

PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG, ĐƯỜNG THẲNG, MẶT CẦU

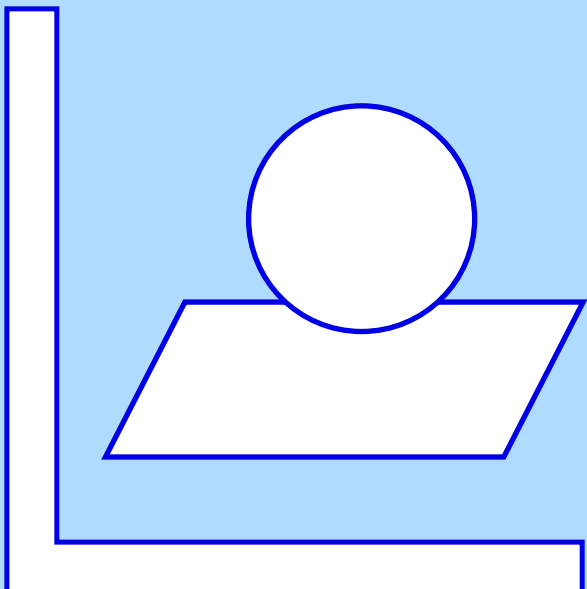
CHƯƠNG 5

12

TOÁN

Chân trời sáng tạo

(có thể dùng chung cả 3 bộ sách)



Lý thuyết và bài tập tự luận

Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Trắc nghiệm đúng sai

Trắc nghiệm trả lời ngắn

MỤC LỤC

CHƯƠNG 5. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG, ĐƯỜNG THẲNG, MẶT CẦU	TRANG
BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG	1
A. Lý thuyết	1
B. Bài tập tự luận	6
C. Bài tập trắc nghiệm 1	19
D. Bài tập trắc nghiệm 2	23
E. Bài tập trắc nghiệm 3	27
F. Bài tập trắc nghiệm 4	31
G. Bài tập trắc nghiệm 5	36
BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN	41
A. Lý thuyết	41
B. Bài tập tự luận	45
C. Bài tập trắc nghiệm 1	65
D. Bài tập trắc nghiệm 2	70
E. Bài tập trắc nghiệm 3	75
F. Bài tập trắc nghiệm 4	79
G. Bài tập trắc nghiệm 5	84
BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU	90
A. Lý thuyết	90
B. Bài tập tự luận	93
C. Bài tập trắc nghiệm 1	104
D. Bài tập trắc nghiệm 2	108
E. Bài tập trắc nghiệm 3	112
F. Bài tập trắc nghiệm 4	116
G. Bài tập trắc nghiệm 5	120
ĐÁP ÁN	125

Giáo viên cần file word liên hệ:

ThS. Trần Thanh Yên

Facebook: <https://www.facebook.com/thanhhyendhsp>

Email: tthanhyen@gmail.com

Mặc dù rất cố gắng để tài liệu có thể chính chu và chính xác hết mức có thể nhưng không thể tránh khỏi một số sai sót. Các bạn đọc xem sửa lỗi mới nhất của tất cả các chương đến thời điểm hiện tại ở:

<https://www.yenmaths.com/p/fix.html>

CHƯƠNG 5. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG, ĐƯỜNG THẲNG, MẶT CẦU

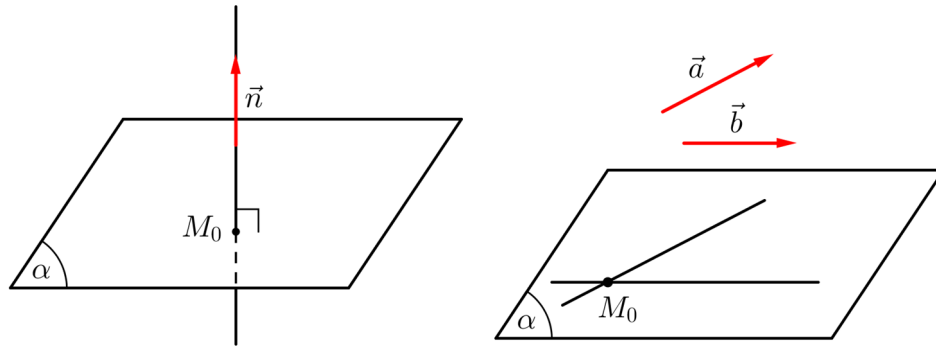
BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

A. LÝ THUYẾT

1. Vector pháp tuyến và cặp vector chỉ phương của mặt phẳng

Cho mặt phẳng (α) .

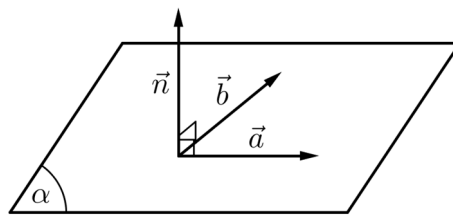
- Nếu vector $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với (α) thì $\vec{n}$ được gọi là **vector pháp tuyến** của (α) .
- Nếu hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trong (α) thì $\vec{a}, \vec{b}$ được gọi là **cặp vector chỉ phương** của (α) .



Chú ý:

- Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vector pháp tuyến hoặc một điểm và một cặp vector chỉ phương của mặt phẳng đó.
- Nếu $\vec{n}$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là một vector pháp tuyến của (α) .

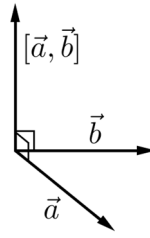
2. Xác định vector pháp tuyến của mặt phẳng khi biết một cặp vector chỉ phương



Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt phẳng (α) nhận hai vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ làm cặp vector chỉ phương thì (α) nhận vector $\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$ làm vector pháp tuyến.

Chú ý:

- Vector $\vec{n} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$ được gọi là **tích có hướng** của hai vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Tích có hướng của hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ kí hiệu là $[\vec{a}, \vec{b}]$.



b) Biểu thức $a_1b_2 - a_2b_1$ thường được kí hiệu là $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$.

Tương tự, $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2b_3 - a_3b_2$, $\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = a_3b_1 - a_1b_3$.

Như vậy, ta có thể viết:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1).$$

Cách tính nhanh:

“Che cột 1 lấy tích dấu huyền trừ tích dấu sắc
Che cột 2 lấy tích dấu sắc trừ tích dấu huyền
Che cột 3 lấy tích dấu huyền trừ tích dấu sắc”.

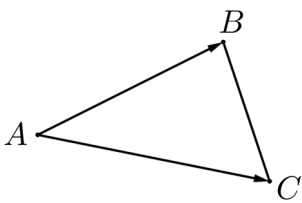
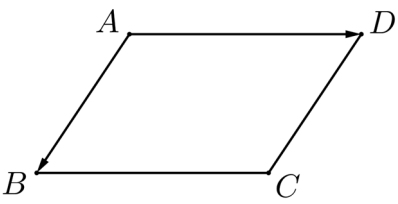
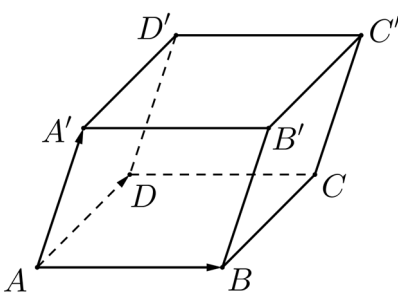
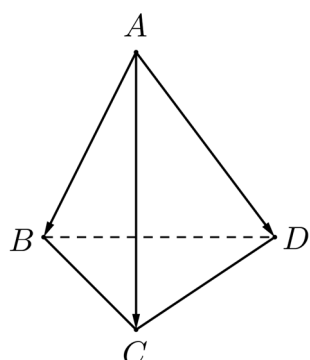
Vector	Cột 1	Cột 2	Cột 3
$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$	a_1	a_2	a_3
$\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$	b_1	b_2	b_3

Tính chất của tích có hướng

- $[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}$
- $[\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}$
- $[\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}$
- $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$
- $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}, [\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$
- $||[\vec{a}, \vec{b}|| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$
- $[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}]$
- $[k\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, k\vec{b}] = k \cdot [\vec{a}, \vec{b}]$
- $[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] \neq [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$
- $\vec{a} \cdot [\vec{b}, \vec{c}] = \vec{b} \cdot [\vec{c}, \vec{a}] = \vec{c} \cdot [\vec{a}, \vec{b}]$
- $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$
- Đẳng thức Jacobi: $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] + [\vec{b}, [\vec{c}, \vec{a}]] + [\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]] = \vec{0}$

Ứng dụng của tích có hướng

- $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.
- $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.
- A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \vec{0}$.
- A, B, C, D đồng phẳng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.
- A, B, C, D không đồng phẳng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$.

• Diện tích tam giác: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right .$ 	• Diện tích hình bình hành: $S_{\square ABCD} = \left [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \right .$ 
• Thể tích khối hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \cdot \overrightarrow{AA'} \right .$ 	• Thể tích tứ diện: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \right .$ 

Chú ý:

- Tích có hướng của hai vectơ là một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ là một số.
- Tích vô hướng của hai vectơ thường sử dụng để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, tính góc giữa hai đường thẳng.
- Tích có hướng của hai vectơ thường sử dụng để tính diện tích tam giác; tính thể tích khối tứ diện, thể tích hình hộp; chứng minh các vectơ đồng phẳng – không đồng phẳng, chứng minh các vectơ cùng phương.

3. Phương trình tổng quát của mặt phẳng**Khái niệm phương trình tổng quát của mặt phẳng**

Trong không gian $Oxyz$, phương trình có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0, được gọi là **phương trình tổng quát** của mặt phẳng.

Nhận xét:

a) Cho mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó:

- Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$.
- $N(x_0; y_0; z_0) \in (\alpha) \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

b) Mỗi phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ (trong đó A, B, C không đồng thời bằng 0) đều là phương trình của một mặt phẳng xác định.

4. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng**Mặt phẳng đi qua một điểm và có một vectơ pháp tuyến**

Phương trình (α) qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có một VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$ là:

$$(\alpha): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Nhận xét: Nếu $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ thì một VTPT của (α) là $\vec{n} = (A; B; C)$.

Các trường hợp đặc biệt

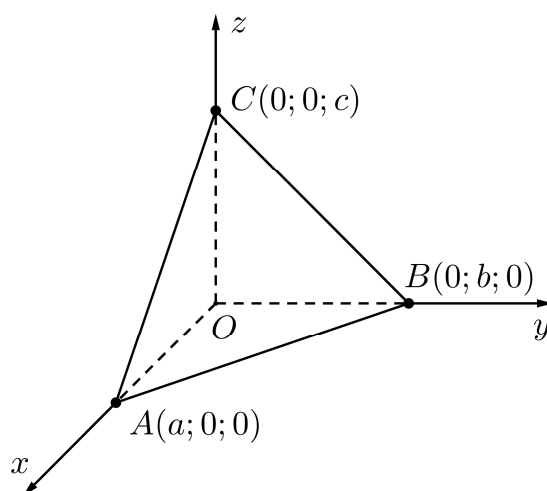
Các hệ số	Phương trình mặt phẳng (α)	Tính chất mặt phẳng (α)
$D = 0$	$Ax + By + Cz = 0$	(α) đi qua gốc toạ độ O
$A = 0$	$By + Cz + D = 0$	$(\alpha) \parallel Ox$ hoặc $(\alpha) \supset Ox$
$B = 0$	$Ax + Cz + D = 0$	$(\alpha) \parallel Oy$ hoặc $(\alpha) \supset Oy$
$C = 0$	$Ax + By + D = 0$	$(\alpha) \parallel Oz$ hoặc $(\alpha) \supset Oz$
$A = B = 0$	$Cz + D = 0$	$(\alpha) \parallel (Oxy)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oxy)$
$A = C = 0$	$By + D = 0$	$(\alpha) \parallel (Oxz)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oxz)$
$B = C = 0$	$Ax + D = 0$	$(\alpha) \parallel (Oyz)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oyz)$

Nhận xét: Nếu phương trình (α) không chứa ẩn nào thì (α) song song hoặc chứa trục tương ứng.

Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn

Nếu (α) cắt các trục toạ độ tại các điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ thì phương trình của (α) là:

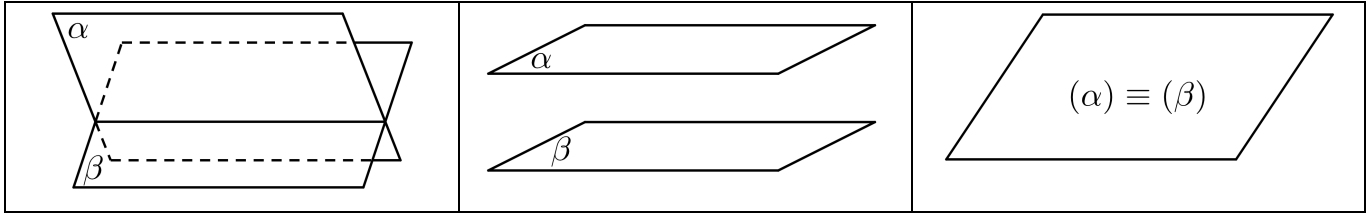
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$



5. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ lần lượt có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ và $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$. Khi đó:

$(\alpha), (\beta)$ cắt nhau	$(\alpha) \parallel (\beta)$	$(\alpha) \equiv (\beta)$
$\vec{n}_1, \vec{n}_2$ không cùng phương	$\vec{n}_1 = k\vec{n}_2$ và $D_1 \neq kD_2$	$\vec{n}_1 = k\vec{n}_2$ và $D_1 = kD_2$
$A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$



Đặc biệt: $(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

6. Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng

Cho điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) là:

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

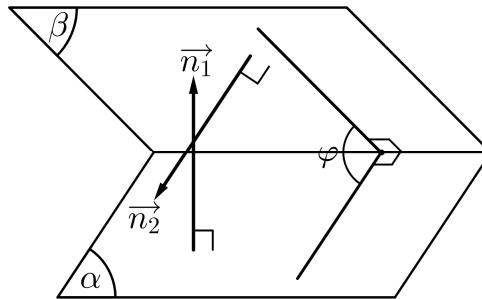
7. Góc giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ lần lượt có VTPT là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ và $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$.

Góc giữa $(\alpha), (\beta)$ bằng hoặc bù với góc giữa hai VTPT $\vec{n}_1, \vec{n}_2$:

$$\cos((\alpha), (\beta)) = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Chú ý: $0^\circ \leq ((\alpha), (\beta)) \leq 90^\circ$.

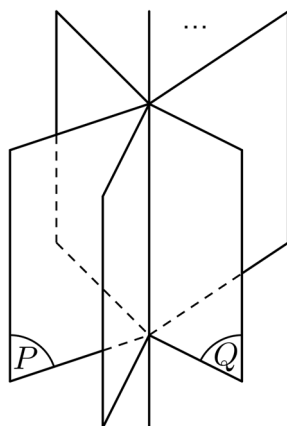


8. (Đọc thêm) Phương trình chùm mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng cắt nhau $(P): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(Q): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Khi đó mặt phẳng đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) sẽ có dạng:

$$m(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + n(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \text{ với } m^2 + n^2 > 0.$$



B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG TOÁN: TÍCH CÓ HƯỚNG VÀ ỨNG DỤNG

Câu 1. Tính tích có hướng $[\vec{a}, \vec{b}]$ với:

a) $\vec{a} = (1; 4; -6)$, $\vec{b} = (-2; 1; 3)$.

b) $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (-4; 2; 6)$.

Câu 2. Cho ba vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Tìm m, n để $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

a) $\vec{a} = (3; -1; -2)$, $\vec{b} = (1; 2; m)$, $\vec{c} = (5; 1; 7)$.

b) $\vec{a} = (2; 3; 1)$, $\vec{b} = (5; 6; 4)$, $\vec{c} = (m; n; -3)$.

Câu 3. Cho $\vec{a} = (-1; 0; 3)$, $\vec{b} = (2; -3; 1)$. Tìm vector $\vec{c}$ vuông góc với cả 2 vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và có độ dài bằng 1.

Câu 4. Tính tích hỗn tạp $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c}$ với:

a) $\vec{a} = (5; -4; 2)$, $\vec{b} = (1; 6; -2)$, $\vec{c} = (0; 2; 1)$.

b) $\vec{a} = (0; 1; 3)$, $\vec{b} = (2; 0; -5)$, $\vec{c} = (1; 4; -2)$.

Câu 5. Xét sự đồng phẳng của 3 vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ với:

a) $\vec{a} = (1; -1; 1)$, $\vec{b} = (0; 1; 2)$, $\vec{c} = (4; 2; 3)$.

b) $\vec{a} = (4; 2; 5)$, $\vec{b} = (3; 1; 3)$, $\vec{c} = (2; 0; 1)$.

Câu 6. Tìm m để 3 vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng:

a) $\vec{a} = (1; m; 2)$, $\vec{b} = (m+1; 2; 1)$, $\vec{c} = (0; m-2; 2)$.

b) $\vec{a} = (2m+1; 1; 2m-1)$, $\vec{b} = (m+1; 2; m+2)$, $\vec{c} = (2m; m+1; 2)$.

Câu 7. Cho các vector $\vec{a} = (2; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; -1; 2)$, $\vec{c} = (2; 2; -1)$.

a) Chứng minh 3 vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng.

b) Biểu diễn vector $\vec{u} = (3; 7; -7)$ theo 3 vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Câu 8. Xét tính thẳng hàng của ba điểm sau:

a) $A(1; 3; 1)$, $B(0; 1; 2)$, $C(0; 0; 1)$.

b) $A(1; 1; 1)$, $B(-4; 3; 1)$, $C(-9; 5; 1)$.

Câu 9. Cho ba điểm $A(3; -4; 7)$, $B(-5; 3; -2)$, $C(1; 2; -3)$.

a) Chứng tỏ ba điểm A , B , C tạo thành một tam giác.

b) Tính diện tích ΔABC . Từ đó suy ra độ dài đường cao AH của ΔABC .

Câu 10. Cho bốn điểm $A(2;5;-3)$, $B(1;0;0)$, $C(3;0;-2)$, $D(-3;-1;2)$.

- Chứng minh A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.
- Tính thể tích của khối tứ diện $ABCD$.
- Tính diện tích tam giác BCD , từ đó suy ra độ dài đường cao AH của tứ diện vẽ từ A .

Câu 11. Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$.

Câu 12. Cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(3;5;4)$, $C(3;0;5)$.

- Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.
- Tính diện tích của ΔABC .
- Tính độ dài đường cao h_a của ΔABC kẻ từ A .
- Xác định tọa độ trực tâm H của ΔABC .
- Xác định tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

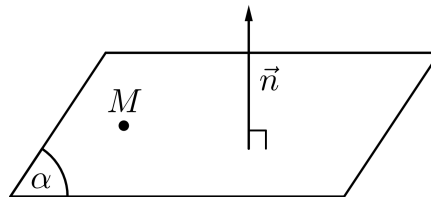
DẠNG TOÁN: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

Để viết phương trình mặt phẳng (α) ta cần xác định 1 điểm thuộc (α) và 1 VTPT của (α) .

Một số dạng cơ bản:

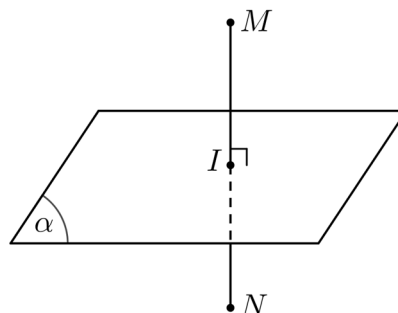
Dạng 1: (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có một VTPT là $\vec{n} = (A; B; C)$

Khi đó $(\alpha): A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.



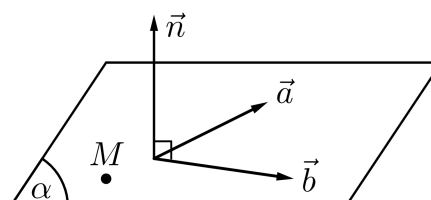
Dạng 2: (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng MN

Khi đó: (α) đi qua trung điểm I của MN và có 1 VTPT $\vec{n} = \overrightarrow{MN}$.



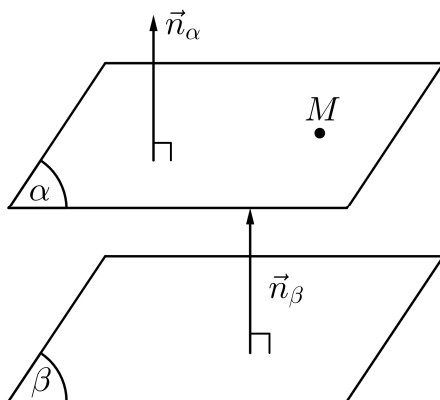
Dạng 3: (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có cặp VTCP $\vec{a}, \vec{b}$

Khi đó (α) có VTPT $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.



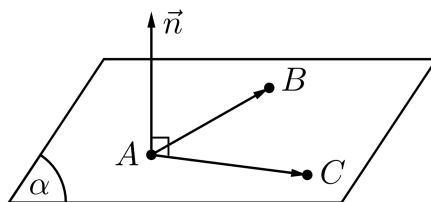
Dạng 4: (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và song song với mặt phẳng $(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$

Khi đó (α) có 1 VTPT $\vec{n}_{(\alpha)} = \vec{n}_{(\beta)}$.



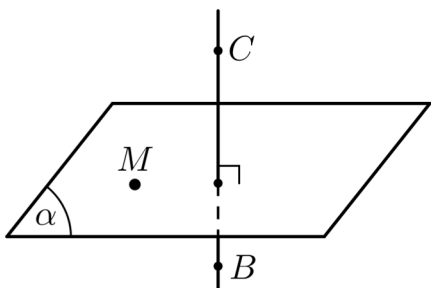
Dạng 5: (α) đi qua 3 điểm không thẳng hàng A, B, C

Khi đó (α) có 1 VTPT $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$.



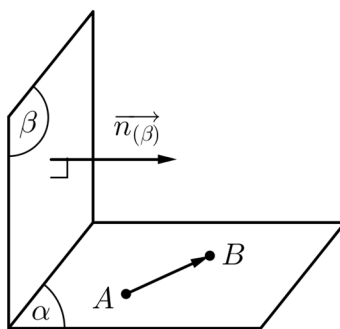
Dạng 6: (α) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc với đường thẳng BC

Khi đó (α) có 1 VTPT $\vec{n} = \overrightarrow{BC}$.



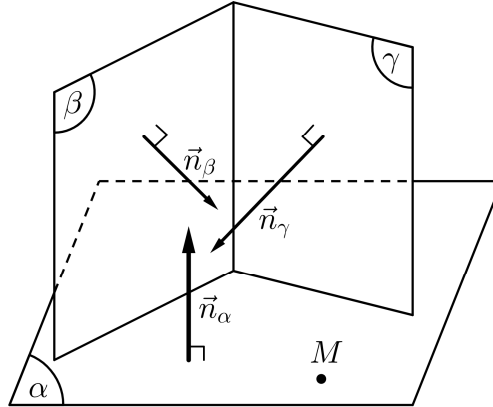
Dạng 7: (α) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (β)

Khi đó (α) có 1 VTPT $\vec{n} = [\vec{n}_{(\beta)}, \overrightarrow{AB}]$.



Dạng 8: (α) đi qua điểm M và vuông góc với 2 mặt phẳng cắt nhau $(\beta), (\gamma)$

- Khi đó (α) có 1 VTPT $\vec{n} = [\vec{n}_{(\beta)}, \vec{n}_{(\gamma)}]$.



Dạng 9: (α) đi qua điểm M và giao tuyến của hai mặt phẳng (P) , (Q)

Cách 1: Tìm 2 điểm phân biệt A, B thuộc giao tuyến của (P) và (Q) (cho trước 1 ẩn, giải hệ phương trình tìm 2 ẩn còn lại). Khi đó (α) đi qua 3 điểm M, A, B .

Cách 2: Tìm 1 điểm A thuộc giao tuyến của (P) và (Q) (cho trước 1 ẩn, giải hệ phương trình tìm 2 ẩn còn lại). Khi đó (α) có 1 VTPT là $n = [\overrightarrow{MA}, [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}]]$.

Cách 3: Viết mặt phẳng (α) ở dạng *phương trình chùm mặt phẳng*, dựa vào giả thiết (α) đi qua điểm M để tìm hệ số chưa biết.

Dạng 10: (α) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (P) , (Q) đồng thời song song với mặt phẳng (R)

Cách 1: Tìm 1 điểm A thuộc giao tuyến của (P) và (Q) (cho trước 1 ẩn, giải hệ phương trình tìm 2 ẩn còn lại). Khi đó (α) đi qua điểm A và có 1 VTPT $\vec{n} = \vec{n}_{(R)}$.

Cách 2: Viết mặt phẳng (α) ở dạng *phương trình chùm mặt phẳng*, dựa vào giả thiết (α) song song với (R) để tìm hệ số chưa biết.

Dạng 11: (α) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (P) , (Q) đồng thời vuông góc với mặt phẳng (R)

Cách 1: Tìm 2 điểm phân biệt A, B thuộc giao tuyến của (P) và (Q) (cho trước 1 ẩn, giải hệ phương trình tìm 2 ẩn còn lại). Khi đó (α) đi qua điểm A và có 1 VTPT là $n = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}_{(R)}]$.

Cách 2: Tìm 1 điểm A thuộc giao tuyến của (P) và (Q) (cho trước 1 ẩn, giải hệ phương trình tìm 2 ẩn còn lại). Khi đó (α) đi qua điểm A và có 1 VTPT là $n = [\vec{n}_{(R)}, [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}]]$.

Cách 3: Viết mặt phẳng (α) ở dạng *phương trình chùm mặt phẳng*, dựa vào giả thiết (α) vuông góc với (R) để tìm hệ số chưa biết.

Câu 13. Cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - 1 = 0$.

- Viết tọa độ 2 điểm tùy ý thuộc (P) .
- Viết tọa độ 2 điểm tùy ý không thuộc (P) .

Câu 24. Viết phương trình mặt phẳng (α) qua giao tuyến của hai mặt phẳng (P) , (Q) đồng thời song song với mặt phẳng (R) với:

a) $(P): y + 2z - 4 = 0$, $(Q): x + y - z - 3 = 0$, $(R): x + y - z - 2 = 0$.

b) $(P): x - 4y + 2z - 5 = 0$, $(Q): y + 4z - 5 = 0$, $(R): 2x - 9y + 19 = 0$.

Câu 25. Viết phương trình mặt phẳng (α) qua giao tuyến của hai mặt phẳng (P) , (Q) đồng thời vuông góc với mặt phẳng (R) với:

a) $(P): x + 2y - z - 4 = 0$, $(Q): 2x + y + z + 5 = 0$, $(R): x - 2y - 3z + 6 = 0$.

b) $(P): 3x - y + z - 2 = 0$, $(Q): x + 4y - 5 = 0$, $(R): 2x - z + 7 = 0$.

DẠNG TOÁN: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI, GÓC, KHOẢNG CÁCH

Câu 26. Xét vị trí tương đối của các cặp mặt phẳng sau:

a) $\begin{cases} (\alpha): 2x + 3y - 2z + 5 = 0 \\ (\beta): 3x + 4y - 8z - 5 = 0 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} (\alpha): 3x - 4y + 3z + 6 = 0 \\ (\beta): 3x - 2y + 5z - 3 = 0 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} (\alpha): 5x + 5y - 5z - 1 = 0 \\ (\beta): 3x + 3y - 3z + 7 = 0 \end{cases}$.

d) $\begin{cases} (\alpha): 6x - 4y - 6z + 5 = 0 \\ (\beta): 12x - 8y - 12z - 5 = 0 \end{cases}$.

e) $\begin{cases} (\alpha): 2x - 2y - 4z + 5 = 0 \\ (\beta): 5x - 5y - 10z + \frac{25}{2} = 0 \end{cases}$.

f) $\begin{cases} (\alpha): 3x - 2y - 6z - 23 = 0 \\ (\beta): 3x - 2y - 6z + 33 = 0 \end{cases}$.

Câu 27. Xác định m, n để các cặp mặt phẳng sau song song, cắt nhau, trùng nhau:

a) $\begin{cases} (\alpha): 3x + my - 2z - 7 = 0 \\ (\beta): nx + 7y - 6z + 4 = 0 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} (\alpha): 2x + my + 3z - 5 = 0 \\ (\beta): nx - 6y - 6z + 2 = 0 \end{cases}$.

Câu 28. Xác định m để các cặp mặt phẳng sau vuông góc với nhau:

a) $\begin{cases} (\alpha): 2x - 7y + mz + 2 = 0 \\ (\beta): 3x + y - 2z + 15 = 0 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} (\alpha): (2m - 1)x - 3my + 2z + 3 = 0 \\ (\beta): mx + (m - 1)y + 4z - 5 = 0 \end{cases}$.

Câu 29. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng:

a) $\begin{cases} (\alpha): 6x - 2y + z + 1 = 0 \\ (\beta): 6x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} (\alpha): 4x - y + 8z + 1 = 0 \\ (\beta): 4x - y + 8z + 5 = 0 \end{cases}$.

Câu 30. Tìm tập hợp các điểm cách mặt phẳng (α) một khoảng bằng k với:

a) $(\alpha): 6x - 3y + 2z - 7 = 0$, $k = 3$.

b) $(\alpha): 3x - 2y - 6z + 5 = 0$, $k = 4$.

Câu 31. Tìm tập hợp các điểm cách đều hai mặt phẳng:

a) $\begin{cases} (P): x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ (Q): 2x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} (P): 6x - 2y + z + 1 = 0 \\ (Q): 6x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases}$.

Câu 32. Tìm điểm M trên các trục $Ox / Oy / Oz$ cách đều điểm N và mặt phẳng (P) :

a) $(P): 2x + 2y + z - 5 = 0$, $N(1; 2; -2)$. b) $(P): x + y + 5z - 14 = 0$, $N(1; -4; -2)$.

Câu 33. Tìm điểm M trên các trục $Ox / Oy / Oz$ cách đều hai mặt phẳng:

$$\text{a) } \begin{cases} (P): x + y - z + 1 = 0 \\ (Q): x - y + z - 5 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} (P): x + 2y - 2z + 1 = 0 \\ (Q): 2x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

Câu 34. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và song song với mặt phẳng (Q) , sau đó tính khoảng cách giữa (P) và (Q) với:

$$\text{a) } A(1; 2; -3), (Q): 2x - 4y - z + 4 = 0. \quad \text{b) } A(3; 1; -2), (Q): 6x - 2y + 3z + 12 = 0.$$

Câu 35. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) và cách điểm A một khoảng bằng k với:

$$\text{a) } (Q): x + 2y - 2z + 5 = 0, A(2; -1; 4), k = 4.$$

$$\text{b) } (Q): 2x - 4y + 4z + 3 = 0, A(2; -3; 4), k = 3.$$

Câu 36. Viết phương trình mặt phẳng (P) cách mặt phẳng (Q) một khoảng bằng k với:

$$\text{a) } (Q): 3x - y + 2z - 3 = 0, k = \sqrt{14}. \quad \text{b) } (Q): 4x + 3y - 2z + 5 = 0, k = \sqrt{29}.$$

Câu 37. Viết phương trình mặt phẳng (α) qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(P), (Q)$ đồng thời cách điểm M một khoảng bằng k với: $(P): x - y - 2 = 0, (Q): 5x - 13y + 2z = 0, M(1; 2; 3), k = 2$.

