí hiệu là $\varnothing$.

Chẳng hạn:

– Tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2 + 1 = 0$ là tập rỗng;

– Tập hợp những người sống trên Mặt Trời là tập rỗng.

Luyện tập 1. Gọi X là tập nghiệm của phương trình

$$x^2 - 24x + 143 = 0.$$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $13 \in X$; b) $11 \notin X$; c) $n(X) = 2$.

b. Tập hợp con

HĐ3. Gọi H là tập hợp các bạn tham gia Chuyên đề 2 trong *tình huống mở đầu* có tên bắt đầu bằng chữ H. Các phần tử của tập hợp H có là phần tử của tập hợp B trong HĐ1 không?

Nếu mọi phần tử của tập hợp T đều là phần tử của tập hợp S thì ta nói T là một tập hợp con (tập con) của S và viết là $T \subset S$ (đọc là T chứa trong S hoặc T là tập con của S).

- Thay cho $T \subset S$, ta còn viết $S \supset T$ (đọc là S chứa T).
- Kí hiệu $T \not\subset S$ để chỉ T không là tập con của S.

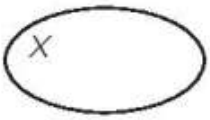
Nhận xét

- Từ định nghĩa trên, T là tập con của S nếu mệnh đề sau đúng:

$$\forall x,\ x \in T \Rightarrow x \in S.$$

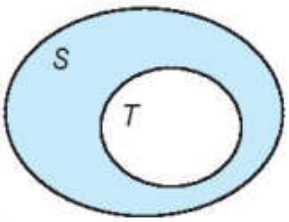
- Quy ước tập rỗng là tập con của mọi tập hợp.

Người ta thường minh hoạ một tập hợp bằng một hình phẳng được bao quanh bởi một đường kín, gọi là biểu đồ Ven (H.1.2).



Hình 1.2

Minh hoạ T là một tập con của S như Hình 1.3.



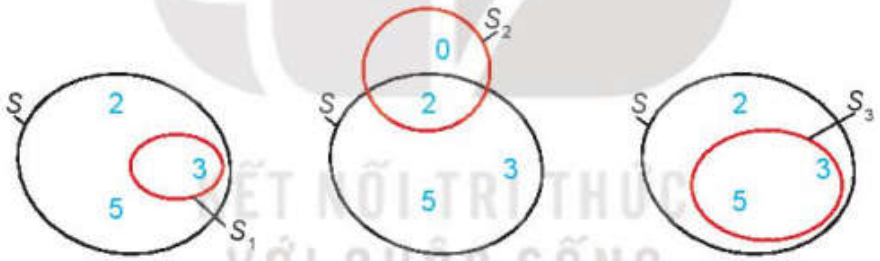
Hình 1.3

Ví dụ 2. Cho tập hợp $S = \{2; 3; 5\}$. Những tập hợp nào sau đây là tập con của S?

$S_1 = \{3\}$; $S_2 = \{0; 2\}$; $S_3 = \{3; 5\}$.

Giải

Các tập hợp $S_1 = \{3\}$, $S_3 = \{3; 5\}$ là những tập con của S (H.1.4).



Hình 1.4

c. Hai tập hợp bằng nhau

HĐ4. Sơn và Thu viết tập hợp các số chính phương nhỏ hơn 100 như sau:

Sơn: $S = \{0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81\}$;

Thu: $T = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là số chính phương}; n < 100\}$.

Hỏi bạn nào viết đúng?

Hai tập hợp S và T được gọi là hai tập hợp bằng nhau nếu mỗi phần tử của T cũng là phần tử của tập hợp S và ngược lại. Kí hiệu là $S = T$.

Nếu $S \subset T$ và $T \subset S$ thì $S = T$.



Ví dụ 3. Cho hai tập hợp:

$C = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là bội chung của } 2 \text{ và } 3;\ n < 30\}$;

$D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là bội của } 6;\ n < 30\}$.

Chứng minh $C = D$.

Giải

Ta có: $C = \{0; 6; 12; 18; 24\}$;

$D = \{0; 6; 12; 18; 24\}$.

Vậy $C = D$.

Luyện tập 2. Giả sử C là tập hợp các hình bình hành có hai đường chéo vuông góc; D là tập hợp các hình vuông.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $C \subset D$; b) $C \supset D$; c) $C = D$.

2. CÁC TẬP HỢP SỐ

a. Mối quan hệ giữa các tập hợp số

- *Tập hợp các số tự nhiên* $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; ...\}$.
- *Tập hợp các số nguyên* $\mathbb{Z}$ gồm các số tự nhiên và các số nguyên âm:

$$\mathbb{Z} = \{...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}.$$

- *Tập hợp các số hữu tỉ* $\mathbb{Q}$ gồm các số viết được dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.

  Số hữu tỉ còn được biểu diễn dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn.
- *Tập hợp các số thực* $\mathbb{R}$ gồm các số hữu tỉ và các số vô tỉ. Số vô tỉ là các số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

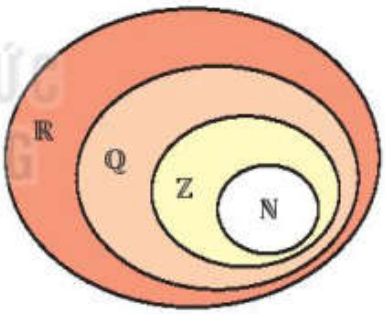
HĐ5. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Mọi số nguyên đều viết được dưới dạng phân số;

b) Tập hợp các số thực chứa tập hợp các số hữu tỉ;

c) Tồn tại một số thực không là số hữu tỉ.

Mối quan hệ giữa các tập hợp số: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



Hình 1.5

Ví dụ 4. Hãy xác định tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $3{,}274 \in \mathbb{Q}$; b) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$; c) $\frac{3}{4} \in \mathbb{Z}$.

Giải

a) $3{,}274 \in \mathbb{Q}$ là mệnh đề đúng.

b) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ là mệnh đề đúng.

c) $\frac{3}{4} \in \mathbb{Z}$ là mệnh đề sai.

Luyện tập 3. Cho tập hợp $C = \{-4; 0; 1; 2\}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) C là tập con của $\mathbb{Z}$; b) C là tập con của $\mathbb{N}$; c) C là tập con của $\mathbb{R}$.

b. Các tập con thường dùng của $\mathbb{R}$

HĐ6. Cho hai tập hợp $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$ và $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) C, D là các tập con của $\mathbb{R}$; b) $\forall x, x \in C \Rightarrow x \in D$;

c) $3 \in C$ nhưng $3 \notin D$; d) $C = D$.

Một số tập con thường dùng của tập số thực $\mathbb{R}$:

- *Khoảng*

$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

$(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

$(-\infty; +\infty)$

- *Đoạn*

$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

- *Nửa khoảng*

$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

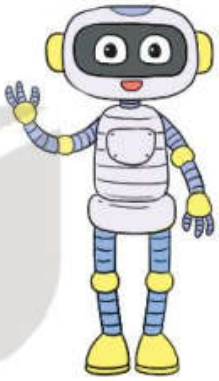
$[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

Kí hiệu $+\infty$: Đọc là dương vô cực (hoặc dương vô cùng).

Kí hiệu $-\infty$: Đọc là âm vô cực (hoặc âm vô cùng).

a, b gọi là các đầu mút của đoạn, khoảng hay nửa khoảng.



Ví dụ 5. Viết các tập hợp sau dưới dạng các khoảng, đoạn, nửa khoảng trong $\mathbb{R}$ rồi biểu diễn trên trục số: $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 7\}$; $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$.

Giải

$C = [2; 7]$

$D = (-\infty; 2)$

Luyện tập 4. Hãy ghép mỗi dòng ở cột bên trái với một dòng thích hợp ở cột bên phải.

1) $x \in [2; 5]$	a) $2 < x \leq 5$
2) $x \in (2; 5]$	b) $x \geq 7$
3) $x \in [7; +\infty)$	c) $7 < x < 10$
4) $x \in (7; 10)$	d) $2 \leq x \leq 5$
	e) $2 \leq x < 5$

3. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

a. Giao của hai tập hợp

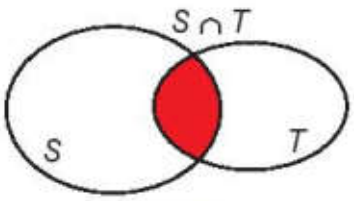
HĐ7. Viết tập hợp X gồm những thành viên tham gia cả hai chuyên đề 1 và 2 trong *tình huống mở đầu*.

Tập X có phải là tập con của tập A không? Tập X có phải là tập con của tập B không? (A, B là các tập hợp trong HĐ1).

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Tập hợp gồm các phần tử thuộc cả hai tập hợp S và T gọi là giao của hai tập hợp S và T, kí hiệu là $S \cap T$.

$$S \cap T = \{x \mid x \in S \text{ và } x \in T\}.$$



Hình 1.6

Ví dụ 6

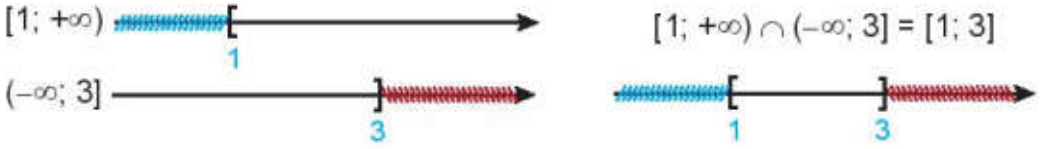
a) Cho hai tập hợp $C = \{4; 7; 27\}$ và $D = \{2; 4; 9; 27; 36\}$. Hãy xác định tập hợp $C \cap D$.

b) Cho hai tập hợp $E = [1; +\infty)$ và $F = (-\infty; 3]$. Hãy xác định tập hợp $E \cap F$.

Giải

a) Giao của hai tập hợp C và D là $C \cap D = \{4; 27\}$.

b) Giao của hai tập hợp E và F là $E \cap F = [1; 3]$.



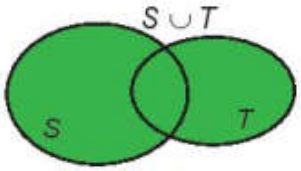
Luyện tập 5. Cho các tập hợp $C = [1; 5]$, $D = [-2; 3]$. Hãy xác định tập hợp $C \cap D$.

b. Hợp của hai tập hợp

HĐ8. Trở lại *tình huống mở đầu*, hãy xác định tập hợp các thành viên tham gia Chuyên đề 1 hoặc Chuyên đề 2.

Tập hợp gồm các phần tử thuộc tập hợp S hoặc thuộc tập hợp T gọi là hợp của hai tập hợp S và T, kí hiệu là $S \cup T$.

$$S \cup T = \{x \mid x \in S \text{ hoặc } x \in T\}.$$



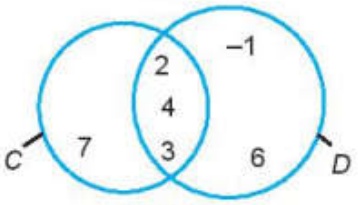
Hình 1.7

Ví dụ 7. Cho hai tập hợp: $C = \{2; 3; 4; 7\}$; $D = \{-1; 2; 3; 4; 6\}$.

Hãy xác định tập hợp $C \cup D$.

Giải

Hợp của hai tập hợp C và D là $C \cup D = \{-1; 2; 3; 4; 6; 7\}$.



Hình 1.8

Ví dụ 8. Trở lại câu hỏi trong *tình huống mở đầu*. Gọi A là tập hợp những thành viên tham gia Chuyên đề 1, B là tập hợp những thành viên tham gia Chuyên đề 2.

Ta có: $A \cup B$ = {Nam; Hương; Chi; Tú; Bình; Ngân; Khánh; Hân; Hiền; Lam}.

Tập $A \cup B$ có 10 phần tử, tức là có 10 thành viên tham gia một hoặc hai chuyên đề.

Số thành viên vắng mặt trong cả hai chuyên đề là:

$$12 - 10 = 2 \text{ (thành viên).}$$

Luyện tập 6. Hãy biểu diễn tập hợp $A \cup B$ bằng biểu đồ Ven, với A, B được cho trong HĐ1.

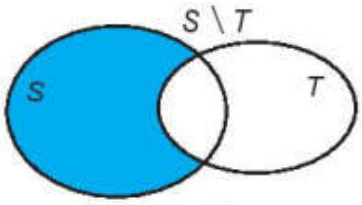
Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

c. Hiệu của hai tập hợp

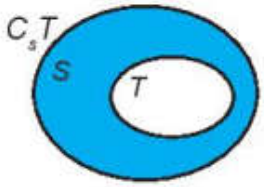
HĐ9. Trở lại *tình huống mở đầu*, hãy xác định tập hợp các thành viên chỉ tham gia Chuyên đề 1 mà không tham gia Chuyên đề 2.

- Hiệu của hai tập hợp S và T là tập hợp gồm các phần tử thuộc S nhưng không thuộc T, kí hiệu là $S \setminus T$.
  $S \setminus T = \{x \mid x \in S \text{ và } x \notin T\}$.
- Nếu $T \subset S$ thì $S \setminus T$ được gọi là phần bù của T trong S, kí hiệu là $C_S T$.

Chú ý. $C_S S = \varnothing$.



Hình 1.9



Hình 1.10

Ví dụ 9. Cho các tập hợp: $D = \{-2; 3; 5; 6\}$; $E = \{x \mid x \text{ là số nguyên tố nhỏ hơn } 10\}$;
$X = \{x \mid x \text{ là số nguyên dương nhỏ hơn } 10\}$.

a) Tìm $D \setminus E$ và $E \setminus D$.

b) E có là tập con của X không? Hãy tìm phần bù của E trong X (nếu có).

Giải

a) Ta có: $E = \{2; 3; 5; 7\}$.
Do đó, $D \setminus E = \{-2; 6\}$; $E \setminus D = \{2; 7\}$.

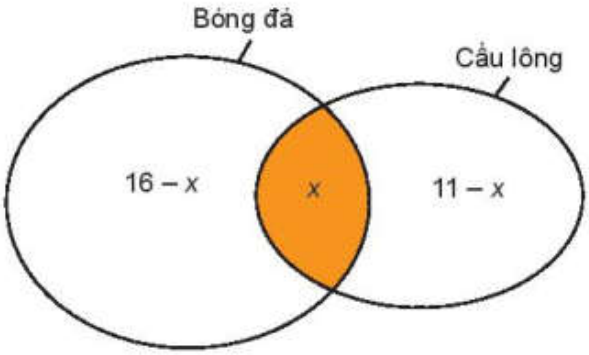
b) Ta có: $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Vậy E là tập con của X.
Phần bù của E trong X là $X \setminus E = C_X E = \{1; 4; 6; 8; 9\}$.

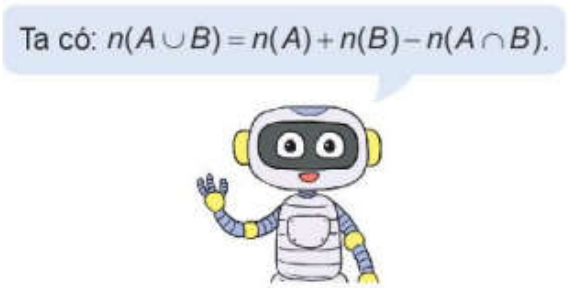
Luyện tập 7. Tìm phần bù của các tập hợp sau trong $\mathbb{R}$:

a) $(-\infty; -2)$; b) $[-5; +\infty)$.

Vận dụng. Lớp 10A có 24 bạn tham gia thi đấu bóng đá và cầu lông, trong đó có 16 bạn thi đấu bóng đá và 11 bạn thi đấu cầu lông. Giả sử các trận bóng đá và cầu lông không tổ chức đồng thời. Hỏi có bao nhiêu bạn lớp 10A tham gia thi đấu cả bóng đá và cầu lông?

Gợi ý. Gọi x là số bạn tham gia thi đấu cả bóng đá và cầu lông.





B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tập hợp và các phần tử của tập hợp

1. Phương pháp

Cách liệt kê: Ghi tất cả các phần tử của tập hợp

Cách nêu tính chất đặc trưng: Từ tất cả các phần tử của tậ hợp, nhận biết tính chất đặc trưng và ghi tính chất đặc trưng của các phần tử.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Xác định các tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng

$A=\{0\ ;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$

$B=\{0\ ;\ 4;\ 8;\ 12;16\}$

$C=\{1;2;4;8;16\}$

Lời giải

Ta có các tập hợp A,B,C được viết dưới dạng nêu các tính chất đặc trưng là

$A=\{x\in N\mid x\le 4\}$

$B=\{x\in N\mid x\vdots 4 \text{ và } x\le 16\}$

$C=\{2^n\mid n\le 4 \text{ và } n\in N\}$

Ví dụ 2: Cho tập hợp $A=\left\{x\in \mathrm{Z}\mid \dfrac{x^2+2}{x}\in \mathrm{Z}\right\}$

a) Hãy xác định tập A bằng cách liệt kê các phần tử

b) Tìm tất cả các tập con của tập hợp A mà số phần tử của nó nhỏ hơn 3.

Lời giải

a) Ta có $\dfrac{x^2+2}{x}=x+\dfrac{2}{x}\in \mathrm{Z}$ với $x\in \mathrm{Z}$ khi và chỉ khi x là ước của 2 hay $x\in\{-2;-1;1;2\}$

Vậy $A=\{-2;-1;1;2\}$

b) Tất cả các tập con của tập hợp A mà số phần tử của nó nhỏ hơn 3 là

Tập không có phần tử nào: $\varnothing$

Tập có một phần tử: $\{-2\},\{-1\},\{1\},\{2\}$

Tập có hai phần thử: $\{-2;-1\},\{-2;1\},\{-2;2\},\{-1;1\},\{-1;2\},\{1;2\}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Trong các tập hợp sau đây, tập hợp nào có đúng một phần tử?

A. $\{x;y\}$. **B.** $\{x\}$. **C.** $\{x;\varnothing\}$. **D.** $\varnothing$.

Lời giải

Chọn B

Câu 2. Cho tập hợp $A=\{x\in\mathbb{N}\mid x\le 5\}$. Tập hợp A được viết dưới dạng liệt kê các phần tử là

A. $A=\{1;2;3;4\}$. **B.** $A=\{1;2;3;4;5\}$.

C. $A=\{0;1;2;3;4;5\}$. **D.** $A=\{0;1;2;3;4\}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $x\in\mathbb{N}\Rightarrow x=0;x=1;x=2;x=3;x=4;x=5$

Câu 3. Cho tập $X=\{x\in\mathbb{R}\,|\,(x^2-4)(x-1)=0\}$. Tính tổng S các phần tử của tập X.

A. $S=4$. **B.** $S=\dfrac{9}{2}$. **C.** $S=9$. **D.** $S=1$.

Lời giải

Chọn D

Các phần tử của tập hợp X là các nghiệm thực của phương trình $(x^2-4)(x-1)=0$.

Ta có: $(x^2-4)(x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-4=0\\x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm 2\\x=1\end{array}\right.$

Do đó: $S=2+(-2)+1=1$.

Câu 4. Tập hợp $X=\{2;5\}$ có bao nhiêu phần tử?

A. 4. **B.** Vô số. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Câu 5. Liệt kê phân tử của tập hợp $B=\{x\in\mathbb{N}\,|\,(2x^2-x)(x^2-3x-4)=0\}$.

A. $B=\{-1;0;4\}$. **B.** $B=\{0;4\}$. **C.** $B=\left\{-1;\dfrac{1}{2};0;4\right\}$. **D.** $B=\{0;1;4\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(2x^2-x)(x^2-3x-4)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2x^2-x=0\\x^2-3x-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{1}{2}\\x=-1\\x=4\end{array}\right.$

Mà $x\in\mathbb{N}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$

Câu 6. Cho $X=\left\{x\in R\,\middle|\,2x^2-5x+3=0\right\}$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $X=\{1\}$. **B.** $X=\left\{1;\dfrac{3}{2}\right\}$. **C.** $X=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$. **D.** $X=\{0\}$.

Lời giải

Chọn B

$2x^2-5x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow X=\left\{1;\dfrac{3}{2}\right\}$.

Câu 7. Có bao nhiêu cách cho một tập hợp ?

A. 2 . **B.** 4 . **C.** 3 . **D.** 1 .

Lời giải

Chọn A

Có hai cách cho một tập hợp :

+) Cách 1 : Liệt kê .

+) Cách 2 : Chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử .

Câu 8: Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập hợp rỗng?

A. $\left\{x\in N/|x|<1\right\}$. **B.** $\left\{x\in Z/6x^2-7x+1=0\right\}$.

C. $\left\{x\in Q/x^2-4x+2=0\right\}$. **D.** $\left\{x\in R/x^2-4x+3=0\right\}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 9: Cho hai tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,|\,\left(2x^2-x-3\right)\left(x^2-4\right)=0\right\}, B=\left\{x\in\mathbb{N}\,|\,x<4\right\}$. Viết lại các tập A và B bằng cách liệt kê các phần tử.

A. $A=\left\{-2;-1;2;\dfrac{3}{2}\right\}$, $B=\left\{0;1;2;3\right\}$. **B.** $A=\left\{-2;-1;2;\dfrac{3}{2}\right\}$, $B=\left\{1;2;3;4\right\}$.

C. $A=\left\{-2;-1;2\right\}$, $B=\left\{0;1;2;3\right\}$. **D.** $A=\left\{-2;-1;2\right\}$, $B=\left\{1;2;3\right\}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\left(2x^2-x-3\right)\left(x^2-4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-x-3=0 \\ x^2-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+1)(2x-3)=0 \\ x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{3}{2} \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$

Do $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\left\{-2;-1;2\right\}\Rightarrow A=\left\{-2;-1;2\right\}$

$B=\left\{0;1;2;3\right\}$

Câu 10. Tìm số phần tử của tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{R}/\left(x-1\right)\left(x+2\right)\left(x^3-4x\right)=0\right\}$.

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

$(x-1)(x+2)(x^3-4x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x+2=0 \\ x^3-4x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow A=\{1;-2;0;2\}$. Vậy A có 4 phần tử.

Câu 11. Cho tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,|\,(2x^2+5x+2)(x^2-16)=0\right\}$. Tập hợp A được viết dưới dạng liệt kê là

A. $\left\{-4;\frac{-1}{2};-2;4\right\}$. **B.** $\{-4;-2\}$. **C.** $\{\pm 4\}$. **D.** $\{-4;-2;4\}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(2x^2+5x+2)(x^2-16)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2+5x+2=0 \\ x^2-16=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-\frac{1}{2} \\ x=4 \\ x=-4 \end{array}\right.$.

Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-2;4;-4\}$.

Câu 12. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp: $X=\left\{x\in\mathbb{Z}\,/\,2x^2-5x+2=0\right\}$

A. $X=\{0\}$. **B.** $X=\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **C.** $X=\{2\}$. **D.** $X=\left\{2;\frac{1}{2}\right\}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$. Mà $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=2$.

Câu 13. Cho tập $X=\left\{x\in\mathbb{N}\,|\,(x^2-4)(x-1)(2x^2-7x+3)=0\right\}$. Tính tổng S các phần tử của X.

A. $S=\frac{9}{2}$. **B.** $S=5$. **C.** $S=6$. **D.** $S=4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $(x^2-4)(x-1)(2x^2-7x+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4=0 \\ x-1=0 \\ 2x^2-7x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ x=1 \\ x=3 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Vì $x\in\mathbb{N}$ nên $X=\{1;2;3\}$.

Vậy tổng $S=1+2+3=6$.

Câu 14. Trong các tập hợp sau, tập nào là tập rỗng?

A. $\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x^2+5x-6=0\right\}$.

B. $\left\{x\in\mathbb{Q}\middle|3x^2-5x+2=0\right\}$.

C. $\left\{x\in\mathbb{Z}\middle|x^2+x-1=0\right\}$.

D. $\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x^2+5x-1=0\right\}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

* $x^2+5x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-6\end{array}\right.$. Vậy $A=\{-6;1\}$.

* $3x^2-5x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$. Vậy $B=\left\{1;\dfrac{2}{3}\right\}$.

* $x^2+x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\\x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$. Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $C=\varnothing$.

* $x^2+5x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-5+\sqrt{29}}{2}\\x=\dfrac{-5-\sqrt{29}}{2}\end{array}\right.$. Vậy $D=\left\{\dfrac{-5+\sqrt{29}}{2};\dfrac{-5-\sqrt{29}}{2}\right\}$.

Câu 15. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào rỗng?

A. $A=\left\{x\in\mathbb{N}\middle|x^2-4=0\right\}$.

B. $B=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x^2-5=0\right\}$.

C. $C=\left\{x\in\mathbb{Q}\middle|x^2+x-12=0\right\}$.

D. $D=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x^2+2x+3=0\right\}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có :

$x^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=2\end{array}\right.\Rightarrow A=\{2\}$.

$x^2-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\sqrt{5}\\x=\sqrt{5}\end{array}\right.\Rightarrow B=\left\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\right\}$.

$x^2+x-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\x=3\end{array}\right.\Rightarrow C=\{-4;3\}$.

$x^2+2x+3=0$, phương trình vô nghiệm nên $D=\varnothing$.

Câu 16. Cho $A=\left\{x\in\mathbb{N}^*,x<10,\ x\vdots 3\right\}$. Chọn khẳng định đúng.

A. A có 4 phần tử.

B. A có 3 phần tử.

C. A có 5 phần tử. **D.** A có 2 phần tử.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $A=\{x\in\mathbb{N}^*, x<10,\ x\vdots 3\}=\{3;6;9\}\Rightarrow A$ có 3 phần tử.

Câu 17. Tập hợp $A=\{x\in\mathbb{N}|(x-1)(x+2)(x^3+4x)=0\}$ có bao nhiêu phần tử?

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $(x-1)(x+2)(x^3+4x)=0\Leftrightarrow x(x-1)(x+2)(x^2+4)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x-1=0\\x+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\\x=0\end{array}\right.$.

Vì $x\in\mathbb{N}\Rightarrow x=0;\ x=1$. Vậy $A=\{0;1\}\Rightarrow$ tập A có hai phần tử.

Câu 18. Trong các tập hợp sau, tập nào là tập rỗng?

A. $T_1=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x^2+3x-4=0\}$. **B.** $T_1=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-3=0\}$

C. $T_1=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x^2=2\}$. **D.** $T_1=\{x\in\mathbb{Q}\,|\,(x^2+1)(2x-5)=0\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Vì $x^2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2}\notin\mathbb{N}\\x=-\sqrt{2}\notin\mathbb{N}\end{array}\right.$.

Câu 19. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp: $X=\{x\in\mathbb{R}, x^2+x+1=0\}$.

A. $X=\{0\}$. **B.** $X=\{2\}$. **C.** $X=\varnothing$. **D.** $X=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Trên tập số thực, phương trình $x^2+x+1=0$ vô nghiệm.

Vậy: $X=\varnothing$.

Câu 20. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp $X=\{x\in\mathbb{R}\,|\,2x^2-5x+3=0\}$.

A. $X=\{1\}$. **B.** $X=\left\{\frac{3}{2}\right\}$. **C.** $X=\{0\}$. **D.** $X=\left\{1;\frac{3}{2}\right\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Các phần tử của tập hợp $X=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,2x^2-5x+3=0\right\}$ là các nghiệm của phương trình

$2x^2-5x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

Câu 21. Trong các tập hợp sau, tập nào là tập rỗng?

A. $\left\{x\in\mathbb{R}\left|x^2+5x-6=0\right.\right\}$.

B. $\left\{x\in\mathbb{Q}\left|3x^2-5x+2=0\right.\right\}$.

C. $\left\{x\in\mathbb{Z}\left|x^2+x-1=0\right.\right\}$.

D. $\left\{x\in\mathbb{R}\left|x^2+5x-1=0\right.\right\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$x^2+x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ nên $\left\{x\in\mathbb{Z}\left|x^2+x-1=0\right.\right\}=\varnothing$.

Câu 22. Xác định số phần tử của tập hợp $X=\left\{n\in\mathbb{N}\,|\,n\vdots 4, n<2017\right\}$.

A. 505. **B.** 503. **C.** 504. **D.** 502.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tập hợp X gồm các phần tử là những số tự nhiên nhỏ hơn 2017 và chia hết cho 4.

Từ 0 đến 2015 có 2016 số tự nhiên, ta thấy cứ 4 số tự nhiên liên tiếp sẽ có duy nhất một số chia hết cho 4. Suy ra có 504 số tự nhiên chia hết cho 4 từ 0 đến 2015. Hiển nhiên $2016\vdots 4$.

Vậy có tất cả 505 số tự nhiên nhỏ hơn 2017 và chia hết cho 4.

Dạng 2: Tập hợp con và hai tập hợp bằng nhau

1. Phương pháp

$A\subset B\Leftrightarrow(\forall x\in A\Rightarrow x\in B)$

Các tính chất:

$+\ A\subset A,\forall A$ $\qquad$ $+\ \varnothing\subset A,\forall A$

$+\ A\subset B, B\subset C\Rightarrow A\subset C$

- $A=B\Leftrightarrow(A\subset B$ và $B\subset A)\Leftrightarrow\left(\forall x, x\in A\Leftrightarrow x\in B\right)$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho $A=\left\{-4;-2;-1;2;3;4\right\}$ và $B=\left\{x\in\mathrm{Z}\,\middle|\,|x|\le 4\right\}$. Tìm tập hợp X sao cho

a) $A\subset X\subset B$

b) $A\cup X=B$ với X có đúng bốn phần tử

Lời giải

Ta có $\left\{\begin{array}{l}|x|\le 4\\x\in\mathrm{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-4\le x\le 4\\x\in\mathrm{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\left\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\right\}$

Suy ra $B=\left\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\right\}$

b) Ta có $\{-4;-2;-1;2;3;4\} \subset X \subset \{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$ suy ra tập hợp X là

$\{-4;-2;-1;2;3;4\}$, $\{-4;-2;-3;-1;2;3;4\}$,$\{-4;-2;-1;0;2;3;4\}$

$\{-4;-2;-1;1;2;3;4\}$, $\{-4;-2;-3;-1;0;2;3;4\}$, $\{-4;-2;-3;-1;1;2;3;4\}$

$\{-4;-2;-1;0;1;2;3;4\}$, $\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$

c) Ta có $A \cup X = B$ với X có đúng bốn phần tử khi đó tập hợp X là

$\{-4;-3;0;1\}$,$\{-3;-2;0;1\}$, $\{-3;-1;0;1\}$, $\{-3;0;1;2\}$, $\{-3;0;1;3\}$, $\{-3;0;1;4\}$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho tập hợp $A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$. Tập A có mấy tập con?

A. 15. **B.** 12. **C.** 16. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Số tập hợp con của tập hợp có 4 phần tử là $2^4=16$ tập hợp con.

Chú ý: Cho tập A có n phần tử. Số tập hợp con là 2^n

Câu 2. Tập hợp nào sau đây có đúng một tập hợp con?

A. $\varnothing$. **B.** $\{1\}$. **C.** $\{\varnothing\}$. **D.** $\{1;\varnothing\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

- Đáp án A duy nhất một tập con là $\varnothing$.
- Đáp án B còn một tập con nữa là tập $\varnothing$.
- Đáp án C có hai tập con là $\varnothing$ và $\{\varnothing\}$.
- Đáp án D có ba tập con $\{\varnothing\}$, $\{1\}$ và $\{1;\varnothing\}$.

Câu 3. Cho tập hợp P. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

A. $P \subset P$. **B.** $\varnothing \subset P$. **C.** $P \in \{P\}$. **D.** $P \in P$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Các đáp án A, B, C đúng. Đáp án D sai.

Câu 4. Tập hợp nào sau đây có đúng hai tập hợp con?

A. $\{x;\varnothing\}$. **B.** $\{x\}$. **C.** $\{x;y;\varnothing\}$. **D.** $\{x;y\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

C1: Công thức số tập con của tập hợp có n phần tử là 2^n nên suy ra tập $\{x\}$ có 1 phần tử nên có $2^1=2$ tập con.

C2: Liệt kê số tập con ra thì $\{x\}$ có hai tập con là $\{x\}$ và $\{\varnothing\}$.

Câu 5: Cho tập hợp A. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai** ?

A. $\varnothing \subset A$. **B.** $A \neq \{A\}$. **C.** $A \in A$. **D.** $A \subset A$.

Lời giải

Chọn C

Câu 6. Số tập con của tập hợp có n $(n \geq 1, n \in \mathbb{N})$ phần tử là

A. 2^{n+2}. **B.** 2^{n-1}. **C.** 2^{n+1}. **D.** 2^n.

Lời giải

Chọn D

Số tập con của tập hợp có n bằng 2^n.

Câu 7. Cách viết nào sau đây là đúng?

A. $a \subset [a;b]$. **B.** $\{a\} \subset [a;b]$. **C.** $\{a\} \in [a;b]$. **D.** $a \in (a;b]$.

Lời giải

Chọn B

Câu 8. Cho tập hợp $A = \left\{ x^2 + 1 \middle| x \in \mathbb{N}^*, x^2 \leq 5 \right\}$. Khi đó tập A bằng tập hợp nào sau đây?

A. $A = \{1;2;3;4\}$. **B.** $A = \{0;2;5\}$.

C. $A = \{2;5\}$. **D.** $A = \{0;1;2;3;4;5\}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\begin{cases} x^2 \leq 5 \\ x \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \\ x \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1;2\} \Rightarrow (x^2+1) \in \{2;5\}$

Vậy $A = \{2;5\}$.

Câu 9. Cho tập hợp $A = \{1;2;8\}$. Tập hợp A có tất cả bao nhiêu tập hợp con?

A. 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Tập hợp có n phần tử thì có 2^n tập hợp con.

Do đó tập hợp A có tất cả $2^3 = 8$ tập hợp con.

Cách 2: Các tập con của tập A là: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{8\}$, $\{1;2\}$, $\{2;8\}$, $\{1;8\}$, $\{1;2;8\}$.

Câu 10: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

A. $A \subset A$. **B.** $\varnothing \subset A$. **C.** $A \in \varnothing$. **D.** $\varnothing \subset \varnothing$.

Lời giải

Chọn C.

Câu 11: Cho hai tập hợp: $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ là bội số của 4 và 6$\}$ và $Y = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ là bội số của 12$\}$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

A. $X \subset Y$. **B.** $Y \subset X$.

C. $X = Y$. **D.** $\exists n : n \in X$ và $n \notin Y$.

Lời giải

Chọn D

Vì bội số chung nhỏ nhất của 4 và 6 là 12.

Câu 12: Cho tập hợp $A = \{1;2;a\}$, $B = \{1;2;a;b;x;y\}$. Hỏi có bao nhiêu tập hợp X thỏa $A \subset X \subset B$?

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 2^n.

Lời giải

Chọn A

$\{1;2;a\}, \{1;2;a;b\}, \{1;2;a;x\}, \{1;2;a;y\},$

$\{1;2;a;b;x\}, \{1;2;a;b;y\}, \{1;2;a;x;y\}, \{1;2;a;b;x;y\}$.

Câu 13: Hai tập hợp nào dưới đây **không** bằng nhau ?

A. $A = \left\{x \mid x = \frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{Z}, x \geq \frac{1}{8}\right\}$ và $B = \left\{\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8}\right\}$.

B. $A = \{3;9;27;81\}$ và $B = \{3^n \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 4\}$.

C. $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leq 3\}$ và $B = \{-1;0;1;2;3\}$.

D. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$ và $B = \{0;1;2;3;4\}$.

Lời giải

Chọn A

Xét tập hợp $A = \left\{x \mid x = \frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{Z}, x \geq \frac{1}{8}\right\}$ ta có : $\frac{1}{2^k} \geq \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{2^k} \geq \frac{1}{2^3} \Leftrightarrow 2^k \leq 2^3 \Leftrightarrow k \leq 3$, suy ra:

$A = \left\{x \mid x = \frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{Z}, k \leq 3\right\} \Leftrightarrow A = \left\{\frac{1}{8};\frac{1}{4};\frac{1}{2};...\right\}$ nên: $A \neq B$.

Câu 14: Cho tập hợp $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid -3 < x \leq 4\}$. Tập hợp B có tất cả bao nhiêu tập hợp con?

A. 16. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid -3 < x \leq 4\} = \{1;2;3;4\}$.

Vậy tập B có $2^4 = 16$.

Câu 15. Cho tập hợp $A = \{x;y;z\}$ và $B = \{x;y;z;t;u\}$. Có bao nhiêu tập X thỏa mãn $A \subset X \subset B$?

A. 16. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Có 4 tập hợp X thỏa mãn $A \subset X \subset B$ là:

$X_1=\{x;y;z\}$; $X_2=\{x;y;z;t\}$; $X_3=\{x;y;z;u\}$ và $X_4=\{x;y;z;t;u\}$.

Câu 16. Có tất cả bao nhiêu tập X thỏa mãn $\{1;2\}\subset X\subset\{1;2;3;4;5\}$?

A. 8. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Các 8 tập X thỏa mãn đề bài là:

$\{1;2\},\{1;2;3\},\{1;2;4\},\{1;2;5\},\{1;2;3;4\},\{1;2;3;5\},\{1;2;4;5\},\{1;2;3;4;5\}$.

Câu 17: Cho tập hợp $A=\{x;y;z\}$ và $B=\{x;y;z;t;u\}$. Có bao nhiêu tập X thỏa mãn $A\subset X\subset B$?

A. 16. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Có 4 tập hợp X thỏa mãn $A\subset X\subset B$ là:

$X_1=\{x;y;z\}$; $X_2=\{x;y;z;t\}$; $X_3=\{x;y;z;u\}$ và $X_4=\{x;y;z;t;u\}$.

Câu 18. Cho tập X có $n+1$ phần tử ($n\in\mathbb{N}$). Số tập con của X có hai phần tử là

A. $n(n+1)$. **B.** $\dfrac{n(n-1)}{2}$. **C.** $n+1$. **D.** $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Lấy một phần tử của X, ghép với n phần tử còn lại được n tập con có hai phần tử. Vậy có $(n+1)n$ tập. Nhưng mỗi tập con đó được tính hai lần nên số tập con của X có hai phần tử là $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Dạng 3: Giao và hợp của hai tập hợp

1. Phương pháp

Cần nắm chắc các định nghĩa

$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ và } x\in B\}$; $A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ hoặc } x\in B\}$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho các tập hợp sau $A=\{x\in\mathbb{R}\mid(x-2x^2)(x^2-3x+2)=0\}$ và $B=\{n\in\mathbb{N}\mid 3<n(n+1)<31\}$.

Tìm $A\cap B$

Lời giải

Ta có: $A=\{0;1;2\}$ và $B=\{2;3;4;5\}$. Vậy: $A\cap B=\{2\}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho $A=\{a;b;c\}$ và $B=\{a;c;d;e\}$. Hãy chọn khẳng định đúng.

A. $A\cap B=\{a;c\}$. **B.** $A\cap B=\{a;b;c;d;e\}$.

C. $A\cap B=\{b\}$. **D.** $A\cap B=\{d;e\}$.

Lời giải

Chọn A

A. Đúng vì $\{a;c\}$ vừa thuộc tập A, vừa thuộc tập B.

B. HS nhầm là vừa thuộc A hoặc B.

C. HS nhầm là thuộc A và không thuộc B.

D. HS nhầm là thuộc B và không thuộc A.

Câu 2: Cho hai tập hợp $A=\{0;2;3;5\}$ và $B=\{2;7\}$. Khi đó $A\cap B$

A. $A\cap B=\{2;5\}$. **B.** $A\cap B=\{2\}$.

C. $A\cap B=\varnothing$. **D.** $A\cap B=\{0;2;3;5;7\}$.

Lời giải

Chọn B

$A\cap B=\{2\}$.

Câu 3. Cho hai tập hợp $X=\{1;2;4;7;9\}$ và $Y=\{-1;0;7;10\}$. Tập hợp $X\cup Y$ có bao nhiêu phần tử?

A. 9. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $X\cup Y=\{-1;0;1;2;4;7;9;10\}$. Do đó $X\cup Y$ có 8 phần tử.

Câu 4. Cho $A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x\le 3\}$, $B=\{0;1;2;3\}$. Tập $A\cap B$ bằng

A. $\{1;2;3\}$. **B.** $\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$.

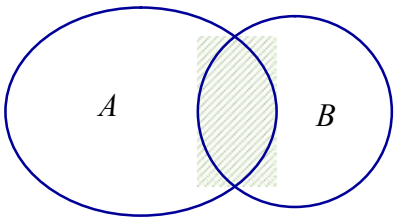
C. $\{0;1;2\}$. **D.** $\{0;1;2;3\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x\le 3\}=\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}\ \Rightarrow A\cap B=\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

Câu 5. Cho A, B là hai tập hợp bất kì. Phần gạch sọc trong hình vẽ bên dưới là tập hợp nào sau đây?



A. $A\cup B$. **B.** $B\setminus A$. **C.** $A\setminus B$. **D.** $A\cap B$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Theo biểu đồ Ven thì phần gạch sọc trong hình vẽ là tập hợp $A\cap B$.

Câu 6. Cho 2 tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,\left(2x-x^2\right)\left(2x^2-3x-2\right)=0\right\}$, $B=\left\{n\in\mathbb{N}\,|\,3<n^2<30\right\}$, chọn mệnh đề đúng?

A. $A\cap B=\{2\}$. **B.** $A\cap B=\{5;4\}$. **C.** $A\cap B=\{2;4\}$. **D.** $A\cap B=\{3\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,\left(2x-x^2\right)\left(2x^2-3x-2\right)=0\right\}$ ta có: $\left(2x-x^2\right)\left(2x^2-3x-2\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-x^2=0\\2x^2-3x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\dfrac{1}{2}\\x=2\end{array}\right.\Rightarrow A=\left\{0;2;-\frac{1}{2}\right\}.$$

Xét tập hợp $B=\left\{n\in\mathbb{N}\,|\,3<n^2<30\right\}=\{2;3;4;5\}$.

Vậy $A\cap B=\{2\}$.

Câu 7. Cho hai tập hợp $A=\{1;2;a;b\}$, $B=\{1;x;y\}$ với x,y khác $a,b,2,1$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $A\cap B=B$. **B.** $A\cap B=\varnothing$. **C.** $A\cap B=A$. **D.** $A\cap B=\{1\}$.

Lời giải

Chọn D

Hai tập hợp A, B có 1 phần tử chung là 1 nên $A\cap B=\{1\}$.

Câu 8: Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$. Xét các tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)=0\right\}$, $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,g(x)=0\right\}$, $C=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,f^2(x)+g^2(x)=0\right\}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $C=A\cup B.$ **B.** $C=A\cap B.$ **C.** $C=A\setminus B.$ **D.** $C=B\setminus A.$

Lời giải.

Chọn B.

Ta có $f^2(x)+g^2(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=0\\g(x)=0\end{cases}$ nên $C=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)=0,g(x)=0\right\}$ nên $C=A\cap B.$

Câu 9: Cho hai tập hợp $E=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)=0\right\}$, $F=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,g(x)=0\right\}$. Tập hợp $H=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)g(x)=0\right\}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $H=E\cap F.$ **B.** $H=E\cup F.$ **C.** $H=E\setminus F.$ **D.** $H=F\setminus E.$

Lời giải.

Chọn B.

Ta có $f(x)g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{array}\right.$ nên $H=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=0 \vee g(x)=0\}$ nên $H=E\cup F$.

Dạng 4: Hiệu và phần bù của hai tập hợp

1. Phương pháp

Cần nắm chắc các định nghĩa

$A\setminus B=\{x\mid x\in A \text{ và } x\notin B\}$

Nếu $A\subset E$ thì $E\setminus A=C_E^A$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho $A=\{2;4;6;9\}$ và $B=\{1;2;3;4\}$. Tìm $A\setminus B$

Lời giải

$A\setminus B=\{6;9\}$

Ví dụ 2. Cho hai tập hợp $A=\{1;2;4;6\}, B=\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$. Tìm khi $C_B A$

Lời giải

$C_B A=B\setminus A=\{3;5;7;8\}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hai tập hợp $A=\{2;\ 4;\ 6;\ 9\}$, $B=\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$. Tập hợp $A\setminus B$ bằng tập hợp nào sau đây?

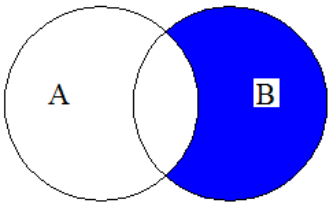
A. $\{2;\ 4\}$. **B.** $\{1;\ 3\}$. **C.** $\{6;\ 9\}$. **D.** $\{6;\ 9;1;\ 3\}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $A\setminus B=\{6;9\}$.

Câu 2: Phần tô đậm trong hình vẽ sau biểu diễn tập hợp nào?



A. $B\setminus A$. **B.** $A\setminus B$. **C.** $A\cap B$. **D.** $A\cup B$.

Lời giải

Chọn A

Câu 3. Cho hai tập hợp $A=\{2;4;6;9\}, B=\{1;2;3;4\}$. Tập $A\setminus B$ bằng tập hợp nào sau đây?

A. $\{2;4\}$. **B.** $\{1;3\}$. **C.** $\{6;9\}$. **D.** $\{6;9;1;3\}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $A \setminus B = \{x | x \in A; x \notin B\} = \{6;9\}$.

Câu 4. Cho A là tập hợp các hình thoi, B là tập hợp các hình chữ nhật và C là tập hợp các hình vuông. Khi đó

A. $B \setminus A = C$. **B.** $A \cup B = C$. **C.** $A \setminus B = C$. **D.** $A \cap B = C$.

Lời giải

Chọn D

Theo tính chất của hình thoi, hình chữ nhật và hình vuông, ta có:

$C \subset A$ và $C \subset B$ nên $B \setminus A = C$, $A \setminus B = C$ là các mệnh đề sai.

Vì hình vuông vừa là hình thoi và cũng là hình chữ nhật nên $A \cap B = C$ là mệnh đề đúng và $A \cup B = C$ là mệnh đề sai.

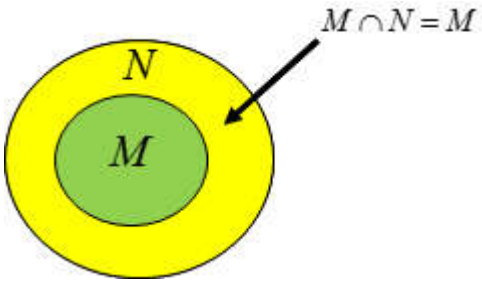
Câu 5. Cho hai tập hợp $M, N, M \subset N$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $M \cap N = N$. **B.** $M \setminus N = N$. **C.** $M \cap N = M$. **D.** $M \setminus N = M$.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết ta có $M \subset N$. Ta có sơ đồ Ven



Câu 6 . Cho hai tập hợp: $A = \{0;1;2;3;4\}$ và $B = \{2;4;6;8;10\}$. Tập $A \setminus B$ bằng

A. $\{6;8;10\}$. **B.** $\{0;1;3\}$.

C. $\{2;4\}$. **D.** $\{0;1;2;3;4;6;8;10\}$.

Lời giải

Chọn B

Tập $A \setminus B = \{0;1;3\}$.

Câu 7. Cho A: "Tập hợp các học sinh khối 10 học giỏi", B: "Tập hợp các học sinh nữ học giỏi", C: "Tập hợp các học sinh nam khối 10 học giỏi". Vậy tập hợp C là:

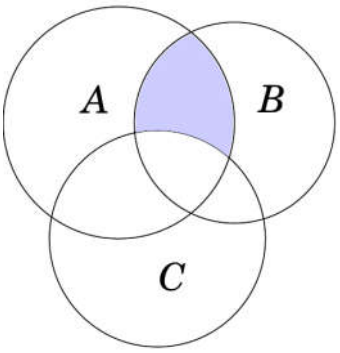
A. $A \subset B$. **B.** $B \setminus A$. **C.** $A \cap B$. **D.** $A \setminus B$.

Lời giải

Chọn D

Vì tập hợp B có chứa cả các học sinh nữ khối 10 học giỏi nên tập hợp C gồm những phần tử thuộc tập hợp A mà không thuộc tập hợp B. Do đó, $C = A \setminus B$.

Câu 8. Cho các tập hợp A, B, C được minh họa bằng biểu đồ Ven như hình vẽ. Phần tô màu xám trong hình là biểu diễn của tập hợp nào sau đây?



A. $A\cap B\cap C$. **B.** $(A\backslash C)\cup(A\backslash B)$. **C.** $(A\cup B)\backslash C$. **D.** $(A\cap B)\backslash C$.

Lời giải

Chọn D

Phần tô xám trong hình là biểu diễn tập hợp các điểm vừa thuộc A, B mà không thuộc C.

Chính là tập $(A\cap B)\backslash C$.

Câu 9: Cho $A=\{0;1;2;3;4\}$, $B=\{2;3;4;5;6\}$. Tính phép toán $(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$.

A. $\{0;1;5;6\}$. **B.** $\{1;2\}$. **C.** $\{2;3;4\}$. **D.** $\{5;6\}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 10: Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$. Xét các tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)=0\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,g(x)=0\}$, $C=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,\dfrac{f(x)}{g(x)}=0\right\}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $C=A\cup B$. **B.** $C=A\cap B$. **C.** $C=A\backslash B$. **D.** $C=B\backslash A$.

Lời giải.

Chọn C.

Ta có $\dfrac{f(x)}{g(x)}=0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=0\\g(x)\neq 0\end{cases}$ hay $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)=0,g(x)\neq 0\}$ nên $C=A\backslash B$.

Dạng 5: Bài toán sử dụng biểu đồ Ven

1. Phương pháp

- Chuyển bài toán về ngôn ngữ tập hợp
- Sử dụng biểu đồ ven để minh họa các tập hợp
- Dựa vào biểu đồ ven ta thiết lập được đẳng thức(hoặc phương trình hệ phương trình) từ đó tìm được kết quả bài toán

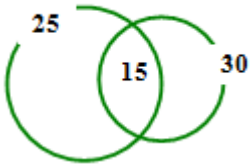
Trong dạng toán này ta kí hiệu $n(X)$ là số phần tử của tập X.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Mỗi học sinh của lớp $10A_1$ đều biết chơi đá cầu hoặc cầu lông, biết rằng có 25 em biết chơi đá cầu , 30 em biết chơi cầu lông, 15 em biết chơi cả hai . Hỏi lớp $10A_1$ có bao nhiêu em chỉ biết đá cầu? bao nhiêu em chỉ biết đánh cầu lông?Sĩ số lớp là bao nhiêu?

Lời giải

Dựa vào biểu đồ ven ta suy ra số học sinh chỉ biết đá cầu là
$25-15=10$



Số học sinh chỉ biết đánh cầu lông là $30-15=15$

Do đó ta có sĩ số học sinh của lớp $10A_1$ là $10+15+15=40$

Ví dụ 2: Trong lớp 10C có 45 học sinh trong đó có 25 em thích môn Văn, 20 em thích môn Toán, 18 em thích môn Sử, 6 em không thích môn nào, 5 em thích cả ba môn. Hỏi số em thích chỉ một môn trong ba môn trên.

Lời giải

Gọi a,b,c theo thứ tự là số học sinh chỉ thích môn Văn, Sử, Toán;

x là số học sịnh chỉ thích hai môn là văn và toán

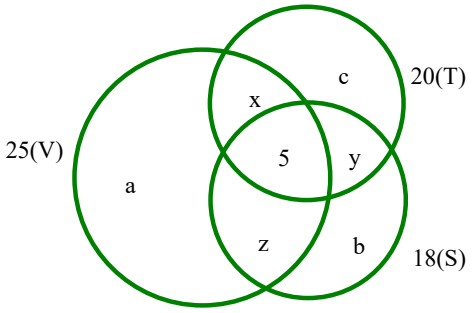
y là số học sịnh chỉ thích hai môn là Sử và toán

z là số học sịnh chỉ thích hai môn là văn và Sử

Ta có số em thích ít nhất một môn là $45-6=39$

Sựa vào biểu đồ ven ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a+x+z+5=25 & (1)\\ b+y+z+5=18 & (2)\\ c+x+y+5=20 & (3)\\ x+y+z+a+b+c+5=39 & (4)\end{cases}$$



Cộng vế với vế (1), (2), (3) ta có

$a+b+c+2\left(x+y+z\right)+15=63$ (5)

Từ (4) và (5) ta có

$a+b+c+2\left(39-5-a-b-c\right)+15=63$

$\Leftrightarrow a+b+c=20$

Vậy chỉ có 20 em thích chỉ một môn trong ba môn trên.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Lớp 10A có 51 bạn học sinh trong đó có 31 bạn học tiếng Anh và 27 bạn học tiếng Nhật. Lớp 10A có bao nhiêu bạn học cả tiếng Anh và tiếng Nhật?

A. 7. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

Số học sinh học cả tiếng Anh và tiếng Nhật của lớp 10A là $31+27-51=7$ bạn.

Câu 2. Lớp 10A có 45 học sinh, trong đó có 15 học sinh được xếp loại học lực giỏi, 20 học sinh được xếp loại hạnh kiểm tốt, 10 em vừa được xếp loại học lực giỏi , vừa có hạnh kiểm tốt. Hỏi có bao nhiêu học sinh xếp loại học lực giỏi hoặc xếp loại hạnh kiểm tốt?

A. 10. **B.** 35. **C.** 25. **D.** 45.

Lời giải

Chọn C

Gọi A là tập hợp học sinh được xếp loại học lực giỏi .

Gọi B là tập hợp học sinh được xếp loại hạnh kiểm tốt .

Khi đó $A\cap B$ là tập hợp học sinh vừa được xếp loại học lực giỏi , vừa có hạnh kiểm tốt .

$A\cup B$ là tập hợp học sinh xếp loại học lực giỏi hoặc xếp loại hạnh kiểm tốt .

Ta có $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=15+20-10=25$.

Câu 3. Trong số 50 học sinh của lớp 10A có 15 bạn được xếp loại học lực giỏi, 25 bạn được xếp loại hạnh kiểm tốt, trong đó có 10 bạn vừa được học sinh giỏi vừa được hạnh kiểm tốt. Khi đó, lớp 10A có bao nhiêu bạn được khen thưởng, biết rằng muốn được khen thưởng bạn đó phải có học lực giỏi hay hạnh kiểm tốt.

A. 20 . **B.** 30 . **C.** 35 . **D.** 25 .

Lời giải

Chọn B

Đề có sự không thống nhất trong diễn đạt nên tôi sửa đề bài toán lại thành:

Trong số 50 học sinh của lớp 10A có 15 bạn được xếp loại học lực giỏi, 25 bạn được xếp loại hạnh kiểm tốt, trong đó có 10 bạn vừa được xếp loại học lực giỏi vừa được xếp loại hạnh kiểm tốt. Khi đó, lớp 10A có bao nhiêu bạn được khen thưởng, biết rằng muốn được khen thưởng bạn đó phải có học lực giỏi hoặc hạnh kiểm tốt.

Từ giả thiết bài toán, ta có:

Số các học sinh chỉ có học lực giỏi là: $15-10=5$.

Số các học sinh chỉ được xếp loại hạnh kiểm tốt là: $25-10=15$.

Tổng số học sinh có học lực giỏi hoặc hạnh kiểm tốt là $10+5+15=30$.

Vậy có 30 học sinh được khen thưởng.

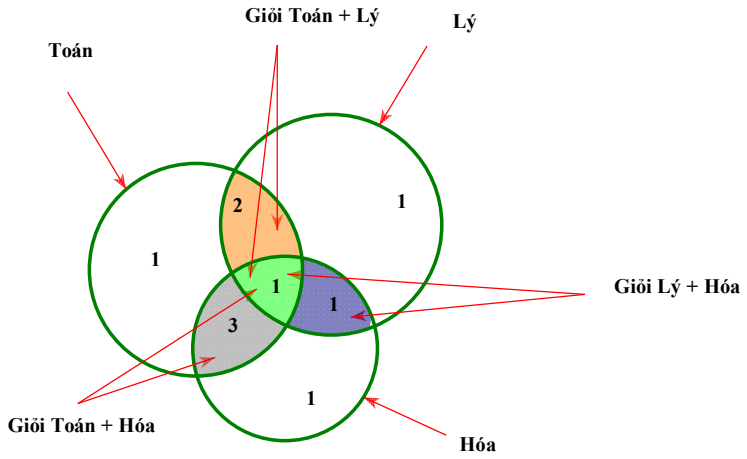
Câu 4: Lớp $10B_1$ có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Lý, 6 học sinh giỏi Hóa, 3 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hóa, 2 học sinh giỏi cả Lý và Hóa, 1 học sinh giỏi cả 3 môn Toán, Lý, Hóa. Số học sinh giỏi ít nhất một môn của lớp $10B_1$ là:

A. 9. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 28.

Lời giải.

Chọn B.

Ta dùng biểu đồ Ven để giải:



Nhìn vào biểu đồ, số học sinh giỏi ít nhất 1 trong 3 môn là: $1+2+1+3+1+1+1=10$

Dạng 6: Tìm giao và hợp các khoảng, nửa khoảng, đoạn

1. Phương pháp

• Để tìm $A\cap B$ ta làm như sau

- Sắp xếp theo thứ tự tăng dần các điểm đầu mút của các tập hợp $A,\ B$ lên trục số

- Biểu diễn các tập $A,\ B$ trên trục số (phần nào không thuộc các tập đó thì gạch bỏ)

- Phần không bị gạch bỏ chính là giao của hai tập hợp $A,\ B$

• Để tìm $A\cup B$ ta làm như sau

- Sắp xếp theo thứ tự tăng dần các điểm đầu mút của các tập hợp $A,\ B$ lên trục số

- Tô đậm các tập $A,\ B$ trên trục số

- Phần tô đậm chính là hợp của hai tập hợp $A,\ B$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho hai tập hợp $A=(-7\ ;\ 3),\ B=(-4\ ;\ 5)$. Tìm $A\cap B$, $A\cup B$

Lời giải

Ta có: $A\cap B=(-4\ ;\ 3)$, $A\cup B=(-7\ ;\ 5)$

Ví dụ 2: Cho số thực $a<0$. Tìm a để $(-\infty;9a)\cap\left(\frac{4}{a};+\infty\right)\neq\varnothing$

Hướng dẫn giải

$$(-\infty;9a)\cap\left(\frac{4}{a};+\infty\right)\neq\varnothing\Leftrightarrow 9a>\frac{4}{a}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a>\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}<a<0\end{array}\right.$$

Vì $a<0$ nên giá trị của a cần tìm là $-\frac{2}{3}<a<0$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tập $(-\infty;-3)\cap[-5;2)$ bằng

A. $[-5;-3)$. **B.** $(-\infty;-5]$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(-3;-2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $(-\infty;-3)\cap[-5;2)=[-5;-3)$.

Câu 2. Hình vẽ sau đây là biểu diễn của tập hợp nào?



A. $(-\infty;-2)\cup[5;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)\cup(5;+\infty)$.

C. $(-\infty;-2]\cup(5;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2]\cup[5;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Câu 3. Kết quả của $[-4;1)\cup(-2;3]$ là

A. $(-2;1)$ **B.** $[-4;3]$ **C.** $(-4;2]$ **D.** $(1;3]$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Cách 1: Gọi $x\in[-4;1)\cup(-2;3]$, ta có: $\left[\begin{array}{l}-4\le x<1\\-2<x\le 3\end{array}\right.\Leftrightarrow -4\le x\le 3\Rightarrow$ Chọn B.

Cách 2: Biểu diễn hai tập hợp $[-4;1)$ và $(-2;3]$ trên trục số rồi tìm hợp của hai tập hợp, Chọn B.

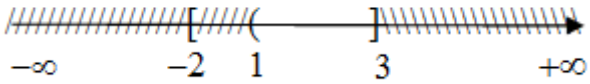
Câu 4. Cho hai tập hợp $A=[-2;3]$ và $B=(1;+\infty)$. Tìm $A\cap B$.

A. $A\cap B=[-2;+\infty)$. **B.** $A\cap B=(1;3]$. **C.** $A\cap B=[1;3]$. **D.** $A\cap B=(1;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Biểu diễn hai tập hợp A và B ta được:



Vậy $A\cap B=(1;3]$.

Câu 5. Cho các tập hợp $M=[-3;6]$ và $N=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$. Khi đó $M\cap N$ là

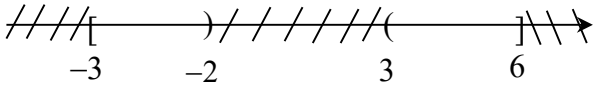
A. $(-\infty;-2)\cup[3;6]$. **B.** $(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$.

C. $[-3;-2)\cup(3;6]$. **D.** $(-3;-2)\cup(3;6)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Biểu diễn trục số:



$M=[-3;6]$ và $N=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$.

Khi đó: $M\cap N=[-3;-2)\cup(3;6]$.

Câu 6. Cho $A=(-\infty;2]$, $B=[2;+\infty)$, $C=(0;3)$. Chọn phát biểu **sai.**

A. $A\cap C=(0;2]$. **B.** $B\cup C=(0;+\infty)$.

C. $A\cup B=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **D.** $B\cap C=[2;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $A \cup B = \mathbb{R}$.

Câu 7. Cho $A=(-\infty;-2]$, $B=[3;+\infty)$, $C=(0;4)$. Khi đó tập $(A\cup B)\cap C$ là

A. $(-\infty;-2]\cup(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$.

C. $[3;4)$. **D.** $[3;4]$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $A\cup B=(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)$. Suy ra $(A\cup B)\cap C=[3;4)$.

Câu 8. Cho $A=(-\infty;5]$, $B=(0;+\infty)$. Tìm $A\cap B$.

A. $A\cap B=[0;5)$. **B.** $A\cap B=(0;5)$.

C. $A\cap B=(0;5]$. **D.** $A\cap B=(-\infty;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$A\cap B=(0;5]$.

Câu 9. Cho $A=(1;9)$, $B=[3;+\infty)$, câu nào sau đây đúng?

A. $A\cap B=[1;+\infty)$. **B.** $A\cap B=(9;+\infty)$. **C.** $A\cap B=(1;3)$. **D.** $A\cap B=[3;9)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$A\cap B=(1;9)\cap[3;+\infty)=[3;9)$.

Câu 10. Cho ba tập hợp: $X=(-4;3)$, $Y=\{x\in\mathbb{R}:2x+4>0,x<5\}$, $Z=\{x\in\mathbb{R}:(x+3)(x-4)=0\}$.

Chọn câu đúng nhất:

A. $X\subset Y$. **B.** $Z\subset X$. **C.** $Z\subset X\cup Y$. **D.** $Z\subset Y$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có:

- $Y=\{x\in\mathbb{R}:2x+4>0,x<5\}=(-2;5)$; $Z=\{-3;4\}$.
- $\begin{cases}-3\in X\\-3\notin Y\end{cases}\Rightarrow X\not\subset Y\Rightarrow$ A sai.
- $\begin{cases}4\in Z\\4\notin X\end{cases}\Rightarrow Z\not\subset X\Rightarrow$ B sai.
- $\begin{cases}-3\in Z\\-3\notin Y\end{cases}\Rightarrow Z\not\subset Y\Rightarrow$ D sai.
- $X\cup Y=(-4;5)\Rightarrow\{-3;4\}\subset(-4;5)$. Vậy $Z\subset X\cup Y$

Vậy C đúng.

Câu 11. Tập hợp nào dưới đây là giao của hai tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}:-1\le x<3\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}:|x|<2\}$?

A. $(-1;2)$. **B.** $[0;2)$. **C.** $(-2;3)$. **D.** $[-1;2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta viết lại hai tập hợp như sau: $A=\{x\in\mathbb{R}:-1\le x<3\}=[-1;3)$.

$B=\{x\in\mathbb{R}:|x|<2\}=(-2;2)$.

Suy ra: $A\cap B=[-1;2)$.

Câu 12. Cho $A=[1;+\infty)$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2+1=0\}$, $C=(0;4)$. Tập $(A\cup B)\cap C$ có bao nhiêu phần tử là số nguyên.

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A.

Ta có : $(A\cup B)\cap C=[1;4)$ có 3 phần tử là số nguyên.

Câu 13. Cho hai tập hợp $A=(-3;3)$ và $B=(0;+\infty)$. Tìm $A\cup B$.

A. $A\cup B=(-3;+\infty)$. **B.** $A\cup B=[-3;+\infty)$.

C. $A\cup B=[-3;0)$. **D.** $A\cup B=(0;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Thực hiện phép hợp trên hai tập hợp A và B ta được: $A\cup B=(-3;+\infty)$.

Câu 14. Kết quả của phép toán $(-\infty;1)\cap[-1;2)$ là

A. $(1;2)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $[-1;1)$. **D.** $(-1;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

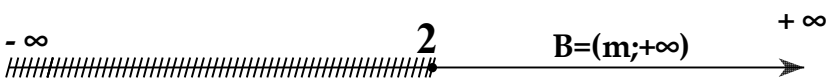
Ta có $(-\infty;1)\cap[-1;2)=[-1;1)$.

Câu 15. Cho $A=(2;+\infty)$, $B=(m;+\infty)$. Điều kiện cần và đủ của m sao cho B là tập con của A là

A. $m\le 2$. **B.** $m=2$. **C.** $m>2$. **D.** $m\ge 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có: $B\subset A$ khi và chỉ khi $\forall x\in B\Rightarrow x\in A\Rightarrow m\ge 2$.

Câu 16. Cho $A=(-\infty;m+1]$; $B=(-1;+\infty)$. Điều kiện để $(A\cup B)=\mathbb{R}$ là

A. $m>-1$. **B.** $m\ge -2$. **C.** $m\ge 0$. **D.** $m>-2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $(A\cup B)=\mathbb{R}\Leftrightarrow -1\le m+1\Leftrightarrow m\ge -2$.

Câu 17. Cho các tập hợp khác rỗng $\left[m-1;\dfrac{m+3}{2}\right]$ và $B=(-\infty;-3)\cup[3;+\infty)$. Tập hợp các giá trị thực của m để $A\cap B\neq\varnothing$ là

A. $(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$. **B.** $(-2;3)$.

C. $(-\infty;-2)\cup[3;5)$. **D.** $(-\infty;-9)\cup(4;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Để $A\cap B\neq\varnothing$ thì điều kiện là $\begin{cases} m-1<\dfrac{m+3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m-1<-3 \\ \dfrac{m+3}{2}\ge 3 \end{array}\right. \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m<5 \\ \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m\ge 3 \end{array}\right. \end{cases}$.

Vậy $m\in(-\infty-2)\cup[3;5)$.

Câu 18. Cho hai tập hợp $A=[1;3]$ và $B=[m;m+1]$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để $B\subset A$.

A. $m=1$. **B.** $1<m<2$. **C.** $1\le m\le 2$. **D.** $m=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $B\subset A\Leftrightarrow\begin{cases} m\ge 1 \\ m+1\le 3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\ge 1 \\ m\le 2 \end{cases}$. Vậy $1\le m\le 2$.

Câu 19. Cho m là một tham số thực và hai tập hợp $A=[1-2m;m+3]$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\ge 8-5m\}$. Tất cả các giá trị m để $A\cap B=\varnothing$ là

A. $m\ge\dfrac{5}{6}$. **B.** $m<-\dfrac{2}{3}$. **C.** $m\le\dfrac{5}{6}$. **D.** $-\dfrac{2}{3}\le m<\dfrac{5}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $A=[1-2m;m+3]$, $B=[8-5m;+\infty)$.

$$A\cap B=\varnothing\Leftrightarrow\begin{cases} m+3<8-5m \\ 1-2m\le m+3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 6m<5 \\ 3m\ge -2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m<\dfrac{5}{6} \\ m\ge -\dfrac{2}{3} \end{cases}\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\le m<\frac{5}{6}.$$

Câu 20. Cho hai tập $A=\left[0;5\right]$; $B=\left(2a;3a+1\right]$, với $a>-1$. Tìm tất cả các giá trị của a để $A\cap B\neq\varnothing$.

A. $\left[\begin{array}{l} a<\dfrac{5}{2} \\ a\geq -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} a\geq\dfrac{5}{2} \\ a<-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$. **C.** $-\dfrac{1}{3}\leq a<\dfrac{5}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{3}\leq a\leq\dfrac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$A\cap B\neq\varnothing\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} 2a<3a+1 \\ \left[\begin{array}{l} 3a+1\geq 0 \\ 2a<5 \end{array}\right. \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} a>-1 \\ \left[\begin{array}{l} a\geq -\dfrac{1}{3} \\ a<\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} a\geq -\dfrac{1}{3} \\ -1<a<\dfrac{5}{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\leq a<\frac{5}{2}.$$

Dạng 7: Xác định hiệu và phần bù các khoảng, đoạn, nửa khoảng

1. Phương pháp

- Để tìm $A\setminus B$ ta làm như sau

- Sắp xếp theo thứ tự tăng dần các điểm đầu mút của các tập hợp $A,\ B$ lên trục số

- Biểu diễn tập A trên trục số(gạch bỏ phần không thuộc tập A), gạch bỏ phần thuộc tập B trên trục số

- Phần không bị gạch bỏ chính là $A\setminus B$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho các tập hợp:

$$A=\left\{x\in R\,|\,x<3\right\}\qquad B=\left\{x\in R\,|\,1<x\leq 5\right\}\qquad C=\left\{x\in R\,|\,-2\leq x\leq 4\right\}$$

a) Hãy viết lại các tập hợp $A,\ B,\ C$ dưới kí hiệu khoảng, nửa khoảng, đoạn.

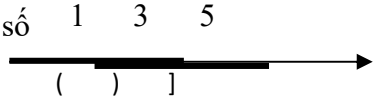
b) Tìm $A\cup B,\ \ A\cap B,\ A\setminus B$.

c) Tìm $\left(B\cup C\right)\setminus\left(A\cap C\right)$

Lời giải

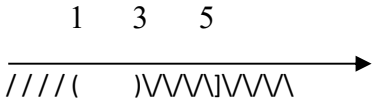
a) Ta có: $A=\left(-\infty;3\right)\qquad B=\left(1;5\right]\qquad C=\left[-2;4\right]$.

b) • Biểu diễn trên trục số

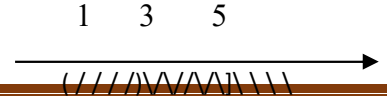


Suy ra $A\cup B=\left(-\infty;5\right]$

• Biểu diễn trên trục số



Suy ra $A\cap B=\left(1;3\right)$



- Biểu diễn trên trục số

Suy ra $A \setminus B = (-\infty;1]$

c) Bằng cách biểu diễn trên trục số ta có

$A \cap C = [-2;3)$ và $B \cup C = [-2;5]$

Suy ra ta có $(B \cup C) \setminus (A \cap C) = [3;5]$

Nhận xét: Việc biểu diễn trên trục số để tìm các phép toán tập hợp ta làm trên giấy nháp và trình bày kết quả vào.

Ví dụ 2: Xác định các tập số sau và biểu diễn trên trục số:

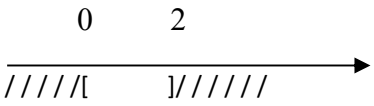
a) $(-4;2] \cap [0;4)$ b) $(0;3) \cup [1;4]$

c) $[-4;3] \setminus [-2;1]$ d) $\mathbb{R} \setminus [1;3]$

Lời giải

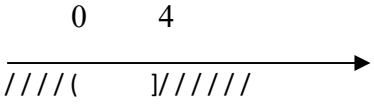
a) Ta có $(-4;2] \cap [0;4) = [0;2]$

Biểu diễn tập đó trên trục số là



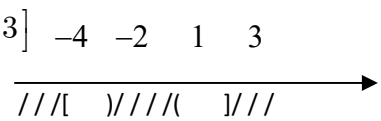
b) Ta có $(0;3) \cup [1;4] = (0;4]$

Biểu diễn tập đó trên trục số là



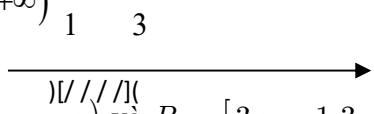
c) Ta có $[-4;3] \setminus [-2;1] = [-4;-2) \cup (1;3]$

Biểu diễn tập đó trên trục số là



d) Ta có $\mathbb{R} \setminus [1;3] = (-\infty;1) \cup (3;+\infty)$

Biểu diễn tập đó trên trục số là



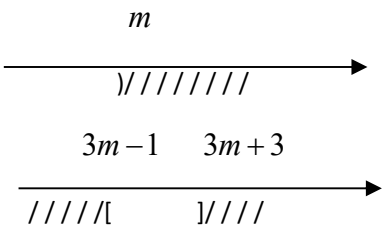
Ví dụ 3: Cho các tập hợp $A = (-\infty;m)$ và $B = [3m-1;3m+3]$. Tìm m để

a) $A \cap B = \varnothing$ b) $B \subset A$

c) $A \subset C_{\mathbb{R}}B$ d) $C_{\mathbb{R}}A \cap B \neq \varnothing$

Lời giải

Ta có biểu diễn trên trục số các tập A và B trên hình vẽ



a) Ta có $A \cap B = \varnothing$

$\Leftrightarrow m \le 3m-1 \Leftrightarrow m \ge \frac{1}{2}$

Vậy $m \ge \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

b) Ta có $B \subset A \Leftrightarrow 3m+3 < m \Leftrightarrow m < -\frac{3}{2}$

Vậy $m < -\frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

c) Ta có $C_{\mathbb{R}}B=\left(-\infty;3m-1\right)\cup\left(3m+3;+\infty\right)$

Suy ra $A\subset C_{\mathbb{R}}B\Leftrightarrow m\le 3m-1\Leftrightarrow m\ge\frac{1}{2}$

Vậy $m\ge\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

d) Ta có $C_{\mathbb{R}}A=\left[m;+\infty\right)$ suy ra $C_{\mathbb{R}}A\cap B\ne\varnothing\Leftrightarrow m\le 3m+3\Leftrightarrow m\ge-\frac{3}{2}$

Vậy $m\ge-\frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho tập hợp $A=\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right)$. Tập hợp $C_{\mathbb{R}}A$ bằng

A. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup\left(\sqrt{5};+\infty\right)$.
B. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{5};+\infty\right)$.
C. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.
D. $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $C_{\mathbb{R}}A=\mathbb{R}\setminus A=\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

Câu 2. Phần bù của $\left[-2;1\right)$ trong $\mathbb{R}$ là

A. $\left(-\infty;1\right]$.
B. $\left(-\infty;-2\right)\cup\left[1;+\infty\right)$.
C. $\left(-\infty;-2\right)$.
D. $\left(2;+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$C_{\mathbb{R}}B=\mathbb{R}\setminus B=\left(-\infty;-2\right)\cup\left[1;+\infty\right)$.

Câu 3. Tập hợp nào sau đây chỉ gồm các số vô tỷ?

A. $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}^*$.
B. $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
C. $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$.
D. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tập hợp chỉ gồm các số vô tỷ là $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Câu 4. Cho các tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<3\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,1<x\le 5\}$, $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-2\le x\le 4\}$. Khi đó $(B\cup C)\setminus(A\cap C)$ bằng

A. $\left[-2;3\right)$.
B. $\left[3;5\right]$.
C. $\left(-\infty;1\right]$.
D. $\left[-2;5\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$A=(-\infty;3)$, $B=(1;5]$, $C=[-2;4]$.

$(B\cup C)\setminus(A\cap C)=\{(1;5]\cup[-2;4]\}\setminus\{(-\infty;3)\cap[-2;4]\}=[-2;5]\setminus[-2;3)=[3;5]$.

Câu 5. Cho $A=(-\infty;1]$; $B=[1;+\infty)$; $C=(0;1]$. Câu nào sau đây **sai**?

A. $(A\cup B)\setminus C=(-\infty;0]\cup(1;+\infty)$.

B. $A\cap B\cap C=\{-1\}$.

C. $A\cup B\cup C=(-\infty;+\infty)$.

D. $(A\cap B)\setminus C=\varnothing$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $A\cap B=\{1\}\Rightarrow A\cap B\cap C=\{1\}$.

Câu 6. Cho $A=[-1;3]$; $B=(2;5)$. Tìm mệnh đề **sai**.

A. $B\setminus A=[3;5)$.

B. $A\cap B=(2;3]$.

C. $A\setminus B=[-1;2]$.

D. $A\cup B=[-1;5]$.

Lời giải

Chọn D.

Mệnh đề đúng: $A\cup B=[-1;5)$.

Câu 7. Cho các tập $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq -1\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x<3\}$. Tập $\mathbb{R}\setminus(A\cap B)$ là :

A. $(-\infty;-1)\cup[3;+\infty)$.

B. $(-1;3]$.

C. $[-1;3)$.

D. $(-\infty;-1]\cup(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có : $A=[-1;+\infty)$; $B=(-\infty;3)$. Khi đó $A\cap B=[-1;3)\Rightarrow\mathbb{R}\setminus(A\cap B)=(-\infty;-1)\cup[3;+\infty)$.

Câu 8. Cho hai tập hợp $A=(\sqrt{2};+\infty)$ và $B=\left(-\infty;\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right]$. Khi đó $(A\cap B)\cup(B\setminus A)$ là

A. $\left[\dfrac{\sqrt{5}}{2};\sqrt{2}\right]$.

B. $(\sqrt{2};+\infty)$.

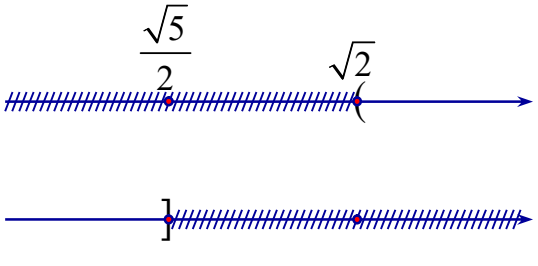
C. $\left(-\infty;\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right]$.

D. $\left(-\infty;\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $A\cap B=\varnothing$, $B\setminus A=\left(-\infty;\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right]$.



Do đó $(A\cap B)\cup(B\setminus A)=\left(-\infty;\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right]$

Câu 9. Cho $A=(-1;3)$ và $B=[0;5]$. Khi đó $(A\cap B)\cup(A\setminus B)$ là

A. $(-1;3)$. **B.** $[-1;3]$. **C.** $(-1;3)\setminus\{0\}$. **D.** $(-1;3]$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

C1: Ta có: $A\cap B=[0;3)$ và $A\setminus B=(-1;0)$. Do đó:

$(A\cap B)\cup(A\setminus B)=[0;3)\cup(-1;0)=(-1;3)$.

C2: Ta có: $(A\cap B)\cup(A\setminus B)=A$ nên $(A\cap B)\cup(A\setminus B)=(-1;3)$.

Câu 10. Xác định phần bù của tập hợp $(-\infty;-2)$ trong $(-\infty;4)$.

A. $(-2;4)$. **B.** $(-2;4]$. **C.** $[-2;4)$. **D.** $[-2;4]$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $C_{(-\infty;4)}(-\infty;-2)=(-\infty;4)\setminus(-\infty;-2)=[-2;4)$.

Câu 11. Xác định phần bù của tập hợp $(-\infty;-10)\cup(10;+\infty)\cup\{0\}$ trong $\mathbb{R}$.

A. $[-10;\ 10)$. **B.** $[-10;\ 10]\setminus\{0\}$.

C. $[-10;\ 0)\cup[0;\ 10)$. **D.** $[-10;\ 0)\cup(0;\ 10)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$\mathbb{R}\setminus(-\infty;-10)\cup(10;+\infty)\cup\{0\}=[-10;\ 10]\setminus\{0\}$.

Câu 12. Cho hai tập hợp X, Y thỏa mãn $X\setminus Y=\{7;15\}$ và $X\cap Y=(-1;2)$. Xác định số phần tử là số nguyên của X.

A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Do $X\setminus Y=\{7;15\}\Rightarrow\{7;15\}\subset X$.

Mà $X\cap Y=(-1;2)\Rightarrow(-1;2)\subset X$.

Suy ra $X=(-1;2)\cup\{7;15\}$.

Vậy số phần tử nguyên của tập X là 4.

Câu 13. Cho $A=(-\infty;2]$ và $B=(0;+\infty)$. Tìm $A\setminus B$.

A. $A\setminus B=(-\infty;0]$. **B.** $A\setminus B=(2;+\infty)$.

C. $A\setminus B=(0;2]$. **D.** $A\setminus B=(-\infty;0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Biểu diễn hai tập hợp A và B lên trục số ta có kết quả $A\setminus B=(-\infty;0]$.

Câu 14. Cho hai tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-3<x\le 2\}$, $B=(-1;\,3)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $A\cap B=(-1;\,2]$.

