

BÀI 3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC TÍCH PHÂN

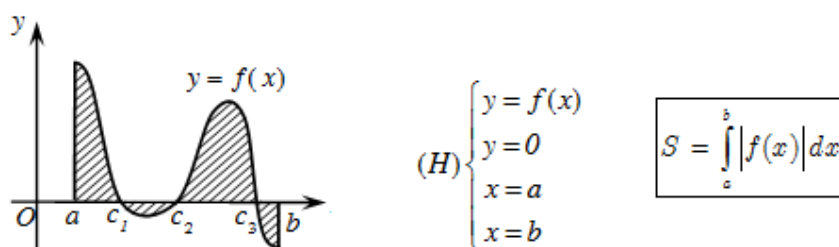
A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN NẮM

I. DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

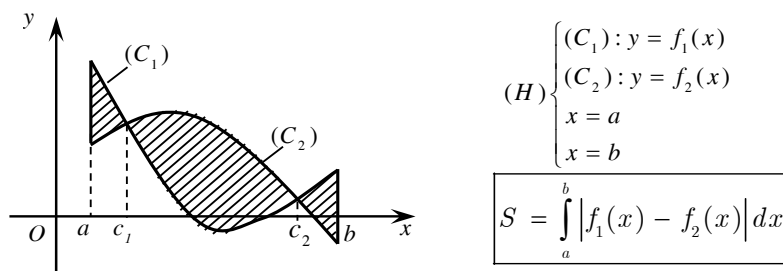
1. Định lý 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $[a; b]$. Khi đó diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và 2 đường thẳng $x = a, x = b$ là: $S = \int_a^b f(x) dx$

2. Bài toán liên quan

Bài toán 1: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được xác định: $S = \int_a^b |f(x)| dx$



Bài toán 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được xác định: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$



Chú ý: Nếu trên đoạn $[a; b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$

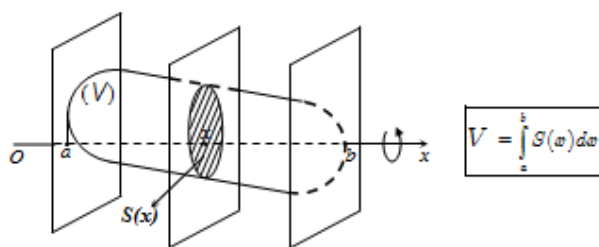
Bài toán 3: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y), x = h(y)$ và hai đường thẳng $y = c, y = d$ được xác định: $S = \int_c^d |g(y) - h(y)| dy$

Bài toán 4: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị $(C_1): f_1(x), (C_2): f_2(x)$ là: $S = \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| dx$. Trong đó: x_1, x_2 tương ứng là nghiệm của phương trình $f(x) = g(x), (x_1 < x_2)$

II. THỂ TÍCH CỦA KHỐI TRÒN XOAY

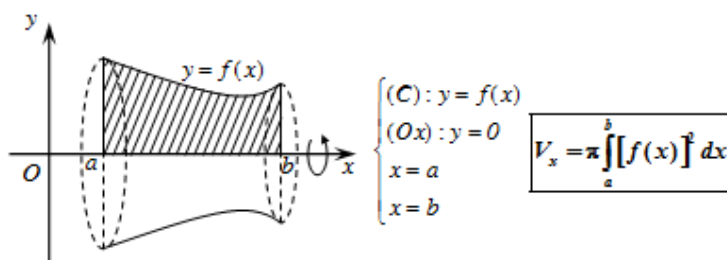
1. Thể tích vật thể

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b ; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x , ($a \leq x \leq b$). Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$.

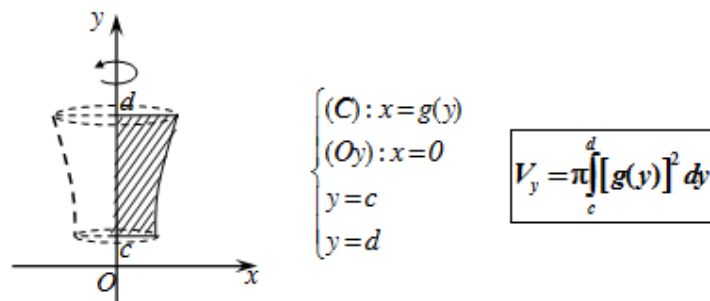


2. Thể tích khối tròn xoay

Bài toán 1: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox :



Bài toán 2: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy :



Bài toán 3: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường

$y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox : $V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tính diện tích giới hạn bởi 1 đồ thị

1. Phương pháp:

a/ Phương pháp 1:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

* Xét dấu biểu thức $f(x)$; $x \in [a; b]$, phá dấu trị tuyệt đối và tính tích phân.

b/ Phương pháp 2:

* Giải phương trình $f(x) = 0$; chọn nghiệm trong $[a; b]$. Giả sử các nghiệm là $\alpha; \beta$ với $\alpha < \beta$.

* Áp dụng tính chất liên tục của hàm số $f(x)$ trên $[a; b]$; ta có:

$$S = \left| \int_a^\alpha f(x) dx \right| + \left| \int_\alpha^\beta f(x) dx \right| + \left| \int_\beta^b f(x) dx \right|$$

2. Các Bài tập mẫu:

Bài tập 1: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^2$, trục hoành và đường thẳng $x = 2$.

A. $S = \frac{8}{9}$.

B. $S = \frac{16}{3}$.

C. $S = 16$.

D. $S = \frac{8}{3}$.

Hướng dẫn giải

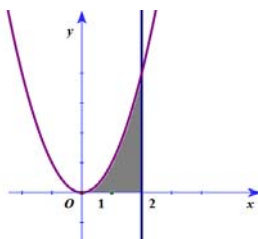
CHỌN D

Nhận thấy rằng, để tính diện tích ta cần phải tìm được 2 cận. Để tìm thêm cận còn lại ta giải phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (P): $y = x^2$ với trục hoành.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (P): $y = x^2$ với trục hoành: $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Áp dụng công thức ta có $S = \int_0^2 |x^2| dx = \frac{8}{3}$.

Nhận xét: Nếu ta vẽ đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $x = 2$ ta dễ dàng xác định được hình phẳng giới hạn bởi các đường này. Từ đó ta dễ dàng tính được diện tích S.



Bài tập 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = x^2 \cdot e^x$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$

A. $e - 2$.

B. $2 + e$.

C. $2 - e$.

D. 1.

Hướng dẫn giải

CHỌN A

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ta có:

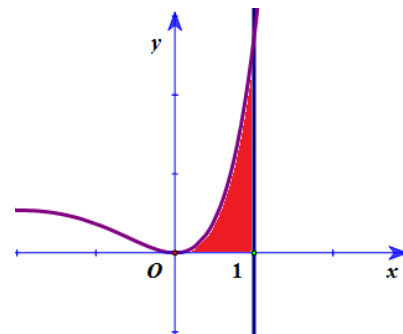
$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 x^2 e^x dx = \int_0^1 x^2 d(e^x) = x^2 e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x d(x^2) \\ &= e - 2 \int_0^1 x e^x dx = e - 2 \int_0^1 x d(e^x) = e - 2 x e^x \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 e^x dx \end{aligned}$$

$$= e - 2e + 2e^x \Big|_0^1 = -e + 2e - 2 = e - 2.$$

Lời bình: Bài toán trên đã có 1 cận, ta chỉ cần tìm thêm 1 cận nữa bằng cách giải phương trình hoành độ giao điểm. Sau đó áp dụng công thức.

Nếu vẽ đồ thị bài này để tìm hình phẳng giới hạn bởi các đường là không nên vì đồ thị hàm số hơi phức tạp. Việc tìm được công thức $S = \int_0^1 x^2 e^x dx$

và tính tích phân này ta có thể dùng MTCT để tính và chọn Chọn.



Bài tập 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = \sqrt{1-x^2}$ và trục hoành:

A. $\pi - 2$.

B. $\frac{\pi}{4}$.

C. 1.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

CHỌN D

Phương trình hoành độ giao điểm của, Ox là $\sqrt{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Khi đó, diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Đặt $x = \sin t \Leftrightarrow dx = \cos t dt$ và $\begin{cases} x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = -1 \rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Suy ra $S = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2}$

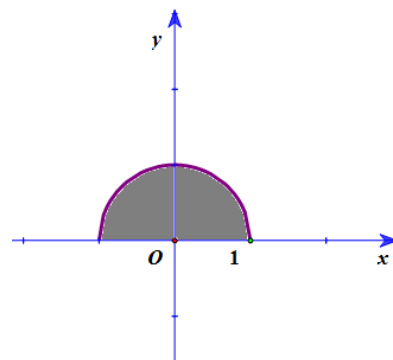
Lời bình: Bài toán trên chưa có cận, ta phải giải phương trình hoành độ giao điểm để tìm cận. Sau đó áp dụng công thức. Việc tìm được công

thức $S = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ và tính tích phân này tương đối phức tạp, do đó ta

có thể dùng MTCT để tính và chọn Chọn.

Nếu vẽ được đồ thị thì ta xác định được hình phẳng và diện tích của nó dễ dàng, đó chính là diện tích của nửa đường tròn bán kính bằng 1. Do

đó: $S = \frac{1}{2} \pi R^2 = \frac{\pi}{2}$.



Bài tập 4: Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \ln x, x = e, x = \frac{1}{e}$ và trục hoành

A. $S = 2 - \frac{2}{e}$.

B. $S = 1 - \frac{1}{e}$.

C. $S = 2 + \frac{2}{e}$.

D. $S = 1 + \frac{1}{e}$.

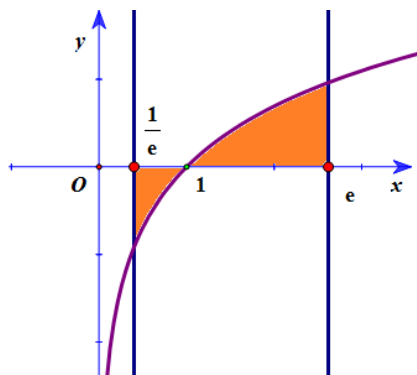
Hướng dẫn giải

CHỌN A

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y = \ln x$ và trục hoành là

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$S = \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx = -\int_{\frac{1}{e}}^1 \ln x dx + \int_1^e \ln x dx = (x - x \ln x) \Big|_{\frac{1}{e}}^1 + (x \ln x - x) \Big|_1^e = 2 - \frac{2}{e}.$$



Bài tập 5: Diện tích tam giác được cắt ra bởi các trục tọa độ và tiếp tuyến của đồ thị $y = \ln x$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox là:

A. $S = \frac{2}{3}$

B. $S = \frac{1}{4}$

C. $S = \frac{2}{5}$

D. $S = \frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Ta có: $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}, y'(1) = 1$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = \ln x$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox là:

$$y = 1(x - 1) + 0 \text{ hay } y = x - 1$$

Đường thẳng $y = x - 1$ cắt Ox tại điểm $A(1; 0)$ và cắt Oy tại điểm $B(0; -1)$.

Tam giác vuông OAB có $OA = 1, OB = 1 \Rightarrow S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2}$

$$S_D = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^0 |f(x)| dx + \int_0^b |f(x)| dx = -\int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx$$

Bài tập 6: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = 2\sqrt{ax}$ ($a > 0$), trục hoành và đường thẳng $x = a$ bằng ka^2 . Tính giá trị của tham số k .

A. $k = \frac{7}{3}$

B. $k = \frac{4}{3}$

C. $k = \frac{12}{5}$

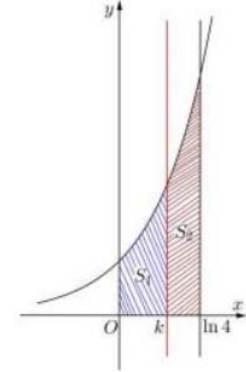
D. $k = \frac{6}{5}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Có } S = \int_0^a |2\sqrt{ax}| dx = 2\sqrt{a} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a = \frac{4}{3} a^2 = ka^2 \Rightarrow k = \frac{4}{3}$$

Bài tập 7: Cho hình cong giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ với $0 < k < \ln 4$ chia thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



A. $k = \frac{2}{3} \ln 4$

B. $k = \ln 2$

C. $k = \ln \frac{8}{3}$

D. $k = \ln 3$

Hướng dẫn giải**Chọn D**

$$\text{Do } S_1 = 2S_2 \Rightarrow S_1 = \frac{2}{3} S = \frac{2}{3} \int_0^{\ln 4} |e^x| dx = \frac{2}{3} \int_0^{\ln 4} e^x dx = \frac{2}{3} e^x \Big|_0^{\ln 4} = 2$$

$$\text{Do đó: } S_1 = \int_0^k |e^x| dx = e^k - 1 = 2 \Leftrightarrow e^k = 3 \Leftrightarrow k = \ln 3$$

Dạng 2: Tính diện tích giới hạn bởi 2 hai đồ thị**1. Phương pháp:**

Công thức tính $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$. Tính như dạng 1.

2. Một số bài tập mẫu

Bài tập 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị

$$y = \frac{1}{\cos^2 x}; y = \frac{1}{\sin^2 x}; x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{3}$$

Lời giải

Ta có: $S = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left| \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right| dx$

Trong trường hợp này nếu chọn cách xét dấu biểu thức $y = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}$; $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right]$

hoặc vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}$; $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right]$ là khá khó khăn.

Vì vậy ta chọn cách sau:

+ Xét phương trình: $\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} = 0$; $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right] \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right]$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0; \quad x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3} \right] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Từ đó suy ra: } S = \left| \int_6^{\pi/4} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx \right| + \left| \int_{4/4}^{\pi/3} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx \right|$$

$$\Rightarrow S = |(\tan x + \cot x) \Big|_{\pi/6}^{\pi/4}| + |(\tan x + \cot x) \Big|_{\pi/4}^{\pi/3}| = 2 \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2 \right).$$

Bài tập 2 : Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x^2 + 1}$; $y = \frac{x^2}{2}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị trên:

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vì vậy hình phẳng đã cho có diện tích là: } S = \int_{-1}^1 \left| \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{x^2}{2} \right| dx$$

Do trên $(-1; 1)$ phương trình $\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x^2}{2}$ vô nghiệm nên ta có:

$$S = \int_{-1}^1 \left| \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{x^2}{2} \right| dx = \left| \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{x^2}{2} \right) dx \right| = \left| \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx - \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2} dx \right|$$

$$\text{Tính } I_1 = \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx.$$

$$+/\text{ Đặt } x = \tan t; \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$$

$$+/\text{ Đổi cận: } \begin{cases} x = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4} \\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow I_1 = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} dt = \frac{\pi}{2}$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{3}$$

$$\text{Thay thế vào ta được: } S = \left| \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \right| = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

Bài tập 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = |x^2 - 4x + 3|$ và $y = 3$.