Câu 38. Tính góc giữa hai mặt phẳng:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} (\alpha): x + y - z + 1 = 0 \\ (\beta): x - y + z - 5 = 0 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} (\alpha): x + 2y - 2z + 1 = 0 \\ (\beta): 2x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} (\alpha): 2x - y + 4z + 5 = 0 \\ (\beta): 4x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} (\alpha): x - 2y + 5z + 3 = 0 \\ (\beta) \equiv (Oxy) \end{cases} \end{array}$$

Câu 39. Tìm m để góc giữa hai mặt phẳng sau bằng α với:

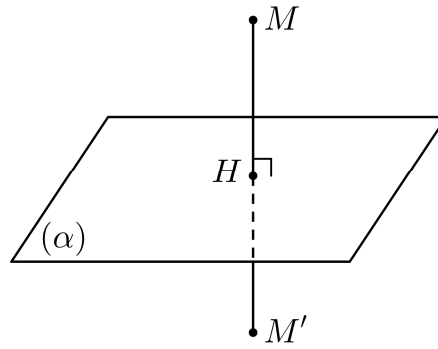
$$\text{a) } \begin{cases} (P): (2m-1)x - 3my + 2z + 3 = 0 \\ (Q): mx + (m-1)y + 4z - 5 = 0 \\ \alpha = 90^\circ \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} (P): mx + 2y + mz - 12 = 0 \\ (Q): x + my + z + 7 = 0 \\ \alpha = 45^\circ \end{cases}$$

DẠNG TOÁN: TÌM HÌNH CHIẾU H CỦA ĐIỂM M TRÊN MẶT PHẪNG (α) , TÌM ĐIỂM ĐỐI XỨNG M' CỦA ĐIỂM M QUA MẶT PHẪNG (α)

$$\text{Điểm } H \text{ là hình chiếu của điểm } M \text{ trên } (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MH} = k \cdot \overrightarrow{n_{(\alpha)}} \\ H \in (\alpha) \end{cases}$$

• Gọi $H(x; y; z)$. Do $H \in (\alpha)$ nên ta có phương trình (1). Lại có $\overrightarrow{MH}$ cùng phương $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}$ nên ta có phương trình (2), (3). Giải hệ (1), (2), (3) ta được x, y, z , từ đó suy ra H .

• Điểm M' đối xứng với điểm M qua $(\alpha) \Leftrightarrow H$ là trung điểm của MM' .



Câu 40. Cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 6 = 0$ và điểm $M(2; -3; 5)$.

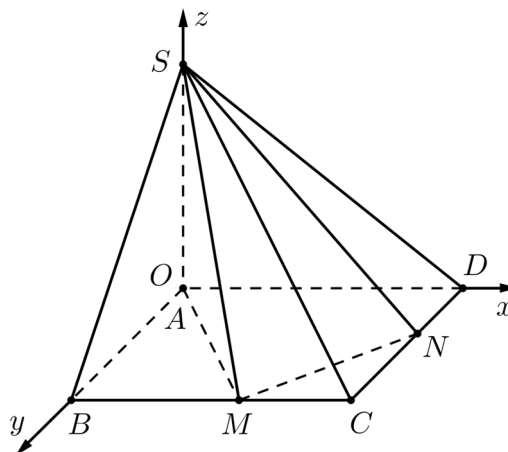
- Tính khoảng cách từ M đến (P) .
- Tìm tọa độ hình chiếu H của M trên (P) .
- Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua (P) .

Câu 41. Cho mặt phẳng $(P): x + y + 5z - 14 = 0$ và điểm $M(1; -4; -2)$.

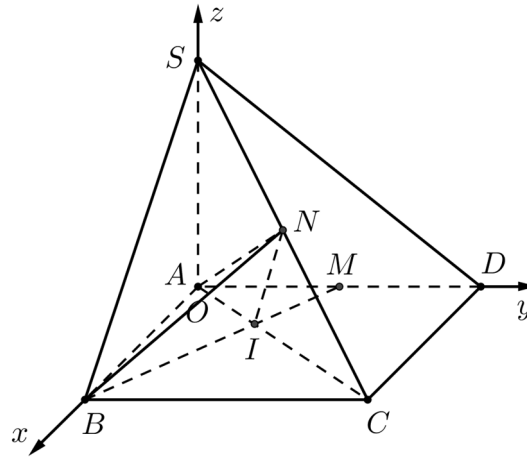
- Tính khoảng cách từ M đến (P) .
- Tìm tọa độ hình chiếu H của M trên (P) .
- Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua (P) .

DẠNG TOÁN: TỌA ĐỘ HÓA HÌNH KHÔNG GIAN

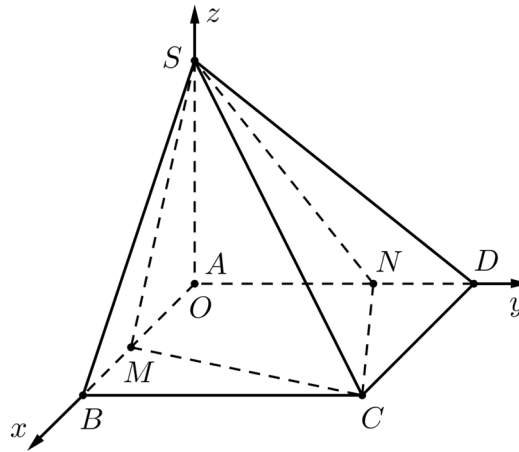
Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với $(ABCD)$; các điểm M, N lần lượt nằm trên các cạnh BC, CD . Đặt $BM = x, DN = y$ ($0 < x, y < a$). Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng A ; các điểm D, B, S lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Xác định hệ thức liên hệ giữa x và y để hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.
HD: $x^2 + a^2 = a(x + y)$.



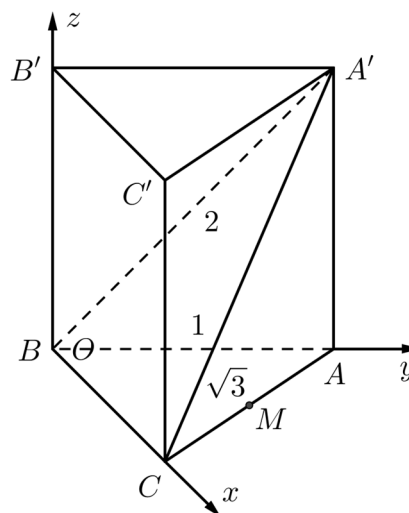
Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{2}, SA = a$ và SA vuông góc với $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC , I là giao điểm của BM và AC . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng A ; các điểm B, D, S lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Tính thể tích khối tứ diện $ANIB$.



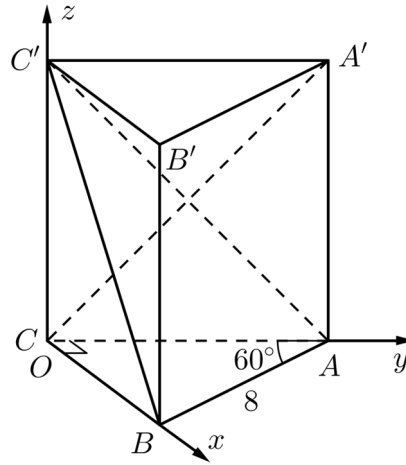
- Câu 44.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ và SA vuông góc với $(ABCD)$. Gọi M, N là các điểm tùy ý lần lượt thuộc các cạnh AB, AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC) . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng A ; các điểm B, D, S lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Tính thể tích lớn nhất của khối chóp $S.AMCN$.
 . HD: $\max V_{S.AMCN} = 2$.



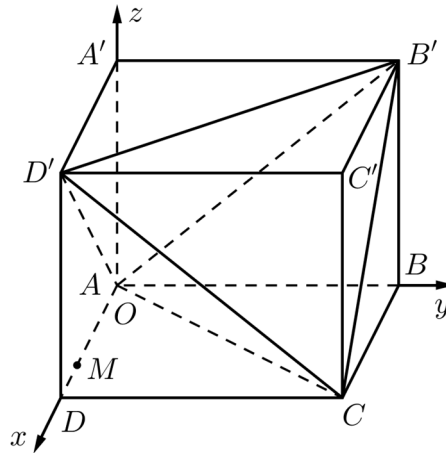
- Câu 45.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB = 1$, $AC = \sqrt{3}$ và $A'B = 2$. Gọi M là trung điểm của AC . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng B ; các điểm C, A, B' lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'BC)$.



Câu 46. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C với $AB = 8$, góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$, diện tích tam giác $A'CC'$ là 10 (đvdt). Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng C ; các điểm B, A, C' lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(C'AB)$ và (ABC) .



Câu 47. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = a$, $AD = 2a$ và $AA' = a$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng A ; các điểm D, B, A' lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz .



a) Gọi M là điểm thuộc đoạn AD sao cho $\frac{AM}{MD} = 3$. Tính khoảng cách từ M đến $(AB'C)$.

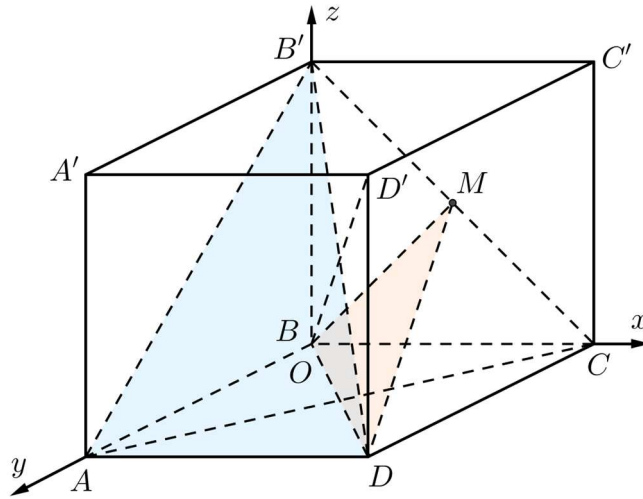
b) Tính thể tích tứ diện $(AB'D'C)$.

Câu 48. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết khoảng cách giữa AB và $B'C$ bằng $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$,

khoảng cách giữa BC và AB' bằng $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$, khoảng cách giữa AC và BD' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Gọi M

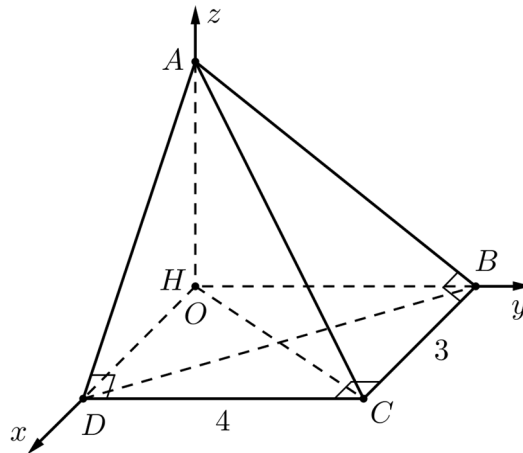
là trung điểm $B'C$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng B ; các điểm C, A, B' lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (MBD) và $(AB'D)$. HD:

$$\tan \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

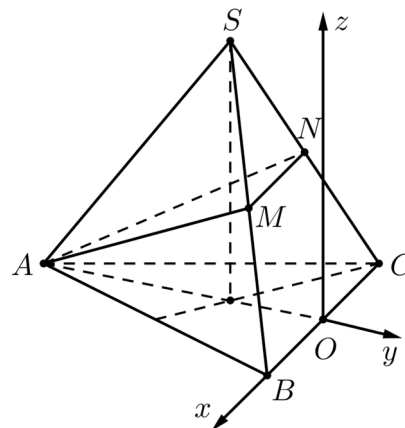


Câu 49. Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = 3$, $CD = 4$, $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = 90^\circ$, $(\widehat{AD, BC}) = 60^\circ$.

- a) Gọi H là chân đường cao của tứ diện hạ từ đỉnh A xuống mặt phẳng (BCD) . Chứng minh $HBCD$ là hình chữ nhật.
- b) Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng H ; các điểm D, B, A lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) .

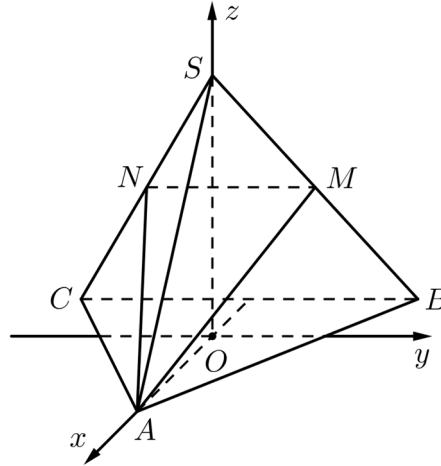


Câu 50. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O là trung điểm của BC , điểm B thuộc tia Ox , điểm A thuộc tia đối của tia Oy và điểm S có cao độ dương.

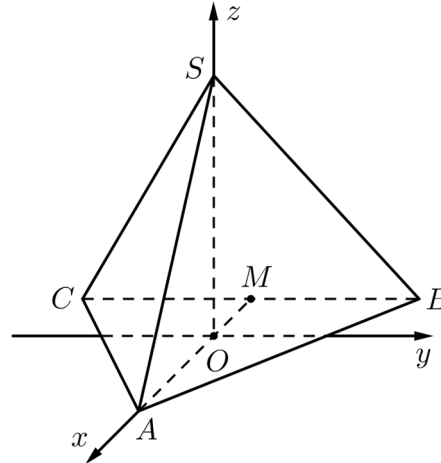


- a) Viết phương trình các mặt phẳng (AMN) và (SBC) .
 b) Chứng minh: $(AMN) \perp (SBC)$.

Câu 51. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O là trọng tâm của tam giác ABC , điểm A thuộc tia Ox , trục Oy song song với BC và điểm B có tung độ dương, điểm S có cao độ dương. Tính theo a diện tích tam giác AMN biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC) .

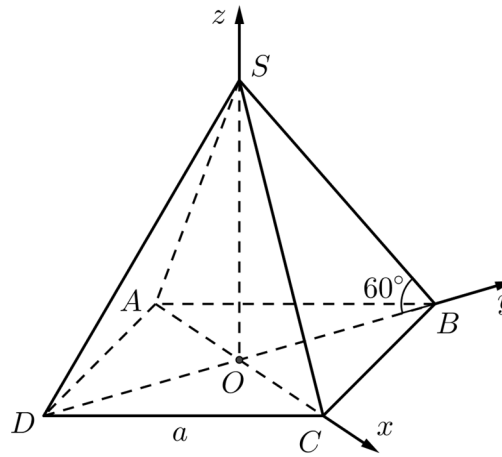


Câu 52. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = 2a, AB = a$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O là trọng tâm của tam giác ABC , điểm A thuộc tia Ox , trục Oy song song với BC và điểm B có tung độ dương, điểm S có cao độ dương.



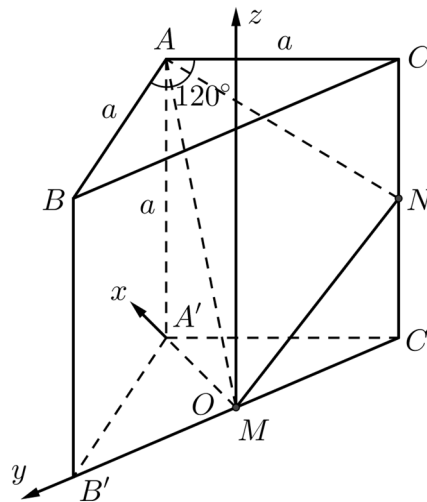
- a) Viết phương trình mặt phẳng (SAB) .
 b) Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAB) .

Câu 53. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O là tâm hình vuông $ABCD$; các điểm C, B, S lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz .

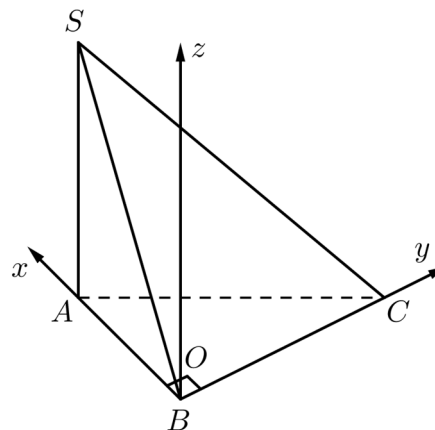


- a) Viết phương trình mặt phẳng (SCD) .
 b) Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC) .

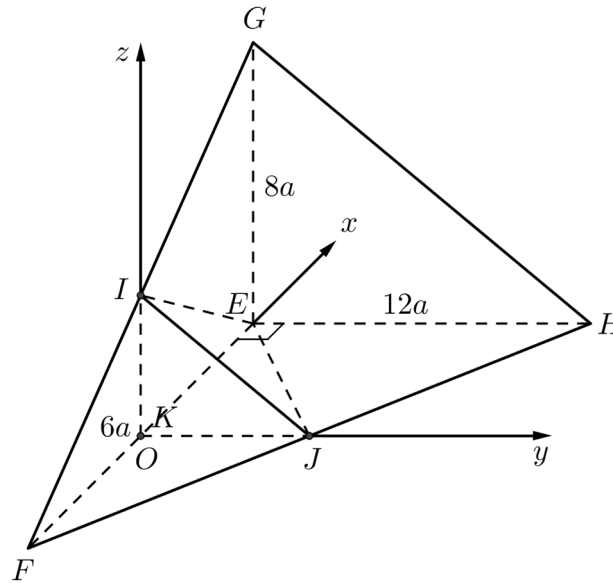
Câu 54. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $AA' = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và CC' . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng M , các điểm A', B' lần lượt thuộc các tia Ox, Oy và điểm B có cao độ dương. Tính góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (ABC) .



Câu 55. Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông cân tại B , $BC = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}$, M là trung điểm AC . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng B ; các điểm A, C lần lượt thuộc các tia Ox, Oy và điểm S có cao độ dương. Tính cot góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và (SAB) .

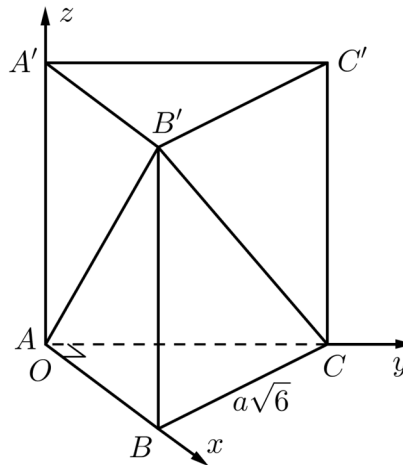


Câu 56. Cho tứ diện $EFGH$ có EF, EG, EH đôi một vuông góc. Biết $EF = 6a, EG = 8a, EH = 12a$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của FG, FH . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng với trung điểm K của EF ; các điểm E, J, I lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz .



- a) Viết phương trình mặt phẳng (EIJ) .
b) Tính khoảng cách từ điểm F đến mặt phẳng (EIJ) .

Câu 57. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh $BC = a\sqrt{6}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C)$ và $(BCC'B')$ bằng 60° . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng với A ; các điểm B, C, A' lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.



C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 1

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho $\vec{u} = (2; -1; 1)$, $\vec{v} = (m; 3; -1)$, $\vec{w} = (1; 2; 1)$. Với giá trị nào của m thì ba vectơ trên đồng phẳng?

A. $\frac{3}{8}$.

B. $-\frac{3}{8}$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. $-\frac{8}{3}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;4)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S_{\triangle ABC} = \sqrt{61}$. B. $\cos A = \frac{-2\sqrt{65}}{65}$. C. $S_{\triangle ABC} = \sqrt{65}$. D. $\sin A = -\sqrt{\frac{61}{65}}$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + z - 5 = 0$ và các vector sau:

$$\vec{a} = (1; 2; 1), \vec{b} = (-1; -2; -1), \vec{c} = (2; 1; -5), \vec{d} = (1; 1; 2), \vec{e} = (-5; -10; -5).$$

Có bao nhiêu vector là VTPT của mặt phẳng (α) ?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1;1;1)$ và nhận $\vec{a} = (1; -1; 2)$, $\vec{b} = (2; 3; 4)$ là cặp vector chỉ phương có phương trình là:

A. $2x - z - 1 = 0$. B. $2x + y - z - 1 = 0$. C. $2x - z + 1 = 0$. D. $2x - y + z - 1 = 0$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm $A(2;0;-1)$, $B(1;-2;3)$, $C(0;1;2)$ là:

A. $(P): 2x + y + z - 3 = 0$. B. $(P): 2x + y + z - 7 = 0$.
C. $(P): 2x + y + z - 5 = 0$. D. $(P): 10x + 5y + 5z - 3 = 0$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(5;-2;0)$, $B(-3;4;1)$ và song song với giá của vector $\vec{a} = (1;1;1)$. Phương trình của mặt phẳng (α) là:

A. $5x + 9y - 4z - 7 = 0$. B. $5x + 9y - 14z - 7 = 0$.
C. $5x - 9y - 4z + 7 = 0$. D. $5x + 9y - 14z + 7 = 0$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(2;-1;2)$, song song với trục Oy và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 2x - y + 3z - 9 = 0$ là:

A. $3y + z + 1 = 0$. B. $x + 2y = 0$. C. $3x - 2z - 2 = 0$. D. $3x + 2y - 10 = 0$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ $M(-2;-4;3)$ đến mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 3 = 0$ là:

A. 3. B. 2. C. 1. D. 11.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và điểm $A(3;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với (Q) và khoảng cách từ A đến (P) bằng 2.

A. $\begin{cases} (P): x - 2y + 2z - 9 = 0 \\ (P): x - 2y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} (P): x - 2y + 2z + 9 = 0 \\ (P): x - 2y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$.
C. $\begin{cases} (P): x - 2y + 2z - 9 = 0 \\ (P): x - 2y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} (P): x - 2y + 2z - 1 = 0 \\ (P): x - 2y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho 2 mặt phẳng $(P): x - y - 1 = 0$ và $(Q): 2x - y + 2z + 3 = 0$. Góc giữa 2 mặt phẳng (P) và (Q) bằng:

- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q): x - y - 6 = 0$ và điểm $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (P) . Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$. Giá trị của góc φ là:

- A. $\varphi = 30^\circ$. B. $\varphi = 90^\circ$. C. $\varphi = 60^\circ$. D. $\varphi = 45^\circ$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 4; 2)$ và mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 1 = 0$. Tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α) là:

- A. $H(-1; 2; 0)$. B. $H(-3; 2; 2)$. C. $H\left(\frac{2}{7}; \frac{1}{7}; \frac{-5}{7}\right)$. D. $H\left(\frac{5}{7}; \frac{-1}{7}; \frac{3}{7}\right)$.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

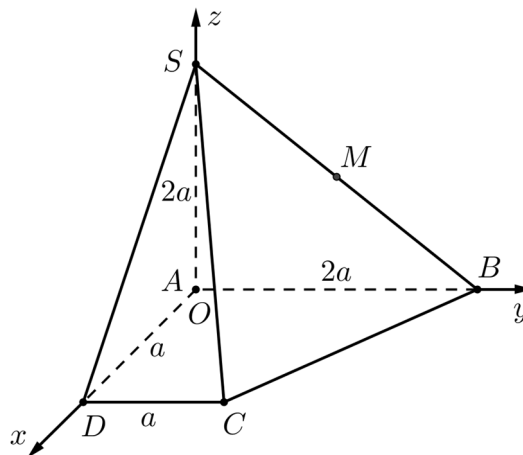
Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0; 3; 1)$, $B(-1; 2; 3)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 3 = 0$.

- a) $\overrightarrow{AB} = (1; 1; -2)$ và (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 2; -2)$.
b) Phương trình mặt phẳng (Q) qua A và song song với (P) là: $x + 2y - 2z + 4 = 0$.
c) Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (P) bằng 2.
d) Mặt phẳng (R) qua A, B và vuông góc với (P) đi qua điểm $C(-1; 3; 0)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 4x + y - 1 = 0$, $(Q): 4x + z = 0$.

- a) $(P) \parallel (Q)$.
b) Mặt phẳng (α) qua $M(3; 5; -3)$ và song song (P) có phương trình là $4x + y - 17 = 0$.
c) Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) lớn hơn 30° .
d) Điểm $A(-1; 5; 4)$ nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $SA = AB = 2a$, $AD = DC = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của SB . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sau:



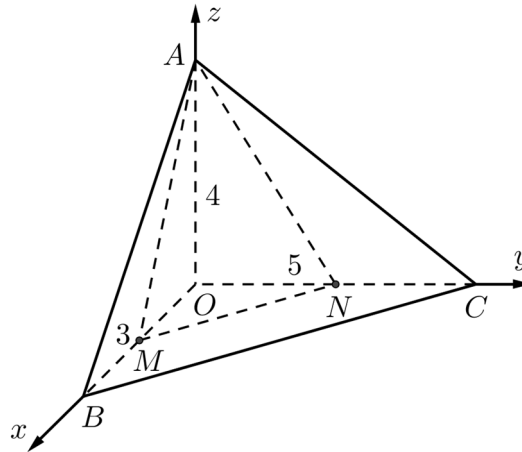
- a) $(SBD): \frac{x}{a} + \frac{y}{2a} + \frac{z}{2a} - 1 = 0$.

$$\text{b) } d(D, (SAC)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{c) } d(B, (AMC)) = \frac{2a}{3}.$$

$$\text{d) } \cos((SBC), (AMC)) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 4: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = 4, OB = 3, OC = 5$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ bên dưới.



$$\text{a) } (ABC): \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1.$$

$$\text{b) } (AMN): 40x + 24y + 15z - 60 = 0.$$

$$\text{c) Khoảng cách từ điểm } B \text{ đến mặt phẳng } (AMN) \text{ bằng } \frac{60}{49}.$$

$$\text{d) Góc giữa hai mặt phẳng } (AMN) \text{ và } (ABC) \text{ nhỏ hơn } 10^\circ.$$

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C không trùng với gốc tọa độ sao cho M là trọng tâm tam giác ABC . Khi đó mặt phẳng (P) đi qua điểm $N(5;b;5)$. Tính giá trị b .

ĐS:

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt chiều dương của các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C thỏa mãn $OA = 2OB$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $OABC$ có dạng $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $P = ab$.

ĐS:

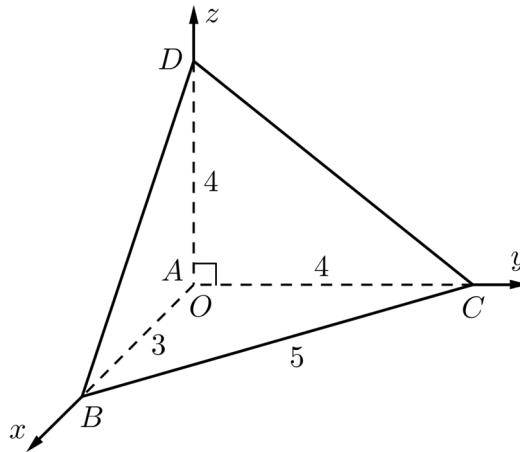
Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 1 = 0$ và hai điểm $A(1;-2;3), B(3;2;-1)$. Biết phương trình mặt phẳng (Q) qua A, B và vuông góc với (P) có dạng $(Q): ax + by + cz - 7 = 0$. Tính $S = a + 2b + 3c$.

ĐS:

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;2;2)$ đồng thời cắt các tia Ox , Oy lần lượt tại 2 điểm M , N (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho $OM = 2ON$. Khi đó $(P): x + by + cz + d = 0$. Tính $S = 5b - 4c - 7d$.

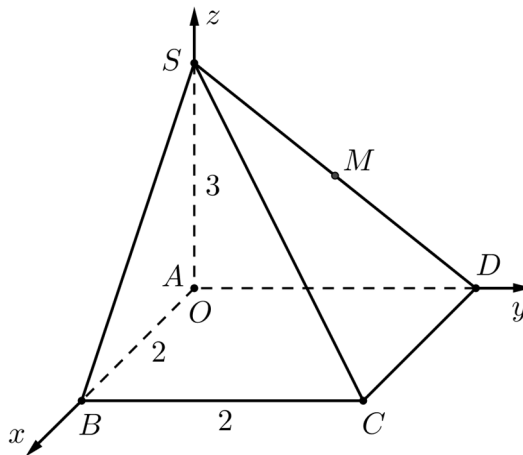
ĐS:

Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$, $AC = AD = 4$, $AB = 3$, $BC = 5$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A ; các điểm B , C , D lần lượt thuộc các tia Ox , Oy , Oz . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) .



ĐS:

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 2, cạnh bên $SA = 3$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD . Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ bên. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBC) .



ĐS:

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 2

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(-1;1;3)$, $C(0;-2;5)$. Điểm D nào sau đây thỏa 4 điểm A , B , C , D đồng phẳng?

- A. $D(1;2;3)$. B. $D(-2;5;0)$. C. $D(1;-1;6)$. D. $D(0;0;2)$.

Câu 2: Cho các vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Kết luận nào sau đây **sai**:

A. $[2\vec{a}, 2\vec{b}] = 2[\vec{a}, \vec{b}]$.

B. $[2\vec{a}, \vec{b}] = 2[\vec{a}, \vec{b}]$.

C. $||[\vec{a}, \vec{b}]|| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

D. $[\vec{a}, 3\vec{b}] = 3[\vec{a}, \vec{b}]$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(0; -1; 2)$, $B(-1; 2; -3)$, $C(0; 0; -2)$ có phương trình là:

A. $7x + 4y + z + 2 = 0$.

B. $3x + 4y + z + 2 = 0$.

C. $5x - 4y + z + 2 = 0$.

D. $7x + 4y - z + 2 = 0$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng cắt ba trục tọa độ tại ba điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; -3; 0)$, $C(0; 0; 4)$. Phương trình của mặt phẳng (α) là:

A. $6x - 4y + 3z = 0$.

B. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{4} = 0$.

C. $6x - 4y + 3z - 12 = 0$.

D. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 0$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB với $A(3; -1; 2)$, $B(-3; 1; 2)$ là:

A. $3x - y = 0$.

B. $3x + y = 0$.

C. $x - 3y = 0$.

D. $x + 3y = 0$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (α) qua điểm $M(1; 3; -2)$ và song song với mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 3z + 4 = 0$ là:

A. $2x - y + 3z - 7 = 0$.

B. $2x - y + 3z = 0$.

C. $2x - y + 3z + 7 = 0$.

D. $4x - 2y + 3z + 5 = 0$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $A(2; -1; 5)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(\beta): 3x - 2y + z + 7 = 0$ và $(\gamma): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

A. $x + 2y + z - 5 = 0$.

B. $3x + 2y - 2 = 0$.

C. $3x - 2y - 2z + 2 = 0$.

D. $3x - 2z = 0$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x - z = 0$. Tìm khẳng định đúng:

A. $(\alpha) \parallel Oy$.

B. $(\alpha) \parallel (Oxz)$.

C. $(\alpha) \supset Oy$.

D. $(\alpha) \supset (Oxz)$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - y - 2z + 1 = 0$ và điểm $M(m; 4; -6)$. Với giá trị nào của m thì khoảng cách từ M đến mặt phẳng (α) bằng 1?

A. $m = -3 \vee m = -6$.

B. $m = 2$.

C. $m = -1$.

D. $m = -1 \vee m = 2$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, góc hợp bởi mặt phẳng $(\alpha): \sqrt{2}x + y + z - 5 = 0$ và mặt phẳng (Oxy) là:

A. 30° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 90° .

Câu 11: Cho 2 mặt phẳng $(\alpha): 2x + (m+1)y + 3z - 5 = 0$, $(\beta): (n+1)x - 6y - 6z = 0$. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì tích $m.n$ bằng:

- A. 5. B. 10. C. -10. D. -5.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của $A(-2; 4; 3)$ trên $(\alpha): 2x - 3y + 6z + 19 = 0$ có tọa độ là:

- A. $(1; -1; 2)$. B. $\left(-\frac{20}{7}; \frac{37}{7}; \frac{3}{7}\right)$. C. $\left(-\frac{2}{5}; \frac{37}{5}; \frac{31}{5}\right)$. D. Kết quả khác.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

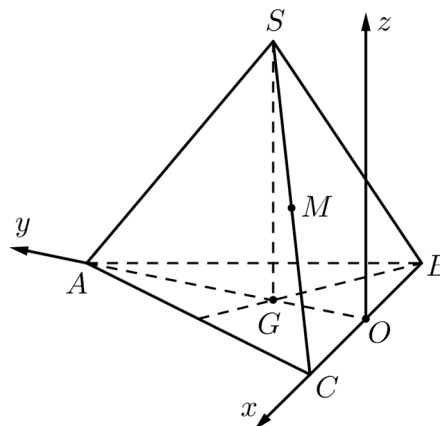
Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 1; 0)$ và $B(4; 0; 3)$.