B. $A\setminus B=(-3;-1)$.

C. $C_{\mathbb{R}}B=(-\infty;-1)\cup[3;+\infty)$.

D. $A\cup B=\{-2;-1;0;1;2\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-3<x\le 2\}=(-3;\,2]\Rightarrow(-3;\,2]\cap(-1;\,3)=(-1;\,2]$.

Câu 15. Cho $A=[a;a+1)$. Lựa chọn phương án đúng.

A. $C_{\mathbb{R}}A=(-\infty;a]\cup[a+1;+\infty)$.

B. $C_{\mathbb{R}}A=(-\infty;a)\cup[a+1;+\infty)$.

C. $C_{\mathbb{R}}A=(-\infty;a]\cup(a+1;+\infty)$.

D. $C_{\mathbb{R}}A=(-\infty;a)\cup(a+1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $C_{\mathbb{R}}A=\mathbb{R}\setminus A=(-\infty;a)\cup[a+1;+\infty)$.

Câu 16. Cho các tập hợp khác rỗng $A=(-\infty;m)$ và $B=[2m-2;2m+2]$. Tìm $m\in\mathbb{R}$ để $C_{\mathbb{R}}A\cap B\ne\varnothing$.

A. $m\ge 2$.

B. $m<-2$.

C. $m\ge -2$.

D. $m<2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $C_{\mathbb{R}}A=[m;+\infty)$.

Để $C_{\mathbb{R}}A\cap B\ne\varnothing\Leftrightarrow 2m+2\ge m\Leftrightarrow m\ge -2$.

Câu 17. Cho $A=\{x\in\mathbb{R}\,\|mx-3|=mx-3\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-4=0\}$. Tìm m để $B\setminus A=B$.

A. $-\dfrac{3}{2}\le m\le\dfrac{3}{2}$.

B. $m<\dfrac{3}{2}$.

C. $-\dfrac{3}{2}<m<\dfrac{3}{2}$.

D. $m\ge-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

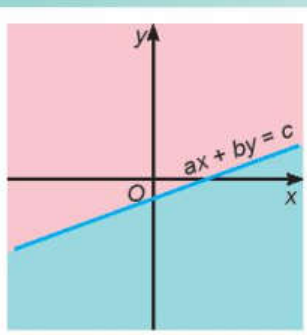
Chọn C

Ta có: $x\in A\Leftrightarrow mx-3\ge 0$.

$x\in B\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$.

Ta có: $B\setminus A=B\Leftrightarrow B\cap A=\varnothing\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\\begin{cases}m>0\\\dfrac{3}{m}>2\end{cases}\\\begin{cases}m<0\\\dfrac{3}{m}<-2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\0<m<\dfrac{3}{2}\\-\dfrac{3}{2}<m<0\end{array}\right.\Leftrightarrow-\dfrac{3}{2}<m<\dfrac{3}{2}$.

CHƯƠNG II
BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN



Các bất phương trình bậc nhất hai ẩn và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn xuất hiện trong nhiều bài toán kinh tế, như là những ràng buộc trong các bài toán sản xuất, bài toán phân phối hàng hoá,... Chương này cung cấp cách biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng toạ độ.

Bài 3 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

THUẬT NGỮ

- Bất phương trình bậc nhất hai ẩn
- Miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- Biết biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng toạ độ.
- Vận dụng kiến thức về bất phương trình bậc nhất hai ẩn vào giải quyết bài toán thực tiễn.



Nhân ngày Quốc tế Thiếu nhi 1-6, một rạp chiếu phim phục vụ các khán giả một bộ phim hoạt hình. Vé được bán ra có hai loại:

Loại 1 (dành cho trẻ từ 6-13 tuổi): 50 000 đồng/vé;

Loại 2 (dành cho người trên 13 tuổi): 100 000 đồng/vé.

Người ta tính toán rằng, để không phải bù lỗ thì số tiền vé thu được ở rạp chiếu phim này phải đạt tối thiểu 20 triệu đồng.

Hỏi số lượng vé bán được trong những trường hợp nào thì rạp chiếu phim phải bù lỗ?

1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

HĐ1. Trong *tình huống mở đầu*, gọi x là số vé loại 1 bán được và y là số vé loại 2 bán được. Viết biểu thức tính số tiền bán vé thu được (đơn vị nghìn đồng) ở rạp chiếu phim đó theo x và y.

a) Các số nguyên không âm x và y phải thoả mãn điều kiện gì để số tiền bán vé thu được đạt tối thiểu 20 triệu đồng?

b) Nếu số tiền bán vé thu được nhỏ hơn 20 triệu đồng thì x và y thoả mãn điều kiện gì?

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Mỗi hệ thức liên hệ giữa x và y thu được trong HĐ1a và HĐ1b được gọi là một *bất phương trình bậc nhất hai ẩn*.

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là:

$$ax + by \le c \ (ax + by \ge c,\ ax + by < c,\ ax + by > c)$$

trong đó a, b, c là những số thực đã cho, a và b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn số.

Ví dụ 1. Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

$2x + 3y < 1$; $2x^2 + 3y < 1$.

Giải

Bất phương trình $2x + 3y < 1$ là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bất phương trình $2x^2 + 3y < 1$ không phải là bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì chứa x^2.

HĐ2. Cặp số $(x; y) = (100; 100)$ thoả mãn bất phương trình bậc nhất hai ẩn nào trong hai bất phương trình thu được ở HĐ1? Từ đó cho biết rạp chiếu phim có phải bù lỗ hay không nếu bán được 100 vé loại 1 và 100 vé loại 2.

Trả lời câu hỏi tương tự với cặp số $(x; y) = (150; 150)$.

Cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by \le c$ nếu bất đẳng thức $ax_0 + by_0 \le c$ đúng.

Ví dụ 2. Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x + 2y > 5$. Cặp số nào sau đây là một nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên?

a) $(x; y) = (3; 4)$; b) $(x; y) = (0; -1)$.

Giải

a) Vì $3 + 2 \cdot 4 = 11 > 5$ nên cặp số $(3; 4)$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

b) Vì $0 + 2 \cdot (-1) = -2 < 5$ nên cặp số $(0; -1)$ không phải là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

Luyện tập 1. Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x + 2y \ge 0$.

a) Hãy chỉ ra ít nhất hai nghiệm của bất phương trình trên.

b) Với $y = 0$, có bao nhiêu giá trị của x thoả mãn bất phương trình đã cho?

Nhận xét. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn luôn có vô số nghiệm.

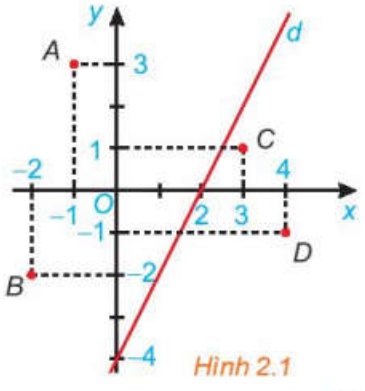
2. BIỂU DIỄN MIỀN NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN TRÊN MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

HĐ3. Cho đường thẳng d: $2x - y = 4$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy (H.2.1). Đường thẳng này chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng.

a) Các điểm $O(0; 0)$, $A(-1; 3)$ và $B(-2; -2)$ có thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d không?

Tính giá trị của biểu thức $2x - y$ tại các điểm đó và so sánh với 4.

b) Trả lời câu hỏi tương tự như câu a với các điểm $C(3; 1)$, $D(4; -1)$.



Hình 2.1

- Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tập hợp các điểm có toạ độ là nghiệm của bất phương trình $ax + by \le c$ được gọi là miền nghiệm của bất phương trình đó.
- Người ta chứng minh được rằng đường thẳng d có phương trình $ax + by = c$ chia mặt phẳng toạ độ Oxy thành hai nửa mặt phẳng bờ d:
  - Một nửa mặt phẳng (không kể bờ d) gồm các điểm có toạ độ $(x; y)$ thoả mãn $ax + by > c$;
  - Nửa mặt phẳng còn lại (không kể bờ d) gồm các điểm có toạ độ $(x; y)$ thoả mãn $ax + by < c$.

  Bờ d gồm các điểm có toạ độ $(x; y)$ thoả mãn $ax + by = c$.

Ví dụ 3. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $x + y \ge 100$ trên mặt phẳng toạ độ.

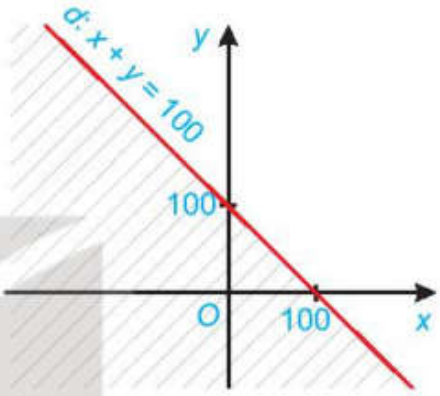
Giải (H.2.2)

Ta biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x + y \ge 100$ như sau:

Bước 1. Vẽ đường thẳng d: $x + y = 100$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

Bước 2. Lấy một điểm bất kì không thuộc d trên mặt phẳng rồi thay vào biểu thức $x + y$. Chẳng hạn, lấy $O(0;0)$, ta có: $0 + 0 < 100$.

Do đó miền nghiệm của bất phương trình đã cho là nửa mặt phẳng bờ d không chứa gốc toạ độ (miền không bị gạch).



Hình 2.2

Cách biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by \le c$.

- Vẽ đường thẳng d: $ax + by = c$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy.
- Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0)$ không thuộc d.
- Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh với c.
- Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng bờ d chứa M_0 là miền nghiệm của bất phương trình. Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng bờ d không chứa M_0 là miền nghiệm của bất phương trình.

- Nếu $c \ne 0$, ta thường chọn M_0 chính là gốc toạ độ.
- Nếu $c = 0$, ta thường chọn M_0 có toạ độ $(1; 0)$ hoặc $(0; 1)$.



Ví dụ 4. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $5x - 7y \le 0$ trên mặt phẳng toạ độ.

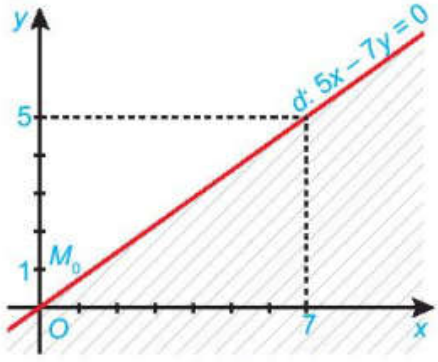
Giải (H.2.3)

Bước 1. Vẽ đường thẳng d: $5x - 7y = 0$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

Bước 2. Lấy điểm $M_0(0; 1)$ không thuộc d và thay $x = 0$, $y = 1$ vào biểu thức $5x - 7y$ ta được: $5 \cdot 0 - 7 \cdot 1 = -7 < 0$.

Do đó miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ d chứa điểm M_0 (miền không bị gạch).

Chú ý. Miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \le c$ bỏ đi đường thẳng $ax + by = c$ và biểu diễn đường thẳng bằng nét đứt.



Hình 2.3

Luyện tập 2. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $2x + y < 200$ trên mặt phẳng toạ độ.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ví dụ 5. Giải bài toán ở *tình huống mở đầu*.

Giải

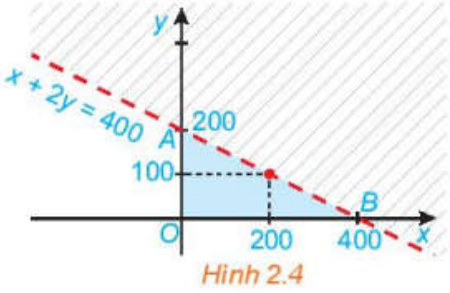
Gọi x là số lượng vé loại 1 bán được ($x \in \mathbb{N}$) và y là số lượng vé loại 2 bán được ($y \in \mathbb{N}$) thì số tiền bán vé thu được là $50x + 100y$ (nghìn đồng). Người ta sẽ phải bù lỗ trong trường hợp số tiền bán vé nhỏ hơn 20 triệu đồng, tức là: $50x + 100y < 20\,000$ hay $x + 2y < 400$.

Như vậy, việc giải quyết bài toán mở đầu dẫn đến việc đi tìm miền nghiệm của bất phương trình $x + 2y < 400$.

Miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn này được xác định như sau:

- Vẽ đường thẳng d: $x + 2y = 400$.
- Ta lấy gốc toạ độ $O(0; 0)$ và tính $0 + 2 \cdot 0 = 0 < 400$.

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ d chứa gốc toạ độ không kể đường thẳng d (H.2.4).



Hình 2.4

Vậy, nếu bán được số vé loại 1 là x và số vé loại 2 là y mà điểm $(x; y)$ nằm trong miền tam giác OAB không kể cạnh AB thì rạp chiếu phim sẽ phải bù lỗ.

Miền tam giác gồm các điểm bên trong và các điểm trên ba cạnh của tam giác.



Nếu điểm $(x; y)$ nằm trên đoạn thẳng AB thì rạp chiếu phim hoà vốn.

Nhận xét

- Nếu bán được 150 vé loại 1 và 150 vé loại 2 thì rạp chiếu phim có lãi.
- Nếu bán được 200 vé loại 1 và 100 vé loại 2 thì rạp chiếu phim hoà vốn.
- Nếu bán được 100 vé loại 1 và 100 vé loại 2 thì rạp chiếu phim phải bù lỗ.

Vận dụng. Một công ty viễn thông tính phí 1 nghìn đồng mỗi phút gọi nội mạng và 2 nghìn đồng mỗi phút gọi ngoại mạng. Em có thể sử dụng bao nhiêu phút gọi nội mạng và bao nhiêu phút gọi ngoại mạng trong một tháng nếu em muốn số tiền phải trả ít hơn 200 nghìn đồng?

Dạng 1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

1. Phương pháp

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là mệnh đề chứa hai biến có một trong các dạng $\begin{bmatrix} ax+by>c \\ ax+by<c \\ ax+by\ge c \\ ax+by\le c \end{bmatrix}$, trong đó a, b, c là các số thực với $a^2+b^2 \neq 0$.

Nghiệm của bất phương trình

Cặp số $(x_0; y_0)$ để $ax_0 + by_0 > c$ là bất đẳng thức đúng được gọi là một nghiệm của bất phương trình $ax + by > c$.

Biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Cũng như bất phương trình bậc nhất một ẩn, các bất phương trình bậc nhất hai ẩn thường có vô số nghiệm và để mô tả tập nghiệm của chúng, ta sử dụng phương pháp biểu diễn hình học.

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tập hợp các điểm có toạ độ là nghiệm của bất phương trình được gọi là miền nghiệm của nó.

Từ đó ta có quy tắc thực hành biểu diễn hình học tập nghiệm (hay biểu diễn miền nghiệm) của bất phương trình $ax+by\le c$ như sau (tương tự cho bất phương trình $ax+by\ge c$).

Bước 1. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy vẽ đường thẳng $\Delta: ax+by=c$.

Bước 2. Lấy một điểm $M_0(x_0;y_0)$ không thuộc Δ (ta thường lấy gốc toạ độ O).

Bước 3. Tính ax_0+by_0 và so sánh ax_0+by_0 với c.

Bước 4. Kết luận.

+) Nếu $ax_0+by_0<c$ thì nửa mặt phẳng bờ Δ chứa M_0 là miền nghiệm của $ax_0+by_0\le c$.

+) Nếu $ax_0+by_0>c$ thì nửa mặt phẳng bờ Δ không chứa M_0 là miền nghiệm của $ax_0+by_0\le c$.

Chú ý: Miền nghiệm của bất phương trình $ax_0+by_0\le c$ bỏ đi đường thẳng $ax_0+by_0=c$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax_0+by_0<c$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

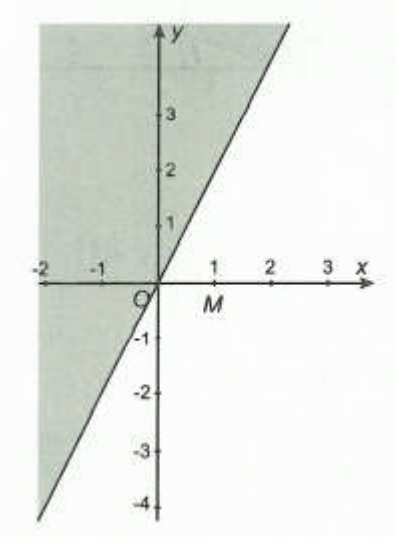
Ví dụ 1: Xác định miền nghiệm của các bất phương trình sau:

a) $2x-y\ge 0$.

b) $\dfrac{x-2y}{2}>\dfrac{2x+y+1}{3}$.

Hướng dẫn giải

a) Trong mặt phẳng toạ độ, vẽ đường thẳng $d: 2x-y=0$. Ta có d chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Chọn một điểm bất kì không thuộc đường thẳng đó, chẳng hạn điểm $M(1;0)$. Ta thấy $(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ chứa d và chứa điểm $M(1;0)$ (miền không được tô màu trên hình vẽ).



b) Ta có

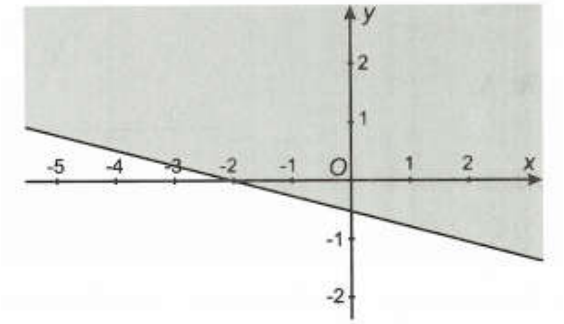
$$\frac{x-2y}{2}>\frac{2x-y+1}{3}$$

$\Leftrightarrow 3(x-2y)-2(2x-y+1)>0$

$\Leftrightarrow -x-4y-2>0$

$\Leftrightarrow x+4y+2<0$

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, vẽ đường thẳng $\Delta: x+4y+2=0$. Xét điểm $O(0;0)$, ta thấy $(0;0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình đã cho, do đó miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ Δ (không kể đường thẳng Δ) và không chứa điểm $O(0;0)$ (miền không được tô đậm như hình vẽ).



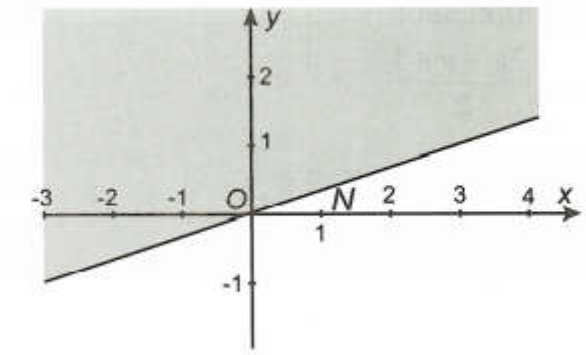
Ví dụ 2: Xác định miền nghiệm của các bất phương trình sau:

a) $x-3y\geq 0$.

b) $\dfrac{x-y}{-2}<x+y+1$.

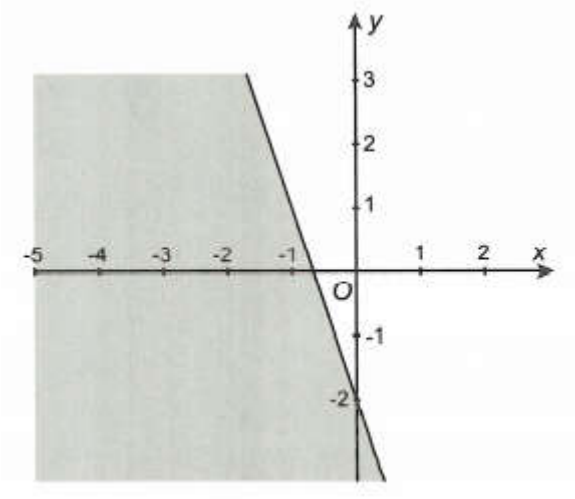
Hướng dẫn giải

a) Trong mặt phẳng toạ độ, vẽ đường thẳng $d: x-3y=0$. Ta có d chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Chọn một điểm bất kì không thuộc đường thẳng đó, chẳng hạn điểm $N(1;0)$. Ta thấy $(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ chứa d và chứa điểm $N(1;0)$ (miền không được tô đậm trên hình vẽ).



b) Ta có $\dfrac{x-y}{-2}<x+y+1\Leftrightarrow x-y>-2(x+y+1)\Leftrightarrow 3x+y+2>0$.

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, vẽ đường thẳng $\Delta: 3x+y+2=0$. Xét điểm $O(0;0)$, ta thấy $(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho, do đó miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ Δ (không kể đường thẳng Δ) và chứa điểm $O(0;0)$ (miền không được tô đậm trên hình vẽ).



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

A. $2x^2+3y>0$ **B.** $x^2+y^2<2$ **C.** $x+y^2\ge 0$ **D.** $x+y\ge 0$

Lời giải

Chọn D

Theo định nghĩa thì $x+y\ge 0$ là bất phương trình bậc nhất hai ẩn. Các bất phương trình còn lại là bất phương trình bậc hai.

Câu 2. Cho bất phương trình $2x+3y-6\le 0$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Bất phương trình (1) chỉ có một nghiệm duy nhất.

B. Bất phương trình (1) vô nghiệm.

C. Bất phương trình (1) luôn có vô số nghiệm.

D. Bất phương trình (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Trên mặt phẳng tọa độ, đường thẳng $(d):2x+3y-6=0$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng.

Chọn điểm $O(0;0)$ không thuộc đường thẳng đó. Ta thấy $(x;y)=(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ (d) chứa điểm $O(0;0)$ kể cả (d).

Vậy bất phương trình (1) luôn có vô số nghiệm.

Câu 3. Miền nghiệm của bất phương trình: $3x+2(y+3)\ge 4(x+1)-y+3$ là nửa mặt phẳng chứa điểm:

A. $(3;0)$ **B.** $(3;1)$ **C.** $(2;1)$ **D.** $(0;0)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $3x+2(y+3)\ge 4(x+1)-y+3\Leftrightarrow -x+3y-1\ge 0$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Vì $-2+3.1-1>0$ là mệnh đề đúng nên miền nghiệm của bất phương trình trên chứa điểm có tọa độ $(2;1)$.

Câu 4. Miền nghiệm của bất phương trình: $3(x-1)+4(y-2)<5x-3$ là nửa mặt phẳng chứa điểm:

A. $(0;0)$ **B.** $(-4;2)$ **C.** $(-2;2)$ **D.** $(-5;3)$

Lời giải

Chọn A

Ta có $3(x-1)+4(y-2)<5x-3\Leftrightarrow -2x+4y-8<0$.

Vì $-2.0+4.0-8<0$ là mệnh đề đúng nên miền nghiệm của bất phương trình trên chứa điểm có tọa độ $(0;0)$.

Câu 5. Miền nghiệm của bất phương trình $-x+2+2(y-2)<2(1-x)$ là nửa mặt phẳng **không** chứa điểm nào trong các điểm sau?

A. $(0;0)$ **B.** $(1;1)$ **C.** $(4;2)$ **D.** $(1;-1)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $-x+2+2(y-2)<2(1-x)\Leftrightarrow x+2y<4$.

Vì $-4+2.2<4$ là mệnh đề sai nên $(-4;2)$ không thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

Câu 6. Trong các cặp số sau đây, cặp nào không thuộc nghiệm của bất phương trình: $x-4y+5>0$

A. $(-5;0)$ **B.** $(-2;1)$ **C.** $(0;0)$ **D.** $(1;-3)$

Lời giải

Chọn A

Vì $-5-4.0+5>0$ là mệnh đề sai nên $(-5;0)$ không thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

Câu 7. Điểm $A(-1;3)$ là điểm thuộc miền nghiệm của bất phương trình:

A. $-3x+2y-4>0$ **B.** $x+3y<0$ **C.** $3x-y>0$ **D.** $2x-y+4>0$

Lời giải

Chọn A

Vì $-3.(-1)+2.3-4>0$ là mệnh đề đúng nên $A(-1;3)$ là điểm thuộc miền nghiệm của bất phương trình $-3x+2y-4>0$.

Câu 8. Cặp số $(2;3)$ là nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

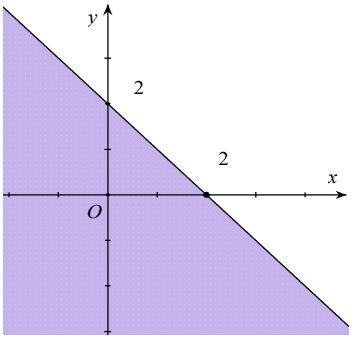
A. $2x-3y-1>0$. **B.** $x-y<0$. **C.** $4x>3y$. **D.** $x-3y+7<0$.

Lời giải

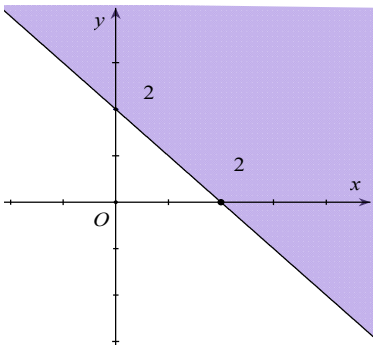
Chọn B

Vì $2-3<0$ là mệnh đề đúng nên cặp số $(2;3)$ là nghiệm của bất phương trình $x-y<0$.

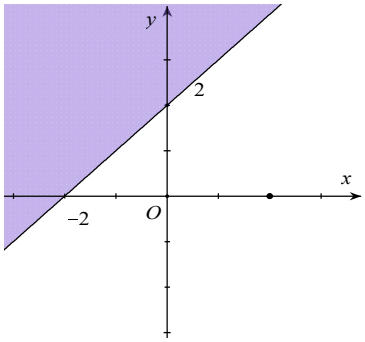
Câu 9. Miền nghiệm của bất phương trình $x+y\le 2$ là phần **tô đậm** trong hình vẽ của hình vẽ nào, trong các hình vẽ sau?



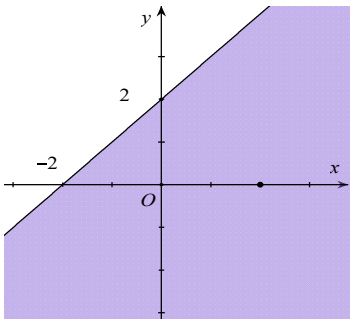
A.



B.



C.



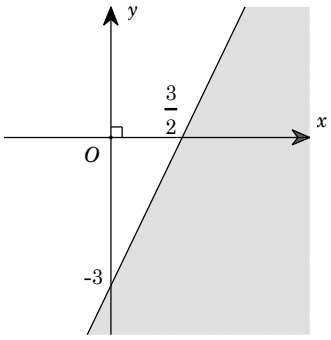
D.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng $\Delta: x+y-2=0$ đi qua hai điểm $A(2;0), B(0;2)$ và cặp số $(0;0)$ thỏa mãn bất phương trình $x-y\le 2$ nên Hình 1 biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $x+y\le 2$.

Câu 10. Phần **tô đậm** trong hình vẽ sau, biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình sau?



A. $2x-y<3$ **B.** $2x-y>3$ **C.** $x-2y<3$ **D.** $x-2y>3$

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng đi qua hai điểm $A\left(\frac{3}{2};0\right)$ và $B(0;-3)$ nên có phương trình $2x-y=3$.

Mặt khác, cặp số $(0;0)$ không thỏa mãn bất phương trình $2x-y>3$ nên phần tô đậm ở hình trên biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $2x-y>3$.

Bài 4 HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

THUẬT NGỮ
- Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn
- Miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Nhận biết hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- Biết biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên mặt phẳng toạ độ.
- Vận dụng kiến thức hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn vào giải quyết bài toán thực tiễn.

Trong năm nay, một cửa hàng điện lạnh dự định kinh doanh hai loại máy điều hoà: điều hoà hai chiều và điều hoà một chiều với số vốn ban đầu không vượt quá 1,2 tỉ đồng.

	Điều hoà hai chiều	Điều hoà một chiều
Giá mua vào	20 triệu đồng/1 máy	10 triệu đồng/1 máy
Lợi nhuận dự kiến	3,5 triệu đồng/1 máy	2 triệu đồng/1 máy

Cửa hàng ước tính rằng tổng nhu cầu của thị trường sẽ không vượt quá 100 máy cả hai loại. Nếu là chủ cửa hàng thì em cần đầu tư kinh doanh mỗi loại bao nhiêu máy để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

1. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

HĐ1. Trong *tình huống mở đầu*, gọi x và y lần lượt là số máy điều hoà loại hai chiều và một chiều mà cửa hàng cần nhập. Tính số tiền vốn mà cửa hàng phải bỏ ra để nhập hai loại máy điều hoà theo x và y.

a) Do nhu cầu của thị trường không quá 100 máy nên x và y cần thoả mãn điều kiện gì?

b) Vì số vốn mà chủ cửa hàng có thể đầu tư không vượt quá 1,2 tỉ đồng nên x và y phải thoả mãn điều kiện gì?

c) Tính số tiền lãi mà cửa hàng dự kiến thu được theo x và y.

Như vậy, x và y trong HĐ1 phải thoả mãn một số bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

- Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là một hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- Cặp số $(x_0; y_0)$ là nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn khi $(x_0; y_0)$ đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình trong hệ đó.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ví dụ 1. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 150. \end{cases}$

a) Hệ trên có phải là một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn không?

b) Kiểm tra xem cặp số $(x; y) = (0; 0)$ có phải là một nghiệm của hệ bất phương trình trên không.

Giải

a) Hệ bất phương trình đã cho là một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x và y.

b) Cặp số $(x; y) = (0; 0)$ thoả mãn cả ba bất phương trình của hệ nên nó là một nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn đã cho.

Luyện tập 1. Trong *tình huống mở đầu*, gọi x và y lần lượt là số máy điều hoà loại hai chiều và một chiều mà cửa hàng cần nhập. Từ HĐ1, viết hệ bất phương trình hai ẩn x, y và chỉ ra một nghiệm của hệ này.

2. BIỂU DIỄN MIỀN NGHIỆM CỦA HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN TRÊN MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

HĐ2. Cho đường thẳng d: $x + y = 150$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy. Đường thẳng này cắt hai trục toạ độ Ox và Oy tại hai điểm A và B.

a) Xác định các miền nghiệm D_1, D_2, D_3 của các bất phương trình tương ứng $x \geq 0$; $y \geq 0$ và $x + y \leq 150$.

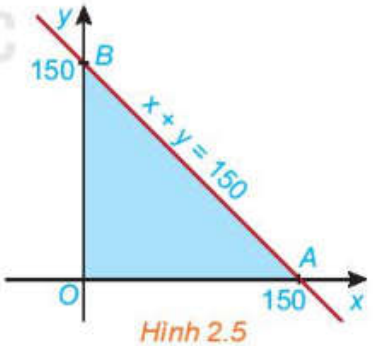
b) Miền tam giác OAB (H.2.5) có phải là giao của các miền D_1, D_2 và D_3 hay không?

c) Lấy một điểm trong tam giác OAB (chẳng hạn điểm (1; 2)) hoặc một điểm trên cạnh nào đó của tam giác OAB (chẳng hạn điểm (1; 149)) và kiểm tra xem toạ độ của các điểm đó có phải là nghiệm của hệ bất phương trình sau hay không:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 150. \end{cases}$$

Phương trình của trục Ox là $y = 0$ và phương trình của trục Oy là $x = 0$.





Hình 2.5

- Trong mặt phẳng toạ độ, tập hợp các điểm có toạ độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.
- Miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

Ví dụ 2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình sau trên mặt phẳng toạ độ:

$$\begin{cases} 7x + 4y \leq 2\,400 \\ x + y \leq 100 \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Giải (H.2.6)

Bước 1. Xác định miền nghiệm D_1 của bất phương trình $7x + 4y \le 2\,400$ và gạch bỏ miền còn lại.

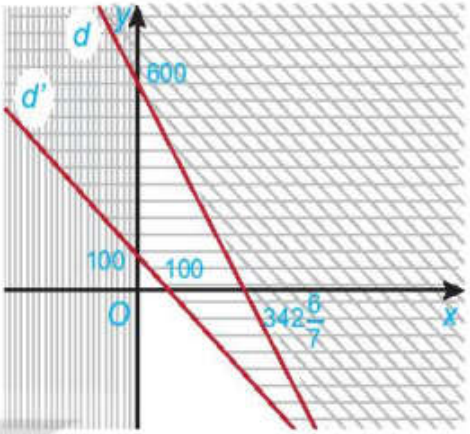
- Vẽ đường thẳng d: $7x + 4y = 2\,400$.
- Vì $7 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0 < 2\,400$ nên toạ độ điểm $O(0; 0)$ thoả mãn bất phương trình $7x + 4y \le 2\,400$.

Do đó, miền nghiệm D_1 của bất phương trình $7x + 4y \le 2\,400$ là nửa mặt phẳng bờ d chứa gốc toạ độ O.

Bước 2. Tương tự, miền nghiệm D_2 của bất phương trình $x + y \le 100$ là nửa mặt phẳng bờ d' chứa gốc toạ độ O.

Bước 3. Tương tự, miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x \ge 0$ là nửa mặt phẳng bờ Oy chứa điểm $(1; 0)$.

Khi đó, miền không bị gạch chính là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ. Vậy miền nghiệm của hệ là miền không bị gạch trong Hình 2.6.



Hình 2.6

Cách xác định miền nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

- Trên cùng một mặt phẳng toạ độ, xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong hệ và gạch bỏ miền còn lại.
- Miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Chú ý. Nếu trong HĐ2, hệ được thay bởi $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y < 150 \end{cases}$ thì miền nghiệm sẽ là miền tam giác OAB bỏ đi cạnh AB.

Luyện tập 2. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau trên mặt phẳng toạ độ: $\begin{cases} x \ge 0 \\ y > 0 \\ x + y \le 100 \\ 2x + y < 120. \end{cases}$

3. ỨNG DỤNG CỦA HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

HĐ3. Xét biểu thức $F(x; y) = 2x + 3y$ với $(x; y)$ thuộc miền tam giác OAB ở HĐ2. Toạ độ ba đỉnh là $O(0; 0)$, $A(150; 0)$ và $B(0; 150)$ (H.2.5).

a) Tính giá trị của biểu thức $F(x; y)$ tại mỗi đỉnh O, A và B.

b) Nêu nhận xét về dấu của hoành độ x và tung độ y của điểm $(x; y)$ nằm trong miền tam giác OAB. Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của $F(x; y)$ trên miền tam giác OAB.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

c) Nêu nhận xét về tổng $x + y$ của điểm $(x; y)$ nằm trong miền tam giác OAB. Từ đó suy ra giá trị lớn nhất của $F(x; y)$ trên miền tam giác OAB.

Nhận xét. Tổng quát, người ta chứng minh được rằng giá trị lớn nhất (hay nhỏ nhất) của biểu thức $F(x; y) = ax + by$, với $(x; y)$ là toạ độ các điểm thuộc miền đa giác $A_1A_2\ldots A_n$, tức là các điểm nằm bên trong hay nằm trên các cạnh của đa giác, đạt được tại một trong các đỉnh của đa giác đó.

Ví dụ 3. Giải bài toán ở *tình huống mở đầu*.

Giải

Giả sử cửa hàng cần nhập số máy điều hoà hai chiều là x và số máy điều hoà một chiều là y. Khi đó ta có $x \geq 0, y \geq 0$.

Vì nhu cầu của thị trường không quá 100 máy nên $x + y \leq 100$.

Số tiền để nhập hai loại máy điều hoà với số lượng như trên là: $20x + 10y$ (triệu đồng).

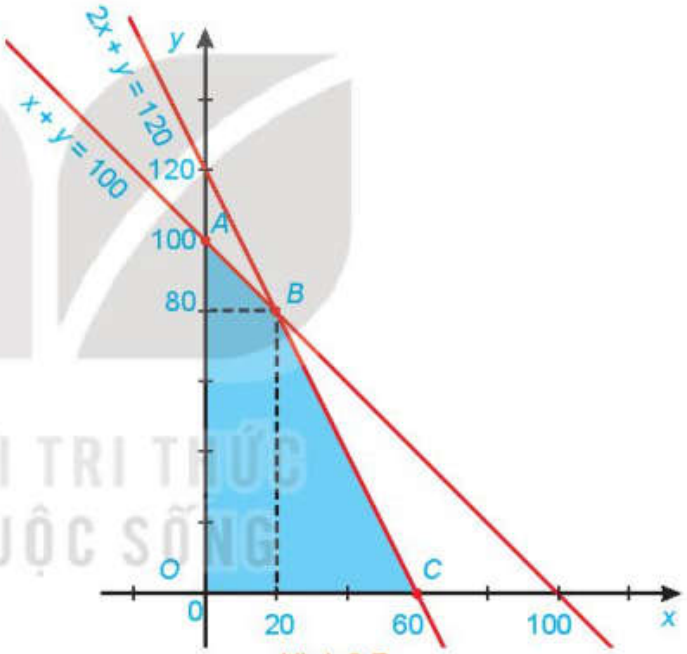
Số tiền tối đa để đầu tư cho hai loại máy là 1,2 tỉ đồng, nên ta có $20x + 10y \leq 1200$ hay $2x + y \leq 120$.

Từ đó ta thu được hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 100 \\ 2x + y \leq 120. \end{cases}$$

Lợi nhuận thu được khi bán x máy điều hoà hai chiều và y máy điều hoà một chiều là $F(x;y) = 3,5x + 2y$.

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $F(x; y)$ khi $(x; y)$ thoả mãn hệ bất phương trình trên.



Hình 2.7

Bước 1. Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình trên. Miền nghiệm là miền tứ giác $OABC$ với toạ độ các đỉnh $O(0;0)$, $A(0;100)$, $B(20;80)$ *và* $C(60;0)$ (H.2.7).

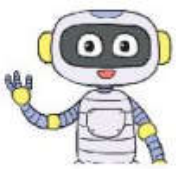
Bước 2. Tính giá trị của biểu thức F tại các đỉnh của tứ giác này:

$F(0;0) = 0$, $F(0;100) = 200$, $F(20;80) = 230$, $F(60;0) = 210$.

Bước 3. So sánh các giá trị thu được của F ở Bước 2, ta được giá trị lớn nhất cần tìm là $F(20;80) = 230$.

Vậy cửa hàng cần đầu tư kinh doanh 20 máy điều hoà hai chiều và 80 máy điều hoà một chiều để lợi nhuận thu được là lớn nhất.

Giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) của $F(x; y)$ đạt tại một trong các đỉnh của tứ giác $OABC$.



Vận dụng. Một cửa hàng có kế hoạch nhập về hai loại máy tính A và B, giá mỗi chiếc lần lượt là 10 triệu đồng và 20 triệu đồng với số vốn ban đầu không vượt quá 4 tỉ đồng. Loại máy A mang lại lợi nhuận 2,5 triệu đồng cho mỗi máy bán được và loại máy B mang lại lợi nhuận là 4 triệu đồng mỗi máy. Cửa hàng ước tính rằng tổng nhu cầu hàng tháng sẽ không vượt quá 250 máy. Giả sử trong một tháng cửa hàng cần nhập số máy tính loại A là x và số máy tính loại B là y.

a) Viết các bất phương trình biểu thị các điều kiện của bài toán thành một hệ bất phương trình rồi xác định miền nghiệm của hệ đó.

b) Gọi F (triệu đồng) là lợi nhuận mà cửa hàng thu được trong tháng đó khi bán x máy tính loại A và y máy tính loại B. Hãy biểu diễn F theo x và y.

c) Tìm số lượng máy tính mỗi loại cửa hàng cần nhập về trong tháng đó để lợi nhuận thu được là lớn nhất.

Dạng 1. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

1. Phương pháp

Tương tự hệ bất phương trình một ẩn, ta có hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Trong mặt phẳng toạ độ, ta gọi tập hợp các điểm có toạ độ thoả mãn mọi bất phương trình trong hệ là miền nghiệm của hệ. Vậy miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

Để xác định miền nghiệm của hệ, ta dùng phương pháp biểu diễn hình học như sau:

- Với mỗi bất phương trình trong hệ, ta xác định miền nghiệm của nó và gạch bỏ (tô màu) miền còn lại.
- Sau khi làm như trên lần lượt đối với tất cả các bất phương trình trong hệ trên cùng một mặt phẳng toạ độ, miền còn lại không bị gạch (tô đậm) chính là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Bài toán: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $T(x,y)=ax+by$ với $(x;y)$ nghiệm đúng một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho trước.

- **Bước 1:** Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho. Kết quả thường được miền nghiệm S là đa giác.
- **Bước 2:** Tính giá trị của F tương ứng với $(x;y)$ là tọa độ của các đỉnh của đa giác.
- **Bước 3:** Kết luận:
  - Giá trị lớn nhất của F là số lớn nhất trong các giá trị tìm được.
  - Giá trị nhỏ nhất của F là số nhỏ nhất trong các giá trị tìm được.

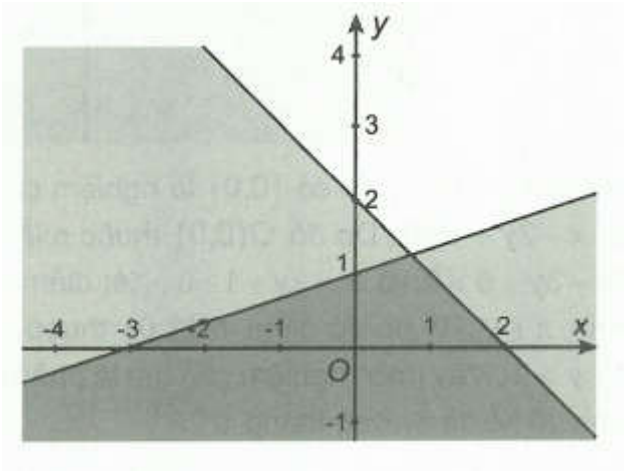
2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ: Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình sau $\begin{cases} x+y-2\ge 0 \\ x-3y+3\le 0. \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Vẽ các đường thẳng $d: x+y-2=0,\ d': x-3y+3=0$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

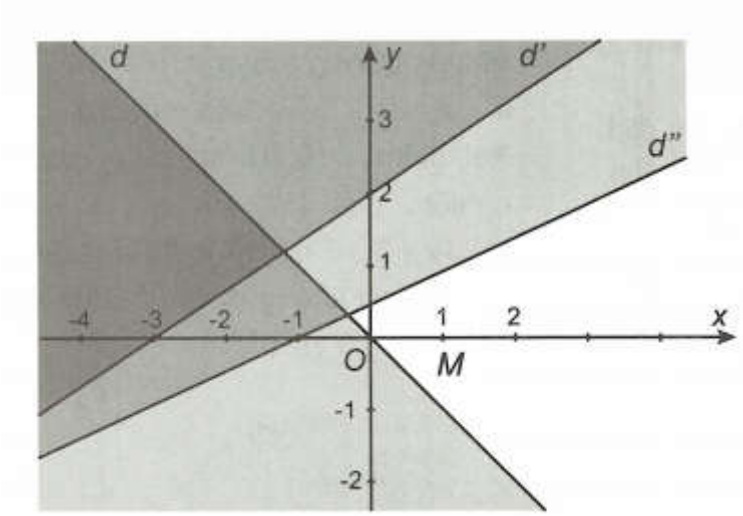
Xét điểm $O(0;0)$, ta thấy $(0;0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình $x+y-2\ge 0$ và $x-3y+3\le 0$ do đó miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô đậm trên hình vẽ kể cả hai đường d và d'.



Ví dụ 2: Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình sau: $\begin{cases} x+y>0 \\ 2x-3y+6>0. \\ x-2y+1\ge 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Vẽ các đường thẳng $d: x+y=0$, $d': 2x-3y+6=0$ và $d'': x-2y+1=0$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy.



Xét điểm $O(0;0)$, ta có $(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình $2x-3y+6>0$ và $x-2y+1\ge 0$. Do đó $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của các bất phương trình $2x-3y+6>0$ và $x-2y+1\ge 0$. Xét điểm $M(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình $x+y>0$ do đó điểm $M(1;0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $x+y>0$. Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô đậm trên hình vẽ kể cả đường thẳng d''.

Ví dụ 3: Xác định miền nghiệm của bất phương trình $(x-y)\left(x^3+y^3\right)\ge 0$.

Hướng dẫn giải

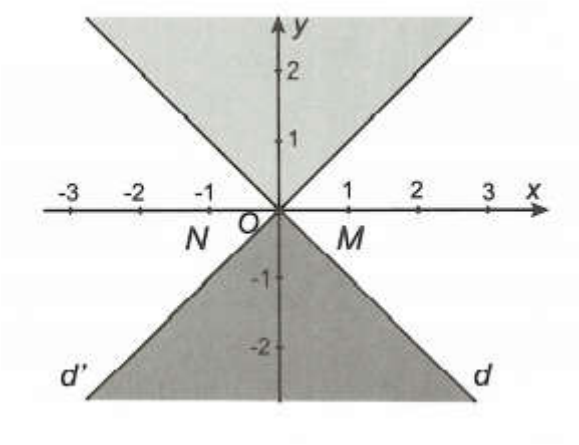
Ta có

$(x-y)\left(x^3+y^3\right)\ge 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)\ge 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)\ge 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x+y)\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y\ge 0 \\ x+y\ge 0 \end{cases}$ (1) hoặc $\begin{cases} x-y\le 0 \\ x+y\le 0 \end{cases}$ (2).

Như vậy miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là gồm hai miền nghiệm của hệ bất phương trình (1) và (2).

Vẽ các đường thẳng $d: x+y=0$ và $d': x-y=0$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy. Xét điểm $M(1;0)$, ta có $(1;0)$ là nghiệm của các bất phương trình của hệ (1) do đó $M(1;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình (1). Xét điểm $N(-1;0)$, ta có $(-1;0)$ là nghiệm của các bất phương trình của hệ (2) do đó $N(-1;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình (2). Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô đậm trên hình vẽ kể cả hai đường thẳng d và d'.



Ví dụ 4: Cho biểu thức $F(x;y)=2x+y$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} 2x+y-9\le 0 \\ x-y\le 0 \\ y-1\le 0 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của F

Hướng dẫn giải

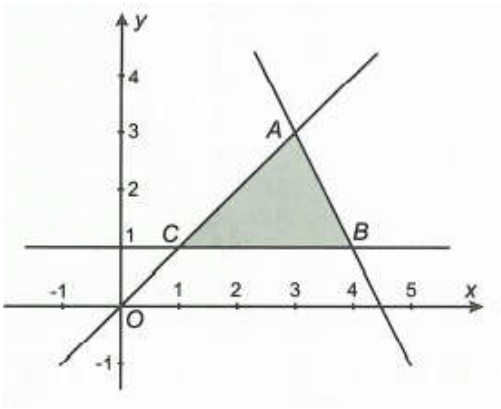
Trong mặt phẳng Oxy ta vẽ các đường thẳng có phương trình:

$2x+y-9=0;\ x-y=0;\ y-1=0.$

Khi đó miền nghiệm của hệ là miền tam giác ABC kể cả biên, được tô đậm, với $A(3;3), B(4;1), C(1;1)$.

Ta có $F(3;3)=9;\ F(4;1)=9;\ F(1;1)=3.$

Vậy giá trị lớn nhất là $F_{\max}=9$ khi $x=4; y=1$ hoặc $x=3; y=3$.



3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x+3y-2\ge 0 \\ 2x+y+1\le 0 \end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

A. $M(0;1)$ **B.** $N(-1;1)$ **C.** $P(1;3)$ **D.** $Q(-1;0)$

Lời giải

Chọn B

Ta thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

Với $M(0;1) \Rightarrow \begin{cases} 0+3.1-2 \geq 0 \\ 2.0+1+1 \leq 0 \end{cases}$. Bất phương trình thứ hai sai nên A sai.

Với $N(-1;1) \Rightarrow \begin{cases} -1+3.1-2 \geq 0 \\ 2.(-1)+1+1 \leq 0 \end{cases}$: Đúng. Chọn B.

Câu 2. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-5y-1>0 \\ 2x+y+5>0 \\ x+y+1<0 \end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

A. $O(0;0)$ **B.** $M(1;0)$ **C.** $N(0;-2)$ **D.** $P(0;2)$

Lời giải

Chọn C

Ta thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

Với $O(0;0) \Rightarrow \begin{cases} 2.0-5.0-1>0 \\ 2.0+0+5>0 \\ 0+0+1<0 \end{cases}$. Bất phương trình thứ nhất và thứ ba sai nên A sai.

Với $M(1;0) \Rightarrow \begin{cases} 2.1-5.0-1>0 \\ 2.1+0+5>0 \\ 1+0+1<0 \end{cases}$. Bất phương trình thứ ba sai nên B sai.

Với $N(0;-3) \Rightarrow \begin{cases} 2.0-5.(-3)-1>0 \\ 2.0+(-2)+5>0 \\ 0+(-2)+1<0 \end{cases}$: Đúng. Chọn C.

Câu 3. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}-1 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x+\frac{1}{2}-\frac{3y}{2} \leq 2 \end{cases}$ chứa điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $O(0;0)$ **B.** $M(2;1)$ **C.** $N(1;1)$ **D.** $P(5;1)$

Lời giải

Chọn B

Ta thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

Với $O(0;0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{0}{2}+\frac{0}{3}-1 \geq 0 \\ 0 \geq 0 \\ 0+\frac{1}{2}-\frac{3.0}{2} \leq 2 \end{cases}$. Bất phương trình thứ nhất sai nên A sai.

Với $M(2;1) \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{2}+\frac{1}{3}-1 \ge 0 \\ 2 \ge 0 \\ 2+\frac{1}{2}-\frac{3.1}{2} \le 2 \end{cases}$: Đúng. Chọn B.

Câu 4. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x+y \ge 9 \\ x \ge y-3 \\ 2y \ge 8-x \\ y \le 6 \end{cases}$ chứa điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $O(0;0)$ **B.** $M(1;2)$ **C.** $N(2;1)$ **D.** $P(8;4)$

Lời giải

Chọn D

Thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

Câu 5. Điểm $M(0;-3)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trìnhnào sau đây?

A. $\begin{cases} 2x-y \le 3 \\ 2x+5y \le 12x+8 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} 2x-y > 3 \\ 2x+5y \le 12x+8 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} 2x-y > -3 \\ 2x+5y \le 12x+8 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} 2x-y \le -3 \\ 2x+5y \ge 12x+8 \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Thay tọa độ $M(0;-3)$ lần lượt vào từng hệ bất phương trình.

Câu 6. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x+y-2 \le 0 \\ 2x-3y+2 > 0 \end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào không thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

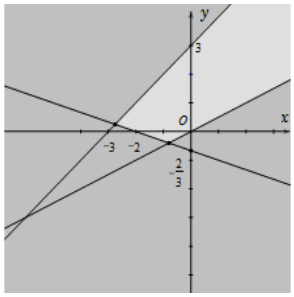
A. $O(0;0)$ **B.** $M(1;1)$ **C.** $N(-1;1)$ **D.** $P(-1;-1)$

Lời giải

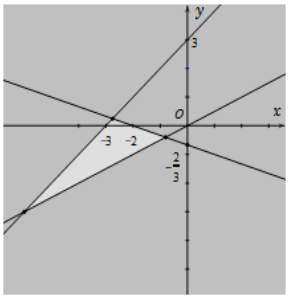
Chọn C

Thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

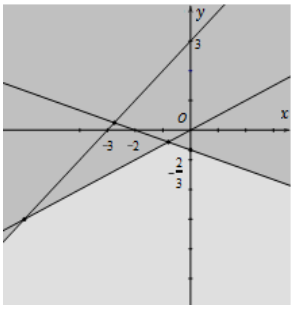
Câu 7. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x-2y < 0 \\ x+3y > -2 \\ y-x < 3 \end{cases}$ là phần không tô đậm của hình vẽ nào trong các hình vẽ sau?



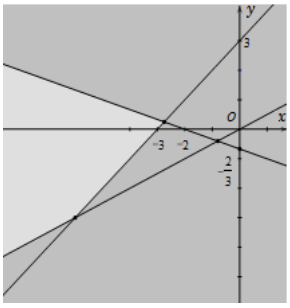
A.



B.



C.



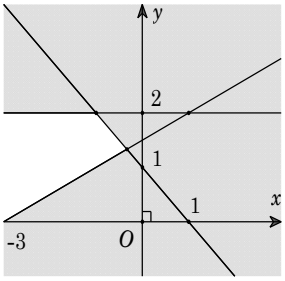
D.

Lời giải

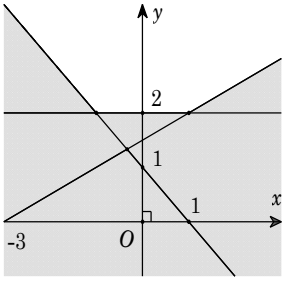
Chọn A

Chọn điểm $M(0;1)$ thử vào các bất phương trình của hệ thấy thỏa mãn.

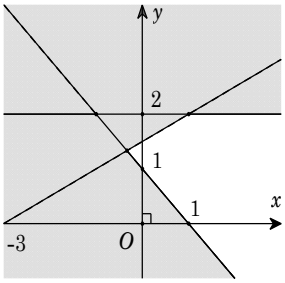
Câu 8. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x+y-1>0 \\ y\geq 2 \\ -x+2y>3 \end{cases}$ là phần không tô đậm của hình vẽ nào trong các hình vẽ sau?



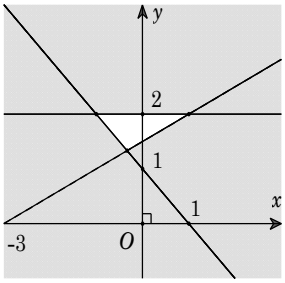
A.



B.



C.



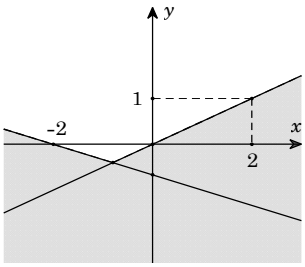
D.

Lời giải

Chọn B

Chọn điểm $M(0;4)$ thử vào các bất phương trình của hệ thấy thỏa mãn.

Câu 9. Phần không tô đậm trong hình vẽ dưới đây , biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình nào trong các hệ bất phương trình sau?



A. $\begin{cases} x-2y\le 0 \\ x+3y\ge -2 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x-2y> 0 \\ x+3y< -2 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x-2y\le 0 \\ x+3y\le -2 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x-2y< 0 \\ x+3y> -2 \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

Do miền nghiệm không chứa biên nên ta loại đáp án A và **C.** Chọn điểm $M(0;1)$ thử vào các hệ bất phương trình.

Xét đáp án B, ta có $\begin{cases} 0-2.1>0 \\ 0+3.1<-2 \end{cases}$: Sai.

Câu 11. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=y-x$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} y-2x\le 2 \\ 2y-x\ge 4 \\ x+y\le 5 \end{cases}$ là

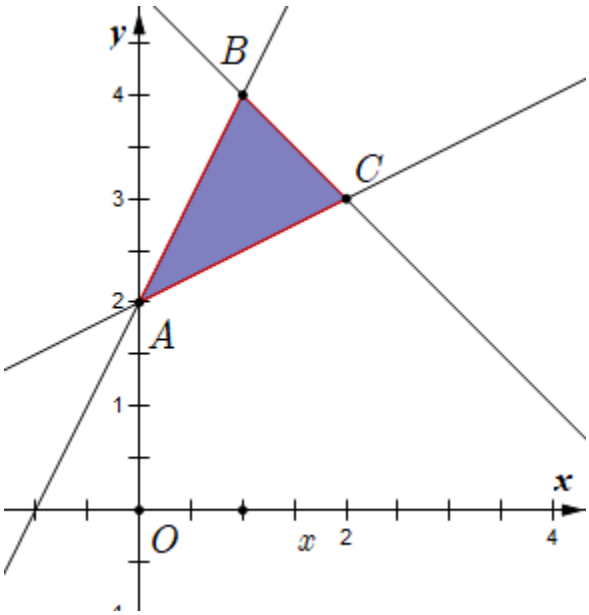
A. $\min F=1$ khi $x=2$, $y=3$. **B.** $\min F=2$ khi $x=0$, $y=2$.

C. $\min F=3$ khi $x=1$, $y=4$. **D.** $\min F=0$ khi $x=0$, $y=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Miền nghiệm của hệ $\begin{cases} y-2x\le 2 \\ 2y-x\ge 4 \\ x+y\le 5 \end{cases}$ là miền trong của tam giác ABC kể cả biên



Ta thấy $F=y-x$ đạt giá trị nhỏ nhất chỉ có thể tại các điểm A, B, C.

Tại $A(0;2)$ thì $F=2$.

Tại $B(1;4)$ thì $F=3$

Tại $A(2;3)$ thì $F=1$.

Vậy $\min F=1$ khi $x=2$, $y=3$.

Câu 12: Giá trị nhỏ nhất $F_{\min}$ của biểu thức $F(x;y)=4x+3y$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases}0\le x\le 10\\0\le y\le 9\\2x+y\ge 14\\2x+5y\ge 30\end{cases}$ là

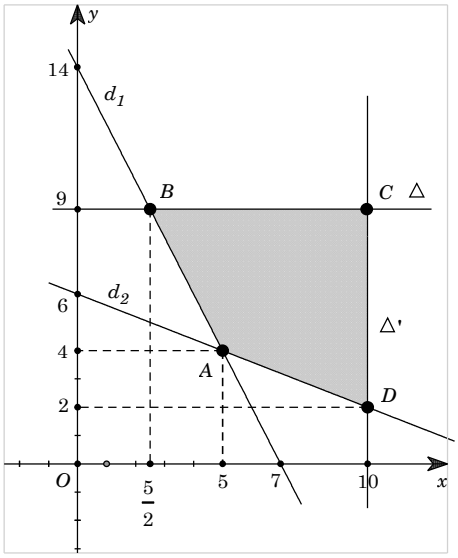
A. $F_{\min}=23$ **B.** $F_{\min}=26$ **C.** $F_{mim}=32$ **D.** $F_{\min}=67$

Lời giải

Chọn C

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ các đường thẳng

$d_1: 2x+y-14=0,\quad d_2: 2x+5y-30=0,\quad \Delta: y=9,\quad \Delta': x=10.$



Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần mặt phẳng tô màu như hình vẽ.

Xét các đỉnh của miền khép kín tạo bởi hệ là $A(5;4)$, $B\left(\frac{5}{2};9\right)$, $C(10;9)$, $D(10;2)$.

Ta có $\begin{cases}F(5;4)=32\\F\left(\frac{5}{2};9\right)=37\\F(10;9)=67\\F(10;2)=46\end{cases}\longrightarrow F_{\min}=32.$

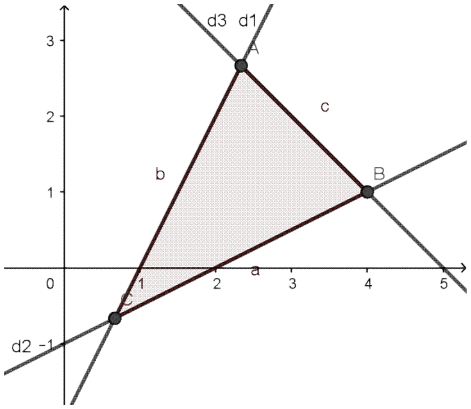
Câu 13. Biểu thức $F(x;y)=y-x$ đạt giá trị nhỏ nhất với điều kiện $\begin{cases}2x-y\ge 2\\x-2y\le 2\\x+y\le 5\\x\ge 0\end{cases}$ tại điểm

M có toạ độ là:

A. $(4;1)$ **B.** $\left(\frac{8}{3};-\frac{7}{3}\right)$ **C.** $\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$ **D.** $(5;0)$

Lời giải

Chọn A



Vẽ các đường thẳng :

$(d_1): y = 2x - 2$

$(d_2): y = \frac{1}{2}x - 1$

$(d_3): y = 5 - x$

Khi đó miền nghiệm của hệ là miền trong của tam giác ABC

Tọa độ các đỉnh: $A\left(\frac{7}{3};\frac{8}{3}\right); B(4;1); C\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$

Ta có : $F(4;1) = -3;\ F\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right) = \frac{-4}{3} \Rightarrow F_{\min} = -3$

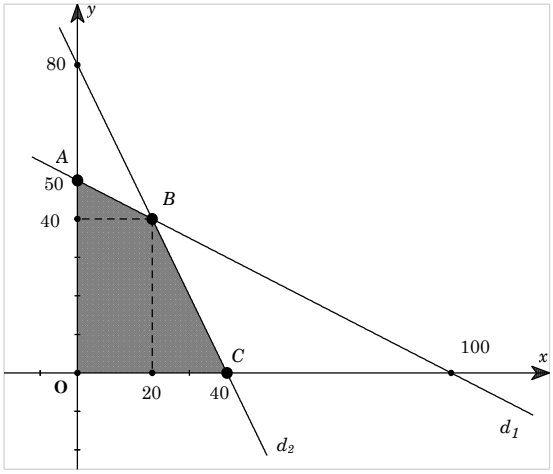
Câu 14. Cho x, y thoả mãn hệ $\begin{cases} x + 2y - 100 \le 0 \\ 2x + y - 80 \le 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = (x;y) = 40000x + 30000y$

A. $P_{\max} = 2000000$ **B.** $P_{\max} = 2400000$ **C.** $P_{\max} = 1800000$ **D.** $P_{\max} = 1600000$

Lời giải

Chọn A

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ các đường thẳng $d_1: x + 2y - 100 = 0,\quad d_2: 2x + y - 80 = 0.$



Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần mặt phẳng tô màu như hình vẽ.

Xét các đỉnh của miền khép kín tạo bởi hệ là

$O(0;0)$, $A(0;50)$, $B(20;40)$, $C(40;0)$.

Ta có $\begin{cases} P(0;0)=0 \\ P(0;50)=1500000 \\ P(20;40)=2000000 \\ P(40;0)=1600000 \end{cases} \longrightarrow P_{\max}=2000000.$

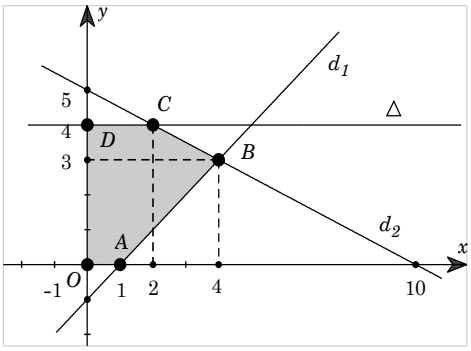
Câu 15. Giá trị lớn nhất $F_{\max}$ của biểu thức $F(x;y)=x+2y$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} 0\le y\le 4 \\ x\ge 0 \\ x-y-1\le 0 \\ x+2y-10\le 0 \end{cases}$ là

A. $F_{\max}=6$ **B.** $F_{\max}=8$ **C.** $F_{\max}=10$ **D.** $F_{\max}=12$

Lời giải

Chọn C

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ các đường thẳng $d_1: x-y-1=0$, $d_2: x+2y-10=0$, $\Delta: y=4$.



Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần mặt phẳng tô màu như hình vẽ.

Xét các đỉnh của miền khép kín tạo bởi hệ là $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(4;3)$, $C(2;4)$, $D(0;4)$.

Ta có $\begin{cases} F(0;0)=0 \\ F(1;0)=1 \\ F(4;3)=10 \\ F(2;4)=10 \\ F(0;4)=8 \end{cases} \longrightarrow F_{\max}=10.$

Dạng 2. Bài toán tối ưu

1. Phương pháp

Vấn đề tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất có liên quan chặt chẽ đến **quy hoạch tuyến tính.** Đó là một ngành toán học có nhiều ứng dụng trong đời sống và kinh tế.

Lưu ý: Ta thừa nhận kết quả sau "Giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất của biểu thức $P(x;y)=ax+by+c$ $a^2+b^2\neq 0$ trên miền đa giác lồi (kể cả biên) đạt được tại một đỉnh nào đó của đa giác".

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Một công ty kinh doanh thương mại chuẩn bị cho một đợt khuyến mại nhằm thu hút khách hàng bằng cách tiến hành quảng cáo sản phẩm của công ty trên hệ thống phát thanh và truyền hình. Chi phí cho 1 phút quảng cáo trên sóng phát thanh là 800.000 đồng, trên sóng truyền hình là 4.000.000 đồng. Đài phát thanh chỉ nhận phát các chương trình quảng cáo dài ít nhất là 5 phút. Do nhu cầu quảng cáo trên truyền hình lớn nên đài truyền hình chỉ nhận phát các chương trình dài tối đa là 4 phút. Theo các phân tích cùng thời lượng một phút quảng cáo trên truyền hình sẽ có hiệu quả gấp 6 lần trên sóng phát thanh. Công ty dự định chi tối đa là 16.000.000 đồng cho quảng cáo. Công ty cần đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh và truyền hình như thế nào để hiệu quả nhất?

Hướng dẫn giải

Phân tích bài toán: Gọi thời lượng công ty đặt quảng cáo trên sóng phát thanh là x (phút), trên truyền hình là y (phút). Chi phí cho việc này là

$800.000x+4.000.000y$ (đồng).

Mức chi phí này không được phép vượt quá mực chi tối đa, tức là

$800\,000x+4\,000\,000y\le 16\,000\,000$

$\Leftrightarrow x+5y-20\le 0.$

Theo giả thiết, ta có $x\ge 5;\ x\le 4.$

Đồng thời do x,y là thời lượng nên $x\ge 0;y\ge 0.$

Hiệu quả chung của quảng cáo là $x+6y.$

Bài toán trở thành: Tìm x,y sao cho $M(x;y)=x+6y$ đạt giá trị lớn nhất, với x,y thoả mãn hệ bất phương trình $\begin{cases} x+5y-20\le 0 \\ x\ge 5 \\ 0\le y\le 4 \end{cases}$ $(*).$

Trong mặt phẳng $Oxy,$ ta biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là phần tam giác ABC với $A(5;3),B(5;0),C(20;0).$

Ta có $M(5;3)=23;\ M(5;0)=5;\ M(20;0)=20$ suy ra giá trị lớn nhất của $M(x;y)$ bằng 23 tại $(5;3)$.

Tức là nếu đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh là 5 phút và trên truyền hình là 3 phút thì sẽ đạt hiệu quả nhất.

Ví dụ 2: Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm, mỗi kg sản phẩm loại một cần 2kg nguyên liệu và 30 giờ, đem lại mức lợi nhuận 40 000 đồng. Mỗi sản phẩm loại hai cần 4kg nguyên liệu và 15 giờ đem lại mức lợi nhuận là 30 000 đồng. Xưởng có 200kg nguyên liệu và 1200 giờ làm việc. Hỏi cần sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để có mức lợi nhuận cao nhất?

Hướng dẫn giải

Phân tích bài toán: Gọi $x\ (x\ge 0)$ là số kg loại một cần sản xuất, $y\ (y\ge 0)$ là số kg loại hai cần sản xuất. Suy ra số nguyên liệu cần dùng là $2x+4y,$ thời gian là $30x+15y$ có mức lợi nhuận là $40\,000x+30\,000y.$

Theo giả thiết bài toán xưởng có 200kg nguyên liệu và 1200 giờ làm việc, suy ra $2x+4y\le 200$ hay $x+2y-100\le 0;\ 30x+15y\le 1200$ hay $2x+y-80\le 0.$

Bài toán trở thành: Tìm $x;y$ thoả mãn hệ $\begin{cases} x+2y-100\le 0 \\ 2x+y-80\le 0 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$ $(*)$ sao cho $L(x;y)=40\,000x+30\,000y$ đạt giá trị lớn nhất.

Biểu diễn miền nghiệm của hệ (*) là miền tứ giác $OABC$ với $O(0;0), A(40;0), B(0;50), C(20;40).$

Ta có $L(0;0)=0, L(40;0)=1600\,000, L(0;50)=1500\,000, L(20;40)=2\,000\,000.$

Do đó giá trị lớn nhất của $L(x;y)$ là 2 000 000 khi $(x;y)=(20;40).$

Vậy nên sản xuất 20kg sản phẩm loại I và 40kg sản phẩm loại hai để có mức lợi nhuận cao nhất.

Ví dụ 3: Một công ty điện tử sản xuất hai kiểu radio trên hai dây chuyền độc lập. Radio kiểu một sản xuất trên dây chuyền một với công suất 45 radio/ngày, radio kiểu hai sản xuất trên dây chuyền hai với công suất 80 radio/ngày. Để sản xuất một chiếc radio kiểu một cần 12 linh kiện, để sản xuất một chiếc radio kiểu hai cần 9 linh kiện. Tiền lãi khi bán một chiếc radio kiểu một là 250 000 đồng, lãi thu được khi bán một chiếc radio kiểu hai là 180 000 đồng. Hỏi cần sản xuất như thế nào để tiền lãi thu được là nhiều nhất, biết rằng số linh kiện có thể sử dụng tối đa trong một ngày là 900?

A. Sản xuất 15 radio kiểu một và 80 radio kiểu hai.

B. Sản xuất 45 radio kiểu một và 40 radio kiểu hai.

C. Sản xuất 45 radio kiểu một.

D. Sản xuất 80 radio kiểu hai.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi x và y lần lượt là số radio kiểu một và số radio kiểu hai mà công ty này sản xuất trong một ngày $(x;y\in N^*).$

Số tiền lãi mà công ty này thu về hàng ngày là $f(x;y)=250000x+180000y$ (đồng).

Ta có hệ bất phương trình $\begin{cases} 12x+9y \le 900 \\ 0 \le x \le 45 \\ 0 \le y \le 80 \end{cases} (*).$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x;y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là ngũ miền ngũ giác $OABCD$ trong đó $O(0;0)$, $A(45;0)$, $B(45;40)$, $C(15;80)$, $D(0;80)$.

Ta có $f(x;y)$ lớn nhất khi $(x;y)=(45;40)$, tức là công ty này cần sản xuất 45 radio kiểu một và 40 radio kiểu hai.

Ví dụ 4: Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24 g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường để pha chế nước cam và nước táo. Để pha chế 1 lít nước cam cần 30 g đường và 1 lít nước; pha chế 1 lít nước táo cần 10 g đường, 1 lít nước và 4 g hương liệu. Mỗi lít nước cam nhận được 20 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để được số tiền thưởng là lớn nhất?

A. 7 lít nước đường.

B. 6 lít nước táo.

C. 3 lít nước đường, 6 lít nước táo.

D. 6 lít nước đường, 3 lít nước táo.

Hướng dẫn giải

Gọi $x;y$ lần lượt là số lít nước cam và táo của mỗi đội pha chế $(x;y \ge 0)$.

Số điểm thưởng của đội chơi này là $f(x;y)=20x+80y$.

Số gam đường cần dùng là $30x+10y$ (g).

Số lít nước cần dùng là $x+y$ (l).

Số gam hương liệu cần dùng là $4y$ (g).

Vì trong cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi sử dụng tối đa 24 g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường nên ta có hệ bất phương trình sau

$$\begin{cases} 30x+10y \le 210 \\ x+y \le 9 \\ 4y \le 24 \\ x;y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y \le 21 \\ x+y \le 9 \\ y \le 6 \\ x;y \ge 0 \end{cases} (*).$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x;y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là ngũ giác $OABCD$.

Trong đó $O(0;0), A(7;0), B(6;3), C(3;6), D(0;6)$.

Suy ra $f(3;6)$ là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x;y)$ trên miền nghiệm của hệ (*).

Như vậy để được số điểm thưởng lớn nhất cần pha chế 3 lít nước cam và 6 lít nước táo.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1 : Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24 g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường để pha chế nước cam và nước táo.

- Để pha chế 1 lít nước cam cần 30 g đường, 1 lít nước và 1 g hương liệu;
- Để pha chế 1 lít nước táo cần 10 g đường, 1 lít nước và 4 g hương liệu.

Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để đạt được số điểm thưởng cao nhất?

A. 5 lít nước cam và 4 lít nước táo. **B.** 6 lít nước cam và 5 lít nước táo.

C. 4 lít nước cam và 5 lít nước táo. **D.** 4 lít nước cam và 6 lít nước táo.

Lời giải

Chọn C

Giả sử x, y lần lượt là số lít nước cam và số lít nước táo mà mỗi đội cần pha chế.

Suy ra $30x+10y$ là số gam đường cần dùng;

$x+y$ là số lít nước cần dùng;

$x+4y$ là số gam hương liệu cần dùng.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 30x+10y\le 210 \\ x+y\le 9 \\ x+4y\le 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 3x+y\le 21 \\ x+y\le 9 \\ x+4y\le 24 \end{cases}$. $(*)$

Số điểm thưởng nhận được sẽ là $P=60x+80y.$

Ta đi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P với x, y thỏa mãn $(*)$.

Câu 2: Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm

- Mỗi kg sản phẩm loại I cần 2 kg nguyên liệu và 30 giờ, đem lại mức lời 40 nghìn;
- Mỗi kg sản phẩm loại II cần 4 kg nguyên liệu và 15 giờ, đem lại mức lời 30 nghìn.

Xưởng có 200 kg nguyên liệu và 1200 giờ làm việc. Nên sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để có mức lời cao nhất?

A. 30 kg loại I và 40 kg loại II. **B.** 20 kg loại I và 40 kg loại II.

C. 30 kg loại I và 20 kg loại II. **D.** 25 kg loại I và 45 kg loại II.

Lời giải

Chọn B

Gọi $x\ge 0, y\ge 0$ (kg) lần lượt là số sản phẩm loại I và loại II cần sản xuất.

Khi đó, tổng số nguyên liệu sử dụng: $2x+4y\le 200.$

Tổng số giờ làm việc: $30x+15y\le 1200.$

Lợi nhuận tạo thành: $L=40x+30y$.

Thực chất của bài toán này là phải tìm $x\ge 0,\ y\ge 0$ thoả mãn hệ

$\begin{cases} 2x+4y\le 200 \\ 30x+15y\le 1200 \end{cases}$ sao cho $L=40x+30y$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 3: Một xưởng cơ khí có hai công nhân là Chiến và Bình. Xưởng sản xuất loại sản phẩm I và II. Mỗi sản phẩm I bán lãi 500 nghìn đồng, mỗi sản phẩm II bán lãi 400 nghìn đồng. Để sản xuất được một sản phẩm I thì Chiến phải làm việc trong 3 giờ, Bình phải làm việc trong 1 giờ. Để sản xuất được một sản phẩm II thì Chiến phải làm việc trong 2 giờ, Bình phải làm việc trong 6 giờ. Một người không thể làm được đồng thời hai sản phẩm. Biết rằng trong một tháng Chiến không thể làm việc quá 180 giờ và Bình không thể làm việc quá 220 giờ. Số tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là.

A. 32 triệu đồng. **B.** 35 triệu đồng. **C.** 14 triệu đồng. **D.** 30 triệu đồng.

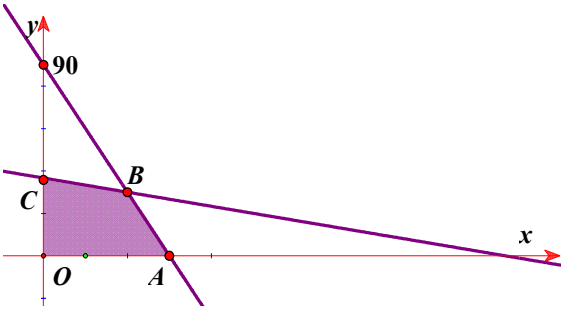
Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi x, y lần lượt là số sản phẩm loại I và loại II được sản xuất ra. Điều kiện x, y nguyên dương.

Ta có hệ bất phương trình sau: $\begin{cases} 3x+2y \le 180 \\ x+6y \le 220 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$

Miền nghiệm của hệ trên là



Tiền lãi trong một tháng của xưởng là $T=0,5x+0,4y$.

Ta thấy T đạt giá trị lớn nhất chỉ có thể tại các điểm A, B, C. Vì C có tọa độ không nguyên nên loại.

Tại $A(60;0)$ thì $T=30$ triệu đồng.

Tại $B(40;30)$ thì $T=32$ triệu đồng.

Vậy tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là 32 triệu đồng.

Câu 4. Một nhà khoa học đã nghiên cứu về tác động phối hợp của hai loại Vitamin A và B đã thu được kết quả như sau: Trong một ngày, mỗi người cần từ 400 đến 1000 đơn vị Vitamin cả A lẫn B và có thể tiếp nhận không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B. Do tác động phối hợp của hai loại vitamin trên nên mỗi ngày một người sử dụng số đơn vị vitamin B không ít hơn một nửa số đơn vị vitamin A và không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A. Tính số đơn vị vitamin mỗi loại ở trên để một người dùng mỗi ngày sao cho chi phí rẻ nhất, biết rằng mỗi đơn vị vitamin A có giá 9 đồng và mỗi đơn vị vitamin B có giá 7,5 đồng.

A. 600 đơn vị Vitamin A, 400 đơn vị Vitamin B

B. 600 đơn vị Vitamin A, 300 đơn vị Vitamin B

C. 500 đơn vị Vitamin A, 500 đơn vị Vitamin B

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

D. 100 đơn vị Vitamin A, 300 đơn vị Vitamin B

Lời giải

Chọn D

Gọi $x \ge 0,\ y \ge 0$ lần lượt là số đơn vị vitamin A và B để một người cần dùng trong một ngày.

Trong một ngày, mỗi người cần từ 400 đến 1000 đơn vị vitamin cả A lẫn B nên ta có: $400 \le x + y \le 1000$.

Hàng ngày, tiếp nhận không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B nên ta có: $x \le 600,\ y \le 500$.

Mỗi ngày một người sử dụng số đơn vị vitamin B không ít hơn một nửa số đơn vị vitamin A và không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A nên ta có: $0,5x \le y \le 3x$.

Số tiền cần dùng mỗi ngày là: $T(x,y) = 9x + 7,5y$.

Bài toán trở thành: Tìm $x \ge 0,\ y \ge 0$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} 0 \le x \le 600, 0 \le y \le 500 \\ 400 \le x + y \le 1000 \\ 0,5x \le y \le 3x \end{cases}$$ để $T(x,y) = 9x + 7,5y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5. Công ty Bao bì Dược cần sản xuất 3 loại hộp giấy: đựng thuốc B_1, đựng cao Sao vàng và đựng "Quy sâm đại bổ hoàn". Để sản xuất các loại hộp này, công ty dùng các tấm bìa có kích thước giống nhau. Mỗi tấm bìa có hai cách cắt khác nhau.

- Cách thứ nhất cắt được 3 hộp B_1, một hộp cao Sao vàng và 6 hộp Quy sâm.
- Cách thứ hai cắt được 2 hộp B_1, 3 hộp cao Sao vàng và 1 hộp Quy sâm. Theo kế hoạch, số hộp Quy sâm phải có là 900 hộp, số hộp B_1 tối thiểu là 900 hộp, số hộp cao sao vàng tối thiểu là 1000 hộp. Cần phương án sao cho tổng số tấm bìa phải dùng là ít nhất?

A. Cắt theo cách một 100 tấm, cắt theo cách hai 300 tấm.

B. Cắt theo cách một 150 tấm, cắt theo cách hai 100 tấm.

C. Cắt theo cách một 50 tấm, cắt theo cách hai 300 tấm.

D. Cắt theo cách một 100 tấm, cắt theo cách hai 200 tấm.

Lời giải

Chọn A

Gọi $x \ge 0,\ y \ge 0$ lần lượt là số tấm bìa cắt theo cách thứ nhất, thứ hai.

Bài toán đưa đến tìm $x \ge 0,\ y \ge 0$ thoả mãn hệ $\begin{cases} 3x + 2y \ge 900 \\ x + 3y \ge 1000 \\ 6x + y = 900 \end{cases}$ sao cho $L = x + y$ nhỏ nhất.

Câu 6. Một nhà máy sản xuất, sử dụng ba loại máy đặc chủng để sản xuất sản phẩm A và sản phẩm B trong một chu trình sản xuất. Để sản xuất một tấn sản phẩm A lãi 4 triệu đồng người ta sử dụng máy I trong 1 giờ, máy $\mathbb{U}$ trong 2 giờ và máy MI trong 3 giờ. Để sản xuất ra một tấn sản phẩm B lãi được 3 triệu đồng người ta sử dụng máy I trong 6 giờ, máy $\mathbb{U}$ trong 3 giờ và máy MI trong 2 giờ. Biết rằng máy I chỉ hoạt động không quá 36 giờ, máy hai hoạt động không quá 23 giờ và máy MI hoạt động không quá 27 giờ. Hãy lập kế hoạch sản xuất cho nhà máy để tiền lãi được nhiều nhất.