Hướng dẫn giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị trên:

$$|x^2 - 4x + 3| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 3 \\ x^2 - 4x + 3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } S = \int_0^4 |x^2 - 4x + 3| - 3 \, dx = \int_0^4 (x^2 - 4x + 3 - 3) \, dx$$

$$\Rightarrow S = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3 - 3) \, dx + \int_1^3 (x^2 - 4x + 3 - 3) \, dx + \int_3^4 (x^2 - 4x + 3 - 3) \, dx$$

$$\Rightarrow S = \int_0^1 (x^2 - 4x) \, dx + \int_1^3 (-x^2 + 4x - 6) \, dx + \int_3^4 (x^2 - 4x) \, dx$$

$$\Rightarrow S = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right) \Big|_0^1 + \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 6x \right) \Big|_1^3 + \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right) \Big|_3^4 = 8.$$

Bài tập 4: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị: $y = \sin |x|$; $y = |x| - \pi$.

Hướng dẫn giải

Xét phương trình hoành độ: $\sin |x| = |x| - \pi$

Đặt $|x| = t$

Khi đó trở thành: $\sin t = t - \pi \Leftrightarrow \sin t - t + \pi = 0$

Xét hàm số $f(t) = \sin t - t + \pi$; $t \in [0, +\infty)$.

$$\Rightarrow f'(t) = \cos t - 1 \leq 0 \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

BBT của hàm số $f(t)$ như sau:

t	0	π	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	-
$f(t)$	π	0	$-\infty$

$\Rightarrow$ phương trình có nghiệm duy nhất $t = \pi$.

$\Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x = -\pi$ và $x = \pi$.

$$\Rightarrow S = \int_{-\pi}^{\pi} |\sin |x|| - |x| + \pi \, dx = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (\sin |x| - |x| + \pi) \, dx \right|.$$

3. Bài tập

Bài tập 1: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P): $y = -x^2 + 3x + 3$ và đường thẳng (d): $y = 2x + 1$ là:

A. $\frac{7}{3}$

B. $\frac{13}{3}$

C. $\frac{19}{6}$

D. 11

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Xét phương trình } -x^2 + 3x + 3 = 2x + 1 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P): $y = -x^2 + 3x + 3$ và đường thẳng (d): $y = 2x + 1$ là

$$S = \int_{-1}^2 \left| (-x^2 + 3x + 3) - (2x + 1) \right| dx = \int_{-1}^2 (2 + x - x^2) dx = \left(2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{13}{3}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{13}{3}.$$

Bài tập 2: Parabol $y = \frac{x^2}{2}$ chia hình tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính $2\sqrt{2}$ thành 2 phần. Tỉ số diện tích của chúng thuộc khoảng nào:

A. (0,4;0,5)

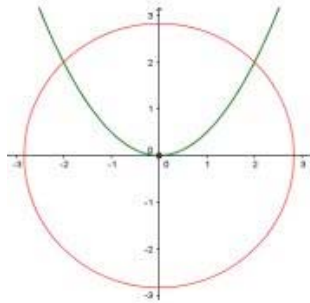
B. (0,5;0,6)

C. (0,6;0,7)

D. (0,7;0,8)

Hướng dẫn giải

Chọn A



$$\text{Phương trình đường tròn: } x^2 + y^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 8 - y^2$$

$$\text{Thế vào phương trình parabol, ta được } y = \frac{8 - y^2}{2} \Leftrightarrow y^2 + 2y - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Diện tích phần được tạo bởi phần đường tròn phía trên với Parabol là:

$$S_1 = \int_{-2}^2 \left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \int_{-2}^2 \sqrt{8 - x^2} dx - \int_{-2}^2 \frac{x^2}{2} dx = I_1 - I_2; \quad I_2 = \int_{-2}^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{6} \Big|_{-2}^2 = \frac{8}{3}$$

$$\text{Tính } I_1 = \int_{-2}^2 \sqrt{8 - x^2} dx = 2 \int_0^2 \sqrt{8 - x^2} dx$$

$$\text{Đặt } x = 2\sqrt{2} \sin t \Rightarrow dx = 2\sqrt{2} \cos t dt; \quad x = 0 \rightarrow t = 0; \quad x = 2 \rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

$$I_1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sqrt{2} \cos t \cdot 2\sqrt{2} \cos t dt = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2t + 1}{2} dt = 4 + 2\pi$$

$$S_1 = I_1 - I_2 = 4 + 2\pi - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} + 2\pi$$

$$\text{Diện tích hình tròn: } S = \pi R^2 = 8\pi \Rightarrow S_2 = S - S_1 = 8\pi - \left(\frac{4}{3} + 2\pi\right) = 6\pi - \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{4}{3} + 2\pi}{6\pi - \frac{4}{3}} \approx 0,435 \in (0,4;0,5).$$

Bài tập 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ và đồ thị hàm số

$$y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$$

A. $2\pi + 4$

B. $2\pi + \frac{4}{3}$

C. $2\pi - \frac{4}{3}$

D. $\frac{8}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -16(1) \\ x^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}. \text{ Khi đó } S = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left| \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \right| dx = 2\pi + \frac{4}{3}$$

Bài tập 4: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my = x^2$, $mx = y^2$ (với $m > 0$).
Tìm giá trị của m để $S = 3$.

A. $m = 1$.

B. $m = 2$.

C. $m = 3$.

D. $m = 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Vì $m > 0$ nên từ $my = x^2$ ta suy $y = \frac{x^2}{m} \geq 0$;

Từ $mx = y^2$ nên $x \geq 0$ và $y = \sqrt{mx}$.

$$\text{Xét phương trình } \frac{x^2}{m} = \sqrt{mx} \Leftrightarrow x^4 = m^3 x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m \end{cases}$$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_0^m \left| \sqrt{mx} - \frac{x^2}{m} \right| dx = \left| \int_0^m \left(\sqrt{mx} - \frac{x^2}{m} \right) dx \right|$$

$$= \left| \left(\frac{2\sqrt{m}}{3} \cdot x\sqrt{x} - \frac{x^3}{3m} \right) \right|_0^m = \left| \frac{1}{3} m^2 \right| = \frac{1}{3} m^2$$

Yêu cầu bài toán $S = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}m^2 = 3 \Leftrightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = 3$ (vì $m > 0$).

Bài tập 5: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm $y = x^2$ và $y = \frac{2x}{x-1}$ là

$S = a + b \ln 2$ với a, b là những số hữu tỷ. Giá trị của $a + b$ là

A. $-\frac{1}{3}$.

B. 2.

C. $-\frac{2}{3}$.

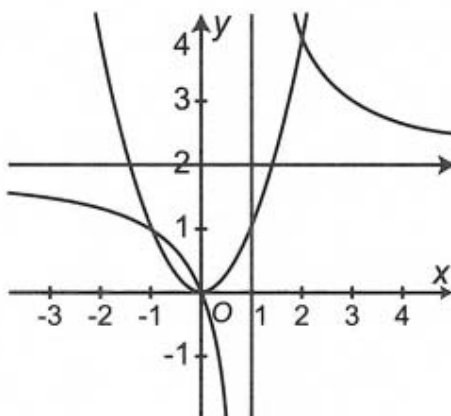
D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm của $(C_1): y = x^2$ và $(C_2): y = \frac{2x}{x-1}$ là

$$x^2 = \frac{2x}{x-1} (x \neq 1) \Rightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$



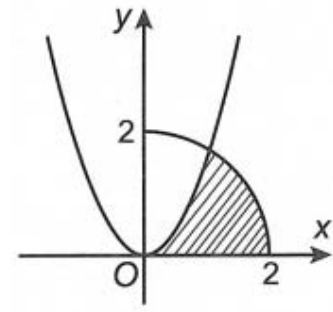
Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_{-1}^0 \left(\frac{2x}{x-1} - x^2 \right) dx = \int_{-1}^0 \left(2 + \frac{2}{x-1} - x^2 \right) dx = \left(2x + 2 \ln |x-1| - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{5}{3} - 2 \ln 2$$

Suy ra $a = \frac{5}{3}$ và $b = -2$

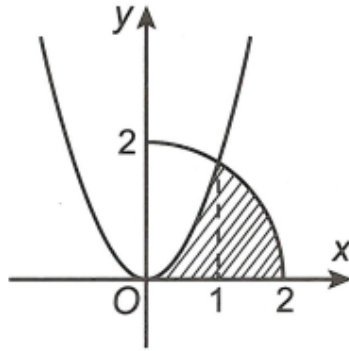
Vậy $a + b = -\frac{1}{3}$

Bài tập 6: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4-x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) là



- A. $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{12}$. B. $\frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$.
C. $\frac{4\pi + 2\sqrt{3} - 3}{6}$. D. $\frac{5\sqrt{3} - 2\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải



Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y = \sqrt{3}x^2$ và cung tròn $y = \sqrt{4-x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) là $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{3}x^2 \Leftrightarrow 4-x^2 = 3x^4 \Leftrightarrow x=1$.

Diện tích của (H) là

$$S = \int_0^1 \sqrt{3}x^2 dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{3}x^3 \Big|_0^1 + I = \frac{\sqrt{3}}{3} + I \text{ với } I = \int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

$$\text{Đặt } x = 2\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = 2\cos t dt$$

$$\text{Đổi cận } x=1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}, x=2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

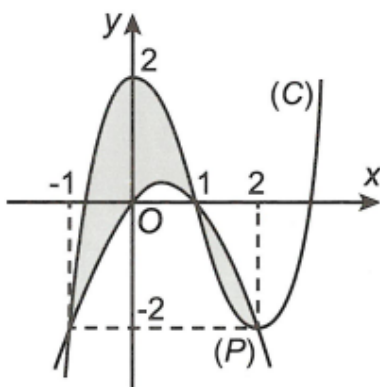
$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2\cos t dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2(1+\cos 2t) dt = (2x + \sin 2t) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{\sqrt{3}}{3} + I = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$$

Chọn B.

Bài tập 7: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** của hình vẽ có diện tích bằng



A. $\frac{37}{12}$.

B. $\frac{7}{12}$.

C. $\frac{11}{12}$.

D. $\frac{5}{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Vì đồ thị hàm bậc ba và đồ thị hàm bậc hai cắt trục tung tại các điểm có tung độ lần lượt là $y = 2$ và $y = 0$ nên ta xét hai hàm số là $y = ax^3 + bx^2 + cx + 2$, $y = mx^2 + nx$ (với $a, m \neq 0$).

Suy ra (C): $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$ và (P): $y = g(x) = mx^2 + nx$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) là:

$$ax^3 + bx^2 + cx + 2 = mx^2 + nx \Leftrightarrow (ax^3 + bx^2 + cx + 2) - (mx^2 + nx) = 0.$$

$$\text{Đặt } P(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + 2) - (mx^2 + nx).$$

Theo giả thiết, (C) và (P) cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$ nên $P(x) = a(x+1)(x-1)(x-2)$.

$$\text{Ta có } P(0) = 2a.$$

$$\text{Mặt khác, ta có } P(0) = f(0) - g(0) = 2 \Rightarrow a = 1.$$

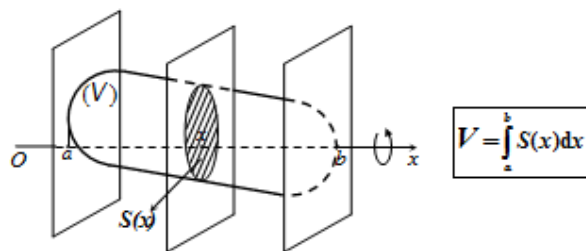
$$\text{Vậy diện tích phần tô đậm là } S = \int_{-1}^2 |(x+1)(x-1)(x-2)| dx = \frac{37}{12}$$

Dạng 3: Tính thể tích vật thể tròn xoay dựa vào định nghĩa

1. Phương pháp:

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b ; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x , ($a \leq x \leq b$).

Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$.



2. Các Bài tập mẫu:

Bài tập 1: Cho phần vật thể B giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x = 0$ và $x = 2$. Cắt phần vật thể B bởi mặt phẳng vuông góc trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 2$), ta được diện tích là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích V của phần vật thể B .

Lời giải

Một tam giác đều cạnh a có diện tích $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

Do tam giác đều cạnh $x\sqrt{2-x}$ có diện tích là $S(x) = \frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra thể tích $S = \int_0^2 S(x) dx = \int_0^2 \frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4} dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^2 x^2(2-x) dx \xrightarrow{\text{Casio}} \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài tập 2: Trong không gian $Oxyz$, cho vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x = 0$ và $x = \pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng x , ($0 \leq x \leq \pi$) là một tam giác đều cạnh là $2\sqrt{\sin x}$. Tính thể tích của vật thể đó.