- a) Mặt phẳng vuông góc với AB tại A có phương trình là $6x - y + 3z - 33 = 0$.
b) Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là $6x - y + 3z - 10 = 0$.
c) Mặt phẳng chứa A, B và song song với trục Oy có phương trình là $x - 2z + 2 = 0$.
d) Có duy nhất một mặt phẳng (α) chứa A, B sao cho khoảng cách từ điểm $M(3; 2; 1)$ đến (α) bằng $\sqrt{\frac{109}{23}}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2; -1; 0)$, $B(3; 1; 0)$, $C(2; 5; -2)$ và $D(-1; 2; 3)$.

- a) Phương trình mặt phẳng (ABC) là $-2x + y + 3z + 5 = 0$.
b) Mặt phẳng (α) qua A, B và song song với CD có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (10; -5; 3)$.
c) Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (α) lớn hơn 60° .
d) Mặt phẳng (β) cách đều AB và CD có phương trình là $10x - 5y + 3z - 7 = 0$.

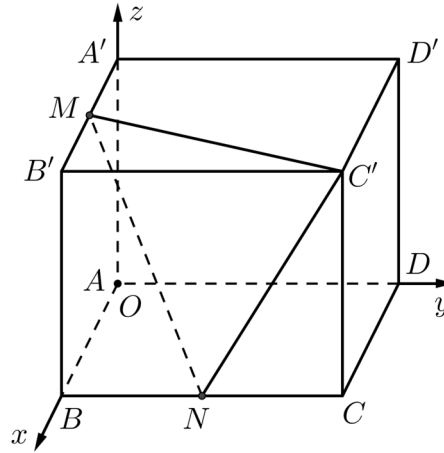
Câu 3: Cho tứ diện đều $SABC$ có cạnh bằng $2\sqrt{3}$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và M là trung điểm của SC . Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ bên dưới.



- a) $B(\sqrt{3}; 0; 0)$.
b) $S(0; 1; 2\sqrt{2})$.
c) $(SAB): \sqrt{6}x - \sqrt{2}y - z + 3\sqrt{2} = 0$.

d) $d(M, (SAB)) = 2\sqrt{2}$.

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 2. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B', BC$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ bên dưới.



a) $N(1; 2; 0)$.

b) $(MNC'): 4x - 2y + z - 6 = 0$.

c) $d(D, (MNC')) = \frac{10}{21}$.

d) (MNC') cắt đường thẳng AB tại điểm E có tọa độ $\left(\frac{3}{2}; 0; 0\right)$.

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 27 = 0$ qua hai điểm $A(3; 2; 1)$, $B(-3; 5; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x + y + z + 4 = 0$. Tính tổng $S = a + b + c$.

ĐS:

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với $b, c > 0$ và mặt phẳng $(P): y - z + 1 = 0$. Tính $S = b^2 + c^2$ biết $(ABC) \perp (P)$ và $d(O, (ABC)) = \frac{1}{3}$.

ĐS:

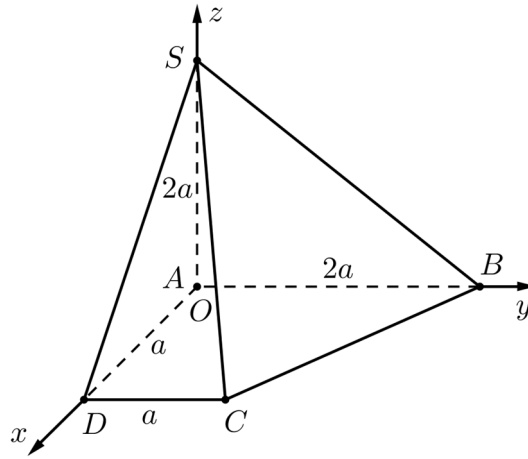
Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) song song với $(Q): 2x - y - 2z + 4 = 0$ và cách điểm $A(-1; 2; -3)$ một khoảng bằng 2. Biết $(P): ax + y + cz + d = 0$. Tính tích $T = acd$.

ĐS:

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$, $D(2; -2; 0)$. Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O, A, B, C, D ?

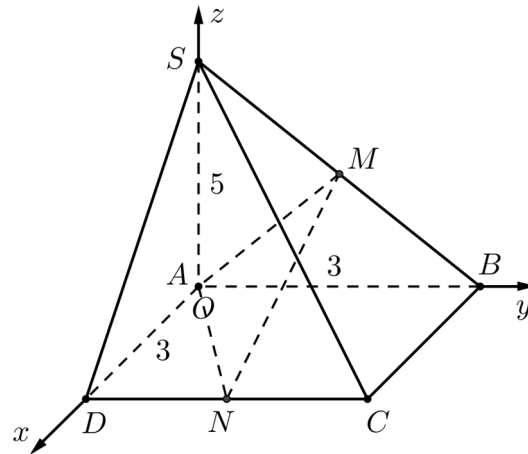
ĐS:

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AB = 2a$, $CD = DA = a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng A ; các điểm D, B, S lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) .



ĐS:

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 3, $SA = 5$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh SB, CD . Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ sau. Khi đó mặt phẳng (AMN) cắt cạnh SC tại điểm $E(a;b;c)$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$.



ĐS:

E. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 3

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

- Câu 1:** Cho 4 điểm $A(1;-2;0)$, $B(3;3;2)$, $C(-1;2;2)$, $D(3;3;1)$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng:
- A. 5. B. 4. C. 3. D. 6.
- Câu 2:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;3;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(1;1;-2)$ và H là trực tâm tam giác ABC , khi đó độ dài đoạn OH bằng:
- A. $\frac{\sqrt{870}}{15}$. B. $\frac{\sqrt{870}}{14}$. C. $\frac{\sqrt{870}}{16}$. D. $\frac{\sqrt{870}}{12}$.
- Câu 3:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;1)$, $B(1;0;4)$, $C(0;-2;-1)$. Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC là:
- A. $x + 2y - 5z + 5 = 0$. B. $x + 2y + 5z - 5 = 0$.
 C. $2x + y + 5z - 5 = 0$. D. $2x - y + 5z - 5 = 0$.

- Câu 4:** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm $A(3;1;-1)$, $B(2;-1;4)$ và song song với trục Ox là:
A. $3x + z - 2 = 0$. **B.** $y - z = 0$. **C.** $y + z - 3 = 0$. **D.** $5y + 2z - 3 = 0$.
- Câu 5:** Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua $M(0;2;1)$ và đi qua giao tuyến của $(\alpha): x + 5y + 9z - 13 = 0$ và $(\beta): 3x - y - 5z + 1 = 0$. Phương trình của (P) là:
A. $x - y + z - 3 = 0$. **B.** $2x + y + z - 3 = 0$. **C.** $x + y + z - 3 = 0$. **D.** $2x - y + z + 3 = 0$.
- Câu 6:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + y = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?
A. $(\alpha) \supset Oz$. **B.** $(\alpha) \parallel Oy$. **C.** $(\alpha) \parallel (Oyz)$. **D.** $(\alpha) \parallel Ox$.
- Câu 7:** Trong không gian $Oxyz$, cho (α) là mặt phẳng đi qua điểm $G(1;2;3)$ và cắt các trục Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C sao cho G là trọng tâm $\triangle ABC$. Phương trình mặt phẳng (α) là:
A. $2x + 3y + 6z - 18 = 0$. **B.** $6x + 3y + 2z - 18 = 0$.
C. $3x + 6y + 2z - 18 = 0$. **D.** $6x + 2y + 3z - 18 = 0$.
- Câu 8:** Khoảng cách giữa mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z - 1 = 0$ và mặt phẳng $(Q): 2x + y + 2z + 5 = 0$ là:
A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.
- Câu 9:** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;m)$. Để mặt phẳng (ABC) hợp với mặt phẳng (Oxy) một góc 60° thì giá trị của m là:
A. $m = \pm \frac{12}{5}$. **B.** $m = \pm \frac{2}{5}$. **C.** $m = \pm \sqrt{\frac{12}{5}}$. **D.** $m = \pm \frac{5}{2}$.
- Câu 10:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 14 = 0$, $(Q): -x - 2y - 2z - 16 = 0$. Vị trí tương đối của (P) và (Q) là:
A. Song song. **B.** Trùng nhau.
C. Cắt nhưng không vuông góc. **D.** Vuông góc.
- Câu 11:** Trong không gian $Oxyz$, cho các mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 3 = 0$ và $(Q): x - z - 2 = 0$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .
A. 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .
- Câu 12:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;4)$, $B(2;-5;-5)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA + MB$ có giá trị nhỏ nhất.
A. $M(2;1;1)$. **B.** $M(2;-1;1)$. **C.** $M(1;2;1)$. **D.** $M(-1;1;2)$.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

- Câu 1:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - 6y + 3z - 6 = 0$ cắt ba trục tọa độ Ox , Oy , Oz lần lượt tại ba điểm A , B , C .
a) Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (-2; 6; -3)$.

b) Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (α) bằng $\frac{7}{6}$.

c) Diện tích tam giác ABC bằng $\frac{7}{2}$.

d) Trong 3 góc giữa mặt phẳng (α) với các mặt phẳng tọa độ thì góc giữa (α) và (Oyz) là lớn nhất.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;5;1)$ và các mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + z + 2 = 0$. Gọi (β) là mặt phẳng chứa trục Ox và vuông góc với (α) .

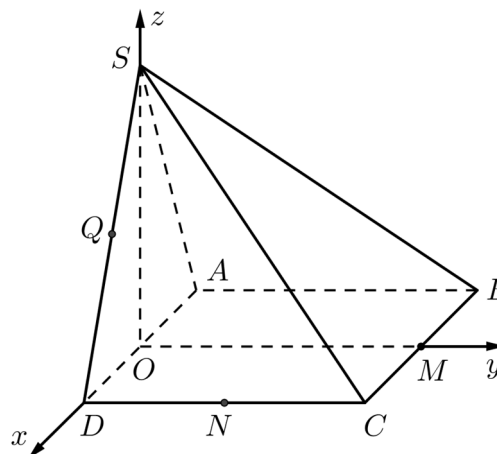
a) $A \in (\alpha)$.

b) $(\beta): y + 2z = 0$.

c) $d(A, (\alpha)) < 3$.

d) $d(A, (\beta)) > 3$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Gọi Q là trung điểm của SD . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ bên dưới.



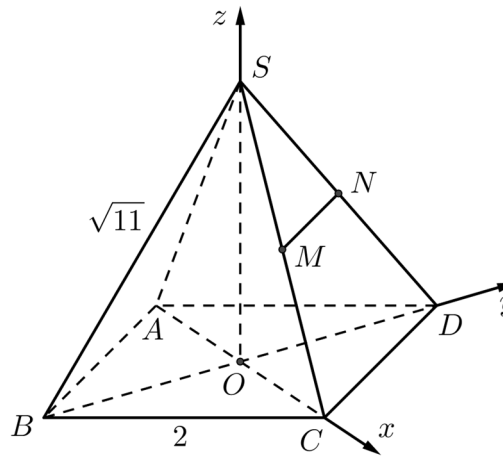
a) $(OCQ): -2\sqrt{3}x + \sqrt{3}y + 2z = 0$.

b) $(SAM): 2\sqrt{3}x + \sqrt{3}y + 2z - 2\sqrt{3} = 0$.

c) $\cos((SAM), (ABCD)) = \frac{2\sqrt{19}}{19}$.

d) $d((SAM), (OCQ)) = 2d(N, (OCQ))$.

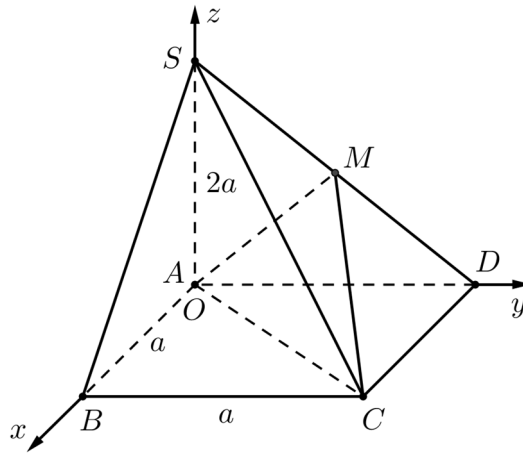
Câu 4: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 2, cạnh bên bằng $\sqrt{11}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ bên dưới.



- a) $S(0; 0; 3)$.
- b) $(SCD): 3x + 3y + \sqrt{2}z - 3\sqrt{2} = 0$.
- c) $d(A, (SMN)) = 3\sqrt{10}$.
- d) $\cos((OMN), (SCD)) = \frac{2}{5}$.

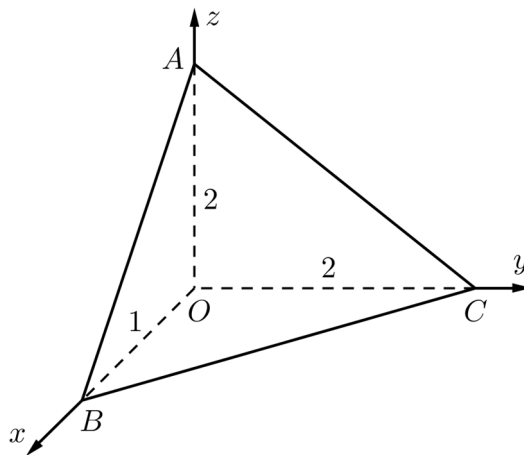
Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

- Câu 1.** Trong không gian $Oxyz$, hai mặt phẳng $4x - 4y + 2z - 7 = 0$ và $2x - 2y + z + 1 = 0$ chứa hai mặt của hình lập phương. Thể tích khối lập phương đó là có dạng $V = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tích $S = a^2 + b^2$.
ĐS:
- Câu 2.** Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$ với $c < 0$ đi qua hai điểm $A(0; 1; 0)$, $B(1; 0; 0)$ và tạo với mặt phẳng (Oyz) một góc 60° . Nếu $d = -1$ thì giá trị $S = a + b - c\sqrt{2}$ là bao nhiêu?
ĐS:
- Câu 3.** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua $M(1; 1; 4)$ cắt các tia Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C phân biệt sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích nhỏ nhất. Tính thể tích nhỏ nhất đó.
ĐS:
- Câu 4.** Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $S(-1; 6; 2)$, $A(0; 0; 6)$, $B(0; 3; 0)$, $C(-2; 0; 0)$. Gọi H là chân đường cao vẽ từ S của tứ diện $S.ABC$. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm S , B , H là có dạng $x + by - cz + d = 0$. Tính $S = b + c + d$.
ĐS:
- Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng A ; các điểm B , D , S lần lượt thuộc các tia Ox , Oy , Oz . Tính $\tan \alpha$ với α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) .



ĐS:

Câu 6. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = 2, OB = 1, OC = 2$. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới. Gọi (α) là mặt phẳng qua trọng tâm G của tứ diện và song song với mặt phẳng (ABC) . Khi đó $(\alpha): x + by + cz + d = 0$. Tính $S = b + c + d$.



ĐS:

F. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Chọn phát biểu đúng:

Trong không gian:

- A. Vector tích có hướng của hai vector thì cùng phương với mỗi vector đã cho.
- B. Tích có hướng và vô hướng của hai vector tùy ý bằng 0.
- C. Tích vô hướng của hai vector là một vector.
- D. Tích có hướng của hai vector là một vector vuông góc với cả hai vector đã cho.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 2; -1), B(2; -1; 3), C(-4; 7; 5)$. Đường cao của tam giác ABC hạ từ A có độ dài bằng:

- A. $\sqrt{\frac{111}{57}}$. B. $\sqrt{\frac{110}{57}}$. C. $\frac{\sqrt{1110}}{52}$. D. $\sqrt{\frac{1110}{52}}$.

- Câu 3:** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua $A(-2;4;3)$ và song song với mặt phẳng $2x-3y+6z+19=0$ là:
- A. $2x-3y+6z=0$. B. $2x+3y+6z+19=0$.
C. $2x-3y+6z-2=0$. D. $2x-3y+6z+1=0$.
- Câu 4:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;5)$, $B(0;0;1)$. Mặt phẳng (P) chứa A , B và song song với trục Oy có phương trình là:
- A. $y+4z-1=0$. B. $4x+y-z+1=0$. C. $2x+z-5=0$. D. $4x-z+1=0$.
- Câu 5:** Trong không gian $Oxyz$, gọi (γ) là mặt phẳng đi qua điểm $M(3;-1;-5)$ và vuông góc với cả hai mặt phẳng $(\alpha):3x-2y+2z+7=0$, $(\beta):5x-4y+3z+1=0$. Phương trình của (γ) là:
- A. $x+y+z+3=0$. B. $2x+y-2z-15=0$.
C. $2x+y-2z+15=0$. D. $2x+y-2z-16=0$.
- Câu 6:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $G(1;4;3)$. Viết phương trình mặt phẳng cắt các trục Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C sao cho G là trọng tâm tứ diện $OABC$.
- A. $\frac{x}{4}+\frac{y}{16}+\frac{z}{12}=0$. B. $\frac{x}{4}+\frac{y}{16}+\frac{z}{12}=1$. C. $\frac{x}{3}+\frac{y}{12}+\frac{z}{9}=1$. D. $\frac{x}{3}+\frac{y}{12}+\frac{z}{9}=0$.
- Câu 7:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-3y+5z-4=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng đối xứng của mặt phẳng (P) qua mặt phẳng (Oxz) . Khi đó phương trình mặt phẳng (Q) là:
- A. $(Q):2x-3y-5z-4=0$. B. $(Q):2x-3y+5z-4=0$.
C. $(Q):2x+3y+5z-4=0$. D. $(Q):2x-3y+5z+4=0$.
- Câu 8:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và mặt phẳng $(Q):2x+y+2z-1=0$. Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) và cách A một khoảng bằng $\frac{2}{3}$ có phương trình là:
- A. $\begin{cases} 2x+y+2z-3=0 \\ 2x+y+2z-7=0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} 2x+y+2z-3=0 \\ 2x+y+2z-5=0 \end{cases}$.
C. $\begin{cases} 2x+y+2z-1=0 \\ 2x+y+2z-2=0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} 2x+y+2z-2=0 \\ 2x+y+2z-5=0 \end{cases}$.
- Câu 9:** Trong không gian $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa trục Oy và tạo với $(\alpha):y+z+1=0$ một góc 60° . Phương trình mặt phẳng (P) là:
- A. $\begin{cases} x-z-1=0 \\ x-z=0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x-z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x-2z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$.
- Câu 10:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng: $(\alpha):3x-5y+mz-3=0$, $(\beta):2x+ny-3z+1=0$. Cặp số $(m;n)$ bằng bao nhiêu thì (α) và (β) song song với nhau?
- A. $(3;3)$. B. $(1;3)$. C. $(1;2)$. D. $\left(-\frac{9}{2};-\frac{10}{3}\right)$.

Câu 11: Cho 2 mặt phẳng $(\alpha): (2m-1)x - 3my + 2z + 3 = 0$, $(\beta): mx + (m-1)y + 4z - 5 = 0$. Với giá trị nào của m thì (α) và (β) vuông góc với nhau?

- A. $m = 3 \vee m = 2$. B. $m = -4 \vee m = 2$. C. $m = -4 \vee m = -2$. D. $m = -2 \vee m = 4$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Mặt phẳng (P) qua M cắt các tia Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất có phương trình là:

- A. $x + y + z - 6 = 0$. B. $6x + 3y + 2z = 0$.
C. $x + 2y + 3z - 14 = 0$. D. $6x + 3y + 2z - 18 = 0$.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

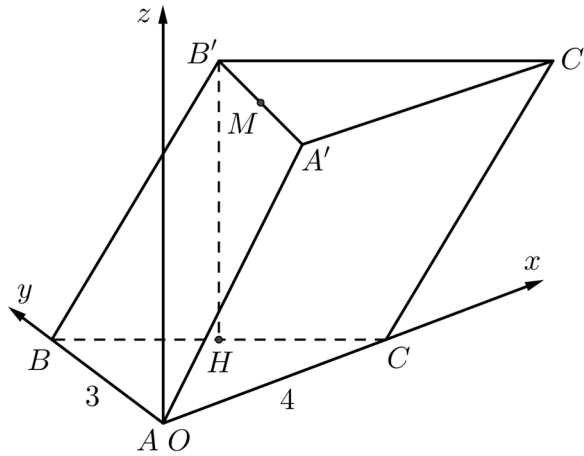
Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(3; 9; -1)$, $B(2; 0; 1)$ và hai mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$, $(Q): 2x - 4y + 4z + 7 = 0$.

- a) (P) song song với (Q) .
b) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 10.
c) Điểm C thuộc mặt phẳng (P) và thẳng hàng với A , B có tọa độ là $C\left(\frac{43}{21}; \frac{3}{7}; \frac{19}{21}\right)$.
d) Phương trình mặt phẳng (β) đi qua điểm B và vuông góc với hai mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Oxy) là $x + y + z - 1 = 0$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(1; 6; 2)$, $B(3; -1; 2)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z = 0$.

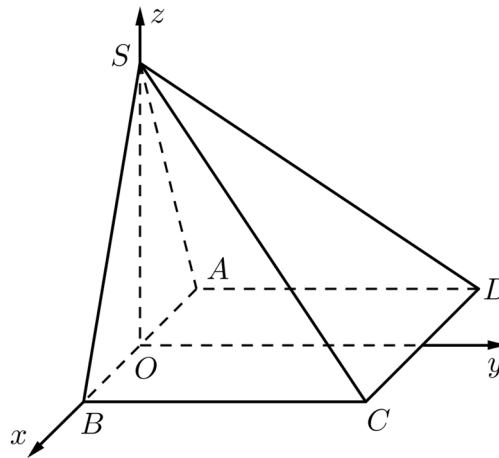
- a) (α) đi qua các điểm A và B .
b) Gọi (β) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB . Khi đó (β) song song với trục Oz .
c) Góc giữa (α) và (β) lớn hơn 60° .
d) Gọi (γ) là mặt phẳng song song với (α) và cách đều 2 điểm A , B . Biết phương trình (γ) có dạng $ax - 2y + 4z + d = 0$. Khi đó $a + d = 15$.

Câu 3. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A , $AB = 3$, $AC = 4$, $AA' = \frac{\sqrt{61}}{2}$. Hình chiếu của B' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC , M là trung điểm cạnh $A'B'$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng A ; các điểm C , B lần lượt thuộc các tia Ox , Oy và điểm A' có cao độ dương.



- a) $B' \left(2; \frac{3}{2}; 3 \right)$ và $M(2; 0; 3)$.
- b) Mặt phẳng (AMC') có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (9; 24; 6)$.
- c) Mặt phẳng $(A'BC)$ có một vector pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (3; 4; 4)$.
- d) $\cos((AMC'), (A'BC)) \approx 0,59$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O là trung điểm AB ; các điểm B, S lần lượt thuộc các tia Ox, Oz và điểm C có tung độ dương.



- a) $(SCD): \sqrt{3}y + 2z + a\sqrt{3} = 0$.
- b) $d(A, (SCD)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.
- c) $\cos((SAC), (SCD)) = \frac{5\sqrt{7}}{7}$.
- d) $\cos((SAB), (SCD)) = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2y - z + 3 = 0$ và điểm $A(2; 0; 0)$. Mặt phẳng (α) đi qua A , vuông góc với (P) , cách gốc tọa độ O một khoảng bằng $\frac{4}{3}$ và cắt các tia Oy , Oz lần lượt tại các điểm B , C khác O . Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(1; 0; 0)$, $N(0; -2; 0)$ và $P(0; 0; 1)$. Tính khoảng cách h từ gốc tọa độ đến mặt phẳng (MNP) .

ĐS:

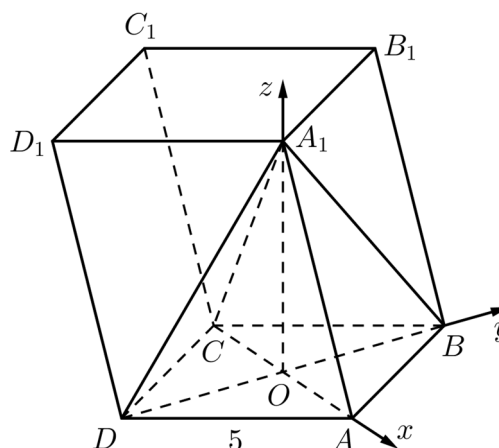
Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(Q_1): 3x - y + 4z + 2 = 0$ và $(Q_2): 3x - y + 4z + 8 = 0$. Biết mặt phẳng (P) song song và cách đều hai mặt phẳng (Q_1) và (Q_2) . Tính khoảng cách từ điểm $M(3; 4; -5)$ đến mặt phẳng (P) .

ĐS:

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) qua hai điểm $M(1; 8; 0)$, $C(0; 0; 3)$ cắt các tia Ox , Oy lần lượt tại A , B sao cho OG nhỏ nhất, với $G(a; b; c)$ là trọng tâm tam giác ABC . Hãy tính giá trị $T = a + b + c$.

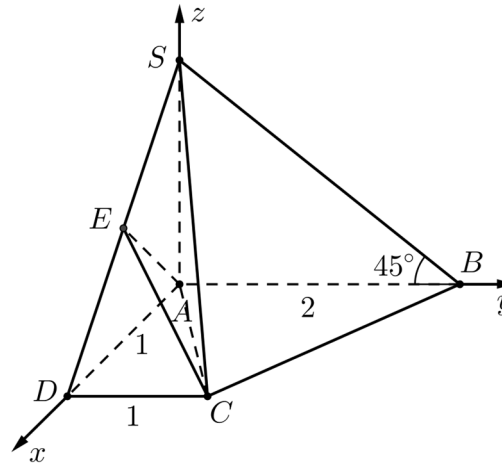
ĐS:

Câu 5. Cho hình lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 5. Hình chiếu vuông góc của A_1 trên $(ABCD)$ trùng với giao điểm O của AC và BD . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với các điểm A , B , A_1 lần lượt thuộc các tia Ox , Oy , Oz . Tính khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) .



ĐS:

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D , $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng 45° , E là trung điểm của SD , $AB = 2$, $AD = DC = 1$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A ; các điểm D , B , S lần lượt thuộc các tia Ox , Oy , Oz . Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (AEC) (làm tròn kết quả đến một chữ số thập phân sau dấu phẩy).



ĐS:

G. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 5

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

- Câu 1:** Trong không gian $Oxyz$, cho các vector $\vec{u} = (4; 3; 4)$, $\vec{v} = (2; -1; 2)$, $\vec{w} = (1; 2; 1)$. Khi đó $[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{w}$ bằng:
- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.
- Câu 2:** Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$ và $D \in Oy$. Biết $V_{ABCD} = 5$ và có hai điểm $D_1(0; y_1; 0)$, $D_2(0; y_2; 0)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó $y_1 + y_2$ bằng:
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 3:** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng qua 3 điểm $A(1; 2; -1)$, $B(-1; 0; 2)$, $C(2; -1; 1)$ cắt trục Ox tại điểm có hoành độ:
- A. $M\left(\frac{11}{5}; 0; 0\right)$. B. $M\left(-\frac{11}{5}; 0; 0\right)$. C. $M\left(\frac{11}{7}; 0; 0\right)$. D. $M(3; 0; 0)$.
- Câu 4:** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng chứa trục Oy và điểm $M(1; 4; -3)$ là:
- A. $3x + z = 0$. B. $3x + y = 0$. C. $x + 3z = 0$. D. $3x - z = 0$.
- Câu 5:** Trong không gian $Oxyz$, gọi M là giao điểm của 3 mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - z - 1 = 0$, $(\beta): 3x - y - z + 2 = 0$, $(\gamma): 4x - 2y + z - 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm M .
- A. $M(1; 2; 3)$. B. $M(-1; -2; -3)$. C. $M(-1; 2; 3)$. D. $M(1; 2; -3)$.
- Câu 6:** Trong không gian $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng qua các hình chiếu của $A(5; 4; 3)$ lên các trục tọa độ. Phương trình của mặt phẳng (α) là:
- A. $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 0$. B. $12x + 15y + 20z + 60 = 0$.
- C. $12x + 15y + 20z - 60 = 0$. D. $\frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} - 60 = 0$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có các đỉnh $A(1;2;1)$, $B(-2;1;3)$, $C(2;-1;3)$ và $D(0;3;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B đồng thời cách đều C, D là:

- A. $\begin{cases} (P_1): 4x + 2y + 7z - 15 = 0 \\ (P_2): x - 5y - z + 10 = 0 \end{cases}$.
- B. $\begin{cases} (P_1): 6x - 4y + 7z - 5 = 0 \\ (P_2): 3x + y + 5z + 10 = 0 \end{cases}$.
- C. $\begin{cases} (P_1): 6x - 4y + 7z - 5 = 0 \\ (P_2): 2x + 3z - 5 = 0 \end{cases}$.
- D. $\begin{cases} (P_1): 3x + 5y + 7z - 20 = 0 \\ (P_2): x + 3y + 3z - 10 = 0 \end{cases}$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, phương trình một mặt phẳng (γ) chứa giao tuyến của $(P): 2x - y - 1 = 0$ và $(Q): 2x - z = 0$ đồng thời tạo với mặt phẳng $(R): z - 2y + 2z - 1 = 0$ một góc α thỏa $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{9}$.

- A. $(\gamma): -4x + y + z - 3 = 0$. B. $(\gamma): 2x + y - 2z - 12 = 0$.
- C. $(\gamma): -4x + y + z + 1 = 0$. D. $(\gamma): 2x + y - z + 3 = 0$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm $A(2;-1;-1)$ trên mặt phẳng $(\alpha): 16x - 12y - 15z - 4 = 0$. Tính độ dài đoạn thẳng AH .

- A. 55. B. $\frac{11}{5}$. C. $\frac{11}{25}$. D. $\frac{22}{5}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z - 1 = 0$ và điểm $A(1;-1;0)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho AM vuông góc với OA và độ dài đoạn AM bằng 3 lần khoảng cách từ A đến (P) .

- A. $M(-1;2;7)$. B. $M(0;1;3)$. C. $M(1;0;-1)$. D. $M(1;-1;-3)$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(1;0;0)$, $N(0;1;0)$, $P(0;0;1)$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng (Oxy) bằng:

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - 3y - 2z - 15 = 0$ và ba điểm $A(1;4;5)$, $B(0;3;1)$, $C(2;-1;0)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ có giá trị nhỏ nhất.

- A. $M(-4;-1;0)$. B. $M(4;-1;0)$. C. $M(4;1;0)$. D. $M(1;-4;0)$.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2z - 3y + x - 4 = 0$.

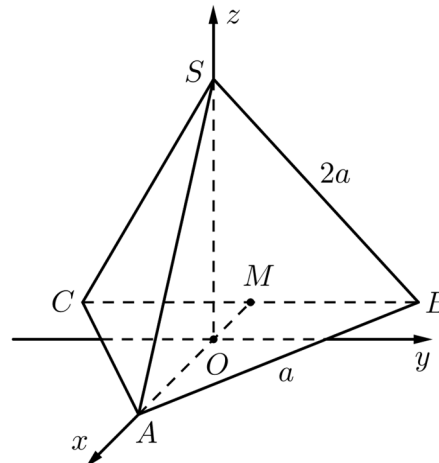
- a) Một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n} = (-1;3;-2)$.
- b) Điểm $M(-3;3;8)$ thuộc mặt phẳng (P) .