A. Sản xuất 9 tấn sản phẩm A và không sản xuất sản phẩm B

B. Sản xuất 7 tấn sản phẩm A và 3 tấn sản phẩm B

C. Sản xuất $\frac{10}{3}$ tấn sản phẩm A và $\frac{49}{9}$ tấn sản phẩm B

D. Sản xuất 6 tấn sản phẩm B và không sản xuất sản phẩm A

Lời giải

Chọn B

Gọi $x \ge 0,\ y \ge 0$ là sản lượng cần sản xuất của sản phẩm A và sản phẩm B. Ta có:

$x+6y$ là thời gian hoạt động của máy I.

$2x+3y$ là thời gian hoạt động của máy II.

$3x+2y$ là thời gian hoạt động của máy III.

Số tiền lãi của nhà máy: $T=4x+3y$.

Bài toán trở thành: Tìm $x \ge 0,\ y \ge 0$ thỏa mãn $\begin{cases} x+6y \le 36 \\ 2x+3y \le 23 \\ 3x+2y \le 27 \end{cases}$ để $T=4x+3y$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 7. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kiogam thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kilogam thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất $1,6$ kg thịt bò và $1,1$ kg thịt lợn. Giá tiền một kg thịt bò là 160 nghìn đồng, một kg thịt lợn là 110 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó cần mua. Tìm x, y để tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipit trong thức ăn?

A. $x=0,3$ và $y=1,1$. **B.** $x=0,3$ và $y=0,7$. **C.** $x=0,6$ và $y=0,7$. **D.** $x=1,6$ và $y=0,2$.

Hướng dẫn giải

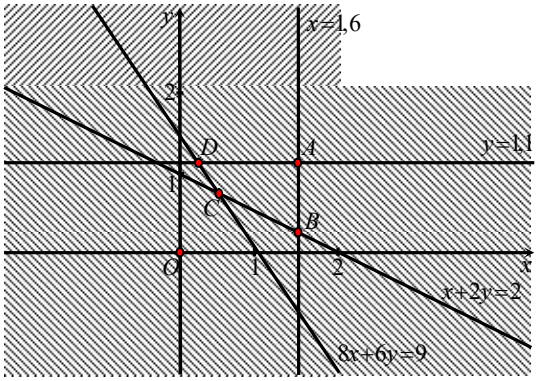
Chọn A.

Theo bài ra ta có số tiền gia đình cần trả là $160.x+110.y$ với x, y thỏa mãn: $\begin{cases} 0 \le x \le 1,6 \\ 0 \le y \le 1,1 \end{cases}$.

Số đơn vị protein gia đình có là $0,8.x+0,6.y \ge 0,9 \Leftrightarrow 8x+6y \ge 9 \ (d_1)$.

Số đơn vị lipit gia đình có là $0,2.x+0,4.y \ge 0,4 \Leftrightarrow x+2y \ge 2 \ (d_2)$.

Bài toán trở thành: Tìm x, y thỏa mãn hệ bất phương trình $\begin{cases} 0 \le x \le 1,6 \\ 0 \le y \le 1,1 \\ 8x+6y \ge 9 \\ x+2y \ge 2 \end{cases}$ sao cho $T=160.x+110.y$ nhỏ nhất.



Vẽ hệ trục tọa độ ta tìm được tọa độ các điểm $A(1,6;1,1)$; $B(1,6;0,2)$; $C(0,6;0,7)$; $D(0,3;1,1)$.

Nhận xét: $T(A)=377$ nghìn, $T(B)=278$ nghìn, $T(C)=173$ nghìn, $T(D)=169$ nghìn.

Vậy tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipit trong thức ăn thì $x=0,6$ và $y=0,7$.

CHƯƠNG III
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC



Lượng giác được phát triển từ nhu cầu tính toán góc và khoảng cách trong rất nhiều lĩnh vực như thiên văn học, lập bản đồ, bản vẽ thiết kế, khảo sát và tìm tầm bắn của pháo binh.

Ở lớp 9, em đã biết tỉ số lượng giác của một góc nhọn. Chương này mở rộng khái niệm đó cho một góc bất kì từ 0° đến 180°.

Bài 5 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

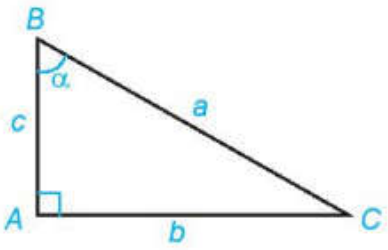
THUẬT NGỮ

- Giá trị lượng giác của một góc
- Hai góc bù nhau

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°.
- Giải thích hệ thức liên hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc phụ nhau, bù nhau.
- Sử dụng máy tính cầm tay để tính các giá trị lượng giác của một góc.
- Vận dụng giải một số bài toán có nội dung thực tiễn.

$\sin\alpha = \frac{b}{a}$ $\cos\alpha = \frac{c}{a}$ $\tan\alpha = \frac{b}{c}$ $\cot\alpha = \frac{c}{b}$



Hình 3.1

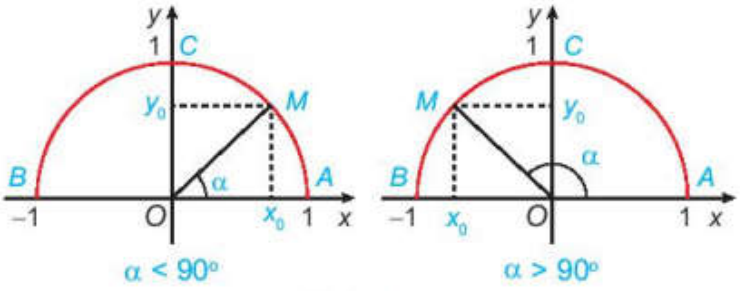
Bạn đã biết tỉ số lượng giác của một góc nhọn. Đối với góc tù thì sao?



1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, nửa đường tròn tâm O, bán kính $R = 1$ nằm phía trên trục hoành (H.3.2) được gọi là nửa đường tròn đơn vị.

Cho trước một góc α, $0° \le \alpha \le 180°$. Khi đó, có duy nhất điểm $M(x_0; y_0)$ trên nửa đường tròn đơn vị nói trên để $\widehat{xOM} = \alpha$.



Hình 3.2

HĐ1. a) Nêu nhận xét về vị trí của điểm M trên nửa đường tròn đơn vị trong mỗi trường hợp sau:

• $\alpha = 90°$; • $\alpha < 90°$; • $\alpha > 90°$.

b) Khi $0° < \alpha < 90°$, nêu mối quan hệ giữa $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ với hoành độ và tung độ của điểm M.

Mở rộng khái niệm tỉ số lượng giác của một góc nhọn cho một góc bất kì từ $0°$ đến $180°$, ta có định nghĩa sau:

Với mỗi góc α ($0° \le \alpha \le 180°$), gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Khi đó:

- sin của góc α là tung độ y_0 của điểm M, được kí hiệu là $\sin\alpha$;
- côsin của góc α là hoành độ x_0 của điểm M, được kí hiệu là $\cos\alpha$;
- Khi $\alpha \ne 90°$ (hay là $x_0 \ne 0$), tang của α là $\frac{y_0}{x_0}$, được kí hiệu là $\tan\alpha$;
- Khi $\alpha \ne 0°$ và $\alpha \ne 180°$ (hay là $y_0 \ne 0$), côtang của α là $\frac{x_0}{y_0}$, được kí hiệu là $\cot\alpha$.

Từ định nghĩa trên, ta có:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} (\alpha \ne 90°); \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} (\alpha \ne 0° \text{ và } \alpha \ne 180°); \tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} (\alpha \notin \{0°; 90°; 180°\}).$$

Sau đây là bảng giá trị lượng giác (GTLG) của một số góc đặc biệt mà em nên nhớ.

GTLG \ α	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	||	0
$\cot\alpha$	||	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	||

Bảng 3.1

Trong bảng, kí hiệu || chỉ giá trị lượng giác tương ứng không xác định.



KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

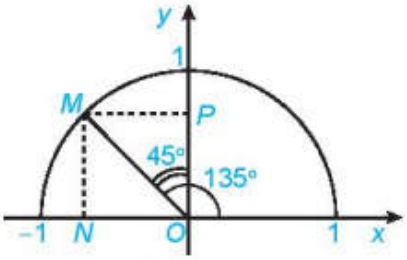
Ví dụ 1. Tìm các giá trị lượng giác của góc 135°.

Giải (H.3.3)

Gọi M là điểm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = 135°$. Gọi N, P tương ứng là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy.

Vì $\widehat{xOM} = 135°$ nên $\widehat{MON} = 45°$, $\widehat{MOP} = 45°$. Vậy các tam giác MON, MOP là vuông cân với cạnh huyền $OM = 1$.

Từ đó, ta có $ON = OP = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Mặt khác, điểm M nằm bên trái trục tung nên có toạ độ là $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

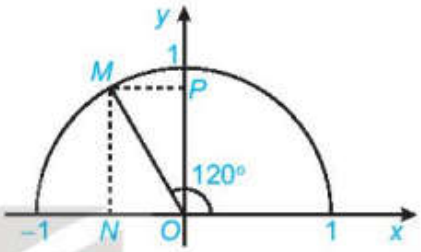


Hình 3.3

Theo định nghĩa, ta có:

$\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\tan 135° = -1$; $\cot 135° = -1$.



Hình 3.4

Luyện tập 1. Tìm các giá trị lượng giác của góc 120° (H.3.4).

Ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để tính (đúng hoặc gần đúng) các giá trị lượng giác của một góc và tính góc khi biết giá trị lượng giác của góc đó.



Chẳng hạn, với một loại máy tính cầm tay, sau khi mở máy ta bấm phím SHIFT MODE (SETUP) rồi bấm phím 3 để chọn đơn vị đo góc là "độ". Sau đó tính giá trị lượng giác của góc hoặc tính góc khi biết giá trị lượng giác của góc đó.

- Tính giá trị lượng giác của một số góc:

Tính	Bấm phím	Kết quả
$\sin 48°50'40"$	sin 4 8 °''' 5 0 °''' 4 0 °''' =	$\sin 48°50'40" \approx 0{,}7529256291$
$\cos 112°12'45"$	cos 1 1 2 °''' 1 2 °''' 4 5 °''' =	$\cos 112°12'45" \approx -0{,}3780427715$
$\tan 15°$	tan 1 5 =	$\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$

- Tìm góc khi biết một giá trị lượng giác của góc đó:

Tìm x, biết	Bấm phím	Kết quả
$\sin x = 0{,}3456$	SHIFT sin ($\sin^{-1}$) 0 • 3 4 5 6 = °'''	$x \approx 20°13'7"$

Chú ý

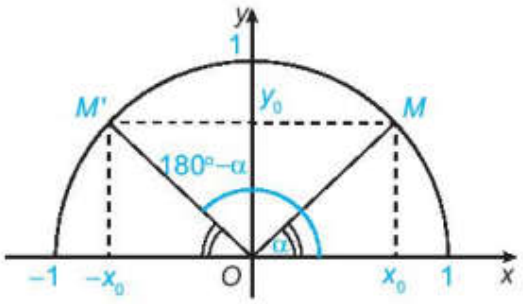
- Khi tìm x biết $\sin x$, máy tính chỉ đưa ra giá trị $x \le 90°$.
- Muốn tìm x khi biết $\cos x$, $\tan x$, ta cũng làm tương tự như trên, chỉ thay phím sin tương ứng bởi phím cos, tan.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

2. MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC BÙ NHAU

Ở lớp 9, em đã biết mối quan hệ giữa tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau. Trong mục này, em hãy tìm mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau.

Đối với một góc α tuỳ ý ($0° \le \alpha \le 180°$), gọi M, M' là hai điểm trên nửa đường tròn đơn vị tương ứng với hai góc bù nhau α và $180° - \alpha$ ($\widehat{xOM} = \alpha$, $\widehat{xOM'} = 180° - \alpha$) (H.3.5).



Hình 3.5

HĐ2. Nêu nhận xét về vị trí của hai điểm M, M' đối với trục Oy. Từ đó, nêu các mối quan hệ giữa $\sin\alpha$ và $\sin(180° - \alpha)$, giữa $\cos\alpha$ và $\cos(180° - \alpha)$.

Đối với hai góc bù nhau, α và $180° - \alpha$, ta có:

- $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$;
- $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$;
- $\tan(180° - \alpha) = -\tan\alpha$ $(\alpha \ne 90°)$;
- $\cot(180° - \alpha) = -\cot\alpha$ $(0° < \alpha < 180°)$.

Ví dụ 2. Tính các giá trị lượng giác của các góc $120°, 135°, 150°$.

Giải

Do các góc $120°, 135°, 150°$ tương ứng bù với các góc $60°, 45°, 30°$ nên từ Bảng 3.1, ta cũng có bảng các giá trị lượng giác sau:

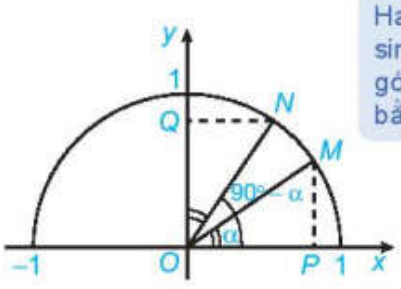
GTLG \ α	$120°$	$135°$	$150°$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\alpha$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cot\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

Bảng 3.2

Hai góc bù nhau có sin bằng nhau; có côsin, tang, côtang đối nhau.



Luyện tập 2. Trong Hình 3.6, hai điểm M, N ứng với hai góc phụ nhau α và $90° - \alpha$ ($\widehat{xOM} = \alpha$, $\widehat{xON} = 90° - \alpha$). Chứng minh rằng $\Delta MOP = \Delta NOQ$. Từ đó nêu mối quan hệ giữa $\cos\alpha$ và $\sin(90° - \alpha)$.

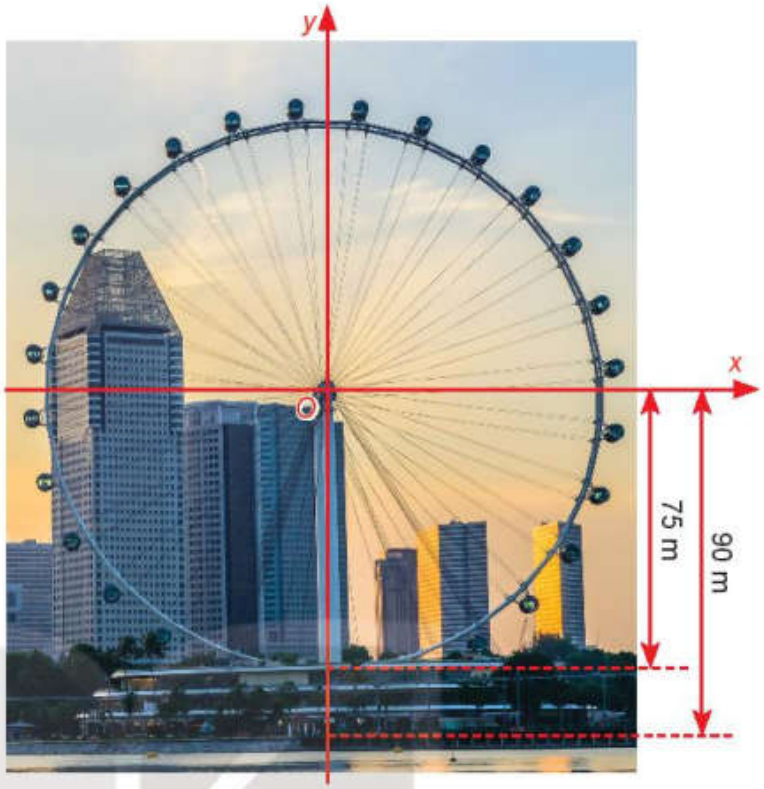


Hình 3.6

Hai góc phụ nhau có sin góc này bằng côsin góc kia, tang góc này bằng côtang góc kia.



Vận dụng. Một chiếc đu quay có bán kính 75 m, tâm của vòng quay ở độ cao 90 m (H.3.7), thời gian thực hiện mỗi vòng quay của đu quay là 30 phút. Nếu một người vào cabin tại vị trí thấp nhất của vòng quay, thì sau 20 phút quay, người đó ở độ cao bao nhiêu mét?



Hình 3.7

Dạng 1 : Xác định giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

1. Phương pháp giải.

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = a^2 \sin 90^0 + b^2 \cos 90^0 + c^2 \cos 180^0$

b) $B = 3 - \sin^2 90^0 + 2\cos^2 60^0 - 3\tan^2 45^0$

c) $C = \sin^2 45^0 - 2\sin^2 50^0 + 3\cos^2 45^0 - 2\sin^2 40^0 + 4\tan 55^0.\tan 35^0$

Lời giải

a) $A = a^2.1 + b^2.0 + c^2.(-1) = a^2 - c^2$

b) $B = 3 - (1)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$

c) $C = \sin^2 45^0 + 3\cos^2 45^0 - 2\left(\sin^2 50^0 + \sin^2 40^0\right) + 4\tan 55^0.\cot 55^0$

$C = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\left(\sin^2 50^0 + \cos^2 40^0\right) + 4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 + 4 = 4$

Ví dụ 2: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A=\sin^2 3^0+\sin^2 15^0+\sin^2 75^0+\sin^2 87^0$

b) $B=\cos 0^0+\cos 20^0+\cos 40^0+...+\cos 160^0+\cos 180^0$

c) $C=\tan 5^0\tan 10^0\tan 15^0...\tan 80^0\tan 85^0$

Lời giải

a) $A=\left(\sin^2 3^0+\sin^2 87^0\right)+\left(\sin^2 15^0+\sin^2 75^0\right)$

$=\left(\sin^2 3^0+\cos^2 3^0\right)+\left(\sin^2 15^0+\cos^2 15^0\right)$

$=1+1=2$

b) $B=\left(\cos 0^0+\cos 180^0\right)+\left(\cos 20^0+\cos 160^0\right)+...+\left(\cos 80^0+\cos 100^0\right)$

$=\left(\cos 0^0-\cos 0^0\right)+\left(\cos 20^0-\cos 20^0\right)+...+\left(\cos 80^0-\cos 80^0\right)$

$=0$

c) $C=\left(\tan 5^0\tan 85^0\right)\left(\tan 15^0\tan 75^0\right)...\left(\tan 45^0\tan 45^0\right)$

$=\left(\tan 5^0\cot 5^0\right)\left(\tan 15^0\cot 5^0\right)...\left(\tan 45^0\cot 5^0\right)$

$=1$

Dạng 2 : Xác định giá trị của một biểu thức lượng giác có điều kiện.

1. Phương pháp giải.

- Dựa vào các hệ thức lượng giác cơ bản
- Dựa vào dấu của giá trị lượng giác
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: a) Cho $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ với $90^0<\alpha<180^0$. Tính $\cos\alpha$ và $\tan\alpha$

b) Cho $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$. Tính $\sin\alpha$ và $\cot\alpha$

c) Cho $\tan\gamma=-2\sqrt{2}$. Tính giá trị lượng giác còn lại.

Lời giải

a) Vì $90^0<\alpha<180^0$ nên $\cos\alpha<0$ mặt khác $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ suy ra

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{1}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Do đó $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

b) Vì $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ nên $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ và $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=-\frac{2}{\sqrt{5}}$

c) Vì $\tan\gamma=-2\sqrt{2}<0\Rightarrow\cos\alpha<0$ mặt khác $\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ nên $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{1}{\tan^2+1}}=-\sqrt{\frac{1}{8+1}}=-\frac{1}{3}$

Ta có $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\sin\alpha=\tan\alpha.\cos\alpha=-2\sqrt{2}.\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\Rightarrow\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Ví dụ 2: a) Cho $\cos\alpha=\frac{3}{4}$ với $0^0<\alpha<90^0$. Tính $A=\frac{\tan\alpha+3\cot\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}$.

b) Cho $\tan\alpha=\sqrt{2}$. Tính $B=\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha+2\sin\alpha}$

Lời giải

a) Ta có $A=\frac{\tan\alpha+3\frac{1}{\tan\alpha}}{\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}}=\frac{\tan^2\alpha+3}{\tan^2\alpha+1}=\frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}+2}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}=1+2\cos^2\alpha$

Suy ra $A=1+2.\frac{9}{16}=\frac{17}{8}$

b) $B=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\cos^3\alpha}}{\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{3\cos^3\alpha}{\cos^3\alpha}+\frac{2\sin\alpha}{\cos^3\alpha}}=\frac{\tan\alpha\left(\tan^2\alpha+1\right)-\left(\tan^2\alpha+1\right)}{\tan^3\alpha+3+2\tan\alpha\left(\tan^2\alpha+1\right)}$

Suy ra $B=\frac{\sqrt{2}\left(2+1\right)-\left(2+1\right)}{2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}\left(2+1\right)}=\frac{3\left(\sqrt{2}-1\right)}{3+8\sqrt{2}}$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hai góc α và β với $\alpha+\beta=90^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $P=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$.

A. $P=0$. **B.** $P=1$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

Lời giải

Chọn B

Hai góc α và β phụ nhau nên $\sin\alpha=\cos\beta;\cos\alpha=\sin\beta$.

Do đó, $P=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

Câu 2: Cho hai góc α và β với $\alpha+\beta=90^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $P=\cos\alpha\cos\beta-\sin\beta\sin\alpha$.

A. $P=0$. **B.** $P=1$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

Lời giải

Chọn A

Hai góc α và β phụ nhau nên $\sin\alpha=\cos\beta;\cos\alpha=\sin\beta$.

Do đó, $P=\cos\alpha\cos\beta-\sin\beta\sin\alpha=\cos\alpha\sin\alpha-\cos\alpha\sin\alpha=0$.

Câu 3: Cho α là góc tù. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\sin\alpha<0$. **B.** $\cos\alpha>0$. **C.** $\tan\alpha<0$. **D.** $\cot\alpha>0$.

Lời giải

Chọn C

Lấy góc $\alpha=120^0$ sau đó thử ngược

Câu 4: Cho hai góc nhọn α và β trong đó $\alpha<\beta$. Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. $\cos\alpha<\cos\beta$. **B.** $\sin\alpha<\sin\beta$.

C. $\cot\alpha>\cot\beta$. **D.** $\tan\alpha+\tan\beta>0$.

Lời giải

Chọn A

Lấy $\alpha=30^0;\beta=60^0$ sau đó thử ngược.

Câu 5: Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\cos 75^\circ>\cos 50^\circ$. **B.** $\sin 80^\circ>\sin 50^\circ$.

C. $\tan 45^\circ<\tan 60^\circ$. **D.** $\cos 30^\circ=\sin 60^\circ$.

Lời giải

Chọn A

Trong khoảng từ 0° đến 90°, khi giá trị của góc tăng thì giá trị cos tương ứng của góc đó giảm.

Câu 6: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin 90^\circ<\sin 100^\circ$. **B.** $\cos 95^\circ>\cos 100^\circ$.

C. $\tan 85^\circ<\tan 125^\circ$. **D.** $\cos 145^\circ>\cos 125^\circ$.

Lời giải

Chọn B

Trong khoảng từ 90° đến 180°, khi giá trị của góc tăng thì:

- Giá trị sin tương ứng của góc đó giảm.
- Giá trị cos tương ứng của góc đó giảm.

Câu 7: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin 90^\circ<\sin 150^\circ$. **B.** $\sin 90^\circ 15'<\sin 90^\circ 30'$.

C. $\cos 90^\circ 30'>\cos 100^\circ$. **D.** $\cos 150^\circ>\cos 120^\circ$.

Lời giải

Chọn C

Trong khoảng từ 90° đến 180°, khi giá trị của góc tăng thì:

- Giá trị sin tương ứng của góc đó giảm.
- Giá trị cos tương ứng của góc đó giảm.

Câu 8: Chọn hệ thức đúng được suy ra từ hệ thức $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$?

A. $\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}.$ **B.** $\cos^2\frac{\alpha}{3}+\sin^2\frac{\alpha}{3}=\frac{1}{3}.$

C. $\cos^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{4}.$ **D.** $5\left(\cos^2\frac{\alpha}{5}+\sin^2\frac{\alpha}{5}\right)=5.$

Lời giải

Chọn D

Từ biểu thức $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ ta suy ra $\cos^2\frac{\alpha}{5}+\sin^2\frac{\alpha}{5}=1$.

Do đó ta có $5\left(\cos^2\frac{\alpha}{5}+\sin^2\frac{\alpha}{5}\right)=5$.

Câu 9: Cho biết $\sin\frac{\alpha}{3}=\frac{3}{5}$. Giá trị của $P=3\sin^2\frac{\alpha}{3}+5\cos^2\frac{\alpha}{3}$ bằng bao nhiêu?

A. $P=\frac{105}{25}.$ **B.** $P=\frac{107}{25}.$ **C.** $P=\frac{109}{25}.$ **D.** $P=\frac{111}{25}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có biểu thức $\sin^2\frac{\alpha}{3}+\cos^2\frac{\alpha}{3}=1\Leftrightarrow\cos^2\frac{\alpha}{3}=1-\sin^2\frac{\alpha}{3}=\frac{16}{25}.$

Do đó ta có $P=3\sin^2\frac{\alpha}{3}+5\cos^2\frac{\alpha}{3}=3.\left(\frac{3}{5}\right)^2+5.\frac{16}{25}=\frac{107}{25}.$

Câu 10: Cho biết $\tan\alpha=-3$. Giá trị của $P=\frac{6\sin\alpha-7\cos\alpha}{6\cos\alpha+7\sin\alpha}$ bằng bao nhiêu?

A. $P=\frac{4}{3}.$ **B.** $P=\frac{5}{3}.$ **C.** $P=-\frac{4}{3}.$ **D.** $P=-\frac{5}{3}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $P=\frac{6\sin\alpha-7\cos\alpha}{6\cos\alpha+7\sin\alpha}=\frac{6\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-7}{6+7\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{6\tan\alpha-7}{6+7\tan\alpha}=\frac{5}{3}.$

Câu 11: Cho biết $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$. Giá trị của $P=\frac{\cot\alpha+3\tan\alpha}{2\cot\alpha+\tan\alpha}$ bằng bao nhiêu?

A. $P=-\frac{19}{13}.$ **B.** $P=\frac{19}{13}.$ **C.** $P=\frac{25}{13}.$ **D.** $P=-\frac{25}{13}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có biểu thức $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\frac{5}{9}.$

Ta có $P=\dfrac{\cot\alpha+3\tan\alpha}{2\cot\alpha+\tan\alpha}=\dfrac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+3\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{2\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\dfrac{\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\dfrac{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2+3.\dfrac{5}{9}}{2.\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{5}{9}}=\dfrac{19}{13}.$

Câu 12: Cho biết $\cot\alpha=5$. Giá trị của $P=2\cos^2\alpha+5\sin\alpha\cos\alpha+1$ bằng bao nhiêu?

A. $P=\dfrac{10}{26}.$ **B.** $P=\dfrac{100}{26}.$ **C.** $P=\dfrac{50}{26}.$ **D.** $P=\dfrac{101}{26}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $P=2\cos^2\alpha+5\sin\alpha\cos\alpha+1=\sin^2\alpha\left(2\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+5\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\right)$

$=\dfrac{1}{1+\cot^2\alpha}\left(2\cot^2\alpha+5\cot\alpha+1+\cot^2\alpha\right)=\dfrac{3\cot^2\alpha+5\cot\alpha+1}{\cot^2\alpha+1}=\dfrac{101}{26}.$

Câu 13: Cho biết $3\cos\alpha-\sin\alpha=1$, $0^0<\alpha<90^0$. Giá trị của $\tan\alpha$ bằng

A. $\tan\alpha=\dfrac{4}{3}.$ **B.** $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}.$ **C.** $\tan\alpha=\dfrac{4}{5}.$ **D.** $\tan\alpha=\dfrac{5}{4}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $3\cos\alpha-\sin\alpha=1\Leftrightarrow 3\cos\alpha=\sin\alpha+1\to 9\cos^2\alpha=(\sin\alpha+1)^2$

$\Leftrightarrow 9\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+2\sin\alpha+1\Leftrightarrow 9\left(1-\sin^2\alpha\right)=\sin^2\alpha+2\sin\alpha+1$

$\Leftrightarrow 10\sin^2\alpha+2\sin\alpha-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=-1\\ \sin\alpha=\dfrac{4}{5}\end{array}\right.$.

- $\sin\alpha=-1$: không thỏa mãn vì $0^0<\alpha<90^0$.
- $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{3}{5}\longrightarrow\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{4}{3}.$

Câu 14: Cho biết $2\cos\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha=2$, $0^0<\alpha<90^0$. Tính giá trị của $\cot\alpha$.

A. $\cot\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{4}.$ **B.** $\cot\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{4}.$ **C.** $\cot\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{4}.$ **D.** $\cot\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $2\cos\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha=2\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\alpha=2-2\cos\alpha\to 2\sin^2\alpha=(2-2\cos\alpha)^2$

$\Leftrightarrow 2\sin^2\alpha=4-8\cos\alpha+4\cos^2\alpha\Leftrightarrow 2\left(1-\cos^2\alpha\right)=4-8\cos\alpha+4\cos^2\alpha$

$\Leftrightarrow 6\cos^2\alpha-8\cos\alpha+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=1\\ \cos\alpha=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$.

- $\cos\alpha=1$: không thỏa mãn vì $0^0<\alpha<90^0$.
- $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\longrightarrow\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}.$

Câu 15: Cho biết $\sin\alpha+\cos\alpha=a$. Tính giá trị của $\sin\alpha\cos\alpha$.

A. $\sin\alpha\cos\alpha = a^2$. **B.** $\sin\alpha\cos\alpha = 2a$.

C. $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{a^2-1}{2}$. **D.** $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{a^2-11}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\sin\alpha+\cos\alpha = a \to (\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = a^2$

$\Leftrightarrow 1+2\sin\alpha\cos\alpha = a^2 \Leftrightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \frac{a^2-1}{2}$.

Câu 16: Cho biết $\cos\alpha+\sin\alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị của $P = \sqrt{\tan^2\alpha+\cot^2\alpha}$ bằng bao nhiêu?

A. $P = \frac{5}{4}$. **B.** $P = \frac{7}{4}$. **C.** $P = \frac{9}{4}$. **D.** $P = \frac{11}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos\alpha+\sin\alpha = \frac{1}{3} \to (\cos\alpha+\sin\alpha)^2 = \frac{1}{9}$

$\Leftrightarrow 1+2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \sin\alpha\cos\alpha = -\frac{4}{9}$.

Ta có $P = \sqrt{\tan^2\alpha+\cot^2\alpha} = \sqrt{(\tan\alpha+\cot\alpha)^2-2\tan\alpha\cot\alpha} = \sqrt{\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2-2}$

$= \sqrt{\left(\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2-2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2-2} = \sqrt{\left(-\frac{9}{4}\right)^2-2} = \frac{7}{4}$.

Câu 17: Cho biết $\sin\alpha-\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Giá trị của $P = \sqrt{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}$ bằng bao nhiêu?

A. $P = \frac{\sqrt{15}}{5}$. **B.** $P = \frac{\sqrt{17}}{5}$. **C.** $P = \frac{\sqrt{19}}{5}$. **D.** $P = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sin\alpha-\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \to (\sin\alpha-\cos\alpha)^2 = \frac{1}{5}$

$\Leftrightarrow 1-2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \frac{2}{5}$.

Ta có $P = \sqrt{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha} = \sqrt{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$

$= \sqrt{1-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2} = \frac{\sqrt{17}}{5}$.

Bài 6 HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

THUẬT NGỮ
- Định lí côsin
- Định lí sin
- Công thức tính diện tích
- Giải tam giác

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Hiểu Định lí côsin, Định lí sin, công thức tính diện tích tam giác.
- Giải tam giác và giải quyết một số bài toán trong đo đạc.

Ngắm Tháp Rùa từ bờ, chỉ với những dụng cụ đơn giản, dễ chuẩn bị, ta cũng có thể xác định được khoảng cách từ vị trí ta đứng tới Tháp Rùa. Em có biết vì sao?



Tháp Rùa nằm trong lòng hồ Hoàn Kiếm ở Thủ đô Hà Nội

1. ĐỊNH LÍ CÔSIN

HĐ1. Một tàu biển xuất phát từ cảng Vân Phong (Khánh Hoà) theo hướng đông với vận tốc 20 km/h. Sau khi đi được 1 giờ, tàu chuyển sang hướng đông nam rồi giữ nguyên vận tốc và đi tiếp.

a) Hãy vẽ sơ đồ đường đi của tàu trong 1,5 giờ kể từ khi xuất phát (1 km trên thực tế ứng với 1 cm trên bản vẽ).

b) Hãy đo trực tiếp trên bản vẽ và cho biết sau 1,5 giờ kể từ khi xuất phát, tàu cách cảng Vân Phong bao nhiêu kilômét (số đo gần đúng).

c) Nếu sau khi đi được 2 giờ, tàu chuyển sang hướng nam (thay vì hướng đông nam) thì có thể dùng Định lí Pythagore (Pi-ta-go) để tính chính xác các số đo trong câu b hay không?



Đối với tam giác ABC, ta thường kí hiệu A, B, C là các góc của tam giác tại đỉnh tương ứng; a, b, c tương ứng là độ dài của các cạnh đối diện với đỉnh A, B, C; p là nửa chu vi; S là diện tích; R, r tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác.

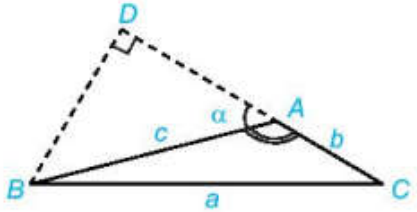
HĐ2. Trong Hình 3.8, hãy thực hiện các bước sau để thiết lập công thức tính a theo b, c và giá trị lượng giác của góc A.

a) Tính a^2 theo BD^2 và CD^2.

b) Tính a^2 theo b, c và DA.

c) Tính DA theo c và $\cos A$.

d) Chứng minh $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.



Hình 3.8

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Chú ý. Người ta chứng minh được kết quả trong HĐ2d đối với cả các trường hợp góc A là góc vuông hoặc nhọn.

Định lí côsin. Trong tam giác ABC:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

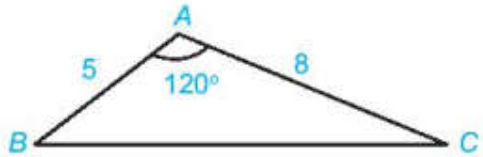
Định lí Pythagore có phải là một trường hợp đặc biệt của Định lí côsin hay không?

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120°$ và $AB = 5$, $AC = 8$. Tính độ dài cạnh BC.

Giải (H.3.9)

Áp dụng Định lí côsin cho tam giác ABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 120°$$
$$= 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 129. \text{ Vậy } BC = \sqrt{129}.$$



Hình 3.9

Khám phá. Từ Định lí côsin, hãy viết các công thức tính cos A, cos B, cos C theo độ dài các cạnh a, b, c của tam giác ABC.

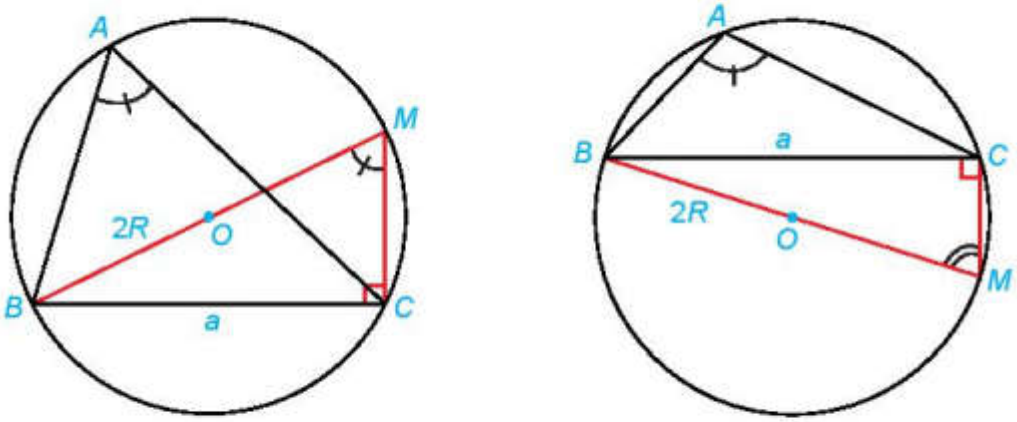
Luyện tập 1. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$ và $\widehat{A} = 45°$. Tính độ dài các cạnh và độ lớn các góc còn lại của tam giác.

Trải nghiệm. Vẽ một tam giác ABC, sau đó đo độ dài các cạnh, số đo góc A và kiểm tra tính đúng đắn của Định lí côsin tại đỉnh A đối với tam giác đó.

Vận dụng 1. Dùng Định lí côsin, tính khoảng cách được đề cập trong HĐ1b.

2. ĐỊNH LÍ SIN

HĐ3. Trong mỗi hình dưới đây, hãy tính R theo a và $\sin A$.

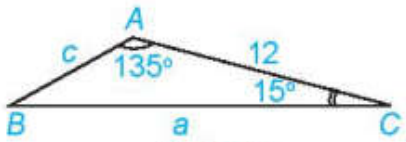


a) b)

Hình 3.10

Định lí sin. Trong tam giác ABC: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R.$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=135^\circ$, $\widehat{C}=15^\circ$ và $b=12$. Tính a, c, R và số đo góc B.



Hình 3.11

Giải (H.3.11)

Ta có: $\widehat{B}=180^\circ-(\widehat{A}+\widehat{C})=180^\circ-(135^\circ+15^\circ)=30^\circ$.

Áp dụng Định lí sin, ta có: $\dfrac{a}{\sin 135^\circ}=\dfrac{12}{\sin 30^\circ}=\dfrac{c}{\sin 15^\circ}=2R$.

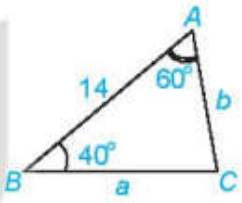
Suy ra $a=\dfrac{12}{\sin 30^\circ}\cdot\sin 135^\circ=12\sqrt{2}$; $c=\dfrac{12}{\sin 30^\circ}\cdot\sin 15^\circ=24\sin 15^\circ\ (\approx 6{,}21)$; $R=\dfrac{12}{2\sin 30^\circ}=12$.

Luyện tập 2. Cho tam giác ABC có $b=8$, $c=5$ và $\widehat{B}=80^\circ$. Tính số đo các góc, bán kính đường tròn ngoại tiếp và độ dài cạnh còn lại của tam giác.

3. GIẢI TAM GIÁC VÀ ỨNG DỤNG THỰC TẾ

Việc tính độ dài các cạnh và số đo các góc của một tam giác khi biết một số yếu tố của tam giác đó được gọi là giải tam giác.

Ví dụ 3. Giải tam giác ABC, biết $c=14, \widehat{A}=60^\circ, \widehat{B}=40^\circ$.



Giải

Ta có $\widehat{C}=180^\circ-(\widehat{A}+\widehat{B})=80^\circ$.

Áp dụng Định lí sin ta có: $\dfrac{a}{\sin 60^\circ}=\dfrac{b}{\sin 40^\circ}=\dfrac{14}{\sin 80^\circ}$

Suy ra $a=\dfrac{14\sin 60^\circ}{\sin 80^\circ}\approx 12{,}31$; $b=\dfrac{14\sin 40^\circ}{\sin 80^\circ}\approx 9{,}14$.

Luyện tập 3. Giải tam giác ABC, biết $b=32, c=45, \widehat{A}=87^\circ$.

Chú ý. Áp dụng các Định lí côsin, sin và sử dụng máy tính cầm tay, ta có thể tính (gần đúng) các cạnh và các góc của một tam giác trong các trường hợp sau:

- Biết hai cạnh và góc xen giữa;
- Biết ba cạnh;
- Biết một cạnh và hai góc kề.

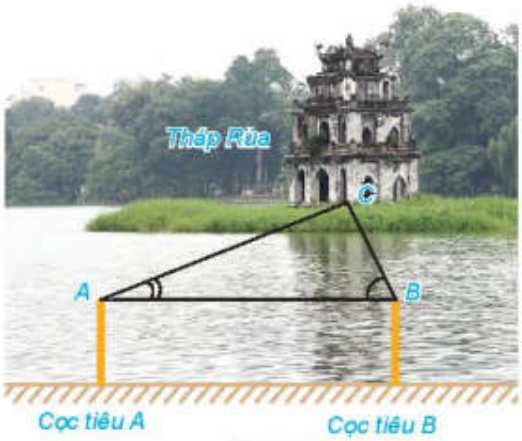
Ví dụ 4. Trở lại *tình huống mở đầu*, theo các bước sau, ta có thể tiến hành đo khoảng cách từ vị trí A trên bờ hồ Hoàn Kiếm đến Tháp Rùa (H.3.12):

Bước 1. Trên bờ, đặt một cọc tiêu tại vị trí A và một cọc tiêu tại vị trí B nào đó. Đo khoảng cách AB.

Bước 2. Đứng tại A, ngắm Tháp Rùa và cọc tiêu B để đo góc tạo bởi hai hướng ngắm đó.

Bước 3. Đứng tại B, ngắm cọc tiêu A và Tháp Rùa để đo góc tạo bởi hai hướng ngắm đó.

Bước 4. Gọi C là vị trí của Tháp Rùa. Áp dụng Định lí sin cho tam giác ABC để tính độ dài cạnh AC.



Hình 3.12

Vận dụng 2. Từ một khu vực có thể quan sát được hai đỉnh núi, ta có thể ngắm và đo để xác định khoảng cách giữa hai đỉnh núi đó. Hãy thảo luận để đưa ra các bước cho một cách đo.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

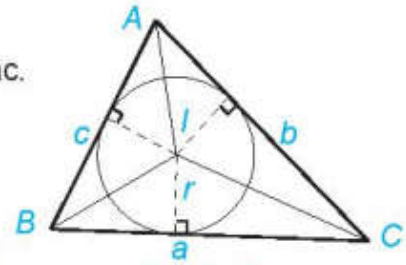
4. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH TAM GIÁC

Ta đã biết tính diện tích một tam giác theo chiều cao và độ dài cạnh đáy tương ứng. Liệu còn công thức nào khác để tính diện tích tam giác hay không?

HĐ4. Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

a) Nêu mối liên hệ giữa diện tích tam giác ABC và diện tích các tam giác IBC, ICA, IAB.

b) Tính diện tích tam giác ABC theo r, a, b, c.



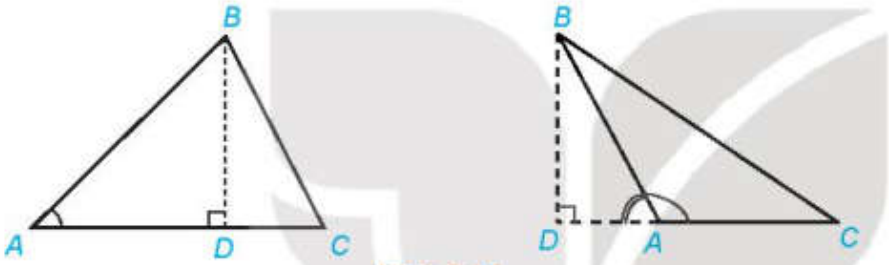
Hình 3.13

Công thức tính diện tích tam giác ABC: $S = pr = \dfrac{(a+b+c)r}{2}$.

HĐ5. Cho tam giác ABC với đường cao BD.

a) Biểu thị BD theo AB và $\sin A$.

b) Viết công thức tính diện tích S của tam giác ABC theo b, c, $\sin A$.



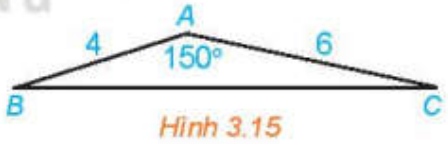
Hình 3.14

Công thức tính diện tích tam giác ABC: $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ca\sin B = \dfrac{1}{2}ab\sin C$.

Ví dụ 5. Tính diện tích S của tam giác ABC có $c = 4$, $b = 6$, $\hat{A} = 150°$.

Giải (H.3.15)

Ta có: $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot \sin 150° = 6$.



Hình 3.15

Luyện tập 4. Tính diện tích của tam giác ABC có $b = 2$, $\hat{B} = 30°$, $\hat{C} = 45°$.

Chú ý. Do $\sin A = \dfrac{a}{2R}$ nên từ công thức $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$, ta có:

Công thức tính diện tích tam giác ABC: $S = \dfrac{abc}{4R}$.

Thảo luận. Ta đã biết tính $\cos A$ theo độ dài các cạnh của tam giác ABC. Liệu $\sin A$ và diện tích S có tính được theo độ dài các cạnh của tam giác ABC hay không?

Công thức Heron. Trong tam giác ABC: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC có $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$.

a) Tính $\sin A$.

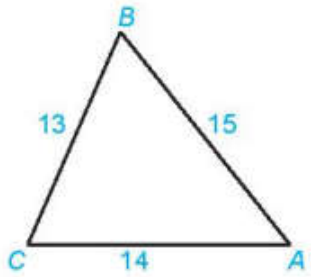
b) Tính diện tích S bằng hai cách khác nhau.

Giải (H.3.16)

a) Áp dụng Định lí côsin, ta có:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{14^2 + 15^2 - 13^2}{420} = 0{,}6.$$

Do đó $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = 0{,}8$.



Hình 3.16

b) Ta có $S = \frac{1}{2}bc\sin A = 84$.

Áp dụng Công thức Heron, ta cũng có thể tính S theo cách thứ hai sau:

Tam giác ABC có nửa chu vi là: $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21$.

Khi đó

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21\cdot(21-13)\cdot(21-14)\cdot(21-15)} = \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = 84.$$

Vận dụng 3. Công viên Hoà Bình (Hà Nội) có dạng hình ngũ giác $ABCDE$ như Hình 3.17. Dùng chế độ tính khoảng cách giữa hai điểm của Google Maps, một người xác định được các khoảng cách như trong hình vẽ. Theo số liệu đó, em hãy tính diện tích của công viên Hoà Bình.



Hình 3.17

BÀI TẬP

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Dạng 1: Giải tam giác.

1. Phương pháp.

- Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên một số điều kiện cho trước.
- Trong các bài toán giải tam giác người ta thường cho tam giác với ba yếu tố như sau : biết một cạnh và hai

góc kề cạnh đó; biết một góc và hai cạnh kề góc đó; biết ba cạnh.

Để tìm các yếu tố còn lại ta sử dụng định lí côsin và định lí sin ; định lí tổng ba góc trong một tam giác bằng 180^0 và trong một tam giác đối diện với góc lớn hơn thì có cạnh lớn hơn và ngược lại đối diện với cạnh lớn hơn thì có góc lớn hơn.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Giải tam giác ABC biết $b = 32$; $c = 45$ và $\widehat{A} = 87^0$.

Lời giải

Theo định lí côsin ta có

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = 32^2 + 4^2 - 2.32.4.\sin 87^0$

Suy ra $a \approx 53{,}8$

Theo định lí sin ta có

$\sin B = \dfrac{b\sin A}{a} = \dfrac{32\sin 87^0}{53,8} \Rightarrow \widehat{B} \approx 36^0$

Suy ra $\widehat{C} = 180^0 - \widehat{A} - \widehat{B} \approx 180^0 - 87^0 - 36^0 = 57^0$

Ví dụ 2: Giải tam giác ABC biết $\widehat{A} = 60^0$, $\widehat{B} = 40^0$ và $c = 14$.

Lời giải

Ta có $\widehat{C} = 180^0 - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^0 - 60^0 - 40^0 = 80^0$

Theo định lí sin ta có

$a = \dfrac{c\sin A}{\sin C} = \dfrac{14.\sin 60^0}{\sin 80^0} \Rightarrow a \approx 12,3$

$b = \dfrac{c\sin B}{\sin C} = \dfrac{14.\sin 40^0}{\sin 80^0} \Rightarrow b \approx 9,1$

Dạng 2: Xác định các yếu tố trong tam giác.

1. Phương pháp

- Sử dụng định lí côsin và định lí sin
- Sử dụng công thức xác định độ dài đường trung tuyến và mối liên hệ của các yếu tố trong các công thức tính diện tích trong tam giác.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 5$ và $\cos A = \dfrac{3}{5}$.

Tính cạnh BC, và độ dài đường cao kẻ từ A.

Lời giải

Áp dụng định lí côsin ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 4^2 + 5^2 - 2.4.5.\dfrac{3}{5} = 29$

Suy ra $BC = \sqrt{29}$

Vì $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ nên $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \dfrac{9}{25}} = \dfrac{4}{5}$

Theo công thức tính diện tích ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin A = \dfrac{1}{2}.4.5.\dfrac{4}{5} = 8$ (1)

Mặt khác $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}a.h_a = \dfrac{1}{2}.\sqrt{29}.h_a$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{1}{2}.\sqrt{29}.h_a = 8 \Rightarrow h_a = \dfrac{16\sqrt{29}}{29}$

Vậy độ dài đường cao kẻ từ A là $h_a = \dfrac{16\sqrt{29}}{29}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính bằng 3, biết $\widehat{A} = 30^0$, $\widehat{B} = 45^0$. Tính độ dài trung tuyến kẻ từ A và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Lời giải

Ta có $\widehat{C} = 180^0 - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^0 - 30^0 - 45^0 = 105^0$

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Theo định lí sin ta có $a = 2R\sin A = 2.3.\sin 30^0 = 3$, $b = 2R\sin B = 2.3.\sin 45^0 = 6.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

$c = 2R\sin C = 2.3.\sin 105^0 \approx 5,796$

Theo công thức đường trung tuyến ta có $m_a^2 = \dfrac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4} \approx \dfrac{2\left(18 + 5,796^2\right) - 9}{4} = 23,547$

Theo công thức tính diện tích tam giác ta có

$S_{ABC} = pr = \dfrac{1}{2}bc\sin A \Rightarrow r = \dfrac{bc\sin A}{2p} \approx \dfrac{3\sqrt{2}.5,796\sin 30^0}{3 + 3\sqrt{2} + 5,796} \approx 0,943$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC biết $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Tính góc lớn nhất của tam giác.

Lời giải

Theo giải thiết ta có $c < b < a$ suy ra $\widehat{C} < \widehat{B} < \widehat{A}$ do đó góc A là lớn nhất.
Theo định lí côsin ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8 + \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2 - 12^2}{2.2\sqrt{2}.\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)} = \frac{4 - 4\sqrt{3}}{8\sqrt{3} - 8} = -\frac{1}{2}$$

Suy ra $\widehat{A} = 120^0$
Vậy góc lớn nhất là góc A có số đo là 120^0.

Dạng 3: Chứng Minh Đẳng Thức, Bất Đẳng Thức Liên Quan Đến Các Yếu Tố Của Tam Giác, Tứ Giác.

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh đẳng thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản để biến đổi vế này thành vế kia, hai vế cùng bằng một vế hoặc biến đổi tương đương về một đẳng thức đúng.
- Để chứng minh bất đẳng thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản, bất đẳng thức cạnh trong tam giác và bất đẳng thức cổ điển (Cauchy, bunhiacôpxki,…)

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin^2 A = \sin B.\sin C$. Chứng minh rằng

a) $a^2 = bc$

b) $\cos A \ge \dfrac{1}{2}$

Lời giải

a) Áp dụng định lí sin ta có $\sin A = \dfrac{a}{2R}$, $\sin B = \dfrac{b}{2R}$, $\sin C = \dfrac{c}{2R}$

Suy ra $\sin^2 A = \sin B.\sin C \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{2R}\right)^2 = \dfrac{b}{2R}.\dfrac{c}{2R} \Leftrightarrow a^2 = bc$ đpcm

b) Áp dụng định lí côsin và câu a) ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - bc}{2bc} \ge \frac{2bc - bc}{2bc} = \frac{1}{2}$$ đpcm

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC, chứng minh rằng: $\cot A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$

Lời giải:

Áp dụng định lí côsin và công thức $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$ ta có:

$\cot A = \dfrac{\cos A}{\sin A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc\sin A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{4S}$ đpcm

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau là $b^2+c^2=5a^2$.

Lời giải:

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.
Khi đó hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau khi và chỉ khi tam giác GBC vuông tại G

$\Leftrightarrow GB^2+GC^2=BC^2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}m_b\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}m_c\right)^2=a^2$ (*)

Mặt khác theo công thức đường trung tuyến ta có

$m_b^2=\dfrac{2(a^2+c^2)-b^2}{4},\ m_c^2=\dfrac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$

Suy ra $(*)\Leftrightarrow \dfrac{4}{9}\left(m_b^2+m_c^2\right)=a^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{9}\left[\dfrac{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}{4}+\dfrac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4}\right]=a^2 \Leftrightarrow 4a^2+b^2+c^2=9a^2 \Leftrightarrow b^2+c^2=5a^2$ (đpcm)

Dạng 4: Nhận Dạng Tam Giác

1. Phương pháp giải.

Sử dụng định lí côsin; sin; công thức đường trung tuyến; công thức tính diện tích tam giác để biến đổi giả thiết về hệ thức liên hệ cạnh(hoặc góc) từ đó suy ra dạng của tam giác.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC thoả mãn $\sin C=2\sin B\cos A$. Chứng minh minh rằng tam giác ABC cân .

Lời giải

Áp dụng định lí côsin và sin ta có:

$\sin C=2\sin B\cos A \Leftrightarrow \dfrac{c}{2R}=2.\dfrac{b}{2R}.\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$c^2=b^2+c^2-a^2 \Leftrightarrow a=b$

Suy ra tam giác ABC cân tại đỉnh C.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC thoả mãn $\sin A=\dfrac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Lời giải

Ta có: $\sin A=\dfrac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C} \Leftrightarrow \sin A(\cos B+\cos C)=\sin B+\sin C$

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{2R}\left(\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)=\dfrac{b+c}{2R}$

$\Leftrightarrow b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)=2b^2c+2c^2b$

$\Leftrightarrow b^3+c^3+b^2c+bc^2-a^2b-a^2c=0 \Leftrightarrow (b+c)(b^2+c^2)-a^2(b+c)=0\ b^2+c^2=a^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Ví dụ 3: Nhận dạng tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $a.\sin A+b\sin B+c\sin C=h_a+h_b+h_c$

b) $\dfrac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\dfrac{1}{2}(\cot^2 A+\cot^2 B)$

Lời giải

a) Áp dụng công thức diện tích ta có $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ah_a$ suy ra

$a.\sin A+b\sin B+c\sin C=h_a+h_b+h_c \Leftrightarrow a.\dfrac{2S}{bc}+b.\dfrac{2S}{ca}+c.\dfrac{2S}{ab}=\dfrac{2S}{a}+\dfrac{2S}{b}+\dfrac{2S}{c}$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\Leftrightarrow a=b=c$

Vậy tam giác ABC đều

b) Ta có: $\dfrac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\dfrac{1}{2}(\cot^2 A+\cot^2 B)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos^2 A+\cos^2 B+\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\dfrac{1}{2}(\cot^2 A+1+\cot^2 B+1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{\sin^2 A}+\dfrac{1}{\sin^2 B}) \Leftrightarrow (\sin^2 A+\sin^2 B)^2=4\sin^2 A\sin^2 B$

$\Leftrightarrow \sin^2 A=\sin^2 B \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{2R}\right)^2=\left(\dfrac{b}{2R}\right)^2 \Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại C.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tam giác ABC có $AB=5, BC=7, CA=8$. Số đo góc $\hat{A}$ bằng:

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn C

Theo định lí hàm cosin, ta có $\cos\widehat{A}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB.AC}=\dfrac{5^2+8^2-7^2}{2.5.8}=\dfrac{1}{2}$.

Do đó, $\widehat{A}=60°$.

Câu 2: Tam giác ABC có $AB=2, AC=1$ và $\hat{A}=60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC.

A. $BC=1$. **B.** $BC=2$. **C.** $BC=\sqrt{2}$. **D.** $BC=\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Theo định lí hàm cosin, ta có

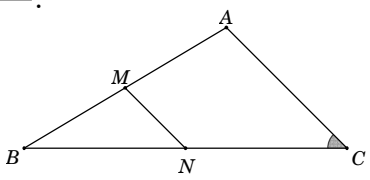
$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos\widehat{A}=2^2+1^2-2.2.1.\cos 60°=3\Rightarrow BC=\sqrt{3}$.

Câu 3: Tam giác ABC có đoạn thẳng nối trung điểm của AB và BC bằng 3, cạnh $AB=9$ và $\widehat{ACB}=60^\circ$. Tính độ dài cạnh cạnh BC.

A. $BC=3+3\sqrt{6}$. **B.** $BC=3\sqrt{6}-3$.

C. $BC=3\sqrt{7}$. **D.** $BC=\dfrac{3+3\sqrt{33}}{2}$.

Lời giải



Chọn A

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC.

$\longrightarrow MN$ là đường trung bình của ΔABC.

$\longrightarrow MN = \frac{1}{2}AC$. Mà $MN = 3$, suy ra $AC = 6$.

Theo định lí hàm cosin, ta có

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2.AC.BC.\cos\widehat{ACB}$

$\Leftrightarrow 9^2 = 6^2 + BC^2 - 2.6.BC.\cos 60^\circ$

$\Rightarrow BC = 3 + 3\sqrt{6}$

Câu 4: Tam giác ABC có $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$ và $AB = 5$. Tính độ dài cạnh AC.

A. $AC = \frac{5\sqrt{6}}{2}$. **B.** $AC = 5\sqrt{3}$. **C.** $AC = 5\sqrt{2}$. **D.** $AC = 10$.

Lời giải

Chọn A

Theo định lí hàm sin, ta có $\frac{AB}{\sin\hat{C}} = \frac{AC}{\sin\hat{B}} \Leftrightarrow \frac{5}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AC = \frac{5\sqrt{6}}{2}$.

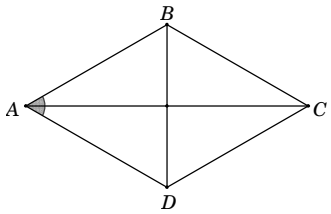
Câu 5: Cho hình thoi ABCD cạnh bằng $1\,cm$ và có $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh AC.

A. $AC = \sqrt{3}$. **B.** $AC = \sqrt{2}$. **C.** $AC = 2\sqrt{3}$. **D.** $AC = 2$.

Lời giải

Chọn A

Do $ABCD$ là hình thoi, có $\widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 120^\circ$.



Theo định lí hàm cosin, ta có

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos\widehat{ABC}$

$= 1^2 + 1^2 - 2.1.1.\cos 120^\circ = 3 \Rightarrow AC = \sqrt{3}$

Câu 6: Tam giác ABC có $AB = 4, BC = 6, AC = 2\sqrt{7}$. Điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Tính độ dài cạnh AM.

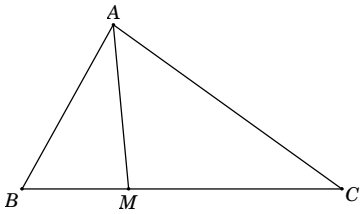
A. $AM = 4\sqrt{2}$. **B.** $AM = 3$. **C.** $AM = 2\sqrt{3}$. **D.** $AM = 3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Theo định lí hàm cosin, ta có : $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2.AB.BC} = \frac{4^2 + 6^2 - \left(2\sqrt{7}\right)^2}{2.4.6} = \frac{1}{2}$.

Do $MC = 2MB \longrightarrow BM = \frac{1}{3}BC = 2$.



Theo định lí hàm cosin, ta có

$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2.AB.BM.\cos\hat{B}$

$= 4^2 + 2^2 - 2.4.2.\frac{1}{2} = 12 \Rightarrow AM = 2\sqrt{3}$

Câu 7: Tam giác ABC có $AB = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$, $BC = \sqrt{3}, CA = \sqrt{2}$. Gọi D là chân đường phân giác trong góc $\hat{A}$. Khi đó góc $\widehat{ADB}$ bằng bao nhiêu độ?

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 75°. **D.** 90°.

Lời giải

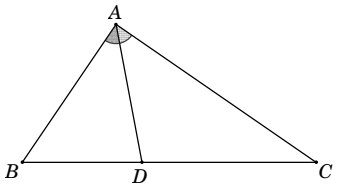
Chọn C

Theo định lí hàm cosin, ta có:

$\cos\widehat{BAC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2.AB.AC}=-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \widehat{BAC}=120^\circ \Rightarrow \widehat{BAD}=60^\circ$

$\cos\widehat{ABC}=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2.AB.BC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \widehat{ABC}=45^\circ$



Trong ΔABD có $\widehat{BAD}=60^\circ, \widehat{ABD}=45^\circ \Rightarrow \widehat{ADB}=75^\circ$.

Câu 8: Tam giác AB vuông tại A, đường cao $AH=32\,cm$. Hai cạnh AB và AC tỉ lệ với 3 và 4. Cạnh nhỏ nhất của tam giác này có độ dài bằng bao nhiêu?

A. 38 *cm*. **B.** 40 *cm*. **C.** 42 *cm*. **D.** 45 *cm*.

Lời giải

Chọn B

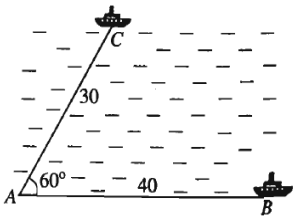
Do tam giác ABC vuông tại A, có tỉ lệ 2 cạnh góc vuông $AB:AC$ là $3:4$ nên AB là cạnh nhỏ nhất trong tam giác.

Ta có $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow AC=\dfrac{4}{3}AB$.

Trong ΔABC có AH là đường cao

$\Rightarrow \dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{\left(\frac{4}{3}AB^2\right)}\Leftrightarrow \dfrac{1}{32^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{9}{16AB^2}\Rightarrow AB=40$.

Câu 9: Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60^0. Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí? Kết quả gần nhất với số nào sau đây?



A. 61 hải lí. **B.** 36 hải lí.

C. 21 hải lí. **D.** 18 hải lí.

Lời giải

Chọn B

Sau 2 giờ tàu B đi được 40 hải lí, tàu C đi được 30 hải lí. Vậy tam giác ABC có $AB=40,\ AC=30$ và $\widehat{A}=60^0$.

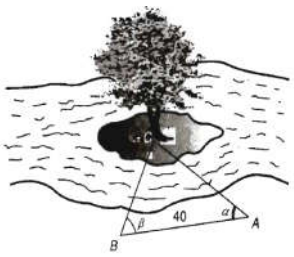
Áp dụng định lí côsin vào tam giác ABC, ta có

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=30^2+40^2-2.30.40.\cos 60^0=900+1600-1200=1300.$$

Vậy $BC=\sqrt{1300}\approx 36$ (hải lí).

Sau 2 giờ, hai tàu cách nhau khoảng 36 hải lí.

Câu 10: Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C. Ta đo được khoảng cách $AB = 40\text{m}$, $\widehat{CAB} = 45^0$ và $\widehat{CBA} = 70^0$. Vậy sau khi đo đạc và tính toán được khoảng cách AC gần nhất với giá trị nào sau đây?



A. 53 m.

B. 30 m.

C. 41,5 m.

D. 41 m.

Lời giải

Chọn C

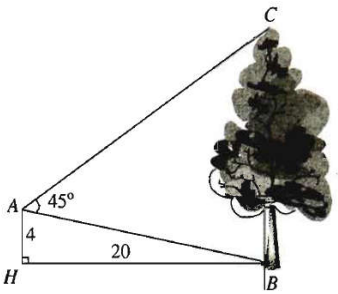
Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC, ta có $\dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C}$

Vì $\sin C = \sin(\alpha+\beta)$ nên $AC = \dfrac{AB.\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \dfrac{40.\sin 70^0}{\sin 115^0} \approx 41,47$ m.

Câu 11: Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (hình vẽ).

Biết $AH = 4\text{m}$, $HB = 20\text{m}$, $\widehat{BAC} = 45^0$.

Chiều cao của cây gần nhất với giá trị nào sau đây?



A. 17,5m. **B.** 17m.

C. 16,5m. **D.** 16m.

Lời giải

Chọn B

Trong tam giác AHB, ta có $\tan\widehat{ABH} = \dfrac{AH}{BH} = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5} \longrightarrow \widehat{ABH} \approx 11^0 19'$.

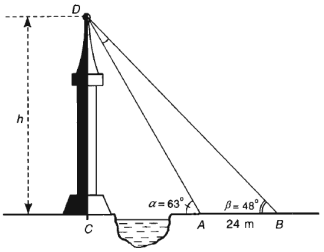
Suy ra $\widehat{ABC} = 90^0 - \widehat{ABH} = 78^0 41'$.

Suy ra $\widehat{ACB} = 180^0 - \left(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}\right) = 56^0 19'$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC, ta được

$$\frac{AB}{\sin\widehat{ACB}} = \frac{CB}{\sin\widehat{BAC}} \longrightarrow CB = \frac{AB.\sin\widehat{BAC}}{\sin\widehat{ACB}} \approx 17\text{m}.$$

Câu 12: Giả sử $CD=h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B và C thẳng hàng. Ta đo được $AB=24$ m, $\widehat{CAD}=63^0$, $\widehat{CBD}=48^0$.



Chiều cao h của tháp gần với giá trị nào sau đây?

A. 18m. **B.** 18,5m.

C. 60m. **D.** 60,5m.

Lời giải

Chọn D

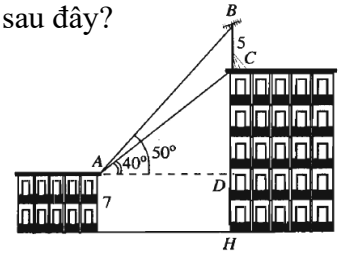
Áp dụng định lí sin vào tam giác ABD, ta có $\frac{AD}{\sin\beta}=\frac{AB}{\sin D}$.

Ta có $\alpha=\widehat{D}+\beta$ nên $\widehat{D}=\alpha-\beta=63^0-48^0=15^0$.

Do đó $AD=\frac{AB.\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{24.\sin 48^0}{\sin 15^0}\approx 68,91$ m.

Trong tam giác vuông ACD, có $h=CD=AD.\sin\alpha\approx 61,4$ m.

Câu 13: Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc 50^0 và 40^0 so với phương nằm ngang. Chiều cao của tòa nhà gần nhất với giá trị nào sau đây?



A. 12m. **B.** 19m.

C. 24m. **D.** 29m.

Lời giải

Chọn B

Từ hình vẽ, suy ra $\widehat{BAC}=10^0$ và $\widehat{ABD}=180^0-\left(\widehat{BAD}+\widehat{ADB}\right)=180^0-\left(50^0+90^0\right)=40^0$.

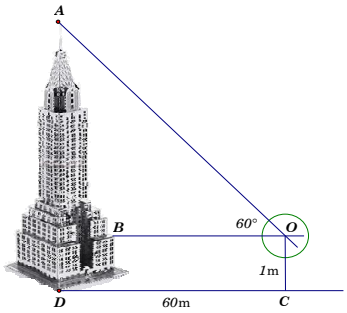
Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC, ta có

$\frac{BC}{\sin\widehat{BAC}}=\frac{AC}{\sin\widehat{ABC}}\longrightarrow AC=\frac{BC.\sin\widehat{ABC}}{\sin\widehat{BAC}}=\frac{5.\sin 40^0}{\sin 10^0}\approx 18,5$ m.

Trong tam giác vuông ADC, ta có $\sin\widehat{CAD}=\frac{CD}{AC}\longrightarrow CD=AC.\sin\widehat{CAD}=11,9$ m.

Vậy $CH=CD+DH=11,9+7=18,9$ m.

Câu 14: Xác định chiều cao của một tháp mà không cần lên đỉnh của tháp. Đặt kế giác thẳng đứng cách chân tháp một khoảng $CD=60$m, giả sử chiều cao của giác kế là $OC=1$m .Quay thanh giác kế sao cho khi ngắm theo thanh ta nhình thấy đỉnh A của tháp. Đọc trên giác kế số đo của góc $\widehat{AOB}=60^0$. Chiều cao của ngọn tháp gần với giá trị nào sau đây:



A. 40m. **B.** 114m.

C. 105m. **D.** 110m.

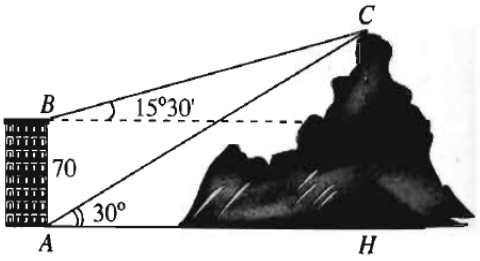
Lời giải

Chọn C

Tam giác OAB vuông tại B, có $\tan\widehat{AOB}=\dfrac{AB}{OB}\Rightarrow AB=\tan 60^0.OB=60\sqrt{3}\,\text{m}$.

Vậy chiếu cao của ngọn tháp là $h=AB+OC=\left(60\sqrt{3}+1\right)\text{m}$.

Câu 15: Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB=70\text{m}$, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc 30^0, phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc $15^030'$.Ngọn núi đó có độ cao so với mặt đất gần nhất với giá trị nào sau đây?



A. 135m. **B.** 234m.
C. 165m. **D.** 195m.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết, ta suy ra tam giác ABC có $\widehat{CAB}=60^0$, $\widehat{ABC}=105^030'$ và $c=70$.

Khi đó $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^0\Leftrightarrow\widehat{C}=180^0-\left(\widehat{A}+\widehat{B}\right)=180^0-165^030'=14^030'$.

Theo định lí sin, ta có $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ hay $\dfrac{b}{\sin 105^030'}=\dfrac{70}{\sin 14^030'}$

Do đó $AC=b=\dfrac{70.\sin 105^030'}{\sin 14^030'}\approx 269,4\text{ m}$.

Gọi CH là khoảng cách từ C đến mặt đất. Tam giác vuông ACH có cạnh CH đối diện với góc 30^0 nên

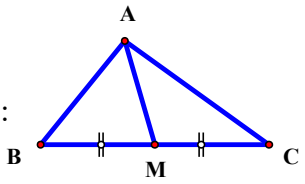
$CH=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{269,4}{2}=134,7\text{ m}$. Vậy ngọn núi cao khoảng 135 m.

Câu 16: Tam giác ABC có $AB=6\text{cm}$, $AC=8\text{cm}$ và $BC=10\text{cm}$. Độ dài đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác bằng:

A. 4cm. **B.** $\sqrt{3}$cm. **C.** 7cm. **D.** 5cm.

Lời giải

Chọn D



Áp dụng công thức đường trung tuyến $m_a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}$ ta được:

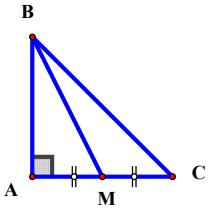
$m_a^2=\dfrac{AC^2+AB^2}{2}-\dfrac{BC^2}{4}=\dfrac{8^2+6^2}{2}-\dfrac{10^2}{4}=25\Rightarrow m_a=5$.

Câu 17: Tam giác ABC vuông tại A và có $AB=AC=a$. Tính độ dài đường trung tuyến BM của tam giác đã cho.

A. $BM=1,5a$. **B.** $BM=a\sqrt{2}$. **C.** $BM=a\sqrt{3}$. **D.** $BM=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



M là trung điểm của $AC\Rightarrow AM=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a}{2}$.

Tam giác ΔBAM vuông tại A

$\Rightarrow BM=\sqrt{AB^2+AM^2}=\sqrt{a^2+\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 18: Tam giác ABC cân tại C, có $AB=9\text{cm}$ và $AC=\frac{15}{2}\text{cm}$. Gọi D là điểm đối xứng của B qua C. Tính độ dài cạnh AD.

A. $AD=6\text{ cm}$. **B.** $AD=9\text{ cm}$.

C. $AD=12\text{ cm}$. **D.** $AD=12\sqrt{2}\text{ cm}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: D là điểm đối xứng của B qua $C\Rightarrow C$ là trung điểm của BD.

$\Rightarrow AC$ là trung tuyến của tam giác ΔDAB.

$BD=2BC=2AC=15$.

Theo hệ thức trung tuyến ta có:

$$AC^2=\frac{AB^2+AD^2}{2}-\frac{BD^2}{4}\Rightarrow AD^2=2AC^2+\frac{BD^2}{2}-AB^2$$

$$\Rightarrow AD^2=2.\left(\frac{15}{2}\right)^2+\frac{15^2}{2}-9^2=144\Rightarrow AD=12.$$

Câu 19: Tam giác ABC có trọng tâm G. Hai trung tuyến $BM=6$, $CN=9$ và $\widehat{BGC}=120^0$. Tính độ dài cạnh AB.

A. $AB=\sqrt{11}$. **B.** $AB=\sqrt{13}$.

C. $AB=2\sqrt{11}$. **D.** $AB=2\sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\widehat{BGC}$ và $\widehat{BGN}$ là hai góc kề bù mà $\widehat{BGC}=120^0\Rightarrow\widehat{BGN}=120^0$.

G là trọng tâm của tam giác ΔABC

$$\Rightarrow\begin{cases}BG=\frac{2}{3}BM=4.\\GN=\frac{1}{3}CN=3.\end{cases}$$

Trong tam giác ΔBGN ta có:

$BN^2=GN^2+BG^2-2GN.BG.\cos\widehat{BGN}$

$\Rightarrow BN^2=9+16-2.3.4.\frac{1}{2}=13\Rightarrow BN=\sqrt{13}$.

N là trung điểm của $AB\Rightarrow AB=2BN=2\sqrt{13}$.

Câu 20: Tam giác ABC có độ dài ba trung tuyến lần lượt là $9;\ 12;\ 15$. Diện tích của tam giác ABC bằng:

A. 24. **B.** $24\sqrt{2}$.

C. 72. **D.** $72\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\begin{cases}m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}=81\\m_b^2=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}=144\\m_c^2=\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}=225\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=292\\b^2=208\\c^2=100\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\sqrt{73}\\b=4\sqrt{13}\\c=10\end{cases}$

Ta có: $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{208+100-292}{2.4\sqrt{13}.10}=\dfrac{1}{5\sqrt{13}}$

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{5\sqrt{13}}\right)^2}=\dfrac{18\sqrt{13}}{65}.$

Diện tích tam giác $\Delta ABC: S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}.4\sqrt{13}.10.\dfrac{18\sqrt{13}}{65}=72$

Câu 21: Cho tam giác ABC có $AB=c,\ BC=a,\ CA=b$. Nếu giữa $a,\ b,\ c$ có liên hệ $b^2+c^2=2a^2$ thì độ dài đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác tính theo a bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $3a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Hệ thức trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác: $m_a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}$

Mà: $b^2+c^2=2a^2\Rightarrow m_a^2=\dfrac{2a^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{3a^2}{4}\Rightarrow m_a=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Câu 22: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=a,\ BC=b,\ BD=m$ và $AC=n$. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào đúng:

A. $m^2+n^2=3\left(a^2+b^2\right)$. **B.** $m^2+n^2=2\left(a^2+b^2\right)$.

C. $2\left(m^2+n^2\right)=a^2+b^2$. **D.** $3\left(m^2+n^2\right)=a^2+b^2$.

Lời giải

Chọn B

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có: $BO=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{m}{2}.$

BO là trung tuyến của tam giác ΔABC

$\Rightarrow BO^2=\dfrac{BA^2+BC^2}{2}-\dfrac{AC^2}{4}\Leftrightarrow\dfrac{m^2}{4}=\dfrac{a^2+b^2}{2}-\dfrac{n^2}{4}\Leftrightarrow m^2+n^2=2\left(a^2+b^2\right)$.

Câu 23: Tam giác ABC có ba đường trung tuyến $m_a,\ m_b,\ m_c$ thỏa mãn $5m_a^2=m_b^2+m_c^2$. Khi đó tam giác này là tam giác gì?

A. Tam giác cân. **B.** Tam giác đều.

C. Tam giác vuông. **D.** Tam giác vuông cân.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\begin{cases}m_a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}\\ m_b^2=\dfrac{a^2+c^2}{2}-\dfrac{b^2}{4}\\ m_c^2=\dfrac{a^2+b^2}{2}-\dfrac{c^2}{4}\end{cases}$

Mà: $5m_a^2=m_b^2+m_c^2\Rightarrow 5\left(\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}\right)=\dfrac{a^2+c^2}{2}-\dfrac{b^2}{4}+\dfrac{a^2+b^2}{2}-\dfrac{c^2}{4}$

$\Leftrightarrow 10b^2+10c^2-5a^2=2a^2+2c^2-b^2+2a^2+2b^2-c^2$

$\Leftrightarrow b^2+c^2=a^2 \Rightarrow$ tam giác ΔABC vuông.

Câu 24: Tam giác ABC có $BC=10$ và $\widehat{A}=30^{\circ}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $R=5$. **B.** $R=10$. **C.** $R=\dfrac{10}{\sqrt{3}}$. **D.** $R=10\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng định lí sin, ta có $\dfrac{BC}{\sin\widehat{BAC}}=2R \Rightarrow R=\dfrac{BC}{2.\sin\widehat{A}}=\dfrac{10}{2.\sin 30^0}=10.$

Câu 25: Tam giác ABC có $AB=3,\ AC=6$ và $\widehat{A}=60^{\circ}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $R=3$. **B.** $R=3\sqrt{3}$. **C.** $R=\sqrt{3}$. **D.** $R=6$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng định lí Cosin, ta có $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos\widehat{BAC}$

$=3^2+6^2-2.3.6.\cos 60^0=27 \Leftrightarrow BC^2=27 \Leftrightarrow BC^2+AB^2=AC^2.$

Suy ra tam giác ABC vuông tại B, do đó bán kính $R=\dfrac{AC}{2}=3.$

Câu 26: Tam giác ABC có $BC=21\text{cm},\ CA=17\text{cm},\ AB=10\text{cm}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $R=\dfrac{85}{2}\text{cm}$. **B.** $R=\dfrac{7}{4}\text{cm}$.

C. $R=\dfrac{85}{8}\text{cm}$. **D.** $R=\dfrac{7}{2}\text{cm}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $p=\dfrac{AB+BC+CA}{2}=24.$ Áp dụng công thức Hê – rông, ta có

$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-CA)}=\sqrt{24.(24-21).(24-17).(24-10)}=84\ cm^2.$

Vậy bán kính cần tìm là $S_{\Delta ABC}=\dfrac{AB.BC.CA}{4R} \Rightarrow R=\dfrac{AB.BC.CA}{4.S_{\Delta ABC}}=\dfrac{21.17.10}{4.84}=\dfrac{85}{8}\ cm.$

Câu 27: Tam giác đều cạnh a nội tiếp trong đường tròn bán kính R. Khi đó bán kính R bằng:

A. $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $R=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

C. $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Xét tam giác ABC đều cạnh a, gọi M là trung điểm của BC.

Ta có $AM \perp BC$ suy ra $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}.AM.BC=\dfrac{1}{2}.\sqrt{AB^2-BM^2}.BC=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.$

Vậy bán kính cần tính là $S_{\Delta ABC}=\dfrac{AB.BC.CA}{4R}\Rightarrow R=\dfrac{AB.BC.CA}{4.S_{\Delta ABC}}=\dfrac{a^3}{4.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 28: Tam giác ABC vuông tại A có đường cao $AH=\dfrac{12}{5}$cm và $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{4}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $R=\sqrt{3}\ cm.$ **B.** $R=1,5$cm.

C. $R=2$cm. **D.** $R=3,5$cm.

Lời giải

Chọn A

Tam giác ABC vuông tại A, có đường cao $AH\Rightarrow AB.AC=AH^2\quad(*)$.

Mặt khác $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow AB=\dfrac{3}{4}AC$ thế vào $(*)$, ta được $\dfrac{3}{4}AC^2=\left(\dfrac{12}{5}\right)^2\Leftrightarrow AC=\dfrac{8\sqrt{3}}{5}$.

Suy ra $AB=\dfrac{3}{4}.\dfrac{8\sqrt{3}}{5}=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}\Rightarrow BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=2\sqrt{3}$.

Vậy bán kính cần tìm là $R=\dfrac{BC}{2}=\sqrt{3}\ cm.$

Câu 29: Cho tam giác ABC có $AB=3\sqrt{3}$, $BC=6\sqrt{3}$ và $CA=9$. Gọi D là trung điểm BC. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.

A. $R=\dfrac{9}{6}$. **B.** $R=3$. **C.** $R=3\sqrt{3}$. **D.** $R=\dfrac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Vì D là trung điểm của $BC\Rightarrow AD^2=\dfrac{AB^2+AC^2}{2}-\dfrac{BC^2}{4}=27\Rightarrow AD=3\sqrt{3}$.

Tam giác ABD có $AB=BD=DA=3\sqrt{3}\Rightarrow$ tam giác ABD đều.