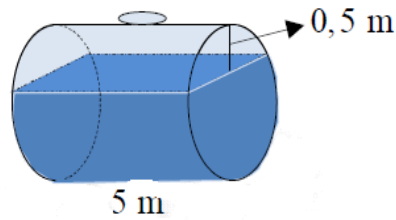
Lời giải

Một tam giác đều cạnh a có diện tích $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$

Do đó tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$ có diện tích là $S(x) = \frac{4 \sin x \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \sin x$

Suy ra thể tích $V = \int_0^\pi S(x) dx = \int_0^\pi \sqrt{3} \sin x dx = 2\sqrt{3}$

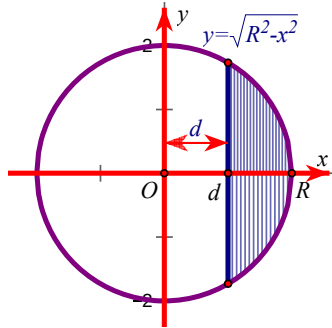
Bài tập 3: Một bồn trụ đang chứa dầu được đặt nằm ngang có chiều dài bồn là $5m$, bán kính đáy $1m$. Người ta rút dầu ra trong bồn tương ứng với $0,5m$ của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng của dầu còn lại trong bồn



Lời giải

* Thể tích cả khối trụ $V_1 = \pi R^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot 5 = 5\pi (m^3)$

* Tính thể tích phần khối trụ bị mất đi

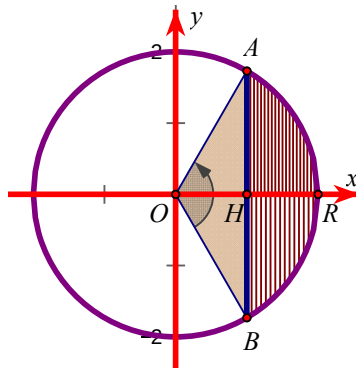


+ Cách 1: $S_{\text{viên phân}} = 2 \int_d^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1 - x^2} dx \approx 0,61$

$V_2 = S_{\text{viên phân}} \cdot h = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1 - x^2} dx \times 5 \approx 3,07$

Suy ra thể tích khối trụ còn lại $V = V_1 - V_2 = 5\pi - 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1 - x^2} dx \times 5 \approx 12,637 (m^3)$

+ Cách 2: Tính góc ở tâm $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{OH}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$

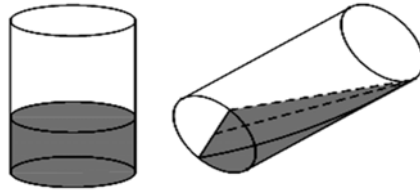


$S_{\text{viên phân}} = \frac{1}{2} R^2 (\alpha - \sin \alpha) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} \right) \approx 0,614$

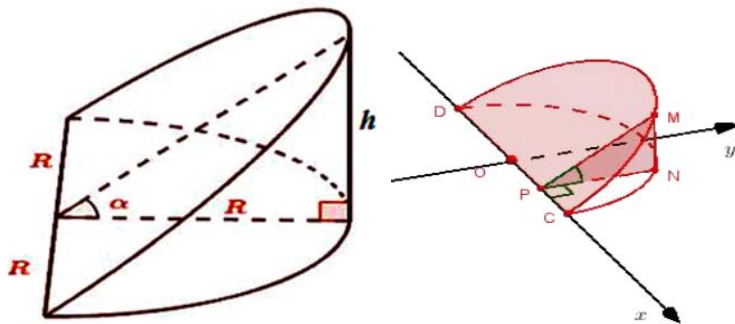
$V_2 = S_{\text{viên phân}} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} \right) \times 5$

$$V = V_1 - V_2 = 5\pi - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} \right) \times 5 \approx 12,637 \text{ (m}^3\text{)}$$

Bài tập 4: Bạn A có một cốc thủy tinh hình trụ, đường kính trong lòng đáy cốc là 6 cm , chiều cao trong lòng cốc là 10 cm đang đựng một lượng nước. Bạn A nghiêng cốc nước, vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy. Tính thể tích lượng nước trong cốc



Lời giải



Phân tích: Thể tích nước có hình dạng “cái nêm”; có 2 phương pháp tính thể tích này

+ Cách 1 – Chứng minh công thức bằng PP tích phân: Xét thiết diện cắt cốc thủy tinh tại vị trí x ($-R \leq x \leq R$) bất kỳ; ta có diện tích thiết diện là

$$S(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot (\sqrt{R^2 - x^2} \cdot \tan \alpha) = \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \tan \alpha ; \text{ thể tích.}$$

$$V = \int_{-R}^R S(x) dx = \frac{1}{2} \tan \alpha \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha .$$

Cách 2:

Gọi S là diện tích thiết diện do mặt phẳng có phương vuông góc với trục Ox với khối nước, mặt phẳng này cắt trục Ox tại điểm có hoành độ $h \geq x \geq 0$. Ta có:

$$\frac{r}{R} = \frac{h-x}{h} \Leftrightarrow r = \frac{(h-x)R}{h}, \text{ vì thiết diện này là nửa hình tròn bán kính } r$$

$$\Rightarrow S(x) = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{\pi (h-x)^2 R^2}{2h^2}$$

Thể tích lượng nước chứa trong bình là.

Bài giải

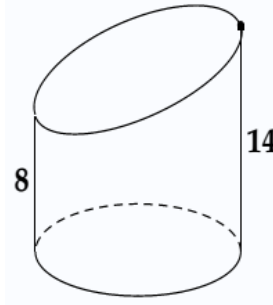
+ Cách 1: Áp dụng công thức tính thể tích cái nêm biết góc giữa mặt cắt và mặt đáy bằng α là

$$\boxed{V = \frac{2}{3} R^2 h = \frac{2}{3} R^3 \cdot \tan \alpha} \text{ với } \tan \alpha = \frac{h}{R} \text{ ta được } V = \frac{2}{3} R^3 \cdot \frac{h}{R} = \frac{2}{3} \cdot 3^2 \cdot 10 = 60 \text{ (cm}^3\text{)}$$

+ Cách 2: Tính trực tiếp bài toán bằng PP tích phân. $\Rightarrow S(x) = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{\pi(h-x)^2 R^2}{2h^2}$; thể tích

$$V = \int_0^h S(x)dx = \frac{9\pi}{200} \int_0^{10} (10-x)^2 dx = 60\pi (cm^3). \quad V = \int_0^h S(x)dx$$

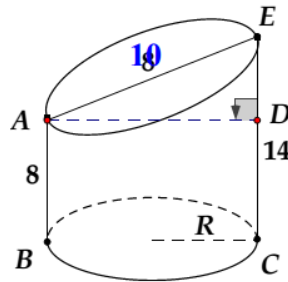
Bài tập 5: Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng ta được một khối như hình vẽ bên. Biết rằng thiết diện là một hình elip có độ dài trục lớn bằng 10, khoảng cách từ điểm thuộc thiết diện gần mặt đáy nhất và điểm thuộc thiết diện xa mặt đáy nhất lần lượt là 8 và 14. Tính thể tích của.



Lời giải

Tính các số đo: $\begin{cases} AB = 8 \\ AE = 10 \\ DE = 14 - 8 = 6 \end{cases} \Rightarrow AD = \sqrt{AE^2 - DE^2} = 8$; suy ra bán kính khối trụ là

$$R = \frac{AD}{2} = 4.$$



♦ Cách 1: Thể tích khối bằng thể tích “khối trụ trung bình”:

$$V_{(H)} = \pi R^2 \cdot \left(\frac{AB + CE}{2} \right) = \pi \cdot 4^2 \cdot 11 = 176\pi (\text{đvtt})$$

♦ Cách 2: Áp dụng công thức tính thể tích “cái nôm”: Lấy mặt phẳng (P) vuông góc với đường sinh của hình trụ và đi qua điểm A, khi đó chia khối (H) thành hai khối:

+ Khối 1: là khối trụ chiều cao $h = 8$, bán kính $r = 4$ nên thể tích $V_1 = \pi r^2 h = 128\pi$

+ Khối 2: là phân nửa một khối trụ có chiều cao $DE = 6$ và bán kính $r = 4$ nên thể tích

$$V_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi r^2 \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 48\pi$$

+ Vậy $V_{(H)} = V_1 + V_2 = 128\pi + 48\pi = 176\pi (\text{đvtt})$

3. Bài tập

Câu 1: Cho (T) là vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$, $x=1$. Tính thể tích V của (T) biết rằng khi cắt (T) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng x , $0 \leq x \leq 1$, ta được thiết diện là tam giác đều có cạnh bằng $\sqrt{1+x}$.

A. $V = \frac{3}{2}$. B. $V = \frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$. C. $V = \frac{3\sqrt{3}}{8}$. D. $V = \frac{3}{2}\pi$.

Lời giải

Chọn C

Ta có diện tích tam giác đều cạnh bằng $\sqrt{1+x}$ là $S(x) = \frac{(\sqrt{1+x})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}(1+x)}{4}$.

Thể tích của vật thể (T) là $V = \int_0^1 S(x) dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{3}(1+x)}{4} dx = \frac{\sqrt{3}}{8} (1+x)^2 \Big|_0^1 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 2: Cho vật thể (T) giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$; $x=2$. Cắt vật thể (T) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x(0 \leq x \leq 2)$ ta thu được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $(x+1)e^x$. Thể tích vật thể (T) bằng

A. $\frac{\pi(13e^4-1)}{4}$. B. $\frac{13e^4-1}{4}$. C. $2e^2$. D. $2\pi e^2$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích thiết diện là $S(x) = (x+1)^2 e^{2x}$.

Thể tích của vật thể (T) là $V = \int_0^2 S(x) dx = \int_0^2 (x+1)^2 e^{2x} dx$.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} (x+1)^2 e^{2x} \Big|_0^2 - \int_0^2 (x+1) e^{2x} dx = \frac{9e^4-1}{2} - \left(\frac{x+1}{2} e^{2x} \Big|_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 e^{2x} dx \right) \\ &= \frac{9e^4-1}{2} - \frac{3e^4-1}{2} + \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^2 = 3e^4 + \frac{1}{4} e^4 - \frac{1}{4} = \frac{13e^4-1}{4}. \end{aligned}$$

Dạng 4: Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi 1 đồ thị

1. Phương pháp:

Vật thể tròn xoay sinh bởi miền hình phẳng được giới hạn: Đồ thị $y=f(x)$; trục $Ox(y=0)$; $x=a$, $x=b$; quay xung quanh Ox .

- Nếu thiếu cận thì giải phương trình $f(x)=0$ để bổ sung cận.

- Tính thể tích theo công thức: $V_{Ox} = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

2. Các Bài tập mẫu:

Bài tập 1: Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng đó khi nó quay quanh trục Ox .

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Thể tích của vật thể tròn xoay cần tìm $V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \frac{16\pi}{15}$.

Bài tập 2: Cho miền hình phẳng giới hạn bởi: $y = xe^x$, Ox $x = 1$ quay xung quanh Ox . Tính thể tích của vật thể tạo thành.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số: $y = xe^x$ và trục Ox $xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy vật thể tròn xoay có thể tích là: $V = \pi \int_0^1 (xe^x)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^2 e^{2x}) dx$

$$\Rightarrow V = \pi \left(\frac{1}{2} x^2 e^{2x} \right)_0^1 - \int_0^1 x e^{2x} dx = \pi \frac{e^2}{2} - \pi \int_0^1 x e^{2x} dx$$

$$\Rightarrow V = \frac{\pi e^2}{2} - \pi \left(\frac{1}{2} x e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx \right) = \frac{\pi}{4} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{\pi(e^2 - 1)}{4}.$$

Bài tập 3: Cho miền hình phẳng giới hạn bởi: $y = x^2 - 4x$, $y = 0$; quay xung quanh Ox . tính thể tích của vật thể tạo thành.

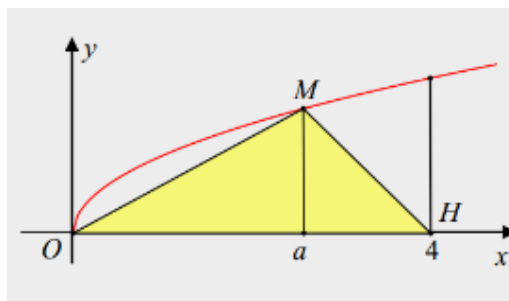
Lời giải

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số: $y = x^2 - 4x$ và đường thẳng $y = 0$ là nghiệm của phương trình: $x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

Vật thể tạo thành có thể tích là:

$$V = \pi \int_0^4 (x^2 - 4x)^2 dx = \pi \int_0^4 (x^4 - 8x^3 + 16x^2) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} - 2x^4 + \frac{16x^3}{3} \right) \Big|_0^4 = \frac{512\pi}{15}$$

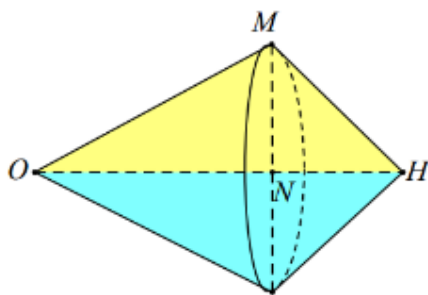
Bài tập 4: Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$; $y = 0$; $x = 4$ và trục Ox . Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại M .



Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác MOH quanh trục Ox . Biết rằng $V = 2V_1$. Tính a .

Lời giải

$$\text{Ta có } V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = 8\pi \Rightarrow V_1 = \frac{V}{2} = 4\pi.$$



Tam giác MOH quanh trục Ox tạo nên hai khối nón chung đáy. Gọi N là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox . Suy ra $r = MN = y_M = y(a) = \sqrt{a}$.

$$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} OH \cdot \pi r^2 = \frac{1}{3} \cdot 4\pi \cdot (\sqrt{a})^2 = \frac{4\pi a}{3}.$$

$$\text{Suy ra } 4\pi = \frac{4\pi a}{3} \Rightarrow a = 3.$$

Bài tập 5: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{\frac{x}{4-x^2}}$; trục Ox và đường thẳng $x = 1$. Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay quanh hình (H) xung quanh trục Ox .

Lời giải

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm } \sqrt{\frac{x}{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Theo bài toán thì thể tích của vật thể tròn xoay cần tìm

$$V = \pi \int_0^1 \frac{x}{4-x^2} dx = -\frac{\pi}{2} \ln |4-x^2| \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \ln \frac{4}{3} = \frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}.$$

Do đó $a = 4, b = 3 \Rightarrow a + b = 7$.

3. Bài tập

Câu 1: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3, y = 0, x = 0, x = 2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào sau đây đúng?

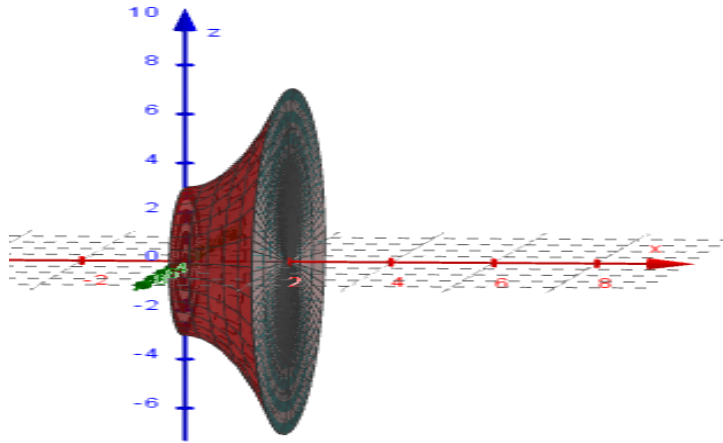
A. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.

B. $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.

C. $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.

D. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.

Lời giải



Thể tích của vật thể được tạo nên là $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.