- c) Khoảng cách từ điểm $N(1;0;9)$ đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{\sqrt{14}}{2}$.
- d) Gọi (Q) là mặt phẳng qua $A(1;2;-3)$ và song song với (P) . Khi đó $(Q): x - 3y + 2z + 1 = 0$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-4;1;2)$, $B(-2;2;1)$, $C(-4;0;3)$.

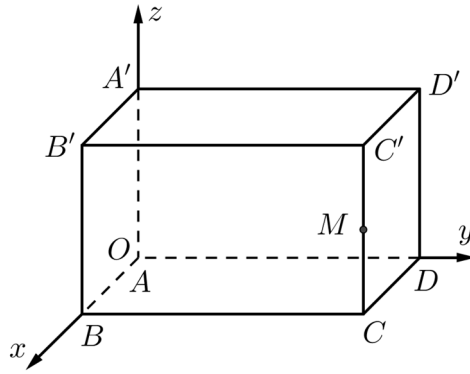
- a) Mặt phẳng (ABC) có cặp vector chỉ phương là $\vec{a} = (2;1;-1)$, $\vec{b} = (1;0;0)$.
- b) Gọi (α) , (β) lần lượt là mặt phẳng trung trực của đoạn AB , BC . Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (α) , (β) lớn hơn 20° .
- c) Có vô số mặt phẳng đi qua điểm $M(-3;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC) .
- d) Các mặt phẳng đi qua điểm $M(-3;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC) đều đi qua trung điểm của BC .

Câu 3. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = 2a$, $AB = a$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O là chân đường cao hạ từ S xuống mặt phẳng (ABC) , điểm A , S lần lượt thuộc tia Ox , Oz và điểm B có tung độ dương.



- a) $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}; 0; 0\right)$ và $M\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}; 0; 0\right)$.
- b) Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) là $\frac{a\sqrt{11}}{3}$.
- c) Mặt phẳng (SAC) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (\sqrt{33}; -3\sqrt{11}; \sqrt{3})$.
- d) Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) nhỏ hơn a .

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc O , $B(a;0;0)$, $D(0;0;0)$, $A'(0;0;b)$ với $a > 0$, $b > 0$. Gọi M là trung điểm cạnh CC' .



- a) $M\left(a; a; \frac{b}{2}\right)$.
- b) Thể tích khối tứ diện $BDA'M$ bằng $\frac{a^2b}{6}$.
- c) Mặt phẳng $(A'BD)$ có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (b; b; a)$.
- d) $(A'BD) \perp (MBD)$ khi và chỉ khi $\frac{a}{b} = 1$.

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -3; 2)$, $B(-2; -1; 5)$ và $C(3; 2; -1)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua A , trực tâm của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Khi đó phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax + 3y + cz + d = 0$. Tính $S = 2a + 3c - 4d$.

ĐS:

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + y - z + 5 = 0$ và hai điểm $A(1; 0; 2)$, $B(2; -1; 4)$. Gọi $M(x; y; z)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất. Khi hoành độ điểm M bằng 0 thì tổng tung độ và cao độ của nó là bao nhiêu?

ĐS:

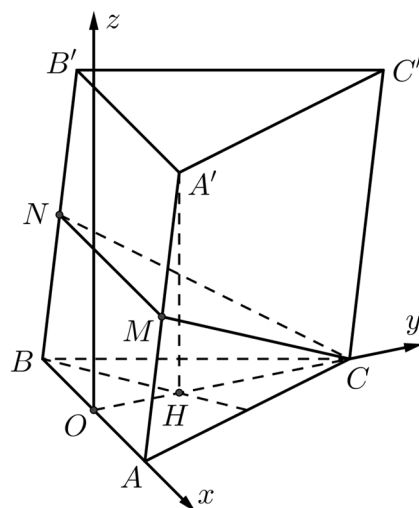
Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; 4; 1)$, $B(-1; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 5 = 0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với (P) có dạng là $ax + by + cz - 11 = 0$. Tính $S = a + b + c$.

ĐS:

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + my + 3z - 5 = 0$ và $(Q): nx - 8y - 6z + 2 = 0$. Khi (P) và (Q) song song, tính tổng $S = 3m^2 + 2n$.

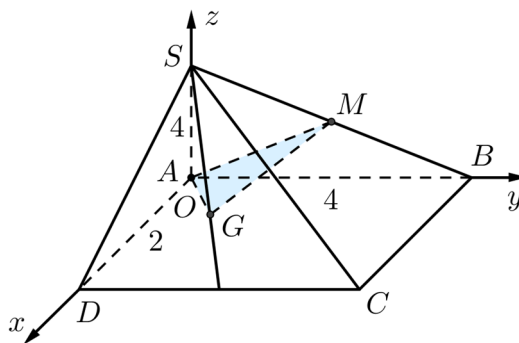
ĐS:

Câu 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và BB' . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O là trung điểm của AB ; các điểm A, C lần lượt thuộc các tia Ox, Oy và điểm A' có cao độ dương. Khi đó cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (MNC) có dạng $\frac{b\sqrt{33}}{c}$ với $b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S = b^2 + c^2$.



ĐS:

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $A(0;0;0)$, $D(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $S(0;0;4)$. Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm của tam giác SCD . Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (AMG) .



ĐS:

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

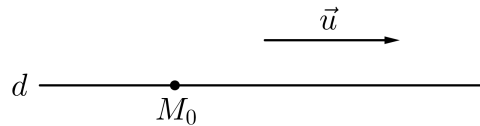
A. LÝ THUYẾT

1. Phương trình đường thẳng trong không gian

Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Vectơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d được gọi là vectơ chỉ phương của d .

Chú ý: Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của d thì $k\vec{u}$ ($k \neq 0$) cũng là vectơ chỉ phương của d .



Phương trình tham số của đường thẳng

Cho đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$.

Khi đó phương trình tham số của d :
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Chú ý:

a) Trong phương trình tham số của đường thẳng d :
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}),$$
 mỗi giá trị của tham số t xác

định duy nhất một điểm M trên d và ngược lại.

b) Từ nay để cho gọn, trong phương trình tham số của đường thẳng, ta không viết $t \in \mathbb{R}$.

Phương trình chính tắc của đường thẳng

Cho đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$ với a, b, c đều khác 0. Khi đó phương trình chính tắc của d :
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

2. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng. Điều kiện để hai đường thẳng vuông góc

Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Cho đường thẳng d_1 :
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + b_1t \\ z = z_0 + c_1t \end{cases}$$
 qua điểm $M_1(x_0; y_0; z_0)$, có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$

và đường thẳng d_2 :
$$\begin{cases} x = x'_0 + a_2t' \\ y = y'_0 + b_2t' \\ z = z'_0 + c_2t' \end{cases}$$
 qua điểm $M_2(x'_0; y'_0; z'_0)$, có một vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$.

Xét hệ phương trình (ẩn t, t'):
$$\begin{cases} x_0 + a_1t = x'_0 + a_2t' \\ y_0 + b_1t = y'_0 + b_2t' \\ z_0 + c_1t = z'_0 + c_2t' \end{cases} \quad (I).$$

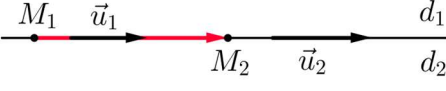
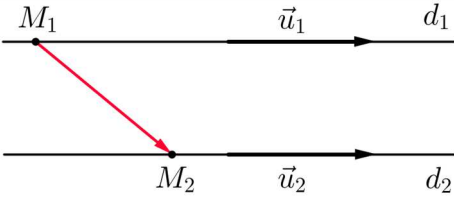
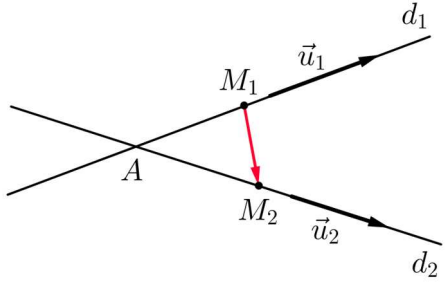
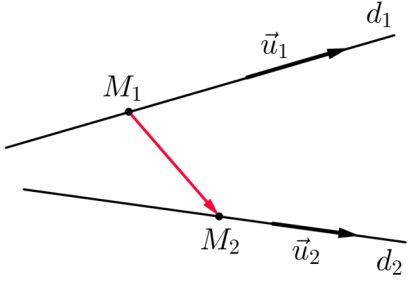
Khi đó:

Điều kiện	$\vec{u}_1$ cùng phương $\vec{u}_2$		$\vec{u}_1$ không cùng phương $\vec{u}_2$	
	$M_1 \in d_2$	$M_1 \notin d_2$	Hệ (I) có nghiệm duy nhất	Hệ (I) vô nghiệm
Kết quả	$d_1 \equiv d_2$	$d_1 \parallel d_2$	d_1 cắt d_2	d_1 chéo d_2

Hoặc:

Điều kiện	Ba vector sau cùng phương: $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{M_1M_2}$	$\vec{u}_1, \vec{u}_2$ cùng phương và $\vec{u}_1, \vec{M_1M_2}$ không cùng phương	$\vec{u}_1, \vec{u}_2$ không cùng phương và $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{M_1M_2}$ đồng phẳng	$\vec{u}_1, \vec{u}_2$ không cùng phương và $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{M_1M_2}$ không đồng phẳng
Tức là	$\begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \vec{M_1M_2}] = \vec{0} \end{cases}$	$\begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \vec{M_1M_2}] \neq \vec{0} \end{cases}$	$\begin{cases} [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \\ [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{M_1M_2} = 0 \end{cases}$	$[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{M_1M_2} \neq 0$
Kết quả	$d_1 \equiv d_2$	$d_1 \parallel d_2$	d_1 cắt d_2	d_1 chéo d_2

Hình minh họa:

 Hai đường thẳng trùng nhau	 Hai đường thẳng song song
 Hai đường thẳng cắt nhau	 Hai đường thẳng chéo nhau

Điều kiện để hai đường thẳng vuông góc

Ta có $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

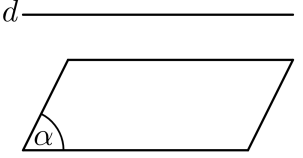
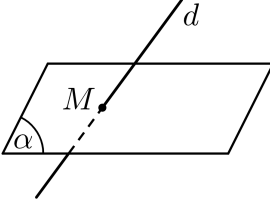
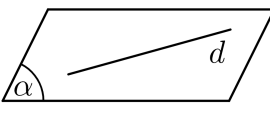
3. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \text{ qua điểm } M_0(x_0; y_0; z_0), \text{ có vector chỉ phương } \vec{u} = (a; b; c).$$

Xét phương trình: $A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) + D = 0$ (ẩn t) (*). Khi đó:

Điều kiện	(*) vô nghiệm	(*) có đúng 1 nghiệm t	(*) có vô số nghiệm
Hoặc	$\vec{u} \perp \vec{n}$ và $M_0 \notin (\alpha)$	$\vec{u} \not\perp \vec{n}$	$\vec{u} \perp \vec{n}$ và $M_0 \in (\alpha)$

Kết quả	$d \parallel (\alpha)$ 	$d \text{ cắt } (\alpha) \text{ tại } M \text{ ứng với nghiệm } t$ thay vào phương trình d 	$d \subset (\alpha)$ 

Chú ý: $d \perp (\alpha)$ khi và chỉ khi $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{n}$.

4. Khoảng cách

Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho đường thẳng d đi qua M_0 , có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}$ và điểm M .



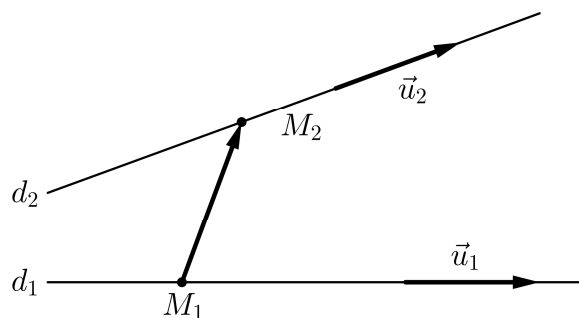
Cách 1: Áp dụng công thức: $d(M, d) = \frac{|\overrightarrow{[M_0M, \vec{u}]}|}{|\vec{u}|}$.

Cách 2: Tìm hình chiếu vuông góc H của M trên đường thẳng d . Khi đó: $d(M, d) = MH$.

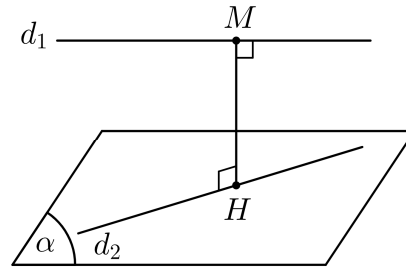
Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2 với d_1 đi qua điểm M_1 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1$, d_2 đi qua điểm M_2 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2$.

Cách 1: Áp dụng công thức: $d(d_1, d_2) = \frac{|\overrightarrow{[u_1, u_2]} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}|}{|\overrightarrow{[u_1, u_2]}|}$.

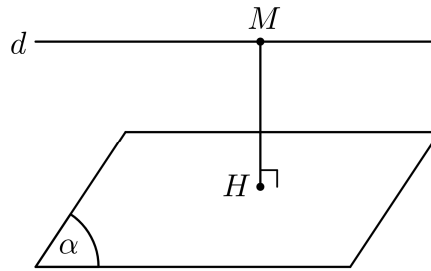


Cách 2: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2 bằng khoảng cách giữa d_1 đến mặt phẳng (α) chứa d_2 và song song với d_1 .



Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song với nhau

Khoảng cách giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) song song với nó bằng khoảng cách từ một điểm M bất kì trên d đến mặt phẳng (α) .



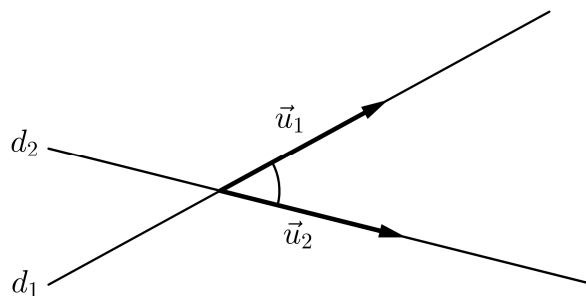
5. Góc

Góc giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có các vector chỉ phương là $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$, $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$.

Góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 **bằng** hoặc **bù** với góc giữa hai vector $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$. Ta có:

$$\cos(d_1, d_2) = \left| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \right| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

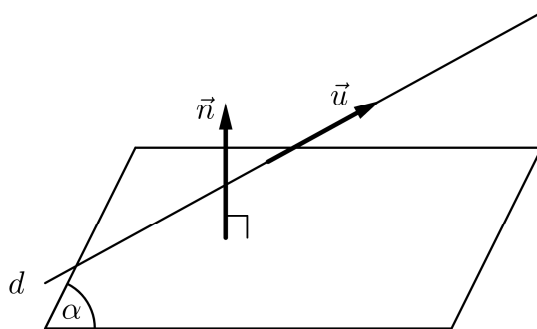


Chú ý: $0^\circ \leq (d_1, d_2) \leq 90^\circ$.

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng (α) có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (A; B; C)$.

Cách 1: Áp dụng công thức: $\sin(d, (\alpha)) = \left| \cos(\vec{n}, \vec{u}) \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$



Cách 2: Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng góc giữa đường thẳng d với hình chiếu d' của nó trên (α) .

Chú ý: $0^\circ \leq (d, (\alpha)) \leq 90^\circ$.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

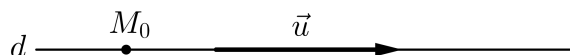
DẠNG TOÁN: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Để viết phương trình đường thẳng d ta cần xác định một **điểm** thuộc d và một **VTCP** của d .

Một số dạng cơ bản:

Dạng 1: d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có VTCP $\vec{u} = (a; b; c)$

Khi đó phương trình tham số d :
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$
 phương trình chính tắc $d: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ (với $abc \neq 0$).



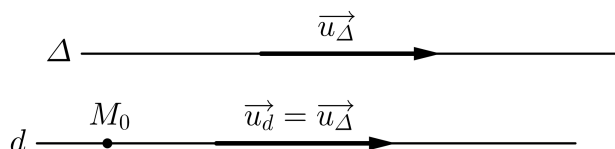
Dạng 2: d đi qua hai điểm A, B

Khi đó d có 1 VTCP là $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.



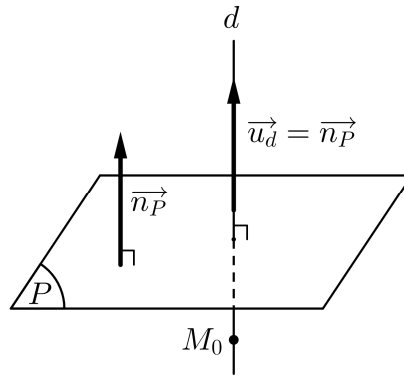
Dạng 3: d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và song song với đường thẳng Δ

Khi đó d có 1 VTCP là $\vec{u}_d = \vec{u}_\Delta$.



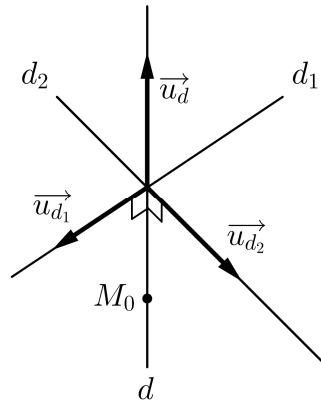
Dạng 4: d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc với mặt phẳng (P)

Khi đó d có 1 VTCP là $\vec{u}_d = \vec{n}_{(P)}$.



Dạng 5: d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2

Khi đó d có 1 VTCP là $\vec{u}_d = [\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}]$.

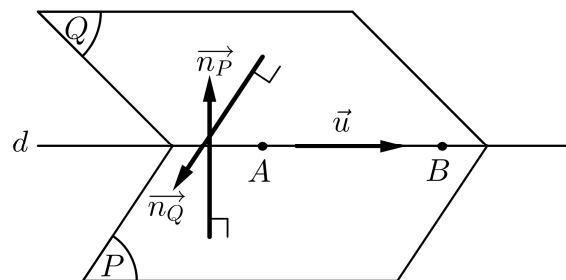


Dạng 6: d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P), (Q)$

Cách 1: Tìm một điểm và một VTCP của d

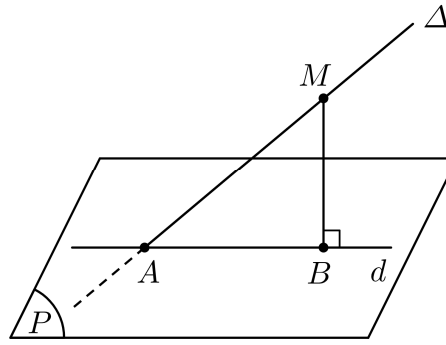
Tìm tọa độ điểm $A \in d$ bằng cách giải hệ phương trình $\begin{cases} (P) \\ (Q) \end{cases}$ (cho trước 1 ẩn, giải hệ phương trình tìm 2 ẩn còn lại) và một VTCP của d là $\vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}]$.

Cách 2: Tìm hai điểm A, B thuộc d và viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm đó.



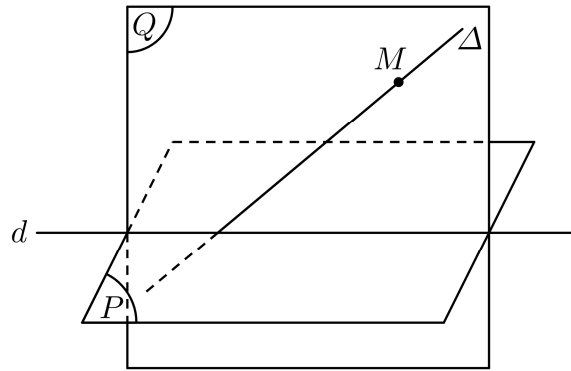
Dạng 7: d là hình chiếu vuông góc của đường thẳng Δ trên mặt phẳng (P)

Cách 1: Tìm điểm $A = \Delta \cap (P)$ trong trường hợp Δ cắt (P) . Lấy điểm M (khác A) tùy ý thuộc Δ , tìm hình chiếu vuông góc B của M trên (P) . Khi đó d đi qua 2 điểm A, B .



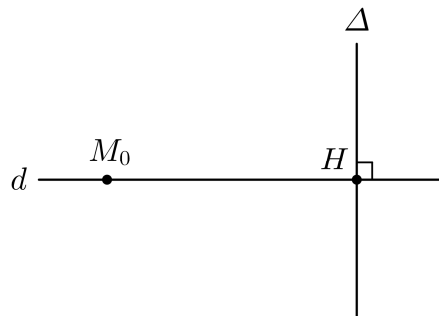
Cách 2: Lấy 2 điểm M, N thuộc Δ và tìm hình chiếu vuông góc H, K của chúng trên (P) . Khi đó d đi qua 2 điểm H, K .

Cách 3: Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (P) (Mặt phẳng (Q) đi qua 1 điểm $M \in \Delta$ và có 1 VTPT là $\vec{n}_{(Q)} = [\vec{u}_{\Delta}, \vec{n}_{(P)}]$). Khi đó $d = (P) \cap (Q)$ (**Dạng 6**).



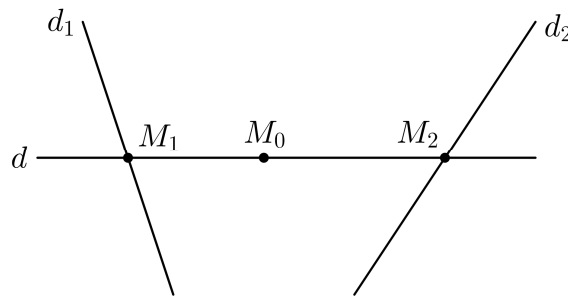
Dạng 8: d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$, vuông góc và cắt đường thẳng Δ

Tìm hình chiếu vuông góc H của M_0 trên Δ . Khi đó d là đường thẳng đi qua 2 điểm M_0, H .

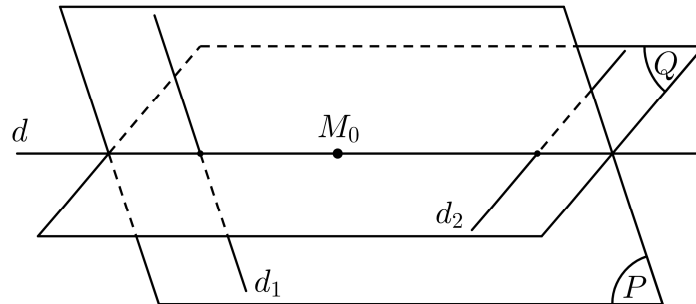


Dạng 9: d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2

Cách 1: Gọi $M_1 \in d_1$ (tọa độ ẩn t_1) và $M_2 \in d_2$ (tọa độ ẩn t_2) lần lượt là giao điểm của d và d_1, d_2 . Từ điều kiện M_0, M_1, M_2 thẳng hàng ta tìm được t_1, t_2 ; từ đó suy ra tọa độ M_1, M_2 . Khi đó đường thẳng d đi qua các điểm M_0, M_1, M_2 .

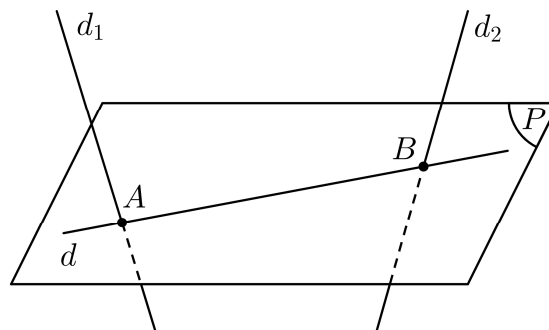


Cách 2: Gọi $(P) \equiv (M_0, d_1)$ và $(Q) \equiv (M_0, d_2)$. Khi đó $d = (P) \cap (Q)$ nên 1 VTCP của d là $\vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}]$.



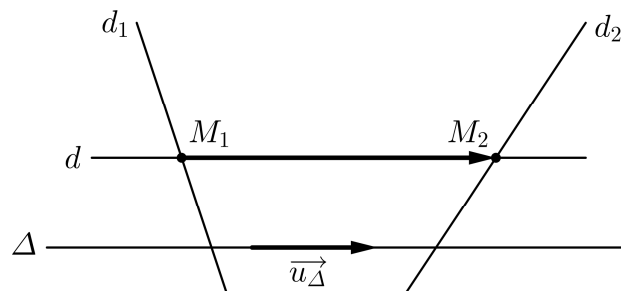
Dạng 10: d nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2

Tìm các giao điểm $A = d_1 \cap (P)$, $B = d_2 \cap (P)$. Khi đó d chính là đường thẳng AB .



Dạng 11: d song song với Δ và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2

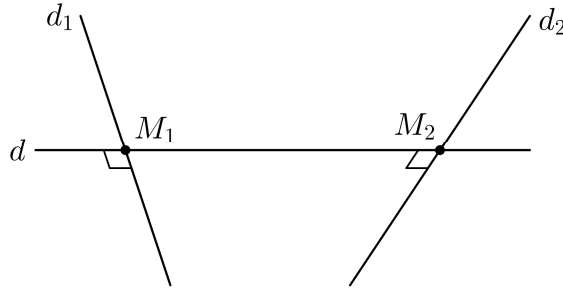
Gọi $M_1 \in d_1$ (tọa độ ẩn t_1) và $M_2 \in d_2$ (tọa độ ẩn t_2). Từ điều kiện $\overline{M_1 M_2}$ cùng phương với $\vec{u}_\Delta$ ta tìm được t_1, t_2 ; từ đó suy ra tọa độ M_1, M_2 . Khi đó d đi qua 2 điểm M_1, M_2 .



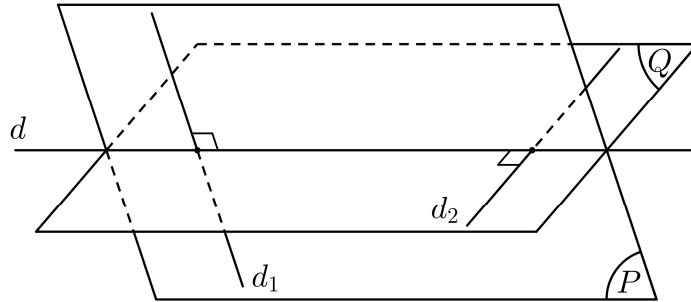
Dạng 12: d là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau

Cách 1: Gọi $M_1 \in d_1$ (tọa độ ẩn t_1) và $M_2 \in d_2$ (tọa độ ẩn t_2). Từ điều kiện $\begin{cases} M_1 M_2 \perp d_1 \\ M_1 M_2 \perp d_2 \end{cases}$ ta tìm được

t_1, t_2 ; suy ra tọa độ M_1, M_2 . Khi đó d là đường thẳng M_1M_2 .



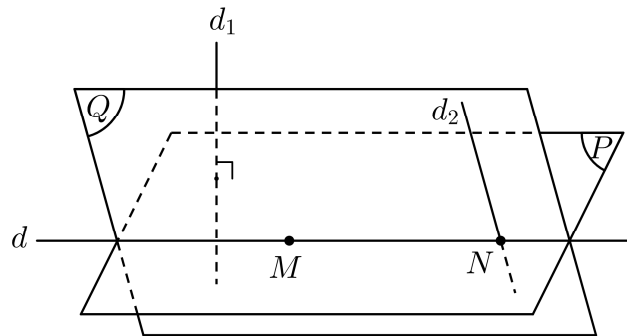
Cách 2: Viết phương trình các mặt phẳng $(P) \equiv (d, d_1)$ và $(Q) \equiv (d, d_2)$. Khi đó $d = (P) \cap (Q)$ (**Dạng 6**).



Dạng 13: d đi qua điểm M , vuông góc với d_1 và cắt d_2

Cách 1: Gọi $N = d \cap d_2$ (tọa độ theo tham số t của d_2). Từ điều kiện $MN \perp d_1$ ta tìm được N . Khi đó d là đường thẳng MN .

Cách 2: Gọi mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với d_1 , mặt phẳng (Q) chứa M và d_2 . Khi đó $d = (P) \cap (Q)$ (**Dạng 6**).



Câu 1. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

- Viết tọa độ điểm M thuộc d theo tham số t .
- Viết tọa độ 3 điểm A, B, C thuộc d lần lượt ứng với $t = 0, t = 2, t = -10$.
- Viết tọa độ 3 vectơ chỉ phương của d .

Câu 2. Cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-2}$.

- Viết tọa độ điểm M thuộc d theo tham số t .
- Viết tọa độ 3 điểm A, B, C thuộc d lần lượt ứng với $t = 1, t = -3, t = 5$.
- Viết tọa độ 3 vectơ chỉ phương của d .

Câu 3. Điểm nào thuộc đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$ trong các điểm sau và cho biết tọa độ điểm đó ứng với tham số t bằng bao nhiêu?