Nên có bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R=\dfrac{\sqrt{3}}{3}AB=\dfrac{\sqrt{3}}{3}.3\sqrt{3}=3$.

Câu 30: Tam giác ABC có $AB=3$, $AC=6$, $\widehat{BAC}=60^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC.

A. $S_{\Delta ABC}=9\sqrt{3}$. **B.** $S_{\Delta ABC}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

C. $S_{\Delta ABC}=9$. **D.** $S_{\Delta ABC}=\dfrac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{A}=\dfrac{1}{2}.3.6.\sin 60^0=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

Câu 31: Tam giác ABC có $AC=4$, $\widehat{BAC}=30^\circ$, $\widehat{ACB}=75^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC.

A. $S_{\Delta ABC}=8$. **B.** $S_{\Delta ABC}=4\sqrt{3}$.

C. $S_{\Delta ABC}=4$. **D.** $S_{\Delta ABC}=8\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\widehat{ABC}=180^0-\left(\widehat{BAC}+\widehat{ACB}\right)=75^\circ=\widehat{ACB}$.

Suy ra tam giác ABC cân tại A nên $AB=AC=4$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC\sin\widehat{BAC}=4.$

Câu 32: Tam giác ABC có $a=21,\ b=17,\ c=10$. Diện tích của tam giác ABC bằng:

A. $S_{\Delta ABC}=16$. **B.** $S_{\Delta ABC}=48$.

C. $S_{\Delta ABC}=24$. **D.** $S_{\Delta ABC}=84$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $p=\frac{21+17+10}{2}=24$.

Do đó $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)}=84$.

Câu 33: Tam giác ABC có $AB=3,\ AC=6,\ \widehat{BAC}=60^\circ$. Tính độ dài đường cao h_a của tam giác.

A. $h_a=3\sqrt{3}$. **B.** $h_a=\sqrt{3}$. **C.** $h_a=3$. **D.** $h_a=\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng định lý hàm số côsin, ta có

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC\cos A=27\longrightarrow BC=3\sqrt{3}$.

Ta có $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{A}=\frac{1}{2}.3.6.\sin 60^0=\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Lại có $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.BC.h_a\longrightarrow h_a=\frac{2S}{BC}=3.$

Câu 34: Tam giác ABC có $AC=4,\ \widehat{ACB}=60^\circ$. Tính độ dài đường cao h uất phát từ đỉnh A của tam giác.

A. $h=2\sqrt{3}$. **B.** $h=4\sqrt{3}$. **C.** $h=2$. **D.** $h=4$.

Lời giải

Chọn A

Gọi H là chân đường cao xuất phát từ đỉnh A.

Tam giác vuông AHC, có $\sin\widehat{ACH}=\frac{AH}{AC}\longrightarrow AH=AC.\sin\widehat{ACH}=4.\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}.$

Câu 35: Tam giác ABC có $a=21,\ b=17,\ c=10$. Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B trên cạnh AC. Tính BB'.

A. $BB'=8$. **B.** $BB'=\frac{84}{5}$.

C. $BB'=\frac{168}{17}$. **D.** $BB'=\frac{84}{17}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $p=\dfrac{21+17+10}{2}=24$.

Suy ra $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)}=84$.

Lại có $S=\dfrac{1}{2}b.BB'\longleftrightarrow 84=\dfrac{1}{2}.17.BB'\longrightarrow BB'=\dfrac{168}{17}$.

Câu 36: Tam giác ABC có $AB=8$ cm, $AC=18$ cm và có diện tích bằng 64 cm^2. Giá trị $\sin A$ ằng:

A. $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sin A=\dfrac{3}{8}$.

C. $\sin A=\dfrac{4}{5}$. **D.** $\sin A=\dfrac{8}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{BAC}\Leftrightarrow 64=\dfrac{1}{2}.8.18.\sin A\Leftrightarrow \sin A=\dfrac{8}{9}$.

Câu 37: Hình bình hành $ABCD$ có $AB=a$, $BC=a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAD}=45^0$. Khi đó hình bình hành có diện tích bằng:

A. $2a^2$. **B.** $a^2\sqrt{2}$. **C.** a^2. **D.** $a^2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích tam giác ABD là $S_{\Delta ABD}=\dfrac{1}{2}.AB.AD.\sin\widehat{BAD}=\dfrac{1}{2}.a.a\sqrt{2}.\sin 45^0=\dfrac{a^2}{2}$.

Vậy diện tích hình bình hành $ABCD$ là $S_{ABCD}=2.S_{\Delta ABD}=2.\dfrac{a^2}{2}=a^2$.

Câu 48: Tam giác đều nội tiếp đường tròn bán kính $R=4$ cm có diện tích bằng:

A. 13 cm^2 **B.** $13\sqrt{2}$ cm^2

C. $12\sqrt{3}$ cm^2 **D.** 15 cm^2.

Lời giải

Chọn C

Xét tam giác ABC đều, có độ dài cạnh bằng a.

Theo định lí sin, ta có $\dfrac{BC}{\sin\widehat{BAC}}=2R\Leftrightarrow\dfrac{a}{\sin 60^0}=2.4\Leftrightarrow a=8.\sin 60^0=4\sqrt{3}$.

Vậy diện tích cần tính là $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{BAC}=\dfrac{1}{2}.\left(4\sqrt{3}\right)^2.\sin 60^0=12\sqrt{3}\ cm^2$.

Câu 49: Tam giác ABC có $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ và có diện tích S. Nếu tăng cạnh BC lên 2 lần đồng thời tăng cạnh AC lên 3 lần và giữ nguyên độ lớn của góc C thì khi đó diện tích của tam giác mới được tạo nên bằng:

A. $2S$. **B.** $3S$. **C.** $4S$. **D.** $6S$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích tam giác ABC ban đầu là $S=\dfrac{1}{2}.AC.BC.\sin\widehat{ACB}=\dfrac{1}{2}.ab.\sin\widehat{ACB}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Khi tăng cạnh BC lên 2 lần và cạnh AC lên 3 lần thì diện tích tam giác ABC lúc này là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.(3AC).(2BC).\sin\widehat{ACB}=6.\frac{1}{2}.AC.BC.\sin\widehat{ACB}=6S.$

Câu 50: Tam giác ABC có $BC=a$ và $CA=b$. Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi góc C bằng:

A. 60^0. **B.** 90^0. **C.** 150^0. **D.** 120^0.

Lời giải

Chọn B

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AC.BC.\sin\widehat{ACB}=\frac{1}{2}.ab.\sin\widehat{ACB}.$

Vì a, b không đổi và $\sin\widehat{ACB}\le 1, \forall C$ nên suy ra $S_{\Delta ABC}\le\frac{ab}{2}.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sin\widehat{ACB}=1\Leftrightarrow\widehat{ACB}=90^0.$

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tam giác ABC là $S=\frac{ab}{2}.$

Câu 51: Tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM, CN vuông góc với nhau và có $BC=3$, góc $\widehat{BAC}=30^0$. Tính diện tích tam giác ABC.

A. $S_{\Delta ABC}=3\sqrt{3}$. **B.** $S_{\Delta ABC}=6\sqrt{3}$. **C.** $S_{\Delta ABC}=9\sqrt{3}$. **D.** $S_{\Delta ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $BM\perp CN\longrightarrow 5a^2=b^2+c^2$. (Áp dụng hệ quả đã có trước)

Trong tam giác ABC, ta có $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A=5a^2-2bc\cos A\longrightarrow bc=\frac{2a^2}{\cos A}.$

Khi đó $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}.\frac{2a^2}{\cos A}.\sin A=a^2\tan A=3\sqrt{3}$.

Câu 54: Tam giác ABC có $AB=5, AC=8$ và $\widehat{BAC}=60^0$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r=1$. **B.** $r=2$. **C.** $r=\sqrt{3}$. **D.** $r=2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng định lý hàm số côsin, ta có

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC\cos A=49\longrightarrow BC=7$.

Diện tích $S=\frac{1}{2}AB.AC.\sin A=\frac{1}{2}.5.8.\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$.

Lại có $S=p.r\longrightarrow r=\frac{S}{p}=\frac{2S}{AB+BC+CA}=\sqrt{3}$.

Câu 55: Tam giác ABC có $a=21, b=17, c=10$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r=16$. **B.** $r=7$. **C.** $r=\frac{7}{2}$. **D.** $r=8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $p=\dfrac{21+17+10}{2}=24$.

Suy ra $S=\sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)}=84$.

Lại có $S=p.r\longrightarrow r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{84}{24}=\dfrac{7}{2}$.

Câu 56: Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a.

A. $r=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $r=\dfrac{a\sqrt{2}}{5}$. **C.** $r=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $r=\dfrac{a\sqrt{5}}{7}$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích tam giác đều cạnh a bằng: $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lại có $S=pr\longrightarrow r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{3a}{2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Câu 57: Tam giác ABC vuông tại A có $AB=6$ cm, $BC=10$ cm. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r=1$ cm. **B.** $r=\sqrt{2}$ cm.
C. $r=2$ cm. **D.** $r=3$ cm.

Lời giải

Chọn C

Dùng Pitago tính được $AC=8$, suy ra $p=\dfrac{AB+BC+CA}{2}=12$.

Diện tích tam giác vuông $S=\dfrac{1}{2}AB.AC=24$ .Lại có $S=p.r\longrightarrow r=\dfrac{S}{p}=2$ cm.

Câu 58: Tam giác ABC vuông cân tại A, có $AB=a$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r=\dfrac{a}{2}$. **B.** $r=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **C.** $r=\dfrac{a}{2+\sqrt{2}}$. **D.** $r=\dfrac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết, ta có $AC=AB=a$ và $BC=a\sqrt{2}$.

Suy ra $p=\dfrac{AB+BC+CA}{2}=a\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$.

Diện tích tam giác vuông $S=\dfrac{1}{2}AB.AC=\dfrac{a^2}{2}$.

Lại có $S=p.r\longrightarrow r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{a}{2+\sqrt{2}}$.

Câu 59: Tam giác ABC vuông cân tại A và nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó tỉ số $\dfrac{R}{r}$ bằng:

A. $1+\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$. **D.** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $AC = AB = a \longrightarrow BC = a\sqrt{2}$. Suy ra $R = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = a\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$.

Diện tích tam giác vuông $S = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2}{2}$.

Lại có $S = p.r \longrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{a}{2+\sqrt{2}}$. Vậy $\frac{R}{r} = 1+\sqrt{2}$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 3

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Đẳng thức nào sau đây **đúng?**

A. $\tan\left(180^\circ + a\right) = -\tan a$.
B. $\cos\left(180^\circ + a\right) = -\cos a$.
C. $\sin\left(180^\circ + a\right) = \sin a$.
D. $\cot\left(180^\circ + a\right) = -\cot a$.

Lời giải

Chọn B.

Lý thuyết "cung hơn kém 180°"

Câu 2: Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **đúng**?

A. $\sin\left(180^\circ - \alpha\right) = -\sin\alpha$.
B. $\cos\left(180^\circ - \alpha\right) = \cos\alpha$
C. $\tan\left(180^\circ - \alpha\right) = \tan\alpha$.
D. $\cot\left(180^\circ - \alpha\right) = -\cot\alpha$

Lời giải

Chọn D.

Mối liên hệ hai cung bù nhau.

Câu 3: Cho α và β là hai góc khác nhau và bù nhau, trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào **sai**?

A. $\sin\alpha = \sin\beta$.
B. $\cos\alpha = -\cos\beta$.
C. $\tan\alpha = -\tan\beta$.
D. $\cot\alpha = \cot\beta$.

Lời giải

Chọn D.

Mối liên hệ hai cung bù nhau.

Câu 4: Cho góc α tù. Điều khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $\sin\alpha < 0$.
B. $\cos\alpha > 0$.
C. $\tan\alpha > 0$.
D. $\cot\alpha < 0$.

Lời giải

Chọn D.

Câu 5: Hai góc nhọn α và β phụ nhau, hệ thức nào sau đây là **sai**?

A. $\sin\alpha = \cos\beta$.
B. $\tan\alpha = \cot\beta$.
C. $\cot\beta = \dfrac{1}{\cot\alpha}$.
D. $\cos\alpha = -\sin\beta$.

Lời giải

Chọn D.

$\cos\alpha = \cos\left(90^\circ - \beta\right) = \sin\beta$.

Câu 6: Cho $\cos x = \dfrac{1}{2}$. Tính biểu thức $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x$

A. $\dfrac{13}{4}$.
B. $\dfrac{7}{4}$.
C. $\dfrac{11}{4}$.
D. $\dfrac{15}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x = 3\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + \cos^2 x = 3 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{13}{4}$.

Câu 7: Biết $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. Giá trị đúng của biểu thức $P = \sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha$ là:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{10}{9}$. **C.** $\frac{11}{9}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$\cos\alpha=\frac{1}{3}\Rightarrow P=\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+2\cos^2\alpha=1+2\cos^2\alpha=\frac{11}{9}$.

Câu 8: Cho biết $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$ và $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Tính $\tan\alpha$?

A. $\frac{5}{4}$. **B.** $-\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **D.** $-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Do $0<\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tan\alpha<0$. Ta có: $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\tan^2\alpha=\frac{5}{4}\Rightarrow\tan\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 9: Cho α là góc tù và $\sin\alpha=\frac{5}{13}$. Giá trị của biểu thức $3\sin\alpha+2\cos\alpha$ là

A. 3. **B.** $-\frac{9}{13}$. **C.** -3. **D.** $\frac{9}{13}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\frac{144}{169}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{12}{13}$

Do α là góc tù nên $\cos\alpha<0$, từ đó $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$

Như vậy $3\sin\alpha+2\cos\alpha=3\cdot\frac{5}{13}+2\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{9}{13}$.

Câu 10: Cho $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, với $90°<\alpha<180°$. Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha=\frac{2}{3}$. **B.** $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$. **C.** $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$.

Mặt khác $90°<\alpha<180°$ nên $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 11: $\cos\alpha$ bằng bao nhiêu nếu $\cot\alpha=-\frac{1}{2}$?

A. $\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cot\alpha=-\frac{1}{2}\Rightarrow\tan\alpha=-2$.

$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{1+(-2)^2}=\frac{1}{5}$.

Suy ra $\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 12: Nếu $\tan\alpha=3$ thì $\cos\alpha$ bằng bao nhiêu?

A. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\pm\frac{\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{1+3^2}=\frac{1}{10}$.

Suy ra $\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Câu 13: Biết $\cot\alpha=-a$, $a>0$. Tính $\cos\alpha$

A. $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$. **B.** $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$. **C.** $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$. **D.** $\cos\alpha=-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$.

Lời giải

Chọn D

Do $\cot\alpha=-a$, $a>0$ nên $90^0<\alpha<180^0$ suy ra $\cos\alpha<0$.

Mặt khác, $\tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}\Leftrightarrow\tan\alpha=\frac{-1}{a}$.

Mà ta lại có $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{a^2}{1+a^2}$.

Khi đó $\cos\alpha=-\frac{|a|}{\sqrt{1+a^2}}$ và do $a>0$ nên $\cos\alpha=-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$.

Câu 14: Cho α là góc tù và $\sin\alpha=\frac{4}{5}$. Giá trị của biểu thức $A=2\sin\alpha-\cos\alpha$ bằng

A. $\frac{-7}{5}$. **B.** $\frac{7}{5}$. **C.** 1. **D.** $\frac{11}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\sin\alpha=\frac{4}{5}\Rightarrow\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$.

Do α là góc tù nên $\cos\alpha<0\Rightarrow\cos\alpha=\frac{-3}{5}$.

$A = 2\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{2.4}{5} - \frac{-3}{5} = \frac{11}{5}$.

Câu 15: Cho $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, với $90° \le \alpha \le 180°$. Tính giá trị của $M = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos^3\alpha}$

A. $M = \frac{25}{27}$ **B.** $M = \frac{175}{27}$. **C.** $M = \frac{35}{27}$. **D.** $M = -\frac{25}{27}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$.

Mà $90° \le \alpha \le 180° \Rightarrow \cos\alpha \le 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-3}{5}$.

Từ đó $M = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos^3\alpha} = \frac{-25}{27}$.

Câu 16: Cho biết $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $E = \frac{\cot\alpha + 3\tan\alpha}{2\cot\alpha + \tan\alpha}$?

A. $-\frac{19}{13}$. **B.** $\frac{19}{13}$. **C.** $\frac{25}{13}$. **D.** $-\frac{25}{13}$

Lời giải

Chọn B.

$E = \frac{\cot\alpha + 3\tan\alpha}{2\cot\alpha + \tan\alpha} = \frac{1 + 3\tan^2\alpha}{2 + \tan^2\alpha} = \frac{3\left(\tan^2\alpha + 1\right) - 2}{1 + \left(1 + \tan^2\alpha\right)} = \frac{\frac{3}{\cos^2\alpha} - 2}{\frac{1}{\cos^2\alpha} + 1} = \frac{3 - 2\cos^2\alpha}{1 + \cos^2\alpha} = \frac{19}{13}$.

Câu 17: Cho biết $\cot\alpha = 5$. Tính giá trị của $E = 2\cos^2\alpha + 5\sin\alpha\cos\alpha + 1$?

A. $\frac{10}{26}$. **B.** $\frac{100}{26}$. **C.** $\frac{50}{26}$. **D.** $\frac{101}{26}$.

Lời giải

Chọn D.

$E = \sin^2\alpha\left(2\cot^2\alpha + 5\cot\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right) = \frac{1}{1 + \cot^2\alpha}\left(3\cot^2\alpha + 5\cot\alpha + 1\right) = \frac{101}{26}$.

Câu 18: Cho $cot\alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $A = \frac{3\sin\alpha + 4\cos\alpha}{2\sin\alpha - 5\cos\alpha}$ là:

A. $-\frac{15}{13}$. **B.** -13. **C.** $\frac{15}{13}$. **D.** 13.

Lời giải

Chọn D.

$A = \frac{3\sin\alpha + 4\sin\alpha.\cot\alpha}{2\sin\alpha - 5\sin\alpha.\cot\alpha} = \frac{3 + 4\cot\alpha}{2 - 5\cot\alpha} = 13$.

Câu 19: Cho biết $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$. Giá trị của biểu thức $E = \frac{\cot\alpha - 3\tan\alpha}{2\cot\alpha - \tan\alpha}$ bằng bao nhiêu?

A. $-\frac{25}{3}$. **B.** $-\frac{11}{13}$. **C.** $-\frac{11}{3}$. **D.** $-\frac{25}{13}$.

Lời giải

Chọn C.

$$E=\frac{\cot\alpha-3\tan\alpha}{2\cot\alpha-\tan\alpha}=\frac{1-3\tan^2\alpha}{2-\tan^2\alpha}=\frac{4-3\left(\tan^2\alpha+1\right)}{3-\left(1+\tan^2\alpha\right)}=\frac{4-\frac{3}{\cos^2\alpha}}{3-\frac{1}{\cos^2\alpha}}=\frac{4\cos^2\alpha-3}{3\cos^2\alpha-1}=-\frac{11}{3}.$$

Câu 20: Biết $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. Giá trị đúng của biểu thức $P=\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha$ là:

A. $\frac{11}{9}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{10}{9}$.

Lời giải

Chọn A

$$\cos\alpha=\frac{1}{3}\Rightarrow P=\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+2\cos^2\alpha=1+2\cos^2\alpha=\frac{11}{9}.$$

Câu 21: Cho tam giác ABC, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^2=b^2+c^2+2bc\cos A$. **B.** $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

C. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos C$. **D.** $a^2=b^2+c^2-2bc\cos B$.

Lời giải

Chọn B

Theo định lý cosin trong tam giác ABC, ta có $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

Câu 22: Cho tam giác ABC có $a=8,b=10$, góc C bằng 60^0. Độ dài cạnh c là?

A. $c=3\sqrt{21}$. **B.** $c=7\sqrt{2}$. **C.** $c=2\sqrt{11}$. **D.** $c=2\sqrt{21}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $c^2=a^2+b^2-2a.b.\cos C=8^2+10^2-2.8.10.\cos 60^0=84\Rightarrow c=2\sqrt{21}$.

Câu 23: Cho ΔABC có $b=6,c=8,\widehat{A}=60^0$. Độ dài cạnh a là:

A. $2\sqrt{13}$. **B.** $3\sqrt{12}$. **C.** $2\sqrt{37}$. **D.** $\sqrt{20}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=36+64-2.6.8.\cos 60^0=52\Rightarrow a=2\sqrt{13}$.

Câu 24: Cho ΔABC có $B=60^0,a=8,c=5$. Độ dài cạnh b bằng:

A. 7. **B.** 129. **C.** 49. **D.** $\sqrt{129}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=8^2+5^2-2.8.5.\cos 60^0=49\Rightarrow b=7$.

Câu 25: Cho ΔABC có $AB=9;BC=8;\widehat{B}=60^0$. Tính độ dài AC.

A. $\sqrt{73}$. **B.** $\sqrt{217}$. **C.** 8. **D.** $\sqrt{113}$.

Lời giải

Chọn A

Theo định lý cosin có:

$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA.BC.\cos\widehat{ABC} = 73 \Rightarrow AC = \sqrt{73}$.

Vậy $AC = \sqrt{73}$.

Câu 26: Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 1$ và $A = 60^0$. Tính độ dài cạnh BC.

A. $BC = \sqrt{2}$. **B.** $BC = 1$. **C.** $BC = \sqrt{3}$. **D.** $BC = 2$.

Lời giải

Chọn C

Theo định lý cosin ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 60^0}$

$= \sqrt{2^2 + 1^2 - 2.2.1.\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

Câu 27: Tam giác ABC có $a = 8, c = 3, \hat{B} = 60^0$. Độ dài cạnh b bằng bao nhiêu?

A. 49. **B.** $\sqrt{97}$ **C.** 7. **D.** $\sqrt{61}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = 8^2 + 3^2 - 2.8.3.\cos 60^0 = 49 \Rightarrow b = 7$.

Câu 28: Tam giác ABC có $\hat{C} = 150^0, BC = \sqrt{3}, AC = 2$. Tính cạnh AB ?

A. $\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 10. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Theo định lí cosin trong ΔABC ta có:

$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.CB.\cos\hat{C} = 13 \Rightarrow AB = \sqrt{13}$.

Câu 29: Cho $a; b; c$ là độ dài 3 cạnh của tam giác ABC. Biết $b = 7; c = 5; \cos A = \frac{4}{5}$. Tính độ dài của a.

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{23}{8}$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC ta có:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = 7^2 + 5^2 - 2.7.5.\frac{4}{5} = 18$.

Suy ra: $a = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Câu 30: Cho tam giác ABC có $AB = 4$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 9$ cm. Tính $\cos A$.

A. $\cos A = -\frac{2}{3}$. **B.** $\cos A = \frac{1}{2}$. **C.** $\cos A = \frac{1}{3}$. **D.** $\cos A = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2.AB.AC}=\dfrac{4^2+9^2-7^2}{2.4.9}=\dfrac{2}{3}$.

Câu 31: Cho tam giác ABC có $a^2+b^2-c^2>0$. Khi đó:

A. Góc $C>90^0$ **B.** Góc $C<90^0$

C. Góc $C=90^0$ **D.** Không thể kết luận được gì về góc C.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

Mà: $a^2+b^2-c^2>0$ suy ra: $\cos C>0\Rightarrow C<90^0$.

Câu 32: Cho tam giác ABC thoả mãn: $b^2+c^2-a^2=\sqrt{3}bc$. Khi đó:

A. $A=30^0$. **B.** $A=45^0$. **C.** $A=60^0$. **D.** $A=75^0$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{\sqrt{3}bc}{2bc}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow A=30^0$.

Câu 33: Cho các điểm $A(1;1),B(2;4),C(10;-2)$. Góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu?

A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 45^0. **D.** 30^0.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;3)$, $\overrightarrow{AC}=(9;-3)$.

Suy ra: $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=0\Rightarrow\widehat{BAC}=90^0$.

Câu 34: Cho tam giác ABC, biết $a=24,b=13,c=15$. Tính góc A?

A. $33^0 34'$. **B.** $117^0 49'$. **C.** $28^0 37'$. **D.** $58^0 24'$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{13^2+15^2-24^2}{2.13.15}=-\dfrac{7}{15}\Rightarrow A\simeq 117^0 49'$.

Câu 35: Cho tam giác ABC, biết $a=13,b=14,c=15$. Tính góc B?

A. $59^0 49'$. **B.** $53^0 7'$. **C.** $59^0 29'$. **D.** $62^0 22'$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{13^2+15^2-14^2}{2.13.15}=\dfrac{33}{65}\Rightarrow B\simeq 59^0 29'$.

Câu 36: Cho tam giác ABC biết độ dài ba cạnh BC, CA, AB lần lượt là a, b, c và thỏa mãn hệ thức $b\left(b^2-a^2\right)=c\left(c^2-a^2\right)$ với $b\neq c$. Khi đó, góc $\widehat{BAC}$ bằng

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $120°$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $b\left(b^2-a^2\right)=c\left(c^2-a^2\right)\Leftrightarrow b^3-ba^2=c^3-ca^2\Leftrightarrow b^3-c^3-a^2\left(b-c\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(b-c\right)\left(b^2+bc+c^2-a^2\right)=0\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2=-bc$.

Mặt khác $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{-bc}{2bc}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{BAC}=120°$.

Câu 37: Cho tam giác ABC, chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

A. $m_a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}+\dfrac{a^2}{4}$.

B. $m_a^2=\dfrac{a^2+c^2}{2}-\dfrac{b^2}{4}$.

C. $m_a^2=\dfrac{a^2+b^2}{2}-\dfrac{c^2}{4}$.

D. $m_a^2=\dfrac{2c^2+2b^2-a^2}{4}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $m_a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$.

Câu 38: Tam giác ABC có $AB=9$ cm, $BC=15$ cm, $AC=12$ cm. Khi đó đường trung tuyến AM của tam giác có độ dài là

A. 10 cm. **B.** 9 cm. **C.** 7,5 cm. **D.** 8 cm.

Lời giải

Chọn C

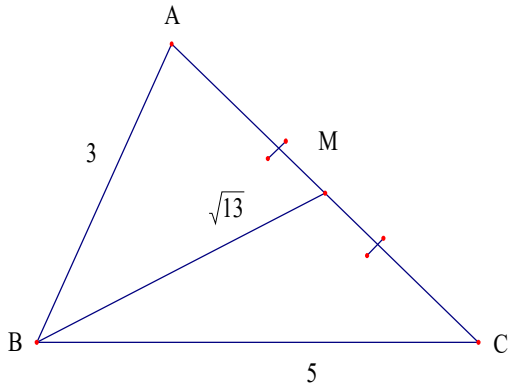
Ta có $AM^2=\dfrac{AB^2+AC^2}{2}-\dfrac{BC^2}{4}=\dfrac{9^2+12^2}{2}-\dfrac{15^2}{4}=\dfrac{225}{4}\Rightarrow AM=\dfrac{15}{2}$.

Câu 39: Cho tam giác ABC có $AB=3, BC=5$ và độ dài đường trung tuyến $BM=\sqrt{13}$. Tính độ dài AC.

A. $\sqrt{11}$. **B.** 4. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn B



Theo công thức tính độ dài đường trung tuyến;ta có: $BM^2=\frac{BA^2+BC^2}{2}-\frac{AC^2}{4}\Leftrightarrow\left(\sqrt{13}\right)^2=\frac{3^2+5^2}{2}-\frac{AC^2}{4}\Leftrightarrow AC=4$.

Câu 40: Cho ΔABC vuông ở A, biết $\widehat{C}=30°$, $AB=3$. Tính độ dài trung tuyến AM?

A. 3 **B.** 4 **C.** $\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{7}{2}$

Lời giải

Chọn A

AM là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $AM=\frac{1}{2}BC=BM=MC$.

Xét ΔBAC có $\widehat{B}=90°-30°=60°$.

Xét tam giác ABM có $BM=AM$ và $\widehat{B}=60°$ suy ra ΔABM là tam giác đều.

$\Rightarrow AM=AB=3$.

Câu 41: Tam giác ABC có $a=6,b=4\sqrt{2},c=2$. M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM=3$. Độ dài đoạn AM bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{9}$. **B.** 9. **C.** 3. **D.** $\frac{1}{2}\sqrt{108}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: Trong tam giác ABC có $a=6\Rightarrow BC=6$ mà $BM=3$ suy ra M là trung điểm BC.

Suy ra: $AM^2=m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}=9\Rightarrow AM=3$.

Câu 42: Gọi $S=m_a^2+m_b^2+m_c^2$ là tổng bình phương độ dài ba trung tuyến của tam giác ABC. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. $S=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$. **B.** $S=a^2+b^2+c^2$.

C. $S=\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)$. **D.** $S=3(a^2+b^2+c^2)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $S=m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}+\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

Câu 43: Cho tam giác ABC. Tìm công thức sai:

A. $\frac{a}{\sin A}=2R$. **B.** $\sin A=\frac{a}{2R}$. **C.** $b\sin B=2R$. **D.** $\sin C=\frac{c\sin A}{a}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

Câu 44: Cho ΔABC với các cạnh $AB=c,AC=b,BC=a$. Gọi R,r,S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác ABC. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

A. $S=\dfrac{abc}{4R}$. **B.** $R=\dfrac{a}{\sin A}$.

C. $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$. **D.** $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$.

Lời giải

Chọn B.

Theo định lí Sin trong tam giác, ta có $\dfrac{a}{\sin A}=2R$.

Câu 45: Cho tam giác ABC có góc $\widehat{BAC}=60^\circ$ và cạnh $BC=\sqrt{3}$. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $R=4$. **B.** $R=1$. **C.** $R=2$. **D.** $R=3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\dfrac{BC}{\sin A}=2R\Leftrightarrow R=\dfrac{BC}{2\sin A}=\dfrac{\sqrt{3}}{2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=1$.

Câu 46: Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC có $AC=4$ cm, góc $\widehat{A}=60^\circ$, $\widehat{B}=45^\circ$. Độ dài cạnh BC là

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $2+2\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}-2$. **D.** $\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}\Leftrightarrow BC=\dfrac{4.\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{6}$.

Câu 47: Cho ΔABC có $AB=5;\widehat{A}=40^\circ;\widehat{B}=60^\circ$. Độ dài BC gần nhất với kết quả nào?

A. $3,7$. **B.** $3,3$. **C.** $3,5$. **D.** $3,1$.

Lời giải

Chọn B

$\widehat{C}=180^\circ-\widehat{A}-\widehat{B}=180^\circ-40^\circ-60^\circ=80^\circ$

Áp dụng định lý sin: $\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AB}{\sin C}\Rightarrow BC=\dfrac{AB}{\sin C}.\sin A=\dfrac{5}{\sin 80^\circ}\sin 40^\circ\approx 3,3$.

Câu 48: Cho tam giác ABC thoả mãn hệ thức $b+c=2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\cos B+\cos C=2\cos A.$ **B.** $\sin B+\sin C=2\sin A.$

C. $\sin B+\sin C=\dfrac{1}{2}\sin A$. **D.** $\sin B+\cos C=2\sin A.$

Lời giải

Chọn B.

Ta có:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\Rightarrow\frac{\frac{b+c}{2}}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Leftrightarrow\frac{b+c}{2\sin A}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}\Leftrightarrow\sin B+\sin C=2\sin A.$$

Câu 49: Tam giác ABC có $a=16,8$; $\widehat{B}=56^0 13'$; $\widehat{C}=71^0$. Cạnh c bằng bao nhiêu?

A. 29,9. **B.** 14,1. **C.** 17,5. **D.** 19,9.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: Trong tam giác ABC: $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^0\Rightarrow\widehat{A}=180^0-71^0-56^0 13'=52^0 47'$.

Mặt khác $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow c=\frac{a.\sin C}{\sin A}=\frac{16,8.\sin 71^0}{\sin 52^0 47'}\simeq 19,9$.

Câu 50: Chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

A. $S=\frac{1}{2}bc\sin A$. **B.** $S=\frac{1}{2}ac\sin A$. **C.** $S=\frac{1}{2}bc\sin B$. **D.** $S=\frac{1}{2}bc\sin B$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$.

Câu 51: Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a. Góc $\widehat{BAD}=30°$. Diện tích hình thoi $ABCD$ là

A. $\frac{a^2}{4}$. **B.** $\frac{a^2}{2}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D.** a^2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $S_{ABCD}=AB.AD.\sin\widehat{BAD}=a.a.\sin 30°=\frac{1}{2}a^2$.

Câu 52: Cho ΔABC có $a=6,b=8,c=10$. Diện tích S của tam giác trên là:

A. 48. **B.** 24. **C.** 12. **D.** 30.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: Nửa chu vi ΔABC: $p=\frac{a+b+c}{2}$.

Áp dụng công thức Hê-rông: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)}=24$.

Câu 53: Cho ΔABC có $a=4,c=5,B=150^0$. Diện tích của tam giác là:

A. $5\sqrt{3}$. **B.** 5. **C.** 10. **D.** $10\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a.c.\sin B=\frac{1}{2}.4.5.\sin 150^0=5$.

Câu 54: Một tam giác có ba cạnh là 13,14,15. Diện tích tam giác bằng bao nhiêu?

A. 84. **B.** $\sqrt{84}$. **C.** 42. **D.** $\sqrt{168}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{13+14+15}{2}=21$.

Suy ra: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}=84$.

Câu 55: Cho tam giác ABC có $a=4,b=6,c=8$. Khi đó diện tích của tam giác là:

A. $9\sqrt{15}$. **B.** $3\sqrt{15}$. **C.** 105. **D.** $\dfrac{2}{3}\sqrt{15}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{4+6+8}{2}=9$.

Suy ra: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=3\sqrt{15}$.

Câu 56: Tam giác ABC có các trung tuyến $m_a=15$, $m_b=12$, $m_c=9$. Diện tích S của tam giác ABC bằng

A. 72. **B.** 144. **C.** 54. **D.** 108.

Lời giải 1

Chọn A

Theo bài toán ta có

$$\begin{cases} m_a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}=15^2 \\ m_b^2=\dfrac{a^2+c^2}{2}-\dfrac{b^2}{4}=12^2 \\ m_c^2=\dfrac{a^2+b^2}{2}-\dfrac{c^2}{4}=9^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2+2c^2-a^2=900 \\ 2a^2+2c^2-b^2=576 \\ 2a^2+2b^2-c^2=324 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=10 \\ b=4\sqrt{13} \\ c=2\sqrt{73} \end{cases}$$

Ta có $p=\dfrac{a+b+c}{2}=5+2\sqrt{13}+\sqrt{73}$, áp dụng công thức He-rong ta có

$S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=72$.

Cách 2:

Đặt $BC=a,CA=b,AB=c$,

Theo định lý trung tuyến có:

$$\begin{cases} 4m_a^2+a^2=2\left(b^2+c^2\right) \\ 4m_b^2+b^2=2\left(a^2+c^2\right) \\ 4m_c^2+c^2=2\left(b^2+a^2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a^2+2b^2+2c^2=900 \\ 2a^2-b^2+2c^2=576 \\ 2a^2+2b^2-c^2=324 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=100 \\ b^2=208 \\ c^2=291 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=100 \\ b^2=208 \\ c^2=292 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=10 \\ b=4\sqrt{13} \\ c=2\sqrt{73} \end{cases}$$

Có $S_{ABC}=\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$, $p=\dfrac{1}{2}\left(a+b+c\right)$ Suy ra $S_{ABC}=72$

Câu 57: Cho tam giác ΔABC có $b=7;c=5;\cos A=\dfrac{3}{5}$. Độ dài đường cao h_a của tam giác ΔABC là.

A. $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$. **B.** 8. **C.** $8\sqrt{3}$ **D.** $80\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn A

$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}=\sqrt{7^2+5^2-2.7.5.\frac{3}{5}}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$. Suy ra $\left[\begin{array}{l}\sin A=\frac{4}{5}\\ \sin A=-\frac{4}{5}\end{array}\right.$ vì $0\le\hat{A}\le 180^0$ nên $\sin A=\frac{4}{5}$

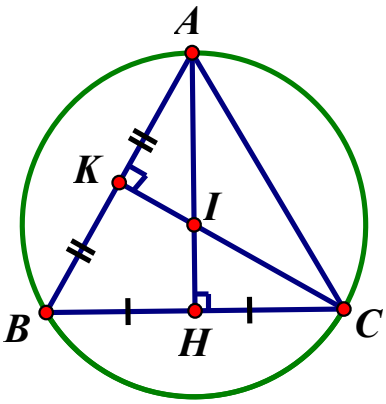
$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}.7.5.\frac{4}{5}=14$ mà $S=\frac{1}{2}a.h_a\Leftrightarrow 14=\frac{1}{2}.4\sqrt{2}.h_a\Leftrightarrow h_a=\frac{7\sqrt{2}}{2}$

Câu 58: Cho tam giác ABC đều cạnh $2a$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{4a}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{8a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{6a}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H, K lần lượt là trung điểm cạnh AB, BC;

I là giao điểm của AH và CK.

Lúc đó, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có: $AH=\frac{2a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

Do đó: $R=AI=\frac{2}{3}AH=\frac{2}{3}a\sqrt{3}=\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Câu 59: Cho tam giác ABC có $BC=\sqrt{6}$, $AC=2$ và $AB=\sqrt{3}+1$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng:

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng định lý cosin ta có $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$ suy ra $A=60°$.

Áp dụng định lý sin ta có $R=\frac{a}{2\sin A}=\sqrt{2}$.

Câu 60: Cho tam giác ABC có $AB=3$, $AC=4$, $BC=5$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng

A. 1. **B.** $\frac{8}{9}$. **C.** $\frac{4}{5}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $AB^2+AC^2=BC^2$ nên tam giác ABC vuông tại A.

Do đó bán kính đường tròn nội tiếp $r=\frac{S}{p}=\frac{\frac{1}{2}AB.AC}{\frac{1}{2}(AB+AC+BC)}=\frac{3.4}{3+4+5}=1$.

Câu 61: Cho ΔABC có $S=84,a=13,b=14,c=15$. Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác trên là:

A. $8,125$. **B.** 130. **C.** 8. **D.** $8,5$.

Lời giải

ChọnA.

Ta có: $S_{\Delta ABC}=\frac{a.b.c}{4R}\Leftrightarrow R=\frac{a.b.c}{4S}=\frac{13.14.15}{4.84}=\frac{65}{8}$.

Câu 62: Cho ΔABC có $S=10\sqrt{3}$, nửa chu vi $p=10$. Độ dài bán kính đường tròn nội tiếp r của tam giác trên là:

A. 3. **B.** 2. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $S=pr\Rightarrow r=\frac{S}{p}=\frac{10\sqrt{3}}{10}=\sqrt{3}$.

Câu 63: Một tam giác có ba cạnh là $26,28,30$. Bán kính đường tròn nội tiếp là:

A. 16. **B.** 8. **C.** 4. **D.** $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{26+28+30}{2}=42$.

$S=pr\Rightarrow r=\frac{S}{p}=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}=\frac{\sqrt{42(42-26)(42-28)(42-30)}}{42}=8$.

Câu 64: Một tam giác có ba cạnh là $52,56,60$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp là:

A. $\frac{65}{8}$. **B.** 40. **C.** $32,5$. **D.** $\frac{65}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{52+56+60}{2}=84$.

Suy ra: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{84(84-52)(84-56)(84-60)}=1344$.

Mà $S=\frac{abc}{4R}\Rightarrow R=\frac{abc}{4S}=\frac{52.56.60}{4.1344}=\frac{65}{2}$.

Câu 65: Tam giác với ba cạnh là $5;12;13$ có bán kính đường tròn ngoại tiếp là?

A. 6. **B.** 8. **C.** $\frac{13}{2}$. **D.** $\frac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $5^2+12^2=13^2\Rightarrow R=\frac{13}{2}$. (Tam giác vuông bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\frac{1}{2}$ cạnh huyền).

Câu 66: Tam giác với ba cạnh là $5;12;13$ có bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu?

A. 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** 3.

Lời giải

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1: Cho $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$. Hãy tính $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\cos\alpha$.

Lời giải.

Ta có: $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{4}{5}(\text{Vì }\sin\alpha>0)$

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{5}:\left(-\frac{3}{5}\right)=\left(-\frac{4}{3}\right)$. Do đó $\cot\alpha=-\frac{3}{4}$

Câu 2: Biết rằng $\sin15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc 15°. Chứng minh $2\sin15^\circ.\cos15^\circ=\sin30^\circ$

Lời giải.

Ta có: $\cos^2 15^\circ=1-\sin^2 15^\circ=1-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{8+4\sqrt{3}}{16}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{8}$

Từ đó $\cos15^\circ=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{8}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$;

$\tan15^\circ=\frac{\sin15^\circ}{\cos15^\circ}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{4}=2-\sqrt{3}$;

$\cos15^\circ=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$.

Ta có $2\sin15^\circ.\cos15^\circ=2.\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{8}(6-2)=\frac{1}{2}=\sin30^\circ$.

Câu 3: Cho $\tan\alpha=-2$. Tính $\cos\alpha$ và $\sin\alpha$.

Lời giải.

Vì $\tan\alpha=-2<0$ nên $90^\circ<\alpha<180^\circ$ suy ra $\cos\alpha<0$.Ta có:

$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$

Vậy $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ và $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Do đó

$\sin\alpha=\cos\alpha.\tan\alpha=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right).(-2)=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 4: Cho $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, tính $P=3\sin^2 x+4\cos^2 x$.

Lời giải.

Ta có $P=3\sin^2 x+4\cos^2 x=3\left(1-\cos^2 x\right)+4\cos^2 x=3+\cos^2 x=3+\frac{1}{4}=\frac{13}{4}$.

Câu 5: Cho $\cos x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, tính $P=3\sin x+\cos x$

Lời giải.

Ta có $\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2=1-\frac{2+\sqrt{3}}{4}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}=\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{4^2}$.

Chọn $\sin x=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ do $0^\circ\le x\le 180^0$

Vậy $P=3\sin x+\cos x=\frac{3}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)+\frac{4}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)=\frac{7\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Câu 6: Cho $\tan\alpha=\sqrt{2}$, tính giá trị của biểu thức:

a) $A=\frac{3\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$

b) $B=\frac{2\sin^2\alpha+1}{3\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}$

Lời giải.

a) Chia tử và mẫu cho $\cos\alpha$, ta được

$A=\frac{3\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{3\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}=\frac{3\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\left(3\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{2-1}=7-4\sqrt{2}$

b) Chia tử và mẫu cho $\cos^2\alpha$, ta được:

$B=\frac{2\sin^2\alpha+1}{3\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}=\frac{2\tan^2\alpha+\left(1+\tan^2\alpha\right)}{3\tan^2\alpha+2}=\frac{3\tan^2\alpha+1}{3\tan^2\alpha+2}=\frac{7}{8}$

Câu 7: Biết $\sin\alpha=\frac{2}{5}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{\cos\alpha-\tan\alpha}{\cos\alpha+\tan\alpha}$.

Lời giải.

$P=\frac{\cos\alpha-\tan\alpha}{\cos\alpha+\tan\alpha}=\frac{\frac{\cos\alpha}{2}-\tan\alpha}{\cos\alpha+\tan\alpha}=\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$

$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - 2\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{17}{25}$

Câu 8: Chứng minh các đẳng thức sau(giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x.\cos^2 x$

b) $\frac{1+\cot x}{1-\cot x} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$

c) $\frac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x} = \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$

Lời giải

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$= \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

$= 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$

b) $\frac{1+\cot x}{1-\cot x} = \frac{1+\frac{1}{\tan x}}{1-\frac{1}{\tan x}} = \frac{\frac{\tan x+1}{\tan x}}{\frac{\tan x-1}{\tan x}} = \frac{\tan x+1}{\tan x-1}$

c) $\frac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^3 x} = \tan^2 x + 1 + \tan x\left(\tan^2 x + 1\right)$

$= \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$

Câu 9: Chứng minh rằng biểu thức sau đây không phụ thuộc vào x

a) $A = \left(\sin x + \cos x\right)^2 + \left(\sin x - \cos x\right)^2$

b) $B = \sin^4 x - \cos^4 x - 2\sin^2 x + 1$

Lời giải

a) $A = \left(\sin x + \cos x\right)^2 + \left(\sin x - \cos x\right)^2 = 1 + 2\sin x.\cos x + 1 - 2\sin x.\cos x = 2$

b) $B = \sin^4 x - \cos^4 x - 2\sin^2 x + 1 = \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) - 2\sin^2 x + 1$

$= 1\left[\sin^2 x - \left(1 - \sin^2 x\right)\right] - 2\sin^2 x + 1 = 0$

Câu 10: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

a) $\sin A = \sin\left(B + C\right)$

b) $\cos A = -\cos\left(B + C\right)$

c) $\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}$

d) $\tan A = -\tan\left(B + C\right)$

Lời giải

Vì A, B, C là 3 góc của ta giác nên A + B + C = 180^0 do đó

a) Ta có $\sin A = \sin\left(180° - A\right) = \sin\left(B + C\right)$

b) Ta có $\cos A = -\cos\left(180° - A\right) = -\cos\left(B + C\right)$

c) Ta có $\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\left(90^\circ-\dfrac{A+B}{2}\right)=\cos\dfrac{C}{2}$

d) Ta có $\tan A=-\tan(180^\circ-A)=-\tan(B+C)$

Câu 11: Chứng minh rằng nếu $(1-\sin A)(1-\sin B)=\cos A\cos B$ thì $(1+\sin A)(1+\sin B)=\cos A\cos B$

Lời giải

Vì $1+\sin A>0;1+\sin B>0$ nên

$(1-\sin A)(1-\sin B)=\cos A\cos B$

$\Leftrightarrow(1-\sin A)(1-\sin B)(1+\sin A)(1+\sin B)=\cos A\cos B(1+\sin A)(1+\sin B)$

$\Leftrightarrow(1-\sin^2 A)(1-\sin^2 B)=\cos A\cos B(1+\sin A)(1+\sin B)$

$\Leftrightarrow\cos^2 A\cos^2 B=\cos A\cos B(1+\sin A)(1+\sin B)$

$\Leftrightarrow(1+\sin A)(1+\sin B)=\cos A\cos B$

Câu 12: Tam giác ABC có $b+2c=2a$. Chứng minh rằng

a) $2\sin A=\sin B+\sin C$.

b) $\dfrac{2}{h_a}=\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}$

Lời giải.

a) Theo định lí sin ta có

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=\frac{2a}{\sin B+\sin C}\Rightarrow 2\sin A=\sin B+\sin C$$

Cách khác: $a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$

Nên $b+c=2a\Rightarrow 2R\sin B+2R\sin C=2.2R\sin A\Rightarrow\sin B+\sin C=2\sin A$

b) Ta có $S=\dfrac{1}{2}a.h_a=\dfrac{1}{2}b.h_b=\dfrac{1}{2}c.h_c\Rightarrow\dfrac{1}{h_a}=\dfrac{a}{2S};\dfrac{1}{h_b}=\dfrac{b}{2S};\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{c}{2S}$

Do đó $S=\dfrac{1}{2}a.h_a=\dfrac{1}{2}b.h_b=\dfrac{1}{2}c.h_c\Rightarrow\dfrac{1}{h_a}=\dfrac{a}{2S};\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{2S}(b+c)=\dfrac{1}{2S}2a=\dfrac{2}{h_a}$

Câu 13: Tam giác ABC có $bc=a^2$. Chứng minh rằng

a) $\sin^2 A=\sin B.\sin C$.

b) $h_b.h_c=h_a^2$

Lời giải.

a) Theo giả thiết ta có $a^2=bc$

Thay $a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$ vào hệ thức trên ta được

$4R^2\sin^2 A=2R\sin B.2R\sin C\Rightarrow\sin^2 A=\sin B.\sin C$

b) Ta có $2S=a.h_a=b.h_b=c.h_c\Rightarrow a^2h_a^2=b.h_b.c.h_c$

Theo giả thiết $a^2=bc$ nên suy ra $h_a^2=h_b.h_c$

Câu 14: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta đều có $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\dfrac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

Lời giải.

Áp dụng định lí trung tuyến trong tam giác ta có

$$m_a^2=\frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4};\ m_b^2=\frac{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}{4};\ m_c^2=\frac{2\left(a^2+b^2\right)-a^2}{4}$$

Từ đó suy ra $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$

Câu 15: Gọi là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh

$$GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Lời giải.

Theo tính chất của trọng tâm, ta có $GA=\frac{2}{3}m_a;GB=\frac{2}{3}m_b;GC=\frac{2}{3}m_c$

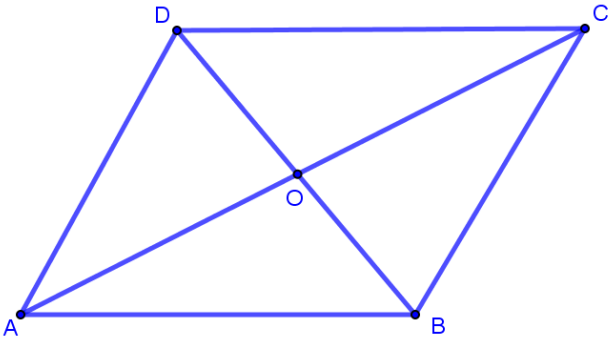
Nên $GA^2+GB^2+GC^2=\left(\frac{2}{3}m_a\right)^2+\left(\frac{2}{3}m_b\right)^2+\left(\frac{2}{3}m_c\right)^2=\frac{4}{9}\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2\right)$

$$=\frac{4}{9}\left(\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}+\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}\right)=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Câu 16: Chứng minh rằng tổng bình phương hai đường chéo của hình bình hành bằng tổng bình phương bốn cạnh của nó.

Lời giải.

Xét hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD thì AO là trung tuyến của tam giác ABD.



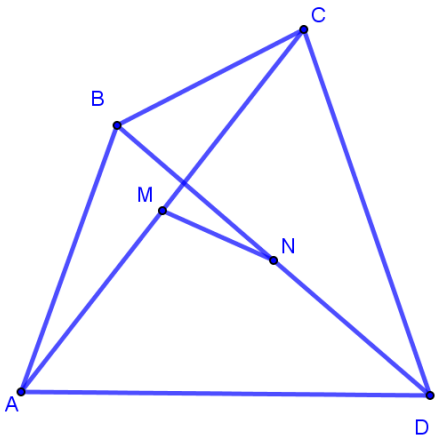
Ta có

$$AO^2=\frac{AB^2+AD^2}{2}-\frac{BD^2}{4}\Leftrightarrow\frac{AC^2}{4}=\frac{AB^2+AD^2}{2}-\frac{BD^2}{4}\Leftrightarrow AC^2+BD^2=2\left(AB^2+AD^2\right)$$

Câu 17: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm hai đường chéo AC,BD. Chứng minh $AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=AC^2+BD^2+4MN^2$

Lời giải.

Trong tam giác ABD,CBD, ta có



$AB^2+AD^2=2AN^2+\dfrac{BD^2}{2}$

$CB^2+CD^2=2CN^2+\dfrac{BD^2}{2}$

Vậy nên $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2\left(AN^2+CN^2\right)+BD^2$

Vì M là trung điểm của AC nên

$NA^2+NC^2=2MN^2+\dfrac{AC^2}{2}$

Do đó $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2\left(2MN^2+\dfrac{AC^2}{2}\right)+BD^2=AC^2+BD^2+4MN^2$

Câu 18: Cho tam giác ABC có cạnh $a=2\sqrt{3}$, $b=2$, $C=30°$. Chứng minh ABC là tam giác cân. Tính diện tích và chiều cao h_a của tam giác.

Lời giải

Theo định lý cosin ta có $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=12+4-2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4$

Do đó $c=2=b$ nên tam giác ABC cân tại A có góc $B=C=30°$.

Ta có $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2}=\sqrt{3}$, $h_a=\dfrac{2S}{a}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=1$.

Câu 19: Xét dạng tam giác ABC thoả mãn $\dfrac{1+\cos B}{\sin B}=\dfrac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$.

Lời giải

Ta có

$\dfrac{1+\cos B}{\sin B}=\dfrac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}\Leftrightarrow\dfrac{(1+\cos B)^2}{\sin^2 B}=\dfrac{(2a+c)^2}{4a^2-c^2}$

$\Leftrightarrow\dfrac{1+\cos B}{1-\cos B}=\dfrac{2a+c}{2a-c}\Leftrightarrow\dfrac{1+\cos B}{1-\cos B}-1=\dfrac{2a+c}{2a-c}-1$

$\Leftrightarrow 2ac\cdot\cos B=c^2\Leftrightarrow a^2+c^2-b^2=c^2\Leftrightarrow a^2=b^2=b^2\Leftrightarrow a=b$

Vậy tam giác ABC cân tại C.

Câu 20: Cho tam giác ABC có chiều cao $h_a=\sqrt{p(p-a)}$.Chứng minh ABC là tam giác cân.

Lời giải

Ta có $S=\frac{1}{2}a\cdot h_a=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ nên

$h_a=\sqrt{p(p-a)}\Leftrightarrow 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=a\sqrt{p(p-a)}\Leftrightarrow 2\sqrt{(p-b)(p-c)}=a$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có $2\sqrt{(p-b)(p-c)}\le (p-b)+(p-c)=2p-b-c=a$.

Do đó dấu đẳng thức xảy ra nên $p-b=p-c\Leftrightarrow b=c$.

Vậy tam giác ABC cân tại A.

Câu 21: Chứng minh tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $5m_a^2=m_b^2+m_c^2$.

Lời giải

Áp dụng định lý trung tuyến ta có:

$$5m_a^2=m_b^2+m_c^2\Leftrightarrow 5\left(\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)=\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}+\frac{a^2+b^2}{2}-\frac{c^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 5\left(2b^2+2c^2\right)-5a^2=2\left(a^2+c^2\right)-b^2+2\left(a^2+b^2\right)-c^2\Leftrightarrow 9b^2+9c^2=9a^2\Rightarrow b^2+c^2=a^2$$

Vậy ABC là tam giác vuông tại A.

CHƯƠNG IV. VECTƠ

Hình 4.1 cho thấy ga An Cựu cách Hoàng cung Huế 3,01 km về hướng đông nam. Hai thông tin khoảng cách và hướng cho phép ta xác định được vị trí của ga An Cựu theo vị trí của Hoàng cung Huế.



Hình 4.1 (Theo Google Maps)

Một số đại lượng như lực, vận tốc cũng được đặc trưng bởi hai yếu tố là độ lớn và hướng. Chương này xây dựng một đối tượng toán học, được gọi là vectơ, mà ta có thể dùng nó để biểu diễn các đại lượng nói trên.

Vectơ còn được sử dụng để xây dựng các khái niệm toán học, là công cụ để giải quyết nhiều bài toán và góp phần vào việc hình thành và phát triển năng lực tư duy tuyến tính cho người học.

Bài 7 CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

THUẬT NGỮ

- Vectơ
- Vectơ-không
- Độ dài của vectơ
- Hai vectơ cùng phương
- Hai vectơ cùng hướng
- Hai vectơ bằng nhau

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

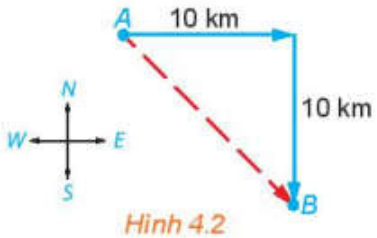
- Nhận biết khái niệm vectơ, hai vectơ cùng phương, hai vectơ cùng hướng, hai vectơ bằng nhau, vectơ-không.
- Biểu thị một số đại lượng như lực, vận tốc bằng vectơ.

Nhiệt độ và gió là hai yếu tố luôn cùng được đề cập trong các bản tin dự báo thời tiết. Tuy nhiên, nhiệt độ là đại lượng chỉ có độ lớn, còn gió có cả hướng và độ lớn. Với một đơn vị đo, ta có thể dùng số để biểu diễn nhiệt độ. Đối với các đại lượng gồm hướng và độ lớn như vận tốc gió thì sao? Ta có thể dùng đối tượng toán học nào để biểu diễn chúng?



1. KHÁI NIỆM VECTƠ

HĐ1. Một con tàu khởi hành từ đảo A, đi thẳng về hướng đông 10 km rồi đi thẳng tiếp 10 km về hướng nam thì tới đảo B (H.4.2). Nếu từ đảo A, tàu đi thẳng (không đổi hướng) tới đảo B, thì phải đi theo hướng nào và quãng đường phải đi dài bao nhiêu kilômét?



Hình 4.2

Ta có thể gắn cho quãng đường thẳng từ đảo A tới đảo B đồng thời hai yếu tố, đó là độ dài và hướng (hướng đi thẳng từ đảo A tới đảo B). Từ thực tế này, ta đi tới khái niệm toán học sau:

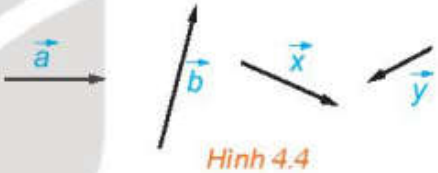
- Vectơ là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là, trong hai điểm mút của đoạn thẳng, đã chỉ rõ điểm đầu, điểm cuối.
- Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Chú ý

- Vectơ có điểm đầu A và điểm cuối B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là *vectơ AB* (H.4.3).
- Để vẽ một vectơ, ta vẽ đoạn thẳng nối điểm đầu và điểm cuối của nó, rồi đánh dấu mũi tên ở điểm cuối (H.4.3).
- Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$ (H.4.4).
- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}, \vec{a}$ tương ứng được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|, |\vec{a}|$.



Hình 4.3



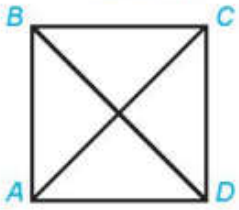
Hình 4.4

Ví dụ 1. Cho hình vuông $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}$.

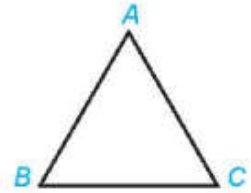
Giải

Vì cạnh của hình vuông $ABCD$ có độ dài bằng 1 nên các đường chéo của hình vuông này có độ dài bằng $\sqrt{2}$.

Vậy $|\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{2}, |\overrightarrow{CA}| = CA = \sqrt{2}, |\overrightarrow{BD}| = BD = \sqrt{2}$.



Luyện tập 1. Cho tam giác đều ABC với cạnh có độ dài bằng a. Hãy chỉ ra các vectơ có độ dài bằng a và có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của tam giác ABC.



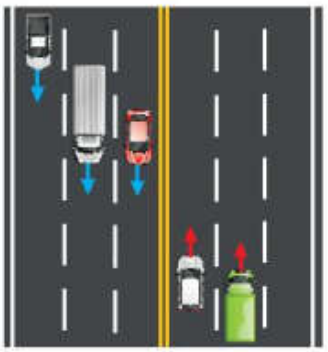
2. HAI VECTƠ CÙNG PHƯƠNG, CÙNG HƯỚNG, BẰNG NHAU

HĐ2. Quan sát các làn đường trong Hình 4.5 và cho biết những nhận xét nào sau đây là đúng.

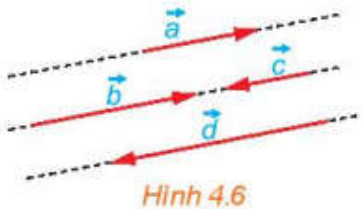
a) Các làn đường song song với nhau.

b) Các xe chạy theo cùng một hướng.

c) Hai xe bất kì đều chạy theo cùng một hướng hoặc hai hướng ngược nhau.

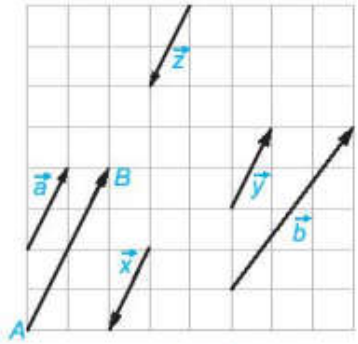

Hình 4.5

- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó.
- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.



Hình 4.6

Trong Hình 4.7, mỗi cặp vectơ trong các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ đều cùng phương, nhưng vectơ $\vec{b}$ không cùng phương với mỗi vectơ trên.



Hình 4.7

HĐ3. Xét các vectơ cùng phương trong Hình 4.7. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\overrightarrow{AB}$ được gọi là cùng hướng, còn hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{x}$ được gọi là ngược hướng. Hãy chỉ ra các vectơ cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ và các vectơ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$.

Đối với hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.

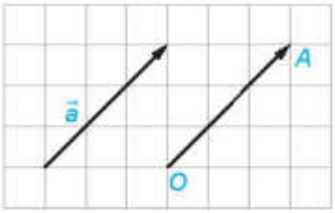
Chỉ khi hai vectơ cùng phương, ta mới nói tới chúng cùng hướng hay ngược hướng.



Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a}=\vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chú ý

- Ta cũng xét các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau (chẳng hạn $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, $\overrightarrow{MM}$), gọi là các vectơ-không.
- Ta quy ước vectơ-không có độ dài bằng 0, cùng hướng (do đó cùng phương) với mọi vectơ.
- Các vectơ-không có cùng độ dài và cùng hướng nên bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.
- Với mỗi điểm O và vectơ $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm A sao cho $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ (H.4.8).

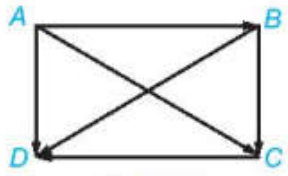


Hình 4.8

Ví dụ 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Hãy chỉ ra mối quan hệ về độ dài, phương, hướng giữa các cặp vectơ: $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$. Những cặp vectơ nào trong các cặp vectơ trên là bằng nhau?

Giải (H.4.9)

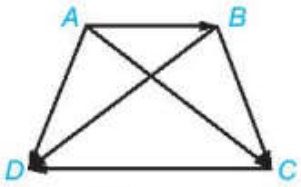
- Hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$ có cùng độ dài và cùng hướng. Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng nhau.
- Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ có cùng độ dài và ngược hướng. Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ không bằng nhau.
- Hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ có cùng độ dài nhưng không cùng phương nên không cùng hướng. Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ không bằng nhau.



Hình 4.9

Vậy trong các cặp vectơ đang xét, chỉ có cặp vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$ là bằng nhau ($\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$).

Luyện tập 2. Cho hình thang cân $ABCD$ với hai đáy AB, CD, $AB < CD$ (H.4.10). Hãy chỉ ra mối quan hệ về độ dài, phương, hướng giữa các cặp vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$. Có cặp vectơ nào trong các cặp vectơ trên bằng nhau hay không?



Hình 4.10

Ví dụ 3. Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Giải

- Giả sử ba điểm A, B, C thẳng hàng. Khi đó, chúng cùng thuộc một đường thẳng d. Vậy hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ có cùng giá là d. Suy ra chúng cùng phương.
- Giả sử hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương. Khi đó, chúng có cùng giá hoặc có hai giá song song với nhau. Mặt khác, giá của các vectơ trên đều đi qua A nên chúng trùng nhau. Vậy A, B, C thẳng hàng.



Nhận xét. Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

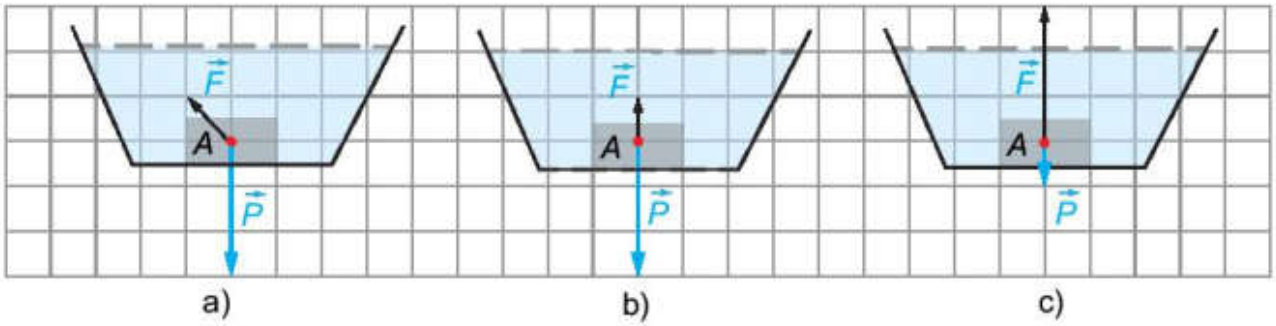
Luyện tập 3. Trong các điều kiện dưới đây, chọn điều kiện cần và đủ để một điểm M nằm giữa hai điểm phân biệt A và B.

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ ngược hướng.
b) $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ cùng phương.
c) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng.
d) $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng.

Chú ý. Ta có thể dùng vectơ để biểu diễn các đại lượng như lực, vận tốc, gia tốc. Hướng của vectơ chỉ hướng của đại lượng, độ dài của vectơ thể hiện cho độ lớn của đại lượng và được lấy tỉ lệ với độ lớn của đại lượng.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ví dụ 4. Một vật A được thả chìm hoàn toàn dưới đáy một cốc chất lỏng. Biết rằng trong ba cách biểu diễn lực đẩy Archimedes (Ác-si-mét) $\vec{F}$ và trọng lực $\vec{P}$ tác động lên vật A ở Hình 4.11, có một cách biểu diễn đúng.



Hình 4.11

Hãy chỉ ra mối quan hệ giữa trọng lượng riêng của vật A và trọng lượng riêng của chất lỏng trong cốc.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Xác Định Một Vectơ; Phương, Hướng Của Vectơ; Độ Dài Của Vectơ

1. Phương pháp giải.

- Xác định một vectơ và xác định sự cùng phương, cùng hướng của hai vectơ theo định nghĩa
- Dựa vào các tính chất hình học của các hình đã cho biết để tính độ dài của một vectơ

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của tứ giác.

Lời giải

Hai điểm phân biệt, chẳng hạn $A,\ B$ ta xác định được hai vectơ khác vectơ-không là $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BA}$. Mà từ bốn đỉnh $A,\ B,\ C,\ D$ của tứ giác ta có 6 cặp điểm phân biệt do đó có 12 vectơ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng ba điểm A,B,C phân biệt thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Lời giải

Nếu A,B,C thẳng hàng suy ra giá của $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ đều là đường thẳng đi qua ba điểm A,B,C nên $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Ngược lại nếu $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ cùng phương khi đó đường thẳng AB và AC song song hoặc trùng nhau. Nhưng hai đường thẳng này cùng đi qua điểm A nên hai đường thẳng AB và AC trùng nhau hay ba điểm A,B,C thẳng hàng.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của BC,CA,AB.

a) Xác định các vectơ khác vectơ - không cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong các điểm đã cho.

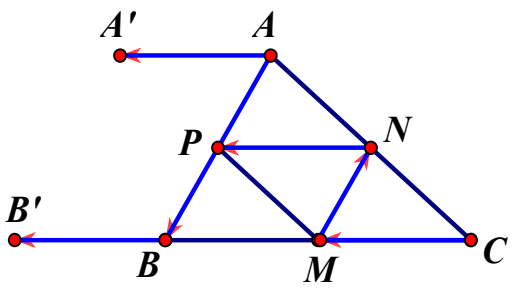
b) Xác định các vectơ khác vectơ - không cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.

c) Vẽ các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{NP}$ mà có điểm đầu A, B.

Lời giải (Hình 1.4)

a) Các vectơ khác vectơ không cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ là $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{PB}$.

b) Các vectơ khác vectơ - không cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{NM}$.



Hình 1.4

c) Trên tia CB lấy điểm B' sao cho $BB' = NP$

Khi đó ta có $\overrightarrow{BB'}$ là vectơ có điểm đầu là B và bằng vectơ $\overrightarrow{NP}$.

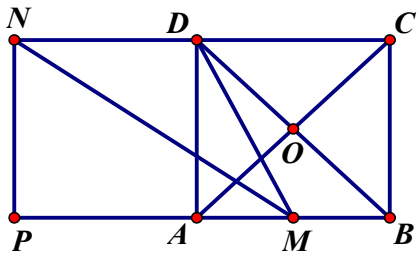
Qua A dựng đường thẳng song song với đường thẳng NP. Trên đường thẳng đó lấy điểm A' sao cho $\overrightarrow{AA'}$ cùng hướng với $\overrightarrow{NP}$ và $AA' = NP$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{AA'}$ là vectơ có điểm đầu là A và bằng vectơ $\overrightarrow{NP}$.

Ví dụ 4: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a. Gọi M là trung điểm của AB, N là điểm đối xứng với C qua D. Hãy tính độ dài của vectơ sau $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MN}$.

Lời giải (hình 1.5)

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông MAD ta có



Hình 1.5

$$DM^2 = AM^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Suy ra $\left|\overrightarrow{MD}\right| = MD = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Qua N kẻ đường thẳng song song với AD cắt AB tại P.

Khi đó tứ giác $ADNP$ là hình vuông và $PM = PA + AM = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$.

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông NPM ta có

$MN^2 = NP^2 + PM^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{13}}{2}$

Suy ra $\left|\overrightarrow{MN}\right| = MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Dạng 2: Chứng minh hai vectơ bằng nhau.

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh hai vectơ bằng nhau ta chứng minh chúng có cùng độ dài và cùng hướng hoặc dựa vào nhận xét nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

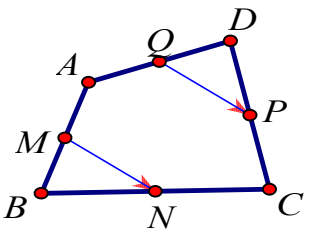
2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Lời giải (hình 1.6)

Do M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC nên MN là đường trung bình của tam giác ABC suy ra $MN // AC$ và $MN = \frac{1}{2}AC$ (1).

Tương tự QP là đường trung bình của tam giác ADC suy ra $QP // AC$ và $QP = \frac{1}{2}AC$ (2).



Hình 1.6

Từ (1) và (2) suy ra $MN // QP$ và $MN = QP$ do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Vậy ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là trung điểm của BC. Dựng điểm B' sao cho $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$

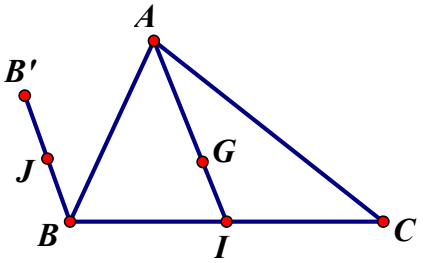
b) Gọi J là trung điểm của BB'. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

Lời giải (hình 1.7)

a) Vì I là trung điểm của BC nên $BI = CI$ và $\overrightarrow{BI}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IC}$ do đó hai vectơ $\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{IC}$ bằng nhau hay $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

b) Ta có $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$ suy ra $B'B = AG$ và $BB' // AG$.

Do đó $\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{IG}$ cùng hướng (1).



Hình 1.7

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $IG = \frac{1}{2}AG$, J là trung điểm BB' suy ra $BJ = \frac{1}{2}BB'$

Vì vậy $BJ = IG$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Vectơ có điểm đầu là D, điểm cuối là E được kí hiệu là

A. DE. **B.** $\left|\overrightarrow{DE}\right|$. **C.** $\overrightarrow{ED}$. **D.** $\overrightarrow{DE}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 2: Cho tam giác ABC. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ - không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh A, B, C?

A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Đó là các vectơ: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC}$.

Câu 3: Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ - không có điểm đầu và cuối là các đỉnh của tứ giác?

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D

Xét các vectơ có điểm A là điểm đầu thì có các vectơ thỏa mãn bài toán là $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}\longrightarrow$ có 3 vectơ.

Tương tự cho các điểm còn lại B, C, D.

Câu 4: Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Có duy nhất một vectơ cùng phương với mọi vectơ.

B. Có ít nhất hai vectơ có cùng phương với mọi vectơ.

C. Có vô số vectơ cùng phương với mọi vectơ.

D. Không có vectơ nào cùng phương với mọi vectơ.

Lời giải

Chọn A

Vì vectơ - không cùng phương với mọi vectơ.

Câu 5: Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Khi đó:

A. Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$.

B. Điều kiện đủ để A, B, C thẳng hàng là với mọi M, $\overrightarrow{MA}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

C. Điều kiện cần để A, B, C thẳng hàng là với mọi M, $\overrightarrow{MA}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

D. Điều kiện cần để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 6: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC. Hỏi cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

A. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MB}$. **C.** $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$. **D.** $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{CA}$.

Lời giải

Chọn B

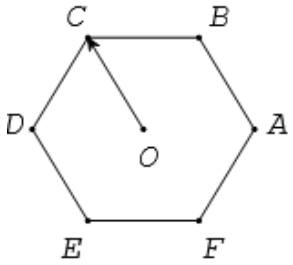
Câu 7: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Số các vectơ khác vectơ - không, cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Đó là các vectơ: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{CF}$.



Câu 8: Với $\overrightarrow{DE}$ (khác vectơ - không) thì độ dài đoạn ED được gọi là

A. Phương của $\overrightarrow{ED}$. **B.** Hướng của $\overrightarrow{ED}$.

C. Giá của $\overrightarrow{ED}$. **D.** Độ dài của $\overrightarrow{ED}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 9: Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$. **B.** $\vec{0}$ cùng hướng với mọi vectơ.

C. $\left|\overrightarrow{AB}\right|>0$. **D.** $\vec{0}$ cùng phương với mọi vectơ.

Lời giải

Chọn C

Vì có thể xảy ra trường hợp $\left|\overrightarrow{AB}\right|=0\Leftrightarrow A\equiv B$.

Câu 10: Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi

A. Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau.

B. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành.

C. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một tam giác đều.

D. Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau.

Lời giải

Chọn D

Câu 11: Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D và không cùng nằm trên một đường thẳng. Điều kiện nào trong các đáp án A, B, C, D sau đây là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$?

A. $ABCD$ là hình bình hành. **B.** $ABDC$ là hình bình hành.

C. $AC=BD$. **D.** $AB=CD$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Rightarrow\begin{cases}AB\parallel CD\\AB=CD\end{cases}\Rightarrow ABDC$ là hình bình hành.

- Mặt khác, $ABDC$ là hình bình hành $\Rightarrow\begin{cases}AB\parallel CD\\AB=CD\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Do đó, điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ là $ABDC$ là hình bình hành.

Câu 12: Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng $\overrightarrow{CD}$.
B. $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{CD}$.
C. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$.
D. $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

Chọn D

Phải suy ra $ABDC$ là hình bình hành (nếu A, B, C, D không thẳng hàng) hoặc bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

Câu 13: Gọi O là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
B. $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}$.
C. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$.
D. $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$.

Lời giải

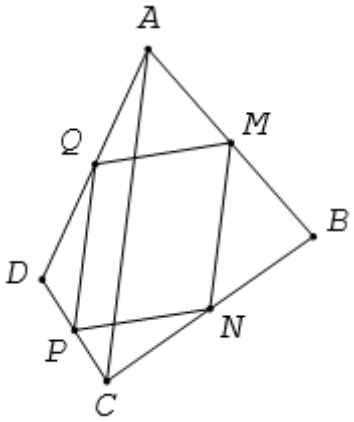
Chọn C

Câu 14: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$.
B. $\left|\overrightarrow{QP}\right|=\left|\overrightarrow{MN}\right|$.
C. $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}$.
D. $\left|\overrightarrow{MN}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có $\begin{cases}MN\parallel PQ\\MN=PQ\end{cases}$ (do cùng song song và bằng $\frac{1}{2}AC$).

Do đó $MNPQ$ là hình bình hành.

Câu 15: Cho hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

C. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$. **D.** Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Lời giải

Chọn C

Vì $AB=BC\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$.

Câu 16: Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình chữ nhật $ABCD$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$. **B.** $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OD}$ cùng hướng.

C. $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ cùng hướng. **D.** $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$.

Lời giải

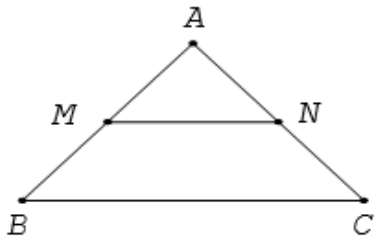
Chọn D

Câu 17: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}$. **D.** $\left|\overrightarrow{BC}\right|=2\left|\overrightarrow{MN}\right|$.

Lời giải

Chọn D



Ta có MN là đường trung bình của tam giác ABC.

Do đó $BC=2MN\longrightarrow\left|\overrightarrow{BC}\right|=2\left|\overrightarrow{MN}\right|$.

Câu 18: Cho tam giác ABC đều cạnh a. Gọi M là trung điểm BC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}$. **B.** $\overrightarrow{AM}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\overrightarrow{AM}=a$. **D.** $\left|\overrightarrow{AM}\right|=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

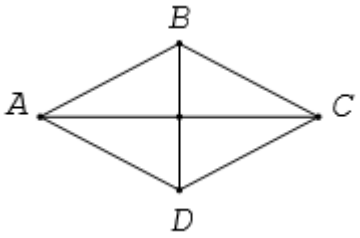
Chọn D

Câu 19: Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BAD}=60°$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$. **B.** $\left|\overrightarrow{BD}\right|=a$. **C.** $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}$.

Lời giải

Chọn B



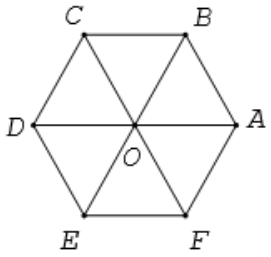
Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều cạnh a nên $BD = a \longrightarrow \left|\overrightarrow{BD}\right| = a$.

Câu 20: Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AF}\right|$. **C.** $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE}$.

Lời giải

Chọn D



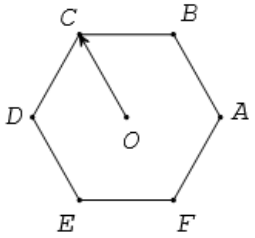
Câu 21: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Số các vectơ bằng $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Đó là các vectơ: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}$.



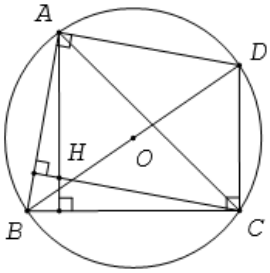
Câu 22: Cho tam giác ABC có trực tâm H. Gọi D là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$. **B.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.

C. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CH}$. **D.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ và $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $AH \perp BC$ và $DC \perp BC$ (do góc $\widehat{DCB}$ chắn nửa đường tròn).

Suy ra $AH \parallel DC$.

Tương tự ta cũng có $CH \parallel AD$.

Suy ra tứ giác $ADCH$ là hình bình hành. Do đó $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.

Câu 23: Cho $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm C. Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| \Leftrightarrow AB = CD$. Suy ra tập hợp các điểm D thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường tròn tâm C, bán kính AB.

Câu 24: Cho $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm C. Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

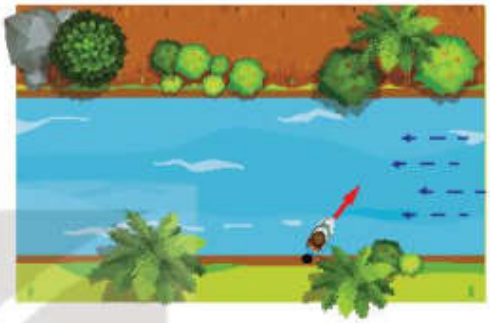
Chọn A

Bài 8 TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

THUẬT NGỮ
- Tổng của hai vectơ
- Hiệu của hai vectơ
- Vectơ đối

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Thực hiện các phép toán cộng, trừ vectơ.
- Mô tả trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác bằng vectơ.
- Vận dụng vectơ trong bài toán tổng hợp lực, tổng hợp vận tốc.

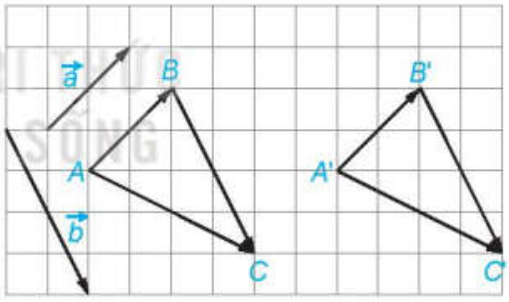
Một con tàu chuyển động từ bờ bên này sang bờ bên kia của một dòng sông với vận tốc riêng không đổi. Giả sử vận tốc dòng nước là không đổi và đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng đến vận tốc thực tế của tàu. Nếu không quan tâm đến điểm đến thì cần giữ lái cho tàu tạo với bờ sông một góc bao nhiêu để tàu sang bờ bên kia được nhanh nhất?



Vận tốc thực tế của con tàu trên sông đối với bờ phụ thuộc vào vận tốc riêng của tàu (đối với dòng nước) và vận tốc của dòng nước (đối với bờ). Tương tự, một vật thường chịu tác động của nhiều lực. Ta đã biết dùng vectơ để biểu diễn các đại lượng đó; bài học này xây dựng các phép toán vectơ, tương thích với việc tổng hợp vận tốc, tổng hợp và phân tích lực.