Câu 2: Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. V có giá trị gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 550

B. 400

C. 670

D. 335

Lời giải

Chọn D

Quay elip đã cho xung quanh trục hoành chính là quay hình phẳng:

$$H = \left\{ y = 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}, y = 0, x = -5, x = 5 \right\}.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi H khi quay xung quanh trục hoành là:

$$V = \pi \int_{-5}^5 \left(16 - \frac{16x^2}{25} \right) dx = \pi \left(16x - \frac{16x^3}{75} \right) \Big|_{-5}^5 = \frac{320\pi}{3} \approx 335,1$$

- Câu 3:** Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{m^2 - x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích V . Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V < 1000\pi$.
- A. 18. B. 20. C. 19. D. 21.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong và trục hoành là:
 $\sqrt{m^2 - x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm m$

Thể tích vật thể tròn xoay cần tính là: $V = \pi \int_{-|m|}^{|m|} (m^2 - x^2) dx = \pi \left(m^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-|m|}^{|m|} = \frac{4\pi m^2 |m|}{3}$

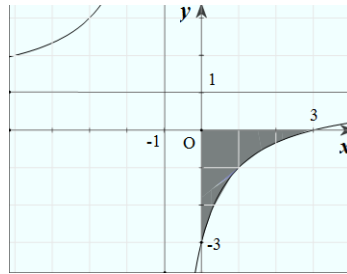
Ta có: $V < 1000\pi \Leftrightarrow \frac{4\pi m^2 |m|}{3} < 1000\pi \Leftrightarrow |m|^3 < 750 \Leftrightarrow -\sqrt[3]{750} < m < \sqrt[3]{750}$.

Ta có $\sqrt[3]{750} \approx 9,08$ và $m \neq 0$. Vậy có 18 giá trị nguyên của m .

- Câu 8 :** Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường cong $y = \frac{x-3}{x+1}$, trục hoành và trục tung. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích $V = \pi(a + b \ln 2)$ với a, b là các số nguyên. Tính $T = a + b$.

- A. $T = 3$. B. $T = 6$. C. $T = 10$. D. $T = -1$.

Lời giải

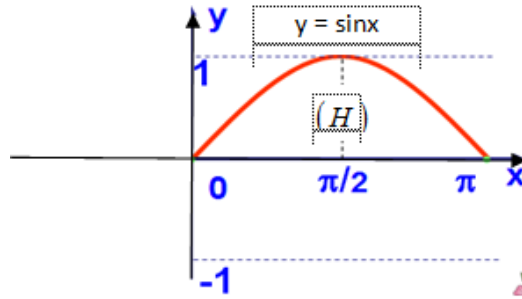


Dựa vào đồ thị hàm số trên ta có:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^3 \left(\frac{x-3}{x+1} \right)^2 dx = \pi \int_0^3 \left(1 - \frac{4}{x+1} \right)^2 dx = \pi \int_0^3 \left(1 - \frac{8}{x+1} + \frac{16}{(x+1)^2} \right) dx \\ &= \pi \left(x - 8 \ln(x+1) - \frac{16}{x+1} \right) \Big|_0^3 = \pi(15 - 16 \ln 2) \Rightarrow a = 15; b = -16. \end{aligned}$$

Vậy $T = a + b = -1$.

- Câu 4:** Cho hình (H) trong hình vẽ dưới đây quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng bao nhiêu?



A. $\frac{\pi^2}{2}$.

B. $\frac{\pi}{2}$.

C. 2π .

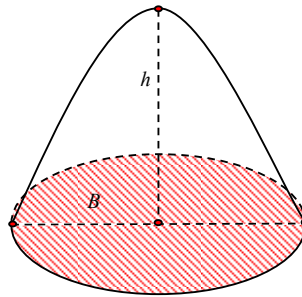
D. $2\pi^2$.

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay nhận được khi quay hình (H) quanh trục Ox là

$$V = \pi \int_0^{\pi} (\sin x)^2 dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Câu 5: Vật thể paraboloid tròn xoay như hình vẽ bên dưới có đáy có diện tích $B = 3$ chiều cao $h = 4$. Thể tích của vật thể trên là



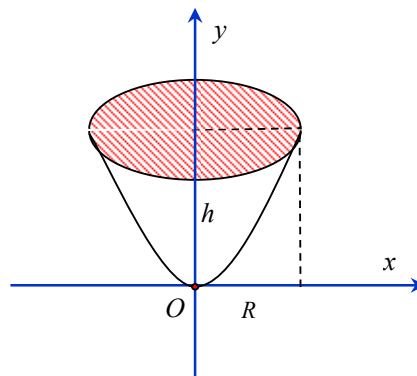
A. $V = \frac{1}{3}\pi$.

B. $V = 6$.

C. $V = \frac{1}{4}\pi$.

D. $V = 8$.

Lời giải



Đường cong parabol có dạng: $y = ax^2$ và đi qua điểm có tọa độ $(R; h)$ nên ta có:

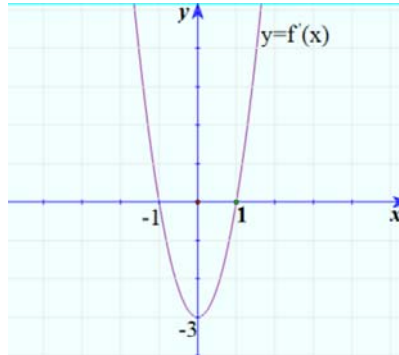
$$y = \frac{h}{R^2} x^2$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{R\sqrt{y}}{\sqrt{h}}$$

Thể tích của khối tròn xoay trên là: $V = \pi \int_0^h \frac{R^2}{h} y dy = \pi \frac{R^2}{h} \cdot \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^h = \frac{1}{2} \pi R^2 h$.

Áp dụng công thức ta có: $V = \frac{1}{2} \pi R^2 h = \frac{1}{2} Bh = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có đồ thị (C) . Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành khi quay xung quanh trục Ox .



A. $\frac{725}{35} \pi$.

B. $\frac{1}{35} \pi$.

C. 6π .

D. Chọn khác.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x) \Rightarrow f'(x) = 3(x^2 - 1)$.

Khi đó $f(x) = \int f'(x) dx = x^3 - 3x + C$.

Điều kiện đồ thị hàm số $f(x)$ tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ là:

$$\begin{cases} f(x) = 4 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + C = 4 \\ 3(x^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ C = 2 \end{cases} \text{ suy ra } f(x) = x^3 - 3x^2 + 2(C).$$

$+(C) \cap Ox \Rightarrow$ hoành độ giao điểm là $x = -2; x = 1$.

+Khi đó $V = \pi \int_{-2}^1 (x^3 - 3x^2 + 2)^2 dx = \frac{729}{35} \pi$.

Dạng 5: Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị

1. Phương pháp:

Nếu hình phẳng D được giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b$ thì thể tích khối tròn xoay sinh bởi khi quay D quanh trục Ox được tính bởi công thức: $V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$

2. Các Bài tập mẫu:

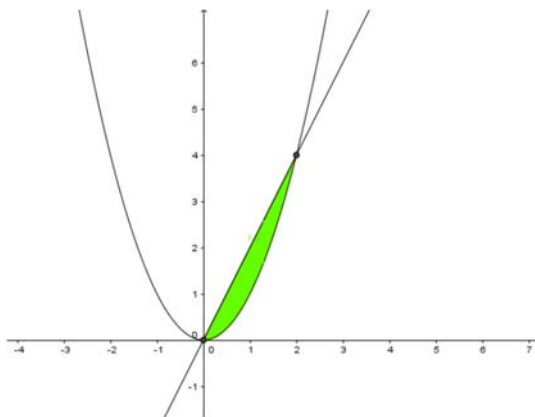
Bài tập 1: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = ax^2, y = bx, (a, b \neq 0)$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $V = \pi \cdot \frac{b^3}{a^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right).$

B. $V = \pi \cdot \frac{b^5}{5a^3}.$

C. $V = \pi \cdot \frac{b^5}{3a^3}.$

D. $V = \pi \cdot \frac{b^5}{a^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)$



Hướng dẫn giải

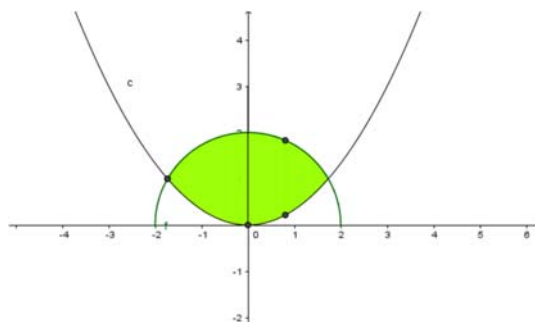
Chọn D

Tọa độ giao điểm của hai đường $y = ax^2$ và $y = bx$ là các điểm $O(0;0)$ và $A\left(\frac{b}{a}; \frac{b^2}{a}\right)$. Vậy thể

tích của khối tròn xoay cần tính là: $V = \int_0^{\frac{b}{a}} \pi b^2 x^2 dx - \int_0^{\frac{b}{a}} \pi a^2 x^4 dx = \pi \frac{b^5}{a^3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right).$

Bài tập 2: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{4 - x^2}, y = \frac{1}{3}x^2$ quay xung quanh trục Ox .

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:



A. $V = \frac{24\pi\sqrt{3}}{5}$.

B. $V = \frac{28\pi\sqrt{3}}{5}$.

C. $V = \frac{28\pi\sqrt{2}}{5}$.

D. $V = \frac{24\pi\sqrt{2}}{5}$.

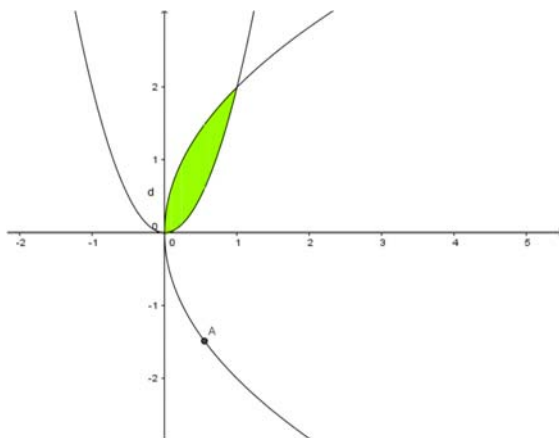
Hướng dẫn giải

Chọn B

Tọa độ giao điểm của hai đường $y = \sqrt{4-x^2}$ và $y = \frac{1}{3}x^2$ là các điểm $A(-\sqrt{3};1)$ và $B(\sqrt{3};1)$. Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là:

$$V = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \pi(4-x^2)dx - \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \pi \cdot \frac{1}{9}x^4 dx = \pi \frac{28\sqrt{3}}{5}.$$

Bài tập 3: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$, $y^2 = 4x$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:



A. $V = \frac{88\pi}{5}$.

B. $V = \frac{9\pi}{70}$.

C. $V = \frac{4\pi}{3}$.

D. $V = \frac{6\pi}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Với $x \in [0;2]$ thì $y^2 = 4x \Leftrightarrow y = \sqrt{4x}$

Tọa độ giao điểm của đường $y = 2x^2$ với $y^2 = 4x$ là các điểm $O(0;0)$ và $A(1;2)$. Vậy thể tích của

khối tròn xoay cần tính là: $V = \int_0^1 \pi \cdot 4x dx - \int_0^1 \pi \cdot 4x^4 dx = \pi \cdot \frac{6}{5}$.

Bài tập 4: Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng D giới hạn bởi các đường elip $x^2 + 9y^2 = 9$ quay quanh Ox bằng:

A. π .

B. 2π .

C. 3π .

D. 4π .

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $x^2 + 9y^2 = 9 \Leftrightarrow y^2 = \frac{9-x^2}{9} \Rightarrow V = \pi \int_{-3}^3 y^2 dx = \pi \int_{-3}^3 \frac{9-x^2}{9} dx = 4\pi$.

Bài tập 5: Thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}, y = x$ quanh trục Ox bằng:

A. $\pi \int_0^1 (\sqrt{x} - x) dx$.

B. $\pi \int_0^1 (x - \sqrt{x}) dx$.

C. $\pi \int_0^1 (x - x^2) dx$.

D. $\pi \int_0^1 (x^2 - x) dx$.

Hướng dẫn giải

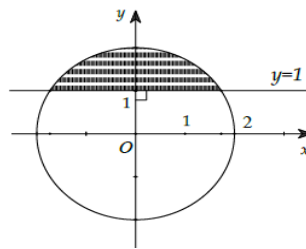
Chọn D

Xét phương trình $\sqrt{x} - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x - x^2 \end{cases} \Rightarrow x = 0; x = 1$.

Và $\sqrt{x} \geq x \forall x \in [0; 1] \Rightarrow V = \pi \int_0^1 ((\sqrt{x})^2 - x^2) dx = \pi \int_0^1 (x - x^2) dx$.

3. Bài tập

Câu 1: Quay hình phẳng như hình được tô đậm trong hình vẽ bên quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:



A. $V = 4\sqrt{3}\pi$.

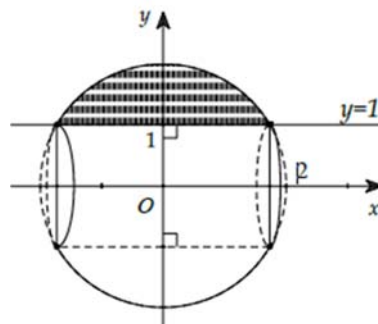
B. $V = 6\sqrt{3}\pi$.