- a) $A(1; 2; -1)$ b) $B(-1; -2; 1)$ c) $C(-3; 4; 3)$ d) $D(-11; 8; 11)$ e) $E(5; 0; 5)$

Câu 4. Điểm nào thuộc đường thẳng $d: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3}$ trong các điểm sau:

- a) $A(1; -2; 4)$ b) $B(-1; 2; -4)$ c) $C(-1; -1; 7)$ d) $D(-3; 0; 5)$ e) $E(1; 3; 5)$

Câu 5. Chuyển phương trình tham số của các đường thẳng sau sang phương trình chính tắc (nếu có):

- a) $d_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ b) $d_2: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ c) $d_3: \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$ d) $d_4: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 - 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

Câu 6. Chuyển phương trình chính tắc của các đường thẳng sau sang phương trình tham số:

- a) $d_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2}$ b) $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{4}$
c) $d_3: \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$ d) $d_4: \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$

Câu 7. Viết phương trình tham số, chính tắc (nếu có) của đường thẳng d đi qua điểm M và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ với:

- a) $M(1; 2; -3), \vec{u} = (-1; 3; 5)$ b) $M(0; -2; 5), \vec{u} = (0; 1; 4)$
c) $M(1; 3; -1), \vec{u} = (1; 2; -1)$ d) $M(3; -1; -3), \vec{u} = (1; -2; 0)$

Câu 8. Viết phương trình tham số, chính tắc (nếu có) của đường thẳng d đi qua hai điểm A, B với:

- a) $A(2; 3; -1), B(1; 2; 4)$ b) $A(1; -1; 0), B(0; 1; 2)$
c) $A(3; 1; -5), B(2; 1; -1)$ d) $A(2; 1; 0), B(0; 1; 2)$

Câu 9. Viết phương trình tham số, chính tắc (nếu có) của đường thẳng d đi qua điểm A và song song với đường thẳng Δ với:

- a) $A(3; 2; -4), \Delta \equiv Ox$ b) $A(2; -5; 3), \Delta$ đi qua $M(5; 3; 2), N(2; 1; -2)$
c) $A(2; -5; 3), \Delta: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 + 4t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$ d) $A(4; -2; 2), \Delta: \frac{x+2}{4} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{3}$

Câu 10. Viết phương trình tham số, chính tắc (nếu có) của đường thẳng d đi qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P) với:

- a) $A(3; 2; 1), (P): 2x - 5y + 4 = 0$ b) $A(-2; 4; 3), (P): 2x - 3y + 6z + 19 = 0$

Câu 11. Viết phương trình tham số, chính tắc (nếu có) của đường thẳng d đi qua điểm A và vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2 với:

$$\text{a) } A(1;0;5), d_1: \begin{cases} x=1+2t \\ y=3-2t \\ z=1+t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \\ z=1-3t \end{cases}$$

$$\text{b) } A(1;-2;3), d_1: \begin{cases} x=1-t \\ y=-2-2t \\ z=3-3t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x=1 \\ y=-2+t \\ z=3+t \end{cases}$$

Câu 12. Viết phương trình tham số, chính tắc (nếu có) của đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P), (Q)$ với:

$$\text{a) } \begin{cases} (P): 6x+2y+2z+3=0 \\ (Q): 3x-5y-2z-1=0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} (P): 2x-3y+3z-4=0 \\ (Q): x+2y-z+3=0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} (P): x+2y-3=0 \\ (Q): 3x-2z-7=0 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} (P): 2x+y-z-1=0 \\ (Q): x-2z-3=0 \end{cases}$$

Câu 13. Tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) (nếu có) với:

$$\text{a) } d: \begin{cases} x=2t \\ y=1-t \\ z=3+t \end{cases} \text{ và } (P): x+y+z-10=0$$

$$\text{b) } d: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1} \text{ và } (P): 3x+5y-z-2=0$$

$$\text{c) } d: \frac{x+11}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3} \text{ và } (P): 3x-3y+2z-5=0$$

Câu 14. Viết phương trình tham số, chính tắc (nếu có) của đường thẳng d là hình chiếu của đường thẳng Δ trên mặt phẳng (P) với:

$$\text{a) } \begin{cases} \Delta: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{3} \\ (P): 3x+4y-2z+3=0 \end{cases} \quad \text{b) } \Delta: \begin{cases} x=-2+2t \\ y=3-t \\ z=1+3t \end{cases} \text{ và } (P): 2x-y+2z+3=0$$

$$\text{c) } \begin{cases} \Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-2} \\ (P): 2x-2y+z-3=0 \end{cases} \quad \text{d) } \Delta: \begin{cases} 5x-4y-2z-5=0 \\ x+2z-2=0 \end{cases} \text{ và } (P): 2x-y+z-1=0$$

Câu 15. Viết phương trình tham số, chính tắc (nếu có) của đường thẳng d đi qua điểm A , vuông góc và cắt đường thẳng Δ với:

$$\text{a) } A(1;2;-2), \Delta: \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases} \quad \text{b) } A(-4;-2;4), \Delta: \begin{cases} x=-3+2t \\ y=1-t \\ z=-1+4t \end{cases}$$

Câu 16. Viết phương trình tham số, chính tắc (nếu có) của đường thẳng d đi qua điểm A và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 với:

$$\text{a) } A(2; -1; 1), d_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 3 \end{cases}, d_2: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

$$\text{b) } A(2; 1; -1), d_1: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 4t \\ z = -3 + 5t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

Câu 17. Viết phương trình tham số, chính tắc (nếu có) của đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 với:

$$\text{a) } (P): y + 2z = 0, d_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}, d_2: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4 + 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } (P): 3x + 3y - 4z + 7 = 0, d_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 - 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Câu 18. Viết phương trình tham số của đường thẳng d song song với đường thẳng Δ và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 với:

$$\text{a) } \Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}, d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}, d_2: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{1}$$

$$\text{b) } \Delta: \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{1}, d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-2}{3}, d_2: \frac{x+4}{5} = \frac{y+7}{9} = \frac{z}{1}$$

Câu 19. Viết phương trình tham số của đường thẳng d vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 với:

$$\text{a) } d_1: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = -2 + 4t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad \text{b) } d_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -4 + 4t \end{cases}$$

Câu 20. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm A , vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2 với:

$$\text{a) } A(0; 1; 1), d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}, d_2: \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

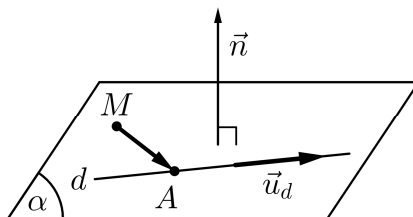
$$\text{b) } A(1; 1; 1), d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}, d_2: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

DẠNG TOÁN: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

Sau khi học xong phương trình đường thẳng, ta có một số dạng toán viết phương trình mặt phẳng liên quan đến đường thẳng:

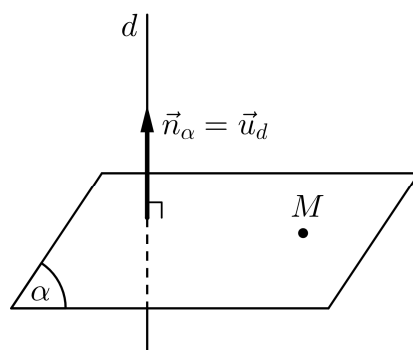
Dạng 1: (α) đi qua điểm M và chứa đường thẳng d

Lấy điểm A tùy ý thuộc d . Khi đó (α) qua điểm M và có 1 VTPT $\vec{n} = [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{u_d}]$.



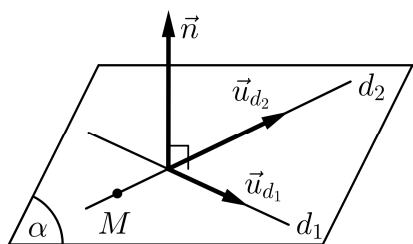
Dạng 2: (α) đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng d

Khi đó (α) qua điểm M và có 1 VTPT $\vec{n}_{(\alpha)} = \overrightarrow{u_d}$.



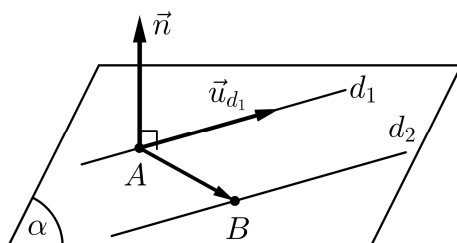
Dạng 3: (α) chứa 2 đường thẳng cắt nhau d_1, d_2

Khi đó (α) qua điểm M tùy ý thuộc d_1 hoặc d_2 và có 1 VTPT $\vec{n} = [\overrightarrow{u_{d_1}}, \overrightarrow{u_{d_2}}]$.



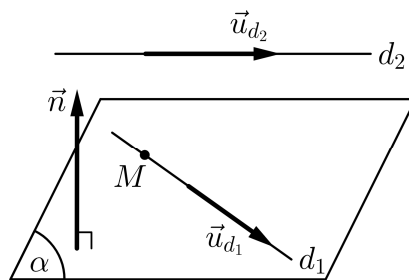
Dạng 4: (α) chứa 2 đường thẳng song song d_1, d_2

Trên d_1 lấy điểm A tùy ý, trên d_2 lấy điểm B tùy ý. Khi đó (α) qua điểm A (hoặc B) và có 1 VTPT $\vec{n} = [\overrightarrow{u_{d_1}}, \overrightarrow{AB}]$.



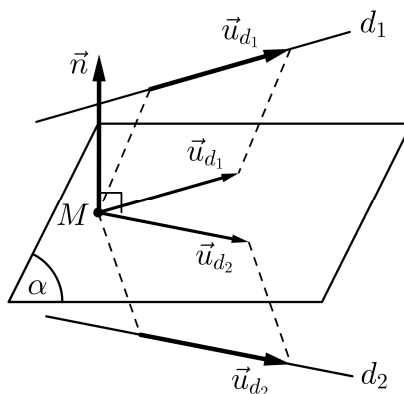
Dạng 5: (α) chứa đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng d_2 (d_1, d_2 chéo nhau)

Khi đó (α) qua điểm M tùy ý thuộc d_1 và có 1 VTPT $\vec{n} = [\overrightarrow{u_{d_1}}, \overrightarrow{u_{d_2}}]$.



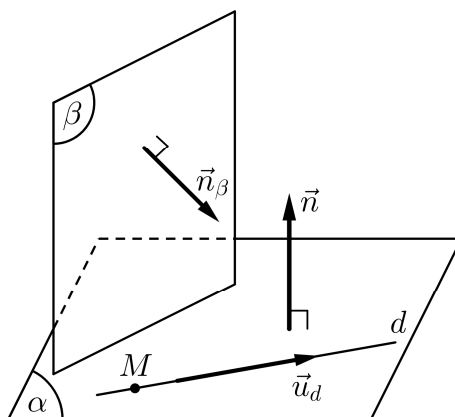
Dạng 6: (α) đi qua điểm M và song song với hai đường thẳng cắt nhau hoặc chéo nhau d_1, d_2

- Khi đó (α) qua M và có 1 VTPT $\vec{n} = [\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}]$.



Dạng 7: (α) đi qua đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (β)

Khi đó (α) qua điểm M tùy ý thuộc d và có 1 VTPT $\vec{n} = [\vec{u}_d, \vec{n}_{(\beta)}]$.



Dạng 8: (α) đi qua đường thẳng d và cách điểm M một khoảng bằng k

- Gọi $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$).
- Lấy 2 điểm $A, B \in d$. Khi đó A, B cũng thuộc (α) nên ta được hai phương trình (1), (2).
- Từ điều kiện khoảng cách $d(M, (\alpha)) = k$, ta được phương trình (3).
- Giải hệ phương trình (1), (2), (3) bằng cách cho giá trị một ẩn, tìm các ẩn còn lại.

Câu 21. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và chứa đường thẳng d với:

- a) $M(2; -3; 1)$, $d: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$ b) $M(4; -2; 3)$, $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-5}{2}$
- c) $M(-2; 1; 4)$, $d: \begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ x + 2y + 2z + 5 = 0 \end{cases}$ d) $M(7; 3; -2)$, $d \equiv Oz$

Câu 22. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và vuông góc đường thẳng d với:

- a) $M(-1; 3; 4)$, $d: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{cases}$ b) $M(8; -1; 0)$, $d: \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-3}{2}$
- c) $M(-5; 5; 1)$, $d: \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = 2 + 3t \end{cases}$ d) $M(-1; 9; 2)$, $d \equiv Oy$

Câu 23. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau d_1, d_2 với:

- a) $d_1: \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 4 + t \end{cases}$ b) $d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+5}{4}$, $d_2: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$
- c) $d_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -5 + 3t \\ z = 4 - t \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -4 - t \\ z = -3 + 7t \end{cases}$ d) $d_1: \begin{cases} x + y + z + 3 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$

Câu 24. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng song song d_1, d_2 với:

- a) $d_1: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + 2t \\ z = t - 1 \end{cases}$, $d_2: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{1}$
- b) $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{4}$, $d_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-4}{4}$
- c) $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z-3}{8}$, $d_2: \frac{x+2}{-3} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+1}{-12}$

Câu 25. Cho hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 . Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2 :

- a) $d_1: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$
- b) $d_1: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 4t - 2 \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$
- c) $d_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2}$, $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{4}$

Câu 26. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và song song với hai đường thẳng d_1, d_2 với:

a) $M(1;0;-2), d_1: \begin{cases} x=1 \\ y=1-2t \\ z=1+t \end{cases}, d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}$

b) $M(4;-3;1), d_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=3t \\ z=2+2t \end{cases}, d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$

c) $M(0;-3;4), d_1: \begin{cases} x=1-2t \\ y=2+3t \\ z=-t \end{cases}, d_2 \equiv Oz$

Câu 27. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (Q) với:

a) $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{5}, (Q): 2x-y+3z-6=0$

b) $d: \begin{cases} x=1-2t \\ y=3+t \\ z=4t \end{cases}, (Q): 3x+2z-7=0$

Câu 28. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và cách điểm M một khoảng cách k với:

a) $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1}, M(1;0;1), k=2\sqrt{2}$

b) $d: \begin{cases} x=3t \\ y=1+4t \\ z=3+t \end{cases}, M(8;7;8), k=\sqrt{123}$

DẠNG TOÁN: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI, GÓC, KHOẢNG CÁCH, GIAO ĐIỂM

Câu 29. Xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d_1, d_2 với:

a) $d_1: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3}, d_2: \begin{cases} x=-1+t \\ y=-t \\ z=-2+3t \end{cases}$

b) $d_1: \begin{cases} x=2+2t \\ y=-1+t \\ z=1 \end{cases}, d_2: \begin{cases} x=1 \\ y=1+t \\ z=3-t \end{cases}$

c) $d_1: \begin{cases} x=1+3t \\ y=2t \\ z=7-t \end{cases}, d_2: \frac{x+1}{6} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+2}{-2}$

d) $d_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=8-2t \\ z=7+t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x=4-t \\ y=2+2t \\ z=10-t \end{cases}$

Câu 30. Tìm giao điểm của hai đường thẳng d_1, d_2 với:

a) $d_1: \begin{cases} x=3t \\ y=1-2t \\ z=3+t \end{cases}, d_2: \begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=4+t \end{cases}$

b) $d_1: \begin{cases} x+y+z+3=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}; d_2: \begin{cases} x=1+t \\ y=-2+t \\ z=3-t \end{cases}$

Câu 31. Tìm m để hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$ cắt nhau, tìm tọa độ giao điểm của chúng.

Câu 32. Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) với:

a) $d: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$, $(P): x + y + z - 10 = 0$

b) $d: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$, $(P): 3x + 5y - z - 2 = 0$

c) $d: \frac{x+11}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$, $(P): 3x - 3y + 2z - 5 = 0$

Câu 33. Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Tìm m, n để:

i) d cắt (P) ii) $d \parallel (P)$ iii) $d \perp (P)$ iv) $d \subset (P)$

a) $d: \frac{x-1}{m} = \frac{y+2}{2m-1} = \frac{z+3}{2}$, $(P): x + 3y - 2z - 5 = 0$

b) $d: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - 3t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$, $(P): (m+2)x + (n+3)y + 3z - 5 = 0$

Câu 34. Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Tìm m, n để:

a) $d: \begin{cases} x = m + t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases}$ cắt $(P): 2x - y + z - 5 = 0$ tại điểm có tung độ bằng 3

b) $d: \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ y + 2z + 5 = 0 \end{cases}$ cắt $(P): 2x + y + 2z - 2m = 0$ tại điểm có cao độ bằng -1

c) $d: \begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 3x - 2z - 7 = 0 \end{cases}$ cắt $(P): x + y + z + m = 0$

Câu 35. Tính góc giữa hai đường thẳng sau:

a) $d_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 3t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ b) $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-4}{2}$, $d_2: \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{6} = \frac{z+4}{-2}$

Câu 36. Tính góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) với:

a) $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$, $(P): 2x - y - 2z - 10 = 0$

b) $d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+2}{4}$, $(P): 3x + y - z + 1 = 0$

Câu 37. Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d với:

a) $A(1; -1; 0)$, $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$ b) $A(2; 3; 1)$, $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$

Câu 38. Chứng minh hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau và tính khoảng cách giữa chúng:

a) $d_1: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ b) $d_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2}$, $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{4}$

c) $d_1: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 4t - 2 \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ d) $d_1: \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$, $d_2: \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$

Câu 39. Chứng minh hai đường thẳng d_1, d_2 song song với nhau và tính khoảng cách giữa chúng:

a) $d_1: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 4 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 5 + 6t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ b) $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z-3}{8}$, $d_2: \frac{x+2}{-3} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+1}{-12}$

Câu 40. Chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) và tính khoảng cách giữa chúng:

a) $d: \begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = 1 - 4t \\ z = 4t - 5 \end{cases}$, $(P): 4x - 3y - 6z - 5 = 0$

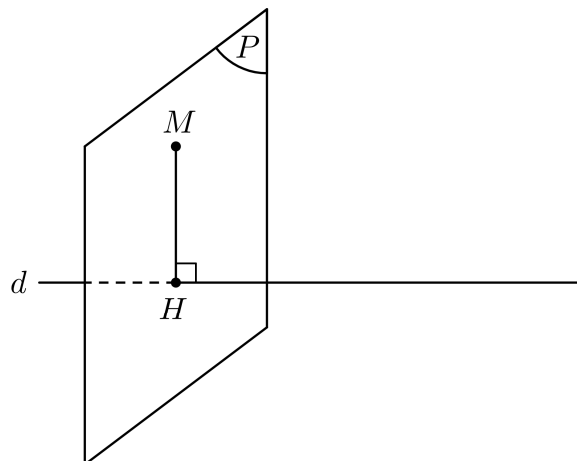
b) $d: \begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0 \\ 2x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$, $(P): 2x - 2y + 4z + 5 = 0$

DẠNG TOÁN: XÁC ĐỊNH HÌNH CHIẾU VÀ ĐIỂM ĐỐI XỨNG CỦA MỘT ĐIỂM QUA MỘT ĐƯỜNG THẲNG HOẶC MẶT PHẪNG

Dạng 1: Xác định hình chiếu vuông góc H của điểm M trên đường thẳng d

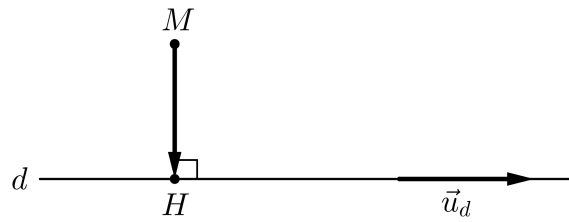
Cách 1:

- Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với d .
- Khi đó $H = d \cap (P)$.



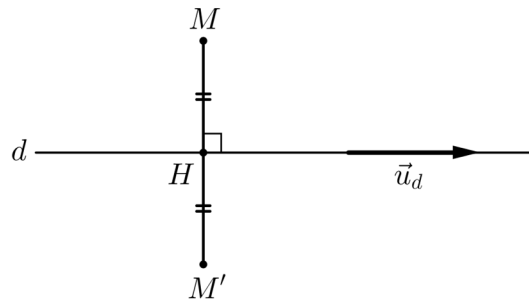
Cách 2:

- Điểm H được xác định bởi hệ: $\begin{cases} H \in d \\ \overrightarrow{MH} \perp \vec{u}_d \end{cases}$.



Dạng 2: Xác định điểm đối xứng M' của điểm M qua đường thẳng d

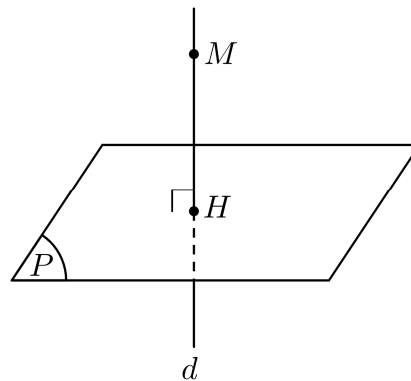
- Tìm điểm H là hình chiếu của M trên d .
- Xác định điểm M' sao cho H là trung điểm của đoạn MM' .



Dạng 3: Xác định hình chiếu vuông góc H của điểm M trên mặt phẳng (P)

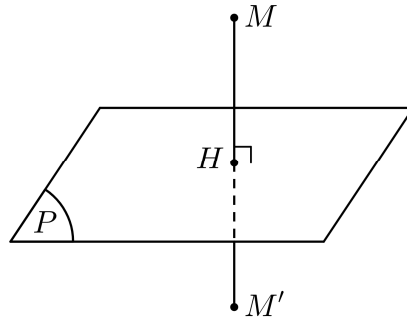
Ngoài cách đã biết ở bài trước, sau khi học xong phương trình đường thẳng thì ta còn có cách làm như sau:

- Viết phương trình đường thẳng d qua M và vuông góc với (P) .
- Khi đó $H = d \cap (P)$.



Dạng 4: Xác định điểm đối xứng M' của điểm M qua mặt phẳng (P)

- Tìm điểm H là hình chiếu của M trên (P) .
- Xác định điểm M' sao cho H là trung điểm của đoạn MM' .



Câu 41. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của điểm M trên đường thẳng d và điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng d với:

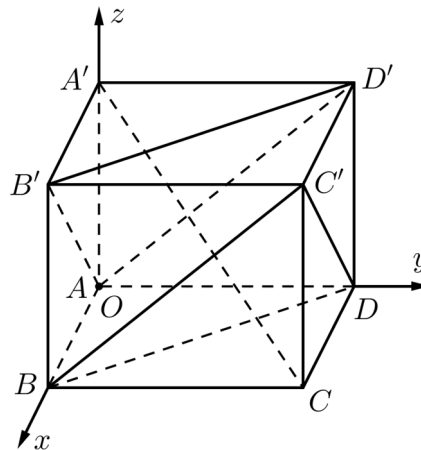
- a) $M(1; 2; -6)$, $d: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = t - 3 \end{cases}$ b) $M(2; 3; 1)$, $d: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 2t \\ z = 4t - 1 \end{cases}$
- c) $M(1; 2; -1)$, $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{2}$ d) $M(2; 5; 2)$, $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{1}$

Câu 42. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của điểm M trên mặt phẳng (P) và điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (P) với:

- a) $(P): 2x - y + 2z - 6 = 0$, $M(2; -3; 5)$ b) $(P): x + y + 5z - 14 = 0$, $M(1; -4; -2)$
- c) $(P): 6x - 2y + 3z + 12 = 0$, $M(3; 1; -2)$ d) $(P): 2x - 4y + 4z + 3 = 0$, $M(2; -3; 4)$
- e) $(P): x - y + z - 4 = 0$, $M(2; 1; -1)$ f) $(P): 3x - y + z - 2 = 0$, $M(1; 2; 4)$

DẠNG TOÁN: TỌA ĐỘ HÓA HÌNH KHÔNG GIAN

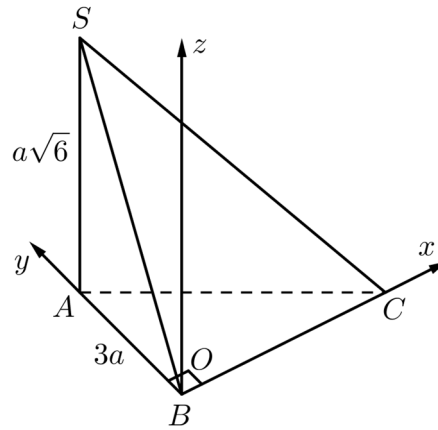
Câu 43. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng A ; các điểm B, D, A' lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz .



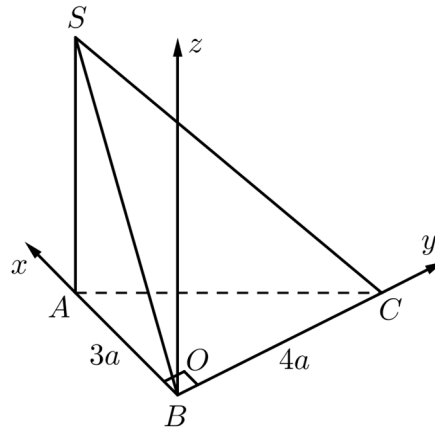
- a) Chứng minh rằng giao điểm của đường chéo $A'C$ và mặt phẳng $(AB'D')$ là trọng tâm của tam giác $AB'D'$.
- b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(C'BD)$.
- c) Tìm cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(DA'C)$ và $(ABB'A')$.

Câu 44. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AB = 3a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng B ; các

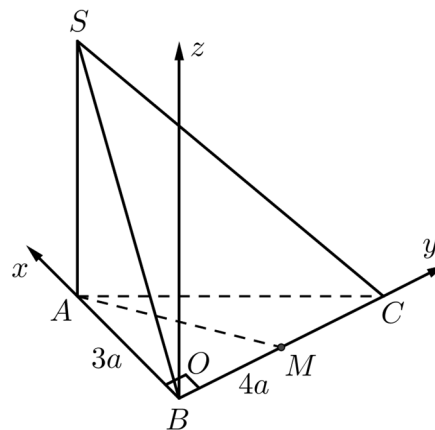
điểm C , A lần lượt thuộc các tia Ox , Oy và điểm S có cao độ dương. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và SC .



- Câu 45.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $AB = 3a$, $BC = 4a$. Tam giác SAB vuông cân tại A và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng B ; các điểm A , C lần lượt thuộc các tia Ox , Oy và điểm S có cao độ dương. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AC và SB .

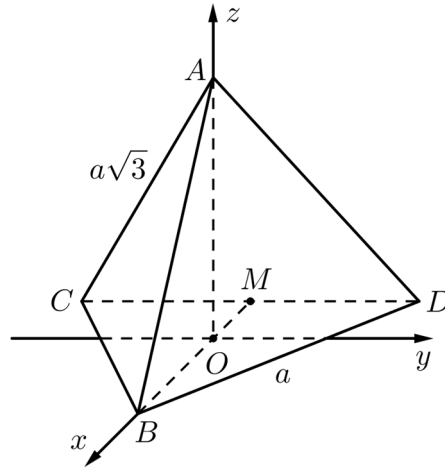


- Câu 46.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = 3a$, $BC = 4a$. Góc tạo bởi SC và (ABC) là 60° . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng B ; các điểm A , C lần lượt thuộc các tia Ox , Oy và điểm S có cao độ dương. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AM và SC với M là trung điểm BC .



- Câu 47.** Cho hình chóp tam giác đều $A.BCD$ có $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a$. Gọi M là trung điểm cạnh CD . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O là trọng tâm tam giác BCD ; các điểm B , A lần lượt thuộc

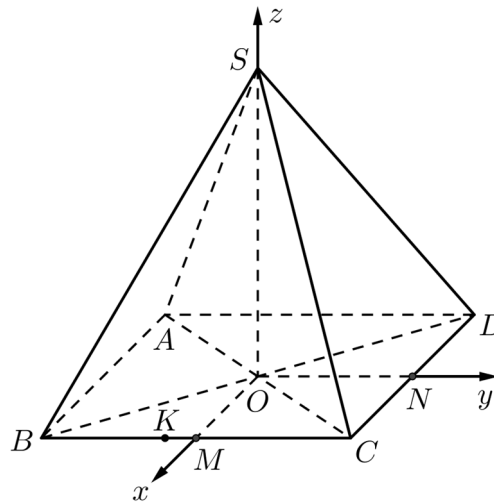
các tia Ox , Oz và điểm D có tung độ dương.



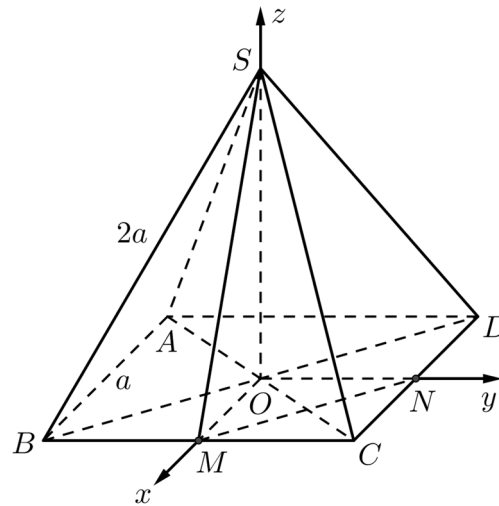
- a) Viết phương trình đường thẳng AD .
 b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và AD .

Câu 48. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi N , M lần lượt là trung điểm của CD và BC , K là điểm trên cạnh BC sao cho $BK = 4KM$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O là tâm của hình vuông $ABCD$; các điểm M , N , S lần lượt thuộc các tia Ox , Oy , Oz .

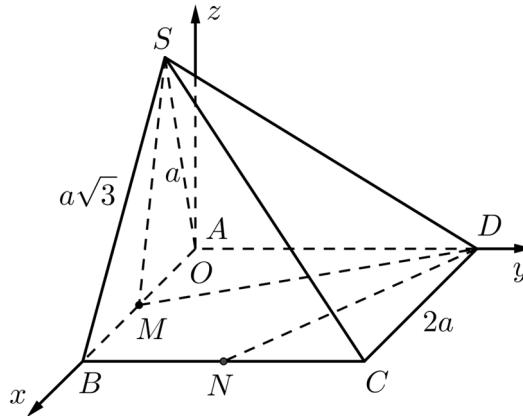
- a) Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SMN) .
 b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SK và BN .



Câu 49. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = 2a$, $AB = a$. Gọi N , M lần lượt là trung điểm của CD và BC . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O là tâm của hình vuông $ABCD$; các điểm M , N , S lần lượt thuộc các tia Ox , Oy , Oz . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SM và MN .

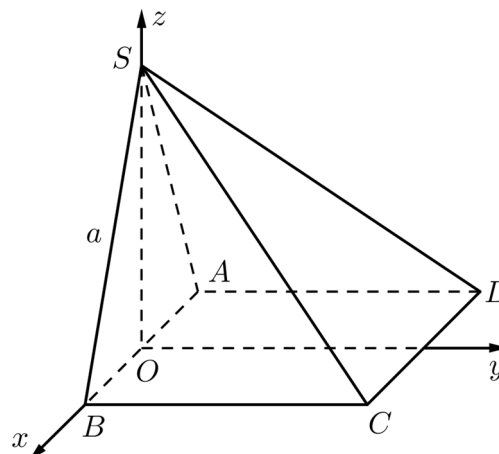


Câu 50. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng A ; các điểm B, D lần lượt thuộc các tia Ox, Oy và điểm S có cao độ dương.



- Tính theo a thể tích của khối chóp $S.BMDN$.
- Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM và DN .

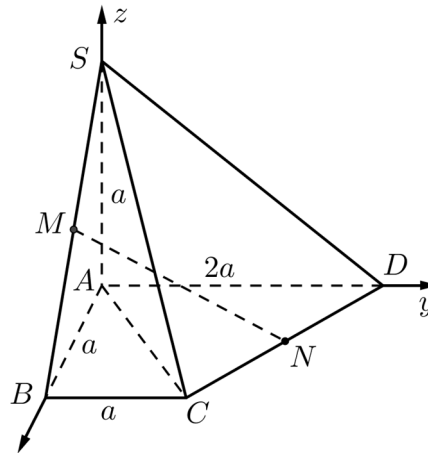
Câu 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O là trung điểm AB ; các điểm B, S lần lượt thuộc các tia Ox, Oz và điểm C có tung độ dương.



- Tính góc giữa hai đường thẳng AC và SD .

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC .

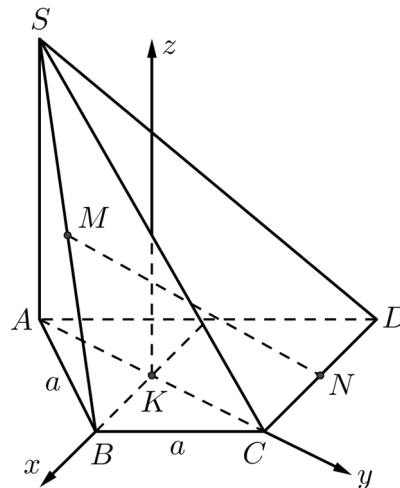
Câu 52. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, CD . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng A ; các điểm B, D, S lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz .



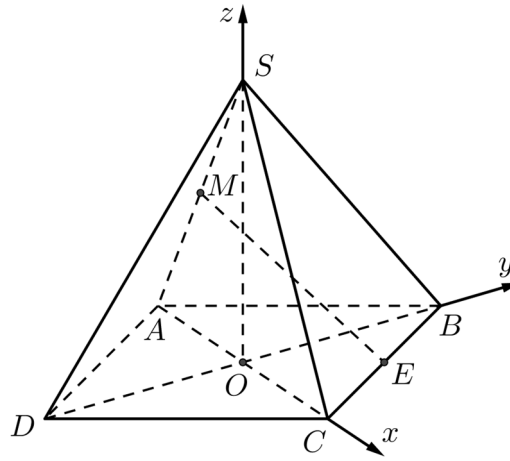
a) Viết phương trình đường thẳng MN .

b) Tính cosin góc giữa MN và (SAC) .