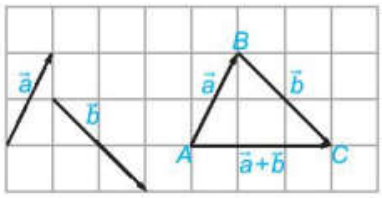
1. TỔNG CỦA HAI VECTƠ

HĐ1. Với hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cho trước, lấy một điểm A và vẽ các vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Lấy điểm A' khác A và cũng vẽ các vectơ $\overrightarrow{A'B'} = \vec{a}, \overrightarrow{B'C'} = \vec{b}$. Hỏi hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ có mối quan hệ gì?



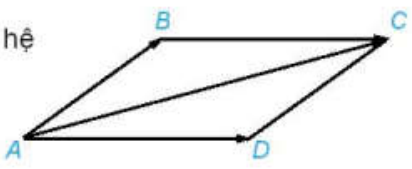
Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Lấy một điểm A tuỳ ý và vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$ (H.4.13). Khi đó vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và được kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.

Phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là phép cộng vectơ.



Hình 4.13

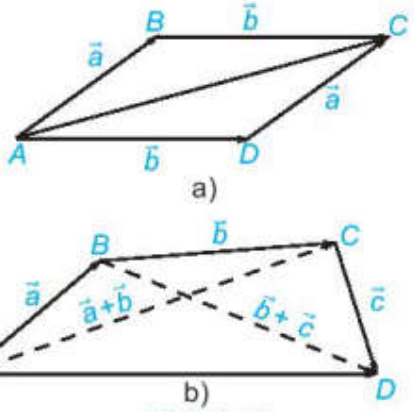
HĐ2. Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm mối quan hệ giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AC}$.



Quy tắc ba điểm: Với ba điểm bất kì A, B, C, ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
Quy tắc hình bình hành: Nếu $ABCD$ là một hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

HĐ3. a) Trong Hình 4.14a, hãy chỉ ra vecto $\vec{a}+\vec{b}$ và vecto $\vec{b}+\vec{a}$.

b) Trong Hình 4.14b, hãy chỉ ra vecto $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ và vecto $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

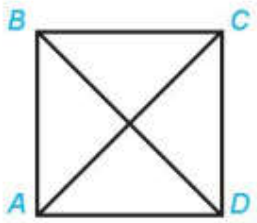


Hình 4.14

Với ba vecto $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tuỳ ý:
- Tính chất giao hoán: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
- Tính chất kết hợp: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;
- Tính chất của vecto-không: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

Chú ý. Do các vecto $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ và $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ bằng nhau, nên ta còn viết chúng dưới dạng $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ và gọi là *tổng của ba vecto* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Tương tự, ta cũng có thể viết tổng của một số vecto mà không cần dùng các dấu ngoặc.

Ví dụ 1. Cho hình vuông $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài của các vecto $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}$.



Giải

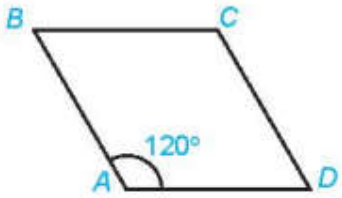
Do $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}$.

Vậy $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{DB}|=DB=\sqrt{2}$.

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$.

Do đó $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}|=AC=\sqrt{2}$.

Luyện tập 1. Cho hình thoi $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1 và $\widehat{BAD}=120°$. Tính độ dài của các vecto $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BA}$.



2. HIỆU CỦA HAI VECTƠ



Hai đội kéo co bất phân thắng bại!

HĐ4. Thế nào là hai lực cân bằng? Nếu dùng hai vecto để biểu diễn hai lực cân bằng thì hai vecto này có mối quan hệ gì với nhau?

- Vecto có cùng độ dài và ngược hướng với vecto $\vec{a}$ được gọi là vecto đối của vecto $\vec{a}$. Vecto đối của $\vec{a}$ được kí hiệu là $-\vec{a}$.
- Vecto $\vec{0}$ được coi là vecto đối của chính nó.

Chú ý. Hai vecto đối nhau khi và chỉ khi tổng của chúng bằng $\vec{0}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Vectơ $\vec{a}+(-\vec{b})$ được gọi là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và được kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}$. Phép lấy hiệu hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.

Chú ý. Nếu $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ thì $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{c}+\vec{b}+(-\vec{b})=\vec{c}+\vec{0}=\vec{c}$.
Với ba điểm O, M, N tuỳ ý, ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{ON}=(-\overrightarrow{OM})+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$.

Quy tắc hiệu: Với ba điểm O, M, N, ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$.

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$ và một điểm O bất kì.
Chứng minh rằng $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$.

Giải

Áp dụng quy tắc hiệu, ta có $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DC}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ nên $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$.

Ví dụ 3. a) Chứng minh rằng nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
b) Chứng minh rằng nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

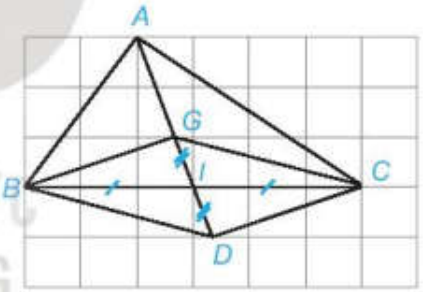
Giải

a) (H.4.15) Khi I là trung điểm của AB, thì hai vectơ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ có cùng độ dài và ngược hướng (H.4.15). Do đó, $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ đối nhau, suy ra $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.



Hình 4.15

b) (H.4.16) Trọng tâm G của tam giác ABC thuộc trung tuyến AI và $GA = 2GI$. Lấy điểm D đối xứng với G qua I. Khi đó tứ giác $GBDC$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên nó là một hình bình hành. Ta có $GA = 2GI = GD$.



Hình 4.16

Hai vectơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GD}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên chúng là hai vectơ đối nhau, do đó $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Trong hình bình hành $GBDC$, ta có $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GD}$.
Vậy $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Luyện tập 2. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và O là trung điểm của MN. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Chú ý. Phép cộng vectơ tương ứng với các quy tắc tổng hợp lực, tổng hợp vận tốc:

- Nếu hai lực cùng tác động vào chất điểm A và được biểu diễn bởi các vectơ $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ thì hợp lực tác động vào A được biểu diễn bởi vectơ $\vec{u}_1+\vec{u}_2$.
- Nếu một con thuyền di chuyển trên sông với vận tốc riêng (vận tốc so với dòng nước) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v}_r$ và vận tốc của dòng nước (so với bờ) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v}_n$ thì vận tốc thực tế của thuyền (so với bờ) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v}_r+\vec{v}_n$.

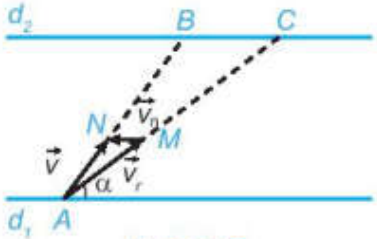
Trong Vật lí, trọng tâm của một vật là điểm đặt của trọng lực tác dụng lên vật đó. Đối với một vật mỏng hình đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ thì trọng tâm của nó là điểm G thoả mãn $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$.



Ví dụ 4. Hãy giải bài toán trong *tình huống mở đầu*.

Giải

Ta biểu thị hai bờ sông là hai đường thẳng song song d_1, d_2 (H.4.17). Giả sử tàu xuất phát từ $A \in d_1$ và bánh lái luôn được giữ để tàu tạo với bờ góc α. Gọi $\overrightarrow{v_r}$ và $\overrightarrow{v_n}$ lần lượt là vectơ vận tốc riêng của tàu và vận tốc dòng nước. Gọi M, N là các điểm sao cho $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{MN}$.



Hình 4.17

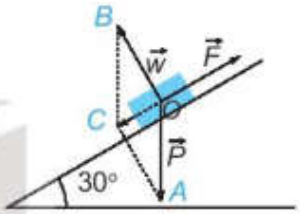
Khi đó tàu chuyển động với vectơ vận tốc thực tế là $\vec{v} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN}$.

Gọi B, C tương ứng là giao điểm của AN, AM với d_2. Tàu chuyển động thẳng từ A đến B với vectơ vận tốc thực tế $\overrightarrow{AN}$, do đó thời gian cần thiết để tàu sang được bờ d_2 là $\frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM}$.

Mặt khác, $AM = \left|\overrightarrow{v_r}\right|$ không đổi nên $\frac{AC}{AM}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AC$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AC \perp d_2 \Leftrightarrow AM \perp d_2$.

Vậy để tàu sang được bờ bên kia nhanh nhất, ta cần giữ bánh lái để tàu luôn vuông góc với bờ.

Vận dụng. Tính lực kéo cần thiết để kéo một khẩu pháo có trọng lượng 22 148 N (ứng với khối lượng xấp xỉ 2 260 kg) lên một con dốc nghiêng 30° so với phương nằm ngang (H.4.18). Nếu lực kéo của mỗi người bằng 100 N, thì cần tối thiểu bao nhiêu người để kéo pháo?



Hình 4.18

Chú ý. Ta coi khẩu pháo chịu tác động của ba lực: trọng lực $\vec{P}$ (có độ lớn $\left|\vec{P}\right|$ = 22 148 N, có phương vuông góc với phương nằm ngang và hướng xuống dưới), phản lực $\vec{w}$ (có độ lớn $\left|\vec{w}\right| = \left|\vec{P}\right|\cos 30°$, có phương vuông góc với mặt dốc và hướng lên trên) và lực kéo $\vec{F}$ (theo phương dốc, hướng từ chân dốc lên đỉnh dốc).

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Xác định độ dài tổng, hiệu của các vectơ.

1. Phương pháp giải.

Để xác định độ dài tổng hiệu của các vectơ

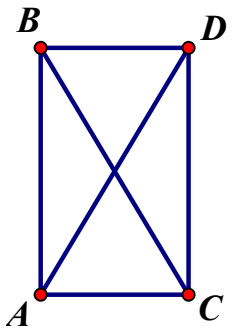
- Trước tiên sử dụng định nghĩa về tổng, hiệu hai vectơ và các tính chất, quy tắc để xác định định phép toán vectơ đó.
- Dựa vào tính chất của hình, sử dụng định lí Pitago, hệ thức lượng trong tam giác vuông để xác định độ dài vectơ đó.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 30^0$ và $BC = a\sqrt{5}$.

Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Lời giải (hình 1.10)



Hình 1.10

Theo quy tắc ba điểm ta có

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ Mà $\sin\widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}$

$\Rightarrow AC = BC.\sin\widehat{ABC} = a\sqrt{5}.\sin 30^0 = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

Do đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

- $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

Ta có $AC^2 + AB^2 = BC^2 \Rightarrow AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{5a^2 - \dfrac{5a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$

Vì vậy $\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$

- Gọi D là điểm sao cho tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.

Khi đó theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

Vì tam giác ABC vuông ở A nên tứ giác $ABDC$ là hình chữ nhật suy ra $AD = BC = a\sqrt{5}$

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = AD = a\sqrt{5}$

Ví dụ 2: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O và cạnh a. M là một điểm bất kỳ.

a) Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|, \left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|, \left|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right|$

b) Chứng minh rằng $\vec{u} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vị trí điểm M. Tính độ dài vectơ $\vec{u}$

Lời giải (hình 1.11)

a) + Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Suy ra $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = AC$.

Áp dụng định lí Pitago ta có $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}a$

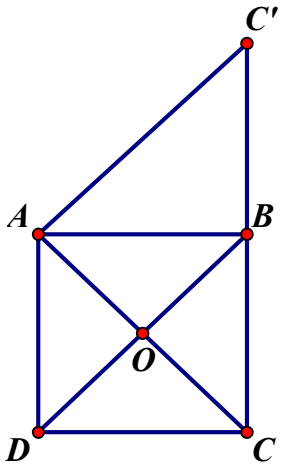
Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right| = a\sqrt{2}$

+ Vì O là tâm của hình vuông nên $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$ suy ra $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO}-\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}$

Vậy $\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = a$

+ Do $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ suy ra $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$

Mà $\left|\overrightarrow{BD}\right| = BD = \sqrt{AB^2+AD^2} = a\sqrt{2}$ suy ra $\left|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right| = a\sqrt{2}$



Hình 1.11

b) Theo quy tắc phép trừ ta có

$\vec{u} = \left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)+\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}\right) = \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}$

Suy ra $\vec{u}$ không phụ thuộc vị trí điểm M.

Qua A kẻ đường thẳng song song với DB cắt BC tại C'.

Khi đó tứ giác $ADBC'$ là hình bình hành (vì có cặp cạnh đối song song) suy ra $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC'}$

Do đó $\vec{u}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{CC'}$

Vì vậy $\left|\vec{u}\right|=\left|\overrightarrow{CC'}\right|=BC+BC'=a+a=2a$

Dạng 2: Chứng minh đẳng thức vectơ.

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh đẳng thức vectơ ta có các cách biến đổi: vế này thành vế kia, biến đổi tương đương, biến đổi hai vế cùng bằng một đại lương trung gian. Trong quá trình biến đổi ta cần sử dụng linh hoạt ba quy tắc tính vectơ.

Lưu ý: Khi biến đổi cần phải *hướng đích* , chẳng hạn biến đổi vế phải, ta cần xem vế trái có đại lượng nào để từ đó liên tưởng đến kiến thức đã có để làm sao xuất hiện các đại lượng ở vế trái. Và ta thường biến đổi vế phức tạp về vế đơn giản hơn.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho năm điểm A,B,C,D,E. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$

b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}$

Lời giải

a) Biến đổi vế trái ta có

$$\begin{aligned}VT&=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{CD}+\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}\right)\\&=\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}\right)+\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{DA}\\&=\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}\right)+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}\\&=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}=VP\end{aligned}$$ ĐPCM

b) Đẳng thức tương đương với

$\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}\right)+\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}\right)-\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$

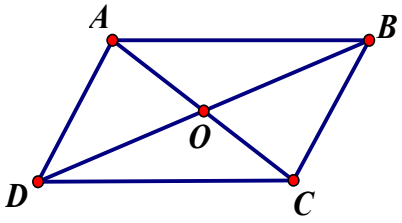
$\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$ (đúng) ĐPCM.

Ví dụ 2: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.



Hình 1.12

Lời giải (Hình 1.12)

a) Ta có $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$

$=-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AC}$

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ suy ra

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

b) Vì ABCD là hình bình hành nên ta có: $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AO}=\vec{0}$

Tương tự: $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

c) Cách 1: Vì ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

$\Rightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}$

$=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$

Cách 2: Đẳng thức tương đương với

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ (đúng do $ABCD$ là hình bình hành)

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$ với O là điểm bất kì.

Lời giải (Hình 1.13)

a) Vì PN, MN là đường trung bình của tam giác ABC nên

$PN//BM$, $MN//BP$ suy ra tứ giác $BMNP$ là hình bình hành

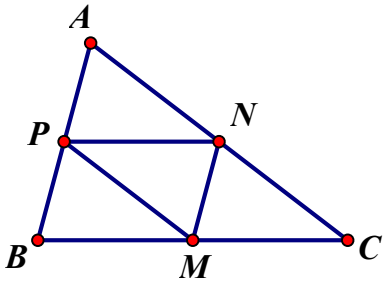
$\Rightarrow\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{PN}$

N là trung điểm của $AC\Rightarrow\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{NA}$

Do đó theo quy tắc ba điểm ta có

$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\left(\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NA}\right)+\overrightarrow{AP}$

$=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$



Hình 1.13

b) Vì tứ giác $APMN$ là hình bình hành nên theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AM}$, kết hợp với quy tắc trừ

$\Rightarrow\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BM}$

Mà $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$ do M là trung điểm của BC.

Vậy $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$.

c) Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}\right)+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NC}\right)$$
$$=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\right)+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}$$
$$=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\right)-\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}\right)$$

Theo câu a) ta có $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$ suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$.
B. $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NP}$.
C. $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}$.
D. $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Chọn B

Xét các đáp án:

• Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\neq\overrightarrow{BC}$ (với D là điểm thỏa mãn $ABDC$ là hình bình hành). Vậy A sai.

• Đáp án B. Ta có $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{NP}$. Vậy B đúng.

• Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}=-\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)=-\overrightarrow{AD}\neq\overrightarrow{CB}$ (với D là điểm thỏa mãn $ABDC$ là hình bình hành). Vậy C sai.

• Đáp án D. Ta có $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{BB}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}\neq\overrightarrow{AB}$. Vậy D sai.

Câu 2: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các vectơ khác $\vec{0}$ với $\vec{a}$ là vectơ đối của $\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng phương.
B. Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ ngược hướng.
C. Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng độ dài.
D. Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ chung điểm đầu.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\vec{a}=-\vec{b}$. Do đó, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, cùng độ dài và ngược hướng nhau.

Câu 3: Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}$.
B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$.
C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$.
D. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$.

Lời giải

Chọn C.

Xét các đáp án:

• Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}$. Vậy A sai.

• Đáp án B. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\neq\overrightarrow{BC}$ (với D là điểm thỏa mãn $ABDC$ là hình bình hành).

Vậy B sai.

• Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$. Vậy C đúng.

Câu 4: Cho $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng. **B.** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng độ dài.

C. $ABCD$ là hình bình hành. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}$. Do đó:

- $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng.
- $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng độ dài.
- $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ không cùng giá.
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

Câu 5: Tính tổng $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}$.

A. $\overrightarrow{MR}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$. **C.** $\overrightarrow{PR}$. **D.** $\overrightarrow{MP}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RN}=\overrightarrow{MN}$.

Câu 6: Cho hai điểm A và B phân biệt. Điều kiện để I là trung điểm AB là:

A. $IA=IB$. **B.** $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}$. **C.** $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$. **D.** $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{BI}$.

Lời giải

Chọn C.

Câu 7: Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB ?

A. $IA=IB$. **B.** $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. **C.** $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}$.

Lời giải

Chọn B.

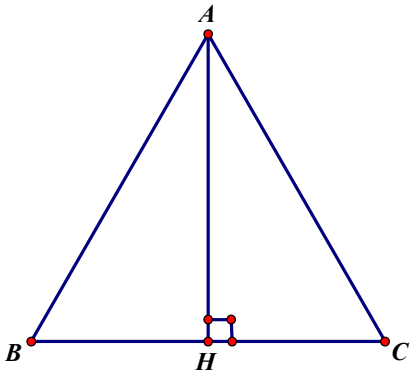
Điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB là $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Câu 8: Cho tam giác ABC cân ở A, đường cao AH. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{HC}=-\overrightarrow{HB}$. **C.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|$. **D.** $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{HC}$.

Lời giải

Chọn A.



Tam giác ABC cân ở A, đường cao AH. Do đó, H là trung điểm BC.

Ta có:

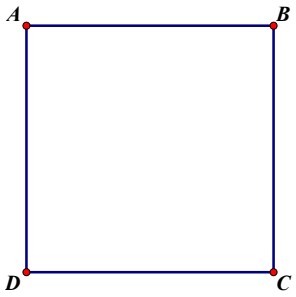
- $AB = AC \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$
- H là trung điểm $BC \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HC} = -\overrightarrow{HB} \\ \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{HC} \end{cases}$.

Câu 9: Cho hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. **C.** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. **D.** $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right|$.

Lời giải

Chọn D.



$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right|$.

Câu 10: Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Nếu M là trung điểm đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

B. Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

C. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$.

D. Nếu ba điểm phân biệt A, B, C nằm tùy ý trên một đường thẳng thì $\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$.

Lời giải

Chọn D.

Với ba điểm phân biệt A, B, C nằm trên một đường thẳng, đẳng thức $\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| \Leftrightarrow AB + BC = AC$ xảy ra khi B nằm giữa A và C.

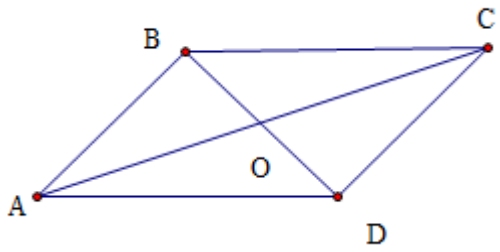
Câu 11: Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CD}.$ **B.** $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}.$

C. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}.$ **D.** $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}.$

Lời giải

Chọn B.



Xét các đáp án:

- Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$. Vậy A đúng.
- Đáp án B. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AD}\end{cases}$. Vậy B sai.
- Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}.$ Vậy C đúng.
- Đáp án D. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}\end{cases}$. Vậy D đúng.

Câu 12: Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB}.$ **B.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}.$

C. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}.$ **D.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$

Lời giải

Chọn A.

Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}.$

Suy ra $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}.$

Câu 13: Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$.

A. $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BC}.$ **B.** $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DA}.$

C. $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}.$ **D.** $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}.$

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$.

Câu 14: Cho tam giác ABC đều cạnh a. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}.$ **B.** $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AB}.$

C. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}\right|=a.$ **D.** $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{BC}.$

Lời giải

Chọn C.

Độ dài các cạnh của tam giác là a thì độ dài các vectơ $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}\right|=a$.

Câu 15: Cho tam giác ABC với M là trung điểm BC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$.

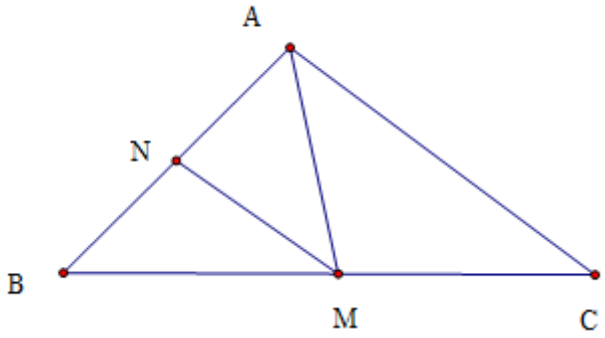
B. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}$.

D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}$.

Lời giải

Chọn A.



Xét các đáp án:

- Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$ (theo quy tắc ba điểm).
- Đáp án B, C. Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}$ (với điểm N là trung điểm của AB).
- Đáp án D. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$.

Câu 16: Cho tam giác ABC với M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

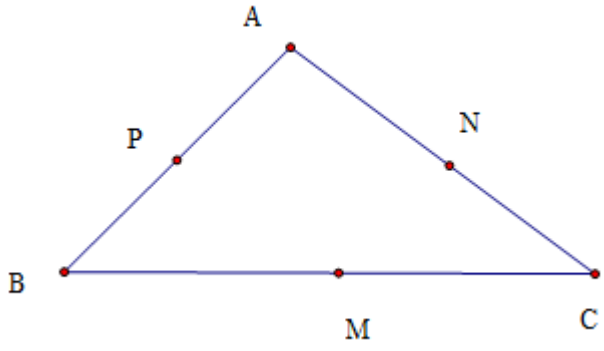
B. $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PM}=\vec{0}$.

D. $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MP}$.

Lời giải

Chọn D.



Xét các đáp án:

- Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.
- Đáp án B. Ta có $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA} = \vec{0}.$

• Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MM} = \vec{0}.$

• Đáp án D. Ta có $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{PM} = -\overrightarrow{MP}.$

Câu 17: Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $AB+BC=AC.$ **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}.$

C. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{CA}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|.$ **D.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}.$

Lời giải

Chọn B.

Đáp án A chỉ đúng khi ba điểm A, B, C thẳng hàng và B nằm giữa A, C.

Đáp án B đúng theo quy tắc ba điểm.

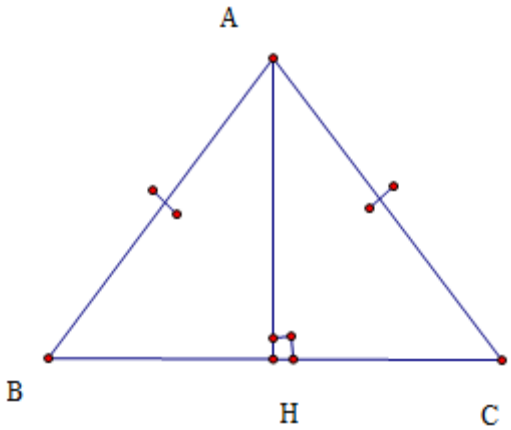
Câu 18: Cho tam giác ABC có $AB=AC$ và đường cao AH. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AH}.$ **B.** $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}.$

C. $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}.$ **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}.$

Lời giải

Chọn C.



Do ΔABC cân tại A, AH là đường cao nên H là trung điểm BC.

Xét các đáp án:

• Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AH}.$

• Đáp án B. Ta có $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA}+\vec{0} = \overrightarrow{HA} \neq \vec{0}.$

• Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ (do H là trung điểm BC).

• Đáp án D. Do $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AC}.$

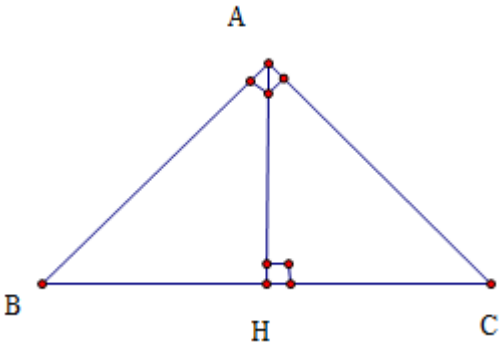
Câu 19: Cho tam giác ABC vuông cân đỉnh A, đường cao AH. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right| = \left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right|.$ **B.** $\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AC}.$

C. $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HA}.$ **D.** $\left|\overrightarrow{AH}\right| = \left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AH}\right|.$

Lời giải

Chọn B.



Do ΔABC cân tại A, AH là đường cao nên H là trung điểm BC.

Xét các đáp án:

• Đáp án A. Ta có $\begin{cases} \left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = a \\ \left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = a \end{cases}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right| = \left|\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right|.$

• Đáp án B. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BH} \\ \overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CH} = -\overrightarrow{BH} \end{cases}$. Do đó B sai.

• Đáp án C. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AC} \end{cases} \longrightarrow \overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HA}.$

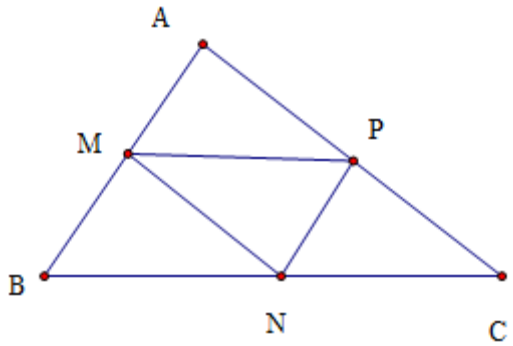
• Đáp án D. Ta có $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AH}\right| = \left|\overrightarrow{HB}\right| = \left|\overrightarrow{AH}\right|$ (do ΔABC vuông cân tại A).

Câu 20: Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC. Hỏi vectơ $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}$ bằng vectơ nào trong các vectơ sau?

A. $\overrightarrow{AP}$. **B.** $\overrightarrow{BP}$. **C.** $\overrightarrow{MN}$. **D.** $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NB}$.

Lời giải

Chọn B.



Ta có $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BM} \longrightarrow \overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}+\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BP}.$

Câu 21: Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}.$ **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}.$

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}.$ **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}.$

Lời giải

Chọn A.

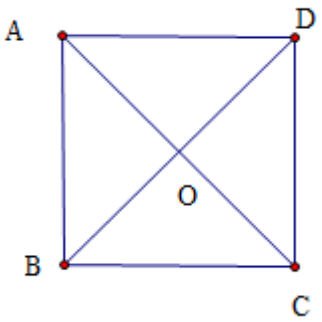
Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)+\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}\right)=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}.$

Câu 22: Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Vectơ nào trong các vectơ dưới đây bằng $\overrightarrow{CA}$?

A. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}.$ **B.** $-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}.$ **C.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}.$ **D.** $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CB}.$

Lời giải

Chọn C.



Xét các đáp án:

- Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CA}.$
- Đáp án B. Ta có $-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CA}.$
- Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=-\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)=-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}.$
- Đáp án D. Ta có $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=-\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}\right)=-\overrightarrow{CA}.$

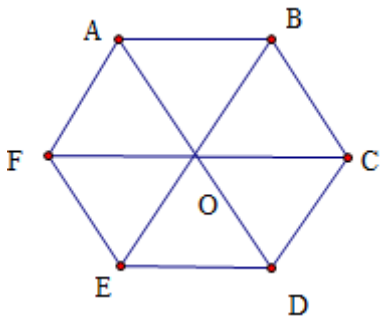
Câu 23: Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}.$ **B.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{EB}.$

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}.$ **D.** $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}.$

Lời giải

Chọn D.



Ta có

- $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}.$ Do đo A đúng.

- $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\overrightarrow{OB}$

$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{EB}$. Do đo B đúng.

- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{EF}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}\right)+\overrightarrow{EF}$

$=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$. Do đó C đúng.

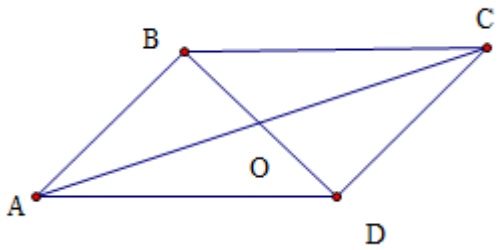
Dùng phương pháp loại trừ, suy ra D sai.

Câu 24: Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Hỏi vectơ $\left(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO}\right)$ bằng vectơ nào trong các vectơ sau?

A. $\overrightarrow{BA}$. **B.** $\overrightarrow{BC}$. **C.** $\overrightarrow{DC}$. **D.** $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn B.



Ta có $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

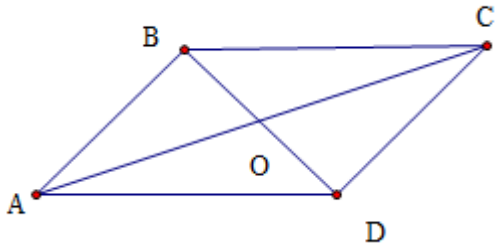
Câu 25: Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

C. $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right|$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn D.



Xét các đáp án:

• Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)=\vec{0}$.

• Đáp án B. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành).

• Đáp án C. Ta có $\begin{cases}\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|=BD\\ \left|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right|=\left|\overrightarrow{DB}\right|=BD\end{cases}$.

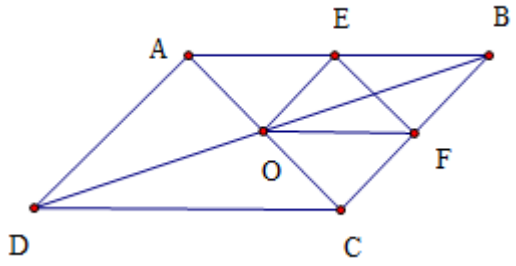
• Đáp án D. Do $\overrightarrow{CD} \neq \overrightarrow{CB} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right) \neq \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}\right)$.

Câu 26: Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EO}$.
B. $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EO}$.
C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$.
D. $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{DO}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có OF, OE lần lượt là đường trung bình của tam giác ΔBCD và ΔABC.

$\Rightarrow BEOF$ là hình bình hành.

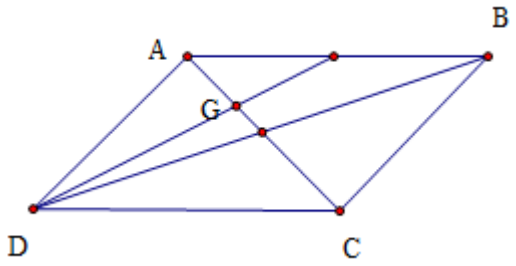
$\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BO} \Rightarrow \overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BD}$.

Câu 27: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{BD}$.
B. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{CD}$.
C. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{O}$.
D. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{CD}$.

Lời giải

Chọn A.



Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GB}$.

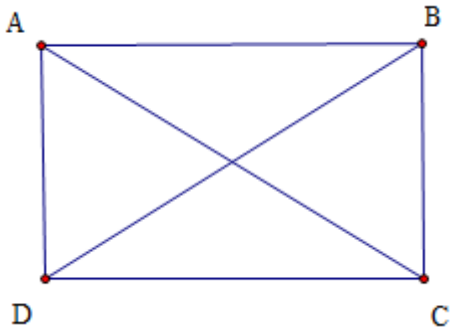
Do đó $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GD}-\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{BD}$.

Câu 28: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.
B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$.
C. $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$.
D. $\left|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right|$.

Lời giải

Chọn C.



Ta có $\begin{cases} \left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{DB}\right|=BD \\ \left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC \end{cases}$.

Mà $BD=AC\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$.

Câu 29: Cho tam giác ABC đều cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=a\sqrt{3}$.

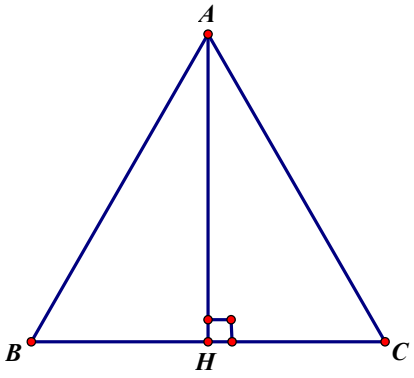
B. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2a$.

D. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi H là trung điểm của $BC\Rightarrow AH\perp BC$.

Suy ra $AH=\dfrac{BC\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta lại có $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|2\overrightarrow{AH}\right|=2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

Câu 30: Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB=a$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=a\sqrt{2}$.

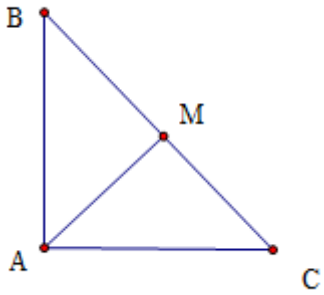
B. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2a$.

D. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=a$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi M là trung điểm $BC \longrightarrow AM = \frac{1}{2}BC.$

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = \left|2\overrightarrow{AM}\right| = 2AM = BC = a\sqrt{2}.$

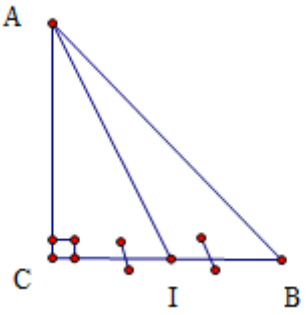
Câu 31: Cho tam giác ABC vuông cân tại C và $AB = \sqrt{2}$. Tính độ dài của $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

A. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{5}.$ **B.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = 2\sqrt{5}.$

C. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{3}.$ **D.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = 2\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn A.



Ta có $AB = \sqrt{2} \Rightarrow AC = CB = 1.$

Gọi I là trung điểm $BC \Rightarrow AI = \sqrt{AC^2 + CI^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$

Khi đó $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right| = 2\left|\overrightarrow{AI}\right| = 2.\frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}.$

Câu 32: Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = 3, AC = 4$. Tính $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right| = 2.$ **B.** $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right| = 2\sqrt{13}.$

C. $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right| = 5.$ **D.** $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{13}.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|=CB=\sqrt{AC^2+AB^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

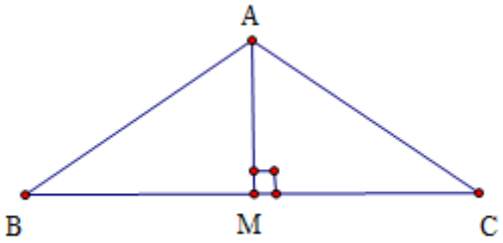
Câu 33: Tam giác ABC có $AB=AC=a$ và $\widehat{BAC}=120°$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=a\sqrt{3}.$ **B.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=a.$

C. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\frac{a}{2}.$ **D.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2a.$

Lời giải

Chọn B.



Gọi M là trung điểm $BC\Rightarrow AM\perp BC$.

Trong tam giác vuông AMB, ta có $AM=AB.\sin\widehat{ABM}=a.\sin 30^0=\frac{a}{2}$.

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|2\overrightarrow{AM}\right|=2AM=a.$

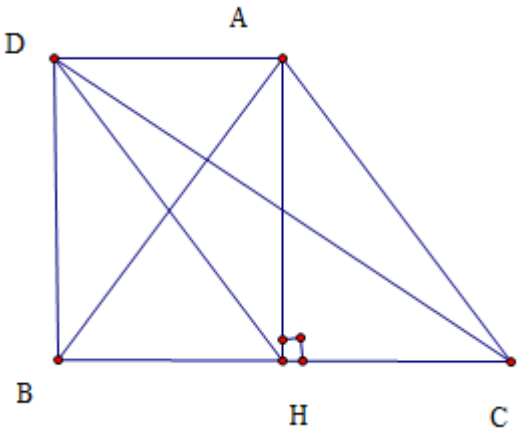
Câu 34: Cho tam giác ABC đều cạnh a, H là trung điểm của BC. Tính $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=\frac{a}{2}.$ **B.** $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=\frac{3a}{2}.$

C. $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=\frac{2\sqrt{3}a}{3}.$ **D.** $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=\frac{a\sqrt{7}}{2}.$

Lời giải

Chọn D.



Gọi D là điểm thỏa mãn tứ giác $ACHD$ là hình bình hành

$\Rightarrow AHBD$ là hình chữ nhật.

$\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CH}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|=CD.$

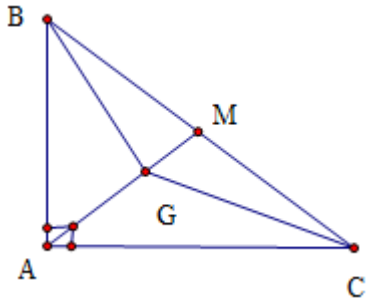
Ta có $CD=\sqrt{BD^2+BC^2}=\sqrt{AH^2+BC^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}+a^2}=\frac{a\sqrt{7}}{2}.$

Câu 35: Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC=12$. Tính độ dài của vectơ $\vec{v}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$.

A. $\left|\vec{v}\right|=2.$ **B.** $\left|\vec{v}\right|=2\sqrt{3}.$ **C.** $\left|\vec{v}\right|=8.$ **D.** $\left|\vec{v}\right|=4.$

Lời giải

Chọn D.



Gọi M là trung điểm của BC.

Ta có $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=\left|2\overrightarrow{GM}\right|=2GM=2.\frac{1}{3}AM=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}BC\right)=\frac{BC}{3}=4.$

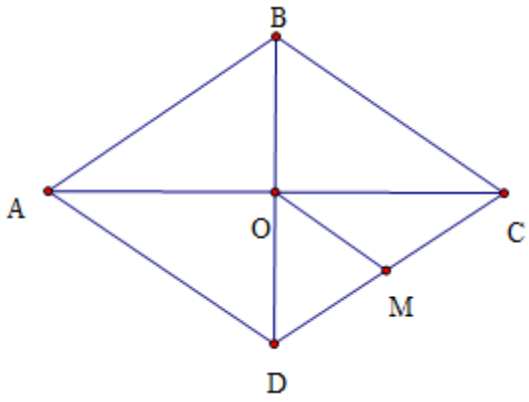
Câu 36: Cho hình thoi $ABCD$ có $AC=2a$ và $BD=a$. Tính $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=3a.$ **B.** $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=a\sqrt{3}.$

C. $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=a\sqrt{5}.$ **D.** $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=5a.$

Lời giải

Chọn C.



Gọi $O=AC\cap BD$ và M là trung điểm của CD.

Ta có $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right|=2\left|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right|=2\left|2\overrightarrow{OM}\right|=4OM$

$=4.\frac{1}{2}CD=2\sqrt{OD^2+OC^2}=2\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}=a\sqrt{5}.$

Câu 37: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}\right|=0$.

B. $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}\right|=a$.

C. $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}\right|=a\sqrt{2}$.

D. $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}\right|=2a$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=a\sqrt{2}$.

Câu 38: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O. Tính $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=a$.

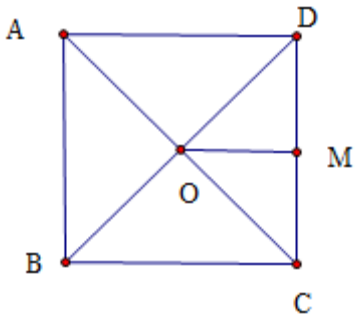
B. $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=a\sqrt{2}$.

C. $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\dfrac{a}{2}$.

D. $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi M là trung điểm của BC.

Ta có $\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=2\left|\overrightarrow{OM}\right|=2OM=AB=a$.

Câu 39: Cho tam giác ABC có M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Xác định vị trí điểm M.

A. M là điểm thứ tư của hình bình hành $ACBM$.

B. M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

C. M trùng với C.

D. M là trọng tâm tam giác ABC.

Lời giải

Chọn D.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

Ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow M\equiv G$.

Câu 40: Cho tam giác ABC. Tập hợp tất cả các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}\right|$ là

A. đường thẳng AB.

B. trung trực đoạn BC.

C. đường tròn tâm A, bán kính BC.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

D. đường thẳng qua A và song song với BC.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{AM}\right| \Rightarrow AM=BC$

Mà A, B, C cố định $\Rightarrow$ Tập hợp điểm M là đường tròn tâm A, bán kính BC.

Câu 41: Cho hình bình hành $ABCD$. Tập hợp tất cả các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}$ là

A. một đường tròn.

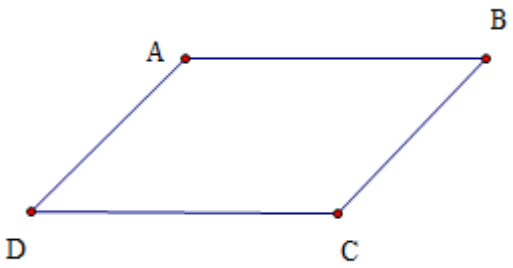
B. một đường thẳng.

C. tập rỗng.

D. một đoạn thẳng.

Lời giải

Chọn C.



$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}$: vô lí

$\Rightarrow$ Không có điểm M thỏa mãn.

Câu 42: Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$. Tìm vị trí điểm M.

A. M là trung điểm của AC.

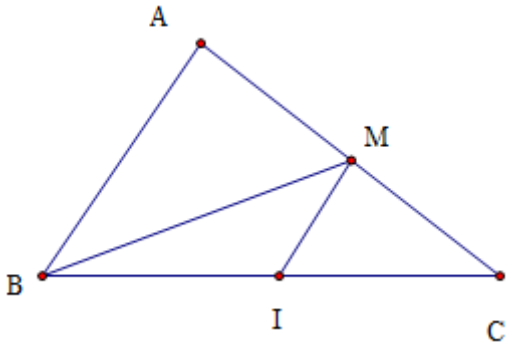
B. M là trung điểm của AB.

C. M là trung điểm của BC.

D. M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{MI} \Rightarrow M$ là trung điểm AC.

Câu 43: Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây

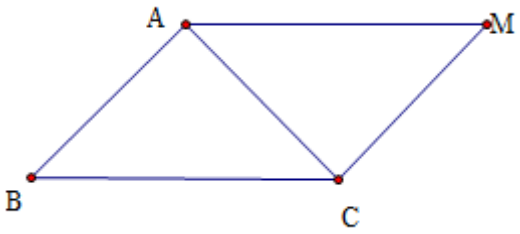
sai?

A. $MABC$ là hình bình hành. **B.** $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}$. **D.** $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow MABC$ là hình bình hành $\Rightarrow\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CB}$.

Do đó D sai.

Bài 9 TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

THUẬT NGỮ
- Tích của vectơ với một số
- Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Thực hiện phép nhân vectơ với một số.
- Mô tả các mối quan hệ cùng phương, cùng hướng bằng vectơ.

Với mỗi cặp vật đặt trên hai đầu của một cánh tay đòn AB, luôn có duy nhất một điểm M thuộc AB để nếu đặt trụ đỡ tại M thì cánh tay đòn ở trạng thái cân bằng (H.4.20). Điều trên còn đúng trong những trường hợp tổng quát hơn, chẳng hạn, cánh tay đòn được thay bởi một tấm ván hình đa giác n đỉnh A_1, A_2,..., A_n, tại mỗi đỉnh A_i có đặt một vật nặng m_i (kg). Ở đây, ta coi cánh tay đòn, tấm ván là không có trọng lượng. Trong Vật lí, điểm M như trên được gọi là điểm khối tâm của hệ chất điểm A_1, A_2,..., A_n ứng với các khối lượng m_1, m_2,..., m_n (kg).

Qua bài học này, ta sẽ thấy Hình học cho phép xác định vị trí khối tâm của một hệ chất điểm.



Hình 4.20

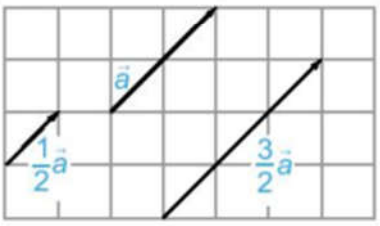
1. TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

HĐ1. Cho vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Hãy xác định điểm C sao cho $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$.

a) Tìm mối quan hệ giữa $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{a} + \vec{a}$.

b) Vectơ $\vec{a} + \vec{a}$ có mối quan hệ như thế nào về hướng và độ dài đối với vectơ $\vec{a}$?

Tích của một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ với một số thực $k > 0$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ và có độ dài bằng $k|\vec{a}|$.

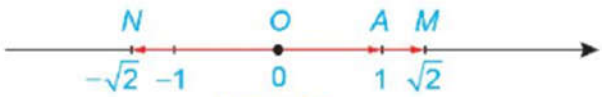


Hình 4.21

1 $\vec{a}$ và $\vec{a}$ có bằng nhau hay không?

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

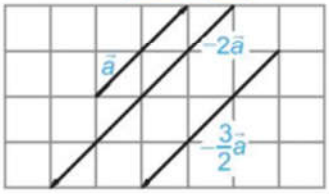
HĐ2. Trên một trục số, gọi O, A, M, N tương ứng biểu thị các số 0; 1; $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$. Hãy nêu mối quan hệ về hướng và độ dài của mỗi vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ với vectơ $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Viết đẳng thức thể hiện mối quan hệ giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OA}$.



Hình 4.22

Mối quan hệ giữa $\overrightarrow{ON}$ và $\overrightarrow{OA}$ được thể hiện bởi đẳng thức nào?





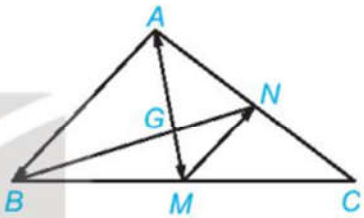
Hình 4.23

Tích của một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ với một số thực $k < 0$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ và có độ dài bằng $(-k)|\vec{a}|$.

Chú ý. Ta quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $k = 0$.

Trong Hình 4.24, hai trung tuyến AM và BN của tam giác ABC cắt nhau tại G.

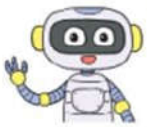
Ta có $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM}$, $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



Hình 4.24

Nhận xét. Vectơ $k\vec{a}$ có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$ và cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k \geq 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $k < 0$.

Phép lấy tích của vectơ với một số gọi là *phép nhân vectơ với một số* (hay *phép nhân một số với vectơ*).



$-\vec{a}$ và $(-1)\vec{a}$ có mối quan hệ gì?

Ví dụ 1. Chứng minh rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $(\vec{b} \neq \vec{0})$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

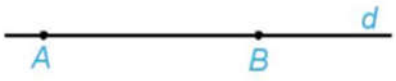
Giải

Thật vậy, nếu $\vec{a} = k\vec{b}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương. Ngược lại, giả sử $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Ta lấy $k = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng và lấy $k = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

Khi đó $\vec{a} = k\vec{b}$.

Luyện tập 1. Cho đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt A và B (H.4.25). Những khẳng định nào sau đây là đúng?



Hình 4.25

a) Điểm M thuộc đường thẳng d khi và chỉ khi tồn tại số t để $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.

b) Với điểm M bất kì, ta luôn có $\overrightarrow{AM} = \frac{AM}{AB}\overrightarrow{AB}$.

c) Điểm M thuộc tia đối của tia AB khi và chỉ khi tồn tại số $t \leq 0$ để $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP NHÂN VECTƠ VỚI MỘT SỐ

HĐ3. Với $\vec{u} \neq \vec{0}$ và hai số thực k, t, những khẳng định nào sau đây là đúng?

a) Hai vectơ $k(t\vec{u})$ và $(kt)\vec{u}$ có cùng độ dài bằng $|kt|\left|\vec{u}\right|$.

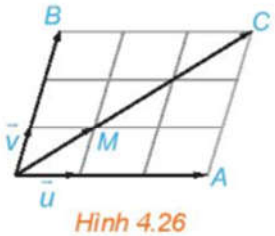
b) Nếu $kt \geq 0$ thì cả hai vectơ $k(t\vec{u})$, $(kt)\vec{u}$ cùng hướng với $\vec{u}$.

c) Nếu $kt < 0$ thì cả hai vectơ $k(t\vec{u})$, $(kt)\vec{u}$ ngược hướng với $\vec{u}$.

d) Hai vectơ $k(t\vec{u})$ và $(kt)\vec{u}$ bằng nhau.

HĐ4. Hãy chỉ ra trên Hình 4.26 hai vectơ $3\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$ và $3\vec{u}+3\vec{v}$.

Từ đó, nêu mối quan hệ giữa $3\left(\vec{u}+\vec{v}\right)$ và $3\vec{u}+3\vec{v}$.



Hình 4.26

Với hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và hai số thực k, t, ta luôn có:

- $k(t\vec{a}) = (kt)\vec{a}$;
- $(k+t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$;
- $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$; $k(\vec{a}-\vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$;
- $1\,\vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Ví dụ 2. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I. Chứng minh rằng với điểm O tuỳ ý, ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}.$$

Giải

Vì I là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ (Ví dụ 3a, Bài 8).

Do đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA}\right) + \left(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB}\right) = 2\overrightarrow{OI} + \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) = 2\overrightarrow{OI}$.

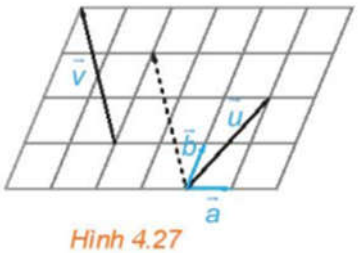
Luyện tập 2. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng với điểm O tuỳ ý, ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}.$$

Nhận xét

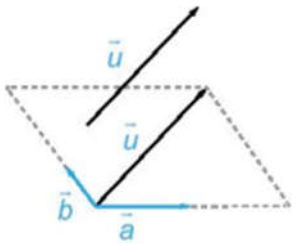
- Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
- Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Luyện tập 3. Trong Hình 4.27, hãy biểu thị mỗi vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ theo hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, tức là tìm các số x, y, z, t để $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$, $\vec{v} = t\vec{a} + z\vec{b}$.



Hình 4.27

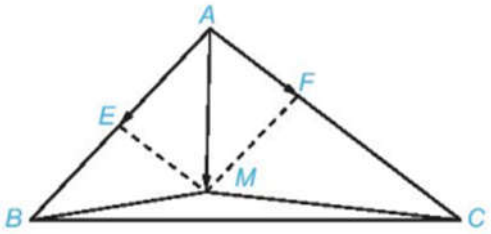
Chú ý. Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$, $\vec{b}$ (H.4.28). Khi đó, mọi vectơ $\vec{u}$ đều biểu thị (phân tích) được một cách duy nhất theo hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số $(x;y)$ sao cho $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$.



Hình 4.28

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC. Hãy xác định điểm M để $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Giải (H.4.29)



Hình 4.29

Để xác định vị trí của M, trước hết ta biểu thị $\overrightarrow{AM}$ (với gốc A đã biết) theo hai vectơ đã biết $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Đẳng thức vectơ đã cho tương đương với: $\overrightarrow{MA}+3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)+2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lấy điểm E là trung điểm của AB và điểm F thuộc cạnh AC sao cho $AF=\frac{1}{3}AC$.

Khi đó $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Vì vậy $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$.

Suy ra M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $EAFM$.

Ta trở lại vấn đề đã được nêu trong phần đầu bài học. Điểm khối tâm M của hệ các chất điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ với các khối lượng tương ứng $m_1, m_2, ..., m_n$ được xác định bởi đẳng thức vectơ

$$m_1\overrightarrow{MA_1}+m_2\overrightarrow{MA_2}+\cdots+m_n\overrightarrow{MA_n}=\vec{0}.$$

Vì vậy, việc xác định điểm khối tâm được quy về việc xác định điểm thoả mãn đẳng thức vectơ tương ứng.

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Dựng và tính độ dài vectơ chứa tích một vectơ với một số.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng định nghĩa tích của một vectơ với một số và các quy tắc về phép toán vectơ để dựng vectơ chứa tích một vectơ với một số, kết hợp với các định lí pitago và hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính độ dài của chúng.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác đều ABC cạnh a. điểm M là trung điểm BC. Dựng các vectơ sau và tính độ dài của chúng.

a) $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MA}$

b) $\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

d) $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA}-2,5\overrightarrow{MB}$

Lời giải (Hình 1.14)

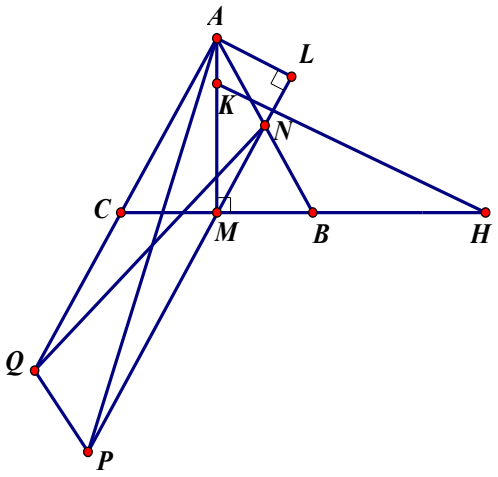
a) Do $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CM}$ suy ra theo quy tắc ba điểm ta có

$\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CA}$

Vậy $\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{MA}\right|=CA=a$

b) Vì $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}$ nên theo quy tắc trừ ta có

$\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MA}$



Hình 1.14

Theo định lí Pitago ta có

$MA=\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $\left|\overrightarrow{BA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right|=MA=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) Gọi N là trung điểm AB, Q là điểm đối xứng của A qua C và P là đỉnh của hình bình hành $AQPN$.

Khi đó ta có $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AN}, 2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AQ}$ suy ra theo quy tắc hình bình hành ta có

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AP}$

Gọi L là hình chiếu của A lên PN

Vì $MN//AC\Rightarrow \widehat{ANL}=\widehat{MNB}=\widehat{CAB}=60^0$

Xét tam giác vuông ANL ta có $\sin\widehat{ANL}=\frac{AL}{AN}\Rightarrow AL=AN.\sin\widehat{ANL}=\frac{a}{2}\sin 60^0=\frac{a\sqrt{3}}{4}$

$\cos\widehat{ANL}=\frac{NL}{AN}\Rightarrow NL=AN.\cos\widehat{ANL}=\frac{a}{2}\cos 60^0=\frac{a}{4}$

Ta lại có $AQ=PN\Rightarrow PL=PN+NL=AQ+NL=2a+\frac{a}{4}=\frac{9a}{4}$

Áp dụng định lí Pitago trong tam giác ALP ta có

$AP^2=AL^2+PL^2=\frac{3a^2}{16}+\frac{81a^2}{16}=\frac{21a^2}{4}\Rightarrow AP=\frac{a\sqrt{21}}{2}$

Vậy $\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right|=AP=\frac{a\sqrt{21}}{2}$

d) Gọi K là điểm nằm trên đoạn AM sao cho $MK=\frac{3}{4}MA$, H thuộc tia MB sao cho $MH=2,5MB$.

Khi đó $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MK}$, $2,5\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MH}$

Do đó $\frac{3}{4}\overrightarrow{MA}-2,5\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{HK}$

Ta có $MK=\frac{3}{4}AM=\frac{3}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}a}{8}$, $MH=2,5MB=2,5.\frac{a}{2}=\frac{5a}{4}$

Áp dụng định lí Pitago cho tam tam giác vuông KMH ta có

$$KH=\sqrt{MH^2+MK^2}=\sqrt{\frac{25a^2}{16}+\frac{27a^2}{64}}=\frac{a\sqrt{127}}{8}$$

Vậy $\left|\frac{3}{4}\overrightarrow{MA}-2,5\overrightarrow{MB}\right|=KH=\frac{a\sqrt{127}}{8}$

Ví dụ 2: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a.

a) Chứng minh rằng $\vec{u}=4\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

b) Tính độ dài vectơ $\vec{u}$

Lời giải (Hình 1.15)

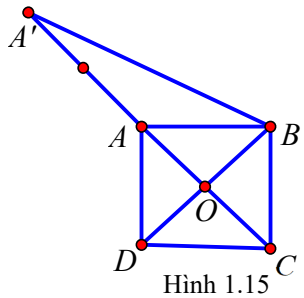
a) Gọi O là tâm hình vuông.

Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\vec{u}=4\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)-3\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)-2\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}\right)$$
$$=4\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OD}$$

Mà $\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$ nên $\vec{u}=3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$

Suy ra $\vec{u}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M



Hình 1.15

b) Lấy điểm A' trên tia OA sao cho $OA'=3OA$ khi đó

$\overrightarrow{OA'}=3\overrightarrow{OA}$ do đó $\vec{u}=\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA'}$

Mặt khác $BA'=\sqrt{OB^2+OA'^2}=\sqrt{OB^2+9OA^2}=a\sqrt{5}$

Suy ra $\left|\vec{u}\right|=a\sqrt{5}$

Dạng 2: Chứng minh đẳng thức vectơ.

1. Phương pháp giải

Sử dụng các kiến thức sau để biến đổi vế này thành vế kia hoặc cả hai biểu thức ở hai vế cùng bằng biểu thức thứ ba hoặc biến đổi tương đương về đẳng thức đúng:

- Các tính chất phép toán vectơ
- Các quy tắc: quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và quy tắc phép trừ
- Tính chất trung điểm:

M là trung điểm đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

M là trung điểm đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}$ (Với O là điểm tuỳ ý)

- Tính chất trọng tâm:

G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}$

G là trọng tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$ (Với O là điểm tuỳ ý)

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, O là trung điểm của IJ .Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$ với M là điểm bất kì

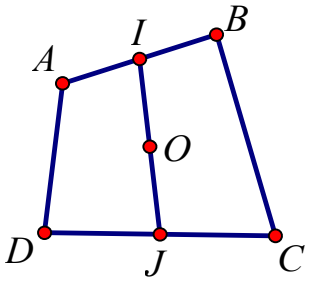
Lời giải (Hình 1.16)

a) Theo quy tắc ba điểm ta có

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}$

Tương tự $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}$

Mà I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}=\vec{0}, \overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}$



Hình 1.16

Vậy $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}\right)+\left(\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}\right)+2\overrightarrow{IJ}=2\overrightarrow{IJ}$ đpcm

b) Theo hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OJ}$

Mặt khác O là trung điểm IJ nên $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\vec{0}$

Suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}\right)=\vec{0}$ đpcm

c) Theo câu b ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ do đó với mọi điểm M thì

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\right)+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\right)+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\right)+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$ đpcm

Ví dụ 2: Cho hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm G. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm tam giác BCA_1, ABC_1, ACB_1. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_2}+\overrightarrow{GG_3}=\vec{0}$

Lời giải

Vì G_1 là trọng tâm tam giác BCA_1 nên $3\overrightarrow{GG_1}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA_1}$

Tương tự G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm tam giác ABC_1, ACB_1 suy ra

$3\overrightarrow{GG_2}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC_1}$ và $3\overrightarrow{GG_3}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GB_1}$

Công theo vế với vế các đẳng thức trên ta có

$\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_2}+\overrightarrow{GG_3}=2\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+\left(\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GB_1}+\overrightarrow{GC_1}\right)$

Mặt khác hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ có cùng trọng tâm G nên

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GB_1}+\overrightarrow{GC_1}$

Suy ra $\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_2}+\overrightarrow{GG_3}=\vec{0}$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$

c) $\overrightarrow{GH}+2\overrightarrow{GO}=\vec{0}$

Lời giải (Hình 1.17)

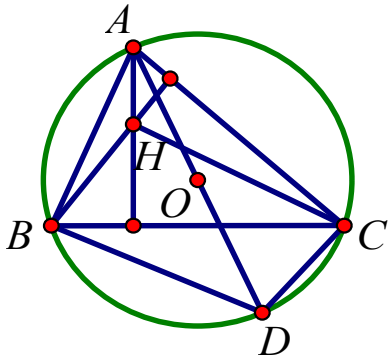
a) Dễ thấy $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$ nếu tam giác ABC vuông

Nếu tam giác ABC không vuông gọi D là điểm đối xứng của A qua O khi đó

$BH//DC$ (vì cùng vuông góc với AC)

$BD//CH$ (vì cùng vuông góc với AB)

Suy ra $BDCH$ là hình bình hành, do đó theo quy tắc hình bình hành thì $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$ (1)



Hình 1.17

Mặt khác vì O là trung điểm của AD nên $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HO}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$

b) Theo câu a) ta có

$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OC}\right)=2\overrightarrow{HO}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$ đpcm

c) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$

Mặt khác theo câu b) ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$

Suy ra $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GH}\right)-3\overrightarrow{OG}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GH}+2\overrightarrow{GO}=\vec{0}$

Dạng 3: Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng các tính chất phép toán vectơ, ba quy tắc phép toán vectơ và tính chất trung điểm, trọng tâm trong tam giác.

2. Các ví dụ.

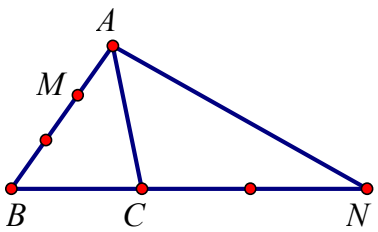
Ví dụ 1: Cho tam giác ABC. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\ \vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

a) Hãy dựng các điểm M, N thỏa mãn: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{BC}$

b) Hãy phân tích $\overrightarrow{CM},\ \overrightarrow{AN},\ \overrightarrow{MN}$ qua các véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

c) Gọi I là điểm thỏa: $\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{CM}$. Chứng minh I,A,N thẳng hàng

Lời giải (hình 1.23)



Hình 1.23

a) Vì $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ suy ra M thuộc cạnh AB và $AM=\frac{1}{3}AB$; $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{BC}$, suy ra N thuộc tia BC và $CN=2BC$.

b) Ta có: $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -2\vec{a} + 3\vec{b}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\vec{a} - 2\vec{a} + 3\vec{b} = -\frac{7}{3}\vec{a} + 3\vec{b}$.

c) Ta có: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b} = -\frac{1}{3}(-2\vec{a} + 3\vec{b})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AN} \Rightarrow$ A, I, N thẳng hàng.

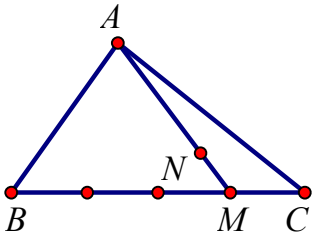
Ví dụ 2: Cho tam giác ABC , trên cạnh BC lấy M sao cho $BM = 3CM$, trên đoạn AM lấy N sao cho $2AN = 5MN$. G là trọng tâm tam giác ABC.

a) Phân tích các vectơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ qua các véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

b) Phân tích các vectơ $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{MN}$ qua các véc tơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GB}$

Lời giải (hình 1.24)

a) Theo giả thiết ta có: $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AN} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AM}$



Hình 1.24

suy ra $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7}\overrightarrow{AM}$

$= -\overrightarrow{AB} + \frac{5}{7}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{23}{28}\overrightarrow{AB} + \frac{15}{28}\overrightarrow{AC}$

b) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ suy ra $\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}$

Ta có $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{7}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)$

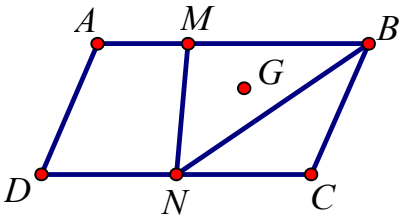
$= -\frac{1}{14}\left(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}\right) - \frac{3}{14}\left(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA}\right)$

$= -\frac{1}{14}\left(\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}\right)-\frac{3}{14}\left(-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}\right)$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{GA}+\frac{1}{7}\overrightarrow{GB}$

Ví dụ 3: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AB và CD sao cho $AB = 3AM$, $CD = 2CN$ và G là trọng tâm tam giác MNB. Phân tích các vectơ $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AG}$ qua các véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

Lời giải (hình 1.25)



Hình 1.25

Ta có: $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$= -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Vì G là trọng tâm tam giác MNB nên

$3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{AB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Suy ra $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Dạng 4: Tìm tập hợp điểm thỏa mãn điều kiện vectơ cho trước.

1. Phương pháp giải.

Để tìm tập hợp điểm M thỏa mãn mãn điều kiện vectơ ta quy về một trong các dạng sau

- Nếu $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$ với A, B phân biệt cho trước thì M thuộc đường trung trực của đoạn AB.

- Nếu $\left|\overrightarrow{MC}\right| = k.\left|\overrightarrow{AB}\right|$ với A, B, C phân biệt cho trước thì M thuộc đường tròn tâm C, bán kính bằng $k.\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

- Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$ với A, B, C phân biệt và k là số thực thay đổi thì

  + M thuộc đường thẳng qua A song song với BC với $k \in R$

  + M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và cùng hướng $\overrightarrow{BC}$ với $k > 0$

  + M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và ngược hướng $\overrightarrow{BC}$ với $k < 0$

- Nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{BC}$, $B \neq C$ với A, B, C thẳng hàng và k thay đổi thì tập hợp điểm M là đường thẳng BC

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn : $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

b) Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn : $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|$.

Lời giải

a) Ta có: $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}+3(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB})+4(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 9\overrightarrow{IA}=-3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}=-\dfrac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{9}\Rightarrow$ I tồn tại và duy nhất.

b) Với I là điểm được xác định ở câu a, ta có:

$2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=9\overrightarrow{MI}+(2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC})=9\overrightarrow{MI}$ và $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AB}$ nên

$|\,2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\,|=|\,\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\,|\Leftrightarrow|\,9\overrightarrow{MI}\,|=|\,\overrightarrow{AB}\,|\Leftrightarrow MI=\dfrac{AB}{9}$

Vậy quỹ tích của M là đường tròn tâm I bán kính $\dfrac{AB}{9}$.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn điều kiện sau :

a) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right)$ với k là số thực thay đổi

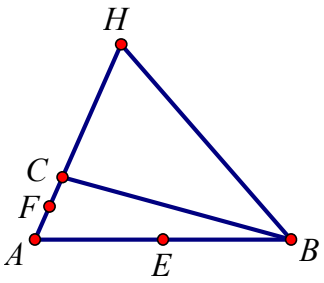
Lời giải (hình 1.28)

a) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC suy ra

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{ME}$ và $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MF}$

Khi đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$

$\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{ME}\right|=\left|2\overrightarrow{MF}\right|\Leftrightarrow ME=MF$



Hình 1.28

Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực của EF

b) Ta có $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)-3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{HB}$

Với H là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AH}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right)$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{ME}=2k\overrightarrow{HB}\Leftrightarrow \overrightarrow{ME}=k\overrightarrow{HB}$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua E và song song với HB

Ví dụ 3: Cho tứ giác $ABCD$. Với số k tùy ý, lấy các điểm M và N sao cho $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DN}=k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn thẳng MN khi k thay đổi.

Lời giải (hình 1.29)

Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AD và BC, ta có

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'B}$ và $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'C}$

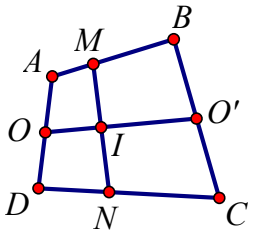
Suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{OO'}$

Tương tự vì O, I lần lượt là trung điểm của AD và MN nên

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{OI}$

Do đó $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{DC}\right)=k\overrightarrow{OO'}$

Vậy khi k thay đổi, tập hợp điểm I là đường thẳng OO'



Hình 1.29

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho tam giác OAB vuông cân tại O, cạnh $OA=a$. Tính $\left|2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|$.

A. a. **B.** $\left(1+\sqrt{2}\right)a$. **C.** $a\sqrt{5}$. **D.** $2a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi C là điểm đối xứng của O qua $A\Rightarrow OC=2a$. Tam giác OBC vuông tại O, có $BC=\sqrt{OB^2+OC^2}=a\sqrt{5}$.

Ta có $2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BC}$, suy ra $\left|2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=a\sqrt{5}$.

Câu 2: Cho tam giác OAB vuông cân tại O, cạnh $OA=a$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\left|3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}\right|=5a$. **B.** $\left|2\overrightarrow{OA}\right|+\left|3\overrightarrow{OB}\right|=5a$.

C. $\left|7\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}\right|=5a$. **D.** $\left|11\overrightarrow{OA}\right|-\left|6\overrightarrow{OB}\right|=5a$.

Lời giải

Chọn C.

Dựa vào các đáp án, ta có nhận xét sau:

- **A đúng**, gọi C nằm trên tia đối của tia AO sao cho $OC=3OA\Rightarrow 3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$. Và D nằm trên tia đối của tia BO sao cho $OD=4OB\Rightarrow 4\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$. Dựng hình chữ nhật $OCED$ suy ra $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}$ (quy tắc hình bình hành).

  Ta có $\left|3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right|=\left|\overrightarrow{OE}\right|=OE=CD=\sqrt{OC^2+OD^2}=5a.$

- **B đúng**, vì $\left|2\overrightarrow{OA}\right|+\left|3\overrightarrow{OB}\right|=2\left|\overrightarrow{OA}\right|+3\left|\overrightarrow{OB}\right|=2a+3a=5a.$

- **C sai**, xử lý tương tự như ý đáp án **A. Chọn C.**

- **D đúng**, vì $\left|11\overrightarrow{OA}\right|-\left|6\overrightarrow{OB}\right|=11\left|\overrightarrow{OA}\right|-6\left|\overrightarrow{OB}\right|=11a-6a=5a.$

Câu 3: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC, I là trung điểm của AM. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IA}=\vec{0}.$ **B.** $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+2\overrightarrow{IA}=\vec{0}.$

C. $2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IA}=\vec{0}.$ **D.** $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IA}=\vec{0}.$

Lời giải

Chọn B.

Vì M là trung điểm BC nên $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{IM}$. Mặt khác I là trung điểm AM nên $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IM}=\vec{0}$. Suy ra $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+2\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IM}+2\overrightarrow{IA}=2\left(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IA}\right)=\vec{0}.$

Câu 4: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC, I là trung điểm của AM. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).$ **B.** $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right).$

C. $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$ **D.** $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$

Lời giải

Chọn A.

Vì M là trung điểm BC nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}.\ (1)$ Mặt khác I là trung điểm AM nên $2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AM}.\ (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AI}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).$

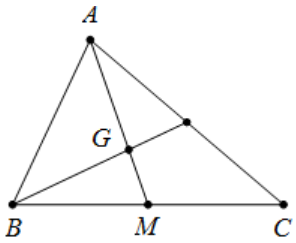
Câu 5: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC, G là trọng tâm của tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).$ **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).$

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{2}\overrightarrow{AC}.$ **D.** $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}.$

Lời giải

Chọn B.



Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$. Do đó $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

Câu 6: Cho tứ giác $ABCD$. Trên cạnh AB, CD lấy lần lượt các điểm M, N sao cho $3\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$ và $3\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{DC}$. Tính vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$ **B.** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$

C. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$ **D.** $\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$ và $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$.

Suy ra $3\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}+2\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}\right)$

$=\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right)+\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{BC}+\left(\overrightarrow{DN}+2\overrightarrow{CN}\right).$

Theo bài ra, ta có $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{DN}+2\overrightarrow{CN}=\vec{0}.$

Vậy $3\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$

Câu 7: Cho hình thang $ABCD$ có đáy là AB và CD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DC}.$ **B.** $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BN}.$

C. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right).$ **D.** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right).$

Lời giải

Chọn D.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AD, $BC \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\vec{0} \\ \overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0} \end{cases}$. Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- **A đúng**, vì $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}\right)+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{MN}.$
- **B đúng**, vì $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BN}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\right)-\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MN}.$
- **C đúng**, vì $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}.$

Suy ra $2\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right)+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\left(\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}\right)=\vec{0}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$

$\longrightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right).$

- **D sai**, vì theo phân tích ở đáp án **C. Chọn D.**

Câu 8: Cho hình bình hành $ABCD$ có M là trung điểm của AB. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}.$ **B.** $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}.$

C. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}.$ **D.** $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}.$

Lời giải

Chọn C.

Xét các đáp án ta thấy bài toán yêu cầu phân tích vectơ $\overrightarrow{DM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}$. Vì M là trung điểm AB nên $2\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{DM}=2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{DM}=-2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}$

suy ra $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}.$

Câu 9: Cho tam giác ABC, điểm M thuộc cạnh AB sao cho $3AM=AB$ và N là trung điểm của AC. Tính $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$ **B.** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$

C. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$ **D.** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$

Lời giải

Chọn B.

Vì N là trung điểm AC nên $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}. \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}$

$=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.$

Suy ra $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$

Câu 10: Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N chia cạnh BC theo ba phần bằng nhau $BM=MN=NC$. Tính $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$ **B.** $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$

C. $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$ **D.** $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$

Câu 11: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC. Tính $\overrightarrow{AB}$ theo $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$ **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}.$

C. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$ **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$

Câu 12: Cho tam giác ABC, gọi M là trung điểm AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC=2NA$. Gọi K là trung điểm của MN. Khi đó

A. $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$ **B.** $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$

C. $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$ **D.** $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$

Câu 13: Cho hình bình hành $ABCD$. Tính $\overrightarrow{AB}$ theo $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.

A. $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

B. $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

C. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$.

Lời giải

Chọn A.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\end{cases}$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}+\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}\longrightarrow\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}.$$

Câu 14: Cho tam giác ABC và đặt $\vec{a}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Cặp vectơ nào sau đây cùng phương?

A. $2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+2\vec{b}$. **B.** $2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}-2\vec{b}$. **C.** $5\vec{a}+\vec{b}$, $-10\vec{a}-2\vec{b}$. **D.** $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$.

Lời giải

Chọn C.

Dễ thấy $-10\vec{a}-2\vec{b}=-2\left(5\vec{a}+\vec{b}\right)\longrightarrow$ hai vectơ $5\vec{a}+\vec{b}$, $-10\vec{a}-2\vec{b}$ cùng phương.

Câu 15: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và I là trung điểm của BC. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{GI}$.

B. $\overrightarrow{IG}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$.

C. $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$.

D. $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}$.

Lời giải

Chọn C.

Vì I là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB}\\ \overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\underbrace{\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}}_{\vec{0}}+2\overrightarrow{GI}=2\overrightarrow{GI}$.

Câu 16: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và M là trung điểm BC. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{GA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}$.

C. $\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}$.

D. $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GM}$.

Lời giải

Chọn D.

Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MB}\\ \overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MC}\end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\underbrace{\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}_{\vec{0}}+2\overrightarrow{GM}=2\overrightarrow{GM}.$

Câu 17: Cho tam giác ABC vuông tại A, M là trung điểm của BC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.$ **B.** $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.$ **C.** $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MC}.$ **D.** $\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{BC}}{2}.$

Lời giải

Chọn C.

Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MC}.$

Câu 18: Cho tam giác ABC. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AM}.$ **B.** $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{NC}.$ **C.** $\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{MN}.$ **D.** $\overrightarrow{CN}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$

Lời giải

Chọn C.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Suy ra MN là đường trung bình của tam giác

$ABC\longrightarrow MN=\dfrac{1}{2}BC.$ Mà $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MN}$ là hai vectơ cùng hướng nên $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{MN}.$

Câu 19: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AG}.$ **B.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BG}.$

C. $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CG}.$ **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}.$

Lời giải

Chọn B.

Gọi E là trung điểm của $AC \Rightarrow \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BE}.\ (1)$ Mà G là trọng tâm của tam giác ABC

$\Rightarrow \overrightarrow{BE}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BG}.\ (2)$

Từ $(1), (2)$ suy ra $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2.\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BG}=3\overrightarrow{BG}.$

Câu 20: Cho tam giác đều ABC và điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}.$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{CI}=\dfrac{\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB}}{3}$.

B. $\overrightarrow{CI}=\dfrac{\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}}{3}$.

C. $\overrightarrow{CI}=-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$.

D. $\overrightarrow{CI}=\dfrac{\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}}{-3}$.

Lời giải

Chọn C.

Từ giả thiết $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}\Rightarrow B$ là trung điểm của $IA\Rightarrow\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}$.

Lại có $\begin{cases}\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BI}\\ \overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AI}\end{cases}\Rightarrow 2\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}$.

$=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+3\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+3\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)=-2\overrightarrow{CA}+4\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{CI}=-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$.

Câu 21: Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC}$.

B. $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.

C. $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$.

D. $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$.

Câu 22: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$.

B. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

D. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}$ (vì $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$).

Câu 23: Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{CD}$.

D. $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}+\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}}_{\vec{0}}=2\overrightarrow{BC}.$

Câu 24: Cho hình bình hành $ABCD$ có M là giao điểm của hai đường chéo. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$ **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.$

C. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BM}.$ **D.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}.$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BC}$. Suy ra điều trên không thể xảy ra vì $\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{BC}.$

Câu 25: Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CA}.$ Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. M trùng $A.$ **B.** M trùng $B.$

C. M trùng $C.$ **D.** M là trọng tâm của tam giác $ABC.$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CA}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MA}.$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}.\ (*)$

Đẳng thức $(*)$ suy ra M là trọng tâm của tam giác $ABC.$

Câu 26: Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Đặt $\overrightarrow{GA}=\vec{a},\ \overrightarrow{GB}=\vec{b}$. Hãy tìm $m,\ n$ để có $\overrightarrow{BC}=m\vec{a}+n\vec{b}.$

A. $m=1,n=2.$ **B.** $m=-1,n=-2.$

C. $m=2,n=1.$ **D.** $m=-2,n=-1.$

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{BG}-\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right)=-\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}\ \left(\text{do }\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\right).$

Câu 27: Cho ba điểm A,B,C không thẳng hàng và điểm M thỏa mãn đẳng thức vectơ $\overrightarrow{MA}=x\overrightarrow{MB}+y\overrightarrow{MC}.$ Tính giá trị biểu thức $P=x+y.$

A. $P=0.$ **B.** $P=2.$ **C.** $P=-2.$ **D.** $P=3.$

Lời giải

Chọn B.

Do $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên tồn tại các số thực x,y sao cho

$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC},\forall M\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=x\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)+y\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}\right)$

$\Leftrightarrow\left(1-x-y\right)\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{MB}+y\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\left(x+y-1\right)\overrightarrow{MA}=x\overrightarrow{MB}+y\overrightarrow{MC}.$

Theo bài ra, ta có $\overrightarrow{MA}=x\overrightarrow{MB}+y\overrightarrow{MC}$ suy ra $x+y-1=1\Leftrightarrow x+y=2.$

Câu 28: Cho hình chữ nhật $ABCD$ và số thực $k>0$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=k$ là

A. một đoạn thẳng. **B.** một đường thẳng. **C.** một đường tròn. **D.** một điểm.

Lời giải

Chọn C.

Gọi I là tâm của hình chữ nhật $ABCD$, ta có $\begin{cases}2\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\\2\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\end{cases},\forall M.$

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=k\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MI}\right|=k\Leftrightarrow4\left|\overrightarrow{MI}\right|=k\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MI}\right|=\frac{k}{4}.\ (*)$

Vì I là điểm cố định nên tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $(*)$ là đường tròn tâm I, bán kính $R=\frac{k}{4}.$

Câu 29: Cho hình chữ nhật $ABCD$ và I là giao điểm của hai đường chéo. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ là

A. trung trực của đoạn thẳng AB.

B. trung trực của đoạn thẳng AD.

C. đường tròn tâm I, bán kính $\frac{AC}{2}$.

D. đường tròn tâm I, bán kính $\frac{AB+BC}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD. Khi đó $\begin{cases}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{ME}\\\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MF}\end{cases},\forall M.$

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|\Leftrightarrow2\left|\overrightarrow{ME}\right|=2\left|\overrightarrow{MF}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{ME}\right|=\left|\overrightarrow{MF}\right|.\ (*)$

Vì E, F là hai điểm cố định nên từ đẳng thức $(*)$ suy ra tập hợp các điểm M là trung trực của đoạn thẳng EF hay chính là trung trực của đoạn thẳng AD.

Câu 30: Cho hai điểm A, B phân biệt và cố định, với I là trung điểm của AB. Tập hợp các điểm M

thỏa mãn đẳng thức $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ là

A. đường tròn tâm I, đường kính $\frac{AB}{2}$. **B.** đường tròn đường kính AB.

C. đường trung trực của đoạn thẳng AB. **D.** đường trung trực đoạn thẳng IA.

Lời giải

Chọn A.