C. $V = 5\sqrt{3}\pi$.

D. $V = 2\sqrt{3}\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

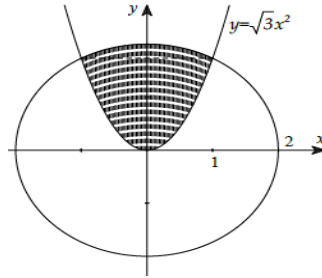


Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

Do đối xứng nhau qua Oy nên:

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left[(4-x^2) - 1^2 \right] dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (3-x^2) dx = 2\pi \left(3x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}\pi.$$

Câu 2: Quay hình phẳng như hình được tô đậm trong hình vẽ bên quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích:



A. $V = \frac{46\pi}{9}.$

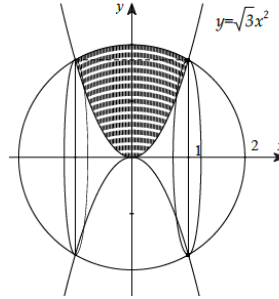
B. $V = \frac{46\pi}{15}.$

C. $V = \frac{23\pi}{9}.$

D. $V = 13\pi.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

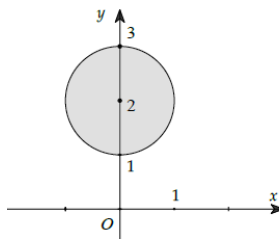


Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} \Rightarrow x = \pm 1.$$

Do đối xứng nhau qua Oy nên

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left[(4-x^2) - (\sqrt{3}x)^2 \right] dx - 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (4-x^2-3x^4) dx \\ &= 2\pi \left(4x - \frac{x^3}{3} - \frac{3x^5}{5} \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{46\pi}{15}. \end{aligned}$$

Câu 3: Quay hình phẳng như hình được tô đậm trong hình vẽ bên quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:



A. $V = 3\pi^2.$

B. $V = \pi^2.$

C. $V = \frac{2\pi^2}{3}.$

D. $V = 2\pi^2$

Hướng dẫn giải

Chọn D

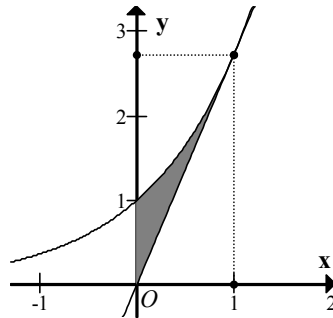
$$\text{Ta có: } x^2 + (y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow (y-1)^2 = 1-x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + \sqrt{1-x^2} \\ y = 1 - \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } V = 2\pi \int_0^1 \left[\left(1 + \sqrt{1-x^2}\right)^2 - \left(1 - \sqrt{1-x^2}\right)^2 \right] dx = 8\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$\text{Đặt } x = \sin t; \left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \right)$$

$$\Rightarrow V = 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt - 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = 4\pi \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi^2.$$

Câu 4: Cho hình (H) giới hạn bởi các đường cong $(C): y = e^x$, tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1; e)$ và trục Oy . Thể tích của khối tròn xoay khi quay (H) quanh trục Ox bằng:



A. $\frac{e-2}{2}$.

B. $\frac{e^2-1}{3}$.

C. $\frac{e^2+1}{2}$.

D. $\frac{e^2-3}{6}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = e^x$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến của } (C) \text{ tại } M(1; e) \text{ là } y = e(x-1) + e \Leftrightarrow y = ex.$$

$$\text{Diện tích của } (H) \text{ bằng: } V = \pi \int_0^1 (e^{2x} - e^2 x^2) dx = \left(\frac{1}{2} e^{2x} - \frac{e^2}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{e^2-3}{6}.$$

Câu 5: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4$, $y = 2x - 4$, $x = 0$, $x = 2$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

A. $-\frac{32\pi}{5}$.

B. 6π .

C. -6π .

D. $\frac{32\pi}{5}$.

Lời giải

Chọn D

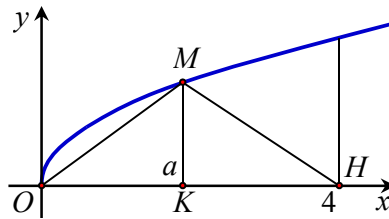
Suy ra thể tích cần tìm là $V = \pi \int_0^2 (x^2 - 4)^2 dx - \pi \int_0^2 (2x - 4)^2 dx = \frac{32\pi}{5}$.

Dạng 6: Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi nhiều đồ thị

1. Phương pháp:

2. Các Bài tập mẫu:

Bài tập 1: Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 4$ quanh trục Ox . Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) cắt đồ thị hàm $y = \sqrt{x}$ tại M .



Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox . Biết rằng $V = 2V_1$. Khi đó

- A. $a = 2$. B. $a = 2\sqrt{2}$. C. $a = \frac{5}{2}$. D. $a = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Khi đó $V = \pi \int_0^4 x dx = 8\pi$

Ta có $M(a; \sqrt{a})$

Khi quay tam giác OMH quanh trục Ox tạo thành hai hình nón có chung đáy:

- Hình nón (N_1) có đỉnh là O , chiều cao $h_1 = OK = a$, bán kính đáy $R = MK = \sqrt{a}$;
- Hình nón (N_2) thứ 2 có đỉnh là H , chiều cao $h_2 = HK = 4 - a$, bán kính đáy $R = MK = \sqrt{a}$

Khi đó $V_1 = \frac{1}{3} \pi R^2 h_1 + \frac{1}{3} \pi R^2 h_2 = \frac{4}{3} \pi a$

Theo đề bài $V = 2V_1 \Leftrightarrow 8\pi = 2 \cdot \frac{4}{3} \pi a \Rightarrow a = 3$.

Bài tập 2: Cho hình thang cong giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 4$) chia thành hai hình phẳng là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Quay S_1, S_2 quanh trục Ox được khối tròn xoay có thể tích lần lượt là V_1, V_2 . Với giá trị nào của k thì $V_1 = 2V_2$

- A. $k = \frac{1}{2} \ln \frac{32}{3}$. B. $k = \frac{1}{2} \ln 11$. C. $k = \frac{1}{2} \ln \frac{11}{3}$. D. $k = \ln \frac{32}{3}$

Hướng dẫn giải

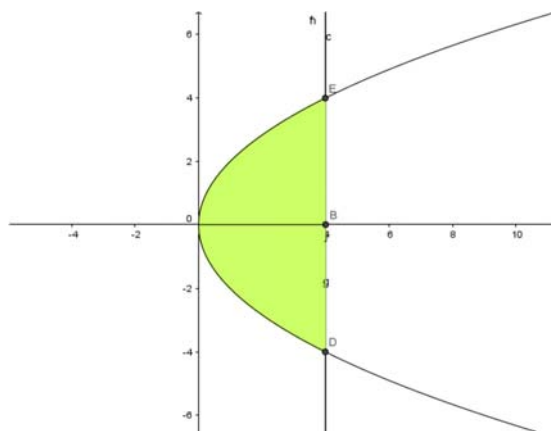
Chọn B

Ta có:

$$V_1 = \pi \int_0^k (e^x)^2 dx = \pi \left(\frac{e^{2x}}{2} \right) \Big|_0^k = \frac{\pi e^{2k}}{2} - \frac{\pi}{2}; V_2 = \pi \int_k^{\ln 4} (e^x)^2 dx = \pi \left(\frac{e^{2x}}{2} \right) \Big|_k^{\ln 4} = 8\pi - \frac{\pi e^{2k}}{2}$$

$$\text{Theo giả thiết: } V_1 = 2V_2 \Leftrightarrow \frac{\pi e^{2k}}{2} - \frac{\pi}{2} = 2 \left(8\pi - \frac{\pi e^{2k}}{2} \right) \Leftrightarrow e^{2k} = 11 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \ln 11$$

Bài tập 3: Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y^2 = 4x$ và đường thẳng $x = 4$. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi D xoay quanh trục Ox là:



A. 32π .

B. 64π .

C. 16π .

D. 4π .

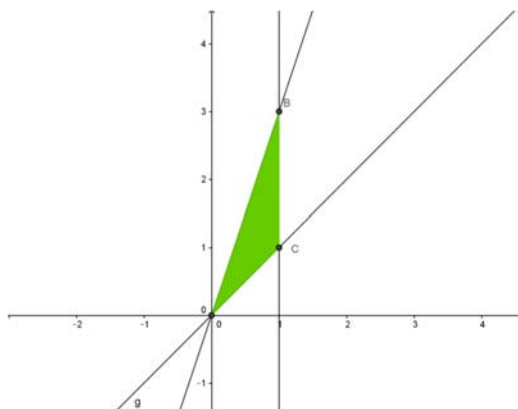
Hướng dẫn giải :

Chọn A

Giao điểm của hai đường $y^2 = 4x$ và $x = 4$ là $D(4; -4)$ và $E(4; 4)$. Phần phía trên Ox của đường $y^2 = 4x$ có phương trình $y = 2\sqrt{x}$. Từ hình vẽ suy ra thể tích của khối tròn xoay cần tính là:

$$V = \int_0^4 \pi (2\sqrt{x})^2 dx = 32\pi.$$

Bài tập 4: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3x$, $y = x$, $x = 0$, $x = 1$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:



A. $V = \frac{8\pi}{3}$.

B. $V = \frac{4\pi}{3}$.

C. $V = \frac{2\pi}{3}$.

D. $V = \pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Tọa độ giao điểm của đường $x=1$ với $y=x$ và $y=3x$ là các điểm $C(1;1)$ và $B(3;1)$. Tọa độ giao điểm của đường $y=3x$ với $y=x$ là $O(0;0)$. Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là:

$$V = \int_0^1 \pi \cdot 9x^2 dx - \int_0^1 \pi \cdot x^2 dx = \pi \frac{8}{3}.$$

Bài tập 5: Trên mặt phẳng Oxy, cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $(P): y=x^2; (P'): y=4x^2; (d): y=4$. Thể tích của khối tròn xoay khi quay quanh trục Ox bằng:

A. $\frac{9\pi}{5}$.

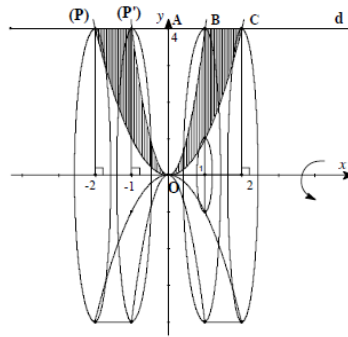
B. $\frac{4\pi}{5}$.

C. $\frac{7\pi}{5}$.

D. 2π .

Hướng dẫn giải

Chọn B



Đặt V là thể tích cần tìm

Xét phương trình hoành độ giao điểm của và: $x^2 - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của và: $4x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

V_{OAC} là thể tích khối tròn xoay sinh bởi khi quay: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4 \end{cases}$ quanh Ox

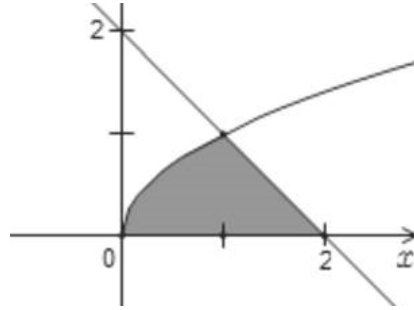
V_{OAB} là thể tích khối tròn xoay sinh bởi khi quay: $\begin{cases} y = 4x^2 \\ y = 4 \end{cases}$ quanh Ox

Lúc đó: $V = V_{OAC} - V_{OAB} = \pi \int_0^2 [4 - (x^2)^2] dx - \pi \int_0^2 [4 - (4x^2)^2] dx = \pi \int_0^2 (4 - x^2) dx - \pi \int_0^1 (4 - 16x^4) dx$

$$= \pi \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 - \pi \left(4x - 16 \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(8 - \frac{32}{3} - 4 + \frac{16}{5} \right) = \frac{4\pi}{5}$$

3. Bài tập trắc nghiệm:

Câu 1: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $(P): y = \sqrt{x}, y = 0, y = 2 - x$.
 Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox là:



A. $\frac{4\sqrt{2}-1}{3}\pi$.

B. $\frac{7}{6}$.

C. $\frac{8\sqrt{2}+3}{6}\pi$.

D. $\frac{5}{6}\pi$.

Lời giải

Chọn D

$$\sqrt{x} = 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x = (2 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx + \pi \int_1^2 (2 - x)^2 dx = \frac{5}{6}\pi.$$

Câu 2: Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y = x + 1; y = \frac{6}{x}; x = 1$. Quay hình (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\frac{13\pi}{6}$.

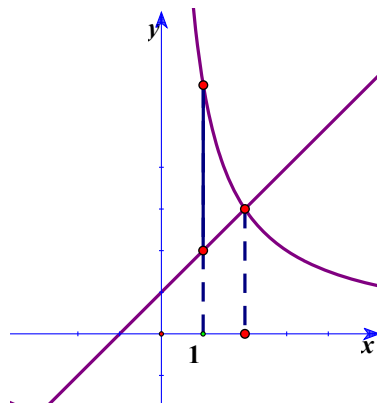
B. $\frac{125\pi}{6}$.

C. $\frac{35\pi}{3}$.

D. 18π .

Lời giải

Chọn C



Phương trình hoành độ giao điểm: $x + 1 = \frac{6}{x} \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 (x \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 (l) \end{cases}$

Vì $\frac{6}{x} > x+1 > 0$ với $x \in (1; 2)$ nên thể tích cần tính là

$$V = \pi \int_1^2 \left(\frac{6}{x}\right)^2 dx - \pi \int_1^2 (x+1)^2 dx = \frac{35\pi}{3}.$$

Câu 3: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=3x; y=x; x=1$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

- A. $\frac{8\pi}{3}$. B. $\frac{8\pi^2}{3}$. C. $8\pi^2$. D. 8π .

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $3x = x \Leftrightarrow x = 0$ và $3x > x > 0$ với $x \in (0; 1)$.

Thể tích cần tính là $V = \pi \int_0^1 (3x)^2 dx - \pi \int_0^1 x^2 dx = \frac{8\pi}{3}$.

Câu 4: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = 2x$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

- A. $\frac{16\pi}{15}$. B. $\frac{21\pi}{15}$. C. $\frac{32\pi}{15}$. D. $\frac{64\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Hoành độ giao điểm của đồ thị 2 hàm số $y = x^2$ và $y = 2x$ là nghiệm của phương trình

$$x^2 = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành là

$$V = \pi \int_0^2 (2x)^2 dx - \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \left(\frac{4}{3} x^3 \right) \Big|_0^2 - \pi \left(\frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{64\pi}{15}.$$

Câu 5: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{4-x^2}, y = \frac{1}{3}x^2$ quay xung quanh trục Ox .

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

- A. $V = \frac{28\pi\sqrt{2}}{5}$. B. $V = \frac{28\pi\sqrt{3}}{5}$. C. $V = \frac{24\pi\sqrt{2}}{5}$. D. $V = \frac{24\pi\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Giải phương trình $\sqrt{4-x^2} = \frac{1}{3}x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$$\text{Thể tích cần tìm là } V = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-x^2} \right)^2 dx - \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{x^2}{3} \right)^2 dx = \frac{28\pi\sqrt{3}}{5}.$$

Dạng 7: Một số bài toán thực tế ứng dụng tích phân

1. Phương pháp giải

* Một vật chuyển động có phương trình vận tốc $v(t)$ trong khoảng thời gian từ $t = a$ đến $t = b (a < b)$ sẽ di chuyển được quãng đường là:

$$S = \int_a^b v(t) dt$$

Ví dụ 1: Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 160 - 10t (m/s)$. Quãng đường mà vật chuyển động từ thời điểm $t = 0(s)$ đến thời điểm mà vật dừng lại là

- A. 1028m. B. 1280m.
C. 1308m. D. 1380m.

Hướng dẫn giải

Khi vật dừng lại thì

$$v(t) = 160 - 10t = 0 \Leftrightarrow t = 16$$

$$\text{Do đó } S = \int_0^{16} v(t) dt = \int_0^{16} (160 - 10t) dt$$

$$= (160t - 5t^2) \Big|_0^{16} = 1280(m).$$

Chọn B.