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AD = 2AB = 2BC = 2CD = 2a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng với trung điểm K của AC ; các điểm B, C lần lượt thuộc các tia Ox, Oy và điểm S có cao độ dương. Tính cosin góc giữa MN và (SAC) biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

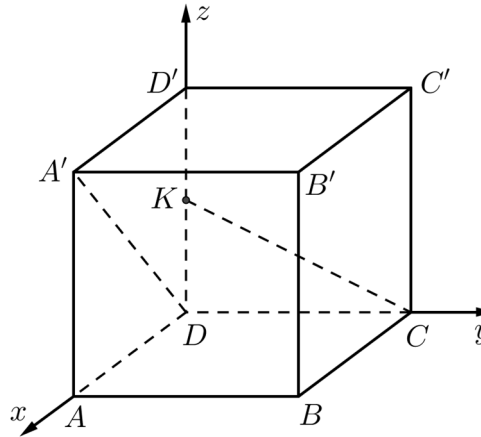


Câu 54. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi E, M lần lượt là trung điểm các cạnh BC, SA . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O là tâm của hình vuông $ABCD$; các điểm C, B, S lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz .



- a) Viết phương trình đường thẳng EM .
 b) Tính $\tan \alpha$ với α là góc giữa EM và (SBD) .

Câu 55. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi K là trung điểm của DD' . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng D ; các điểm A, C, D' lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$.



C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 1

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3t \\ z = -1 + 5t \end{cases}$. Phương trình chính tắc của d là:

A. $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{5}$. B. $x-2 = y = z+1$. C. $\frac{x+2}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-5}$. D. $\frac{x+2}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{5}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{3}$ đi qua điểm M và có vector chỉ phương $\vec{u}$ là:

A. $M(2; -1; 3), \vec{u} = (2; -1; -3)$. B. $M(2; -1; -3), \vec{u} = (2; -1; 3)$.
 C. $M(2; -1; 3), \vec{u} = (-2; 1; 3)$. D. $M(-2; 1; 3), \vec{u} = (2; -1; 3)$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng d qua điểm $M(-2;3;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; -2; 2)$ là:

A. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1;3;2)$, $B(2;0;5)$, $C(0;-2;1)$. Phương trình đường trung tuyến AM của tam giác ABC là:

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-2}{1}$ B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z+2}{1}$ C. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{-1}$ D. $\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+1}{3}$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;4;-1)$, $B(2;4;3)$, $C(2;2;-1)$. Phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm A và song song với BC là:

A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 3 = 0$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-2;1;1)$ và vuông góc với (P) là:

A. $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$ B. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ C. $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$ D. $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ và $d_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$. Phương

trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(2;3;-1)$ và vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2 là:

A. $\begin{cases} x = 2 - 8t \\ y = 3 + 3t \\ z = -1 - 7t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -8 + 2t \\ y = 3 + 3t \\ z = -7 - t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -2 - 8t \\ y = -3 + 3t \\ z = 1 - 7t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -2 + 8t \\ y = -3 - 3t \\ z = 1 + 7t \end{cases}$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z - 1 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{3}$. Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $B(2;-1;5)$, song song với (P) và vuông góc với Δ là:

A. $\frac{x+2}{-5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+5}{4}$ B. $\frac{x-2}{-5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-5}{4}$ C. $\frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+5}{-4}$ D. $\frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+4}{5}$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x - 3y + z = 0$ và $(\beta): x + y - z + 4 = 0$ là:

A. $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + 4t \\ z = -2 + 6t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $d_1 \perp d_2$. B. $d_1 \equiv d_2$. C. $d_1 \parallel d_2$. D. d_1 và d_2 chéo nhau.

Câu 11: Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 3y + z + 1 = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $d \parallel (\alpha)$. B. d cắt (α) . C. $d \subset (\alpha)$. D. $d \perp (\alpha)$.

Câu 12: Khoảng cách từ điểm $M(2;0;1)$ đến đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ là:

A. $\sqrt{12}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. $\frac{12}{\sqrt{6}}$.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

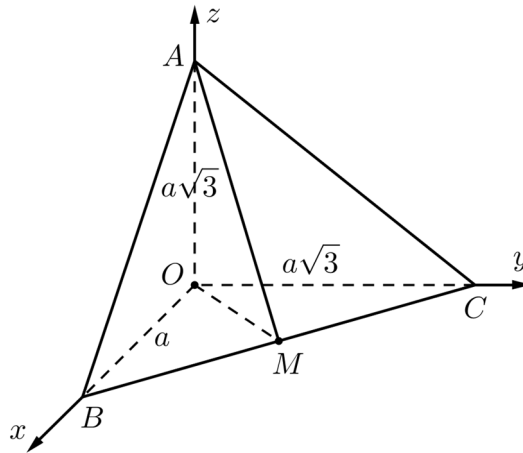
Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 10 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

- a) Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) .
- b) Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) lớn hơn 30° .
- c) Biết điểm M_0 có hoành độ $x_0 = 2$ thuộc đường thẳng d . Khi đó khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (P) là $\frac{5\sqrt{6}}{3}$.
- d) Đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại M và N sao cho $A(1;3;2)$ là trung điểm MN . Khi đó độ dài $MN = 2\sqrt{66}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$ và điểm $A(2;1;4)$.

- a) Điểm A không thuộc đường thẳng d .
- b) Mặt phẳng (α) qua điểm A và chứa đường thẳng d có phương trình là $5x - y - 2z - 1 = 0$.
- c) Đường thẳng $d': \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-2}{4}$ song song với đường thẳng d .
- d) Gọi $H(a;b;c)$ là điểm thuộc d thỏa AH có độ dài nhỏ nhất. Khi đó $T = a^3 + b^3 + c^3 = 62$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $OABC$ với các điểm A, B, C lần lượt thuộc các tia Oz, Ox, Oy . Biết $OB = a, OC = OA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC .



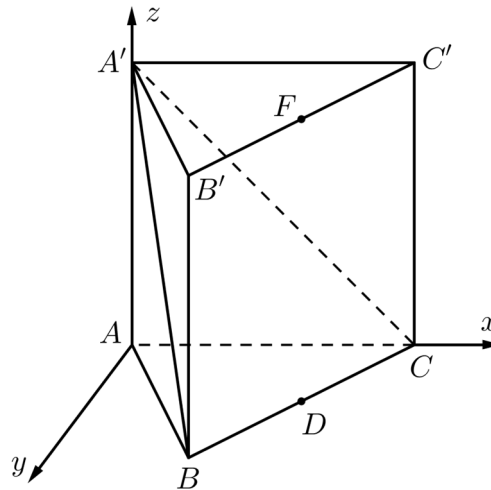
a) $M\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$.

b) $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OM}]$ cùng phương với $\vec{u} = (3; \sqrt{3}; \sqrt{3})$.

c) Phương trình đường thẳng $AM: \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{y}{3} = \frac{z - a\sqrt{3}}{-6}$.

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OM bằng $\frac{a\sqrt{15}}{3}$.

Câu 4: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các mặt bên đều là hình vuông cạnh a . Gọi D, F lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, B'C'$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A , điểm C thuộc tia Ox , điểm A' thuộc tia Oz và điểm B có tung độ dương.



a) $D\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{4}; 0\right)$.

b) Mặt phẳng $(A'BC)$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (\sqrt{3}; -1; \sqrt{3})$.

c) Gọi Δ là đường thẳng qua F và vuông góc với mặt phẳng $(A'BC)$. Khi đó Δ đi qua điểm $N(4; 2\sqrt{3}; 7)$ với $a = 4$.

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C'$ bằng $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=-5+t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x=0 \\ y=4-2t' \\ z=5+3t' \end{cases}$. Biết đường vuông góc chung của hai đường thẳng trên đi qua điểm $M(a;b;0)$. Tính $S = a^2 + b^2$.

ĐS:

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{1}$. Biết điểm $M(a;10;c)$ thuộc đường thẳng d . Tính $S = a + c$.

ĐS:

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-3}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (Oyz) là một đường thẳng có vector chỉ phương là $\vec{u} = (a;1;b)$. Tính giá trị biểu thức $P = 2025(a-b)$.

ĐS:

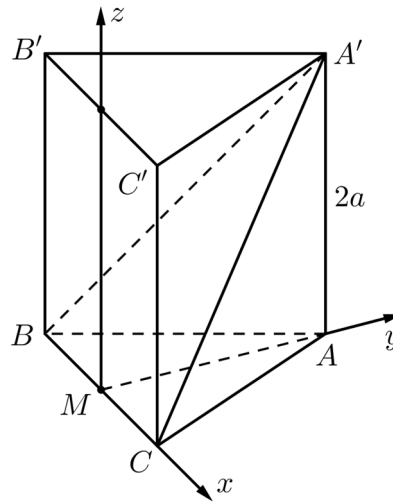
Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;0)$ và đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=-t \end{cases}$. Đường thẳng d_2 qua A vuông góc và cắt d_1 tại M . Khi đó $M(a;b;c)$. Tính $S = a + b + c$.

ĐS:

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(P): 4x - z + 3 = 0$. Biết một vector chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u} = (a;b;c)$ với $a + c = \frac{1}{2}$. Tính tích $P = 9ac$.

ĐS:

Câu 6: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $2a$, góc tạo bởi $A'B$ và mặt đáy là 60° . Gọi M là trung điểm BC . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng M ; các điểm C, A lần lượt thuộc các tia Ox, Oy và điểm A' có cao độ dương. Khi đó góc giữa hai đường thẳng $A'C$ và AM là bao nhiêu độ? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



ĐS:

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 2

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{1}$. Phương trình tham số của Δ là:

- A. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 - t \\ z = t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = t \end{cases}$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, phương trình chính tắc của đường thẳng AB với $A(1; -2; 5)$ và $B(3; 1; 1)$ là:

- A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+5}{-4}$ B. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{5}$
 C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{-4}$ D. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-5}{1}$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, trong các đường thẳng sau đây, có bao nhiêu đường thẳng đi qua điểm $A(2; -1; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng (Oxz) ?

- $\Delta_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 \\ z = 3 + t \end{cases}$ $\Delta_2: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}$ $\Delta_3: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$ $\Delta_4: \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + t \\ z = 3 \end{cases}$

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2; 1; -5)$, đồng thời vuông góc với giá của hai vectơ $\vec{a} = (1; 0; 1)$ và $\vec{b} = (4; 1; -1)$ là:

- A. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-5}{-1}$ B. $\frac{x+2}{-1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-5}{1}$
 C. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+5}{1}$ D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-1}{-5}$

- Câu 5:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 2 = 0$ và $(Q): 2x + y - z + 1 = 0$. Phương trình đường thẳng d là giao tuyến của (P) và (Q) là:
- A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 - t \\ z = 5 \end{cases}$. C. $\frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{5}$. D. $\frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{5}$.
- Câu 6:** Trong không gian $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$ và $d': \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-2}$. Vị trí tương đối của d và d' là:
- A. Chéo nhau. B. Trùng nhau. C. Cắt nhau. D. Song song.
- Câu 7:** Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ giao điểm A của đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 4 = 0$.
- A. $A(1; -1; 5)$. B. $A(1; 1; 1)$. C. $A(-1; 0; -2)$. D. $A(-1; 1; 1)$.
- Câu 8:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng d có tọa độ là:
- A. $(2; -3; -1)$. B. $(2; -3; 1)$. C. $(1; -4; 0)$. D. $(-1; 4; 0)$.
- Câu 9:** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng đi qua $A(2; -1; 1)$, cắt và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases}$.
- A. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$.
- Câu 10:** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng d đi qua $A(0; 1; 1)$, vuông góc với đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$ và cắt đường thẳng $d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$.
- A. $d: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$. B. $d: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$. C. $d: \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases}$. D. $d: \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases}$.
- Câu 11:** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 1 = 0$. Góc giữa Δ và (P) bằng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị):
- A. 8° . B. 82° . C. 98° . D. 172° .

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): 3x + 5y - z - 2 = 0$. Gọi d' là hình chiếu của d trên (P) . Phương trình tham số của d' là:

A. $\begin{cases} x = -62t \\ y = 25t \\ z = 2 - 61t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 62t \\ y = -25t \\ z = 2 + 61t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 62t \\ y = -25t \\ z = -2 + 61t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 62t \\ y = -25t \\ z = 2 + 61t \end{cases}$.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;0)$, $B(0;6;0)$.

a) Phương trình đường thẳng AB là: $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 6 + 6t \\ z = 0 \end{cases}$.

b) Đường thẳng AB cắt mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z + 5 = 0$ tại điểm $M(1;3;0)$.

c) Khoảng cách giữa đường thẳng AB và đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-1}$ là $\sqrt{91}$.

d) Tập hợp tất cả các điểm cách đều 3 điểm O , A , B là đường thẳng có phương trình: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;-4)$, $B(-3;5;2)$.

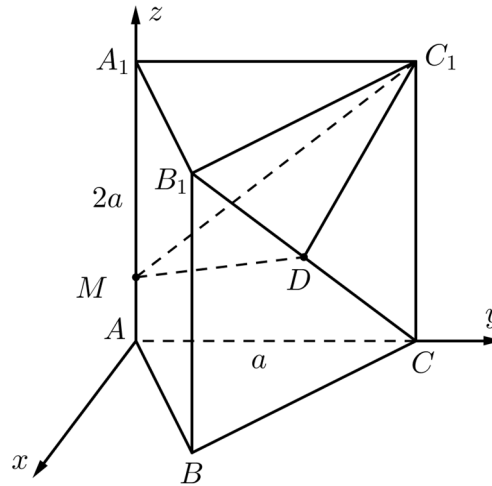
a) Phương trình của đường thẳng AB là $\frac{x+3}{-10} = \frac{y-5}{10} = \frac{z-2}{20}$.

b) Đường thẳng vuông góc với AB và song song với mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z - 10 = 0$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (5;7;-1)$.

c) Tọa độ điểm I thỏa mãn $\vec{IA} + 2\vec{IB} = \vec{0}$ là $I(-2;4;0)$.

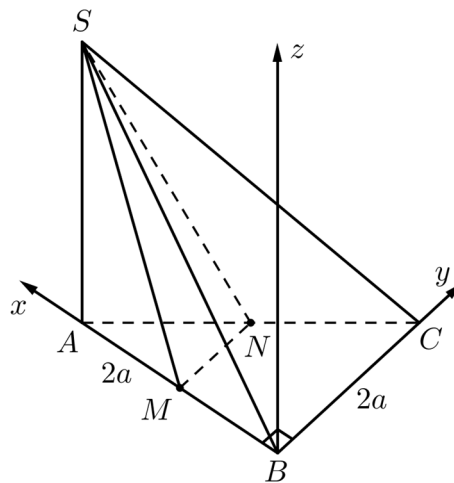
d) Tọa độ điểm M sao cho biểu thức $MA^2 + 2MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là $M(2;-4;0)$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $AA_1 = 2a$. Gọi D là trung điểm của B_1C_1 ; điểm M tùy ý thuộc cạnh AA_1 . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng A , điểm C thuộc tia Oy , điểm A_1 thuộc tia Oz và điểm B có hoành độ dương.



- a) Đường thẳng B_1C có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 1; -4)$.
- b) Đường thẳng C_1D có một vectơ chỉ phương là $\vec{v} = (-\sqrt{3}; 1; 4)$.
- c) Để góc giữa hai đường thẳng MD và AA_1 bằng 45° thì tọa độ điểm M là: $M\left(0; 0; a - \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$
 hoặc $M\left(0; 0; a + \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.
- d) Diện tích tam giác MDC_1 có giá trị lớn nhất bằng $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M là trung điểm của AB , mặt phẳng chứa SM và song song với BC , cắt AC tại N . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng B , điểm A thuộc tia Ox , điểm C thuộc tia Oy và điểm S có cao độ dương.



- a) $S(2a; 0; 2a\sqrt{3})$.
- b) Thể tích khối chóp $S.BCNM$ bằng $a^3\sqrt{3}$.
- c) Đường thẳng vuông góc với AB và SN có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (0; 2\sqrt{3}; 2)$.

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN là $\frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, biết đường thẳng đi qua điểm $M(1;2;2)$, song song với mặt phẳng $(P): x - y + z + 3 = 0$ đồng thời cắt đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$ có phương trình là

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = a + bt \\ z = c + dt \end{cases} \text{ Tính } S = 2026(a + b + c + d).$$

ĐS:

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): z - 1 = 0$ và $(Q): x + y + z - 3 = 0$. Gọi d là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) , cắt đường thẳng $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1}$ và vuông góc với đường thẳng Δ . Khi đường thẳng d đi qua điểm có tung độ bằng 2025 thì hoành độ của điểm đó là bao nhiêu?

ĐS:

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;7;0)$ và $B(3;0;3)$. Biết phương trình đường phân giác trong của góc $\widehat{AOB}$ là $d: \frac{x}{6} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$. Tính $S = b^2 + c^2$.

ĐS:

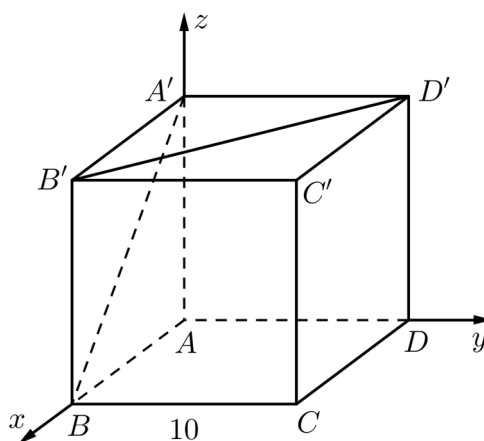
Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;3;1)$, $B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 7 = 0$. Gọi d là đường thẳng nằm trong (P) sao cho mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B . Nếu d đi qua điểm $M(12;b;c)$ thì tích $P = bc$ bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$ và $d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{-1}$. Đường vuông góc chung của d_1 và d_2 lần lượt cắt d_1, d_2 tại A và B . Tính diện tích S của tam giác OAB .

ĐS:

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh 10, với điểm A trùng O , các điểm B, D, A' lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'D'$ và $A'B$.



ĐS:

E. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 3

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(2;1;3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; -1; -2)$. Phương trình tham số của đường thẳng d là:

- A. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 - t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(2;3;5)$ và $B(-1;2;0)$?

- A. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 5 + 5t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + t \\ z = 5 + 5t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = 5t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 5 - 5t \end{cases}$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0; -1; 3)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$. Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d bằng:

- A. $\sqrt{14}$. B. $\sqrt{5}$. C. $\sqrt{3}$. D. 5.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{3}$ và $d_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 + 6t \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $d_1 \parallel d_2$. B. d_1, d_2 cắt nhau. C. d_1, d_2 trùng nhau. D. d_1, d_2 chéo nhau.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho $\triangle ABC$ có $A(2;1;-2)$, $B(4;-1;1)$, $C(0;-3;1)$. Phương trình đường thẳng d đi qua trọng tâm $\triangle ABC$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC) là:

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -2t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2t \end{cases} \end{array}$$

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z - 1 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{3}$. Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $B(2; -1; 5)$, song song với (P) và vuông góc với Δ là:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+5}{-4} & \text{B. } \frac{x+2}{-5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+5}{4} \\ \text{C. } \frac{x-2}{-5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-5}{4} & \text{D. } \frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+4}{5} \end{array}$$

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$ và $d_2: \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$. Phương trình đường thẳng Δ nằm trong $(\alpha): x + 2y - 3z - 2 = 0$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 là:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \frac{x+3}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1} & \text{B. } \frac{x+3}{-5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1} \\ \text{C. } \frac{x-3}{-5} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1} & \text{D. } \frac{x+8}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{-4} \end{array}$$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$ và $d_2: \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = -2 + t \end{cases}$. Phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 là:

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x = 3 + 1t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -2 - t \end{cases} \end{array}$$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; -5; 7)$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z - 3 = 0$. Tọa độ hình chiếu vuông góc của M trên (P) là:

$$\text{A. } (2; -1; 5). \quad \text{B. } (-2; 1; 5). \quad \text{C. } (2; 1; 5). \quad \text{D. } (-2; -1; 5).$$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; 1; 0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua d .

$$\text{A. } M'\left(2; -\frac{5}{2}; -2\right). \quad \text{B. } M'\left(\frac{8}{3}; \frac{5}{3}; \frac{4}{3}\right). \quad \text{C. } M'\left(\frac{8}{3}; -\frac{5}{3}; -\frac{4}{3}\right). \quad \text{D. } M'\left(2; \frac{5}{2}; 2\right).$$

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 6z + 7 = 0$. Giá trị của m để d và (P) song song với nhau là:

$$\text{A. } -2. \quad \text{B. } -2. \quad \text{C. } 3. \quad \text{D. } -3.$$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$, $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$.
 Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 .

- A. $4\sqrt{2}$. B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{4\sqrt{3}}{2}$.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

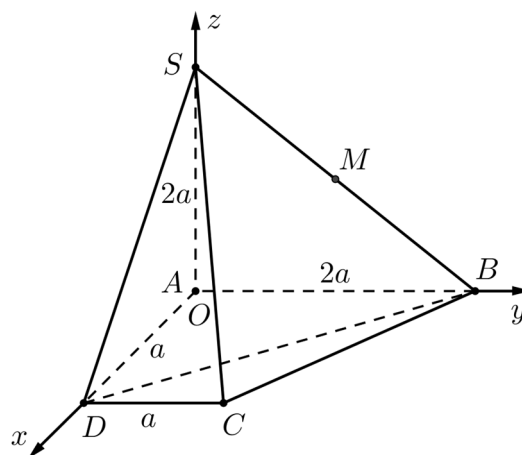
Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5}$ và $d': \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{-1}$.

- a) Góc giữa 2 đường thẳng d và d' là 77° (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).
 b) Mặt phẳng (α) chứa d và song song với d' có một vector pháp tuyến là $\vec{n} = (7; -7; -13)$.
 c) Khoảng cách giữa 2 đường thẳng d và d' là $2\sqrt{3}$.
 d) Phương trình đường vuông góc chung của d và d' là $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{2}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+2y+z-4=0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3}$.

- a) Phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=2+3t \end{cases}$.
 b) Gọi $M(a;b;c)$ là giao điểm của d và (P) . Khi đó $a+b+c=5$.
 c) Cho điểm $M(1;2;3)$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) lớn hơn khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d .
 d) Đường thẳng Δ nằm trong (P) , đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là $\frac{x-6}{5} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{-3}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D , $AB=2a$, $CD=AD=a$. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với đáy. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng A , các điểm D, B, S lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz .



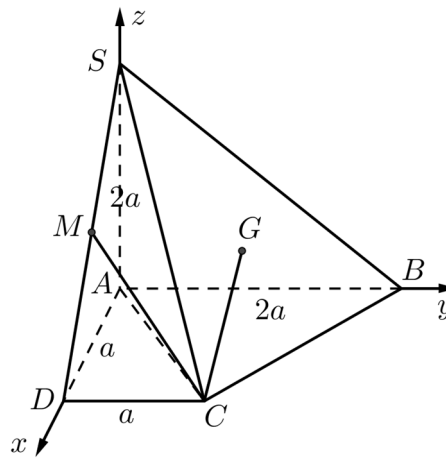
a) Gọi M là trung điểm SB . Khi đó $M(0; a; a)$.

b) Phương trình tham số của đường thẳng MC là
$$\begin{cases} x = t \\ y = a \\ z = a - t \end{cases}.$$

c) $[\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{SC}] = (4a^2; 2a^2; 3a^2)$.

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC bằng $\frac{2a}{\sqrt{29}}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D , $AB = 2a$, $CD = AD = a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm SD , G là trọng tâm tam giác SBC . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng A , các điểm D, B, S lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz .



a) $C(a; a; 0)$, $M\left(\frac{a}{2}; 0; a\right)$, $G\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{2a}{3}\right)$.

b) Phương trình đường thẳng CG : $\frac{x-a}{-1} = \frac{y-a}{1} = \frac{z}{1}$.

c) Góc giữa hai đường thẳng MC và CG là 45° .

d) Thể tích tứ diện $ACMG$ là $V_{ACMG} = \frac{a^3}{6}$.

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 0)$, $B(-1; 0; 1)$ và điểm M tùy ý trên đường thẳng

$d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = MA + MB$ là bao nhiêu?

ĐS:

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 0; -1)$, $B(-1; 1; 0)$, $C(1; 0; 1)$. Biết điểm $M(a; b; c)$

thỏa $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $S = 4a + b + c$ bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(1;1;2)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. Biết điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó, giá trị $T = a + 2b + 3c$ bằng bao nhiêu?

ĐS:

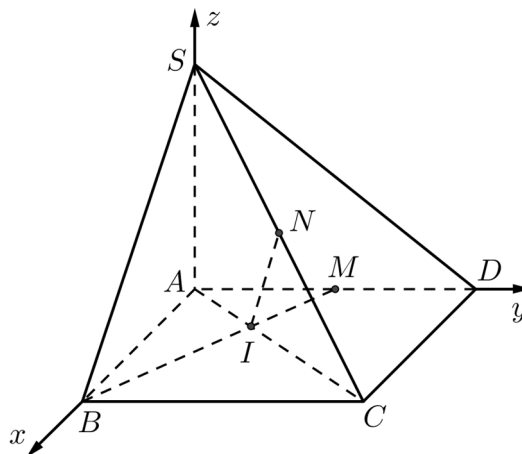
Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 4 = 0$. Gọi d là đường thẳng nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ và điểm $M(a;b;c)$ thuộc d . Nếu $a + b + c = 9$ thì $S = a^2 + b^2 + c^2$ bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;-2;1)$, $B(1;2;-3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$. Gọi Δ là đường thẳng qua A , vuông góc với d đồng thời cách điểm B một khoảng bé nhất. Biết Δ có một vector chỉ phương $\vec{u} = (a;b;c)$ có độ dài bằng $2025\sqrt{5}$. Khi đó $S = |a| + |b| + |c|$ bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy. M , N lần lượt là trung điểm của AD và SC , I là giao điểm của BM và AC . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho A trùng O ; các điểm B , D , S lần lượt thuộc các tia Ox , Oy , Oz . Khi đó đường thẳng IN có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (6;b;c)$. Tính giá trị biểu thức $S = b^2 + c^2$.



ĐS:

F. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -3 + 5t \end{cases}$. Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của d ?

A. $x - 2 = y = z + 3$. B. $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{5}$. C. $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$. D. $x + 2 = y = z - 3$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, tọa độ giao điểm của đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}$ và mặt phẳng $(\alpha): x - y + z + 2 = 0$ là:

A. $(2; 5; 9)$. B. $(0; 1; 3)$. C. $(-2; -3; -3)$. D. $(-1; -3; 0)$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-4; -2; 4)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$. Tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng d là:

A. $(-1; 0; 3)$. B. $(2; 3; 1)$. C. $(3; 2; -1)$. D. $(4; 2; -1)$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; 1; 0)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Đường thẳng d đi qua điểm M , cắt và vuông góc với Δ có một vectơ chỉ phương có tọa độ là:

A. $(1; -4; -2)$. B. $(1; -4; 2)$. C. $(2; 1; -1)$. D. $(2; -1; -1)$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 2z - 3 = 0$. Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua $A(2; 1; -5)$ và vuông góc với (α) là:

A. $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -5 + 2t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 2 - 5t \end{cases}$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; -1; 1)$, $B(-1; 2; 3)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$. Phương trình đường thẳng đi qua điểm A , đồng thời vuông góc với hai đường thẳng AB và Δ là:

A. $\frac{x-7}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{1}$. B. $\frac{x-1}{7} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{4}$.
C. $\frac{x+1}{7} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}$. D. $\frac{x+1}{7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{4}$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho 2 mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 2z + 3 = 0$ và $(\beta): 3x - 5y - 2z - 1 = 0$. Phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M(1; 3; -1)$, song song với 2 mặt phẳng (α) , (β) là:

A. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -1 + 14t \\ y = -3 + 8t \\ z = 1 + t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + 8t \\ z = 1 + t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 + 14t \\ y = 3 + 8t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x - 3y + z = 0$ và $(\beta): x + y - z + 4 = 0$. Phương trình tham số của đường thẳng d là:

A. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = -t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$ và $d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;2;3)$, vuông góc với d_1 và cắt d_2 là:

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$. B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+3}{-5}$.
C. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{5}$. D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z+5}{-3}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$. Phương trình đường thẳng đi qua điểm A , cắt d và song song với mặt phẳng $(P): x + y - z + 3 = 0$ là:

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$. B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$.
C. $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$. D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $M(1;2;3)$, $A(2;4;4)$ và 2 mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 1 = 0$, $(Q): x - 2y - z + 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M cắt (P) , (Q) lần lượt tại B , C sao cho tam giác ABC cân tại A và nhận AM là đường trung tuyến.

A. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$. B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$.
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{1}$. D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$ và hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$. Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P) , phương trình đường thẳng mà khoảng cách từ B đến đường thẳng đó nhỏ nhất là:

A. $\frac{x+1}{31} = \frac{y}{12} = \frac{z-2}{-4}$. B. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{12} = \frac{z}{11}$.
C. $\frac{x}{21} = \frac{y+3}{11} = \frac{z-1}{-4}$. D. $\frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$.

a) Góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (P) là 43° (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

b) Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và song song với (P) . Khi đó $M(1;1;1) \in (Q)$.

c) Đường thẳng đi qua B và vuông góc với mặt phẳng (Q) có phương trình là
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

d) Gọi d là hình chiếu vuông góc của AB lên mặt phẳng (P) . Khi đó $N\left(28; \frac{23}{2}; 0\right) \in d$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$, $d_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+4}{-1}$ và $d_3: \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{6}$.

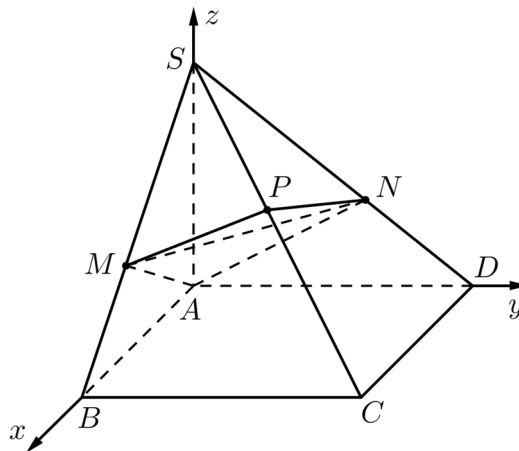
a) d_1 và d_2 chéo nhau.

b) Góc giữa d_1 và d_3 lớn hơn 75° .

c) Khoảng cách giữa d_2 và d_3 lớn hơn 1.

d) Biết đường thẳng Δ song song d_3 , cắt d_1 và d_2 . Khi đó Δ đi qua điểm $M(-1;0;-4)$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $AB = a$, $AD = 2a$, $SA = 3a$. Gọi M , N lần lượt là hình chiếu của A trên SB , SD và P là giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN) . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng A ; các điểm B , D , S lần lượt thuộc các tia Ox , Oy , Oz .



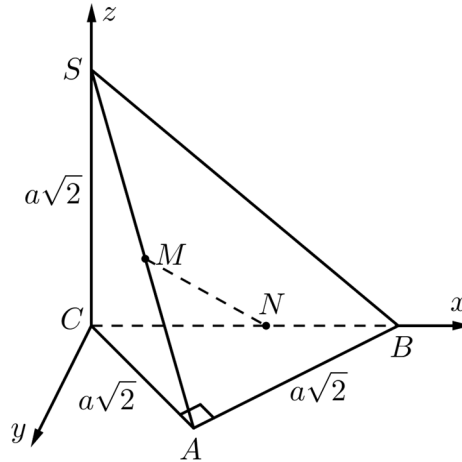
a) Phương trình đường thẳng $SB: \begin{cases} x = a + t \\ y = 0 \\ z = -3t \end{cases}$.

b) Mặt phẳng (AMN) có phương trình là $x + 2y - 3z = 0$.

c) Tọa độ điểm $P\left(\frac{9a}{14}; \frac{8a}{7}; \frac{15a}{14}\right)$.

d) Thể tích khối chóp $S.AMPN$ là $\frac{1836a^3}{1820}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SC \perp (ABC)$. Tam giác ABC vuông tại A , các điểm M, N lần lượt thuộc SA, BC sao cho $AM = CN$. Biết $SC = AC = AB = a\sqrt{2}$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng C ; các điểm B, S lần lượt thuộc các tia Ox, Oz và điểm A có tung độ dương.