Vì I là trung điểm của AB suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{MI}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|\Leftrightarrow MI=\frac{AB}{2}.\ (*)$

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $(*)$ là đường tròn tâm I, bán kính

Câu 31: Cho hai điểm A, B phân biệt và cố định, với I là trung điểm của AB. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|$ là

A. đường trung trực của đoạn thẳng AB. **B.** đường tròn đường kính AB.

C. đường trung trực đoạn thẳng IA. **D.** đường tròn tâm A, bán kính AB.

Lời giải

Chọn A.

Chọn điểm E thuộc đoạn AB sao cho $EB=2EA\Rightarrow 2\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$.

Chọn điểm F thuộc đoạn AB sao cho $FA=2FB\Rightarrow 2\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}$.

Ta có $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{ME}+2\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}\right|=\left|2\overrightarrow{MF}+2\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FA}\right|$

$\Leftrightarrow\left|3\overrightarrow{ME}+\underbrace{2\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}}_{\vec{0}}\right|=\left|3\overrightarrow{MF}+\underbrace{2\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}}_{\vec{0}}\right|\Leftrightarrow\left|3\overrightarrow{ME}\right|=\left|3\overrightarrow{MF}\right|\Leftrightarrow ME=MF.\ (*)$

Vì E, F là hai điểm cố định nên từ đẳng thức $(*)$ suy ra tập hợp các điểm M là trung trực của đoạn thẳng EF. Gọi I là trung điểm của AB suy ra I cũng là trung điểm của EF.

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn $\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right|$ là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Câu 32: Cho tam giác đều ABC cạnh a, trọng tâm G. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$ là

A. đường trung trực của đoạn BC . **B.** đường tròn đường kính BC .

C. đường tròn tâm G, bán kính $\frac{a}{3}$. **D.** đường trung trực đoạn thẳng AG.

Lời giải

Chọn A.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, AC. Khi đó $\begin{cases}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}\\ \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MJ}\end{cases}$.

Theo bài ra, ta có $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{MI}\right|=\left|2\overrightarrow{MJ}\right|\Leftrightarrow MI=MJ.$

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|$ là đường trung trực của đoạn thẳng IJ, cũng chính là đường trung trực của đoạn thẳng BC vì IJ là đường trung bình của tam giác ABC.

Câu 33: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|$ là đường tròn cố định có bán kính R. Tính bán kính R theo a.

A. $R=\frac{a}{3}$. **B.** $R=\frac{a}{9}$. **C.** $R=\frac{a}{2}$. **D.** $R=\frac{a}{6}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có

$2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)+4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right).$

Chọn điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)+\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IA}=\vec{0}.$

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=3\overrightarrow{IG}.$

Khi đó $9\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IA}=\vec{0}\Leftrightarrow 9\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 9\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{CA}.\ (*)$

Do đó $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|\Leftrightarrow\left|9\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|\Leftrightarrow 9MI=AB.$

Vì I là điểm cố định thỏa mãn $(*)$ nên tập hợp các điểm M cần tìm là đường tròn tâm I, bán kính $R=\frac{AB}{9}=\frac{a}{9}$.

Câu 34: Cho tam giác ABC. Có bao nhiêu điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=3$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC nên G cố định duy nhất và $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Ta có $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=3 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}-3\overrightarrow{GM}\right|=3 \Leftrightarrow 3\left|\overrightarrow{GM}\right|=3 \Leftrightarrow GM=1$.

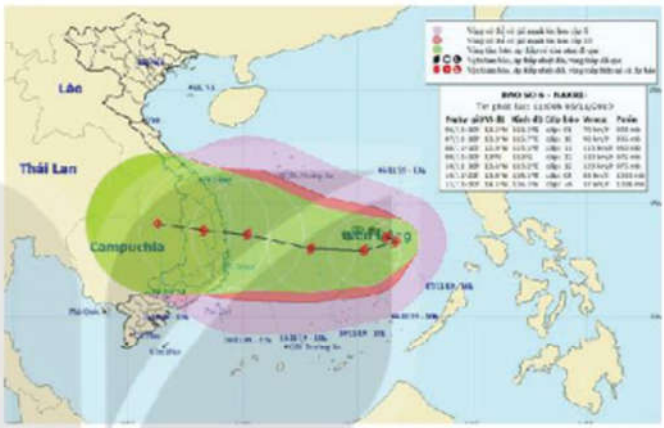
Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm G bán kính bằng 1.

Bài 10 VECTƠ TRONG MẶT PHẲNG TOẠ ĐỘ

THUẬT NGỮ
- Mặt phẳng toạ độ
- Toạ độ của vectơ

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Nhận biết toạ độ của vectơ và thể hiện các phép toán vectơ theo toạ độ.
- Thể hiện mối quan hệ giữa các vectơ thông qua toạ độ của chúng.
- Ứng dụng của toạ độ vectơ trong bài toán xác định vị trí của vật trên mặt phẳng toạ độ.

Một bản tin dự báo thời tiết thể hiện đường đi trong 12 giờ của một cơn bão trên một mặt phẳng toạ độ. Trong khoảng thời gian đó, tâm bão di chuyển thẳng đều từ vị trí có toạ độ (13,8; 108,3) đến vị trí có toạ độ (14,1; 106,3). Dựa vào thông tin trên, liệu ta có thể dự đoán được vị trí của tâm bão tại thời điểm bất kì trong khoảng thời gian 12 giờ đó hay không?



Hình 4.31. Ta có thể dùng một phần mặt phẳng toạ độ để mô tả một phạm vi nhất định trên Trái Đất mà vị trí x° vĩ bắc, y° kinh đông của tâm áp thấp được thể hiện bởi điểm có toạ độ (x; y).

Trong bài học này, ta gắn cho mỗi vectơ trên mặt phẳng toạ độ một cặp số để có thể làm việc với vectơ thông qua cặp số đó.

1. TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ

HĐ1. Trên trục số Ox, gọi A là điểm biểu diễn số 1 và đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ (H.4.32a). Gọi M là điểm biểu diễn số 4, N là điểm biểu diễn số $-\frac{3}{2}$. Hãy biểu thị mỗi vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ theo vectơ $\vec{i}$.

Dùng vectơ, ta có thể diễn đạt lại trục số như sau:

Trục toạ độ (còn gọi là *trục*, hay *trục số*) là một đường thẳng mà trên đó đã xác định một điểm O và một vectơ $\vec{i}$ có độ dài bằng 1. Điểm O gọi là *gốc toạ độ*, vectơ $\vec{i}$ gọi là *vectơ đơn vị* của trục. Điểm M trên trục biểu diễn số x_0 nếu $\overrightarrow{OM} = x_0\vec{i}$ (H.4.32b).



a)



b)

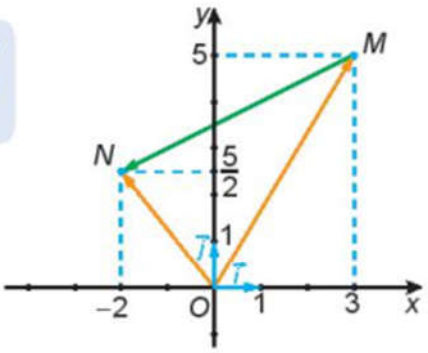
Hình 4.32

HĐ2. Trong Hình 4.33:

a) Hãy biểu thị mỗi vectơ $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ theo các vectơ $\vec{i}, \vec{j}$.

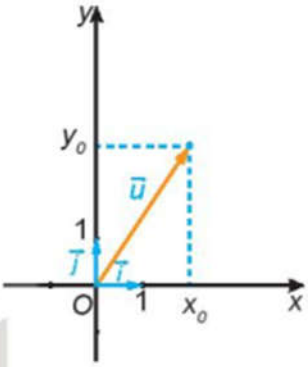
b) Hãy biểu thị vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo các vectơ $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$, từ đó biểu thị vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo các vectơ $\vec{i}, \vec{j}$.





Hình 4.33

Trên mặt phẳng, xét hai trục Ox, Oy có chung gốc O và vuông góc với nhau. Vectơ đơn vị của trục Ox là $\vec{i}$, vectơ đơn vị của trục Oy là $\vec{j}$. Hệ gồm hai trục Ox, Oy như vậy được gọi là *hệ trục toạ độ* Oxy. Điểm O gọi là *gốc toạ độ*, trục Ox gọi là *trục hoành*, trục Oy gọi là *trục tung*. Mặt phẳng chứa hệ trục toạ độ Oxy gọi là mặt phẳng toạ độ Oxy hay mặt phẳng Oxy (H.4.34).



Hình 4.34

Với mỗi vectơ $\vec{u}$ trên mặt phẳng Oxy, có duy nhất cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho $\vec{u} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$. Ta nói vectơ $\vec{u}$ có toạ độ $(x_0; y_0)$ và viết $\vec{u} = (x_0; y_0)$ hay $\vec{u}(x_0; y_0)$. Các số x_0, y_0 tương ứng được gọi là hoành độ, tung độ của $\vec{u}$.

Nhận xét. Hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cùng toạ độ.

$$\vec{u}(x; y) = \vec{v}(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y'. \end{cases}$$

Ví dụ 1. Tìm toạ độ của các vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}$ tương ứng của các trục Ox, Oy.

Giải

Vì $\vec{i} = 1\vec{i} + 0\vec{j}$ nên $\vec{i}$ có toạ độ là $(1; 0)$.

Vì $\vec{j} = 0\vec{i} + 1\vec{j}$ nên $\vec{j}$ có toạ độ là $(0; 1)$.

Luyện tập 1. Tìm toạ độ của $\vec{0}$.

2. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

HĐ3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $\vec{u} = (2; -3)$, $\vec{v} = (4; 1)$, $\vec{a} = (8; -12)$.

a) Hãy biểu thị mỗi vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{a}$ theo các vectơ $\vec{i}$, $\vec{j}$.

b) Tìm toạ độ của các vectơ $\vec{u} + \vec{v}$, $4\vec{u}$.

c) Tìm mối liên hệ giữa hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{a}$.

Cho hai vectơ $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$. Khi đó:

- $\vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y')$;
- $\vec{u} - \vec{v} = (x - x'; y - y')$;
- $k\vec{u} = (kx; ky)$, với $k \in \mathbb{R}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ví dụ 2. Cho $\vec{a}=(1;2), \vec{b}=\left(\frac{3}{2};3\right)$.

a) Tìm toạ độ của $\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-2\vec{b}$.

b) Hỏi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng phương hay không?

Giải

a) Vì $\vec{a}=(1;2), \vec{b}=\left(\frac{3}{2};3\right)$ nên $\vec{a}+\vec{b}=\left(\frac{5}{2};5\right)$.

Ta có $2\vec{b}=(3;6)$ nên $\vec{a}-2\vec{b}=(-2;-4)$.

b) Do $\frac{3}{2}\vec{a}=\left(\frac{3}{2};3\right)=\vec{b}$ nên hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Nhận xét. Vectơ $\vec{v}(x';y')$ cùng phương với vectơ $\vec{u}(x;y)\neq\vec{0}$ khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $x'=kx, y'=ky$ (hay là $\frac{x'}{x}=\frac{y'}{y}$ nếu $xy\neq 0$).

HĐ4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $M(x_0;y_0)$.

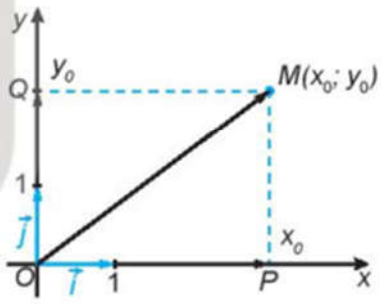
Gọi P, Q tương ứng là hình chiếu vuông góc của M trên trục hoành Ox và trục tung Oy (H.4.35).

a) Trên trục Ox, điểm P biểu diễn số nào? Biểu thị $\overrightarrow{OP}$ theo $\vec{i}$ và tính độ dài của $\overrightarrow{OP}$ theo x_0.

b) Trên trục Oy, điểm Q biểu diễn số nào? Biểu thị $\overrightarrow{OQ}$ theo $\vec{j}$ và tính độ dài của $\overrightarrow{OQ}$ theo y_0.

c) Dựa vào hình chữ nhật $OPMQ$, tính độ dài của $\overrightarrow{OM}$ theo x_0, y_0.

d) Biểu thị $\overrightarrow{OM}$ theo các vectơ $\vec{i}, \vec{j}$.



Hình 4.35

Nếu điểm M có toạ độ $(x;y)$ thì vectơ $\overrightarrow{OM}$ có toạ độ $(x;y)$ và độ dài $\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Nhận xét. Với vectơ $\vec{u}=(x;y)$, ta lấy điểm $M(x;y)$ thì $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$. Do đó, $\left|\vec{u}\right|=\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Chẳng hạn, vectơ $\vec{u}=(2;-1)$ có độ dài là $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$.

HĐ5. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm $M(x;y)$ và $N(x';y')$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$.

b) Biểu thị vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo các vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ và tìm toạ độ của $\overrightarrow{MN}$.

c) Tìm độ dài của vectơ $\overrightarrow{MN}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Với hai điểm $M(x; y)$ và $N(x'; y')$ thì $\overrightarrow{MN} = (x'-x; y'-y)$ và khoảng cách giữa hai điểm M, N là $MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm $A(1;-2)$, $B(3; 2)$, $C(7; 4)$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$. So sánh các khoảng cách từ B tới A và C.

b) Ba điểm A, B, C có thẳng hàng hay không?

c) Tìm điểm $D(x; y)$ để $ABCD$ là một hình thoi.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (3-1; 2-(-2)) = (2; 4)$, $\overrightarrow{BC} = (7-3; 4-2) = (4; 2)$.

Các khoảng cách từ B tới A và C lần lượt là:

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5};\ BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2+2^2} = 2\sqrt{5}.$$

Do đó các khoảng cách này bằng nhau.

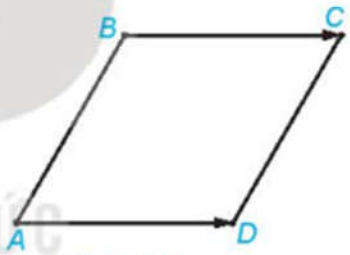
b) Hai vectơ $\overrightarrow{AB} = (2; 4)$, $\overrightarrow{BC} = (4; 2)$ không cùng phương (vì $\frac{2}{4} \neq \frac{4}{2}$). Do đó các điểm A, B, C không cùng nằm trên một đường thẳng. Vậy chúng không thẳng hàng.

c) Các điểm A, B, C không thẳng hàng và $BA = BC$ nên $ABCD$ là một hình thoi khi và chỉ khi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Do $\overrightarrow{AD} = (x-1; y+2)$, $\overrightarrow{BC} = (4; 2)$ nên

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=4 \\ y+2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=0. \end{cases}$$

Vậy điểm cần tìm là $D(5; 0)$.



Hình 4.36

Luyện tập 2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai điểm $A(2; 1)$, $B(3; 3)$.

a) Các điểm O, A, B có thẳng hàng hay không?

b) Tìm điểm $M(x; y)$ để $OABM$ là một hình bình hành.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho ba điểm không thẳng hàng:

$A(1; 3)$, $B(-2; 6)$, $C(5; 1)$.

a) Tìm toạ độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

b) Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Giải

a) (H.4.37) Điểm $I(x; y)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ (*).



Hình 4.37

Mặt khác $\overrightarrow{IA}=(1-x;3-y)$, $\overrightarrow{IB}=(-2-x;6-y)$, $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=(-1-2x;9-2y)$.

Do đó, (*) tương đương với $\begin{cases}-1-2x=0\\9-2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}\\y=\dfrac{9}{2}.\end{cases}$

Vậy $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{2}\right)$.

b) Điểm $G(x; y)$ là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ (**)

Mặt khác

$\overrightarrow{GA}=(1-x;3-y)$, $\overrightarrow{GB}=(-2-x;6-y)$, $\overrightarrow{GC}=(5-x;1-y)$,

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=(4-3x;10-3y)$.

Do đó, (**) tương đương với $\begin{cases}4-3x=0\\10-3y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4}{3}\\y=\dfrac{10}{3}.\end{cases}$

Vậy $G\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{10}{3}\right)$.

Chú ý

- Trung điểm M của đoạn thẳng AB có toạ độ là $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$.
- Trọng tâm G của tam giác ABC có toạ độ là $\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$.

Vận dụng. Từ thông tin dự báo bão được đưa ra ở đầu bài học, hãy xác định toạ độ vị trí M của tâm bão tại thời điểm 9 giờ trong khoảng thời gian 12 giờ của dự báo.

Chú ý. Để thể hiện một phần Trái Đất trên một bản đồ phẳng người ta dùng một phép chiếu bản đồ, với độ sai khác nhất định giữa bản vẽ và thực địa (thường được quy định với từng loại bản đồ). Về nguyên tắc, phạm vi thể hiện càng hẹp thì càng chính xác. Trong vận dụng này, ta chỉ tính toán trong phạm vi một đoạn đường đi ngắn của tâm bão.

Trong 12 giờ, tâm bão được dự báo di chuyển thẳng đều từ $A(13,8; 108,3)$ tới vị trí có toạ độ $B(14,1; 106,3)$. Gọi toạ độ của M là $(x; y)$. Bạn hãy tìm mối liên hệ giữa hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ rồi thể hiện mối quan hệ đó theo toạ độ để tìm $x; y$.



PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Xác định tọa độ điểm, vectơ liên quan đến biểu thức dạng $\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}, k\vec{u}$

1. Phương pháp.

Dùng công thức tính tọa độ của vectơ $\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}, k\vec{u}$

Với $\vec{u}=(x;y)$; $\vec{u'}=(x';y')$ và số thực k, khi đó $\vec{u}\pm\vec{v}=(x\pm x';y\pm y')$ và $k.\vec{u}=(kx;ky)$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng Oxy, cho 3 vecto: $\vec{a}=(3;2)$ $\vec{b}=(-1;5)$ $\vec{c}=(-2;-5)$

Tìm tọa độ của vectơ sau

a) $\vec{u}+2\vec{v}$ với $\vec{u}=3\vec{i}-4\vec{j}$ và $\vec{v}=\pi\vec{i}$

b) $\vec{k}=2\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{l}=-\vec{a}+2\vec{b}+5\vec{c}$

Lời giải

a) Ta có $\vec{u}+2\vec{v}=3\vec{i}-4\vec{j}+\pi\vec{i}=(3+\pi)\vec{i}-4\vec{j}$ suy ra $\vec{u}+2\vec{v}=(3+\pi;-4)$

b) Ta có $2\vec{a}=(6;4)$ $\vec{b}=(-1;5)$ suy ra $\vec{k}=(6-1;4+5)=(5;9)$;

$-\vec{a}=(-3;-2)$, $2\vec{b}=(-2;10)$ và $5\vec{c}=(-10;-25)$ suy ra

$\vec{l}=(-3-2-10;-2+10-25)=(-15;-17)$

Ví dụ 2: Cho $\vec{a}=(1;2)$, $\vec{b}=(-3;4)$; $\vec{c}=(-1;3)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u}$ biết

a) $2\vec{u}-3\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ b) $3\vec{u}+2\vec{a}+3\vec{b}=3\vec{c}$

Lời giải

a) Ta có $2\vec{u}-3\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{u}=\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

Suy ra $\vec{u}=\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2};3-2\right)=(3;1)$

b) Ta có $3\vec{u}+2\vec{a}+3\vec{b}=3\vec{c}\Leftrightarrow\vec{u}=-\frac{2}{3}\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

Suy ra $\vec{u}=\left(-\frac{2}{3}+3-1;-\frac{4}{3}-4+3\right)=\left(\frac{4}{3};-\frac{7}{3}\right)$

Ví dụ 3: Cho ba điểm $A(-4;0), B(0;3)$ và $C(2;1)$

a) Xác định tọa độ vectơ $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

b) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}(4;3)$, $\overrightarrow{AC}(6;1)$ suy ra $\vec{u}=(2;5)$

b) Gọi $M(x;y)$, ta có $\overrightarrow{MA}(-4-x;-y)$, $\overrightarrow{MB}(-x;3-y)$, $\overrightarrow{MC}(2-x;1-y)$

Suy ra $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=(-6x+2;-6y+9)$

Do đó $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}-6x+2=0\\-6y+9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\y=\dfrac{3}{2}\end{cases}$

Vậy $M\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{3}{2}\right)$

Dạng 2: Bài toán liên quan đến sự cùng phương của hai vectơ. Phân tích một vectơ qua hai vectơ không cùng phương.

1. Phương pháp.

- Cho $\vec{u}=(x;y)$; $\overrightarrow{u'}=(x';y')$. Vectơ $\overrightarrow{u'}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}(\vec{u}\neq\vec{0})$ khi và chỉ khi có số k sao cho $\begin{cases}x'=kx\\y'=ky\end{cases}$

Chú ý: Nếu $xy\neq 0$ ta có $\overrightarrow{u'}$ cùng phương $\vec{u}\Leftrightarrow\dfrac{x'}{x}=\dfrac{y'}{y}$

- Để phân tích $\vec{c}(c_1;c_2)$ qua hai vectơ $\vec{a}(a_1;a_2)$, $\vec{b}(b_1;b_2)$ không cùng phương, ta giả sử $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$. Khi đó ta quy về giải hệ phương trình $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho $\vec{a}=(1;2)$, $\vec{b}=(-3;0)$; $\vec{c}=(-1;3)$

a) Chứng minh hai vectơ $\vec{a}$; $\vec{b}$ không cùng phương

b) Phân tích vectơ $\vec{c}$ qua $\vec{a}$; $\vec{b}$

Lời giải

a) Ta có $\dfrac{-3}{1}\neq\dfrac{0}{2}\Rightarrow\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương

b) Giả sử $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$. Ta có $x\vec{a}+y\vec{b}=\left(x-3y;2x\right)$

Suy ra $\begin{cases}x-3y=-1\\2x=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\y=\dfrac{5}{9}\end{cases}\Rightarrow\vec{c}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{5}{9}\vec{b}$

Ví dụ 2: Cho $\overrightarrow{u}=\left(m^2+m-2\;;4\right)$ và $\overrightarrow{v}=(m;2)$. Tìm m để hai vecto $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương.

Lời giải

+ Với $m=0$: Ta có $\overrightarrow{u}=(-2;4)$; $\overrightarrow{v}=(0;2)$

Vì $\frac{0}{-2} \neq \frac{2}{4}$ nên hai vectơ $\vec{u};\vec{v}$ không cùng phương

+ Với $m \neq 0$: Ta có $\vec{u};\vec{v}$ cùng phương khi và chỉ khi

$$\frac{m^2+m-2}{m} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow m^2-m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$$

Vậy với $m=-1$ và $m=2$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(6;3),\ B(-3;6),\ C(1;-2)$.

a) Chứng minh A, B, C là ba đỉnh một tam giác.

b) Xác định điểm D trên trục hoành sao cho ba điểm A, B, D thẳng hàng.

c) Xác định điểm E trên cạnh BC sao cho $BE=2EC$

d) Xác định giao điểm hai đường thẳng DE và AC

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}(-9;3),\ \overrightarrow{AC}(-5;-5)$. Vì $\frac{-9}{-5} \neq \frac{3}{-5}$ suy ra $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương

Hay A, B, C là ba đỉnh một tam giác.

b) D trên trục hoành $\Rightarrow D(x;0)$

Ba điểm A, B, D thẳng hàng suy ra $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ không cùng phương

Mặt khác $\overrightarrow{AD}(x-6;-3)$ do đó $\frac{x-6}{-9} = \frac{-3}{3} \Rightarrow x=15$

Vậy $D(15;0)$

c) Vì E thuộc đoạn BC và $BE=2EC$ suy ra $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{EC}$

Gọi $E(x;y)$ khi đó $\overrightarrow{BE}(x+3;y-6),\ \overrightarrow{EC}(1-x;-2-y)$

Do đó $\left\{\begin{array}{l} x+3=2(1-x) \\ y-6=2(-2-y) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{2}{3} \end{array}\right.$

Vậy $E\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$

d) Gọi $I(x;y)$ là giao điểm của DE và AC.

Do đó $\overrightarrow{DI}(x-15;y), \overrightarrow{DE}\left(-\frac{46}{3};\frac{2}{3}\right)$ cùng phương suy ra $\frac{3(x-15)}{-46} = \frac{3y}{2} \Rightarrow x+23y-15=0$ (1)

$\overrightarrow{AI}(x-6;y-3),\ \overrightarrow{AC}(-5;-5)$ cùng phương suy ra $\frac{x-6}{-5} = \frac{y-3}{-5} \Rightarrow x-y-3=0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x=\frac{7}{2}$ và $y=\frac{1}{2}$

Vậy giao điểm hai đường thẳng DE và AC là $I\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$

Dạng 3: Tìm tọa độ điểm, tọa độ vectơ trên mặt phẳng Oxy.

1. Phương pháp.

- Để tìm tọa độ của vectơ $\vec{a}$ ta làm như sau

Dựng vectơ $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên Ox, Oy. Khi đó $\vec{a}(a_1;a_2)$ với $a_1=\overline{OH}$, $a_2=\overline{OK}$

- Để tìm tọa độ điểm A ta đi tìm tọa độ vectơ $\overrightarrow{OA}$
- Nếu biết tọa độ hai điểm $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ suy ra tọa độ $\overrightarrow{AB}$ được xác định theo công thức $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)$

Chú ý: $\overline{OH}=OH$ nếu H nằm trên tia Ox (hoặc Oy) và $\overline{OH}=-OH$ nếu H nằm trên tia đối tia Ox (hoặc Oy)

2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Cho điểm $M(x;y)$.

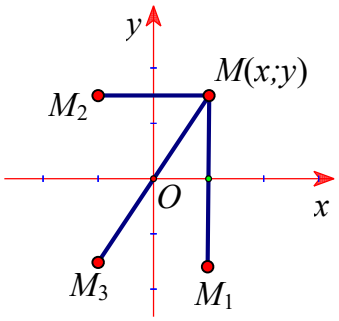
Tìm tọa độ của các điểm

a) M_1 đối xứng với M qua trục hoành

b) M_2 đối xứng với M qua trục tung

c) M_3 đối xứng với M qua gốc tọa độ

Lời giải (hình 1.32)



Hình 1.32

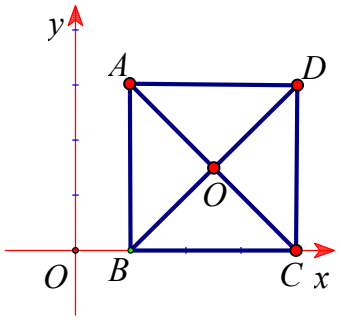
a) M_1 đối xứng với M qua trục hoành suy ra $M_1(x;-y)$

b) M_2 đối xứng với M qua trục tung suy ra $M_2(-x;y)$

c) M_3 đối xứng với M qua gốc tọa độ suy ra $M_3(-x;-y)$

Ví dụ 2: Trong hệ trục tọa độ (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$), cho hình vuông $ABCD$ tâm I và có $A(1;3)$. Biết điểm B thuộc trục (O; $\vec{i}$) và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng với $\vec{i}$. Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AC}$

Lời giải (hình 1.33)



Hình 1.33

Từ giả thiết ta xác định được hình vuông trên mặt phẳng tọa độ

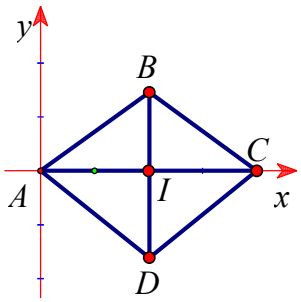
(hình bên)

Vì điểm $A(1;3)$ suy ra $AB=3, OB=1$

Do đó $B(1;0), C(4;0), D(4;3)$

Vậy $\overrightarrow{AB}(0;-3)$, $\overrightarrow{BC}(3;0)$ và $\overrightarrow{AC}(3;-3)$

Ví dụ 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BAD}=60^0$. Biết A trùng với gốc tọa độ O, C thuộc trục Ox và $x_B \geq 0, y_B \geq 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi $ABCD$



Hình 1.34

Lời giải (hình 1.34)

Từ giả thiết ta xác định được hình thoi trên mặt phẳng tọa độ Oxy

Gọi I là tâm hình thoi ta có $BI = AB\sin\widehat{BAI} = a\sin 30^0 = \dfrac{a}{2}$

$AI = \sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $A(0;0), B\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2}\right), C\left(a\sqrt{3};0\right), D\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};-\dfrac{a}{2}\right)$

Dạng 4: Xác Định Tọa Độ Các Điểm Của Một Hình

1. Phương pháp.

Dựa vào tính chất của hình và sử dụng công thức

+ M là trung điểm đoạn thẳng AB suy ra $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

+ G trọng tâm tam giác ABC suy ra $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{2}$

+ $\vec{u}(x;y) = \vec{u'}(x';y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $A(2;1)$, $B(-1;-2)$, $C(-3;2)$.

a) Tìm tọa độ trung điểm M sao cho C là trung điểm của đoạn MB

b) Xác định trọng tâm tam giác ABC

b) Tìm điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành

Lời giải

a) C là trung điểm của MB suy ra $x_C = \frac{x_M + x_B}{2} \Rightarrow x_M = 2x_C - x_B = -5$

và $y_C = \frac{y_M + y_B}{2} \Rightarrow y_M = 2y_C - y_B = 6$

Vậy $M(-5;6)$

b) G là trọng tâm tam giác suy ra

$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2-1-3}{3} = -\frac{2}{3}$ và $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{2} = \frac{1-2+2}{3} = \frac{1}{3}$

Vậy $G\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$

c) Gọi $D(x;y) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (-3-x;2-y)$

Ta có: $ABCD$ là hình bình hành suy ra

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -3-x = -3 \\ 2-y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow D(0;5).$

Vậy $D(0;5)$

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(3;-1)$, $B(-1;2)$ và $I(1;-1)$. Xác định tọa độ các điểm C, D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành biết I là trọng tâm tam giác ABC. Tìm tọa tâm O của hình bình hành $ABCD$.

Lời giải

Vì I là trọng tâm tam giác ABC nên

$x_I = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow x_C = 3x_I - x_A - x_B = 1$

$y_I = \frac{y_A + y_B + y_C}{2} \Rightarrow y_C = 3y_I - y_A - y_B = -4$

suy ra $C(1;-4)$

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành suy ra

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}-1-3=1-x_D\\2+1=-4-y_D\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=5\\y_D=-7\end{cases}\Rightarrow D(5;-7)$

Điểm O của hình bình hành $ABCD$ suy ra O là trung điểm AC do đó

$x_O=\dfrac{x_A+x_C}{2}=2,\ y_O=\dfrac{y_A+y_C}{2}=-\dfrac{5}{2}\Rightarrow O\left(2;-\dfrac{5}{2}\right)$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\vec{a}=(-5;0),\ \vec{b}=(-4;0)$ cùng hướng. **B.** $\vec{c}=(7;3)$ là vectơ đối của $\vec{d}=(-7;3)$.

C. $\vec{u}=(4;2),\ \vec{v}=(8;3)$ cùng phương. **D.** $\vec{a}=(6;3),\ \vec{b}=(2;1)$ ngược hướng.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\vec{a}=\dfrac{5}{4}\vec{b}\longrightarrow\vec{a},\ \vec{b}$ cùng hướng.

Câu 2: Cho $\vec{a}=(2;-4),\ \vec{b}=(-5;3)$. Tìm tọa độ của $\vec{u}=2\vec{a}-\vec{b}$.

A. $\vec{u}=(7;-7)$. **B.** $\vec{u}=(9;-11)$. **C.** $\vec{u}=(9;-5)$. **D.** $\vec{u}=(-1;5)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\begin{cases}2\vec{a}=(4;-8)\\-\vec{b}=(5;-3)\end{cases}\longrightarrow\vec{u}=2\vec{a}-\vec{b}=(4+5;-8-3)=(9;-11)$.

Câu 3: Cho $\vec{a}=(3;-4),\ \vec{b}=(-1;2)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{a}+\vec{b}$.

A. $(-4;6)$. **B.** $(2;-2)$. **C.** $(4;-6)$. **D.** $(-3;-8)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\vec{a}+\vec{b}=(3+(-1);-4+2)=(2;-2)$.

Câu 4: Cho $\vec{a}=(-1;2),\ \vec{b}=(5;-7)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{a}-\vec{b}$.

A. $(6;-9)$. **B.** $(4;-5)$. **C.** $(-6;9)$. **D.** $(-5;-14)$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\vec{a}-\vec{b}=(-1-5;2-(-7))=(-6;9)$.

Câu 5: Trong hệ trục tọa độ $(O;\vec{i};\vec{j})$, tọa độ của vectơ $\vec{i}+\vec{j}$ là

A. $(0;1)$. **B.** $(1;-1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(1;1)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\begin{cases}\vec{i}=(1;0)\\ \vec{j}=(0;1)\end{cases}\longrightarrow \vec{i}+\vec{j}=(1;1).$

Câu 6: Cho $\vec{u}=(3;-2)$, $\vec{v}=(1;6)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\vec{u}+\vec{v}$ và $\vec{a}=(-4;4)$ ngược hướng. **B.** $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương.

C. $\vec{u}-\vec{v}$ và $\vec{b}=(6;-24)$ cùng hướng. **D.** $2\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{v}$ cùng phương.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\vec{u}+\vec{v}=(4;4)$ và $\vec{u}-\vec{v}=(2;-8)$.

Xét tỉ số $\frac{4}{-4}\neq\frac{4}{4}\longrightarrow \vec{u}+\vec{v}$ và $\vec{a}=(-4;4)$ không cùng phương. Loại A

Xét tỉ số $\frac{3}{1}\neq\frac{-2}{6}\longrightarrow \vec{u}$, $\vec{v}$ không cùng phương. Loại B

Xét tỉ số $\frac{2}{6}=\frac{-8}{-24}=\frac{1}{3}>0\longrightarrow \vec{u}-\vec{v}$ và $\vec{b}=(6;-24)$ cùng hướng.

Câu 7: Cho $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}$ và $\vec{v}=\vec{i}+x\vec{j}$. Xác định x sao cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

A. $x=-1$. **B.** $x=-\frac{1}{2}$. **C.** $x=\frac{1}{4}$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\begin{cases}\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}\longrightarrow \vec{u}=(2;-1)\\ \vec{v}=\vec{i}+x\vec{j}\longrightarrow \vec{v}=(1;x)\end{cases}$.

Để $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{x}{-1}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

Câu 8: Cho $\vec{a}=(-5;0)$, $\vec{b}=(4;x)$. Tìm x để hai vecto $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương.

A. $x=-5$. **B.** $x=4$. **C.** $x=0$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn C.

Hai vecto $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow -5.x=0.4\longrightarrow x=0$.

Câu 9: Cho $\vec{a}=(x;2)$, $\vec{b}=(-5;1)$, $\vec{c}=(x;7)$. Tìm x biết $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$.

A. $x=-15$. **B.** $x=3$. **C.** $x=15$. **D.** $x=5$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\begin{cases}2\vec{a}=(2x;4)\\ 3\vec{b}=(-15;3)\end{cases}\longrightarrow 2\vec{a}+3\vec{b}=(2x-15;7).$

Để $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}\longleftrightarrow\begin{cases}x=2x-15\\7=7\end{cases}\longrightarrow x=15.$

Câu 10: Cho ba vectơ $\vec{a}=(2;1)$, $\vec{b}=(3;4)$, $\vec{c}=(7;2)$. Giá trị của k, h để $\vec{c}=k.\vec{a}+h.\vec{b}$ là

A. $k=2,5;\ h=-1,3.$ **B.** $k=4,6;\ h=-5,1.$

C. $k=4,4;\ h=-0,6.$ **D.** $k=3,4;\ h=-0,2.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\left.\begin{matrix}k.\vec{a}=(2k;k)\\h.\vec{b}=(3h;4h)\end{matrix}\right\}\longrightarrow k.\vec{a}+h.\vec{b}=(2k+3h;k+4h).$

Theo đề bài: $\vec{c}=k.\vec{a}+h.\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}7=2k+3h\\2=k+4h\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=4,4\\h=-0,6\end{cases}.$

Câu 11: Trong hệ tọa độ Oxy, cho $A(5;2)$, $B(10;8)$. Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$?

A. $\overrightarrow{AB}=(15;10).$ **B.** $\overrightarrow{AB}=(2;4).$

C. $\overrightarrow{AB}=(5;6).$ **D.** $\overrightarrow{AB}=(50;16).$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(5;6).$

Câu 12: Trong hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;3)$, $B(-1;2)$, $C(-2;1)$. Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}.$

A. $(-5;-3).$ **B.** $(1;1).$ **C.** $(-1;2).$ **D.** $(-1;1).$

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-2;-1)\\\overrightarrow{AC}=(-3;-2)\end{cases}\longrightarrow\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=(-2-(-3);-1-(-2))=(1;1).$

Cách khác: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}=(1;1).$

Câu 13: Trong hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;-3)$, $B(4;7)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

A. $I(6;4).$ **B.** $I(2;10).$ **C.** $I(3;2).$ **D.** $I(8;-21).$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\begin{cases} x_I = \dfrac{2+4}{2} = 3 \\ y_I = \dfrac{-3+7}{2} = 2 \end{cases} \longrightarrow I(3;2).$

Câu 14: Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(3;5)$, $B(1;2)$, $C(5;2)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC?

A. $G(-3;-3)$. **B.** $G\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{9}{2}\right)$. **C.** $G(9;9)$. **D.** $G(3;3)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\begin{cases} x_G = \dfrac{3+1+5}{3} = 3 \\ y_G = \dfrac{5+2+2}{3} = 3 \end{cases} \longrightarrow G(3;3).$

Câu 15: Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(6;1)$, $B(-3;5)$ và trọng tâm $G(-1;1)$. Tìm tọa độ đỉnh C?

A. $C(6;-3)$. **B.** $C(-6;3)$. **C.** $C(-6;-3)$. **D.** $C(-3;6)$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi $C(x;y)$.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} \dfrac{6+(-3)+x}{3} = -1 \\ \dfrac{1+5+y}{3} = 1 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -3 \end{cases}.$

Câu 16: Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-2;2)$, $B(3;5)$ và trọng tâm là gốc tọa độ $O(0;0)$. Tìm tọa độ đỉnh C?

A. $C(-1;-7)$. **B.** $C(2;-2)$. **C.** $C(-3;-5)$. **D.** $C(1;7)$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi $C(x;y)$.

Vì O là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} \dfrac{-2+3+x}{3} = 0 \\ \dfrac{2+5+y}{3} = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -7 \end{cases}.$

Câu 17: Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;-1)$, $N(5;-3)$ và C thuộc trục Oy, trọng tâm G của tam giác thuộc trục Ox. Tìm tọa độ điểm C.

A. $C(0;4.)$ **B.** $C(2;4.)$ **C.** $C(0;2.)$ **D.** $C(0;-4.)$

Lời giải

Chọn A.

Vì C thuộc trục $Oy \longrightarrow C$ có hoành độ bằng 0. Loại **B.**

Trọng tâm G thuộc trục $Ox \longrightarrow G$ có tung độ bằng 0. Xét các đáp án còn lại chỉ có đáp án A thỏa mãn $\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=0.$

Câu 18: Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $C(-2;-4)$, trọng tâm $G(0;4)$ và trung điểm cạnh BC là $M(2;0)$. Tổng hoành độ của điểm A và B là

A. -2. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B.

Vì M là trung điểm BC nên $\begin{cases} x_B=2x_M-x_C=2.2-(-2)=6 \\ y_B=2y_M-y_C=2.0-(-4)=4 \end{cases} \Rightarrow B(6;4).$

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} x_A=3x_G-x_B-x_C=-4 \\ y_A=3y_G-y_B-y_C=12 \end{cases} \rightarrow A(-4;12).$

Suy ra $x_A+x_B=2.$

Câu 19: Trong hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;1)$, $B(3;2)$, $C(6;5)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(4;3).$ **B.** $D(3;4).$ **C.** $D(4;4).$ **D.** $D(8;6).$

Lời giải

Chọn C.

Gọi $D(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(2;1) \\ \overrightarrow{DC}=(6-x;5-y) \end{cases}.$

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\longrightarrow \begin{cases} 2=6-x \\ 1=5-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases} \longrightarrow D(4;4).$

Câu 20: Trong hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(0;-3)$, $B(2;1)$, $D(5;5)$ Tìm tọa độ điểm C để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

A. $C(3;1).$ **B.** $C(-3;-1).$ **C.** $C(7;9).$ **D.** $C(-7;-9).$

Lời giải

Chọn C.

Gọi $C(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(2;4) \\ \overrightarrow{DC}=(x-5;y-5) \end{cases}.$

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\longrightarrow \begin{cases} 2=x-5 \\ 4=y-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=9 \end{cases} \longrightarrow C(7;9).$

Câu 21: Trong hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $A(0;3)$, $D(2;1)$ và $I(-1;0)$ là tâm của hình chữ nhật. Tìm tọa độ tung điểm của cạnh BC.

A. $(1;2)$. **B.** $(-2;-3)$. **C.** $(-3;-2)$. **D.** $(-4;-1)$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi M là tọa độ trung điểm của cạnh $AD \longrightarrow M(1;2)$.

Gọi $N(x_N;y_N)$ là tọa độ trung điểm của cạnh BC.

Do I là tâm của hình chữ nhật $\longrightarrow I$ là trung điểm của MN.

Suy ra $\begin{cases} x_N=2x_I-x_M=-3 \\ y_N=2y_I-y_M=-2 \end{cases} \longrightarrow N(-3;-2).$

Câu 22: Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $B(9;7)$, $C(11;-1)$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Tìm tọa độ vectơ $\overrightarrow{MN}$?

A. $\overrightarrow{MN}=(2;-8)$. **B.** $\overrightarrow{MN}=(1;-4)$. **C.** $\overrightarrow{MN}=(10;6)$. **D.** $\overrightarrow{MN}=(5;3)$.

Lời giải

Chọn B.

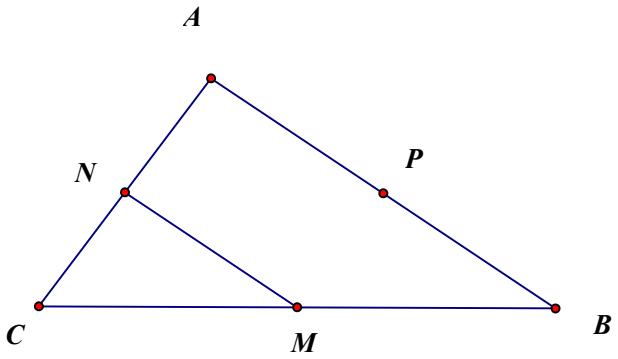
Ta có $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(2;-8)=(1;-4)$.

Câu 23: Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $M(2;3)$, $N(0;-4)$, $P(-1;6)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Tìm tọa độ đỉnh A?

A. $A(1;5)$. **B.** $A(-3;-1)$. **C.** $A(-2;-7)$. **D.** $A(1;-10)$.

Lời giải

Chọn B.



Gọi $A(x;y)$.

Từ giả thiết, ta suy ra $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{MN}$. $(*)$

Ta có $\overrightarrow{PA}=(x+1;y-6)$ và $\overrightarrow{MN}=(-2;-7)$.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=-2\\y-6=-7\end{cases}\longleftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=-1\end{cases}\longrightarrow A(-3;-1)$.

Câu 24: Trong hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2)$, $B(-2;3)$. Tìm tọa độ điểm I sao cho $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

A. $I(1;2)$. **B.** $I\left(1;\frac{2}{5}\right)$. **C.** $I\left(-1;\frac{8}{3}\right)$. **D.** $I(2;-2)$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi $I(x;y)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{IA}=(1-x;2-y)\\\overrightarrow{IB}=(-2-x;3-y)\end{cases}\longrightarrow 2\overrightarrow{IB}=(-4-2x;6-2y)$

$\longrightarrow\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=(-3-3x;8-3y)$.

Do đó từ giả thiết $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}\longrightarrow\begin{cases}-3-3x=0\\8-3y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=\frac{8}{3}\end{cases}$.

Câu 25: Trong hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;-3)$, $B(3;4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục hoành sao cho A, B, M thẳng hàng.

A. $M(1;0)$. **B.** $M(4;0)$. **C.** $M\left(-\frac{5}{3};-\frac{1}{3}\right)$. **D.** $M\left(\frac{17}{7};0\right)$.

Lời giải

Chọn D.

Điểm $M\in Ox\longrightarrow M(m;0)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;7)$ và $\overrightarrow{AM}=(m-2;3)$.

Để A,B,M thẳng hàng $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow\frac{m-2}{1}=\frac{3}{7}\Leftrightarrow m=\frac{17}{7}$.

Câu 26: Trong hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;0)$, $B(0;3)$ và $C(-3;-5)$. Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho biểu thức $P=\left|2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(4;0)$. **B.** $M(-4;0)$. **C.** $M(16;0)$. **D.** $M(-16;0)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)-3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right),\ \forall I$

$=\overrightarrow{MI}+2\left(\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}\right),\ \forall I$.

Chọn điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. $(*)$

Gọi $I(x;y)$, từ $(*)$ ta có

$$\begin{cases} 2(1-x)-3(0-x)+2(-3-x)=0 \\ 2(0-y)-3(2-y)+2(-5-y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-16 \end{cases} \Rightarrow I(-4;-16).$$

Khi đó $P=\left|2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MI}\right|=MI.$

Để P nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất. Mà M thuộc trục hoành nên MI nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của I lên trục hoành $\longrightarrow M(-4;0).$

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Bài 11 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

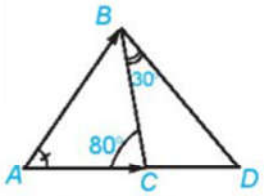
THUẬT NGỮ
- Góc giữa hai vectơ
- Tích vô hướng của hai vectơ

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Tính góc, tích vô hướng của hai vectơ trong những trường hợp cụ thể.
- Công thức toạ độ của tích vô hướng, tính chất của tích vô hướng.
- Liên hệ khái niệm tích vô hướng với khái niệm công trong Vật lí.

Toán học cung cấp ngôn ngữ và công cụ cho nhiều ngành khoa học. Trong các bài học trước, ta đã dùng vectơ để biểu diễn các đại lượng lực, vận tốc và dùng phép toán vectơ để tính hợp lực và tổng hợp vận tốc. Bài học này tiếp tục xây dựng khái niệm tích vô hướng giữa hai vectơ - đối tượng toán học còn được dùng để định nghĩa khái niệm công sinh bởi một lực trong Vật lí.

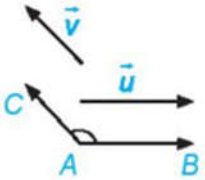
1. GÓC GIỮA HAI VECTƠ

HĐ1. Trong Hình 4.39, số đo góc BAC cũng được gọi là số đo góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Hãy tìm số đo các góc giữa $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{DB}$.



Hình 4.39

Cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$. Từ một điểm A tuỳ ý, vẽ các vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ và $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ (H.4.40). Khi đó, số đo của góc BAC được gọi là số đo góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ hay đơn giản là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$.



Hình 4.40

Chú ý
- Quy ước rằng góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{0}$ có thể nhận một giá trị tuỳ ý từ $0°$ đến $180°$.
- Nếu $(\vec{u}, \vec{v}) = 90°$ thì ta nói rằng $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{u} \perp \vec{v}$ hoặc $\vec{v} \perp \vec{u}$. Đặc biệt $\vec{0}$ được coi là vuông góc với mọi vectơ.

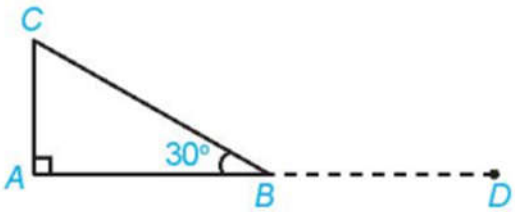
Khi nào thì góc giữa hai vectơ bằng $0°$, bằng $180°$?

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC vuông tại A và $\hat{B} = 30°$.

Tính $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

Giải (H.4.41)

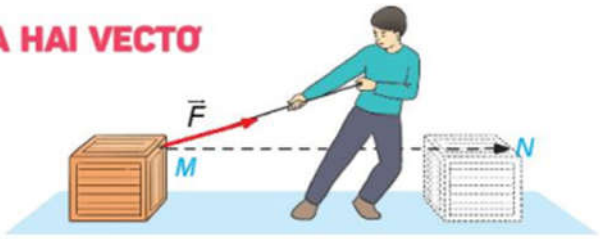
Ta có: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 90°$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \widehat{ACB} = 60°$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) = \widehat{DBC} = 150°$.



Hình 4.41

Luyện tập 1. Cho tam giác đều ABC. Tính $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ



Hình 4.42

Trong Vật lí, nếu lực $\vec{F}$ không đổi tác động vào một vật và điểm đặt của lực chuyển động thẳng từ M tới N, thì công A của lực $\vec{F}$ được tính theo công thức:

$$A = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{MN}| \cdot \cos(\vec{F}, \overrightarrow{MN}),$$

trong đó $|\vec{F}|$ là độ lớn của lực $\vec{F}$ (theo đơn vị Newton);

$|\overrightarrow{MN}|$ là độ dài của vectơ MN (theo đơn vị mét);

$(\vec{F}, \overrightarrow{MN})$ là góc giữa hai vectơ $\vec{F}$ và $\overrightarrow{MN}$.

Toán học gọi giá trị A (không kể đơn vị đo) trong biểu thức nói trên là tích vô hướng của hai vectơ $\vec{F}$ và $\overrightarrow{MN}$.

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

Khi nào thì tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ là một số dương? Là một số âm?

Chú ý

- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- $\vec{u} \cdot \vec{u}$ còn được viết là $\vec{u}^2$ và được gọi là **bình phương vô hướng** của vectơ $\vec{u}$. Ta có $\vec{u}^2 = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 0° = |\vec{u}|^2$.

Bình phương vô hướng của một vectơ bằng bình phương độ dài của vectơ đó.



Khi nào thì $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \vec{u}^2 \cdot \vec{v}^2$?

Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a.

Tính các tích vô hướng sau: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$.

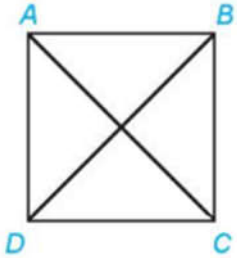
Giải. Vì $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 90°$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

Hình vuông có cạnh bằng a nên có đường chéo bằng $a\sqrt{2}$.

Mặt khác, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 45°$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = 135°$, do đó

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45° = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2;$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = AB \cdot BD \cdot \cos 135° = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -a^2.$$



Hình 4.43

Luyện tập 2. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

Hãy tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a, b, c.

Hãy nhớ lại Định lí côsin.



3. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ VÀ TÍNH CHẤT CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

HĐ2. Cho hai vectơ cùng phương $\vec{u}=(x;y)$ và $\vec{v}=(kx;ky)$. Hãy kiểm tra công thức $\vec{u}\cdot\vec{v}=k(x^2+y^2)$ theo từng trường hợp sau:

a) $\vec{u}=\vec{0}$;

b) $\vec{u}\neq\vec{0}$ và $k\geq 0$;

c) $\vec{u}\neq\vec{0}$ và $k<0$.

HĐ3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai vectơ không cùng phương $\vec{u}=(x;y)$ và $\vec{v}=(x';y')$.

a) Xác định toạ độ của các điểm A và B sao cho $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$.

b) Tính AB^2, OA^2, OB^2 theo toạ độ của A và B.

c) Tính $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ theo toạ độ của A, B.

Để ý rằng, theo Định lí côsin, ta có:
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2}$.



Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}=(x;y)$ và $\vec{v}=(x';y')$ được tính theo công thức:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'.$$

Nhận xét

- Hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $xx'+yy'=0$.
- Bình phương vô hướng của $\vec{u}(x;y)$ là $\vec{u}^2=x^2+y^2$.
- Nếu $\vec{u}\neq\vec{0}$ và $\vec{v}\neq\vec{0}$ thì $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\dfrac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}}$.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tính tích vô hướng của các cặp vectơ sau:

a) $\vec{u}=(2;-3)$ và $\vec{v}=(5;3)$;

b) Hai vectơ đơn vị $\vec{i}$ và $\vec{j}$ tương ứng của các trục Ox, Oy.

Giải

a) Ta có: $\vec{u}\cdot\vec{v}=2\cdot 5+(-3)\cdot 3=10-9=1$.

b) Vì $\vec{i}=(1;0)$ và $\vec{j}=(0;1)$ nên $\vec{i}\cdot\vec{j}=1\cdot 0+0\cdot 1=0$.

Luyện tập 3. Tính tích vô hướng và góc giữa hai vectơ $\vec{u}=(0;-5)$, $\vec{v}=(\sqrt{3};1)$.

HĐ4. Cho ba vectơ $\vec{u}=(x_1;y_1)$, $\vec{v}=(x_2;y_2)$, $\vec{w}=(x_3;y_3)$.

a) Tính $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$, $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ theo toạ độ của các vectơ $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$.

b) So sánh $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$ và $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$.

c) So sánh $\vec{u}\cdot\vec{v}$ và $\vec{v}\cdot\vec{u}$.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Tính chất của tích vô hướng

Với ba vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ bất kì và mọi số thực k, ta có:

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (*tính chất giao hoán*);
- $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ (*tính chất phân phối đối với phép cộng*);
- $(k\vec{u})\cdot\vec{v}=k(\vec{u}\cdot\vec{v})=\vec{u}\cdot(k\vec{v})$.

Chú ý. Từ các tính chất trên, ta có thể chứng minh được:

$\vec{u}\cdot(\vec{v}-\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{w}$ (*tính chất phân phối đối với phép trừ*);

$(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$; $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$;

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$.

Ví dụ 4. *(Ứng dụng của vectơ trong bài toán hình học)*

Cho điểm M thay đổi trên đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác đều ABC cho trước. Chứng minh rằng $MA^2+MB^2+MC^2$ không đổi.

Giải

Cách 1 *(Dùng toạ độ)*. Xét hệ trục toạ độ có gốc trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi toạ độ của các điểm là $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$, $M(x;y)$. Vì tam giác ABC đều nên tâm đường tròn ngoại tiếp $O(0;0)$ đồng thời là trọng tâm của tam giác. Do đó $x_A+x_B+x_C=0$ và $y_A+y_B+y_C=0$.

Vì $OM^2=OA^2=R^2$ nên $x^2+y^2=x_A^2+y_A^2=R^2$.

Vậy $MA^2=(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=(x^2+y^2)+(x_A^2+y_A^2)-2xx_A-2yy_A=2R^2-2xx_A-2yy_A$.

Tương tự $MB^2=2R^2-2xx_B-2yy_B$ và $MC^2=2R^2-2xx_C-2yy_C$.

Do đó $MA^2+MB^2+MC^2=6R^2-2x(x_A+x_B+x_C)-2y(y_A+y_B+y_C)=6R^2$ (không đổi).

Cách 2 *(Dùng tích vô hướng)*. (H.4.44)

Vì tam giác ABC đều nên tâm O của đường tròn ngoại tiếp đồng thời là trọng tâm của tam giác. Vậy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

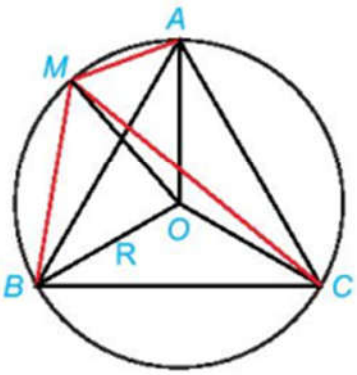
Giả sử (O) có bán kính R. Ta có:

$$MA^2+MB^2+MC^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2$$

$$=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)^2$$

$$=3\overrightarrow{MO}^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2$$

$$=3MO^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)+3R^2=3R^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\vec{0}+3R^2=6R^2.$$



Hình 4.44

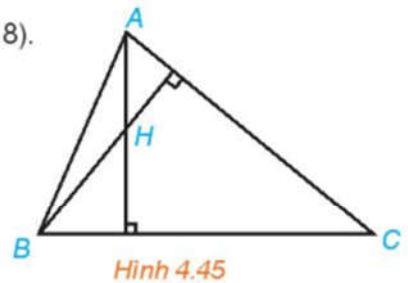
Vậy $MA^2+MB^2+MC^2$ không đổi khi M thay đổi trên (O).

Luyện tập 4. Cho tam giác ABC với $A(-1; 2)$, $B(8; -1)$, $C(8; 8)$. Gọi H là trực tâm của tam giác.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

b) Tìm toạ độ của H.

c) Giải tam giác ABC.

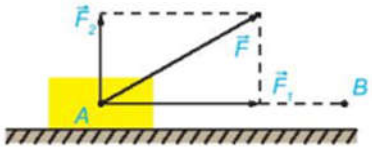


Hình 4.45

Vận dụng. Một lực $\vec{F}$ không đổi tác động vào một vật và điểm đặt của lực chuyển động thẳng từ A đến B. Lực $\vec{F}$ được phân tích thành hai lực thành phần là $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ ($\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$).

a) Dựa vào tính chất của tích vô hướng, hãy giải thích vì sao công sinh bởi lực $\vec{F}$ (đã được đề cập ở trên) bằng tổng của các công sinh bởi các lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$.

b) Giả sử các lực thành phần $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ tương ứng cùng phương, vuông góc với phương chuyển động của vật. Hãy tìm mối quan hệ giữa các công sinh bởi lực $\vec{F}$ và lực $\vec{F}_1$.



Hình 4.46

CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Dạng 1: Tính tích vô hướng 2 vectơ và xác định góc của hai vecto

1. Phương pháp giải.

a) Để tính tích vô hướng của hai vectơ, ta có thể sử dụng:

+ Nếu có độ dài hai vectơ và góc giữa chúng, ta dùng định nghĩa $\boxed{\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})}$

+ Nếu là tích của tổng, hiệu các vectơ ta dùng tính chất của tích vô hướng

+ Nếu biết độ dài hai vectơ và độ dài của tổng hay hiệu của chúng, ta bình phương tổng hay hiệu của chúng

+ Nếu một vectơ cố định và một vectơ thay đổi ta có thể dùng định lý hình chiếu.

b) Để tính góc của hai vectơ, ta sử dụng công thức: $\boxed{\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}}$

2. Các ví dụ.

Câu 1. Cho tam giác ABC đều cạnh a, tâm O. Hãy tính:

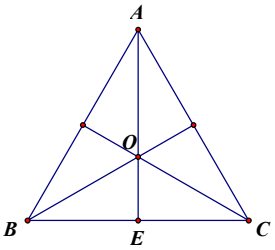
a). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

c). $\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$

d). $\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}\right)$

Lời giải



a). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=AB.AC.\cos 60^0=a.a.\dfrac{1}{2}=\dfrac{a^2}{2}$

b). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=-\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$

$=-BA.BC.\cos 60^0=-a.a.\dfrac{1}{2}=-\dfrac{a^2}{2}$

c). Gọi E là trung điểm của BC có $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$;

Do đó $\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=2\overrightarrow{OE}.\overrightarrow{CB}=2\left|\overrightarrow{OE}\right|.\left|\overrightarrow{CB}\right|.\cos\left(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{CB}\right)$

$=2.\mathrm{OE}.\mathrm{CB}\cos 90^0=0$.

d). Khai triển biểu thức, ta được

$D=\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}^2-3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-6\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$

Chú ý rằng: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\dfrac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2}{2}$

Từ đó $D=a^2+\dfrac{3\mathrm{a}^2}{2}+a^2-3\mathrm{a}^2=\dfrac{a^2}{2}$.

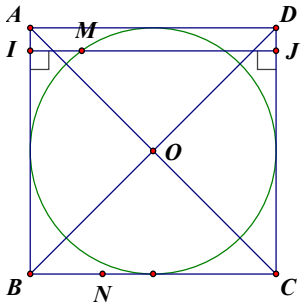
Câu 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O. Hãy tính:

a). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$; $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)$;$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right)$

b). $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{AB}$ với N là điểm trên cạnh BC.

c). $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$ với M nằm trên đường tròn nội tiếp hình vuông.

Lời giải



a).

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=-\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=-BA.BC.\cos 90^0=0$

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=-\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BD}\right|\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}\right)=-BA.BD.\cos 45^0=-a.a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-a^2$
- $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$

$=0+\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}\right)=AC.BC.\cos 45^0=a^2$

b).

- $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BO}\right).\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{AB}$ (do $\overrightarrow{BN}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AB}=0$)

$=\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BA}=\left|\overrightarrow{BO}\right|.\left|\overrightarrow{BA}\right|.\cos\left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}\right)=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.a\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a^2}{2}$

- $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BN}\right)\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}^2=-a^2$

c).

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HB}\right)$

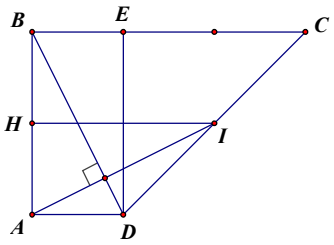
$=\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{HA}\right)=MH^2-HA^2$

Câu 3. Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $BC=3a$, đáy nhỏ $AD=a$, đường cao $AB=2a$

a). Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$

b). Gọi I là trung điểm của CD. Hãy tính góc giữa AI và BD.

Lời giải



– Dựng $DE\perp BC, E\in BC\Rightarrow ABED$ là hình chữ nhật. Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{CD}$

$=-\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DC}=-\left|\overrightarrow{DE}\right|.\left|\overrightarrow{DC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DC}\right)=-DE.DC.\cos 45^0=-2a.2a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-4a^2$

– $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BD}=3.\left|\overrightarrow{BE}\right|.\left|\overrightarrow{BD}\right|.\cos\widehat{DBE}=3BE.BD.\dfrac{BE}{BD}=3.a^2$

– $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}-\underbrace{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}}_{0}-\underbrace{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}}_{0}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB}$

$=\left|\overrightarrow{BC}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos 0^0-\overrightarrow{AB}^2=BC.AD-AB^2=3a.a-4a^2=-a^2$

(Vì $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}=0$; $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}=0$).

b). Gọi H trung điểm của AB, suy ra HI là đường trung bình của hình thang ABCD, do đó $HI=\dfrac{AD+BC}{2}=2a$

Có $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{HI}-\overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{AD}-\underbrace{\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{AB}}_{0}-\underbrace{\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AD}}_{0}+\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AB}$

Mà $\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{AD}=HI.AD.\cos 0^0=2a.a=2a^2$

$\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{AB}=0\left(do\ \overrightarrow{HI}\perp\overrightarrow{AB}\right);\ \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AD}=0\left(do\ \overrightarrow{HA}\perp\overrightarrow{AD}\right).$

$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2=-2a^2$

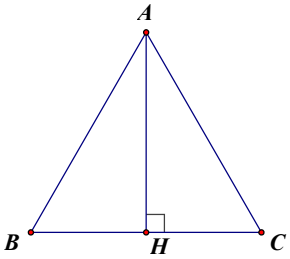
Vậy $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD}=0\Rightarrow\overrightarrow{AI}\perp\overrightarrow{BD}\Rightarrow$ góc giữa AI và BD bằng 90^0.

Câu 4. Cho tam giác ABC đều cạnh a, đường cao AH. Tính:

a). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AH}$.

b). $\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)\left(2\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{AH}\right)$

Lời giải



a).

– $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\widehat{BAC}=a.a.\cos 60^0=\frac{a^2}{2}$

– $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AH}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=-AB.AH.\cos\widehat{BAH}=-a.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\cos 30^0=-\frac{3a^2}{4}$

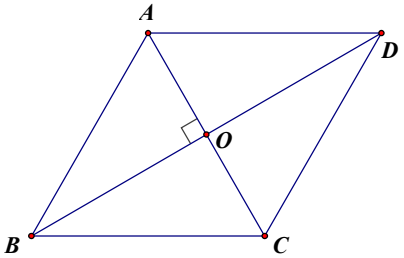
b). $\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)\left(2\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{AH}\right)=\overrightarrow{AB}\left(2\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{AH}\right)=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

$=-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}=-2.\frac{a^2}{2}-3.\frac{3a^2}{4}=-\frac{13a^2}{4}$

Câu 5. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O cạnh bằng 7, góc $\widehat{BAC}=60^0$. Tính:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD};\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB}$

Lời giải



Do $\widehat{BAC}=60^0\Rightarrow\Delta ABC$ đều $\Rightarrow AC=7, BO=\frac{7\sqrt{3}}{2}$ (đường cao tam giác đều $=\frac{canh.\sqrt{3}}{2}$)

– $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\widehat{BAC} = 7.7.\cos 60^0 = \frac{49}{2}$.

– $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO} = -AB.AO.\cos 60^0 = -7.\frac{7}{2}.\frac{1}{2} = -\frac{49}{4}$

– $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0\left(do\ \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}\right)$

– $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BO} = BA.BO.\cos\widehat{ABO} = a.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\cos 30^0 = \frac{3a^2}{4}$

Câu 6. Cho các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right| = 3$. Tính $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Lời giải

Ta có $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right| = 4 \Leftrightarrow \left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)^2 = 16 \Leftrightarrow 4\vec{a}^2 - 12\vec{a}.\vec{b} + 9\vec{b}^2 = 16$

$\Leftrightarrow 4a^2 - 12.\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) + 9b^2 = 16$

$\Leftrightarrow 4 - 12\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) + 9 = 16 \Rightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = -\frac{1}{4}$.

Câu 7. Cho các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vectơ bằng 60^0. Xác định cosin góc giữa hai vec tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b},\ \vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$.

Lời giải

Ta có $\vec{u}.\vec{v} = \left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = \vec{a}^2 + \vec{a}.\vec{b} - 2\vec{b}^2 = a^2 + \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) - 2b^2 = -\frac{1}{2}$.

- $\vec{u}^2 = \left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{a}.\vec{b} + 4\vec{b}^2 = 1 + 4.1.1.\cos 60^0 + 4.1 = 7 \Rightarrow \left|\vec{u}\right| = \sqrt{7}$
- $\vec{v}^2 = \left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 - 2.\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2 = 1 - 2.1.1\cos 60^0 + 1 = 1 \Rightarrow \left|\vec{v}\right| = 1$

$\vec{u}.\vec{v} = \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) \Rightarrow \cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|} = \frac{-\frac{1}{2}}{.\sqrt{7}.1} = -\frac{\sqrt{7}}{14}$.

Câu 8. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(1;1), B(2;4), C(10;-2)$

a). Chứng minh rằng ABC là tam giác vuông.

b). Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ suy ra cosB

Lời giải

a). $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = \sqrt{10}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = \sqrt{90}$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = BC = \sqrt{100}$

Có $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 100 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

b). Có $\overrightarrow{BA} = (-1;-3)$, $\overrightarrow{BC} = (8;-6) \Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = (-1).8 + (-3)(-6) = 10$

Ngoài ra $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$

$$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{10}{\sqrt{10}.\sqrt{100}}=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Câu 9. Cho hai vectơ đơn vị $\vec{a},\ \vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{3}$. Tính $\vec{a}.\vec{b};\ \left|\vec{a}+\vec{b}\right|$

Lời giải

$$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{3}\Rightarrow\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)^2=3\Leftrightarrow 4\vec{a}^2-4\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2=3\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=\frac{3-4-1}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$\text{Có }\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2=1+2.\left(-\frac{1}{2}\right)+1=1\Rightarrow\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=1$$

Dạng 2: Biểu thức tọa độ của tích vô hướng.

1. Phương pháp giải.

- Cho $\vec{a}=(x_1;y_1),\ \vec{b}=(x_2;y_2)$. Khi đó

+ Tích vô hướng hai vectơ là $\vec{a}.\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$

+ Góc của hai vectơ được xác định bởi công thức

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

Chú ý: $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

- Để xác định độ dài một vectơ đoạn thẳng ta sử dụng công thức

+ Nếu $\vec{a}=(x;y)$ thì $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$

+ Nếu $A(x_A;y_A),\ B(x_B;y_B)$ thì $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

2. Các ví dụ.

Câu 1: Cho tam giác ABC có $A(1;2),\ B(-2;6),\ C(9;8)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A.

b) Tính góc B của tam giác ABC

c) Xác định hình chiếu của A lên cạnh BC

Lời giải:

a) Ta có $\overrightarrow{AB}(-3;4),\ \overrightarrow{AC}(8;6)\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-3.8+4.6=0$

Do đó $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ hay tam giác ABC vuông tại A.

b) Ta có $\overrightarrow{BC}(11;2),\ \overrightarrow{BA}(3;-4)$

Suy ra $\cos B=\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{11.3+2.(-4)}{\sqrt{11^2+2^2}\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

c) Gọi $H(x;y)$ là hình chiếu của A lên BC.

Ta có $\overrightarrow{AH}(x-1;y-2)$, $\overrightarrow{BH}(x+2;y-6)$, $\overrightarrow{BC}(11;2)$

$AH \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow 11(x-1)+2(y-2)=0$

Hay $11x+2y-15=0$ (1)

Mặt khác $\overrightarrow{BH},\overrightarrow{BC}$ cùng phương nên $\frac{x+2}{11}=\frac{y-6}{2} \Leftrightarrow 2x-11y+70=0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x=\frac{1}{5}$, $y=\frac{32}{5}$

Vậy hình chiếu của A lên BC là $H\left(\frac{1}{5};\frac{32}{5}\right)$

Câu 2. Cho các điểm $A\left(4\sqrt{3};-1\right)$, $B(0;3)$, $C\left(8\sqrt{3};3\right)$.

a) Tính các cạnh của tam giác ABC.

b) Tính các góc của tam giác ABC.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(-4\sqrt{3};4\right) \Rightarrow AB=\sqrt{48+16}=8$.

$\overrightarrow{BC}=\left(8\sqrt{3};0\right) \Rightarrow BC=8\sqrt{3}$

$\overrightarrow{CA}=\left(-4\sqrt{3};-4\right) \Rightarrow AB=8$

b) Ta có $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2.AB.AC}=\frac{128-192}{128}=-\frac{1}{2}$.

Suy ra $\widehat{A}=120^\circ$ và vì tam giác cân tại A nên $\widehat{B}=\widehat{C}=30^\circ$.

Câu 3. Cho các điểm $A(-1;-1)$, $B(3;1)$, $C(6;0)$.

a) Chứng minh ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

b) Tính góc B và diện tích tam giác ABC.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;2)$, $\overrightarrow{AC}=(7;1)$. Vì $\frac{4}{7}\neq\frac{2}{1}$ nên ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

b) Ta có $\overrightarrow{BA}=(-4;-2)$, $\overrightarrow{BC}=(3;-1)$.

Do đó $\cos B=\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{(-4).3+(-2).(-1)}{\sqrt{16+4}.\sqrt{9+1}}=\frac{-10}{\sqrt{200}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\widehat{B}=135^\circ$.

Hạ đường cao AH ta có $S=\frac{1}{2}BC.AB.\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{9+1}.\sqrt{16+4}.\frac{\sqrt{2}}{2}=5$.

Câu 4. Cho các điểm $A(1;3)$, $B(4;2)$.

a) Tìm tọa độ điểm D nằm trên trục Ox và cách đều hai điểm A và B.

b) Tính chu vi và điện tích tam giác OAB.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Lời giải.

a) Vì D nằm trên trục Ox nên $D(x;0)$. Ta có

$DA=DB \Leftrightarrow DA^2=DB^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+3^2=(x-4)^2+2^2$

$\Leftrightarrow x^2+1-2x+9=x^2+16-8x+4 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3}$.

Vậy $D\left(\frac{5}{3};0\right)$.

b) Chu vi tam giác là

$OA+OB+OC=\sqrt{1^2+3^2}+\sqrt{4^2+2^2}+\sqrt{3^2+1^2}=2\sqrt{10}+\sqrt{20}=2\left(\sqrt{10}+\sqrt{5}\right)$

Ta có $OA=AB=\sqrt{10}$ và $OB=\sqrt{20}=AC.\sqrt{2}$ nên tam giác OAB là tam giác vuông cân tại A.

Vậy diện tích tam giác OAB là $S=\frac{OA.OB}{2}=5$.

Câu 5. Cho các điểm $A(4;6)$, $B(5;1)$, $C(1;3)$. Tìm tọa độ tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

Gọi $I(x;y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có $IA=IB=IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2=IB^2 \\ IA^2=IC^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2+(y-6)^2=(x-5)^2+(y-1)^2 \\ (x-4)^2+(y-6)^2=(x-1)^2+(y+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-10y=-26 \\ -6x-18y=-42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{5}{2} \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2+(y-6)^2=(x-5)^2+(y-1)^2 \\ (x-4)^2+(y-6)^2=(x-1)^2+(y+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-10y=-26 \\ -6x-18y=-42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{5}{2} \end{cases}$.

Vậy $I\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$ và bán kính $IA=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}-4\right)^2+\left(\frac{5}{2}-6\right)^2}=\frac{\sqrt{130}}{2}$.

Câu 6. Cho tam giác ABC có ba đỉnh $A(-3;0)$, $B(3;0)$, $C(2;6)$. Tìm tọa độ trọng tâm G và trực tâm H của tam giác.

Lời giải.

Trọng tâm G có tọa độ $\begin{cases} x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=\frac{2}{3} \\ y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=2 \end{cases}$. Vậy $G\left(\frac{2}{3};2\right)$.

Gọi $H(x;y)$ là trực tâm ta có

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+3)(2-3)+(y-0)(6-0)=0\\ (x-3)(-3-2)+(y-0)(0-6)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+6y=3\\ -5x-6y=-15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=\dfrac{5}{6}\end{cases}.$$

Vậy $H\left(2;\dfrac{5}{6}\right)$.

Câu 7: Cho ba điểm $A(3;4)$, $B(2;1)$ và $C(-1;-2)$. Tìm điểm M trên đường thẳng BC để góc $\widehat{AMB}=45^0$

Lời giải:

Giả sử $M(x;y)$ suy ra $\overrightarrow{MA}(3-x;4-y)$, $\overrightarrow{MB}(2-x;1-y)$, $\overrightarrow{BC}(-3;-3)$

Vì $\widehat{AMB}=45^0$ suy ra $\left|\cos\widehat{AMB}\right|=\left|\cos\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{BC}\right)\right|$

$$\Leftrightarrow\cos 45^0=\frac{\left|\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{MA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|-3(3-x)-3(4-y)|}{\sqrt{(3-x)^2+(4-y)^2}\sqrt{9+9}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(3-x)^2+(4-y)^2}=|x+y-7|\ (*)$$

Mặt khác M thuộc đường thẳng BC nên hai vectơ $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng phương

Suy ra $\dfrac{2-x}{-3}=\dfrac{1-y}{-3}\Leftrightarrow x=y+1$ thế vào (*) ta được

$\sqrt{(2-y)^2+(4-y)^2}=|2y-6|\Leftrightarrow y^2-6y+8=0\Leftrightarrow y=2$ hoặc $y=4$

+ Với $y=2\Rightarrow x=3$, ta có $\overrightarrow{MA}(0;2)$, $\overrightarrow{MB}(-1;-1)\Rightarrow\cos\widehat{AMB}=\cos\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Khi đó $\widehat{AMB}=135^0$ (không thỏa mãn)

+ Với $y=4\Rightarrow x=5$, $\overrightarrow{MA}(-2;0)$, $\overrightarrow{MB}(-3;-3)\Rightarrow\cos\widehat{AMB}=\cos\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Khi đó $\widehat{AMB}=45^0$

Vậy $M(5;4)$. là điểm cần tìm.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=0$. **C.** $\vec{a}.\vec{b}=-1$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng nên $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0^0\longrightarrow\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=1$.

Vậy $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

Câu 2. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

A. $\alpha=180^0$. **B.** $\alpha=0^0$. **C.** $\alpha=90^0$. **D.** $\alpha=45^0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Mà theo giả thiết $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}|.|\vec{b}|$, suy ra $\cos(\vec{a},\vec{b})=-1\longrightarrow(\vec{a},\vec{b})=180^0$.

Câu 3. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$ và $\vec{a}.\vec{b}=-3$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=30^0$. **B.** $\alpha=45^0$. **C.** $\alpha=60^0$. **D.** $\alpha=120^0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})\longrightarrow\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\dfrac{-3}{3.2}=-\dfrac{1}{2}\longrightarrow(\vec{a},\vec{b})=120^0$.

Câu 4. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và hai vectơ $\vec{u}=\dfrac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=90^0$. **B.** $\alpha=180^0$. **C.** $\alpha=60^0$. **D.** $\alpha=45^0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{u}\perp\vec{v}\longrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{2}{5}\vec{a}^2-\dfrac{13}{5}\vec{a}\vec{b}-3\vec{b}^2=0$

$\xrightarrow{|\vec{a}|=|\vec{b}|=1}\vec{a}\vec{b}=-1.$

Suy ra $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=-1\longrightarrow(\vec{a},\vec{b})=180^0$.

Câu 5. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\right)$.

B. $\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$.

C. $\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$.

D. $\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{1}{4}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$.

Lời giải

Chọn C

Nhận thấy C và D chỉ khác nhau về hệ số $\dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{1}{4}$ nên đáp án sai sẽ rơi vào C hoặc D.

Ta có $|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2=4\vec{a}\vec{b}\longrightarrow\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{1}{4}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$.

- A đúng, vì $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}.\vec{b}$

$\longrightarrow \vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2\right).$

• B đúng, vì $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right).\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}.\vec{b}$

$\longrightarrow \vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right).$

Câu 6. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\frac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ là góc $\widehat{A}$ nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=60^0$.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=a.a.\cos 60^0=\frac{a^2}{2}$.

Câu 7. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$ là góc ngoài của góc $\widehat{B}$ nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=120^0$.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=AB.BC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=a.a.\cos 120^0=-\frac{a^2}{2}$.

Câu 8. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và có $AB=AC=a$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=a^2$.

C. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$ là góc ngoài của góc $\widehat{B}$ nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=135^0$.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=AB.BC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=a.a\sqrt{2}.\cos 135^0=-a^2$.

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB=c$, $AC=b$. Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2$. **B.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=c^2$.

C. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2+c^2$. **D.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2-c^2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=BA.BC.\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=BA.BC.\cos\widehat{B}=c.\sqrt{b^2+c^2}.\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}=c^2$.

Cách khác. Tam giác ABC vuông tại A suy ra $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$.

Ta có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = AB^2 = c^2$.

Câu 10. Cho tam giác ABC có $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm, $CA = 5$ cm. Tính $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

A. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 13$. **B.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 15$. **C.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 17$. **D.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 19$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $AB + BC = CA \Rightarrow$ ba điểm A, B, C thẳng hàng và B nằm giữa A, C.

Khi đó $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = CA.CB.\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) = 3.5.\cos 0^0 = 15$.

Cách khác. Ta có $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right)^2 = CB^2 - 2\overrightarrow{CB}\overrightarrow{CA} + CA^2$

$\longrightarrow \overrightarrow{CB}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\left(CB^2 + CA^2 - AB^2\right) = \frac{1}{2}\left(3^2 + 5^2 - 2^2\right) = 15$.

Câu 11. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Tính $P = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC}$.

A. $P = b^2 - c^2$. **B.** $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$.

C. $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$. **D.** $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$.

$= \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = AC^2 - AB^2 = b^2 - c^2$.

Câu 12. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$. **B.** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$.

C. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$. **D.** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$.

Khi đó $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2\right) = \frac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2\right) = \frac{b^2 - c^2}{2}$.

Câu 13. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\widehat{BAC}=45^0$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos 45^0=a.a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=a^2.$

Câu 14. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $P=\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}\right).$

A. $P=-1.$ **B.** $P=3a^2.$ **C.** $P=-3a^2.$ **D.** $P=2a^2.$

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $AC=a\sqrt{2}.$

Ta có $P=\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}^2$

$=-CA.CD\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)-AC^2=-a\sqrt{2}.a.\cos 45^0-\left(a\sqrt{2}\right)^2=-3a^2.$

Câu 15. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $a.$ Tính $P=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}\right).$

A. $P=2\sqrt{2}a.$ **B.** $P=2a^2.$ **C.** $P=a^2.$ **D.** $P=-2a^2.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases}BD=a\sqrt{2}\\ \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}=\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BD}\end{cases}.$

Khi đó $P=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).2\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=-2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}+0$

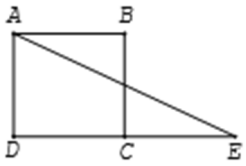
$=-2.BA.BD\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}\right)=-2.a.a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-2a^2.$

Câu 16. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua C. Tính $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}.$

A. $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=2a^2.$ **B.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}a^2.$ **C.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=\sqrt{5}a^2.$ **D.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=5a^2.$

Lời giải

Chọn A



Ta có C là trung điểm của DE nên $DE=2a.$

Khi đó $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}\right).\overrightarrow{AB}=\underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}_{0}+\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AB}$

$=DE.AB.\cos\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{AB}\right)=DE.AB.\cos 0^0=2a^2.$

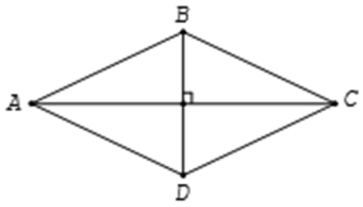
Câu 17. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=8,\ AD=5.$ Tích $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}.$

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=62.$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=64.$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-62.$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-64.$

Lời giải

Chọn D

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}$ theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.



Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+0=-AB^2=-64$.

Câu 18. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC=8$ và $BD=6$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=24$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=26$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=28$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=32$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $O=AC\cap BD$, giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.

Ta có

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}+0=\frac{1}{2}AC^2=32$.

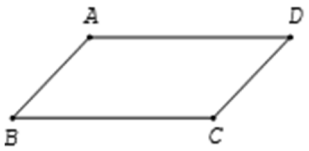
Câu 19. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=8$ cm, $AD=12$ cm, góc $\widehat{ABC}$ nhọn và diện tích bằng 54 cm^2. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$.

A. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{2\sqrt{7}}{16}$. **B.** $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=-\frac{2\sqrt{7}}{16}$.

C. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{5\sqrt{7}}{16}$. **D.** $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=-\frac{5\sqrt{7}}{16}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $S_{ABCD}=2.S_{\Delta ABC}=54\Leftrightarrow S_{\Delta ABC}=27\text{cm}^2$. Diện tích tam giác ABC là:

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.AB.BC.\sin\widehat{ABC}=\frac{1}{2}.AB.AD.\sin\widehat{ABC}$.

$\Rightarrow \sin\widehat{ABC}=\frac{2.S_{\Delta ABC}}{AB.AD}=\frac{2.27}{8.12}=\frac{9}{16}$

$\longrightarrow \cos\widehat{ABC}=\sqrt{1-\sin^2\widehat{ABC}}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$ (vì $\widehat{ABC}$ nhọn).

Mặt khác góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ là góc ngoài của góc $\widehat{ABC}$

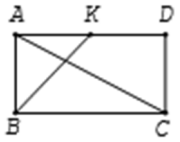
Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\cos\left(180^0-\widehat{ABC}\right)=-\cos\widehat{ABC}=-\frac{5\sqrt{7}}{16}$.

Câu 20. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a$ và $AD=a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD. Tính $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=0$. **B.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=-a^2\sqrt{2}$. **C.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=a^2\sqrt{2}$. **D.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=2a^2$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $AC=BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{2a^2+a^2}=a\sqrt{3}$.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\end{cases}$

$\longrightarrow \overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$

$=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD}=-a^2+0+0+\dfrac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2=0.$

Câu 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(3;-1)$, $B(2;10)$, $C(-4;2)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=40$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-40$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=26$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-26$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;11)$, $\overrightarrow{AC}=(-7;3)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-1).(-7)+11.3=40$.

Câu 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(2;10)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}$.

A. $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=-4$. **B.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=0$. **C.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=4$. **D.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=16$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AO}=(-3;1)$, $\overrightarrow{OB}=(2;10)$. Suy ra $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=-3.2+1.10=4$.

Câu 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=4\vec{i}+6\vec{j}$ và $\vec{b}=3\vec{i}-7\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$.

A. $\vec{a}.\vec{b}=-30$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=3$. **C.** $\vec{a}.\vec{b}=30$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=43$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra $\vec{a}=(4;6)$ và $\vec{b}=(3;-7)$.

Suy ra $\vec{a}.\vec{b}=4.3+6.(-7)=-30$.

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-3;2)$ và $\vec{b}=(-1;-7)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{c}$ biết $\vec{c}.\vec{a}=9$ và $\vec{c}.\vec{b}=-20$.

A. $\vec{c}=(-1;-3)$. **B.** $\vec{c}=(-1;3)$. **C.** $\vec{c}=(1;-3)$. **D.** $\vec{c}=(1;3)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $\vec{c}=(x;y)$.

Ta có $\begin{cases}\vec{c}.\vec{a}=9\\ \vec{c}.\vec{b}=-20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x+2y=9\\ -x-7y=-20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=3\end{cases}\longrightarrow\vec{c}=(-1;3)$.

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;2)$, $\vec{b}=(4;3)$ và $\vec{c}=(2;3)$. Tính $P=\vec{a}.\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

A. $P=0$. **B.** $P=18$. **C.** $P=20$. **D.** $P=28$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{b}+\vec{c}=(6;6)$. Suy ra $P=\vec{a}.\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=1.6+2.6=18$.

Câu 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-1;1)$ và $\vec{b}=(2;0)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. **D.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-1.2+1.0}{\sqrt{(-1)^2+1^2}.\sqrt{2^2+0^2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-2;-1)$ và $\vec{b}=(4;-3)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-2.4+(-1).(-3)}{\sqrt{4+1}.\sqrt{16+9}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(4;3)$ và $\vec{b}=(1;7)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=90^{\circ}$. **B.** $\alpha=60^{\circ}$. **C.** $\alpha=45^{\circ}$. **D.** $\alpha=30^{\circ}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{4.1+3.7}{\sqrt{16+9}.\sqrt{1+49}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\longrightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=45^{0}$.

Câu 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{x}=(1;2)$ và $\vec{y}=(-3;-1)$. Tính góc α giữa hai vectơ

$\vec{x}$ và $\vec{y}$.

A. $\alpha = 45^{\circ}$. **B.** $\alpha = 60^{\circ}$. **C.** $\alpha = 90^{\circ}$. **D.** $\alpha = 135^{\circ}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos\left(\vec{x},\vec{y}\right) = \dfrac{\vec{x}.\vec{y}}{\left|\vec{x}\right|.\left|\vec{y}\right|} = \dfrac{1.(-3)+2.(-1)}{\sqrt{1+4}.\sqrt{9+1}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \left(\vec{x},\vec{y}\right) = 135^{0}$.

Câu 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a} = (2;5)$ và $\vec{b} = (3;-7)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 30^{\circ}$. **B.** $\alpha = 45^{\circ}$. **C.** $\alpha = 60^{\circ}$. **D.** $\alpha = 135^{\circ}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{2.3+5(-7)}{\sqrt{4+25}.\sqrt{9+49}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \left(\vec{a},\vec{b}\right) = 135^{0}$.

Câu 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho vectơ $\vec{a} = (9;3)$. Vectơ nào sau đây không vuông góc với vectơ $\vec{a}$?

A. $\vec{v_1} = (1;-3)$. **B.** $\vec{v_2} = (2;-6)$. **C.** $\vec{v_3} = (1;3)$. **D.** $\vec{v_4} = (-1;3)$.

Lời giải

Chọn C

Kiểm tra tích vô hướng $\vec{a}.\vec{v}$, nếu đáp án nào cho kết quả khác 0 thì kết luận vectơ đó không vuông góc với $\vec{a}$.

Câu 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;2)$, $B(-1;1)$ và $C(5;-1)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = -\dfrac{1}{2}$. **B.** $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = -\dfrac{2}{5}$. **D.** $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;-1)$ và $\overrightarrow{AC} = (4;-3)$.

Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \dfrac{-2.4+(-1).(-3)}{\sqrt{4+1}.\sqrt{16+9}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(6;0)$, $B(3;1)$ và $C(-1;-1)$. Tính số đo góc B của tam giác đã cho.

A. 15°. **B.** 60°. **C.** 120°. **D.** 135°.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{BA}=(3;-1)$ và $\overrightarrow{BC}=(-4;-2)$. Suy ra:

$$\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{3.(-4)+(-1).(-2)}{\sqrt{9+1}.\sqrt{16+4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\longrightarrow \widehat{B}=\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=135^{\circ}.$$

Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}-5\vec{j}$ và $\vec{v}=k\vec{i}-4\vec{j}$ Tìm k để vectơ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

A. $k=20$. **B.** $k=-20$. **C.** $k=-40$. **D.** $k=40$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $\vec{u}=\left(\frac{1}{2};-5\right),\vec{v}=(k;-4)$.

Yêu cầu bài toán: $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\frac{1}{2}k+(-5)(-4)=0\Leftrightarrow k=-40$.

Câu 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}-5\vec{j}$ và $\vec{v}=k\vec{i}-4\vec{j}$. Tìm k để vectơ $\vec{u}$ và vectơ $\vec{v}$ có độ dài bằng nhau.

A. $k=\frac{37}{4}$. **B.** $k=\frac{\sqrt{37}}{2}$. **C.** $k=\pm\frac{\sqrt{37}}{2}$. **D.** $k=\frac{5}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $\vec{u}=\left(\frac{1}{2};-5\right),\vec{v}=(k;-4)$.

Suy ra $\left|\vec{u}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+25}=\frac{1}{2}\sqrt{101}$ và $\left|\vec{v}\right|=\sqrt{k^2+16}$. Do đó để

$$\left|\vec{u}\right|=\left|\vec{v}\right|\Leftrightarrow\sqrt{k^2+16}=\frac{1}{2}\sqrt{101}\Leftrightarrow k^2+16=\frac{101}{4}\Leftrightarrow k^2=\frac{37}{4}\Leftrightarrow k=\pm\frac{\sqrt{37}}{2}.$$

Câu 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ $\vec{a}=(-2;3)$, $\vec{b}=(4;1)$ và $\vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}$ với $k,\ m\in\mathbb{R}$. Biết rằng vectơ $\vec{c}$ vuông góc với vectơ $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2k=2m$. **B.** $3k=2m$. **C.** $2k+3m=0$. **D.** $3k+2m=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases}\vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}=(-2k+4m;3k+m)\\ \vec{a}+\vec{b}=(2;4)\end{cases}$.

Để $\vec{c}\perp\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\Leftrightarrow\vec{c}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow 2(-2k+4m)+4(3k+m)=0\Leftrightarrow 2k+3m=0.$

Câu 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-2;3)$ và $\vec{b}=(4;1)$. Tìm vectơ $\vec{d}$ biết $\vec{a}.\vec{d}=4$ và $\vec{b}.\vec{d}=-2$.

A. $\vec{d}=\left(\frac{5}{7};\frac{6}{7}\right)$. **B.** $\vec{d}=\left(-\frac{5}{7};\frac{6}{7}\right)$. **C.** $\vec{d}=\left(\frac{5}{7};-\frac{6}{7}\right)$. **D.** $\vec{d}=\left(-\frac{5}{7};-\frac{6}{7}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $\vec{d}=(x;y)$. Từ giả thiết, ta có hệ $\begin{cases}-2x+3y=4\\4x+y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{5}{7}\\y=\dfrac{6}{7}\end{cases}$.

Câu 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vecto $\vec{u}=(4;1)$, $\vec{v}=(1;4)$ và $\vec{a}=\vec{u}+m.\vec{v}$ với $m\in\mathbb{R}$. Tìm m để $\vec{a}$ vuông góc với trục hoành.

A. $m=4$. **B.** $m=-4$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{a}=\vec{u}+m.\vec{v}=(4+m;1+4m)$. Trục hoành có vectơ đơn vị là $\vec{i}=(1;0)$.

Vecto $\vec{a}$ vuông góc với trục hoành $\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{i}=0\Leftrightarrow 4+m=0\Leftrightarrow m=-4$.

Câu 39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vecto $\vec{u}=(4;1)$ và $\vec{v}=(1;4)$. Tìm m để vecto $\vec{a}=m.\vec{u}+\vec{v}$ tạo với vecto $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}$ một góc 45^0.

A. $m=4$. **B.** $m=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $m=-\dfrac{1}{4}$. **D.** $m=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases}\vec{a}=m.\vec{u}+\vec{v}=(4m+1;m+4)\\\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}=(1;1)\end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\cos 45^0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow\dfrac{(4m+1)+(m+4)}{\sqrt{2}\sqrt{(4m+1)^2+(m+4)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\dfrac{5(m+1)}{\sqrt{2}\sqrt{17m^2+16m+17}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow 5(m+1)=\sqrt{17m^2+16m+17}\Leftrightarrow\begin{cases}m+1\ge 0\\25m^2+50m+25=17m^2+16m+17\end{cases}\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{4}$.

Câu 40. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tính khoảng cách giữa hai điểm $M(1;-2)$ và $N(-3;4)$.

A. $MN=4$. **B.** $MN=6$. **C.** $MN=3\sqrt{6}$. **D.** $MN=2\sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{MN}=(-4;6)$ suy ra $MN=\sqrt{(-4)^2+6^2}=\sqrt{42}=2\sqrt{13}$.

Câu 41. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;4)$, $B(3;2)$, $C(5;4)$. Tính chu vi P của tam giác đã cho.

A. $P=4+2\sqrt{2}$. **B.** $P=4+4\sqrt{2}$. **C.** $P=8+8\sqrt{2}$. **D.** $P=2+2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(2;-2)\\ \overrightarrow{BC}=(2;2)\\ \overrightarrow{CA}=(-4;0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AB=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}\\ BC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}\\ CA=\sqrt{(-4)^2+0^2}=4\end{cases}$

Vậy chu vi P của tam giác ABC là $P=AB+BC+CA=4+4\sqrt{2}$.

Câu 42. Trong hệ tọa độ $(O;\vec{i};\vec{j})$, cho vectơ $\vec{a}=-\frac{3}{5}\vec{i}-\frac{4}{5}\vec{j}$. Độ dài của vectơ $\vec{a}$ bằng

A. $\frac{1}{5}$. **B.** 1. **C.** $\frac{6}{5}$. **D.** $\frac{7}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{a}=-\frac{3}{5}\vec{i}-\frac{4}{5}\vec{j}\longrightarrow\vec{a}=\left(-\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right)\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=1$.

Câu 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-2;4)$ và $B(8;4)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục hoành sao cho tam giác ABC vuông tại C.

A. $C(6;0)$. **B.** $C(0;0)$, $C(6;0)$. **C.** $C(0;0)$. **D.** $C(-1;0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $C\in Ox$ nên $C(c;0)$ và $\begin{cases}\overrightarrow{CA}=(-2-c;4)\\ \overrightarrow{CB}=(8-c;4)\end{cases}$.

Tam giác ABC vuông tại C nên $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=0\Leftrightarrow(-2-c).(8-c)+4.4=0$

$\Leftrightarrow c^2-6c=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}c=6\rightarrow C(6;0)\\ c=0\rightarrow C(0;0)\end{bmatrix}$.

Câu 44. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(-3;1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục tung sao cho tam giác ABC vuông tại A.

A. $C(0;6)$. **B.** $C(5;0)$. **C.** $C(3;1)$. **D.** $C(0;-6)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $C\in Oy$ nên $C(0;c)$ và $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-4;-1)\\ \overrightarrow{AC}=(-1;c-2)\end{cases}$.

Tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow(-4).(-1)+(-1)(c-2)=0\Leftrightarrow c=6$.

Vậy $C(0;6)$.

Câu 45. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(-4;0)$, $B(-5;0)$ và $C(3;0)$. Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

A. $M(-2;0)$. **B.** $M(2;0)$. **C.** $M(-4;0)$. **D.** $M(-5;0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $M \in Ox$ nên $M(x;0)$ và $\begin{cases}\overrightarrow{MA}=(-4-x;0)\\ \overrightarrow{MB}=(-5-x;0)\\ \overrightarrow{MC}=(3-x;0)\end{cases} \longrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=(-6-3x;0).$

Do $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ nên $-6-3x=0 \Leftrightarrow x=-2 \longrightarrow M(-2;0).$

Câu 46. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $M(-2;2)$ và $N(1;1)$. Tìm tọa độ điểm P thuộc trục hoành sao cho ba điểm M, N, P thẳng hàng.

A. $P(0;4)$. **B.** $P(0;-4)$. **C.** $P(-4;0)$. **D.** $P(4;0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P \in Ox$ nên $P(x;0)$ và $\begin{cases}\overrightarrow{MP}=(x+2;-2)\\ \overrightarrow{MN}=(3;-1)\end{cases}.$

Do M, N, P thẳng hàng nên $\frac{x+2}{3}=\frac{-2}{-1} \Leftrightarrow x=4 \longrightarrow P(4;0).$

Câu 47. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm điểm M thuộc trục hoành để khoảng cách từ đó đến điểm $N(-1;4)$ bằng $2\sqrt{5}$.

A. $M(1;0)$. **B.** $M(1;0)$, $M(-3;0)$.

C. $M(3;0)$. **D.** $M(1;0)$, $M(3;0)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $M \in Ox$ nên $M(m;0)$ và $\overrightarrow{MN}=(-1-m;4).$

Theo giả thiết: $MN=2\sqrt{5} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MN}\right|=2\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(-1-m)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow (1+m)^2+16=20 \Leftrightarrow m^2+2m-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases}m=1 \longrightarrow M(1;0)\\ m=-3 \longrightarrow M(-3;0)\end{cases}.$

Câu 48. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;3)$ và $B(4;2)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục hoành sao cho C cách đều hai điểm A và B.

A. $C\left(-\frac{5}{3};0\right)$. **B.** $C\left(\frac{5}{3};0\right)$. **C.** $C\left(-\frac{3}{5};0\right)$. **D.** $C\left(\frac{3}{5};0\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $C \in Ox$ nên $C(x;0)$ và $\begin{cases}\overrightarrow{AC}=(x-1;-3)\\ \overrightarrow{BC}=(x-4;-2)\end{cases}.$

Do $CA=CB \Leftrightarrow CA^2=CB^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(-3)^2=(x-4)^2+(-2)^2 \Leftrightarrow x=\frac{5}{3} \longrightarrow C\left(\frac{5}{3};0\right).$

Câu 49. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;2)$, $B(5;-2)$. Tìm điểm M thuộc trục hoàng sao cho $\widehat{AMB}=90^0$?

A. $M(0;1)$. **B.** $M(6;0)$. **C.** $M(1;6)$. **D.** $M(0;6)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $M \in Ox$ nên $M(m;0)$ và $\begin{cases}\overrightarrow{AM}=(m-2;-2)\\ \overrightarrow{BM}=(m-5;2)\end{cases}$.

Vì $\widehat{AMB}=90^0$ suy ra $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0$ nên $(m-2)(m-5)+(-2).2=0$.

$\Leftrightarrow m^2-7m+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\ m=6\end{array}\right. \longrightarrow \left[\begin{array}{l}M(1;0)\\ M(6;0)\end{array}\right.$.

Câu 50. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;-1)$ và $B(3;2)$. Tìm M thuộc trục tung sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất.

A. $M(0;1)$. **B.** $M(0;-1)$. **C.** $M\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $M\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $M \in Oy$ nên $M(0;m)$ và $\begin{cases}\overrightarrow{MA}=(1;-1-m)\\ \overrightarrow{MB}=(3;2-m)\end{cases}$.

Khi đó $MA^2+MB^2=\left|\overrightarrow{MA}\right|^2+\left|\overrightarrow{MB}\right|^2=1^2+(-1-m)^2+3^2+(2-m)^2=2m^2-2m+15$.

$=2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{29}{2}\ge\frac{29}{2};\ \forall m\in\mathbb{R}$.

Suy ra $\left\{MA^2+MB^2\right\}_{\min}=\frac{29}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=\frac{1}{2} \longrightarrow M\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 51. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ biết $A(-2;0)$, $B(2;5)$, $C(6;2)$. Tìm tọa độ điểm D.

A. $D(2;-3)$. **B.** $D(2;3)$. **C.** $D(-2;-3)$. **D.** $D(-2;3)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $D(x;y)$. Ta có $\overrightarrow{AD}=(x+2;y)$ và $\overrightarrow{BC}=(4;-3)$. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC} \longrightarrow \begin{cases}x+2=4\\ y=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=-3\end{cases} \longrightarrow D(2;-3)$.

Câu 52. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;3)$, $B(-2;4)$, $C(5;3)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác đã cho.

A. $G\left(2;\frac{10}{3}\right)$. **B.** $G\left(\frac{8}{3};-\frac{10}{3}\right)$. **C.** $G(2;5)$. **D.** $G\left(\frac{4}{3};\frac{10}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Tọa độ trọng tâm $G(x_G;y_G)$ là $\begin{cases} x_G=\dfrac{1-2+5}{3}=\dfrac{4}{3} \\ y_G=\dfrac{3+4+3}{3}=\dfrac{10}{3} \end{cases}$.

Câu 53. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-4;1)$, $B(2;4)$, $C(2;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác đã cho.

A. $I\left(\frac{1}{4};1\right)$. **B.** $I\left(-\frac{1}{4};1\right)$. **C.** $I\left(1;\frac{1}{4}\right)$. **D.** $I\left(1;-\frac{1}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $I(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AI}=(x+4;y-1) \\ \overrightarrow{BI}=(x-2;y-4). \\ \overrightarrow{CI}=(x-2;y+2) \end{cases}$

Do I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $IA=IB=IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2=IB^2 \\ IB^2=IC^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2+(y-1)^2=(x-2)^2+(y-4)^2 \\ (x-2)^2+(y-4)^2=(x-2)^2+(y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2=(x-2)^2+9 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{4} \\ y=1 \end{cases}$.

Câu 54. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-3;0)$, $B(3;0)$ và $C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính $a+6b$.

A. $a+6b=5$. **B.** $a+6b=6$. **C.** $a+6b=7$. **D.** $a+6b=8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AH}=(a+3;b) \ \& \ \overrightarrow{BC}=(-1;6) \\ \overrightarrow{BH}=(a-3;b) \ \& \ \overrightarrow{AC}=(5;6) \end{cases}$. Từ giả thiết, ta có:

$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+3).(-1)+b.6=0 \\ (a-3).5+b.6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\dfrac{5}{6} \end{cases} \longrightarrow a+6b=7.$

Câu 55. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(4;3)$, $B(2;7)$ và $C(-3;-8)$. Tìm toạ độ chân đường cao A' kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC.

A. $A'(1;-4)$. **B.** $A'(-1;4)$. **C.** $A'(1;4)$. **D.** $A'(4;1)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $A'(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AA'}=(x-4;y-3) \\ \overrightarrow{BC}=(-5;-15) \\ \overrightarrow{BA'}=(x-2;y-7) \end{cases}$.

Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} AA' \perp BC \\ B,\ A',\ C \text{ thang hang} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=0 \quad (1) \\ \overrightarrow{BA'}=k\overrightarrow{BC} \quad (2) \end{cases}$.

- $(1) \Leftrightarrow -5(x-4)-15(y-3)=0 \Leftrightarrow x+3y=13.$
- $(2) \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{-5}=\dfrac{y-7}{-15} \Leftrightarrow 3x-y=-1.$

Giải hệ $\begin{cases} x+3y=13 \\ 3x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \longrightarrow A'(1;4).$

Câu 56. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;4)$, $B(-3;1)$, $C(3;-1)$. Tìm tọa độ chân đường cao A' vẽ từ đỉnh A của tam giác đã cho.

A. $A'\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{1}{5}\right)$. **B.** $A'\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$. **C.** $A'\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{1}{5}\right)$. **D.** $A'\left(\dfrac{3}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $A'(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AA'}=(x-2;y-4) \\ \overrightarrow{BC}=(6;-2) \\ \overrightarrow{BA'}=(x+3;y-1) \end{cases}$.

Vì A' là chân đường cao vẽ từ đỉnh A của tam giác ABC nên

$$\begin{cases} AA' \perp BC \\ B,\ C,\ A' \text{ thẳng hàng} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BA'}=k\overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2).6+(y-4).(-2)=0 \\ \dfrac{x+3}{6}=\dfrac{y-1}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-2y=4 \\ -2x-6y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{5} \\ y=-\dfrac{1}{5} \end{cases}.$$

Câu 57. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(-3;-2)$, $B(3;6)$ và $C(11;0)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

A. $D(5;-8)$. **B.** $D(8;5)$. **C.** $D(-5;8)$. **D.** $D(-8;5)$.

Lời giải

Chọn A

Dễ dàng kiểm tra $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=0 \longrightarrow \widehat{ABC}=90^0$.

Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$. Suy ra I là trung điểm của $AC \longrightarrow I(4;-1)$.

Gọi $D(x;y)$, do I cũng là trung điểm của $BD \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+3}{2}=4 \\ \dfrac{y+6}{2}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-8 \end{cases} \Rightarrow D(5;-8).$

Câu 58. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;4)$ và $B(1;1)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại B.

A. $C(4;0)$. **B.** $C(-2;2)$. **C.** $C(4;0)$, $C(-2;2)$. **D.** $C(2;0)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $C(x;y)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{BA}=(1;3)\\ \overrightarrow{BC}=(x-1;y-1)\end{cases}$.

Tam giác ABC vuông cân tại $B \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=0\\ BA=BC\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1.(x-1)+3.(y-1)=0\\ 1^2+3^2=(x-1)^2+(y-1)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=4-3y\\ 10y^2-20y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\ x=4\end{cases}$ hay $\begin{cases}y=2\\ x=-2\end{cases}$.

Câu 59. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có $A(1;-1)$ và $B(3;0)$. Tìm tọa độ điểm D, biết D có tung độ âm.

A. $D(0;-1)$. **B.** $D(2;-3)$. **C.** $D(2;-3)$, $D(0;1)$. **D.** $D(-2;-3)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $C=(x;y)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(2;1)\\ \overrightarrow{BC}=(x-3;y)\end{cases}$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}\\ AB=BC\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2(x-3)+1.y=0\\ (x-3)^2+y^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2(3-x)\\ 5(x-3)^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2(3-x)\\ (x-3)^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\ y=-2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$.

Với $C_1(4;-2)$ ta tính được đỉnh $D_1(2;-3)$: thỏa mãn.

Với $C_2(2;2)$ ta tính được đỉnh $D_2(0;1)$: không thỏa mãn.

Câu 60. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác OAB với $A(1;3)$ và $B(4;2)$. Tìm tọa độ điểm E là chân đường phân giác trong góc O của tam giác OAB.

A. $E=\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$. **B.** $E=\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

C. $E=\left(-2+3\sqrt{2};4+\sqrt{2}\right)$. **D.** $E=\left(-2+3\sqrt{2};4-\sqrt{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có $\frac{EA}{EB}=\frac{OA}{OB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vì E nằm giữa hai điểm A, B nên $\overrightarrow{EA}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{EB}$. (*)

Gọi $E(x;y)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{EA}=(1-x;3-y)\\ \overrightarrow{EB}=(4-x;2-y)\end{cases}$.

Từ (*), suy ra $\begin{cases}1-x=-\frac{\sqrt{2}}{2}(4-x)\\ 3-y=-\frac{\sqrt{2}}{2}(2-y)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2+3\sqrt{2}\\ y=4-\sqrt{2}\end{cases}$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 4

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho 3 điểm phân biệt A,B,C thỏa mãn $3\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$. Tìm khẳng định đúng.

A. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\frac{3}{5}\left|\overrightarrow{BC}\right|$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\frac{3}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|$. **C.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\frac{2}{5}\left|\overrightarrow{BC}\right|$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\frac{2}{3}\left|\overrightarrow{BC}\right|$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$3\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\frac{-3}{2}\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\frac{-3}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{-3}{2}\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{-3}{2}\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\frac{-3}{5}\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|=\frac{3}{5}\left|\overrightarrow{BC}\right|$.

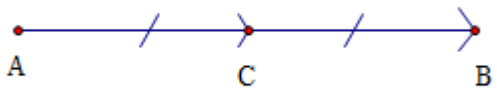
Câu 2: Gọi C là trung điểm của AB. Tìm khẳng định đúng.

A. $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|$.

C. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng. **D.** $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CB}$ ngược hướng.

Lời giải

Chọn C



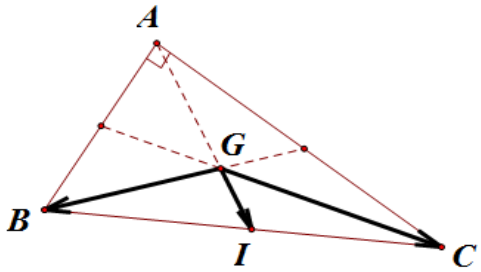
Suy ra $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Câu 3: Cho tam giác vuông ABC có trọng tâm G và cạnh huyền $BC=12$. Khi đó vectơ tổng $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$ có độ dài bằng bao nhiêu?

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm BC.

Ta có: $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=\left|2\overrightarrow{GI}\right|=\frac{2}{3}AI=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}BC=4$.

Câu 4: Cho hình vuông $ABCD$. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$. **B.** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

C. $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$.

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng là mệnh đề sai, vì hai vectơ này có giá cắt nhau.

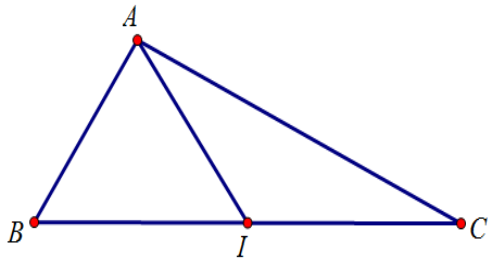
Câu 5: *Gọi AI là trung tuyến của ΔABC. Tìm điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MA}=\vec{0}$.*

A. *M là trung điểm của CI.* ***B.*** *M là trung điểm của BI.*

C. M là trung điểm của AI. **D.** M là trong tâm của ΔABC.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm của BC

Ta có: $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MA}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MA}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}\Leftrightarrow$ M là trung điểm của AI.

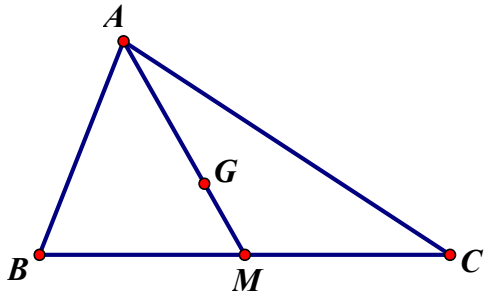
Câu 6: Nếu G là trọng tâm của giác ABC thì đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$. **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$. **D.** $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của BC

Ta có: $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

Câu 7: Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{GG'}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}\right)$. **B.** $\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$.

C. $\overrightarrow{GG'}=-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}\right)$. **D.** $\overrightarrow{GG'}=-\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Vì G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ nên ta có:

$$\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=3\overrightarrow{GG'}\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$$
$$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$$

Mặt khác ta có G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

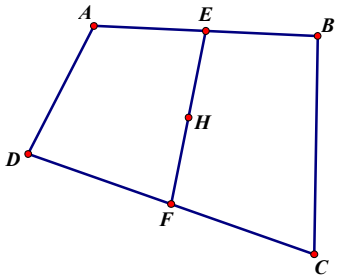
Vậy $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$ hay $\overrightarrow{GG'}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}\right)$

Câu 8: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E,F,H lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB,CD,EF. Tìm vectơ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$, với điểm M tùy ý.

A. $4\overrightarrow{MH}$. **B.** $\vec{0}$. **C.** $4\overrightarrow{ME}$. **D.** $4\overrightarrow{MF}$.

Lời giải

Chọn A



Do E,F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB,CD và điểm M tùy ý ta có:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{ME}$

$\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MF}$

Suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}\right)$

Mặt khác H là trung điểm của các đoạn thẳng EF nê ta cũng có $\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=2\overrightarrow{MH}$

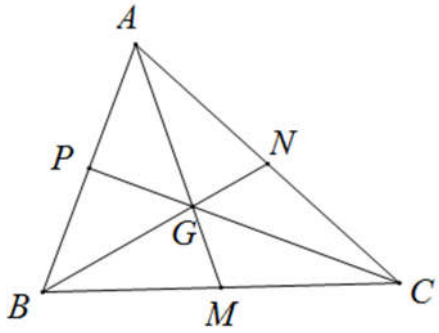
Vậy $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MH}$

Câu 9: Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, CA, AB. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\vec{0}$. **C.** $\overrightarrow{GC}-2\overrightarrow{GP}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn C



+) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=\vec{0}.$

+) G trọng tâm ΔABC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow-\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{CG}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$

+) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}-\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\vec{0}.$

+) G là trọng tâm ΔABC nên $\overrightarrow{GC}=-2\overrightarrow{GP}\Leftrightarrow\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{GP}=\vec{0}.$

Câu 10: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Cho vectơ $\overrightarrow{MN}$, với điểm O tùy ý ta luôn có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}$.

B. Hiệu của hai vectơ là tổng của vectơ thứ nhất với vectơ đối của vectơ thứ hai.

C. Vectơ đối của vectơ $\vec{a}\neq\vec{0}$ là vectơ ngược hướng với $\vec{a}$ và có cùng độ dài với $\vec{a}$.

D. Vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ là vectơ $\vec{0}$.

Lời giải

Chọn A

Cho vectơ $\overrightarrow{MN}$ với điểm O tùy ý ta luôn có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$. (Theo quy tắc trừ)

Câu 11: Gọi G là trọng tâm của tam giác đều ABC có cạnh bằng 3 cm. Tính độ dài của vectơ tổng $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$.

A. $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=\frac{2\sqrt{3}}{3}cm.$

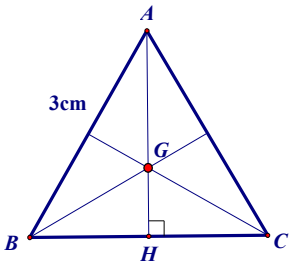
B. $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=\sqrt{2}\,cm.$

C. $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=\sqrt{3}\,cm.$

D. $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=\frac{2\sqrt{3}}{2}cm.$

Lời giải

Chọn C



Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Do đó $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}$, suy ra $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=\left|-\overrightarrow{GA}\right|=\left|-\overrightarrow{GA}\right|=GA.$

Mặt khác trong tam giác đều ABC: $AH=AC\cdot\sin C=3\cdot\sin 60^0=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}.$

Suy ra $GA=\dfrac{2}{3}AH=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\,cm.$

Câu 12: Cho 5 điểm M,N,P,Q,R tùy ý. Tìm vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{RN}-\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{QR}-\overrightarrow{PN}.$

A. $\vec{u}=\overrightarrow{MR}.$ **B.** $\vec{u}=\overrightarrow{MP}.$ **C.** $\vec{u}=\vec{0}.$ **D.** $\vec{u}=\overrightarrow{MN}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{RN}-\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{QR}-\overrightarrow{PN}$

$=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{NP}$

$=\overrightarrow{MN}+\underbrace{\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}}_{\vec{0}}$

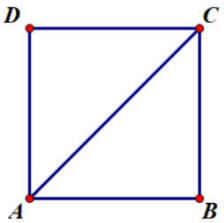
$=\overrightarrow{MN}.$

Câu 13: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Tìm độ dài của vectơ tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$?

A. $2a.$ **B.** $a\sqrt{2}.$ **C.** $a.$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$

Lời giải

Chọn B



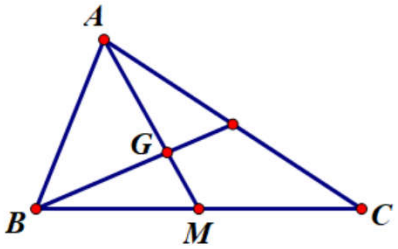
Ta có: $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=a\sqrt{2}.$

Câu 14: Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là trung điểm của BC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\left|\overrightarrow{MB}\right|+\left|\overrightarrow{MC}\right|=0.$ **B.** $GB+GC=2GI.$ **C.** $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{GM}.$ **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}.$

Lời giải

Chọn D



Ta có:

$\left|\overrightarrow{MB}\right|+\left|\overrightarrow{MC}\right|=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=MB+MC>0$.

$\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GM}$.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}$.

Câu 15: Cho tam giác ABC có D,E lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AB và AC. Tìm số k, biết rằng $\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{ED}$.

A. -2. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: D,E lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AB và AC

nên DE là đường trung bình tam giác ABC

Suy ra $\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{ED}\Rightarrow k=-2$.

Câu 16: Mệnh đề nào sau đây là đúng?.

A. Có vô số véc tơ cùng phương với mọi véc tơ.

B. Có duy nhất một véc tơ cùng phương với mọi véc tơ.

C. Không có véc tơ nào cùng phương với mọi véc tơ.

D. Có ít nhất hai véc tơ cùng phương với mọi véc tơ.

Lời giải

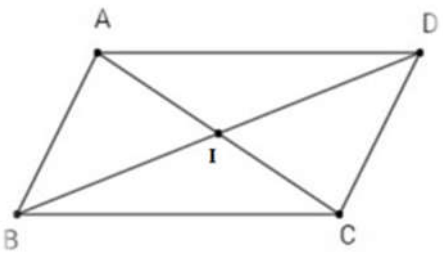
Chọn B

Câu 17: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm I. Tìm khẳng định đúng.

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI}$. **C.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn D



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

Câu 18: Cho vec tơ $\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}$. Tìm khẳng định đúng?

A. $\vec{u}=\overrightarrow{MN}$. **B.** $\vec{u}=\overrightarrow{MQ}$. **C.** $\vec{u}=\overrightarrow{MR}$. **D.** $\vec{u}=\overrightarrow{MP}$.

Lời giải

Chọn A

$\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RN}=\overrightarrow{MN}$.

Câu 19: Cho bốn điểm A, B, C, D tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

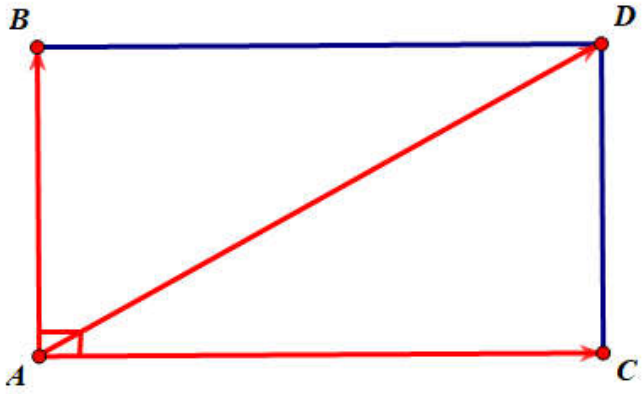
Câu 20: Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB=6cm$, $AC=8cm$. Tìm $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=5cm$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=14cm$.

C. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=20cm$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=10cm$.

Lời giải

Chọn D



* Dựng hình chữ nhật ABDC.

*Ta có: $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|=AD=BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10cm$.

Câu 21: Cho ΔABC có trọng tâm G và M là một điểm tùy ý. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{GM}.$ **B.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{GM}.$

C. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}.$ **D.** $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$

Lời giải

Chọn B

Vì ΔABC có trọng tâm G và M là một điểm tùy ý.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}.$

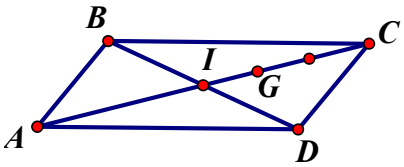
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=3\overrightarrow{GM}.$

Câu 22: Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm I. Khi đó vectơ tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ bằng:

A. $2\overrightarrow{AI}.$ **B.** $4\overrightarrow{AI}.$ **C.** $4\overrightarrow{IA}.$ **D.** $2\overrightarrow{IA}.$

Lời giải

Chọn B



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$ với G là trọng tâm ΔBCD

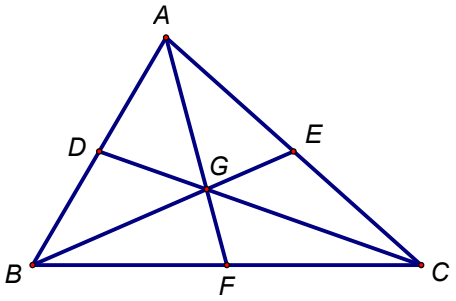
$=3.\frac{4}{3}\overrightarrow{AI}=4\overrightarrow{AI}.$

Câu 23: Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{GA};\vec{b}=\overrightarrow{GB}.$ Đẳng thức nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{CA}=-2\vec{a}-\vec{b}.$ **B.** $\overrightarrow{CA}=2\vec{a}+\vec{b}.$ **C.** $\overrightarrow{CA}=\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}.$ **D.** $\overrightarrow{CA}=\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}.$

Lời giải

Chọn B



Gọi D, E và F theo thứ tự là trung điểm của AB, AC và BC.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=-\vec{a}-\vec{b}.$$

Ta có: $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{a}=2\vec{a}+\vec{b}..$

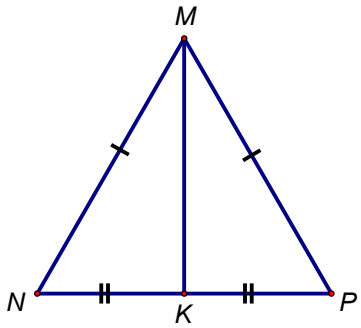
Câu 24: Cho ΔMNP đều cạnh bằng $5\sqrt{3}\ cm.$ Tìm độ dài vectơ tổng $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}.$

A. $\left|\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}\right|=\frac{15}{2}\ cm.$ **B.** $\left|\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}\right|=30\ cm.$

C. $\left|\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}\right|=10\sqrt{3}\ cm.$ **D.** $\left|\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}\right|=15\ cm.$

Lời giải

Chọn D



Gọi K là trung điểm của NP.

Khi đó: $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=2\overrightarrow{MK}$. Do đó, $\left|\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}\right|=2\left|\overrightarrow{MK}\right|=2MK$.

Vì ΔMNP đều nên MK cũng là đường cao. Do đó, $MK=5\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15}{2}(cm)$.

Từ đó, $\left|\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}\right|=2MK=15(cm)$.

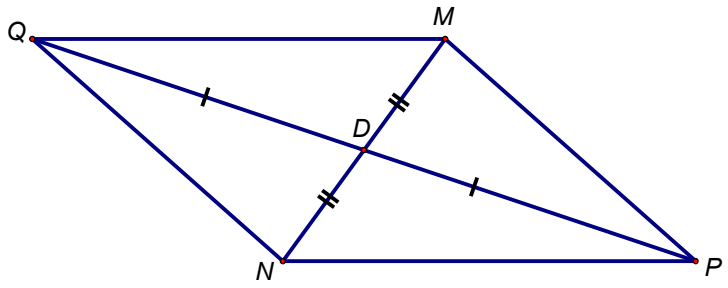
Câu 25: Cho ΔMNP. Tìm điểm Q thỏa mãn $\overrightarrow{QP}-\overrightarrow{QN}-\overrightarrow{QM}=\vec{0}$.

A. Q là một đỉnh của hình bình hành $MPNQ$. **B.** Q là một đỉnh của hình bình hành $MNPQ$.

C. Q là một đỉnh của hình bình hành $MPQN$. **D.** Q là một đỉnh của hình bình hành $MNQP$.

Lời giải

Chọn A



Gọi D là trung điểm của MN.

Ta có: $\overrightarrow{QP}-\overrightarrow{QN}-\overrightarrow{QM}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QN}+\overrightarrow{QM}\Leftrightarrow\overrightarrow{QP}=2\overrightarrow{QD}$ (vì D là trung điểm của MN).

Do đó, Q đối xứng với P qua D. Vậy Q là một đỉnh của hình bình hành $MPNQ$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Cho tam giác ABC đều cạnh a và G là trọng tâm. Gọi I là trung điểm của AG.

Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BI}$.

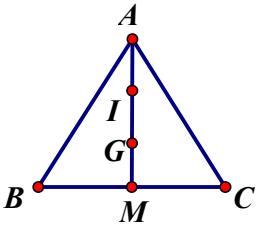
Hướng dẫn giải

(Hình 1.41)Ta có $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = a$

Gọi M là trung điểm của BC

Ta có $\left|\overrightarrow{AG}\right| = AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}\sqrt{AB^2 - BM^2} = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\left|\overrightarrow{BI}\right| = BI = \sqrt{BM^2 + MI^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$



Hình 1.41

Bài 2: Cho tam giác ABC đều cạnh a. Tính độ dài của các vectơ sau $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

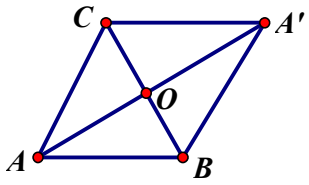
Hướng dẫn giải

(Hình 1.45)Theo quy tắc trừ ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = BC = a$

Gọi A' là đỉnh của hình bình hành $ABA'C$ và O là tâm hình nình hành đó. Khi đó ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'}$.

Ta có $AO = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = AA' = 2AO = a\sqrt{3}$



Hình 1.45

Bài 4: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O và cạnh a. M là một điểm bất kỳ.

a) Tính $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}\right|, \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right|$

b) Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

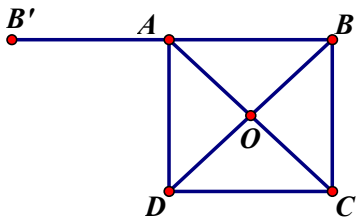
Hướng dẫn giải

(Hình 1.46)

a) Ta có $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO}$

$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}\right| = AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Ta có $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO}$ suy ra



Hình 1.46

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right| = 0$

b) Áp dụng quy tắc trừ ta có

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)-\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right)=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}$

Lấy B' là điểm đối xứng của B qua A

Khi đó $-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB'}\Rightarrow\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{BB'}$

Suy ra $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|\overrightarrow{BB'}\right|=BB'=2a$

Bài 5: Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BCD}=60^0$. Gọi O là tâm hình thoi.

Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|,\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{DC}\right|$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|=2a\cos 30^0=a\sqrt{3},$

$\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{DC}\right|=\left|\overrightarrow{CO}\right|=a\cos 60^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Bài 6: Cho tam giác ABC .Lấy các điểm M,N,P sao cho $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0},\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$

a) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AM}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

b) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MN}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

Có nhận xét gì về ba điểm M, N, P thẳng hàng?

Hướng dẫn giải

a) $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AM}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MP}=2\overrightarrow{MN}\Rightarrow$ M, N, P thẳng hàng

Bài 7: Cho tam giác ABC.Gọi I, J là hai điểm xác định bởi $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB},3\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

a)Tính $\overrightarrow{IJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b)Đường thẳng IJ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC

Hướng dẫn giải

a) $\overrightarrow{IJ}=-2\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{IG}=-\dfrac{5}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\Rightarrow 5\overrightarrow{IJ}=6\overrightarrow{IG}$ suy ra IJ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.

Bài 8. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI=3BI$ và J là điểm trên BC kéo dài sao cho $5JB=2JC$.

a) Hãy phân tích $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Hãy phân tích $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $2\overrightarrow{IC}=-3\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}.$

$5\overrightarrow{JB}=2\overrightarrow{JC}\Leftrightarrow5(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AJ})=2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AJ})\Leftrightarrow\overrightarrow{AJ}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

b) Gọi M là trung điểm BC, ta có:

$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$

$\Rightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{35}{48}\overrightarrow{AI}-\frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}.$

Bài 9. Cho các vecto $\vec{a}=(2;0),\vec{b}=\left(-1;\frac{1}{2}\right),\vec{c}=(4;6).$

Tìm tọa độ vecto $\vec{u}$ biết

a) $\vec{u}=2\vec{a}-4\vec{b}+5\vec{c}$

b) $\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{u}=\vec{c}$

Hướng dẫn giải

ĐS: a) $\vec{u}=(28;-28)$ b) $\vec{u}=(0;\frac{7}{2})$

Bài 10. Cho ba điểm $A(-4;0),B(-5;0)$ và $C(3;-3)$

a) Tìm tọa độ vecto $\vec{u}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CA}$

b) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Hướng dẫn giải

ĐS: a) $\vec{u}(-38;3)$ b) $M(-2;-1)$

Bài 11: Cho ba điểm $A(3;4),\ B(2;1),\ C(-1;-2)$

a) Tìm tọa độ trung điểm cạnh BC và tọa độ trọng tâm của tam giác ABC

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành

Hướng dẫn giải

a) Trung điểm BC là $I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{4}{3};1\right)$

b) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}\Rightarrow D(0;1)$

Bài 12: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(3;4),B(-1;2),I(4;1)$. Xác định tọa độ các điểm C, D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành và I là trung điểm cạnh CD. Tìm tọa tâm O của hình bình hành $ABCD$.

Hướng dẫn giải

Do $I(4;-1)$ là trung điểm của CD nên đặt $C(4-x;-1-y)$, $D(4+x;-1+y) \Rightarrow \overrightarrow{CD}(2x;2y)$

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy $C(2;-2)$, $D(6;0)$, $O\left(\frac{9}{2};2\right)$

Bài 13. Cho tam giác ABC có $A(3;1)$, $B(1;-3)$, đỉnh C nằm trên Oy và trọng tâm G nằm trên trục Ox. Tìm tọa độ đỉnh C

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có $C(0;y)$, $G(x;0)$

G là trọng tâm tam giác nên $\begin{cases} x_A+x_B+x_C=3x_G \\ y_A+y_B+y_C=3y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=2 \end{cases}$

Vậy $C(0;2)$

Bài 14: Cho tam giác ABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Biết $M(1;1), N(-2;-3), P(2;-1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{MN}(-3;-4)$, $\overrightarrow{PA}(x_A-2;y_A+1)$, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{PA} \Rightarrow A(-1;-5)$

N là trung điểm AC suy ra $C(-3;-1)$

M là trung điểm BC suy ra $B(5;3)$



CHƯƠNG V
CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM

"Thống kê là cơ sở của khoa học".
Karl Pearson (nhà thống kê người Anh, 1857 – 1936)

Bài 12 SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

THUẬT NGỮ
- Số gần đúng
- Sai số tuyệt đối
- Độ chính xác
- Sai số tương đối
- Số quy tròn

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Hiểu khái niệm số gần đúng, sai số tuyệt đối.
- Xác định số gần đúng của một số với độ chính xác cho trước.
- Xác định sai số tương đối của số gần đúng.
- Xác định số quy tròn của số gần đúng với độ chính xác cho trước.
- Biết sử dụng máy tính cầm tay để tính toán với các số gần đúng.

Đỉnh Everest được mệnh danh là "nóc nhà của thế giới", bởi đây là đỉnh núi cao nhất trên Trái Đất so với mực nước biển. Có rất nhiều con số khác nhau đã từng được công bố về chiều cao của đỉnh Everest:

8 848 m; 8 848,13 m; 8 844,43 m; 8 850 m;...

Vì sao lại có nhiều kết quả khác nhau như vậy và đâu là con số chính xác? Chúng ta sẽ cùng tìm câu trả lời trong bài học này, sau khi tìm hiểu về số gần đúng và sai số.



Đỉnh Everest

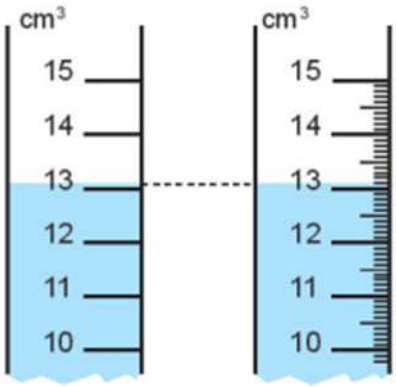
1. SỐ GẦN ĐÚNG

HĐ1. Ngày 8-12-2020, Trung Quốc và Nepal ra thông cáo chung khẳng định chiều cao mới đo được của đỉnh núi cao nhất thế giới Everest là 8 848,86 m.

(Theo *Tuoitre.vn*)

Trong các số được đưa ra ở tình huống mở đầu, số nào gần nhất với số được công bố ở trên?

HĐ2. Trang và Hoà thực hiện đo thể tích một cốc nước bằng hai ống đong có vạch chia được kết quả như Hình 5.1. Hãy cho biết số đo thể tích trên mỗi ống.



Hình 5.1

Trong nhiều trường hợp, ta không biết hoặc khó biết số đúng (kí hiệu là $\bar{a}$) mà chỉ tìm được giá trị khác xấp xỉ nó. Giá trị này được gọi là số gần đúng, kí hiệu là a.

Chẳng hạn, các số đo khác nhau về chiều cao của đỉnh Everest trong tình huống mở đầu đều là các số gần đúng.

Hãy lấy một ví dụ khác về số gần đúng.

Ví dụ 1. Gọi d là độ dài đường chéo của hình vuông cạnh bằng 1. Trong hai số $\sqrt{2}$ và 1,41, số nào là số đúng, số nào là số gần đúng của d?

Giải

Hình vuông có cạnh bằng 1 có độ dài của đường chéo là $d = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$. Vậy $\sqrt{2}$ là số đúng; 1,41 là số gần đúng của d.

Luyện tập 1. Gọi P là chu vi của đường tròn bán kính 1 cm. Hãy tìm một giá trị gần đúng của P.

Chú ý. Ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để tìm giá trị gần đúng của các biểu thức chứa các số vô tỉ như $\pi, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \ldots$ Chẳng hạn, dùng máy tính cầm tay để tính $2^9 \cdot \sqrt{3}$, bấm các phím như sau:



2. SAI SỐ TUYỆT ĐỐI VÀ SAI SỐ TƯƠNG ĐỐI

a. Sai số tuyệt đối

HĐ3. Trong HĐ2, Hoà dùng kính lúp để quan sát mực nước trên ống đo thứ hai được hình ảnh như Hình 5.2. Kí hiệu $\bar{a}$ (cm³) là số đo thể tích của nước.



Hình 5.2

Quan sát hình vẽ để so sánh $|13 - \bar{a}|$ và $|13,1 - \bar{a}|$ rồi cho biết trong hai số đo thể tích 13 cm³ và 13,1 cm³, số đo nào gần với thể tích của cốc nước hơn.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Giá trị $|a - \bar{a}|$ phản ánh mức độ sai lệch giữa số đúng $\bar{a}$ và số gần đúng a, được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng a, kí hiệu là Δ_a, tức là:

$$\Delta_a = |a - \bar{a}|.$$

Chú ý

- Trên thực tế, nhiều khi ta không biết $\bar{a}$ nên cũng không biết Δ_a. Tuy nhiên, ta có thể đánh giá được Δ_a không vượt quá một số dương d nào đó.

  Chẳng hạn, trong HĐ3, ta thấy $|13,1 - \bar{a}| < |13,1 - 13| = 0,1$ (cm³).

  Vậy với $a = 13,1$ (cm³), sai số tuyệt đối của a không vượt quá 0,1 cm³.

- Nếu $\Delta_a \le d$ thì $a - d \le \bar{a} \le a + d$, khi đó ta viết $\bar{a} = a \pm d$ và hiểu là số đúng $\bar{a}$ nằm trong đoạn $[a - d; a + d]$. Do d càng nhỏ thì a càng gần $\bar{a}$ nên d được gọi là độ chính xác của số gần đúng.

Ví dụ 2. Một công ty sử dụng dây chuyền A để đóng gạo vào bao với khối lượng mong muốn là 5 kg. Trên bao bì ghi thông tin khối lượng là $5 \pm 0,2$ kg. Gọi $\bar{a}$ là khối lượng thực của một bao gạo do dây chuyền A đóng gói.



a) Xác định số đúng, số gần đúng và độ chính xác.

b) Giá trị của $\bar{a}$ nằm trong đoạn nào?

Giải

a) Khối lượng thực của bao gạo $\bar{a}$ là số đúng. Tuy không biết $\bar{a}$ nhưng ta xem khối lượng bao gạo là 5 kg nên 5 là số gần đúng cho $\bar{a}$. Độ chính xác là $d = 0,2$ (kg).

b) Giá trị của $\bar{a}$ nằm trong đoạn $[5 - 0,2; 5 + 0,2]$ hay $[4,8; 5,2]$.

Luyện tập 2. Một phép đo đường kính nhân tế bào cho kết quả là $5 \pm 0,3$ µm. Đường kính thực của nhân tế bào thuộc đoạn nào?

Chú ý. Trong các phép đo, độ chính xác d của số gần đúng bằng một nửa đơn vị của thước đo. Chẳng hạn, một thước đo có chia vạch đến xentimét thì mọi giá trị đo nằm giữa 6,5 cm và 7,5 cm đều được coi là 7 cm. Vì vậy, thước đo có thang đo càng nhỏ thì cho giá trị đo càng chính xác.

b. Sai số tương đối

HĐ4. Công ty (trong Ví dụ 2) cũng sử dụng dây chuyền B để đóng gạo với khối lượng chính xác là 20 kg. Trên bao bì ghi thông tin khối lượng là $20 \pm 0,5$ kg.

Khẳng định "Dây chuyền A tốt hơn dây chuyền B" là đúng hay sai?

Mặc dù độ chính xác của khối lượng bao gạo đóng bằng dây chuyền A nhỏ hơn nhưng do bao gạo đóng bằng dây chuyền B nặng hơn nhiều nên ta không dựa vào sai số tuyệt đối mà dựa vào sai số tương đối để so sánh.

Sai số tương đối của số gần đúng a, kí hiệu là δ_a, là tỉ số giữa sai số tuyệt đối và $|a|$, tức là $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$.

Nhận xét. Nếu $\overline{a} = a \pm d$ thì $\Delta_a \le d$, do đó $\delta_a \le \frac{d}{|a|}$. Nếu $\frac{d}{|a|}$ càng nhỏ thì chất lượng của phép đo hay tính toán càng cao. Người ta thường viết sai số tương đối dưới dạng phần trăm.

Ví dụ 3. Trong một cuộc điều tra dân số, người ta viết dân số của một tỉnh là:

3 574 625 người ± 50 000 người.

Hãy đánh giá sai số tương đối của số gần đúng này.

Giải

Ta có a = 3 574 625 người và d = 50 000 người, do đó sai số tương đối là:

$$\delta_a \le \frac{d}{|a|} = \frac{50\,000}{3\,574\,625} \approx 1{,}4\%.$$

Luyện tập 3. Đánh giá sai số tương đối của khối lượng bao gạo được đóng gói theo hai dây chuyền A, B ở Ví dụ 2 và HĐ4. Dựa trên tiêu chí này, dây chuyền nào tốt hơn?

3. QUY TRÒN SỐ GẦN ĐÚNG

Trong thực tế đo đạc và tính toán, nhiều khi ta chỉ cần biết giá trị gần đúng của một đại lượng với độ chính xác nào đó (kể cả khi biết được giá trị đúng của nó). Khi đó, để cho gọn, các số thường được làm tròn (còn gọi là quy tròn).

Số thu được sau khi thực hiện làm tròn số được gọi là số quy tròn. Số quy tròn là một số gần đúng của số ban đầu.

- Đối với chữ số hàng làm tròn:
  - Giữ nguyên nếu chữ số ngay bên phải nó nhỏ hơn 5;
  - Tăng 1 đơn vị nếu chữ số ngay bên phải nó lớn hơn hoặc bằng 5.
- Đối với chữ số sau hàng làm tròn:
  - Bỏ đi nếu ở phần thập phân;
  - Thay bởi các chữ số 0 nếu ở phần số nguyên.

Ví dụ 4

a) Làm tròn số 2 395,3 đến hàng chục, số 18,693 đến hàng phần trăm và số đúng $d \in [5{,}5; 6{,}5)$ đến hàng đơn vị. Đánh giá sai số tuyệt đối của phép làm tròn số đúng d.

b) Cho số gần đúng a = 2,53 với độ chính xác d = 0,01. Số đúng $\overline{a}$ thuộc đoạn nào? Nếu làm tròn số a thì nên làm tròn đến hàng nào? Vì sao?

Giải

a) Số quy tròn của số 2 395,3 đến hàng chục là 2 360; số quy tròn của số 18,693 đến hàng phần trăm là 18,69. Mọi số đúng $d \in [5{,}5; 6{,}5)$ khi làm tròn đến hàng đơn vị đều thu được số quy tròn là 6 và sai số tuyệt đối $|d - 6| \le 0{,}5$.

b) Số đúng $\overline{a}$ thuộc đoạn [2,53 0,01; 2,53 + 0,01] hay [2,52; 2,54]. Khi làm tròn số gần đúng a ta nên làm tròn đến hàng phần chục do chữ số hàng phần trăm của a là chữ số không chắc chắn đúng.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Nhận xét

- Khi thay số đúng bởi số quy tròn đến một hàng nào đó thì sai số tuyệt đối của số quy tròn không vượt quá nửa đơn vị của hàng làm tròn.
- Cho số gần đúng a với độ chính xác d. Khi được yêu cầu làm tròn số a mà không nói rõ làm tròn đến hàng nào thì ta làm tròn số a đến hàng thấp nhất mà d nhỏ hơn 1 đơn vị của hàng đó.

Ví dụ 5. Cho số gần đúng $a = 581\,268$ với độ chính xác $d = 200$. Hãy viết số quy tròn của số a.

Giải

Vì độ chính xác đến hàng trăm ($d = 200$) nên ta làm tròn a đến hàng nghìn theo quy tắc làm tròn ở trên. Số quy tròn của a là 581 000.

Luyện tập 4. Hãy viết số quy tròn của số gần đúng trong những trường hợp sau:

a) $11\,251\,900 \pm 300$; b) $18,2857 \pm 0,01$.

Vận dụng. Các nhà vật lí sử dụng hai phương pháp khác nhau để đo tuổi của vũ trụ (đơn vị tỉ năm) lần lượt cho hai kết quả là: $13,807 \pm 0,026$ và $13,799 \pm 0,021$.

Hãy đánh giá sai số tương đối của mỗi phương pháp. Căn cứ trên tiêu chí này, phương pháp nào cho kết quả chính xác hơn?



PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Biết số gần đúng a, và độ chính xác d. Ước lượng sai số tương đối

1. Phương pháp

Ước lượng sai số tương đối: $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|} \le \dfrac{d}{|a|}$

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Biết số gần đúng là 65894256 có độ chính xác $d = 140$. Ước lượng sai số tương đối của số đó.

Hướng dẫn

Ước lượng sai số tương đối: $\delta_a \le \dfrac{d}{|a|} = \dfrac{140}{65894256} = 0,0000021$, tức không vượt quá $0,0000021$

Ví dụ 2: Độ dài của cái cầu bến thủy hai (Nghệ An) người ta đo được là $996m \pm 0,5m$. Sai số tương đối tối đa trong phép đo là bao nhiêu.

Lời giải

Ta có độ dài gần đúng của cầu là $a = 996$ với độ chính xác $\mathrm{d} = 0,5$

Vì sai số tuyệt đối $\Delta_a \le d = 0,5$ nên sai số tương đối $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|} \le \dfrac{d}{|a|} = \dfrac{0,5}{996} \approx 0,05\%$

Vậy sai số tương đối tối đa trong phép đo trên là $0,05\%$.

Dạng 2. Biết số gần đúng a và sai số tương đối không vượt quá c. Ước lượng sai số tuyệt đối, các chữ số chắc, viết dưới dạng chuẩn.

1. Phương pháp: Ước lượng sai số tuyệt đối $\Delta_a = |a|.\delta_a \le |a|.c$

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Biết số gần đúng $327,5864$ có sai số tương đối không vượt quá $\frac{1}{10000}$. Ước lượng sai số tuyệt đối của số đó

Hướng dẫn

Ước lượng sai số tuyệt đối : $\Delta_{a'} = |a'|.\delta_a \le 327,5864.\frac{1}{10000} = 0,032$

Ví dụ 2: Hãy xác định sai số tuyệt đối của các số gần đúng a, b biết sai số tương đối của chúng.

a) $a = 123456,\ \delta_a = 0,2\%$ b) $a = 1,24358,\ \delta_a = 0,5\%$

Lời giải

Ta có $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \Leftrightarrow \Delta_a = |a|\delta_a$

a) Với $a = 123456,\ \delta_a = 0,2\%$ ta có sai số tuyệt đối là

$\Delta_a = 123456.0,2\% = 146,912$

b) Với $a = 1,24358,\ \delta_a = 0,5\%$ ta có sai số tuyệt đối là

$\Delta_a = 1,24358.0,5\% = 0,0062179$.

Ví dụ 3: a) Hãy viết giá trị gần đúng của $\sqrt{8}$ chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn biết $\sqrt{8} = 2,8284\ldots$. Ước lượng sai số tuyệt đối trong mỗi trường hợp.

b) Hãy viết giá trị gần đúng của $\sqrt[3]{2015^4}$ chính xác đến hàng chục và hàng trăm biết $\sqrt[3]{2015^4} = 25450,71\ldots$. Ước lượng sai số tuyệt đối trong mỗi trường hợp.

Lời giải

a) Ta có $\sqrt{8} = 2,8284\ldots$ do đó giá trị gần đúng của $\sqrt{8}$ đến hàng phần trăm là $2,83$

Ta có $\left|\sqrt{8} - 2,83\right| = 2,83 - \sqrt{8} \le 2,83 - 2,8284 = 0,0016$

Suy ra sai số tuyệt đối của số gần đúng $2,83$ không vượt quá $0,0016$.

Giá trị gần đúng của $\sqrt{8}$ đến hàng phần nghìn là $2,828$

Ta có $\left|\sqrt{8} - 2,828\right| = \sqrt{8} - 2,828 \le 2,8284 - 2,828 = 0,0004$

Suy ra sai số tuyệt đối của số gần đúng $2,828$ không vượt quá $0,0004$.

b) Sử dụng máy tính bỏ túi ta có $\sqrt[3]{2015^4} = 25450,71966\ldots$

Do đó giá trị gần đúng của $\sqrt[3]{2015^4}$ đến hàng chục là 25450

Ta có $\left|\sqrt[3]{2015^4}-25450\right|=\sqrt[3]{2015^4}-25450\le 25450,72-25450=0,72$

Suy ra sai số tuyệt đối của số gần đúng 25450 không vượt quá $0,72$.

Giá trị gần đúng của $\sqrt[3]{2015^4}$ đến hàng trăm là 25500.

Ta có $\left|\sqrt[3]{2015^4}-25500\right|=25500-\sqrt[3]{2015^4}\le 25500-25450,71=49,29$

Suy ra sai số tuyệt đối của số gần đúng 25500 không vượt quá $49,29$.

Dạng 3. Quy tròn số. Ước lượng sai số tuyệt đối, sai số tương đối của số quy tròn

1. Phương pháp:

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Biết số $\sqrt{2}=1,414213562...$

a) Quy tròn số $\sqrt{2}$ đến hàng phần trăm

b) Ước lượng sai số tuyệt đối và sai số tương đối mắc phải khi chọn số quy tròn $\sqrt{2}$ đến hàng phần trăm

Hướng dẫn

a) Quy tròn số $\sqrt{2}$ đến hàng phần trăm là 1,41

b) $1,41<\sqrt{2}<1,42\Rightarrow\left|\sqrt{2}-1,41\right|<1,42-1,41=0,01$. Vậy sai số tuyệt đối không vượt quá $\dfrac{0,01}{1,41}=0,007$

Ví dụ 2: Làm tròn các số sau với độ chính xác cho trước.

a) $a=2,235$ với độ chính xác $d=0,002$

b) $a=23748023$ với độ chính xác $d=101$

Lời giải

a) Ta có $0,001<0,002<0,01$ nên hàng cao nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó là hàng phần trăm

Do đó ta phải quy tròn số $a=2,235$ đến hàng phần trăm suy ra $\bar{a}\approx 2,24$.

b) Ta có $100<101<1000$ nên hàng cao nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó là hàng nghìn

Do đó ta phải quy tròn số $a=23748023$ đến hàng nghìn suy ra $\bar{a}\approx 23748000$.

Dạng 4. Sai số của tổng, tích và thương

1. Phương pháp

- Nếu a và b là các số gần đúng với sai số tuyệt đối Δ_a và Δ_b, và $c=a+b;\ d=a-b$. Thế thì $\Delta_c=\Delta_a+\Delta_b;\quad \Delta_d=\Delta_a+\Delta_b$
- Nếu sai số $\delta_a,\delta_b,\delta_c$ lần lượt là sai số tuyệt đối của số gần đúng a,b,c và $P=a.b;\ Q=a.b.c;\ R=\dfrac{a}{b}$. Thế thì $\delta_P=\delta_a+\delta_b;\quad \delta_Q=\delta_a+\delta_b+\delta_c;\quad \delta_R=\delta_a+\delta_b$

Suy ra: $\Delta_P=|a|.\Delta_a+|b|.\Delta_b;\quad \Delta_Q=|b.c|.\Delta_a+|a.c|.\Delta_b+|a,b|.\Delta_c;\quad \Delta_R=\dfrac{\Delta_a}{|b|}+\dfrac{\Delta_b}{|a|}$

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Tính chu vi và diện tích hình chữ nhật có cạnh $a=5,356m\pm0,01m$, chiều dài là $b=15,854m\pm0,015m$. Ước lượng sai số tuyệt đối mắc phải.

Hướng dẫn

Chu vi: $L=2\left(a+b\right)$, sai số tuyệt đối không vượt quá $\Delta_L=2\left(\Delta_a+\Delta_b\right)\le 2.\left(0,01+0,015\right)=0,05(m)$ và ta viết là $L=2.5,356+2.15,854\pm0,05=42,42\pm0,05(m)$

Diện tích: $S=ab$, sai số tuyệt đối không vượt quá $\Delta_S=b.\Delta_a+a.\Delta_b\le 15,854.0,01+5,356.0,015=0,239(m^2)$ và ta viết là $S=15,854\text{ x }5,356\pm0,239=84,914\pm0,239\,(m^2)$

Ví dụ 2. Một ống nước có đường kính $d=2\pm0,05cm$, chiều dài $h=3000\pm5cm.$ Tính thể tích khối nước chứa trong ống và ước lượng sai số tuyệt đối mắc phải $\left(\pi=3,14\pm0,0016\right)$.

Hướng dẫn

Thể tích $V=\pi R^2h=3,14\text{ x }1^2\text{ x }3000\pm\text{d}_v=9420\pm\text{d}_v\,(cm^3)$

$R=\dfrac{d}{2}$ nên $\Delta_R=\dfrac{\Delta_d}{2}\le 0,025(cm);\ \Delta_{R^2}=2R.\Delta_R\le 2.0,025=0,05(cm^2)$

$\Delta_V=R^2.h.\Delta_\pi+\pi.h.\Delta_{R^2}+\pi.R^2.\Delta_h\le 1\text{x}3000\text{x}0,0016+3,14\text{ x }3000\text{ x }0,05+3,14\text{ x }1\text{ x}5=492\ (\text{cm}^3)$

Sai số tuyệt đối không vượt quá 429 và ta viết $V=9420\pm492\,(cm^3)=9420\pm0,492\,(lit)$

Ví dụ 3: Một cái ruộng hình chữ nhật có chiều dài là $x=23m\pm0,01m$ và chiều rộng là $y=15m\pm0,01m$. Chứng minh rằng

a) Chu vi của ruộng là $P=76m\pm0,04m$

b) Diện tích của ruộng là $S=345m\pm0,3801m$

Lời giải

a) Giả sử $x=23+a,\ y=15+b$ với $-0,01\le a,\ b\le 0,01$

Ta có chu vi ruộng là $P=2\left(x+y\right)=2\left(38+a+b\right)=76+2\left(a+b\right)$

Vì $-0,01\le a,\ b\le 0,01$ nên $-0,04\le 2\left(a+b\right)\le 0,04$

Do đó $\left|P-76\right|=\left|2\left(a+b\right)\right|\le 0,04$

Vậy $P=76m\pm0,04m$

b) Diện tích ruộng là $S=x.y=\left(23+a\right)\left(15+b\right)=345+23b+15a+ab$

Vì $-0,01\le a,\ b\le 0,01$ nên $\left|23b+15a+ab\right|\le 23.0,01+15.0,01+0,01.0,01$

hay $\left|23b+15a+ab\right|\le 0,3801$ suy ra $\left|S-345\right|\le 0,3801$

Vậy $S=345m\pm0,3801m$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Câu 1. Cho số gần đúng $a=23748023$ với độ chính xác d=101. Hãy viết số quy tròn của số $^{a.}$

A. 23749000. **B.** 23748000. **C.** 23746000. **D.** 23747000.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Độ chính xác $d=101$ (hàng trăm), nên ta làm tròn số $a=23748023$ đến hàng nghìn, được kết quả là $a=23748000$.

Câu 2. Cho giá trị gần đúng của π là $a=3,141592653589$ với độ chính xác 10^{-10}. Hãy viết số quy tròn của số a.

A. $a=3,141592654$. **B.** $a=3,1415926536$.

C. $a=3,141592653$. **D.** $a=3,1415926535$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Độ chính xác $d=10^{-10}\longrightarrow$ làm tròn số $a=3,141592653589$ chính xác đến hàng của $d.10=10^{-9}$ (9 chữ số thập phân), kết quả là $a=3,141592654000$.

Câu 3. Sử dụng máy tính bỏ túi, hãy viết giá trị gần đúng của $\sqrt{3}$ chính xác đến hàng phần nghìn.

A. 1,7320. **B.** 1,732. **C.** 1,733. **D.** 1,731.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$\sqrt{3}\xrightarrow{MTCT}\sqrt{3}=1,7320508076...\longrightarrow$ làm tròn đến hàng phần nghìn ta được kết quả: $1,732$.

Câu 4. Sử dụng máy tính bỏ túi, hãy viết giá trị gần đúng của π^2 chính xác đến hàng phần nghìn.

A. 9,873. **B.** 9,870. **C.** 9,872. **D.** 9,871.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$\pi^2\xrightarrow{MTCT}\pi^2=9,8696044011...\longrightarrow$ làm tròn đến hàng phần nghìn ta được kết quả: $9,870$.

Câu 5. Hãy viết số quy tròn của số gần đúng $a=17658$ biết $\overline{a}=17658\pm16$.

A. 17700. **B.** 17800. **C.** 17500. **D.** 17600.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$\overline{a}=17658\pm16\longrightarrow d=16$ (hàng chục) $\longrightarrow$ làm tròn số $a=17658$ đến hàng trăm, kết quả là: 17700.

Câu 6. Hãy viết số quy tròn của số gần đúng $a=15,318$ biết $\overline{a}=15,318\pm0,056$.

A. 15,3. **B.** 15,31. **C.** 15,32. **D.** 15,4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$\overline{a}=15,318\pm0,056\longrightarrow d=0,056\longrightarrow$ làm tròn số $a=15,318$ chính xác đến hàng của $d.10=0,56$ (hàng phần trăm), kết quả là: $15,32$.

Câu 7. Đo độ cao một ngọn cây là $h=347,13\text{m}\pm0,2\text{m}$. Hãy viết số quy tròn của số gần đúng 347,13.

A. 345. **B.** 347. **C.** 348. **D.** 346.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$h=347,13\text{m}\pm 0,2\text{m}\longrightarrow d=0,2\longrightarrow$ làm tròn số $h=347,13$ đến hàng $d.10=2$ (hàng đơn vị), kết quả là 347.

Câu 8. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh: $a=12\,\text{cm}\pm 0,2\,\text{cm}$; $b=10,2\,\text{cm}\pm 0,2\,\text{cm}$; $c=8\,\text{cm}\pm 0,1\,\text{cm}$. Tính chu vi P của tam giác đã cho.

A. $P=30,2\text{ cm}\pm 0,2\text{ cm}$.
B. $P=30,2\text{ cm}\pm 1\text{ cm}$.
C. $P=30,2\text{ cm}\pm 0,5\text{ cm}$.
D. $P=30,2\text{ cm}\pm 2\text{ cm}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Chu vi tam giác là: $P=a+b+c=(12+10,2+8)\pm(0,2+0,2+0,1)=30,2\pm 0,5$.

Câu 9. Một miếng đất hình chữ nhật có chiều rộng $x=43\text{m}\pm 0,5\text{m}$ và chiều dài $y=63\text{m}\pm 0,5\text{m}$. Tính chu vi P của miếng đất đã cho.

A. $P=212\text{m}\pm 4\text{m}$.
B. $P=212\text{m}\pm 2\text{m}$.
C. $P=212\text{m}\pm 0,5\text{m}$.
D. $P=212\text{m}\pm 1\text{m}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Chu vi của miếng đất là

$$P=2[x+y]=2.[(43\pm 0,5)+(63\pm 0,5)]=2.[(43+63)\pm(0,5+0,5)]=212\pm 2.$$

Câu 10. Một thửa ruộng hình chữ nhật có chiều dài là $x=23\text{m}\pm 0,01\text{m}$ và chiều rộng là $y=15\text{m}\pm 0,01\text{m}$. Tính diện tích S của thửa ruộng đã cho.

A. $S=345\text{m}\pm 0,001\text{m}$.
B. $S=345\text{m}\pm 0,38\text{m}$.
C. $S=345\text{m}\pm 0,01\text{m}$.
D. $S=345\text{m}\pm 0,3801\text{m}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Diện tích của thửa ruộng là

$$S=xy=(23\pm 0,01).(15\pm 0,01)=23.15\pm(23.0,01+15.0,01+0,01^2)=345\pm 0,3801.$$

Bài 13 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM

THUẬT NGỮ
- Số trung bình
- Trung vị
- Tứ phân vị
- Mốt

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Lựa chọn và tính các số đặc trưng đo xu thế trung tâm của một mẫu số liệu: số trung bình, trung vị, tứ phân vị, mốt.
- Giải thích ý nghĩa, vai trò của các số đặc trưng trong mẫu số liệu thực tiễn.
- Rút ra kết luận từ ý nghĩa của các số đặc trưng đo xu thế trung tâm.

Hai phương pháp học tiếng Anh khác nhau được áp dụng cho hai lớp A và B có trình độ tiếng Anh tương đương nhau. Sau hai tháng, điểm khảo sát tiếng Anh (thang điểm 10) của hai lớp được cho như hình bên.

2	7	6	3	9
8	6	7	9	2
5	7	5	9	8
8	7	4	3	5
5	4	5	7	7

Lớp A

6	7	6	4	7
9	3	8	7	5
5	6	8	7	4
5	3	10	7	9
6	7	6	7	5

Lớp B

Quan sát hai mẫu số liệu trên, có thể đánh giá được phương pháp học tập nào hiệu quả hơn không?

Để làm được điều đó, người ta thường tính toán các số đặc trưng cho mỗi mẫu số liệu rồi so sánh.

Bài học này sẽ giới thiệu về các số đặc trưng đo xu thế trung tâm, tức là các số cho ta biết thông tin về vị trí trung tâm của mẫu số liệu và được dùng làm đại diện cho mẫu số liệu.

1. SỐ TRUNG BÌNH VÀ TRUNG VỊ

a. Số trung bình

Từ mẫu số liệu về điểm số của hai lớp A, B trên, em hãy:

HĐ1. Tính trung bình cộng điểm khảo sát tiếng Anh của mỗi lớp A và B.

HĐ2. Dựa trên điểm trung bình, hãy cho biết phương pháp học tập nào hiệu quả hơn.

Số trung bình (số trung bình cộng) của mẫu số liệu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kí hiệu là $\overline{x}$, được tính bằng công thức:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Chú ý. Trong trường hợp mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số thì số trung bình được tính theo công thức:

$$\overline{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_kx_k}{n},$$

trong đó m_k là tần số của giá trị x_k và $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$.

Ví dụ 1. Thống kê số cuốn sách mỗi bạn trong lớp đã đọc trong năm 2021, An thu được kết quả như bảng bên. Hỏi trong năm 2021, trung bình mỗi bạn trong lớp đọc bao nhiêu cuốn sách?

Số cuốn sách	1	2	3	4	5
Số bạn	3	5	15	10	7

Giải

Số bạn trong lớp là $n = 3 + 5 + 15 + 10 + 7 = 40$ (bạn).

Trong năm 2021, trung bình mỗi bạn trong lớp đọc số cuốn sách là:

$$\frac{3\cdot1 + 5\cdot2 + 15\cdot3 + 10\cdot4 + 7\cdot5}{40} = 3{,}325 \text{ (cuốn)}.$$

Ý nghĩa. Số trung bình là giá trị trung bình cộng của các số trong mẫu số liệu, nó cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu và có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu.

Luyện tập 1. Bảng sau cho biết thời gian chạy cự li 100 m của các bạn trong lớp (đơn vị giây):

Thời gian	12	13	14	15	16
Số bạn	5	7	10	8	6

Hãy tính thời gian chạy trung bình cự li 100 m của các bạn trong lớp.

b. Trung vị

HĐ3. Một công ty nhỏ gồm 1 giám đốc và 5 nhân viên, thu nhập mỗi tháng của giám đốc là 20 triệu đồng, của nhân viên là 4 triệu đồng.

a) Tính thu nhập trung bình của các thành viên trong công ty.

b) Thu nhập trung bình có phản ánh đúng thu nhập của nhân viên công ty không?

Trong trường hợp mẫu số liệu có giá trị bất thường (rất lớn hoặc rất bé so với đa số các giá trị khác), người ta không dùng số trung bình để đo xu thế trung tâm mà dùng trung vị.