* Một vật chuyển động có phương trình gia tốc $a(t)$ thì vận tốc của vật đó sau khoảng thời gian $[t_1; t_2]$ là:

$$v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$$

Ví dụ 2: Một chiếc ô tô chuyển động với vận tốc $v(t) (m/s)$, có gia tốc

$$a(t) = v'(t) = \frac{3}{2t+1} (m/s^2).$$

Vận tốc của ô tô sau 10 giây (làm tròn đến hàng đơn vị) là

- A. 4,6 m/s. B. 7,2 m/s.
C. 1,5 m/s. D. 2,2 m/s.

Hướng dẫn giải

Vận tốc của ô tô sau 10 giây là

$$v = \int_0^{10} \frac{3}{2t+1} dt = \frac{3}{2} \ln|2t+1| \Big|_0^{10} = \frac{3}{2} \ln 21 \approx 4,6(m/s).$$

Chọn A.

* Điện lượng chuyển qua tiết diện của dây dẫn của đoạn mạch trong thời gian từ t_1 đến t_2 là:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$$

2. Bài tập

Bài tập 1: Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

A. $\frac{4300}{3} \text{ m.}$

B. 4300 m.

C. 430 m.

D. $\frac{430}{3} \text{ m.}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm vận tốc $v(t) = \int a(t) dt = \int (3t + t^2) dt = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C.$

Lấy mốc thời gian lúc tăng tốc $\Rightarrow v(0) = 10 \Rightarrow C = 10.$

Ta được $v(t) = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10.$

Sau 10 giây, quãng đường vật đi được là

$$S = \int_0^{10} \left(\frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10 \right) dt = \left(\frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{12} + 10t \right) \Big|_0^{10} = \frac{4300}{3} (m)$$

$$v(t) = \int a(t) dt$$

Bài tập 2: Dòng điện xoay chiều hình sin chạy qua một đoạn mạch LC có biểu thức cường độ là

$i(t) = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$ Biết $i = q'$ với q là điện tích tức thời ở tụ điện. Tính từ lúc $t = 0$, điện lượng

chuyển qua tiết diện thẳng của dây dẫn của đoạn mạch đó trong thời gian từ 0 đến $\frac{\pi}{\omega}$ là

A. $\frac{\pi\sqrt{2}I_0}{\omega}.$

B. $0.$

C. $\frac{2I_0}{\omega}.$

D. $\frac{\pi I_0}{\omega\sqrt{2}}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điện lượng chuyển qua tiết diện của dây dẫn của đoạn mạch trong thời gian từ 0 đến $\frac{\pi}{\omega}$ là

$$Q = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} I(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} I_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) dt = \frac{I_0}{\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{2I_0}{\omega}.$$

$$Q(t) = \int I(t) dt$$

Bài tập 3: Gọi $h(t)(cm)$ là mức nước trong bồn chứa sau khi bơm được t giây. Biết rằng

$h'(t) = \frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}$ và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (chính xác đến 0,01cm)

A. 2,67 cm.

B. 2,66 cm.

C. 2,65 cm.

D. 2,68 cm.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây là

$$\int_0^6 h'(t) dt = \int_0^6 \frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8} dt = \left[\frac{3}{20}(t+8)\sqrt[3]{t+8} \right]_0^6 \approx 2,66(cm)$$

Bài tập 3: Một viên đá được bắn thẳng đứng lên trên với vận tốc ban đầu là 40 m/s từ một điểm cao 5 m cách mặt đất. Vận tốc của viên đá sau t giây được cho bởi công thức $v(t) = 40 - 10t$ m/s. Tính độ cao lớn nhất viên đá có thể lên tới so với mặt đất.

A. 85 m.

B. 80 m.

C. 90 m.

D. 75 m.

Lời giải

Chọn A

Gọi h là quãng đường lên cao của viên đá.

$$v(t) = h'(t) \Rightarrow h(t) = \int v(t) dt = \int (40 - 10t) dt = 40t - 5t^2 + c$$

Tại thời điểm $t = 0$ thì $h = 5$. Suy ra $c = 5$.

$$\text{Vậy } h(t) = 40t - 5t^2 + 5$$

$$h(t) \text{ lớn nhất khi } v(t) = 0 \Leftrightarrow 40 - 10t = 0 \Leftrightarrow t = 4. \text{ Khi đó } h(4) = 85 \text{ m.}$$

Bài tập 4: Một ô tô chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái đạp phanh còn được gọi là “thắng”. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -40t + 20$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô di chuyển từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là bao nhiêu?

A. 2 m.

B. 3 m.

C. 4 m.

D. 5 m.

Lời giải

Chọn D

Lấy mốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu đạp phanh ($t = 0$)

Gọi T là thời điểm ô tô dừng lại. Khi đó vận tốc lúc dừng là $v(T) = 0$

Vậy thời gian từ lúc đạp phanh đến lúc dừng là $v(T) = 0 \Leftrightarrow -40T + 20 = 0 \Leftrightarrow T = \frac{1}{2}$

Gọi $s(t)$ là quãng đường ô tô đi được trong khoảng thời gian T .

Ta có $v(t) = s'(t)$ suy ra $s(t)$ là nguyên hàm của $v(t)$

Vậy trong $\frac{1}{2}$ (s) ô tô đi được quãng đường là: $\int_0^{\frac{1}{2}} v(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} (-40t + 20) dt = \left(-20t^2 + 20t\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = 5$

Bài tập 5: Một ô tô xuất phát từ A chuyển động với vận tốc nhanh dần đều, 10 giây sau, ô tô đạt vận tốc 5 và từ thời điểm đó ô tô chuyển động đều. Ô tô thứ hai cũng xuất phát từ A nhưng sau ô tô thứ nhất là 10 giây, chuyển động nhanh dần đều và đuổi kịp ô tô thứ nhất sau 25 giây. Vận tốc ô tô thứ hai tại thời điểm đó là

A. 12 .

B. 8 .

C. 10 .

D. 7 .

Lời giải

Chọn A

Ta có gia tốc trong 10 s đầu của ô tô thứ nhất là $a = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{5}{10} = 0,5 \text{ (m/s}^2\text{)}$

Trong 10 s đầu, ô tô thứ nhất chuyển động nhanh dần với vận tốc $v(t) = 0,5t$

$\Rightarrow$ Quãng đường ô tô thứ nhất đi được trong 10 s là $\int_0^{10} 0,5t dt = 25 \text{ (m)}$.

Trong 25 s tiếp theo, ô tô thứ nhất đi được $5.25 = 125$

Vậy quãng đường ô tô thứ nhất đi được đến khi bị đuổi kịp là $25 + 125 = 150 \text{ (m)}$

Mặt khác $S = S_0 + \frac{1}{2}at^2$

$\Rightarrow$ Gia tốc của ô tô thứ hai là $a = \frac{2(S - S_0)}{t^2} = \frac{2.150}{25^2} = 0,48 \text{ (m/s}^2\text{)}$

Vậy khi đuổi kịp ô tô thứ nhất, vận tốc của ô tô thứ hai là $v_t = v_0 + at = 12$.

Bài tập 6: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t$ đi được 5, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc

$a = -70 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường $S \text{ (m)}$ đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

- A. $S = 95,70 \text{ (m)}$. B. $S = 87,50 \text{ (m)}$. C. $S = 94,00 \text{ (m)}$. D.
 $S = 96,25 \text{ (m)}$.

Lời giải

Chọn D

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe lăn bánh đến khi được phanh.

$$S_1 = \int_0^5 v_1(t) dt = \int_0^5 7t dt = 7 \frac{t^2}{2} \Big|_0^5 = 87,5 \text{ (m)}.$$

Vận tốc $v_2(t) \text{ (m/s)}$ của ô tô từ lúc được phanh đến khi dừng hẳn thỏa mãn

$$v_2(t) = \int (-70) dt = -70t + C, \quad v_2(5) = v_1(5) = 35 \Rightarrow C = 385. \text{ Vậy } v_2(t) = -70t + 385.$$

Thời điểm xe dừng hẳn tương ứng với t thỏa mãn $v_2(t) = 0 \Leftrightarrow t = 5,5 \text{ (s)}$.

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe được phanh đến khi dừng hẳn.

$$S_2 = \int_5^{5,5} v_1(t) dt = \int_5^{5,5} (-70t + 385) dt = 8,75 \text{ (m)}.$$

Quãng đường cần tính $S = S_1 + S_2 = 96,25 \text{ (m)}$.

Bài tập 7: Một vật di chuyển với gia tốc $a(t) = -20(1+2t)^{-2} \text{ (m/s}^2\text{)}$. Khi $t = 0$ thì vận tốc của vật là 30 (m/s) . Tính quãng đường vật đó di chuyển sau 2 giây.

- A. $S = 46m$. B. $S = 47m$. C. $S = 48m$. D. $S = 49m$.

Lời giải :

Chọn C

$$\text{Vận tốc vật là : } v(t) = \int a(t) dt = \int -20(1+2t)^{-2} dt = 10(1+2t)^{-1} + C.$$

$$\text{Khi } t = 0 \text{ thì } v(0) = 10.(1)^{-1} + C = 30 \Leftrightarrow C = 20.$$

$$\text{Nên } v(t) = 10(1+2t)^{-1} + 20 \text{ (m/s)}.$$

$$\text{Suy ra : } S = \int_0^2 (10(1+2t)^{-1} + 20) dt \approx 48 \text{ (m)}$$

Bài tập 8: Vật chuyển động với vận tốc ban đầu 5 m/s và có gia tốc được xác định bởi công thức

$$a = \frac{2}{t+1} \text{ (m/s}^2\text{)}. \text{ Vận tốc của vật sau 10s đầu tiên là}$$

- A. 10 m/s . B. 9 m/s . C. 11 m/s . D. 12 m/s

Hướng dẫn giải:

Chọn A

$$\text{Ta có } v(t) = \int \frac{2}{t+1} dt = 2 \ln(t+1) + c$$

$$\text{Mà vận tốc ban đầu } 5\text{m/s tức là : } v(0) = 5 \Leftrightarrow 2 \ln(0+1) + c = 5 \Leftrightarrow c = 5.$$

$$\text{Nên } v(t) = 2 \ln(t+1) + 5$$

$$\text{Vận tốc của vật sau 10s đầu tiên là : } v(10) = 2 \ln(11) + 5 \approx 9,8$$

Chọn Chọn A.

Bài tập 9: Trong giờ thực hành môn Vật Lí. Một nhóm sinh viên đã nghiên cứu về sự chuyển động của các hạt. Trong quá trình thực hành thì nhóm sinh viên này đã phát hiện một hạt prôtôn di chuyển trong điện trường với biểu thức gia tốc là: $a = -20(1+2t)^{-2}$. Với t của ta được tính bằng giây. Nhóm sinh viên đã tìm hàm vận tốc v theo t , biết rằng khi $t = 0$ thì $v = 30\text{m} / \text{s}^2$. Hỏi biểu thức đúng là?

A. $v = \left(\frac{10}{1+2t} + 25 \right) \text{ cm} / \text{s}^2$.

B. $v = \left(\frac{10}{1+t} + 20 \right) \text{ cm} / \text{s}^2$.

C. $v = \left(\frac{10}{1+2t} + 10 \right) \text{ cm} / \text{s}^2$.

D. $v = \left(\frac{10}{1+2t} + 20 \right) \text{ cm} / \text{s}^2$

Hướng dẫn giải :

Chọn D

Trước hết để giải bài toán này ta cũng chú ý. Biểu thức vận tốc v theo thời gian t có gia tốc a là: $v = \int a \cdot dt$

$$\text{Áp dụng công thức trên, ta có : } v = \int a dt = \int \frac{-20}{(1+2t)^2} dt$$

Đến đây ta đặt :

$$u = 1 + 2t \Rightarrow du = 2dt \Rightarrow dt = \frac{du}{2}$$

$$v = \int \frac{-10}{u} du = \int -10u^{-2} du = \frac{10}{u} + K = \frac{10}{1+2t} + K$$

$$\text{Với } t = 0, v = 30 \Rightarrow K = 20$$

$$\text{Vậy biểu thức vận tốc theo thời gian là : } v = \left(\frac{10}{1+2t} + 20 \right) \text{ cm} / \text{s}^2.$$

Bài tập 10: Người ta tổ chức thực hành nghiên cứu thí nghiệm bằng cách như sau. Họ tiến hành quan sát một tia lửa điện bắn từ mặt đất bắn lên với vận tốc $15\text{m} / \text{s}$. Hỏi biểu thức vận tốc của tia lửa điện là?

A. $v = -9,8t + 15$.

B. $v = -9,8t + 13$.

C. $v = 9,8t + 15$.

D. $v = -9,8t - 13$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Tia lửa chịu sự tác động của trọng lực hướng xuống nên ta có gia tốc $a = -9,8 \left(m / s^2 \right)$

Ta có biểu thức vận tốc v theo thời gian t có gia tốc a là :

$$v = \int a dt = \int -9,8 dt = -9,8t + C$$

Ở đây, với : $t = 0, v = 15 m / s \Rightarrow C = 15$

Vậy ta được biểu thức vận tốc có dạng : $v = -9,8t + 15$

Bài tập 11: Người ta tổ chức thực hành nghiên cứu thí nghiệm bằng cách như sau. Họ tiến hành quan sát một tia lửa điện bắn từ mặt đất bắn lên với vận tốc $15 m / s$. Hỏi sau 2,5 giây thì tia lửa điện đấy có chiều cao là bao nhiêu?

- A. $6.235(m)$. B. $5.635(m)$. C. $4.235(m)$. D. $6.875(m)$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Tia lửa chịu sự tác động của trọng lực hướng xuống nên ta có gia tốc $a = -9,8 \left(m / s^2 \right)$

Ta có biểu thức vận tốc v theo thời gian t có gia tốc a là :

$$v = \int a dt = \int -9,8 dt = -9,8t + C$$

Ở đây, với $t = 0, v = 15 m / s \Rightarrow C = 15$

Vậy ta được biểu thức vận tốc có dạng:

$$v = -9,8t + 15$$

Lấy tích phân biểu thức vận tốc, ta sẽ có được biểu thức quãng đường:

$$s = \int v dt = \int (-9,8t + 15) dt = -4,9t^2 + 15t + K$$

Theo đề bài, ta được khi $t = 0 \Rightarrow s = 0 \Rightarrow K = 0$.

Vậy biểu thức tọa độ của quãng đường là : $s = -4,9t^2 + 15t$.