- a) $A(a; a; 0), B(2a; 0; 0)$.
- b) Phương trình đường thẳng $SA: \frac{x-a}{-1} = \frac{y-a}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$.
- c) Mặt phẳng (SAB) đi qua điểm $E(1; -1; a\sqrt{2})$.
- d) Giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MN là $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 1; 0), B(2; 2; 2), C(-2; 3; 1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$. Biết có một điểm M thuộc d có tung độ dương thỏa mãn thể tích V của tứ diện $MABC$ bằng 3. Khi đó tổng hoành độ và cao độ của điểm M là bao nhiêu?
ĐS:

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ và điểm $A(1; 6; 0)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài MA với $M \in d$.
ĐS:

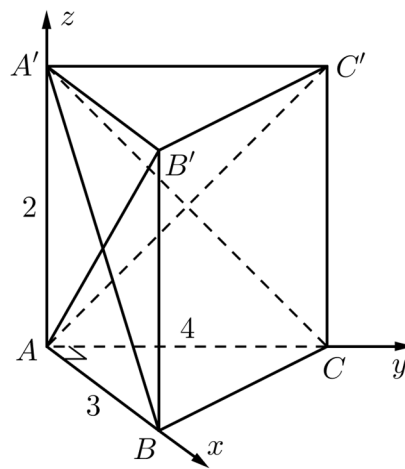
Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 3x + y - 3 = 0, (Q): 2x + y + z - 3 = 0$ và điểm $M(1; 2; 3)$. Biết điểm $N(5; a; b)$ thỏa mãn đường thẳng MN song song với cả hai mặt phẳng (P) và (Q) . Khi đó $S = a^2 + b^2$ bằng bao nhiêu?
ĐS:

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2; 0; 0), B(0; 3; 0), C(0; 0; -4)$ và H là trực tâm tam giác ABC . Biết đường thẳng OH có một vector chỉ phương là $\vec{u} = \left(a; b; -\frac{1}{2}\right)$. Tính $P = ab$.
ĐS:

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{-1}$ và $\Delta_2: \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$. Biết đường vuông góc chung của hai đường thẳng trên là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): 3x-2y-z-12=0$ và $(Q): 5x+by-11z+d=0$. Tính giá trị biểu thức $T = \frac{bd}{4}$.

ĐS:

Câu 6: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB=3$, $AC=4$ và $AA'=2$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng A ; các điểm B, C, A' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz . Khi đó cosin góc giữa hai đường thẳng AB' và BC có dạng $\frac{a\sqrt{13}}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính tích $P = ab$.



ĐS:

G. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 5

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng có phương trình sau:

$$d_1: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -3 + 5t \end{cases}; \quad d_2: \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 6t \\ z = -3 - 10t \end{cases}; \quad d_3: \frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-2}{5}.$$

Đường thẳng nào qua $M(2;0;-3)$ và nhận $\vec{a} = (2;-3;5)$ là một vectơ chỉ phương?

A. Chỉ có d_1 . B. Chỉ có d_3 . C. d_1 và d_2 . D. d_1 và d_3 .

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;3;-1)$, $B(1;2;4)$ và ba đường thẳng có phương trình sau:

$$(I): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 5t \end{cases}; \quad (II): \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-5}; \quad (III): \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + 5t \end{cases}.$$

Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. Chỉ có (I) là phương trình của đường thẳng AB .

- B. Chỉ có (III) là phương trình của đường thẳng AB .
- C. Chỉ có (I) và (II) là phương trình của đường thẳng AB .
- D. Cả (I), (II), (III) đều là phương trình của đường thẳng AB .

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, giao điểm của hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -1 - 4t \\ z = 2 - 8t \end{cases}$ có tọa độ là:

- A. $(-3; -2; 6)$. B. $(3; 7; 18)$. C. $(5; -1; 20)$. D. $(3; -2; 1)$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và song song với trục Oy có phương trình tham số là:

- A. $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$. B. $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases}$. C. $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 + t \end{cases}$. D. $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 4t \\ z = 6 + 6t \end{cases}$ và $d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-5}$. Phương

trình đường thẳng d_3 qua $M(1; -1; 2)$ và vuông góc với cả d_1, d_2 là:

- A. $\frac{x+4}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{7}$. B. $\frac{x-1}{14} = \frac{y+1}{17} = \frac{z-2}{9}$.
C. $\frac{x-1}{14} = \frac{y+1}{9} = \frac{z-2}{3}$. D. $d_3: \frac{x-1}{7} = \frac{y+1}{-14} = \frac{z-2}{9}$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; 1)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2}$, $d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Đường thẳng Δ cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho M là trung điểm của AB có phương trình:

- A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 + t \\ z = -1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + t \\ z = -1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = -1 \end{cases}$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(3; 3; 1)$, $B(0; 2; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 7 = 0$. Đường thẳng d nằm trong (P) sao cho mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B có phương trình là:

- A. $\begin{cases} x = t \\ y = 7 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2t \\ y = 7 - 3t \\ z = t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -t \\ z = -2 - t \end{cases}$. Trong các đường thẳng sau, đường

thẳng nào vuông góc với d ?

A. $d_1: \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 + t \\ z = 5t \end{cases}$.

B. $d_2: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

C. $d_3: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-5}$.

D. $d_4: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

Câu 9: Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-3z+4=0$. Phương trình tham số của đường thẳng d nằm trong (P) , cắt và vuông góc đường thẳng Δ là:

A. $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = -3 - 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$. Phương trình chính tắc của đường

thẳng đi qua điểm $A(-4; -2; 4)$, cắt và vuông góc với d là:

A. $\frac{x-3}{-4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{4}$.

B. $\frac{x-4}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{-1}$.

C. $\frac{x-4}{-3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+4}{1}$.

D. $\frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-1}$.

Câu 11: Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+9=0$. Gọi A là giao điểm của d và (P) . Khi đó:

A. $A(0; 1; 4)$.

B. $A(0; 4; 1)$.

C. $A(0; -1; 4)$.

D. $A(0; -4; -1)$.

Câu 12: Cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P): x+y-2z+5=0$ và điểm $A(1; -1; 2)$.

Đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm MN có phương trình là:

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$.

B. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{2}$.

C. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{2}$.

D. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{2}$.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

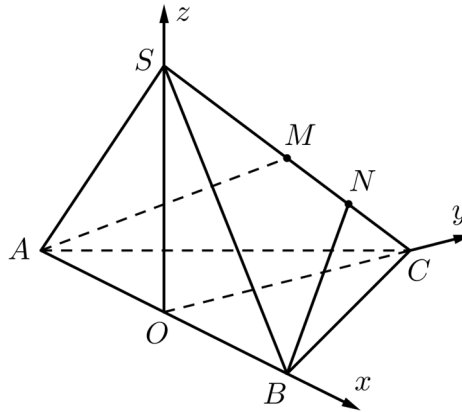
Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$, $d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+3y+2z-5=0$.

- a) Đường thẳng vuông góc với (P) có một vector chỉ phương là $\vec{u} = (1; 3; 2)$.
- b) Giao điểm của đường thẳng d_1 và mặt phẳng (P) là điểm $M(3; -2; -1)$.
- c) Giao điểm của đường thẳng d_2 và mặt phẳng (P) là điểm $N\left(\frac{18}{7}; \frac{9}{7}; -\frac{5}{7}\right)$.
- d) Đường thẳng nằm trong (P) , cắt cả d_1 và d_2 có một vector chỉ phương là $\vec{u}_1 = (39; -5; 12)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}, \Delta_2: \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = -t' \\ z = 2t' \end{cases} \quad (t, t' \in \mathbb{R})$.

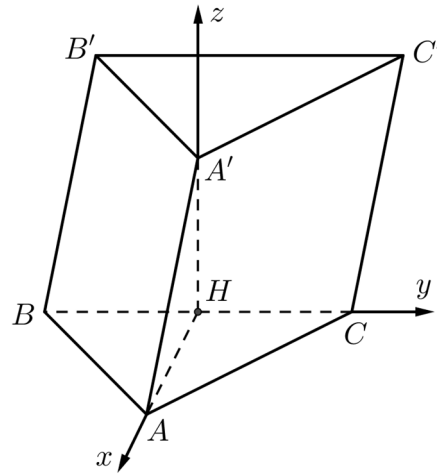
- a) Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.
- b) $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = -\frac{5}{6}$.
- c) Khoảng cách từ điểm $M(-3; -6; 6)$ đến hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là bằng nhau.
- d) Phương trình đường phân giác của góc nhọn tạo bởi Δ_1 và Δ_2 là $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-3}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a\sqrt{3}$, mặt bên SAB là tam giác cân với $\widehat{ASB} = 120^\circ$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SC và N là trung điểm của MC . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O là trung điểm AB ; các điểm B, C, S lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz .



- a) $C(0; 3a; 0)$.
- b) $\overrightarrow{AM} = \left(a\sqrt{3}; \frac{3a}{2}; \frac{a}{2}\right)$.
- c) $[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}] = \left(-\frac{3a^2}{4}; \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}; \frac{15\sqrt{3}a^2}{4}\right)$.
- d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, BN là $\frac{a\sqrt{237}}{79}$.

Câu 4: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a và hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng với H ; các điểm A, C, A' lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz .



- a) $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$.
- b) $A'\left(0; 0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right), C\left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$.
- c) $\left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AA'}\right]$ cùng hướng với vectơ có tọa độ $(1; 0; \sqrt{3})$.
- d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. Gọi I là giao điểm của d và (P) , M là điểm trên đường thẳng d sao cho $IM = 9$, tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) .

ĐS:

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm A , vuông góc với đường thẳng d và cắt trục hoành. Biết $\vec{u} = (3; b; c)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ . Tính giá trị biểu thức $S = b + c$.

ĐS:

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -3; 4)$, đường thẳng $d: \frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + z - 2 = 0$. Biết phương trình đường thẳng Δ qua M vuông góc với d và song song với (P) có dạng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+a}{b} = \frac{z-c}{d}$. Tính $S = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

ĐS:

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(1; 4; 2)$, $B(-1; 2; 4)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$.

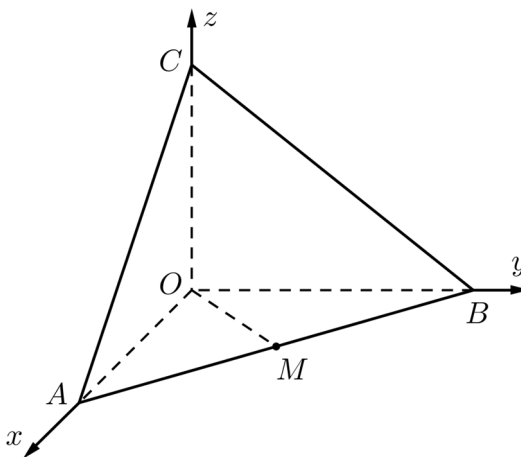
Với điểm $M \in \Delta$ thì giá trị $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất là bao nhiêu?

ĐS:

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{2}$. Biết điểm A thuộc Ox sao cho A cách đều d và (P) . Khi đó hoành độ điểm A là bao nhiêu?

ĐS:

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $O.ABC$ với 3 điểm A, B, C lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Tính góc giữa hai đường thẳng BC và OM (đơn vị: độ) biết $OA = OB = OC$.



ĐS:

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A. LÝ THUYẾT

1. Phương trình mặt cầu

Dạng chính tắc:

Phương trình mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$, bán kính R là:

$$(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Dạng khai triển:

Phương trình

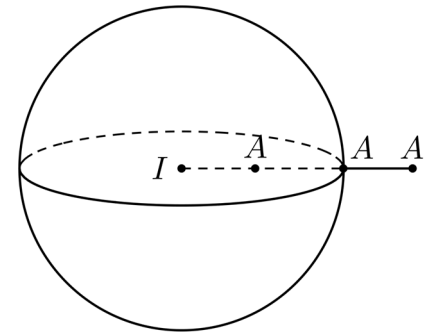
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \text{ với } a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$$

là phương trình mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

2. Vị trí tương đối giữa điểm và mặt cầu

Cho điểm A và mặt cầu $S(I; R)$. Ta có:

- Điểm A thuộc (nằm trên) mặt cầu $\Leftrightarrow IA = R$.
- Điểm A nằm trong mặt cầu $\Leftrightarrow IA < R$.
- Điểm A nằm ngoài mặt cầu $\Leftrightarrow IA > R$.



3. Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu.

Phương trình mặt phẳng tiếp xúc (tiếp diện) mặt cầu

Cho mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$. Khi đó:

- (α) và (S) không có điểm chung $\Leftrightarrow d(I, (\alpha)) > R$.
- (α) tiếp xúc với $(S) \Leftrightarrow d(I, (\alpha)) = R$.

(mặt phẳng (α) là tiếp diện của mặt cầu (S) tại H , khi đó VTPT $\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{IH}$).

Để tìm tọa độ tiếp điểm H là hình chiếu của tâm I trên (α) ta có thể thực hiện như sau:

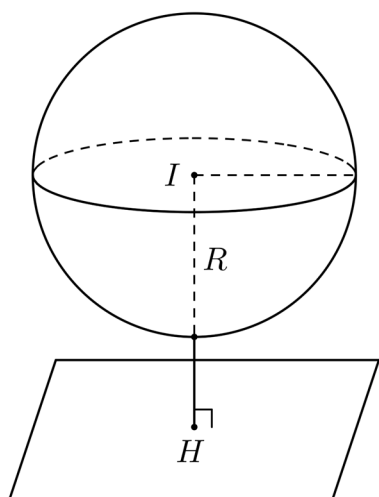
- Viết phương trình đường thẳng d đi qua tâm I của (S) và vuông góc với (α) .
- Tìm tọa độ giao điểm H của d và (α) , khi đó H chính là tiếp điểm của (S) với (α) .
- (α) cắt (S) theo một đường tròn $\Leftrightarrow d(I, (\alpha)) < R$.

Phương trình của đường tròn đó là

$$(C): \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}.$$

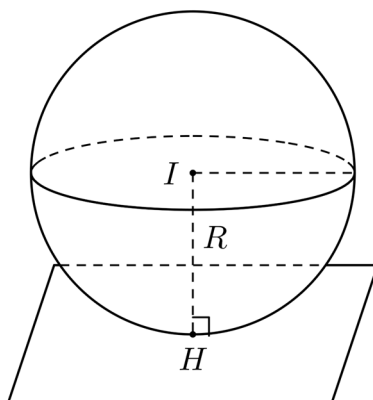
Để xác định tâm H và bán kính r của đường tròn giao tuyến ta có thể thực hiện như sau:

- Tâm H là hình chiếu vuông góc của tâm I trên (α) .
- Bán kính r của đường tròn giao tuyến là: $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$.



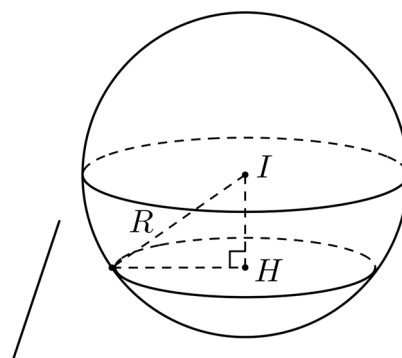
$$IH > R$$

(P) và (S) không có điểm chung



$$IH = R$$

(P) tiếp xúc (S) tại H



$$IH < R$$

(P) cắt (S) theo một đường tròn

4. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ (1) và mặt cầu (S): $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ (2).

Thay (1) vào (2) ta được phương trình (*).

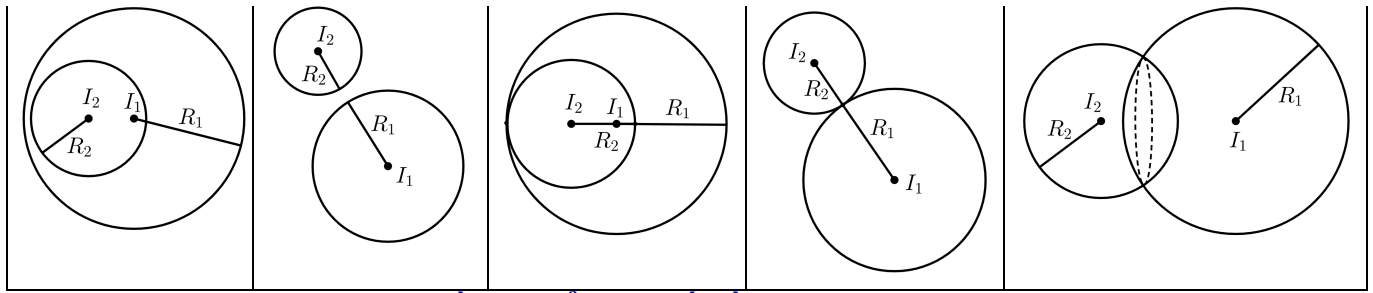
Khi đó

Điều kiện	(*) vô nghiệm Hoặc $d(I, d) > R$	(*) có đúng 1 nghiệm Hoặc $d(I, d) = R$	(*) có 2 nghiệm phân biệt Hoặc $d(I, d) < R$
Kết quả	d và (S) không có điểm chung	d tiếp xúc (S)	d cắt (S) tại 2 điểm phân biệt

5. Vị trí tương đối giữa hai mặt cầu

Cho hai mặt cầu $S_1(I_1; R_1)$ và $S_2(I_2; R_2)$. Khi đó:

$I_1 I_2 < R_1 - R_2 $	$I_1 I_2 > R_1 + R_2$	$I_1 I_2 = R_1 - R_2 $	$I_1 I_2 = R_1 + R_2$	$ R_1 - R_2 < I_1 I_2 < R_1 + R_2$
(S_1) nằm trong (S_2) hoặc ngược lại.	(S_1) không cắt (S_2) .	$(S_1), (S_2)$ tiếp xúc trong.	$(S_1), (S_2)$ tiếp xúc ngoài.	$(S_1), (S_2)$ cắt nhau theo một đường tròn.



6. Công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu bán kính R

- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$.
- Thể tích khối cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

7. Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp, khối lăng trụ

Trục của đa giác

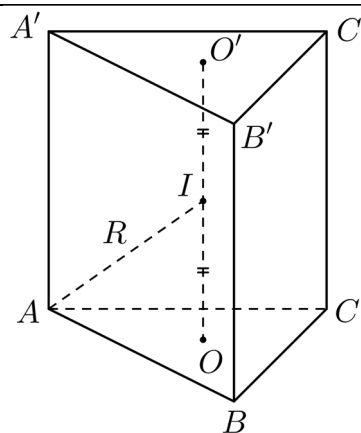
Trục của một đa giác (nếu có) là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đó. Bất kì một điểm nào nằm trên trục của đa giác thì cách đều các đỉnh của đa giác đó.

Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

SA vuông góc đáy	Hình chóp đều	Mặt bên (SAB) vuông góc đáy
- Dựng trục Ox của đáy. - Kẻ trung trực My của SA cắt Ox tại I. Khi đó: Tâm I, bán kính $R = IA$. Nhận xét: $MIOA$ là hình chữ nhật.	- Trục là SO. - Kẻ trung trực Mx của cạnh bên cắt SO tại I. Khi đó: Tâm I, bán kính $R = IS$. Nhận xét: $\triangle SMI$ đồng dạng $\triangle SOC \Rightarrow \frac{SM}{SO} = \frac{SI}{SC}$ $\Rightarrow R = SI = \frac{SM \cdot SC}{SO}$.	- Dựng trục Ox của đáy. - Dựng trục $O'y$ của mặt bên (SAB) cắt Ox tại I. Khi đó: Tâm I, bán kính $R = IA$. Nhận xét: $O'IOH$ là hình chữ nhật.

Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đứng

- Kẻ OO' là đoạn thẳng nối tâm của 2 đáy
- Gọi I là trung điểm OO' .
- Khi đó: Mặt cầu có tâm I , bán kính $R = IA$.



B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG TOÁN: NHẬN BIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU, TÌM TÂM VÀ BÁN KÍNH

Câu 1. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu, tìm tâm và bán kính của nó:

- | | |
|--|--|
| a) $(S): x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 6$ | b) $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 10y - 6z + 49 = 0$ |
| c) $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 3 = 0$ | d) $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2 + 10 = 0$ |
| e) $(S): 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 12y + 2 = 0$ | f) $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ |
| g) $(S): x^2 + (2y-1)^2 + z^2 = 4$ | h) $(S): (2x+1)^2 + (2y-1)^2 + 4z^2 = 16$ |

Câu 2. Tìm tâm và bán kính của các mặt cầu sau:

- | | |
|---|--|
| a) $(S): (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ | b) $(S): x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ |
| c) $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$ | d) $(S): (2-x)^2 + y^2 + (3+z)^2 = 5$ |
| e) $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 4y = 0$ | f) $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z + 10 = 0$ |
| g) $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$ | h) $(S): 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x - 3y + 15z - 2 = 0$ |

Câu 3. Xác định tham số m để phương trình sau là phương trình của mặt cầu, tìm tâm và bán kính của mặt cầu đó:

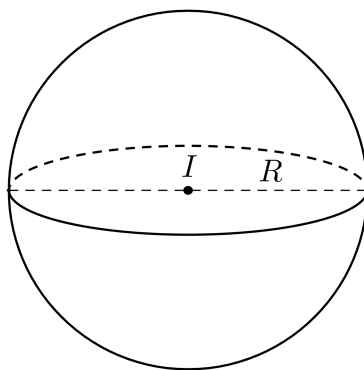
- | |
|--|
| a) $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2(3-m)x - 2(m+1)y - 2mz + 2m^2 + 7 = 0$ |
| b) $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4mx + 2my - 2mz + 9m^2 - 28 = 0$ |
| c) $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2(m+2)x - 2(m-1)z + 3m^2 - 5 = 0$ |
| d) $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my + 3m^2 - 2m = 0$ |
| e) $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2(m+2)x + 4my - 2mz + 5m^2 + 9 = 0$ |

DẠNG TOÁN: VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Để viết phương trình mặt cầu (S) ta cần xác định tâm I và bán kính R của nó. Một số dạng cơ bản:

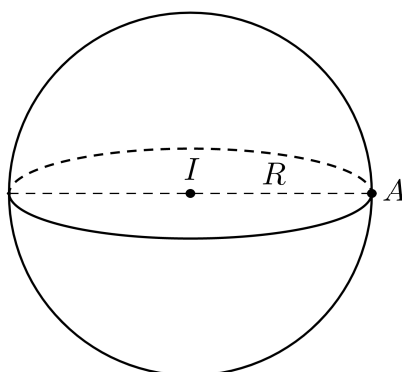
Dạng 1: (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R

Khi đó $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.



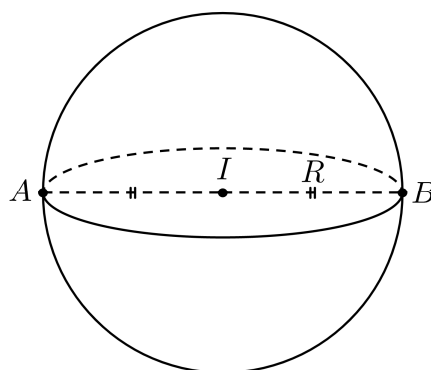
Dạng 2: (S) có tâm $I(a; b; c)$ và đi qua điểm A

- Khi đó bán kính $R = IA$.



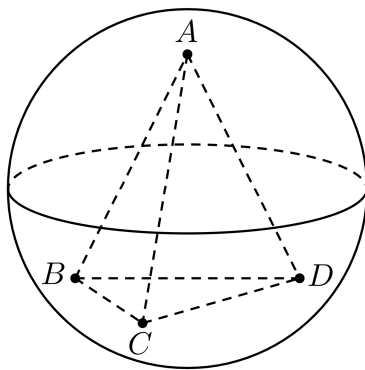
Dạng 3: (S) có đường kính là đoạn thẳng AB

- Tâm I là trung điểm của đoạn thẳng AB : $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.
- Bán kính $R = IA = IB = \frac{AB}{2}$.



Dạng 4: (S) đi qua 4 điểm A, B, C, D (còn gọi là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$)

- Gọi $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (*).
- Thay tọa độ của A, B, C, D vào (*) ta được 4 phương trình ẩn a, b, c, d .
- Giải hệ phương trình đó ta được a, b, c, d thay vào (*) ta được (S) .

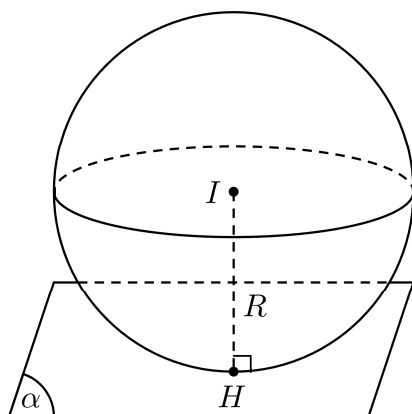


Dạng 5: (S) có tâm $I(a;b;c)$ và có vị trí tương đối với mặt cầu (S') cho trước

- Xác định tâm I' và bán kính R' của mặt cầu (S') .
- Sử dụng điều kiện vị trí tương đối của hai mặt cầu để tính bán kính R của mặt cầu (S) .

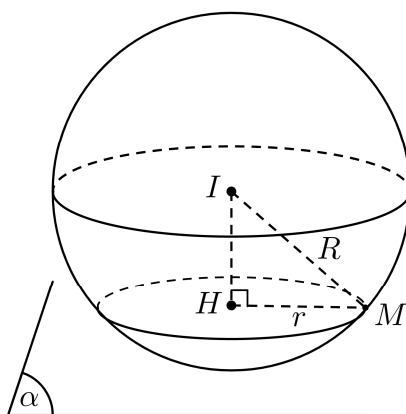
Dạng 6: (S) tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (α)

- Bán kính $R = d(I, (\alpha))$.



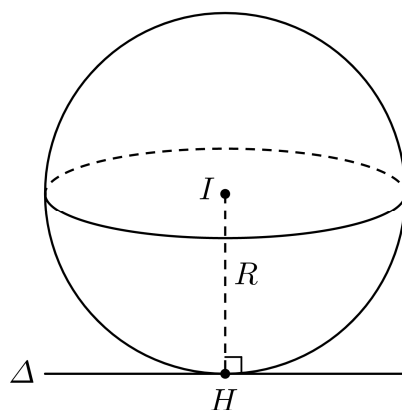
Dạng 7: (S) có tâm $I(a;b;c)$ và cắt mp (α) theo một đường tròn bán kính r

- Bán kính $R = \sqrt{d(I, (\alpha))^2 + r^2} = \sqrt{IH^2 + HM^2}$.



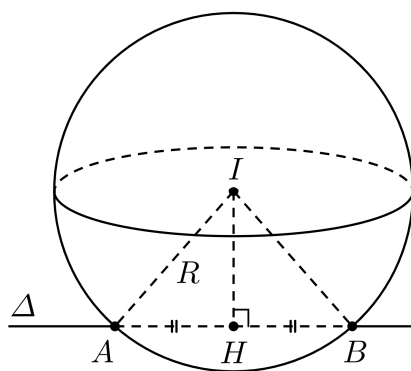
Dạng 8: (S) có tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ

- Bán kính $R = d(I, \Delta)$.



Dạng 9: (S) có tâm $I(a;b;c)$ và cắt đường thẳng Δ tại hai điểm A, B

• Bán kính $R = \sqrt{d(I, \Delta)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{IH^2 + AH^2}$.



Dạng 10: (S) có tâm I thuộc đường thẳng Δ và đi qua hai điểm A, B

- Từ $I \in \Delta$, tính tọa độ I theo tham số t .
- Từ $IA = IB$ giải phương trình (ẩn t) được tọa độ I .
- Bán kính mặt cầu $R = IA = IB$.

Dạng 11: (S) đi qua 3 điểm A, B, C và có tâm I thuộc mặt phẳng (P)

Cách 1:

- Viết phương trình mặt phẳng trung trực $(P_1), (P_2)$ của AB và AC .

• Tâm $I = (P) \cap (P_1) \cap (P_2)$. Giải hệ $\begin{cases} (P) \\ (P_1) \\ (P_2) \end{cases}$ tìm tọa độ I .

- Bán kính $R = IA$.

Cách 2:

Gọi $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (*).

- Thay tọa độ 3 điểm A, B, C vào (*) ta được 3 phương trình ẩn a, b, c, d .
- Tâm $I(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (P) ta được phương trình ẩn a, b, c, d thứ tư.
- Giải hệ phương trình đó ta được a, b, c, d thay vào (*) ta được (S) .