Để tìm trung vị của một mẫu số liệu, ta thực hiện như sau:

- Sắp xếp các giá trị trong mẫu số liệu theo thứ tự không giảm.
- Nếu số giá trị của mẫu số liệu là số lẻ thì giá trị chính giữa của mẫu là trung vị. Nếu là số chẵn thì trung vị là trung bình cộng của hai giá trị chính giữa của mẫu.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Ví dụ 2. Hãy tìm trung vị cho mẫu số liệu về lương của giám đốc và nhân viên công ty được cho trong HĐ3.

Giải

Để tìm trung vị của mẫu số liệu trên, ta làm như sau:

- Sắp xếp số liệu theo thứ tự không giảm:

4 4 4 4 4 20.

Hai giá trị chính giữa

- Dãy trên có hai giá trị chính giữa cùng bằng 4. Vậy trung vị của mẫu số liệu cũng bằng 4.

Trong mẫu số liệu được sắp xếp trên, số phần tử ở bên trái trung vị và số phần tử ở bên phải trung vị bằng nhau và bằng 3. Lương của giám đốc cao hơn hẳn số trung bình, đây chính là *giá trị bất thường*. Nếu ta thay lương của giám đốc là 30; 40; 50;... (triệu đồng) thì trung vị vẫn không thay đổi trong khi số trung bình sẽ thay đổi.

Ý nghĩa. Trung vị là giá trị chia đôi mẫu số liệu, nghĩa là trong mẫu số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm thì giá trị trung vị ở vị trí chính giữa. Trung vị không bị ảnh hưởng bởi giá trị bất thường trong khi số trung bình bị ảnh hưởng bởi giá trị bất thường.

Luyện tập 2. Chiều dài (đơn vị feet) của 7 con cá voi trưởng thành được cho như sau:

48 53 51 31 53 112 52.

Tìm số trung bình và trung vị của mẫu số liệu trên. Trong hai số đó, số nào phù hợp hơn để đại diện cho chiều dài của 7 con cá voi trưởng thành này?

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

2. TỨ PHÂN VỊ

HĐ4. Điểm (thang điểm 100) của 12 thí sinh cao điểm nhất trong một cuộc thi như sau:

58 74 92 81 97 88 75 69 87 69 75 77.

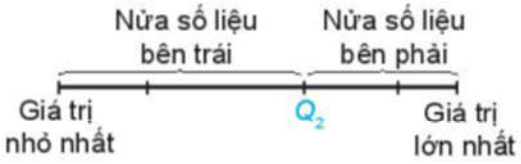
Ban tổ chức muốn trao các giải Nhất, Nhì, Ba, Tư cho các thí sinh này, mỗi giải trao cho 25% số thí sinh (3 thí sinh).

Em hãy giúp ban tổ chức xác định các ngưỡng điểm để phân loại thí sinh.

Để tìm các tứ phân vị của mẫu số liệu có n giá trị, ta làm như sau:

- Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm.
- Tìm trung vị. Giá trị này là Q_2.
- Tìm trung vị của nửa số liệu bên trái Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ). Giá trị này là Q_1.
- Tìm trung vị của nửa số liệu bên phải Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ). Giá trị này là Q_3.

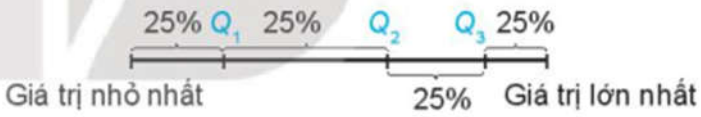
Q_1, Q_2, Q_3 được gọi là các tứ phân vị của mẫu số liệu.



Hình 5.3b

Chú ý. Q_1 được gọi là tứ phân vị thứ nhất hay tứ phân vị dưới, Q_3 được gọi là tứ phân vị thứ ba hay tứ phân vị trên.

Ý nghĩa. Các điểm Q_1, Q_2, Q_3 chia mẫu số liệu đã sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn thành bốn phần, mỗi phần đều chứa 25% giá trị (H.5.3a).



Hình 5.3a. Các tứ phân vị

Ví dụ 3. Hàm lượng Natri (đơn vị miligam, 1 mg = 0,001 g) trong 100 g một số loại ngũ cốc được cho như sau:

0 340 70 140 200 180 210 150 100 130

140 180 190 160 290 50 220 180 200 210.

Hãy tìm các tứ phân vị. Các tứ phân vị này cho ta thông tin gì?

Giải

- Sắp xếp các giá trị này theo thứ tự không giảm:

0 50 70 100 130 140 140 150 160 180 180 180 190 200 200 210 210 220 290 340.

Hai giá trị chính giữa

- Vì $n = 20$ là số chẵn nên Q_2 là trung bình cộng của hai giá trị chính giữa:

$$Q_2 = (180 + 180) : 2 = 180.$$

- Ta tìm Q_1 là trung vị của nửa số liệu bên trái Q_2:

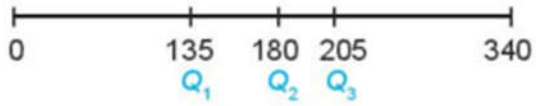
0 50 70 100 130 140 140 150 160 180

và tìm được $Q_1 = (130 + 140) : 2 = 135$.

- Ta tìm Q_3 là trung vị của nửa số liệu bên phải Q_2:

180 180 190 200 200 210 210 220 290 340

và tìm được $Q_3 = (200 + 210) : 2 = 205$.



Hình 5.4. Hình ảnh về sự phân bố của mẫu số liệu

Các tứ phân vị cho ta hình ảnh phân bố của mẫu số liệu. Khoảng cách từ Q_1 đến Q_2 là 45 trong khi khoảng cách từ Q_2 đến Q_3 là 25. Điều này cho thấy mẫu số liệu tập trung với mật độ cao ở bên phải của Q_2 và mật độ thấp ở bên trái của Q_2 (H.5.4).

Luyện tập 3. Bảng sau đây cho biết số lần học tiếng Anh trên Internet trong một tuần của một số học sinh lớp 10:

Số lần	0	1	2	3	4	5
Số học sinh	2	4	6	12	8	3

Hãy tìm các tứ phân vị cho mẫu số liệu này.

3. MỐT

HĐ5. Một cửa hàng giày thể thao đã thống kê cỡ giày của một số khách hàng nam được chọn ngẫu nhiên cho kết quả như sau:

38 39 39 38 40 41 39 39 38 39 39 39 40 39 39.

a) Tính cỡ giày trung bình. Số trung bình này có ý nghĩa gì với cửa hàng không?

b) Cửa hàng nên nhập cỡ giày nào với số lượng nhiều nhất?

Mốt của mẫu số liệu là giá trị xuất hiện với tần số lớn nhất.

Ý nghĩa. Có thể dùng mốt để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu khi mẫu số liệu có nhiều giá trị trùng nhau.

Ví dụ 4. Thời gian truy cập Internet (đơn vị giờ) trong một ngày của một số học sinh lớp 10 được cho như sau:

0 0 1 1 1 3 4 4 5 6.

Tìm mốt cho mẫu số liệu này.

Giải

Vì số học sinh truy cập Internet 1 giờ mỗi ngày là lớn nhất (có 3 học sinh) nên mốt là 1.

Nhận xét

- Mốt có thể không là duy nhất. Chẳng hạn, với mẫu số liệu

8 7 10 9 7 5 7 8 8

các số 7; 8 đều xuất hiện với số lần lớn nhất (3 lần) nên mẫu số liệu này có hai mốt là 7 và 8.

- Khi các giá trị trong mẫu số liệu xuất hiện với tần số như nhau thì mẫu số liệu không có mốt.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

- Mốt còn được định nghĩa cho mẫu dữ liệu định tính (dữ liệu không phải là số). Ví dụ báo Tuổi trẻ đã thực hiện thăm dò ý kiến của bạn đọc với câu hỏi "Theo bạn, VFF nên chọn huấn luyện viên ngoại hay nội dẫn dắt đội tuyển bóng đá nam Việt Nam?".

  Tại thời điểm 21 giờ ngày 27-4-2021 kết quả bình chọn như sau:

Lựa chọn	Huấn luyện viên nội	Huấn luyện viên ngoại	Ý kiến khác
Số lượt bình chọn	1 897	3 781	747

  Trong mẫu dữ liệu này, lựa chọn "huấn luyện viên ngoại" có nhiều người bình chọn nhất, được gọi là *mốt*.

Vận dụng. Hãy tính các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu về điểm khảo sát của lớp A và lớp B ở đầu bài học để phân tích và so sánh hiệu quả học tập của hai phương pháp này.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1

a) Tính số trung bình của các số liệu thống kê cho ở bảng 1 bằng hai cách (sử dụng bảng phân bố tần số, bảng phân bố tần suất).

Cho các số liệu thống kê ghi trong bảng sau

Thành tích chạy 50 m của học sinh lớp 10A ở trường Trung học phổ thông C (đơn vị : giây)

6,3	6,2	6,5	6,8	6,9	8,2	8,6
6,6	6,7	7,0	7,1	7,2	8,3	8,5
7,4	7,3	7,2	7,1	7,0	8,4	8,1
7,1	7,3	7,5	7,5	7,6	8,7	
7,6	7,7	7,8	7,5	7,7	7,8	

Bảng 1

b) Giả sử cũng trong trường Trung học phổ thông C, thời gian trung bình chạy $50\,m$ của học sinh lớp $10B$ là 7,3 giây.

So sánh thời gian chạy $50\,m$ của học sinh ở hai lớp $10A, 10B$ trong lần thi chạy kể trên.

Giải

a) Cách 1

Sử dụng bảng phân bố tần số ghép lớp (bảng 2) ta có

$$\overline{x} = \frac{1}{33}(2\times 6,25 + 5\times 6,75 + 10\times 7,25 + 9\times 7,75 + 4\times 8,25 + 3\times 8,75)$$

$$\overline{x} = \frac{1}{33}(12,50 + 33,75 + 72,50 + 69,75 + 33,00 + 26,25) \approx 7,5 \text{ (giay).}$$

Cách 2

Sử dụng bảng phân bố tần suất ghép lớp (bảng 3), ta có

$$\overline{x}=\frac{1}{100}(6,06\times 6,25+15,15\times 6,75+30,30\times 7,25+27,27\times 7,75+12,12\times 8,25+9,10\times 8,75)$$

$$\overline{x}=\frac{1}{100}(37,875+102,2625+219,675+211,3425+99,99+79,625)\approx 7,5 \text{ (giây)}$$

b) $\overline{x}_A > \overline{x}_B$, nên trong lần thi chạy kể trên, học sinh lớp $10\,B$ chạy nhanh hơn học sinh lớp $10\,A$.

Bài 2.

Cho Bảng xếp loai học lực của học sin! lớp $10\,A$ trường Trang học phổ thông T. năm hoc $2002-2003$

Học lực	Tần số
Kém	3
Yếu	12
Trung bình	13
Khá	11
Giỏi	6
Cộng	45

Bảng 10

a) Tính số trung bình, số trung vị, mốt của bảng 10 (nếu tính được).

b) Chọn giá trị đại diện cho học lực của học sinh lớp $10\,A$.

Giải

a) Bảng phân bố tần số đã cho gồm 45 số liệu, mỗi số liệu là một xếp loại học lực. Có tất cả 5 xếp loại học lực được sắp thành dãy không giảm, từ học lực thấp nhất là "Kém" đến học lực cao nhất là "Giỏi". Số liệu đứng giữa là số liệu thứ 23.

Số liệu này thuộc xếp loại học lực "Trung bình". Suy ra số trung vị M_e là học lực "Trung bình".

Trong bảng phân bố tần số đã cho, xếp loại học lực "Trung bình" có tần số lớn nhất nên môt M_o là học lực "Trung bình". Kết quả này có nghĩa là trong lớp $10\,A$, nhiều nhất là những học sinh có xếp loại học lực "Trung bình".

b) Dựa vào kết quả của câu a), ta chọn xếp loại học lực "Trung bình" làm đại diện cho học lực của học sinh lớp $10\,A$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho bảng thống số liệu thông kê điểm kiểm tra 1 tiết môn Toán của 40 học sinh như sau:

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Số học sinh	2	3	7	18	3	2	4	1	40

Số trung vị (M_e) và mốt (M_0) của bảng số liệu thống kê trên là

A. $M_e=8;M_0=40$. **B.** $M_e=6;M_0=18$.

C. $M_e=6;M_0=6$. **D.** $M_e=7;M_0=6$

Lời giải

Chọn C

Theo công thức trung vị đối với N chẵn thì ta có:

Số đứng vị trí $\frac{N}{2}$ là 6 và số đứng vị trí $\frac{N}{2}+1$ là 6.

Vậy số trung vị $M_e=6$.

$M_0=6$ do số điểm 6 có tần suất suất hiện nhiều nhất là 18 lần.

Câu 2: Bạn An đạt được điểm môn Toán như sau: điểm hệ số $1:7;\ 9;\ 8;\ 8;\ 8$, điểm hệ số $2:7;\ 8;\ 8$, điểm thi học kỳ (hệ số 3): 8. Điểm trung bình môn Toán của An là

A. $\approx 8,1$. **B.** $\approx 7,6$. **C.** $\approx 7,9$. **D.** $\approx 7,7$.

Lời giải

Chọn C

Điểm trung bình môn toán của An là: $\frac{7+9+8+8+8+7.2+8.2+8.2+8.3}{1+1+1+1+1+2+2+2+3}=\frac{55}{7}\simeq 7,9$.

Câu 3: Số trung bình của dãy số liệu $1;\ 1;2\ ;\ 3\ ;\ 3;\ 4\ ;\ 5;\ 5;\ 6\ ;\ 7\ ;\ 8\ ;\ 9;\ 9;\ 9$ gần đúng với giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

A. $5,14$. **B.** $5,15$. **C.** 5. **D.** 6

Lời giải

Chọn A

Số trung bình của dãy số liệu $1;\ 1;2\ ;\ 3\ ;\ 3;\ 4\ ;\ 5;\ 5;\ 6\ ;\ 7\ ;\ 8\ ;\ 9;\ 9;\ 9$ là

$x_{TB}=\frac{1+1+2+3+3+4+5+5+6+7+8+9+9+9}{14}=\frac{36}{7}\approx 5,142857$.

Câu 4: Thời gian chạy 50m của 20 học sinh được ghi lại trong bảng dưới đây:

Thời gian (giây)	8,3	8,4	8,5	8,7	8,8
Tần số	2	3	9	5	1

Số trung bình cộng thời gian chạy của học sinh là:

A. 8,54. **B.** 4. **C.** 8,50. **D.** 8,53

Lời giải

Chọn D

$$\overline{x} = \frac{(8,3.2+8,4.3+8,5.9+8,7.5+8,8.1)}{20} = 8,53.$$

Câu 5: Điểm kiểm tra của 24 học sinh được ghi lại trong bảng sau:

7	2	3	5	8	2
8	5	8	4	9	6
6	1	9	3	6	7
3	6	6	7	2	9

Tìm mốt của điểm điều tra

A. 2. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 9

Lời giải

Chọn C

Điểm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Tần số	1	3	3	1	2	5	3	3	3	N=24

Ta thấy điểm 6 có tần số lớn nhất nên $M_0 = 6$.

Câu 6: Cho bảng phân bố tần số khối lượng 30 quả trứng gà của một rổ trúng gà:

Khối lượng (g)	Tần số
25	3
30	5
35	10
40	6
45	4
50	2
Cộng	30

Số trung vị là

A. 37,5. **B.** 40. **C.** 35. **D.** 75

Lời giải

Chọn C

Ta thấy N chẵn nên số trung vị là: $M_e = \frac{35+35}{2} = 35$

Câu 7: Có 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Hóa (thang điểm 20).Kết quả như sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Số trung bình cộng là

A. $\overline{x} = 15,20$. **B.** $\overline{x} = 15,21$. **C.** $\overline{x} = 15,23$. **D.** $\overline{x} = 15,25$

Lời giải

Chọn C

$$\overline{x} = \frac{(9.1+10.1+11.3+12.5+13.8+14.13+15.19+16.24+17.14+18.10+19.2)}{100} = 15,23.$$

Câu 8: Có 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Hóa (thang điểm 20).Kết quả như sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Số trung vị là:

A. $M_e = 15$. **B.** $M_e = 15,50$. **C.** $M_e = 16$. **D.** $M_e = 16,5$

Lời giải

Chọn B

Ta thấy N=100 chăn nên số trung vị là: $M_e = \frac{15+16}{2} = 15,5$.

Câu 9: Bảng phân bố tần số- tần suất ghép lớp điểm thi của 32 học sinh trong kì thi Tiếng Anh (thang điểm 100) như sau:

Lớp điểm	Tần số n_i	Tần suất f_i%	Đại diện c_i	$n_i c_i$	$n_i c_i^2$
$[40;50)$	4	13	45	180	8100
$[50;60)$	6	19	55	330	18150
$[60;70)$	10	31	65	650	42250
$[70;80)$	6	19	75	450	33750

$[80;90)$	4	13	85	340	28900
$[90;100]$	2	6	95	190	18050
N	32	100%		2140	149200

Số điểm trung bình là:

A. $\overline{x}=66,88$. **B.** $\overline{x}=68,68$. **C.** $\overline{x}=88,66$. **D.** $\overline{x}=68,88$

Lời giải

Chọn A

$\overline{x}=\frac{4.45+6.55+10.65+6.75+4.85+2.95}{32}=66,88$ hoặc tính $\overline{x}=\frac{\sum n_i c_i}{N}=\frac{2140}{32}=66,88$.

Câu 10: Để được cấp chứng chỉ A - Anh văn của một trung tâm ngoại ngữ,học viên phải trải qua 6 lần kiểm tra trắc nghiệm,thang điểm mỗi lần kiểm tra là 100,và phải đạt điểm trung bình từ 70 điểm trở lên.Qua 5 lần thi Minh đạt điểm trung bình là 64,5 điểm.Hỏi trong lần kiểm tra cuối cùng Minh phải đạt ít nhất là bao nhiêu điểm để được cấp chứng chỉ?

A. 97,5. **B.** 92,5. **C.** 95,5. **D.** 97,8

Lời giải

Chọn A

Gọi x là số điểm trong lần kiểm tra cuối mà Minh cần đạt được để được cấp chứng chỉ.Ta có số điểm qua 5 lần thi của Minh là 64,5.5=322,5 suy ra:

$\frac{x+322,5}{6}=70\Rightarrow x=70.6-322,5=97,5$

Bài 14 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO ĐỘ PHÂN TÁN

THUẬT NGỮ
- Khoảng biến thiên
- Khoảng tứ phân vị
- Phương sai
- Độ lệch chuẩn

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Tính các số đặc trưng đo độ phân tán.
- Biết ý nghĩa của các số đặc trưng đo độ phân tán.
- Phát hiện các giá trị bất thường sử dụng các công cụ toán học.

Dưới đây là điểm trung bình môn học kì I của hai bạn An và Bình:

	Toán	Vật lí	Hoá học	Ngữ văn	Lịch sử	Địa lí	Tin học	Tiếng Anh
An	9,2	8,7	9,5	6,8	8,0	8,0	7,3	6,5
Bình	8,2	8,1	8,0	7,8	8,3	7,9	7,6	8,1

Điểm trung bình môn học kì của An và Bình đều là 8,0 nhưng rõ ràng Bình "học đều" hơn An.
Có thể dùng những số đặc trưng nào để đo mức độ "học đều"?
Bài này sẽ giới thiệu một vài số đặc trưng như vậy.

1. KHOẢNG BIẾN THIÊN VÀ KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ

HĐ1. Một cổ động viên của câu lạc bộ Everton, Anh đã thống kê điểm số mà hai câu lạc bộ Leicester City và Everton đạt được trong năm mùa giải Ngoại hạng Anh gần đây, từ mùa giải 2014 – 2015 đến mùa giải 2018 – 2019 như sau:

Leicester City: 41 81 44 47 52.
Everton: 47 47 61 49 54.

Cổ động viên đó cho rằng, Everton thi đấu ổn định hơn Leicester City. Em có đồng ý với nhận định này không? Vì sao?

Trong 5 mùa giải, điểm thấp nhất, cao nhất của Leicester City lần lượt là 41; 81 trong khi của Everton là 47; 61. Về trực quan, thành tích của Everton ổn định hơn Leicester City. Người ta có nhiều cách để đo sự ổn định này. Cách đơn giản nhất là dùng hiệu số (Điểm cao nhất – Điểm thấp nhất). Giá trị này được gọi là khoảng biến thiên.

> Khoảng biến thiên, kí hiệu là R, là hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong mẫu số liệu.

Ý nghĩa. Khoảng biến thiên dùng để đo độ phân tán của mẫu số liệu. Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

Ví dụ 1. Điểm kiểm tra học kì môn Toán của các bạn Tổ 1, Tổ 2 lớp 10A được cho như sau:

Tổ 1: 7 8 8 9 8 8 8.
Tổ 2: 10 6 8 9 9 7 8 7 8.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

a) Điểm kiểm tra trung bình của hai tổ có như nhau không?

b) Tính các khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu. Căn cứ trên chỉ số này, các bạn tổ nào học đồng đều hơn?

Giải

a) Điểm kiểm tra trung bình của hai tổ đều bằng 8.

b) Đối với Tổ 1: Điểm kiểm tra thấp nhất, cao nhất tương ứng là 7; 9. Do đó khoảng biến thiên là: $R_1 = 9 - 7 = 2$.

Đối với Tổ 2: Điểm kiểm tra thấp nhất, cao nhất tương ứng là 6; 10. Do đó khoảng biến thiên là: $R_2 = 10 - 6 = 4$.

Do $R_2 > R_1$ nên ta nói các bạn Tổ 1 học đều hơn các bạn Tổ 2.

Luyện tập 1. Mẫu số liệu sau cho biết chiều cao (đơn vị cm) của các bạn trong tổ:

163 159 172 167 165 168 170 161.

Tính khoảng biến thiên của mẫu số liệu này.

Nhận xét. Sử dụng khoảng biến thiên có ưu điểm là đơn giản, dễ tính toán song khoảng biến thiên chỉ sử dụng thông tin của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất mà bỏ qua thông tin từ tất cả các giá trị khác. Do đó, khoảng biến thiên rất dễ bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường.

HĐ2. Trong một tuần, nhiệt độ cao nhất trong ngày (đơn vị °C) tại hai thành phố Hà Nội và Điện Biên được cho như sau:

Hà Nội:	23	25	28	28	32	33	35.
Điện Biên:	16	24	26	26	26	27	28.

a) Tính các khoảng biến thiên của mỗi mẫu số liệu và so sánh.

b) Em có nhận xét gì về sự ảnh hưởng của giá trị 16 đến khoảng biến thiên của mẫu số liệu về nhiệt độ cao nhất trong ngày tại Điện Biên?

c) Tính các tứ phân vị và hiệu $Q_3 - Q_1$ cho mỗi mẫu số liệu. Có thể dùng hiệu này để đo độ phân tán của mẫu số liệu không?

Khoảng tứ phân vị, kí hiệu là Δ_Q, là hiệu số giữa tứ phân vị thứ ba và tứ phân vị thứ nhất, tức là:

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1.$$

Về bản chất, khoảng tứ phân vị là khoảng biến thiên của 50% số liệu chính giữa của mẫu số liệu đã sắp xếp.



Ý nghĩa. Khoảng tứ phân vị cũng là một số đo độ phân tán của mẫu số liệu. Khoảng tứ phân vị càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

Chú ý. Một số tài liệu gọi khoảng biến thiên là *biên độ* và khoảng tứ phân vị là *độ trải giữa*.

Ví dụ 2. Mẫu số liệu sau cho biết số ghế trống tại một rạp chiếu phim trong 9 ngày:

7 8 22 20 15 18 19 13 11.

Tìm khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu này.

Giải

Trước hết, ta sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm:

7 8 11 13 15 18 19 20 22.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

Mẫu số liệu gồm 9 giá trị nên trung vị là số ở vị trí chính giữa $Q_2 = 15$.

Nửa số liệu bên trái là 7, 8, 11, 13 gồm 4 giá trị, hai phần tử chính giữa là 8, 11.

Do đó, $Q_1 = (8 + 11) : 2 = 9,5$.

Nửa số liệu bên phải là 18, 19, 20, 22 gồm 4 giá trị, hai phần tử chính giữa là 19, 20.

Do đó, $Q_3 = (19 + 20) : 2 = 19,5$.

Vậy khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu là $\Delta_Q = 19,5 - 9,5 = 10$.

Luyện tập 2. Mẫu số liệu sau đây cho biết số bài hát ở mỗi album trong bộ sưu tập của An:

12 7 10 9 12 9 10 11 10 14.

Hãy tìm khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu này.

2. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

Khoảng biến thiên chỉ sử dụng thông tin của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của mẫu số liệu (bỏ qua thông tin của tất cả các giá trị khác), còn khoảng tứ phân vị chỉ sử dụng thông tin của 50% số liệu chính giữa. Có một vài số đặc trưng khác đo độ phân tán sử dụng thông tin của tất cả các giá trị trong mẫu số liệu. Hai trong số đó là *phương sai* và *độ lệch chuẩn*.

Cụ thể là với mẫu số liệu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nếu gọi số trung bình là $\overline{x}$ thì với mỗi giá trị x_i, độ lệch của nó so với giá trị trung bình là $x_i - \overline{x}$.

- Phương sai là giá trị $s^2 = \dfrac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}$.
- Căn bậc hai của phương sai, $s = \sqrt{s^2}$, được gọi là độ lệch chuẩn.

Chú ý. Người ta còn sử dụng đại lượng để đo độ phân tán của mẫu số liệu:

$$\hat{s}^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n - 1}.$$

Ý nghĩa. Nếu số liệu càng phân tán thì phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn.

Ví dụ 3. Mẫu số liệu sau đây cho biết sĩ số của 5 lớp khối 10 tại một trường Trung học:

43 45 46 41 40.

Tìm phương sai và độ lệch chuẩn cho mẫu số liệu này.

Giải

Số trung bình của mẫu số liệu là: $\overline{x} = \dfrac{43 + 45 + 46 + 41 + 40}{5} = 43$.

Ta có bảng sau:

Giá trị	Độ lệch	Bình phương độ lệch
43	43 – 43 = 0	0
45	45 – 43 = 2	4
46	46 – 43 = 3	9
41	41 – 43 = −2	4
40	40 – 43 = −3	9
Tổng		26

Bạn có thể sử dụng máy tính cầm tay, phần mềm bảng tính hay phần mềm thống kê để tính các số đặc trưng.



Mẫu số liệu gồm 5 giá trị nên $n = 5$. Do đó phương sai là: $s^2 = \dfrac{26}{5} = 5,2$.

Độ lệch chuẩn là: $s = \sqrt{5,2} \approx 2,28$.

Luyện tập 3. Dùng đồng hồ đo thời gian có độ chia nhỏ nhất đến 0,001 giây để đo 7 lần thời gian rơi tự do của một vật bắt đầu từ điểm A ($v_A = 0$) đến điểm B. Kết quả đo như sau:

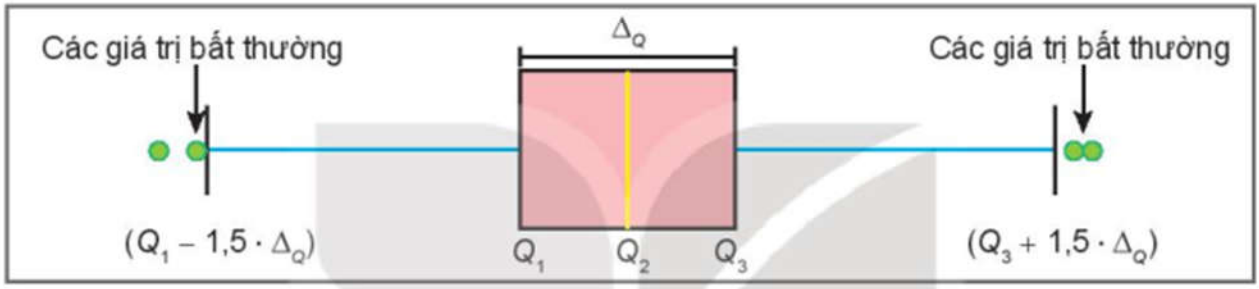
0,398 0,399 0,408 0,410 0,406 0,405 0,402.

(Theo *Bài tập Vật lí 10, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2018*)

Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn cho mẫu số liệu này. Qua các đại lượng này, em có nhận xét gì về độ chính xác của phép đo trên?

3. PHÁT HIỆN SỐ LIỆU BẤT THƯỜNG HOẶC KHÔNG CHÍNH XÁC BẰNG BIỂU ĐỒ HỘP

Trong mẫu số liệu thống kê, có khi gặp những giá trị quá lớn hoặc quá nhỏ so với đa số các giá trị khác. Những giá trị này được gọi là giá trị bất thường. Chúng xuất hiện trong mẫu số liệu có thể do nhầm lẫn hay sai sót nào đó. Ta có thể dùng biểu đồ hộp để phát hiện những giá trị bất thường này.



Hình 5.5. Biểu đồ hộp

Các giá trị lớn hơn $Q_3 + 1,5 \cdot \Delta_Q$ hoặc bé hơn $Q_1 - 1,5 \cdot \Delta_Q$ được xem là giá trị bất thường.

Ví dụ 4. Hàm lượng Natri (đơn vị mg) trong 100 g một số loại ngũ cốc được cho như sau:

0	340	70	140	200	180	210	150	100	130
140	180	190	160	290	50	220	180	200	210.

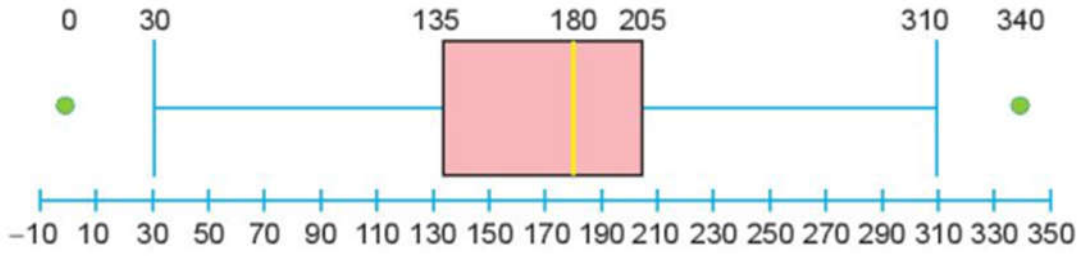
Tìm giá trị bất thường trong mẫu số liệu trên bằng cách sử dụng biểu đồ hộp.

Giải

Từ mẫu số liệu ta tính được $Q_1 = 135$ và $Q_3 = 205$. Do đó, khoảng tứ phân vị là:

$$\Delta_Q = 205 - 135 = 70.$$

Biểu đồ hộp cho mẫu số liệu này là:



Ta có $Q_1 - 1,5 \cdot \Delta_Q = 30$ và $Q_3 + 1,5 \cdot \Delta_Q = 310$ nên trong mẫu số liệu có hai giá trị được xem là bất thường là 340 mg (lớn hơn 310 mg) và 0 mg (bé hơn 30 mg).

Luyện tập 4. Một mẫu số liệu có tứ phân vị thứ nhất là 56 và tứ phân vị thứ ba là 84. Hãy kiểm tra xem trong hai giá trị 10 và 100 giá trị nào được xem là giá trị bất thường.

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

BÀI TẬP MẪU

a) Tính phương sai (theo 3 cách) và tính độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê cho ở bảng 1 .

Cho các số liệu thống kê ghi trong bảng sau

Thành tích chạy 50 m của học sinh lớp 10A ở trường Trung học phổ thông C (đơn vị : giây)

6,3	6,2	6,5	6,8	6,9	8,2	8,6
6,6	6,7	7,0	7,1	7,2	8,3	8,5
7,4	7,3	7,2	7,1	7,0	8,4	8,1
7,1	7,3	7,5	7,5	7,6	8,7	
7,6	7,7	7,8	7,5	7,7	7,8	

Bảng 1

b) Giả sử xét thêm lớp 10D cũng thuộc trường Trung học phổ thông C có thành tích chạy 50m trung bình là 7,5 giây, có phương sai là 0,5 .

So sánh thành tích chạy 50m kể trên của hai lớp 10A và 10D.

Lời giải

a) Tính phương sai

Cách 1. Sử dụng bảng phân bố tần số ghép lớp (bảng 2)

$$s^2=\frac{1}{33}\left[2(6,25-7,5)^2+5(6,75-7,5)^2+10(7,25-7,5)^2+9(7,75-7,5)^2+4(8,25-7,5)^2+3(8,75-7,5)^2\right]$$

$$s^2=\frac{1}{33}(3,13+2,81+0,63+0,56+2,25+4,69)s^2\approx 0,43.$$

Cách 2. Sử dụng bảng phân bố tần suất ghép lớp (bảng 3)

$$s^2=\frac{1}{100}\left[6,06(6,25-7,5)^2+15,15(6,75-7,5)^2+30,30\cdot(7,25-7,5)^2\right.$$
$$\left.+27,27\cdot(7,75-7,5)^2+12,12(8,25-7,5)^2+9,10\cdot(8,75-7,5)^2\right]$$

$$s^2=\frac{1}{100}[9,46875+8,521875+1,89375+1,704375+6,8175+14,21875]\ \ s^2\approx 0,43.$$

Cách 3. Sử dụng công thức $s^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2$

$$\overline{x^2}=\frac{1}{33}\left(2\cdot 6,25^2+5\cdot 6,75^2+10\cdot 7,25^2+9\cdot 7,75^2+4\cdot 8,25^2+3.8,75^2\right)$$

$\overline{x^2}\approx 56,79.$

$(\overline{x})^2=(7,507575)^2\approx 56,36$ suy ra

$s^2\approx 56,79-56,36\approx 0,43.$

Như vậy, cả ba cách tính đều cho ta cùng một kết quả (bỏ qua sai số không đáng kể).

Tính độ lệch chuẩn

$$s=\sqrt{s_x^2}=\sqrt{0,43}\Rightarrow s_x\approx 0,66$$

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

b) Theo giả thiết ta có

và $s_A^2 = 0,43$ do đó $s_D^2 > s_A^2$.

Suy ra thành tích chạy $50\,\text{m}$ của học sinh ở hai lớp nhanh như nhau, nhưng thành tích của các học sinh ở lớp $10\,\text{A}$ đông dều hơn.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Nếu đơn vị của số liệu là kg thì đơn vị của phương sai là ?

A. kg **B.** kg^2 **C.** Không có đơn vị **D.** kg^3

Lời giải

Chọn B

Theo định nghĩa phương sai:Giả sử ta có một mẫu số liệu kích thước N là $\{x_1,..x_N\}$,

Phương sai của mẫu số liệu này,kí hiệu là s^2 ,được tính bởi công thức sau: $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$. Do đó nếu đơn vị của mẫu là kg thì đơn vị của phương sai là kg^2

Câu 2: Cho bảng phân bố tần số ghép lớp:

Các lớp giá trị của X	[50; 52)	[52; 54)	[54; 56)	[56; 58)	[58; 60)	Cộng
Tần số n_i	15	20	45	15	5	100

Mệnh đề đúng là:

A .Giá trị trung tâm của lớp $[50;53)$ là 52

B. Tần số của lớp $[58;60)$ là 95

C. Tần số của lớp $[52;54)$ là 35

D. Số 50 không phụ thuộc vào lớp $[54;56)$

Lời giải

Chọn D

Dựa vào định nghĩa tần số và giá trị trung tâm ta loại A,B,C.Do đó ta chọn D

Câu 3: Chọn đáp án đúng trong những đáp án sau: Độ lệch chuẩn là gì ?

A. Bình phương của phương sai

B. Một nửa của phương sai

C. Căn bậc hai của phương sai

D. Căn bậc ba của phương sai

Lời giải

Chọn C

Căn bậc hai của phương sai được gọi là độ lệch chuẩn

Câu 4: Điều tra về một khối 10 ta có kết quả như sau: ?

Nhóm	Chiều cao (cm)	Số học sinh
1	[150;152)	5
2	[152;154)	18
3	[154;156)	40
4	[156;158)	26
5	[158;160)	8
6	[160;162)	3
		N=100

Giá trị đại diện của nhóm thứ tư là ?

A. 156,5 **B.** 157,5 **C.** 157 **D.** 158

Lời giải

Chọn C

Ta gọi trung điểm của $x_4=\frac{156+158}{2}=157$ giá trị đại diện của nhóm thứ 4

Câu 5: Cho dãy số liệu thống kê $1,2,3,4,5,6,7,8$ Độ lệch chuẩn của dãy số liệu thống kê gần bằng ?

A. 2.30 **B.** 3.30 **C.** 4.30 **D.** 5.30

Lời giải

Chọn A

$$\overline{x}=\frac{1}{8}(1.1+2.1+3.1+4.1+5.1+6.1+7.1+8.1)=4,5$$

$$s^2=\frac{1}{8}\left[1.(1-4,5)^2+1.(2-4,5)^2+\ldots+1.(8-4,5)^2\right]=5,25$$

$$\Rightarrow s=\sqrt{s^2}\approx 2,30$$

Câu 6: Tỉ số giữa tần số và kích thước mẫu người ta gọi là ?

A. Mốt **B.** Phương sai **C.** Tần suất **D.** Trung vị

Lời giải

Chọn C

Tần số là tỉ số giữa tần số và kích thước mẫu

Câu 7: Cho dãy số liệu thống kê $10,8,6,2,4$ Độ lệch chuẩn của mẫu là?

A. 2.8 **B.** 8 **C.** 6 **D.** 2.4

Lời giải

Chọn A

$$\overline{x}=\frac{1}{5}(10.1+8.1+6.1+2.1+4.1)=6$$

$$s^2=\frac{1}{5}\left[1.(10-6)^2+1.(8-6)^2+1.(6-6)^2+1.(2-6)^2+1.(4-6)^2\right]=8$$

$$\Rightarrow s=\sqrt{s^2}\approx 2,8$$

Câu 8: Cho bảng số liệu ghi lại điểm của 40 học sinh bài kiểm tra một tiết môn Toán

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Số học sinh	2	3	7	18	3	2	4	1	40

Mốt của bảng số liệu trên là ?

A. $M_0=40$ **B.** $M_0=18$ **C.** $M_0=6$ **D.** $M_0=7$

Lời giải

Chọn C

Mốt của dấu hiệu là gía trị có tần số lớn nhất

Câu 9: 100 hoc sinh tham dự giải toán (thang điểm là). Kết quả được cho trong bảng sau:

Điểm (x)	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số (n)	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Trung bình cộng của bảng số liệu trên là ?

A. 15 **B.** 15,23 **C.** 15.5 **D.** 16

Lời giải

Chọn C

$$\overline{x}=\frac{1}{100}(9.1+10.1+11.3+12.5+\ldots+19.2)=15,23$$

Câu 10: Điều tra về học sinh khối 10 ta có kết quả sau:

Nhóm	Chiều cao (cm)	Số học sinh
1	[150;152)	5
2	[152;154)	18
3	[154;156)	40
4	[156;158)	26
5	[158;160)	8
6	[160;162)	3
		N=100

Độ lệch chuẩn là ?

A. 0.78 **B.** 1.28 **C.** 2.17 **D.** 1.73

Lời giải

Chọn C

$$\overline{x}=\frac{1}{100}(5.151+18.153+40.155+26.157+8.159+3.161)=155,46$$

$$s^2=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{6}n_i\left(c_i-\overline{x}\right)^2\approx 4,71$$

$$\Rightarrow s=\sqrt{s^2}\approx 2,17$$

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 5

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Thống kê về điểm thi môn toán trong một kì thi của 450 em học sinh. Người ta thấy có 99 bài được điểm 7. Hỏi tần suất của giá trị $x_i = 7$ là bao nhiêu?

A. 7% **B.** 22% **C.** 45% **D.** 50%

Lời giải:

Chọn B.

Tần suất bằng $\frac{99}{450}.100\% = 22\%$

Câu 2: Nhiệt độ trung bình của tháng 12 tại thành phố Thanh Hóa từ năm 1961 đến hết năm 1990 được cho trong bảng sau:

Các lớp nhiệt độ (^{0} C)	Tần số	Tần suất(%)
[15;17) [17;19) [19;21]	5 2 *	50 20 30
Cộng		100%

Hãy điền số thích hợp vào *:

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải:

Chọn B.

Câu 3: Khối lượng của 30 củ khoai tây thu hoạch ở một nông trường

Lớp khối lượng (gam)	Tần số
[70;80) [80;90) [90;100) [100;110) [110;120)	3 6 12 6 3
Cộng	30

Tần suất ghép lớp của lớp [100;110) là:

A. 20% **B.** 40% **C.** 60% **D.** 80%

Lời giải:

Chọn A.

Tần suất lớp [100;110) là: $\frac{6}{30}.100\% = 20\%$

Câu 4: Cho bảng phân phối thực nghiệm tần số rời rạc:

Mẫu thứ x_i	1	2	3	4	5	Cộng
Tần số n_i	2100	1860	1950	2000	2090	10000

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Tần suất của 3 là 20%
B. Tần suất của 4 là 20%
C. Tần suất của 4 là 2%
D. Tần suất của 4 là 50%

Lời giải:

Chọn B.

Tần suất của 4 là: $\frac{2000}{10000}.100\% = 20\%$

Câu 5: Chiều dài của 60 lá dương xỉ trưởng thành

Lớp của chiều dài (cm)	Tần số
[10;20)	8
[20;30)	18
[30;40)	24
[40;50)	10

Số lá có chiều dài từ 30 cm đến 50 cm chiếm bao nhiêu phần trăm?

A. 50,0% **B.** 56,0% **C.** 56,7% **D.** 57%

Lời giải:

Chọn C.

$\frac{24+10}{60}.100\% = 56,7\%$

Câu 6: Cho bảng tần số, tần suất ghép lớp như sau:dùng cho: **Câu 15, Câu 16, Câu 17**

Lớp	**Tần Số**	Tần Suất
[160;162]	6	16,7%
[163;165]	12	33,3%
[166;*]	**	27,8%
[169;171]	5	***
[172;174]	3	8,3%
	N =36	100%

Câu 7: Hãy điền số thích hợp vào*

A. 167 **B.** 168 **C.** 169 **D.** 164

Lời giải:

Chọn B.

Câu 8: Hãy điền số thích hợp vào**

A. 10 **B.** 12 **C.** 8 **D.** 13

Lời giải:

Chọn A. $**=\frac{36.27,8}{100}=10$

Câu 9: Hãy điền số thích hợp vào***

A. 3,9% **B.** 5,9% **C.** 13,9% **D.** 23,9%

Lời giải:

Chọn C. $***=\frac{5}{36}.100\%=13,9\%.$

Câu 10: Thống kê điểm môn toán trong một kì thi của 400 em học sinh thấy có 72 bài được điểm 5. Hỏi giá trị tần suất của giá trị x_i =5 là

A. 72% **B.** 36% **C.** 18% **D.** 10%

Lời giải:

Chọn C.

$\frac{72}{400}.100\%=18\%$

Câu 11: Thống kê điểm môn toán trong một kì thi của 500 em học sinh thấy số bài được điểm 9 tỉ lệ 2%. Hỏi tần số của giá trị x_i =9 là bao nhiêu?

A. 10 **B.** 20 **C.** 30 **D.** 5

Lời giải:

Chọn A.

tần số x_i =9 là: $\frac{2\%.500}{100\%}=10$

Câu 12: Điều tra thời gian hoàn thành một sản phẩmcủa 20 công nhân, người ta thu được mẫu số liệu sau(thời gian tính bằng phút).

10 12 13 15 11 13 16 18 19 21

23 21 15 17 16 15 20 13 16 11

Có bao nhiêu giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên

A. 10 **B.** 12 **C.** 20 **D.** 23

Lời giải:

Chọn B.

10;11;12;13;15;16;17;18;19;20;21;23

Câu 13: Để điều tra về điện năng tiêu thụ trong 1 tháng (tính theo kw/h) của 1 khu chung cư có 50 gia đình, người ta đến 15 gia đình và thu được mẫu số liệu sau:

80 75 35 105 110 60 83 71

94 102 36 78 130 120 96

Có bao nhiêu gia đình tiêu thụđiện trên 100 kw/h trong một tháng

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Lời giải:

Chọn C.

Câu 14: Điểm thi học kì 1 của lớp 10A được cho như bảng sau:

8	6,5	7	5	5,5	8	4	5	7
8	4,5	10	7	8	6	9	6	8
6	6	2,5	8	8	7	4	10	6
9	6,5	9	7,5	7	6	6	3	6
6	9	5,5	7	8	6	5	6	4

Số các giá trị khác nhau của dấu hiệu cho ở bảng trên là:

A. 14 **B.** 13 **C.** 12 **D.** 11

Lời giải:

Chọn B.

2,5; 3;4;4,5;5;5,5;6; 6,5;7; 7,5; 8; 9; 10

Câu 15: tuổi thọ của 30 bóng đèn được thắp thử. Hãy điền số thích hợp vào *

Tuæi thä(giê)	TCn sè	TCn suÊt(%)
1150	3	10
1160	6	20
1170	*	40
1180	6	**
1190	3	10
Céng	30	100%

A. 3 **B.** 6 **C.** 9 **D.** 12

Lời giải:

Chọn D.

$*=\frac{30.40}{100}=12$

Câu 16: Hãy điền số thích hợp vào ** ở bảng trên:

A. 10 **B.** 20 **C.** 30 **D.** 40

Lời giải:

Chọn B. $**=\frac{6}{30}.100\%=20\%$

Câu 17: khối lượng của 30 củ khoai tây thu hoạch ở một nông trường:

Lớp khối lượng (gam)	Tần số
[70;80)	3
[80;90)	6
[90;100)	12
[100;110)	6

[110;120)	3
Cộng	30

Mệnh đề nào đúng:

A. giá trị trung tâm của lớp $[70;80)$ là 83

B. tần số của lớp $[80;90)$ là 85

C. tần số của lớp $[110;120)$ là 5

D. số 105 thuộc lớp $[100;110)$

Lời giải:

Chọn D.

Câu 18: Doanh thu của 50 cữa hàng của một công ty trong một tháng (đv:triệu đồng)

STT	Khoảng	Tần số	Tần suất %
1	26,5-48,5	2	4
2	48,5-70,5	8	16
3	70,5-92,5	12	24
4	92,5-114,5	12	24
5	114,5-136,5	*	16
6	136,5-158,5	7	***
7	158,5-180,5	1	2
		N = **	100%

Hãy điền số thích hợp vào *

A. 6 **B.** 7 **C.** 8 **D.** 9

Lời giải:

Chọn C.

Câu 19: hãy điền số thích hợp vào **

A. 50 **B.** 70 **C.** 80 **D.** 100

Lời giải:

Chọn A.

Câu 20: Cho các số liệu thống kê về sản lượng chè thu được trong 1năm (kg/sào) của 20 hộ gia đình

111	112	112	113	114	114	115	114	115	116
112	113	113	114	115	114	116	117	113	115

a) Lập bảng phân bố tần sô- tần suất

b) Tìm số trung bình

A. 111 **B.** 113,8 **C.** 113,6 **D.** 113,9

c) Tìm số trung vị

A. $M_e=111$ **B.** $M_e=116$ **C.** $M_e=114$ **D.** $M_e=117$

d) Tìm số mốt

A. $M_0=111$ **B.** $M_0=113$ **C.** $M_0=114$ **D.** $M_0=117$

Lời giải:

a) Bảng phân bố tần số- tần suất:

Giá trị x	Tần số	Tần suất (%)
111	1	5
112	3	15
113	4	20
114	5	25
115	4	20
116	2	10
117	1	5
	N=20	100

b) **Chọn D.** Số trung bình: $\bar{x}=\frac{1}{20}(1.111+3.112+4.113+5.114+4.115+2.116+1.117)=113,9$

c) **Chọn C.** Số trung vị: do kích thước mẫu N=20 là một số chẵn nên số trung vị là số trung bình cộng của hai giá trị đứng thứ $\frac{N}{2}=10$ và $\frac{N}{2}+1=11$ nên $M_e=\frac{114+114}{2}=114$

d) **Chọn C.** Số mốt: nhìm vào bảng tần số- tần suất ta thấy giá trị 114 có tần số lớn nhất nên ta có $M_0=114$

Câu 21: Để khảo sát kết quả thi tuyển sinh môn Toán trong kì thi tuyển sinh đại học năm vừa qua của trường A, người điều tra chọn một mẫu gồm 100 học sinh tham gia kì thi tuyển sinh đó. Điểm môn Toán (thang điểm 10) của các học sinh này được cho ở bảng phân bố tần số sau đây.

Điểm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2	N=100

a) Tìm mốt

A. $M_O=7$ **B.** $M_O=5$ **C.** $M_O=8$ **D.** $M_O=4$

b) Tìm số trung vị

A. $M_e=6,5$ **B.** $M_e=7,5$ **C.** $M_e=5,5$ **D.** $M_e=6$

c) Tìm số trung bình

A. 6,23 **B.** 6,24 **C.** 6,25 **D.** 6,26

d) Tìm phương sai

A. 3,96 **B.** 3,99 **C.** 3,98 **D.** 3,97

e) Tìm độ lệch chuẩn

A. 1,99 **B.** 1,98 **C.** 1,97 **D.** 1,96

Lời giải:

a) **Chọn A.** Nhìn vào bảng tần số ta thấy giá trị 7 có tần số lớn nhất nên $M_0=7$

b) **Chọn A.** do kích thước mẫu N=100 là một số chẵn nên số trung vị là trung bình cộng của 2 giá trị đứng thứ $\frac{N}{2}=50$ và $\frac{N}{2}+1=51$ do đó $M_e=\frac{6+7}{2}=6,5$

c) **Chọn A.** số trung bình cộng là: $\overline{x}=\frac{n_1x_1+n_2x_2+...+n_kx_k}{N}=\frac{0.1+1.1+2.3+...+10.2}{100}=6,23$

d) **Chọn A.** ta có: $\sum_{i=1}^{k}n_ix_i^2=4277,\ \sum_{i=1}^{k}n_ix_i=623$ nên phương sai:

$$s_x^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}n_ix_i^2-\frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{k}n_ix_i\right)^2=\frac{4277}{100}-\left(\frac{623}{100}\right)^2=3,96$$

e) **Chọn A.** độ lệch chuẩn $s_x=\sqrt{s_x^2}=\sqrt{3,96}=1,99$

Câu 22: Tiền lãi (nghìn đồng) trong 30 ngày được khảo sát ở một quầy bán báo.

81	37	74	65	31	63	58	82	67	77	63	46	30	53	73
51	44	52	92	93	53	85	77	47	42	57	57	85	55	64

a) Tính số trung bình cộng:

A.63,23 **B.** 63,28 **C.** 63,27 **D.** 63,25

b) Tính phương sai:

A.279,78 **B.** 269,78 **C.** 289,79 **D.** 279,75

c) Tính độ lệch chuẩn

A.16,73 **B.** 16,74 **C.** 16,76 **D.** 16,79

Lời giải:

a) **Chọn A.** $\overline{x}=\frac{3.35+5.46_2+7.57+6.68+5.79+4.90}{30}=63,23$

b) **Chọn A.** ta có $\sum_{i=1}^{k}n_ic_i^2=128347,\ \sum_{i=1}^{k}n_ic_i=1897$ nên phương sai:

$$s_x^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}n_ic_i^2-\frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{k}c_ix_i\right)^2=\frac{128347}{100}-\left(\frac{1897}{100}\right)^2\approx 279,78$$

c) **Chọn A.** độ lệch chuẩn $s_x=\sqrt{s_x^2}=\sqrt{279,78}\approx 16,73$

Câu 23: Cho mẫu số liệu gồm bốn số tự nhiên khác nhau và khác 0, biết số trung bình là 6 và số trung vị là 5. Tìm các giá trị của mẫu số liệu đó sao cho hiệu của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 3;4;6;11 **B.** 2;4;7;11 **C.** 3;5;6;11 **D.** 2;4;6;12

Lời giải:

Chọn A. Giả sử các giá trị của mẫu số liệu là $a,\ b,\ c,\ d$ với $0<a<b<c<d$, $a,\ b,\ c,\ d\in N$

Ta có $M_e=\frac{b+c}{2}=5\Rightarrow b+c=10$

Mà $\overline{x}=6\Rightarrow a+b+c+d=24\Rightarrow a+d=14$

Ta có $\begin{cases} a<b<c \\ b+c=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b>1 \\ 10>2b \end{cases}$ hay $1<b<5$ mà $b\in N \Rightarrow b\in\{2;3;4\}$

- Nếu $b=2$ thì $c=8$, mà $0<a<b, a\in N \Rightarrow a=1, d=13$

Khi đó các giá trị của mẫu số liệu là 1;2;8;13

- Nếu $b=3$ thì c = 7, mà $0<a<b, a\in N \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=1\Rightarrow d=13 \\ a=2\Rightarrow d=12 \end{array}\right.$

Khi đó có hai mẫu số liệu thỏa đề bài có giá trị là 1;3;7;13 và 2;3;7;12

- Nếu $b=4$ thì $c=6$, mà $0<a<b, a\in N \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=1\Rightarrow d=13 \\ a=2\Rightarrow d=12 \\ a=3\Rightarrow d=11 \end{array}\right.$

Khi đó có ba mẫu số liệu thỏa đề bài có giá trị là 1;4;6;13, 2;4;6;12 và 3;4;6;11

Suy ra với mẫu số liệu có các giá trị là 3;4;6;11 thì hiệu của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 24: Thời gian chạy 50m của 20 học sinh được ghi lại trong bảng dưới đây :

Thời gian (giây)	8,3	8,4	8,5	8,7	8,8
Tần số	2	3	9	5	1

Số trung bình cộng thời gian chạy của học sinh là:

A. 8,54 **B.** 4 **C.** 8,50 **D.** 8,53

Lời giải:

Chọn D. $\overline{x}=\dfrac{(8,3.2+8,4.3+8,5.9+8,7.5+8,8.1)}{20}=8,53$

Câu 25: Điểm kiểm tra của 24 học sinh được ghi lại trong bảng sau :

7	2	3	5	8	2
8	5	8	4	9	6
6	1	9	3	6	7
3	6	6	7	2	9

Tìm mốt của điểm điều tra

A. 2 **B.** 7 **C.** 6 **D.** 9

Lời giải:

Chọn C.

Điểm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Tần số	1	3	3	1	2	5	3	3	3	N=24

Ta thấy điểm 6 có tần số lớn nhất nên $M_0=6$

Câu 26: Số trái cam hái được từ 4 cây cam trong vườn là: 2; 8; 12; 16. Số trung vị là

A. 5 **B.** 10 **C.** 14 **D.** 9,5

Lời giải:

Chọn B. ta thấy N chẵn nên số trung vị là: $M_e = \frac{8+12}{2} = 10$

Câu 27: Cho bảng phân bố tần số khối lượng 30 quả trứng gà của một rổ trúng gà:

Khối lượng (g)	Tần số
25	3
30	5
35	10
40	6
45	4
50	2
Cộng	30

a) Tìm số trung vị:

A. 37,5 **B.** 40 **C.** 35 **D.** 75

b) Tìm số mốt:

A. 40 **B.** 35 **C.** 30 **D.** 25

Lời giải:

a) **Chọn C.** ta thấy N chẵn nên số trung vị là: $M_e = \frac{35+35}{2} = 35$

b) **Chọn B.** ta thấy 35(g) có tần số lớn nhất nên: $M_0 = 35$

Câu 28: Có 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Hóa (thang điểm 20). Kết quả như sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Số trung bình là:

A. $\overline{x} = 15,20$ **B.** $\overline{x} = 15,21$ **C.** $\overline{x} = 15,23$ **D.** $\overline{x} = 15,25$

Lời giải:

Chọn C.

$$\overline{x} = \frac{(9.1+10.1+11.3+12.5+13.8+14.13+15.19+16.24+17.14+18.10+19.2)}{100} = 15,23$$

Câu 29: Có 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Hóa (thang điểm 20). Kết quả như sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Số trung vị là:

A. $M_e = 15$ **B.** $M_e = 15,50$ **C.** $M_e = 16$ **D.** $M_e = 16,5$

Lời giải:

Chọn B. ta thấy N=100 chăn nên số trung vị là: $M_e=\frac{15+16}{2}=15,5$

Câu 30: Có 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Hóa (thang điểm 20). Kết quả như sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Phương sai là

A. $s_x^2=3,95$ **B.** $s_x^2=3,96$ **C.** $s_x^2=3,97$ **D.** đáp số khác

Lời giải:

Chọn B. $s_x^2=\overline{x^2}-\left(\overline{x}\right)^2=\frac{1}{N}\sum n_ix_i^2-\left(\frac{1}{N}\sum n_ix_i\right)^2=3,96$ trong đó:

$\frac{1}{N}\sum n_ix_i=\frac{1523}{100}=15,23$; $\frac{1}{N}\sum n_ix_i^2=\frac{23591}{100}=235,91$ (sử dụng máy tính bỏ túi để tính)

Câu 31: Có 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Hóa (thang điểm 20). Kết quả như sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Độ lệch chuẩn

A. $s_x=1,97$ **B.** $s_x=1,98$ **C.** $s_x=1,96$ **D.** $s_x=1,99$

Lời giải:

Chọn D. $s_x=\sqrt{s_x^2}=\sqrt{3,96}=1,99$

Câu 32: Cho bảng phân bố tần số- tần suất ghép lớp khi đo chiều cao(cm) của 40 học sinh nam tại một trường THPT:

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[141;146]	6	15.0
[147;152]	4	10.0
[153;158]	2	5.0
[159;164]	6	15.0
[165;170]	10	25.0
[171;176]	12	30.0
	N = 40	

Chiều cao trung bình là:

A. $\overline{x}=162,4$ **B.** $\overline{x}=160,4$ **C.** $\overline{x}=162,3$ **D.** $\overline{x}=161,4$

Lời giải:

Chọn A.

$$\overline{x}=\frac{\left(\frac{141+146}{2}\right).6+\left(\frac{147+152}{2}\right).4+\left(\frac{153+158}{2}\right).2+\left(\frac{159+164}{2}\right).6+\left(\frac{165+170}{2}\right).10+\left(\frac{171+176}{2}\right).12}{40}=1$$

Câu 33: Chiều cao của 45 học sinh lớp 5 (tính bằng cm) được ghi lại như sau: (lập bảng ghép lớp: [98; 103); [103; 108); [108; 113); [113; 118); [118; 123); [123; 128); [128; 133); [133; 138); [138; 143); [143; 148].

102	102	113	138	111	109	98	114	101
103	127	118	111	130	124	115	122	126
107	134	108	118	122	99	109	106	109
104	122	133	124	108	102	130	107	114
147	104	141	103	108	118	113	138	112

a) Số trung bình cộng:

A. $\overline{x}=116,4$ **B.** $\overline{x}=115,4$ **C.** $\overline{x}=116,3$ **D.** $\overline{x}=166,4$

b) Phương sai là:

A. $s_x^2=155,4$ **B.** $s_x^2=151,4$ **C.** $s_x^2=151,14$ **D.** $s_x^2=152,4$

c) Độ lệch chuẩn:

A. $s_x=13,2$ **B.** $s_x=11,2$ **C.** $s_x=12,3$ **D.** $s_x=13,3$

Lời giải:

Lớp chiều cao	Tần số	Tần suất %	Giá trị đại diện	n_ic_i	$n_ic_i^2$
$[98;103)$	6	13,33	100,5	603,0	60601,5
$[103;108)$	7	15,56	105,5	735,5	77911,75
$[108;113)$	9	20,00	110,5	994,5	109892,25
$[113;118)$	5	11,11	115,5	577,5	66701,25
$[118;123)$	6	13,33	120,5	723,0	87121,5
$[123;128)$	4	8,89	125,5	502,0	63001
$[128;133)$	2	4,44	130,5	261,0	34060,5
$[133;138)$	2	4,44	135,5	271,0	36720,5
$[138;143)$	3	6,67	140,5	421,5	59220,75
$[143;148]$	1	2,22	145,5	145,5	21170,25
N	45	100%		5237,5	616401,25

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

a) Chọn A.

$\overline{x}=\frac{6.100,5+7.105,5+9.110,5+5.115,5+6.120,5+4.125,5+2.130,5+2.135,5+3.140,5+1.145,5}{45}=116,$

b) Chọn B. $s_x^2=\overline{x^2}-\left(\overline{x}\right)^2=\frac{1}{N}\sum n_i x_i^2-\left(\frac{1}{N}\sum n_i x_i\right)^2=\frac{616401,25}{45}-\left(\frac{5237,5}{45}\right)^2=151,4$

c) Chọn C. $s_x=\sqrt{s_x^2}=\sqrt{151,4}=12,3$

Câu 34: Số tiết tự học tại nhà trong 1 tuần (tiết/tuần) của 20 học sinh lớp 10 trường THPT A được ghi lại như sau:

9 15 11 12 16 12 10 14 14 15 16 13 16 8 9 11 10 12 18 18

a) Số trung bình cộng là:

A. $\overline{x}=12,90$ **B.** $\overline{x}=12,95$ **C.** $\overline{x}=12,80$ **D.** $\overline{x}=12,59$

b) Phương sai là:

A. $s_x^2=8,65$ **B.** $s_x^2=8,56$ **C.** $s_x^2=8,55$ **D.** $s_x^2=8,66$

c) Độ lệch chuẩn là:

A. $s_x=2,49$ **B.** $s_x=2,99$ **C.** $s_x=2,94$ **D.** $s_x=2,90$

Lời giải:

Lập bảng tần số- tần suất:

Số tiết	Tần số(n_i)	Tần suất (f_i)%	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
8	1	5	8	64
9	2	10	18	162
10	2	10	20	200
11	2	10	22	242
12	3	15	36	432
13	1	5	13	169
14	2	10	28	392
15	2	10	30	450
16	3	15	48	768
17	0	0	0	0
18	2	10	36	648
N	20	100%	259	3527

a) Chọn B. $\overline{x}=\frac{\sum n_i x_i}{N}=\frac{259}{20}=12,95$

b) Chọn A. $s_x^2=\overline{x^2}-\left(\overline{x}\right)^2=\frac{1}{N}\sum n_i x_i^2-\left(\frac{1}{N}\sum n_i x_i\right)^2=\frac{3527}{20}-\left(\frac{259}{20}\right)^2=8,65$

c) Chọn C. $s_x=\sqrt{s_x^2}=\sqrt{8,65}=2,94$

Câu 35: Điểm trung bình kiểm tra cua 2 nhóm học sinh lớp 10 được cho như sau:

Nhóm 1: (9 học sinh) 1, 2, 3, 5, 6, 6, 7, 8, 9

Nhóm 2: (11 học sinh) 1, 3, 3, 4, 4, 6, 7, 7, 7, 8, 10

Lập bảng phân bố tần số- tần suất ghép lớp: [1, 4]; [5, 6]; [7, 8]; [9, 10] của 2 nhóm:

a) Tính số trung bình cộng nhóm 1:

A. $\overline{x_{n_1}} = 5,39$ **B.** $\overline{x_{n_1}} = 5,93$ **C.** $\overline{x_{n_1}} = 6,39$ **D.** $\overline{x_{n_1}} = 6,93$

b) Tính số trung bình cộng nhóm 2:

A. $\overline{x_{n_2}} = 5,32$ **B.** $\overline{x_{n_2}} = 5,23$ **C.** $\overline{x_{n_2}} = 6,32$ **D.** $\overline{x_{n_2}} = 6,23$

c) Tính phương sai của nhóm 1:

A. $s_{n_1}^2 = 5,65$ **B.** $s_{n_1}^2 = 5,56$ **C.** $s_{n_1}^2 = 5,55$ **D.** $s_{n_1}^2 = 6,65$

d) Tính phương sai của nhóm 2:

A. $s_{n_2}^2 = 6,39$ **B.** $s_{n_2}^2 = 6,93$ **C.** $s_{n_2}^2 = 5,93$ **D.** $s_{n_2}^2 = 6,99$

e) Tính độ lệch chuẩn của nhóm 1:

A. $s_{n_1} = 2,49$ **B.** $s_{n_1} = 2,83$ **C.** $s_{n_1} = 2,88$ **D.** $s_{n_1} = 2,38$

f) Tính độ lệch chuẩn của nhóm 2:

A. $s_{n_2} = 2,59$ **B.** $s_{n_2} = 2,63$ **C.** $s_{n_2} = 2,36$ **D.** $s_{n_2} = 2,66$

Lời giải:

Lập bảng tần số:

		Nhóm 1				Nhóm 2			
Lớp điểm	đại diện c_i	Tần số n_{i_1}	Tần suất f_{i_1} %	$n_{i_1}c_{i_1}$	$n_{i_1}c_{i_1}^2$	Tần số n_{i_2}	Tần suất f_{i_2} %	$n_{i_2}c_{i_2}$	$n_{i_2}c_{i_2}^2$
[1, 4]	2,5	3	33	7,5	18,75	5	45,5	12,5	31,25
[5, 6]	5,5	3	33	16,5	90,75	1	9,1	5,5	30,25
[7, 8]	7,5	2	22	15	112,5	4	36,3	30	225
[9, 10]	9,5	1	11	9,5	90,25	1	9,1	9,5	90,25
N		9	100%	48,5	312,25	11	100%	57,5	376,75

a) Chọn A. $\overline{x_{n_1}} = \dfrac{\sum n_{i_1}x_{i_1}}{N_{n_1}} = \dfrac{48,5}{9} = 5,39$

b) Chọn B. $\overline{x_{n_2}} = \dfrac{\sum n_{i_2}x_{i_2}}{N} = \dfrac{57,5}{11} = 5,23$

c) Chọn A. $s_{n_1}^2 = \overline{x_{n_1}^2} - \left(\overline{x_{n_1}}\right)^2 = \dfrac{1}{N_1}\sum n_{i_1}x_{i_1}^2 - \left(\dfrac{1}{N_1}\sum n_{i_1}x_{i_1}\right)^2 = \dfrac{312,25}{9} - \left(\dfrac{48,5}{9}\right)^2 = 5,65$

d) Chọn B. $s_{n_2}^2 = \overline{x_{n_2}^2} - \left(\overline{x_2}\right)^2 = \dfrac{1}{N_2}\sum n_{i_2}x_{i_2}^2 - \left(\dfrac{1}{N_2}\sum n_{i_2}x_{i_2}\right)^2 = \dfrac{376,75}{11} - \left(\dfrac{57,5}{11}\right)^2 = 6,93$

e) Chọn D. $s_{n_1}=\sqrt{s_x^2}=\sqrt{5,65}=2,38$

f) Chọn B. $s_{n_2}=\sqrt{s_x^2}=\sqrt{6,93}=2,63$

Câu 36: Điểm thi của 32 học sinh trong kì thi Tiếng Anh (thang điểm 100) như sau :

68	79	65	85	52	81	55	65	49	42	68	66	56	57	65	72
69	60	50	63	74	88	78	95	41	87	61	72	59	47	90	74

Lập bảng phân bố tần số- tần suất ghép lớp:

$[40;50);[50;60);[60;70);[70;80);[80;90);[90;100]$

Số điểm trung bình là:

A. $\overline{x}=66,88$ **B.** $\overline{x}=68,68$ **C.** $\overline{x}=88,66$ **D.** $\overline{x}=68,88$

Lời giải:

Chọn A.

Lớp điểm	Tần số n_i	Tần suất f_i %	Đại diện c_i	n_ic_i	$n_ic_i^2$
$[40;50)$	4	13	45	180	8100
$[50;60)$	6	19	55	330	18150
$[60;70)$	10	31	65	650	42250
$[70;80)$	6	19	75	450	33750
$[80;90)$	4	13	85	340	28900
$[90;100]$	2	6	95	190	18050
N	32	100%		2140	149200

$\overline{x}=\dfrac{4.45+6.55+10.65+6.75+4.85+2.95}{32}=66,88$ hoặc tính $\overline{x}=\dfrac{\sum n_ic_i}{N}=\dfrac{2140}{32}=66,88$

Câu 37: Điểm thi của 32 học sinh trong kì thi Tiếng Anh (thang điểm 100) như sau :

68	79	65	85	52	81	55	65	49	42	68	66	56	57	65	72
69	60	50	63	74	88	78	95	41	87	61	72	59	47	90	74

Lập bảng phân bố tần số- tần suất ghép lớp:

$[40;50);[50;60);[60;70);[70;80);[80;90);[90;100]$

Số phương sai là:

A. $s_x^2=190,23$ **B.** $s_x^2=192,03$ **C.** $s_x^2=193,20$ **D.** $s_x^2=192,23$

Lời giải:

Chọn A.

Lớp điểm	Tần số n_i	Tần suất f_i %	Đại diện c_i	n_ic_i	$n_ic_i^2$
$[40;50)$	4	13	45	180	8100

$[50;60)$	6	19	55	330	18150
$[60;70)$	10	31	65	650	42250
$[70;80)$	6	19	75	450	33750
$[80;90)$	4	13	85	340	28900
$[90;100]$	2	6	95	190	18050
N	32	100%		2140	149200

$$s_x^2 = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2 = \frac{1}{N}\sum n_i x_i^2 - \left(\frac{1}{N}\sum n_i x_i\right)^2 = \frac{149200}{32} - \left(\frac{2140}{32}\right)^2 = 190,23$$

Câu 38: Điểm thi của 32 học sinh trong kì thi Tiếng Anh (thang điểm 100) như sau :

68	79	65	85	52	81	55	65	49	42	68	66	56	57	65	72
69	60	50	63	74	88	78	95	41	87	61	72	59	47	90	74

Lập bảng phân bố tần số- tần suất ghép lớp:
$[40;50);[50;60);[60;70);[70;80);[80;90);[90;100]$
Độ lệch chuẩn là:

A. $s_x = 13,79$ **B.** $s_x = 19,73$ **C.** $s_x = 17,39$ **D.** $s_x = 17,97$

Lời giải:

Chọn A.

Lớp điểm	Tần số n_i	Tần suất f_i %	Đại diện c_i	$n_i c_i$	$n_i c_i^2$
$[40;50)$	4	13	45	180	8100
$[50;60)$	6	19	55	330	18150
$[60;70)$	10	31	65	650	42250
$[70;80)$	6	19	75	450	33750
$[80;90)$	4	13	85	340	28900
$[90;100]$	2	6	95	190	18050
N	32	100%		2140	149200

$$s_x = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{190,23} = 13,79$$

Câu 39: Tiền lãi (nghìn đồng) trong 30 ngày được khảo sát ở một quầy bán báo:

81	37	74	65	31	63	58	82	67	77	63	46	30	53	73
51	44	52	92	93	53	85	77	47	42	57	57	85	55	64

Lập bảng phân bố tần số- tần suất ghép lớp: [29.5; 40.5), [40.5; 51.5), [51.5; 62.5), [62.5; 73.5), [73.5; 84.5), [84.5; 95.5]
Số trung bình cộng là:

A. $\overline{x}=62,33$ **B.** $\overline{x}=63,23$ **C.** $\overline{x}=66,23$ **D.** $\overline{x}=68,88$

Lời giải:

Chọn B.

Lớp tiền lãi	Tần số n_i	Tần suất f_i %	Đại diện c_i	n_ic_i	$n_ic_i^2$
$[29,5;40,5)$	3	10	35	105	3675
$[40,5;51,5)$	5	17	46	230	10580
$[51,5;62,5)$	7	23	57	399	22743
$[62,5;73,5)$	6	20	68	408	27744
$[73,5;84,5)$	5	17	79	395	31205
$[84,5;95,5]$	4	13	90	360	32400
N				1897	128347

$$\overline{x}=\frac{\sum n_ic_i}{N}=\frac{1897}{30}=63,23$$

Câu 40: Tiền lãi (nghìn đồng) trong 30 ngày được khảo sát ở một quầy bán báo:

81	37	74	65	31	63	58	82	67	77	63	46	30	53	73
51	44	52	92	93	53	85	77	47	42	57	57	85	55	64

Lập bảng phân bố tần số- tần suất ghép lớp: [29.5; 40.5), [40.5; 51.5), [51.5; 62.5), [62.5; 73.5), [73.5; 84.5), [84.5; 95.5]

Số phương sai là:

A. $s_x^2=279,78$ **B.** $s_x^2=297,78$ **C.** $s_x^2=299,78$ **D.** $s_x^2=229,78$

Lời giải:

Chọn A.

Lớp tiền lãi	Tần số n_i	Tần suất f_i %	Đại diện c_i	n_ic_i	$n_ic_i^2$
$[29,5;40,5)$	3	10	35	105	3675
$[40,5;51,5)$	5	17	46	230	10580
$[51,5;62,5)$	7	23	57	399	22743
$[62,5;73,5)$	6	20	68	408	27744
$[73,5;84,5)$	5	17	79	395	31205
$[84,5;95,5]$	4	13	90	360	32400
N				1897	128347

Giáo viên có nhu cầu sở hữu trọn bộ file word Bài giảng Toán 9,10,11, 12 có lời giải chi tiết vui lòng liên hệ zalo Trần Đình Cư: 0834 332 133 để được hỗ trợ tối đa . "Tránh mua các trang và các cá nhân khác"
Phụ huynh và học sinh có nhu cầu tham gia các lớp toán chất lượng Thầy Cư-Xã tắc- TP Huế vui lòng
Inbox face: Trần Đình Cư hoặc liên hệ trực tiếp qua SĐT:0834 332 133

$$s_x^2=\overline{x^2}-\left(\overline{x}\right)^2=\frac{1}{N}\sum n_i x_i^2-\left(\frac{1}{N}\sum n_i x_i\right)^2=\frac{128347}{30}-\left(\frac{1897}{30}\right)^2=279,78$$

Câu 41: Tiền lãi (nghìn đồng) trong 30 ngày được khảo sát ở một quầy bán báo:

81	37	74	65	31	63	58	82	67	77	63	46	30	53	73
51	44	52	92	93	53	85	77	47	42	57	57	85	55	64

Lập bảng phân bố tần số- tần suất ghép lớp: [29.5; 40.5), [40.5; 51.5), [51.5; 62.5), [62.5; 73.5), [73.5; 84.5), [84.5; 95.5]

Độ lệch chuẩn là:

A. $s_x=16,73$ **B.** $s_x=17,63$ **C.** $s_x=13,67$ **D.** $s_x=16,37$

Lời giải:

Chọn A.

Lớp tiền lãi	Tần số n_i	Tần suất f_i %	Đại diện c_i	n_ic_i	$n_ic_i^2$
$[29,5;40,5)$	3	10	35	105	3675
$[40,5;51,5)$	5	17	46	230	10580
$[51,5;62,5)$	7	23	57	399	22743
$[62,5;73,5)$	6	20	68	408	27744
$[73,5;84,5)$	5	17	79	395	31205
$[84,5;95,5]$	4	13	90	360	32400
N				1897	128347

$$s_x=\sqrt{s_x^2}=\sqrt{279,78}=16,73$$

Câu 42: Sau một tháng gieo trồng một giống hoa, người ta thu được số liệu sau về chiều cao (đv:mm) của các cây hoa được trồng:

Nhóm	Chiều cao	Số cây đạt được
1	Từ 100 đến 199	20
2	Từ 200 đến 299	75
3	Từ 300 đến 399	70
4	Từ 400 đến 499	25
5	Từ 500 đến 599	10

Số trung bình cộng là:

A. $\overline{x}=315$ **B.** $\overline{x}=351$ **C.** $\overline{x}=531$ **D.** $\overline{x}=135$

Lời giải:

Chọn A.

Lớp	Tần số n_i	Tần suất f_i	Đại diện c_i	n_ic_i	$n_ic_i^2$
$[100;199]$	20	10%	150	3000	450000
$[200;299]$	75	38%	250	18750	4687500
$[300;399]$	70	35%	350	24500	8575000
$[400;499]$	25	13%	450	11250	5062500
$[500;599]$	10	5%	550	5500	3025000
N	200	100%		63000	21800000

$$\overline{x}=\frac{\sum n_ic_i}{N}=\frac{63000}{200}=315$$

Câu 43: Sau một tháng gieo trồng một giống hoa, người ta thu được số liệu sau về chiều cao (đv:mm) của các cây hoa được trồng:

Nhóm	Chiều cao	Số cây đạt được
1	Từ 100 đến 199	20
2	Từ 200 đến 299	75
3	Từ 300 đến 399	70
4	Từ 400 đến 499	25
5	Từ 500 đến 599	10

Phương sai là:

A. $s_x^2=9775$ **B.** $s_x^2=9757$ **C.** $s_x^2=9577$ **D.** $s_x^2=7957$

Lời giải:

Chọn A.

Lớp	Tần số n_i	Tần suất f_i	Đại diện c_i	n_ic_i	$n_ic_i^2$
$[100;199]$	20	10%	150	3000	450000
$[200;299]$	75	38%	250	18750	4687500
$[300;399]$	70	35%	350	24500	8575000
$[400;499]$	25	13%	450	11250	5062500
$[500;599]$	10	5%	550	5500	3025000
N	200	100%		63000	21800000

$$s_x^2=\overline{x^2}-\left(\overline{x}\right)^2=\frac{1}{N}\sum n_ix_i^2-\left(\frac{1}{N}\sum n_ix_i\right)^2=\frac{21800000}{200}-\left(\frac{63000}{200}\right)^2=9775$$

Câu 44: Sau một tháng gieo trồng một giống hoa, người ta thu được số liệu sau về chiều cao (đv:mm) của các cây hoa được trồng:

Nhóm	Chiều cao	Số cây đạt được
1	Từ 100 đến 199	20
2	Từ 200 đến 299	75
3	Từ 300 đến 399	70
4	Từ 400 đến 499	25
5	Từ 500 đến 599	10

Độ lệch chuẩn là:

A. $s_x = 98,87$ **B.** $s_x = 97,88$ **C.** $s_x = 89,78$ **D.** $s_x = 78,98$

Lời giải:

Chọn A.

Lớp	Tần số n_i	Tần suất f_i	Đại diện c_i	$n_i c_i$	$n_i c_i^2$
$[100;199]$	20	10%	150	3000	450000
$[200;299]$	75	38%	250	18750	4687500
$[300;399]$	70	35%	350	24500	8575000
$[400;499]$	25	13%	450	11250	5062500
$[500;599]$	10	5%	550	5500	3025000
N	200	100%		63000	21800000

$s_x = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{9775} = 98,87$

Câu 45: Tiền công nhật của 65 nhân viên trong xí nghiệp tư nhân được thông kê như sau(đv:ngàn đồng)

Các lớp tiền lương	Số nhân viên
$[50;60)$	8
$[60;70)$	10
$[70;80)$	16
$[80;90)$	14
$[90;100)$	10
$[100;110)$	5
$[110;120)$	2

Tiền công trung bình là:

A. $\overline{x} = 79,77$ **B.** $\overline{x} = 77,97$ **C.** $\overline{x} = 97,97$ **D.** $\overline{x} = 99,77$

Lời giải:

Chọn A.

Lớp	Tần số n_i	Tần suất f_i	Đại diện c_i	n_ic_i	$n_ic_i^2$
$[50;60)$	8	12,3%	55	440	24200
$[60;70)$	10	15,4%	65	650	42250
$[70;80)$	16	24,6%	75	1200	90000
$[80;90)$	14	21,5%	85	1190	101150
$[90;100)$	10	15,4%	95	950	90250
$[100;110)$	5	7,7%	105	525	55126
$[110;120)$	2	3,1%	115	230	26450
N		100%		5185	429425

$$\bar{x}=\frac{\sum n_ic_i}{N}=\frac{5185}{65}=79,77$$

Câu 46: Tiền công nhật của 65 nhân viên trong xí nghiệp tư nhân được thông kê như sau(đv:ngàn đồng)

Các lớp tiền lương	Số nhân viên
$[50;60)$	8
$[60;70)$	10
$[70;80)$	16
$[80;90)$	14
$[90;100)$	10
$[100;110)$	5
$[110;120)$	2

Phương sai là:

A. $s_x^2=234,3$ **B.** $s_x^2=243,2$ **C.** $s_x^2=442,2$ **D.** $s_x^2=324,2$

Lời giải:

Chọn B.

Lớp	Tần số n_i	Tần suất f_i	Đại diện c_i	n_ic_i	$n_ic_i^2$
$[50;60)$	8	12,3%	55	440	24200
$[60;70)$	10	15,4%	65	650	42250
$[70;80)$	16	24,6%	75	1200	90000
$[80;90)$	14	21,5%	85	1190	101150
$[90;100)$	10	15,4%	95	950	90250

$[100;110)$	5	7,7%	105	525	55126
$[110;120)$	2	3,1%	115	230	26450
N		100%		5185	429425

$$s_x^2 = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2 = \frac{1}{N}\sum n_i x_i^2 - \left(\frac{1}{N}\sum n_i x_i\right)^2 = \frac{429425}{65} - \left(\frac{5185}{65}\right)^2 = 243,2$$