Khi $t = 2,5(s)$, ta sẽ được $s = 6,875(m)$.

Dạng 8: Bài toán thực tế

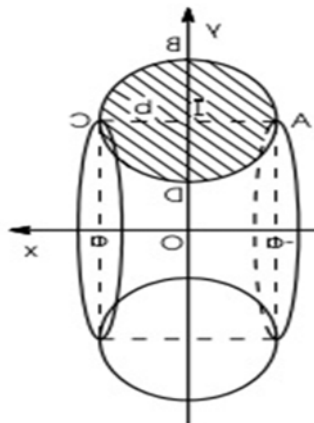
1. Phương pháp: Vận dụng các kiến thức về tích phân và bài toán ứng dụng.

2. Các Bài tập mẫu:

Bài tập 1: Tính thể tích hình xuyên tạo thành do quay hình tròn $(C): x^2 + (y - 2)^2 = 1$ quanh trục Ox .

Hướng dẫn giải:

Hình tròn (C) có tâm $I(0;2)$, bán kính $R=1$ là $x^2 + (y-2)^2 = 1$



$$\text{Ta có } (y-2)^2 = 1-x^2 \quad (-1 \leq x \leq 1) \Rightarrow \begin{cases} y = 2 + \sqrt{1-x^2} \\ y = 2 - \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

Thể tích cần tính:

$$V = \pi \int_{-1}^1 \left[\left(2 + \sqrt{1-x^2} \right)^2 - \left(2 - \sqrt{1-x^2} \right)^2 \right] dx = 4\pi^2$$

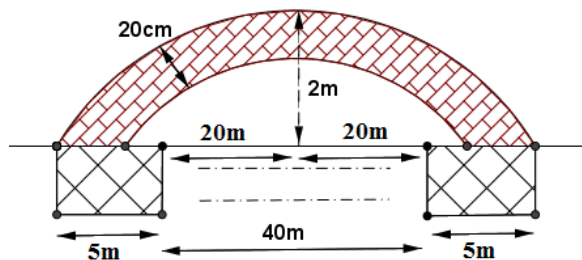
Bài tập 2: Thành phố định xây cây cầu bắc ngang con sông dài $500m$, biết rằng người ta định xây cầu có 10 nhịp cầu hình dạng parabol, mỗi nhịp cách nhau $40m$, biết 2 bên đầu cầu và giữa mỗi nhịp nối người ta xây 1 chân trụ rộng $5m$. Bề dày nhịp cầu không đổi là $20cm$. Biết 1 nhịp cầu như hình vẽ. Hỏi lượng bê tông để xây các nhịp cầu là bao nhiêu

A. $20m^3$.

B. $50m^3$.

C. $40m^3$.

D. $100m^3$.

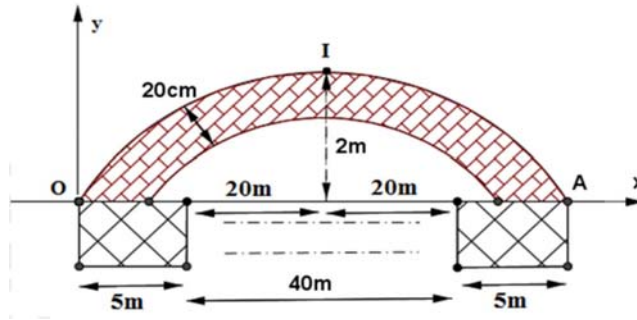


Hướng dẫn giải:

Chọn C

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ với gốc $O(0;0)$ là chân cầu,

đỉnh $I(25;2)$, điểm $A(50;0)$



Gọi Parabol trên có phương trình: $(P_1): y_1 = ax^2 + bx + c = ax^2 + bx \left(O \in (P_1) \right)$

$\Rightarrow y_2 = ax^2 + bx - \frac{20}{100}ax = ax^2 + bx - \frac{1}{2}$ là phương trình parabol dưới

Ta có $I, A \in (P_1) \Rightarrow (P_1): y_1 = -\frac{2}{625}x^2 + \frac{4}{25}x \Rightarrow y_2 = -\frac{2}{625}x^2 + \frac{4}{25}x - \frac{1}{5}$

Khi đó diện tích mỗi nhịp cầu là $S = S_1$ với S_1 là phần giới hạn bởi $y_1; y_2$ trong khoảng $(0; 25)$

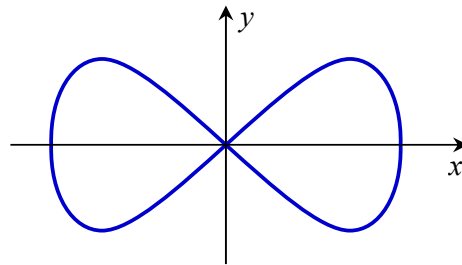
$$S = 2 \left(\int_0^{0,2} \left(-\frac{2}{625}x^2 + \frac{4}{25}x \right) dx + \int_{0,2}^{15} \frac{1}{5} dx \right) \approx 0,9m^2$$

Vì bề dày nhịp cầu không đổi nên coi thể tích là tích diện tích và bề dày $V = S \cdot 0,2 \approx 1,98m^3 \Rightarrow$ số lượng bê tông cần cho mỗi nhịp cầu $\approx 2m^3$

Vậy mười nhịp cầu hai bên cần $\approx 40m^3$ bê tông

Chọn Chọn. C.

Bài tập 3: Trong Công viên Toán học có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemniscate có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2 = x^2(25 - x^2)$ như hình vẽ bên.



Tính diện tích S của mảnh đất Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài 1 mét.

A. $S = \frac{125}{6} (m^2).$

B. $S = \frac{125}{4} (m^2).$

C. $S = \frac{250}{3} (m^2).$

D. $S = \frac{125}{3} (m^2)$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Vì tính đối xứng trục nên diện tích của mảnh đất tương ứng với 4 lần diện tích của mảnh đất thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy .

Từ giả thuyết bài toán, ta có $y = \pm \frac{1}{4}x\sqrt{5-x^2}$.

Góc phần tư thứ nhất $y = \frac{1}{4}x\sqrt{25-x^2}; x \in [0; 5]$

$$\text{Nên } S_{(I)} = \frac{1}{4} \int_0^5 x\sqrt{25-x^2} dx = \frac{125}{12} \Rightarrow S = \frac{125}{3} (m^3)$$

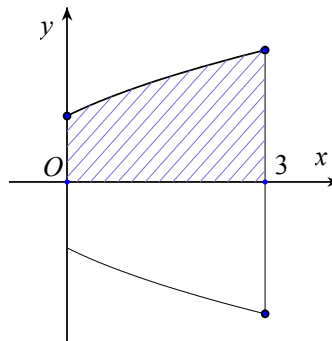
Bài tập 4: Một Bấc thợ gồm làm một cái lọ có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x+1}$ và trục Ox quay quanh trục Ox biết đáy lọ và miệng lọ có đường kính lần lượt là $2dm$ và $4dm$, khi đó thể tích của lọ là:

- A. $8\pi dm^2$..
 B. $\frac{15}{2}\pi dm^3$..
 C. $\frac{14}{3}\pi dm^2$..
 D. $\frac{15}{2} dm^2$.

Lời giải

Chọn B

$$\bullet r_1 = y_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 0$$



$$\bullet r_2 = y_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 3$$

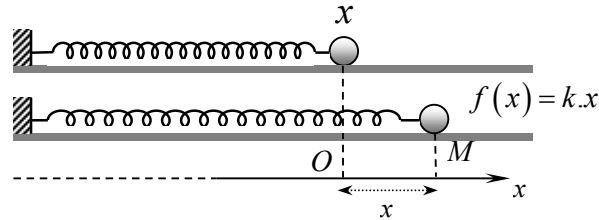
$$\text{Suy ra: } V = \pi \int_0^3 y^2 dx = \pi \int_0^3 (x+1) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^3 = \frac{15}{2} \pi$$

Bài tập 5: Để kéo căng một lò xo có độ dài tự nhiên từ $10cm$ đến $15cm$ cần lực $40N$. Tính công (A) sinh ra khi kéo lò xo có độ dài từ $15cm$ đến $18cm$.

- A. $A = 1,56 (J)$..
 B. $A = 1 (J)$..
 C. $A = 2,5 (J)$..
 D. $A = 2 (J)$..

Lời giải

Chọn A



Theo Định luật Hooke, lực cản dùng để giữ lò xo giãn thêm x mét từ độ dài tự nhiên là $f(x) = kx$, với $k(N/m)$ là độ cứng của lò xo. Khi lò xo được kéo giãn từ độ dài $10cm$ đến $15cm$, lượng kéo giãn là $5\text{ cm} = 0.05\text{ m}$. Điều này có nghĩa $f(0.05) = 40$, do đó:

$$0,05k = 40 \Leftrightarrow k = \frac{40}{0,05} = 800(N/m)$$

Vậy $f(x) = 800x$ và công cần để kéo dẫn lò xo từ $15cm$ đến $18cm$ là:

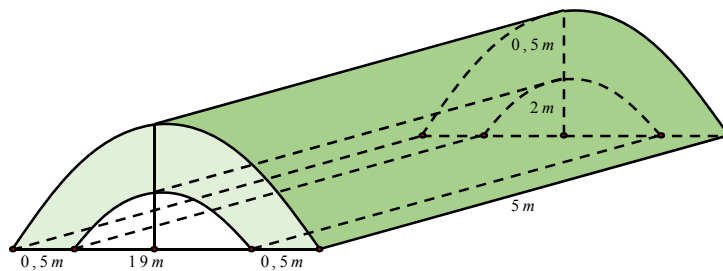
$$A = \int_{0,05}^{0,08} 800 dx = 400x^2 \Big|_{0,05}^{0,08} = 400 \left[(0,08)^2 - (0,05)^2 \right] = 1,56(J)$$

Góc phần tư thứ nhất $y = \frac{1}{4}x\sqrt{25-x^2}; x \in [0;5]$

$$\text{Nên } S_{(I)} = \frac{1}{4} \int_0^5 x\sqrt{25-x^2} dx = \frac{125}{12} \Rightarrow S = \frac{125}{3}(m^3)$$

3. Bài tập trắc nghiệm:

Câu 1: Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã X có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu.



A. $19m^3$.

B. $21m^3$.

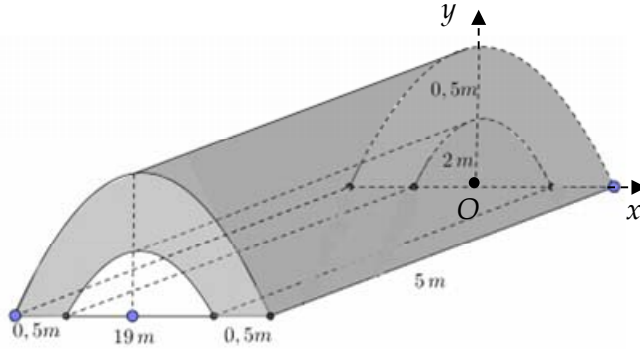
C. $18m^3$.

D. $40m^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Ta có

Gọi $(P_1): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2}; 0\right), B(0; 2)$

Nên ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 0 = a\left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{8}{361} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$$

Gọi $(P_2): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10; 0), D\left(0; \frac{5}{2}\right)$

Nên ta có hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 0 = a(10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{40} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$$

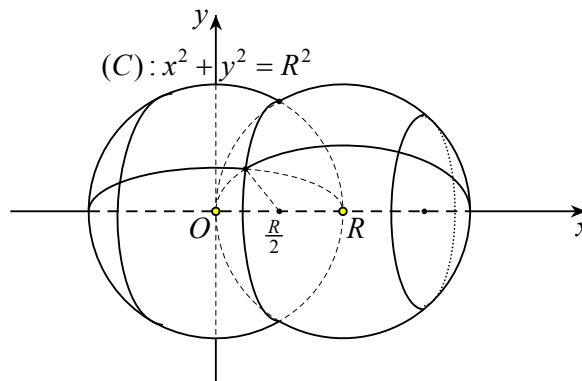
Ta có thể tích của bê tông là: $V = 5.2 \left[\int_0^{10} \left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2} \right) dx - \int_0^{\frac{19}{2}} \left(-\frac{8}{361}x^2 + 2 \right) dx \right] = 40m^3$.

Câu 2: Cho hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ có cùng bán kính R thỏa mãn tính chất: tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại. Tính thể tích phần chung V của hai khối cầu tạo bởi (S_1) và (S_2) .

- A. $V = \pi R^3$. B. $V = \frac{\pi R^3}{2}$. C. $V = \frac{5\pi R^3}{12}$. D. $V = \frac{2\pi R^3}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Gắn hệ trục Oxy như hình vẽ

Khối cầu $S(O, R)$ chứa một đường tròn lớn là $(C): x^2 + y^2 = R^2$

Dựa vào hình vẽ, thể tích cần tính là

$$V = 2\pi \int_{\frac{R}{2}}^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{\frac{R}{2}}^R = \frac{5\pi R^3}{12}.$$

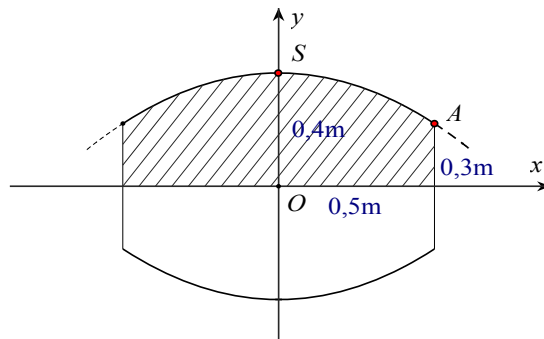
Câu 3: Một thùng rượu có bán kính các đáy là 30cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có bán kính là 40cm, chiều cao thùng rượu là 1m. Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt xung quanh thùng rượu là các đường parabol, hỏi thể tích của thùng rượu là bao nhiêu?



- A. 425,2 lit. B. 425162 lit. C. 212581 lit. D. 212,6 lit.

Hướng dẫn giải

Chọn A



• Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$ là parabol đi qua điểm $A(0,5;0,3)$ và có đỉnh $S(0;0,4)$. Khi đó, thể tích thùng rượu bằng thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi (P) , trục hoành và hai đường thẳng $x = \pm 0,5$ quay quanh trục Ox .

• Dễ dàng tìm được $(P): y = -\frac{2}{5}x^2 + 0,4$

• Thể tích thùng rượu là:

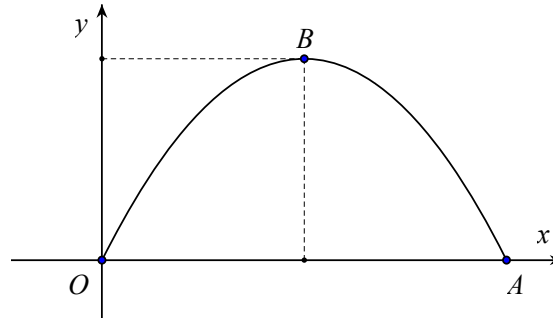
$$V = \pi \int_{-0,5}^{0,5} \left(-\frac{2}{5}x^2 + 0,4 \right)^2 dx = 2\pi \int_0^{0,5} \left(-\frac{2}{5}x^2 + 0,4 \right)^2 dx = \frac{203\pi}{1500} \approx 425,5 \text{ (l)}.$$

Câu 4: Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là:

- A. 33750000 đồng. B. 12750000 đồng. C. 6750000 đồng. D. 3750000 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn C



• Gắn parabol (P) và hệ trục tọa độ sao cho (P) đi qua $O(0;0)$

• Gọi phương trình của parabol là: $(P): y = ax^2 + bx + c$

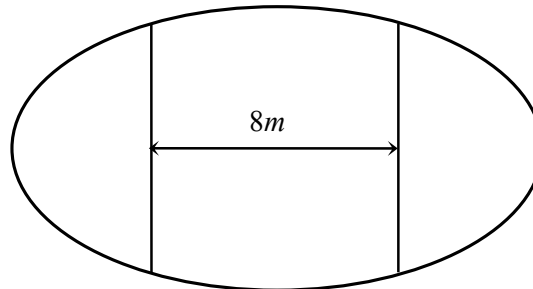
Theo đề ra, (P) đi qua ba điểm $O(0;0)$, $A(3;0)$, $B(1,5;2,25)$.

Từ đó, suy ra $(P): y = -x^2 + 3x$

• Diện tích phần Bác Năm xây dựng: $S = \int_0^3 |-x^2 + 3x| dx = \frac{9}{2}$

• Vậy số tiền bác Năm phải trả là: $\frac{9}{2} \cdot 1500000 = 6750000$.

Câu 5: Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng. Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/ m^2 . Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó?



- A. 7.862.000 đồng. B. 7.653.000 đồng. C. 7.128.000 đồng. D. 7.826.000 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Giả sử elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Từ giả thiết ta có $2a = 16 \Rightarrow a = 8$ và $2b = 10 \Rightarrow b = 5$

Vậy phương trình của elip là $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{8}\sqrt{64-y^2} & (E_1) \\ y = \frac{5}{8}\sqrt{64-y^2} & (E_2) \end{cases}$

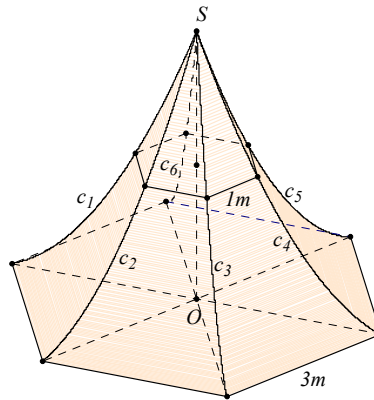
Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường (E_1) ; (E_2) ; $x = -4$; $x = 4$ và diện

tích của dải vườn là $S = 2 \int_{-4}^4 \frac{5}{8} \sqrt{64-x^2} dx = \frac{5}{2} \int_0^4 \sqrt{64-x^2} dx$

Tính tích phân này bằng phép đổi biến $x = 8 \sin t$, ta được $S = 80 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$

Khi đó số tiền là $T = 80 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot 100000 = 7652891,82 \approx 7.653.000$.

Câu 6: Người ta dựng một cái lều vải có dạng hình “chóp lục giác cong đều” như hình vẽ bên. Đáy của là một hình lục giác đều cạnh $3m$. Chiều cao $SO = 6m$. Các cạnh bên của là các sợi dây $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ nằm trên các đường parabol có trục đối xứng song song với SO . Giả sử giao tuyến của với mặt phẳng vuông góc với SO là một lục giác đều và khi qua trung điểm của SO thì lục giác đều có cạnh bằng $1m$. Tính thể tích phần không gian nằm bên trong cái lều đó.



A. $\frac{135\sqrt{3}}{5} (m^3)$.

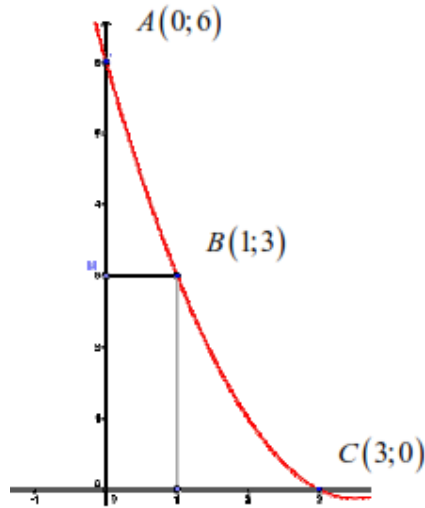
B. $\frac{96\sqrt{3}}{5} (m^3)$.

C. $\frac{135\sqrt{3}}{4} (m^3)$.

D. $\frac{135\sqrt{3}}{8} (m^3)$

Hướng dẫn giải

Chọn D



Đặt hệ tọa độ như hình vẽ, ta có parabol cần tìm đi qua 3 điểm có tọa độ lần lượt là $A(0;6)$, $B(1;3)$, $C(3;0)$ nên có phương trình là $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 6$

Theo hình vẽ ta có cạnh của thiết diện là BM

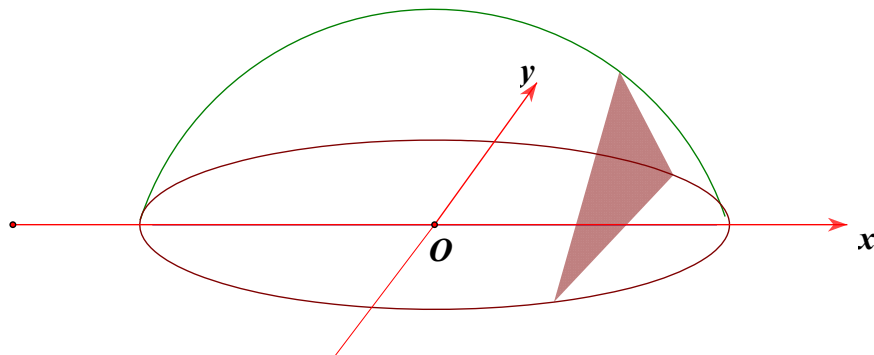
$$\text{Nếu ta đặt } t = OM \text{ thì } BM = \frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}}$$

Khi đó diện tích của thiết diện lục giác:

$$S(t) = 6 \cdot \frac{BM^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}} \right)^2, \text{ với } t \in [0; 6]$$

$$\text{Vậy thể tích của túp lều theo đề bài là: } V = \int_0^6 S(t) dt = \int_0^6 \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{7}{2} - \sqrt{2t + \frac{1}{4}} \right)^2 dt = \frac{135\sqrt{3}}{8} \dots$$

Câu 7: Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đây là hình tròn giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 16$, cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là tam giác đều. Thể tích của vật thể là:



A. $V = \frac{32\sqrt{3}}{3} \dots$

B. $V = \frac{256\sqrt{3}}{3} \dots$

C. $V = \frac{256}{3} \dots$

D. $V = \frac{32}{3}.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Giải phương trình $x^2 + y^2 = 16 \Leftrightarrow y^2 = 16 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{16 - x^2}$

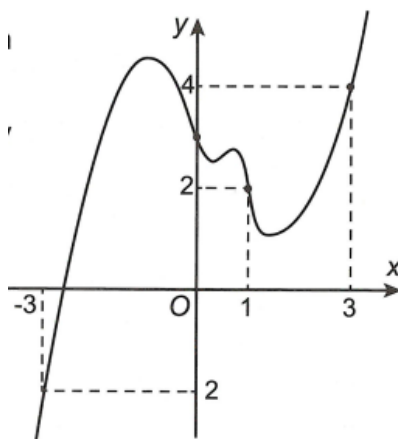
Diện tích thiết diện là $S(x) = \frac{1}{2} \left| 2\sqrt{16 - x^2} \right|^2 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = (16 - x^2)\sqrt{3}$

Thể tích cần tìm là $V = \int_{-4}^4 S(x)dx = \sqrt{3} \int_{-4}^4 (16 - x^2)dx = \frac{256\sqrt{3}}{3}.$

Dạng 9: Các bài toán bản chất đặt sắc của tích phân

Bài tập 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên $[-2; 6]$ như hình vẽ bên. Biết các miền $A, B, x = 2$

có diện tích lần lượt là 32; 2; 3. Tích phân $\int_{-2}^2 [f(2x+2)+1]dx$ bằng



A. $\frac{45}{2}.$

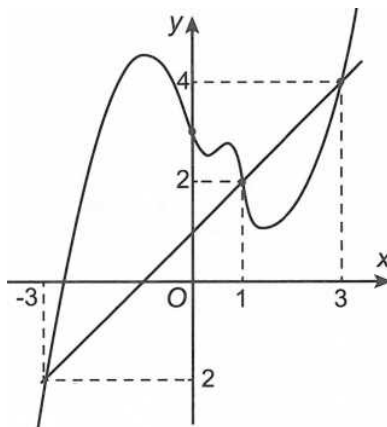
B. 41.

C. 37.

D. $\frac{41}{2}.$

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có $\int_{-2}^2 [f(2x+2)+1] dx = \int_{-2}^2 f(2x+2) dx + 4$

Xét $I_1 = \int_{-2}^2 f(2x+2) dx$.

Đặt $t = 2x + 2 \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$

Đổi cận: $x = -2 \Rightarrow t = -2$; $x = 2 \Rightarrow t = 6$.

Suy ra $I_1 = \frac{1}{2} \int_{-2}^6 f(t) dt$.

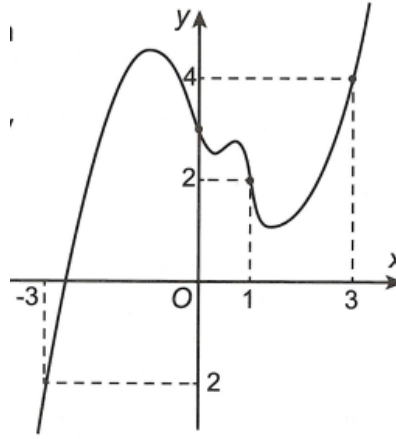
Gọi x_1 ; x_2 là các hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục hoành $(-2 < x_1 < x_2 < 6)$. Ta có

$$I_1 = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^{x_1} f(t) df + \int_{x_1}^{x_2} f(t) df + \int_{x_2}^6 f(t) df \right) = \frac{1}{2} (S_A - S_B + S_C)$$

$$= \frac{1}{2} (32 - 2 + 3) = \frac{33}{2}$$

Vậy $\int_{-2}^2 [f(2x+2)+1] dx = I_1 + 4 = \frac{33}{2} + 4 = \frac{41}{2}$

Bài tập 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(3) > g(-3) > g(1)$.

B. $g(-3) > g(3) > g(1)$.

C. $g(1) > g(-3) > g(3)$.

D. $g(1) > g(3) > g(-3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $g'(x) = 2f'(x) - 2(x+1)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+1$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $d: y = x+1$.

Dựa vào đồ thị ta thấy: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \pm 3 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$g(-3)$	$g(1)$	$g(3)$	$+\infty$		

Suy ra $g(-3) < g(1)$ và $g(3) < g(1)$

Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích các hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$, đường thẳng $d: y = x+1$ trên các đoạn $[-3;1]$ và $[1;3]$ ta có:

+) Trên đoạn $[-3;1]$ ta có $f'(x) \geq x+1$ nên $S_1 = \int_{-3}^1 |g'(x)| dx = \frac{1}{2} \int_{-3}^1 [f'(x) - (x+1)] dx$.

+) Trên đoạn $[1;3]$ ta có $f'(x) \leq x+1$ nên $S_2 = \int_1^3 |g'(x)| dx = \frac{1}{2} \int_1^3 [(x+1)f'(x)] dx$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $S_1 > S_2$ nên ta có:

$$g(x) \Big|_{-3}^1 > -g(x) \Big|_1^3 \Leftrightarrow g(1) - g(-3) > -g(3) + g(1) \Leftrightarrow g(3) > g(-3).$$

Vậy $g(1) > g(3) > g(-3)$.

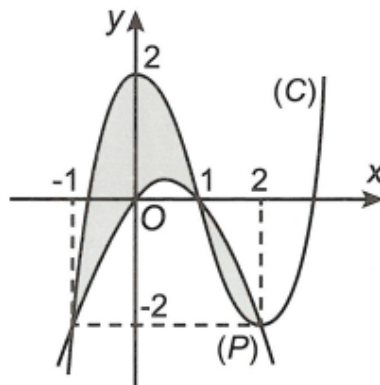
Lưu ý:

- Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $d: y = x+1$ chính là nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.

- Lập bảng biến thiên ta thấy $g(1)$ lớn hơn $g(\pm 3)$. Ta chỉ cần so sánh $g(3)$ và $g(-3)$.

- So sánh diện tích dựa vào đồ thị.

Ví dụ 4: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** của hình vẽ có diện tích bằng



A. $\frac{37}{12}$.

B. $\frac{7}{12}$.

C. $\frac{11}{12}$.

D. $\frac{5}{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Vì đồ thị hàm bậc ba và đồ thị hàm bậc hai cắt trục tung tại các điểm có tung độ lần lượt là $y = 2$ và $y = 0$ nên ta xét hai hàm số là $y = ax^3 + bx^2 + cx + 2$, $y = mx^2 + nx$ (với $a, m \neq 0$).

Suy ra (C): $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$ và (P): $y = g(x) = mx^2 + nx$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) là:

$$ax^3 + bx^2 + cx + 2 = mx^2 + nx \Leftrightarrow (ax^3 + bx^2 + cx + 2) - (mx^2 + nx) = 0.$$

$$\text{Đặt } P(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + 2) - (mx^2 + nx).$$

Theo giả thiết, (C) và (P) cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$ nên $P(x) = a(x+1)(x-1)(x-2)$.

$$\text{Ta có } P(0) = 2a.$$

$$\text{Mặt khác, ta có } P(0) = f(0) - g(0) = 2 \Rightarrow a = 1.$$

$$\text{Vậy diện tích phần tô đậm là } S = \int_{-1}^2 |(x+1)(x-1)(x-2)| dx = \frac{37}{12}$$