Câu 4. Viết phương trình mặt cầu có tâm I và bán kính R với:

a) $I(5; -3; 7), R = 2$

b) $I(-1; 2; 1), R = 3$

c) $I(0; 0; 3), R = \sqrt{5}$

d) $I(-3; 10; 2), R = 2\sqrt{3}$

Câu 5. Viết phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua điểm A với:

a) $I(0; 3; -2), A(0; 0; 0)$

b) $I(7; -1; 2), A(1; 2; 4)$

c) $I(3; 0; -2), A(-1; 2; 2)$

d) $I(6; 7; -1), A(-3; -3; 5)$

Câu 6. Viết phương trình mặt cầu có đường kính AB với:

a) $A(3; -2; 1), B(2; 1; -3)$

b) $A(-2; 1; 3), B(4; 1; 1)$

c) $A(0; 1; 0), B(-2; 5; 6)$

d) $A(-7; 1; 2), B(-1; 3; 4)$

Câu 7. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ với:

a) $A(6; -2; 3), B(0; 1; 6), C(2; 0; -1), D(4; 1; 0)$

b) $A(2; 1; 0), B(1; 1; 3), C(2; -1; 3), D(1; -1; 0)$

c) $A(1; 1; 0), B(0; 2; 1), C(1; 0; 2), D(1; 1; 1)$

d) $A(3; 3; 0), B(3; 0; 3), C(0; 3; 3), D(3; 3; 3)$

Câu 8. Viết phương trình mặt cầu:

a) (S) có tâm $I(-3; 2; 2)$ và tiếp xúc với mặt cầu $(T): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 8z + 5 = 0$

b) (S) có tâm $I(-5; 1; 1)$ và tiếp xúc với mặt cầu $(T): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$

c) (S) có tâm $I(9; 1; 6)$ và tiếp xúc ngoài với mặt cầu $(T): (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$

d) (S) có tâm $I(3; -1; 4)$ và tiếp xúc ngoài với mặt cầu $(T): (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$

Câu 9. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (α) với:

a) $I(1; 2; 3), (\alpha): x - 2y + 2z + 3 = 0$

b) $I(2; -1; 4), (\alpha): 2x - y + 2z + 5 = 0$

c) $I(-3; 0; 1), (\alpha): x + 3y - 4z - 10 = 0$

d) $I(0; 5; -2), (\alpha): 3x - 4y + 12z - 7 = 0$

Câu 10. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (α) theo đường tròn bán kính r với:

a) $I(1; 2; -1), (\alpha): x + y - z - 5 = 0, r = 3$

b) $I(2; -1; 3), (\alpha): 2x - y + 2z + 5 = 0, r = 4$

c) $I(-1; 5; 2), (\alpha): x + 3y - 2z + 7 = 0, r = 5$

d) $I(-1; 3; 2), (\alpha): 3x - 4y - 7 = 0, r = \frac{4}{5}$

Câu 11. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng Δ với:

a) $I(-1; 2; 1), \Delta: \frac{x-3}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$

b) $I(1; -2; 3), \Delta \equiv Oy$

c) $I(-3; 1; 4), \Delta: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -3 - t \end{cases}$

d) $I(0; 1; 2), \Delta$ là đường thẳng BC với $B(-1; 1; 0), C(2; -3; 1)$

Câu 12. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng Δ tại 2 điểm A, B với:

a) $I(2; 3; -1), \Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{1}, AB = 16$

b) $I(1; 0; 3), \Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$, tam giác IAB vuông tại I

c) $I(3; 6; -4), \Delta \equiv Oz, S_{\Delta IAB} = 6\sqrt{5}$

d) $I(1; 0; 0), \Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$, tam giác IAB đều

Câu 13. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng Δ và đi qua 2 điểm A, B với:

a) $\Delta \equiv Ox, A(1; 2; -1), B(2; 1; 3)$

b) $\Delta \equiv Oz, A(1; 3; 1), B(3; 2; 2)$

c) $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}, A(0; 1; 3), B(2; 2; 1)$

d) $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}, A(1; 3; 0), B(-2; 1; 1)$

Câu 14. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua ba điểm A, B, C và có tâm I thuộc mặt phẳng (P) với:

a) $A(1; 2; 0), B(-1; 1; 3), C(2; 0; -1), (P) \equiv (Oxz)$

b) $A(3; 1; 1), B(0; 1; 4), C(-1; -3; 1), (P): x + y - 2z + 4 = 0$

c) $A(2; 0; 1), B(1; 0; 0), C(1; 1; 1), (P): x + y + z - 2 = 0$

d) $A(0; 8; 0), B(4; 6; 2), C(0; 12; 4), (P) \equiv (Oyz)$

Câu 15. Viết phương trình mặt cầu (S) biết:

a) (S) đi qua $A(1; 3; 2)$, có tâm thuộc đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z}{-2}$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z - 6 = 0$

b) (S) có tâm thuộc đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ và tiếp xúc với 2 mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 2 = 0, (Q): 2x + y + 2z - 1 = 0$

c) (S) có tâm thuộc đường thẳng $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$, có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 2 = 0$ và đi qua điểm $A(1; -1; 1)$

DẠNG TOÁN: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

Câu 16. Xét vị trí tương đối giữa các điểm sau và mặt cầu (S) với:

- a) $A(2; 0; 1), (S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$
 b) $B(0; 1; -1), (S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 5 = 0$
 c) $C(-1; 1; -3), (S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 16$

Câu 17. Xét vị trí tương đối giữa mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) . Tìm bán kính r của đường tròn giao tuyến (nếu có) với:

- a) $(\alpha): x - y + 2z - 2 = 0, (S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4$
 b) $(\alpha): x - 2y + 2z + 5 = 0, (S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 8z + 13 = 0$
 c) $(\alpha): 2x + y - 2z + 10 = 0, (S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$
 d) $(\alpha): 2x - y + 2z + 5 = 0, (S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$

Câu 18. Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mặt cầu (S) . Tìm điểm chung (nếu có) của chúng:

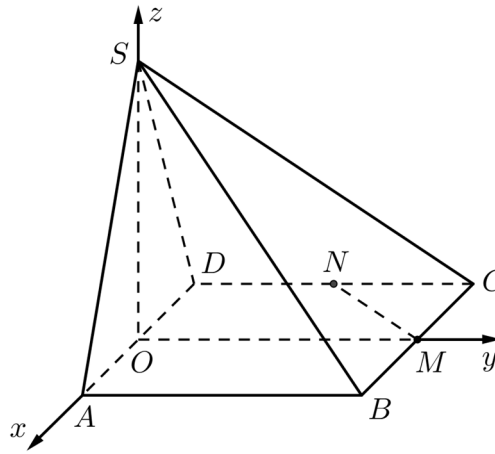
- a) $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}, (S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$
 b) $d: \begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = -1 + 5t \\ z = 9 - 4t \end{cases}, (S): (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 109$
 c) $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 4 \end{cases}, (S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 2 = 0$

Câu 19. Xét vị trí tương đối giữa hai mặt cầu:

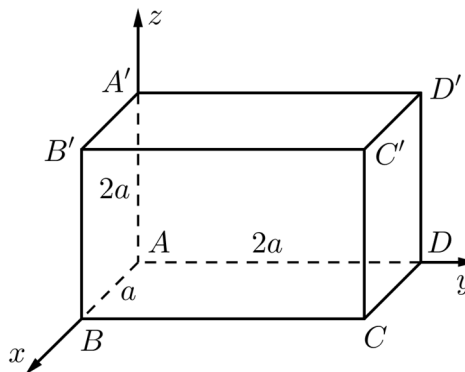
- a) $\begin{cases} (S_1): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9 \\ (S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 10y - 6z - 21 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 10z + 5 = 0 \\ (S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$
 c) $\begin{cases} (S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 2z - 4 = 0 \\ (S_2): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z + 5 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} (S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 2z - 15 = 0 \\ (S_2): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 12y - 2z + 25 = 0 \end{cases}$

DẠNG TOÁN: MẶT CẦU NGOẠI TIẾP, NỘI TIẾP HÌNH CHÓP, LĂNG TRỤ

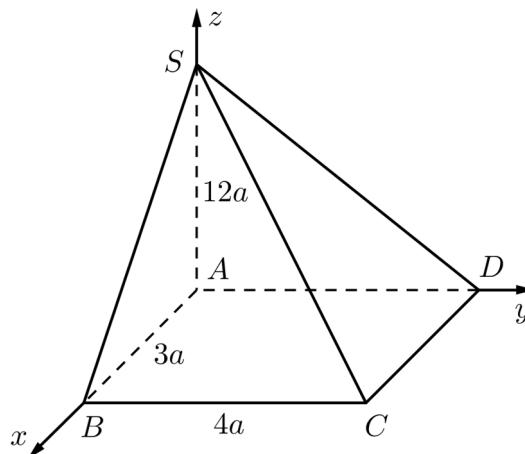
Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O là trung điểm AD ; các điểm A, M, S lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CMN$.



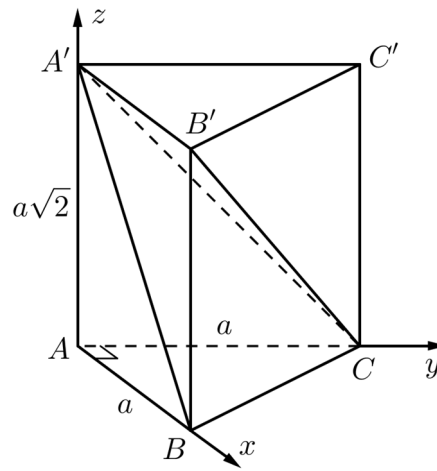
Câu 21. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$ và $AA' = 2a$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng với A ; các điểm B, D, A' lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABB'C'$.



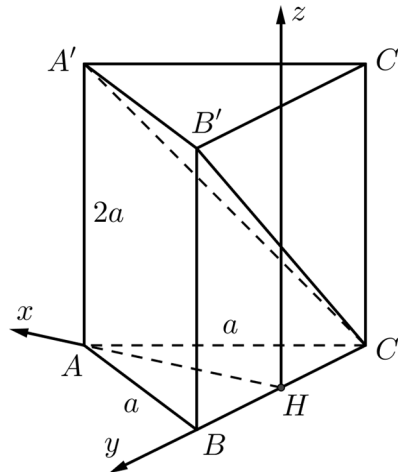
Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 3a$, $BC = 4a$, $SA = 12a$ và SA vuông góc với đáy. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng với A ; các điểm B, D, S lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.



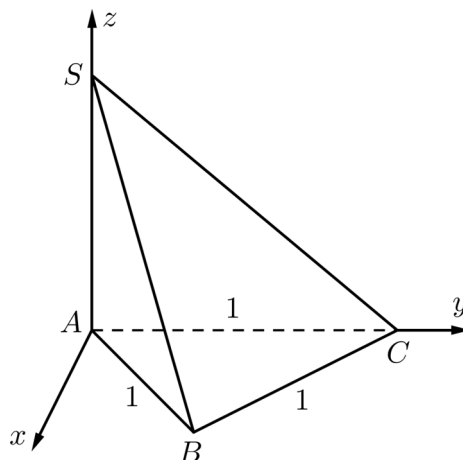
Câu 23. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AB = AC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng với A ; các điểm B, C, A' lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A'BB'C'$.



Câu 24. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $AA' = 2a$. Gọi H là trung điểm BC . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng với H ; các điểm A, B lần lượt thuộc các tia Ox, Oy và điểm A' có cao độ dương. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $AB'C'C$.

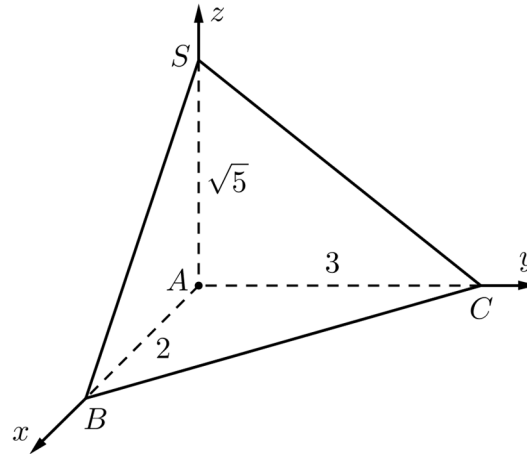


Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và đáy bằng 60° . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng với A ; các điểm C, S lần lượt thuộc các tia Oy, Oz và điểm B có hoành độ dương. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

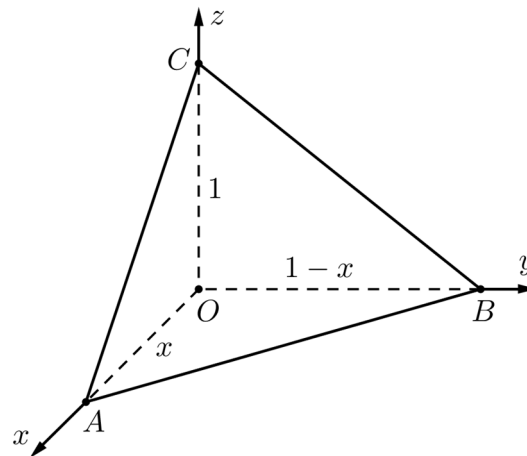


Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A , $AB = 2$, $AC = 3$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{5}$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng với A ; các điểm B, C, S lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Viết phương trình mặt cầu đi qua các đỉnh

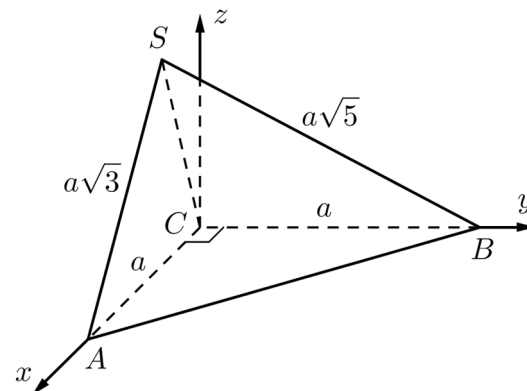
A, B, C, S .



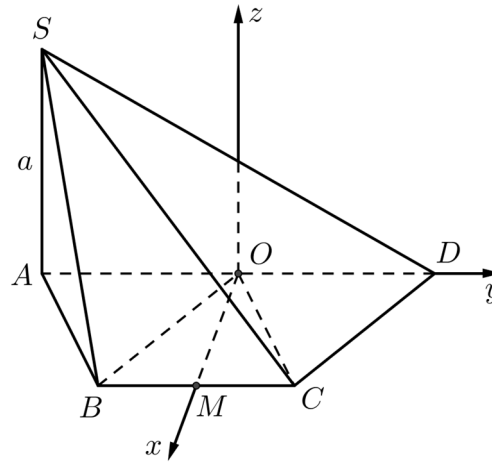
Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, gọi C là điểm cố định trên tia Oz với $OC = 1$. Các điểm A, B thay đổi trên các tia Ox, Oy sao cho $OA + OB = OC$. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có bán kính nhỏ nhất.



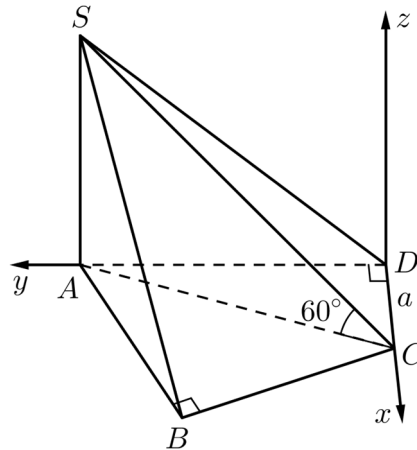
Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC vuông cân tại C , $CA = CB = a$, $SA = a\sqrt{3}$, $SB = a\sqrt{5}$ và $SC = a\sqrt{2}$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng với C ; các điểm A, B lần lượt thuộc các tia Ox, Oy và điểm S có cao độ dương. Xác định tọa độ tâm I và tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.



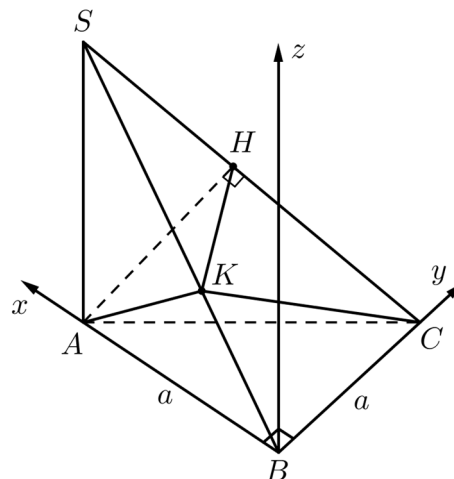
Câu 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều có diện tích bằng $9\sqrt{3}a^2$. Biết SA vuông góc với đáy ($ABCD$) và $SA = a$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O là trung điểm AD , tia Ox đi qua trung điểm M của BC , điểm D thuộc tia Oy và điểm S có cao độ dương. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.



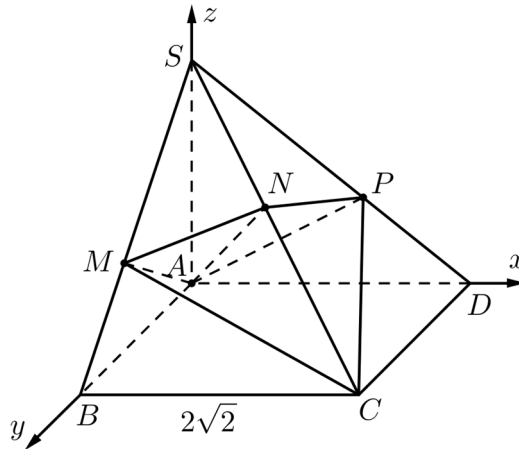
Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$, $SA \perp (ABCD)$, góc tạo bởi SC và $(ABCD)$ bằng 60° , $CD = a$ và tam giác ADC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng với D , các điểm C, A lần lượt thuộc các tia Ox, Oy và điểm S có cao độ dương. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.



Câu 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng với B ; các điểm A, C lần lượt thuộc các tia Ox, Oy và điểm S có cao độ dương. Mặt phẳng (P) đi qua A vuông góc với SC và cắt SC, SB lần lượt tại H, K . Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua 4 điểm B, C, A và H , chứng minh điểm K cũng thuộc mặt cầu (S) .



Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt các cạnh SB , SC , SD lần lượt tại các điểm M , N , P . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng với A ; các điểm D , B , S lần lượt thuộc các tia Ox , Oy , Oz . Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$.



C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 1

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tính tọa độ tâm I và bán kính R của (S) .

- A. $I(-1; 2; 1)$ và $R = 3$.
 B. $I(1; -2; -1)$ và $R = 3$.
 C. $I(-1; 2; 1)$ và $R = 9$.
 D. $I(1; -2; -1)$ và $R = 9$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu có tâm nằm trên trục Oz ?

- A. $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2 = 0$.
 B. $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 2 = 0$.
 C. $(S_3): x^2 + y^2 + z^2 + 6z + 9 = 0$.
 D. $(S_4): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 2 = 0$.

Câu 3: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu:

- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 10xy - 8y + 2z - 1 = 0$.
 B. $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2x - 6y + 4z - 1 = 0$.
 C. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x - 6y + 4z + 9 = 0$.
 D. $x^2 + (y-z)^2 - 2x - 4(y-z) - 9 = 0$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y - 2az + 6a = 0$. Nếu (S) có đường kính bằng 12 thì a nhận những giá trị nào?

- A. $\begin{cases} a = -2 \\ a = 8 \end{cases}$.
 B. $\begin{cases} a = 2 \\ a = -8 \end{cases}$.
 C. $\begin{cases} a = -2 \\ a = 4 \end{cases}$.
 D. $\begin{cases} a = 2 \\ a = -4 \end{cases}$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 4; 1)$, $B(-2; 2; -3)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là:

- A. $x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$.
 B. $x^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9$.
 C. $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 3$.
 D. $x^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$.

- Câu 6:** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua $A(0;2;0)$, $B(2;3;1)$, $C(0;3;1)$ và có tâm ở trên mặt phẳng (Oxz) . Phương trình của mặt cầu (S) là:
- A. $x^2 + (y-6)^2 + (z-4)^2 = 9$. B. $x^2 + (y-3)^2 + z^2 = 16$.
 C. $(x+2)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 16$. D. $(x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 14$.
- Câu 7:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 25$. Điểm nào sau đây nằm bên trong mặt cầu (S) ?
- A. $M(3;-2;-4)$. B. $N(0;-2;-2)$. C. $P(3;5;2)$. D. $Q(1;3;0)$.
- Câu 8:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$. Mặt phẳng (Oxy) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn. Đường tròn giao tuyến này có bán kính r bằng:
- A. $r = \sqrt{5}$. B. $r = 2$. C. $r = \sqrt{6}$. D. $r = 4$.
- Câu 9:** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có bán kính bằng 2, tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) và có tâm nằm trên tia Ox . Phương trình của mặt cầu (S) là:
- A. $(S): (x+2)^2 + y^2 + z^2 = 4$. B. $(S): x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$.
 C. $(S): (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4$. D. $(S): x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$.
- Câu 10:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 36$. Vị trí tương đối của mặt cầu (S) với mặt phẳng (Oxy) là:
- A. (Oxy) cắt (S) . B. (Oxy) không cắt (S) .
 C. (Oxy) tiếp xúc (S) . D. (Oxy) đi qua tâm (S) .
- Câu 11:** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu nào sau đây tiếp xúc với hai trục tọa độ Oy và Oz ?
- A. $(S_1): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 2$. B. $(S_2): (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$.
 C. $(S_3): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$. D. $(S_4): (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 2$.
- Câu 12:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 7 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (S) sao cho khoảng cách từ M đến trục Ox là lớn nhất.
- A. $(1;-3;3)$. B. $(1;3;-3)$. C. $(-1;-3;3)$. D. $(1;3;3)$.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

- Câu 1.** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$ và mặt cầu (S) tâm $I(1;2;-1)$, bán kính $R = 3\sqrt{2}$.
- a) Phương trình mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 18$.
 b) Điểm $M(3;-2;1)$ nằm bên trong mặt cầu.

c) Khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng d bằng $\frac{\sqrt{66}}{6}$.

d) Đường thẳng d cắt (S) tại hai điểm A, B . Khi đó diện tích tam giác IAB bằng $\frac{8\sqrt{11}}{3}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 3 = 0$.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và bán kính $R = 3$.

b) Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) lớn hơn 3.

c) Hình chiếu vuông góc của tâm I trên mặt phẳng (P) là điểm $H\left(\frac{1}{9}; \frac{26}{9}; \frac{23}{9}\right)$.

d) Gọi $M(a; b; c)$ là điểm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) là lớn nhất. Khi đó $a + b + c = 6$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0; 0; -2)$, $B(4; 0; 0)$.

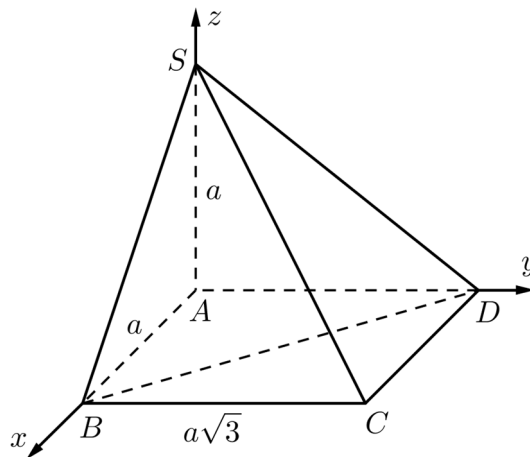
a) Phương trình mặt cầu (S_1) tâm A và đi qua B là: $x^2 + y^2 + z^2 + 4z - 16 = 0$.

b) Phương trình mặt cầu (S_2) có đường kính AB là: $(x-2)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 10$.

c) Đường thẳng AB là một tiếp tuyến của mặt cầu $(S_3): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 69$.

d) Mặt cầu (S_4) có bán kính nhỏ nhất đi qua 3 điểm O, A, B có tâm là $I(2; 0; -1)$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và SA vuông góc với $(ABCD)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng A ; các điểm B, D, S lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz .



a) Một vectơ chỉ phương của đường thẳng BD là $\vec{u} = (-1; \sqrt{3}; 0)$.

b) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SBC) là $\vec{n} = (-1; 0; 1)$.

c) Gọi α là góc giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC) . Khi đó $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

d) Phương trình mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ là:

$$(S): \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}.$$

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -4)$, $B(1; -3; 1)$, $C(2; 2; 3)$. Tính đường kính l của mặt cầu (S) đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) .

ĐS:

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, biết mặt cầu (S) đi qua bốn điểm $O(0; 0; 0)$, $A(1; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$ và $C(0; 0; 4)$. Khi đó (S) có tâm $I(a; b; c)$. Tính $S = 2a + b + c$.

ĐS:

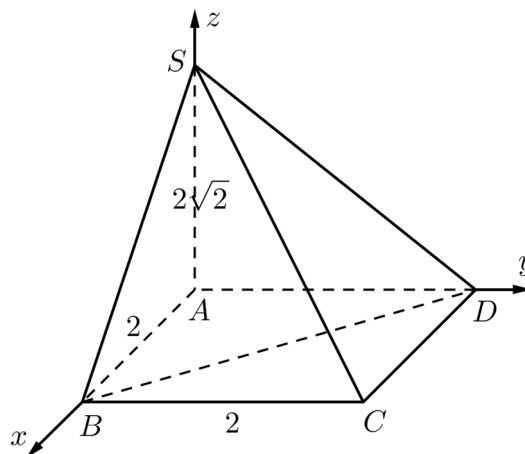
Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x + 6y + z - 3 = 0$ cắt trục Oz và đường thẳng $d: \frac{x-5}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-6}{-1}$ lần lượt tại A , B . Mặt cầu đường kính AB có thể tích là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

ĐS:

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 1; 1)$, $B(3; 0; -1)$, $C(0; 21; -19)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$. Biết $M(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho biểu thức $T = 3MA^2 + 2MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $S = a + b + c$.

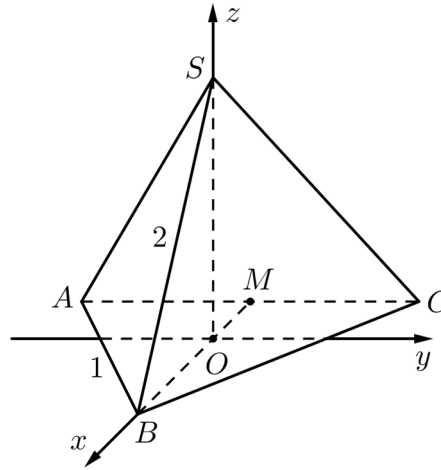
ĐS:

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 2, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2\sqrt{2}$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng A ; các điểm B, D, S lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Gọi I là tâm mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. Đường thẳng AI cắt (S) tại điểm $E(a; b; c)$ (khác A). Tính $S = a + b + c$.



ĐS:

Câu 6. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $AB = 1$, $SB = 2$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O là trọng tâm tam giác ABC ; điểm B thuộc tia Ox , điểm S thuộc tia Oz và điểm C có tung độ dương. Khi đó tọa độ tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $I(a; b; c)$. Giá trị c bằng bao nhiêu?



ĐS:

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 2

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

- Câu 1:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 2 = 0$. Tính tọa độ tâm I và bán kính R của (S) .
- A. Tâm $I(-1; 2; -3)$ và bán kính $R = 4$. B. Tâm $I(1; -2; 3)$ và bán kính $R = 4$.
 C. Tâm $I(-1; 2; -3)$ và bán kính $R = 2\sqrt{3}$. D. Tâm $I(1; -2; 3)$ và bán kính $R = 2\sqrt{3}$.
- Câu 2:** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(6; 3; -4)$ tiếp xúc với Ox có bán kính R bằng:
- A. $R = 6$. B. $R = 5$. C. $R = 4$. D. $R = 3$.
- Câu 3:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$. Trong các số dưới đây, số nào là diện tích của mặt cầu (S) ?
- A. 12π . B. 9π . C. 36π . D. 24π .
- Câu 4:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2az + 10a = 0$. Với những giá trị nào của a thì (S) có chu vi đường tròn lớn bằng 8π ?
- A. $\{1; -11\}$. B. $\{1; 10\}$. C. $\{-1; 11\}$. D. $\{-10; 2\}$.
- Câu 5:** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(-1; 4; 2)$ và có thể tích $V = 972\pi$. Khi đó phương trình của mặt cầu (S) là:
- A. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 81$. B. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 9$.
 C. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 9$. D. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 81$.
- Câu 6:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - (2m-2)x + 3my + (6m-2)z - 7 = 0$. Gọi R là bán kính của (S) , giá trị nhỏ nhất của R bằng:
- A. 7. B. $\frac{\sqrt{377}}{7}$. C. $\sqrt{377}$. D. $\frac{\sqrt{377}}{4}$.

- Câu 7:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$. Tập hợp các điểm $M(x;y;z)$ thỏa $MA^2 = MB^2 + MC^2$ là mặt cầu có bán kính là:
- A. $R = 2$. B. $R = \sqrt{2}$. C. $R = 3$. D. $R = \sqrt{3}$.
- Câu 8:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$. Điểm nào sau đây nằm ngoài mặt cầu (S) ?
- A. $M(-1;2;5)$. B. $N(0;3;2)$. C. $P(-1;6;-1)$. D. $Q(2;4;5)$.
- Câu 9:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 4$. Mặt phẳng nào sau đây cắt mặt cầu (S) ?
- A. (Oxy) . B. (Oyz) . C. (Oxz) . D. Cả A, B, C.
- Câu 10:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$ và điểm $A(4;4;0)$. Tìm tọa độ điểm B thuộc (S) sao cho tam giác OAB đều (O là gốc tọa độ).
- A. $\begin{bmatrix} B(0;-4;4) \\ B(4;0;4) \end{bmatrix}$. B. $\begin{bmatrix} B(0;4;-4) \\ B(4;0;4) \end{bmatrix}$. C. $\begin{bmatrix} B(0;-4;-4) \\ B(4;0;4) \end{bmatrix}$. D. $\begin{bmatrix} B(0;4;4) \\ B(4;0;4) \end{bmatrix}$.
- Câu 11:** Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $M(2;2;1)$, $N\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Viết phương trình mặt cầu có tâm là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác OMN và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) .
- A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$. B. $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.
C. $x^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$. D. $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.
- Câu 12:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+\sqrt{5})^2 + z^2 = m^2 + 2m + 6$. Tập các giá trị của m để mặt cầu (S) cắt trục Oz tại hai điểm phân biệt là:
- A. $m = 1$. B. $m = -3$. C. $-3 < m < 1$. D. $m < -3$ hoặc $m > 1$.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

- Câu 1.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(-2;1;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 10 = 0$.
- a) Mặt cầu (S) tâm I và tiếp xúc với (P) có phương trình là: $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9$.
b) Tất cả các mặt cầu (S) tâm I và có bán kính R nhỏ hơn 9 đều không cắt mặt phẳng (P) .
c) Tất cả các mặt cầu (S) tâm I và có bán kính R lớn hơn 9 đều cắt mặt phẳng (P) .
d) Bán kính R của mặt cầu (S) có tâm I và cắt (P) theo một đường tròn có chu vi bằng 10π là $R = \sqrt{34}$.
- Câu 2.** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - m = 0$ có tâm I , bán kính $R = 5$, điểm $A(2;3;-4)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 5 = 0$.
- a) $m = 16$.

b) Điểm A nằm bên trong mặt cầu (S) .

c) (P) cắt (S) theo một đường tròn bán kính bằng $\sqrt{6}$.

d) Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) . Khi đó $d(I, \Delta) < 6$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -2 - 4t \\ z = -1 - 4t \end{cases}$, mặt phẳng $(P): 3x - y - 3z - 1 = 0$,

mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ tiếp xúc với mặt phẳng (P) , có bán kính $R = \sqrt{19}$ và tâm I thuộc đường thẳng Δ .

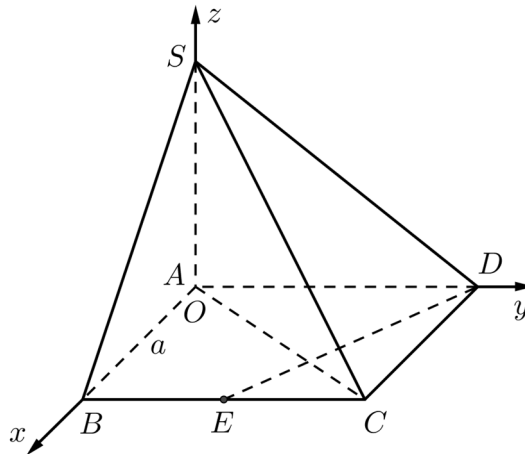
a) Có 2 tâm I thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Tâm I có tọa độ nguyên.

c) $a + b + c < 0$.

d) $d < 0$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 45° . Gọi E là trung điểm BC . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AS .



a) $E\left(\frac{a}{2}; a; 0\right), S(0; 0; a\sqrt{2})$.

b) Mặt phẳng (α) đi qua A , song song với 2 đường thẳng DE, SC có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (\sqrt{2}; 2\sqrt{2}; 3)$.

c) Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ADC$ có tâm $I\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$.

d) Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với 2 đường thẳng DE, SC có bán kính $R = \frac{a\sqrt{38}}{38}$.

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 2; -2), B(3; -3; 3)$. Điểm M tùy ý thỏa mãn

$\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x=1 \\ y=2+t \\ z=-t \end{cases}$, $\Delta_2: \begin{cases} x=4+t \\ y=3-2t \\ z=1-t \end{cases}$. Gọi (S) là mặt

cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 . Bán kính mặt cầu (S) là bao nhiêu?

ĐS:

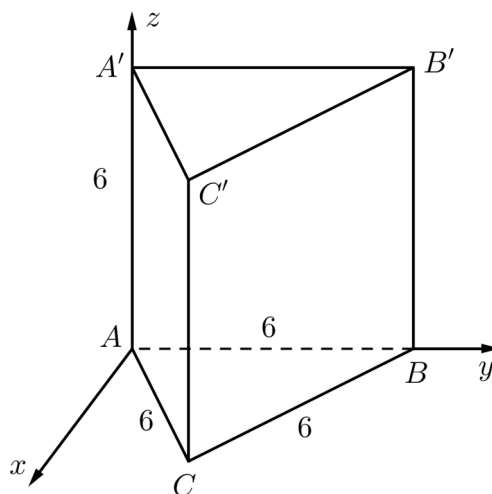
Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-3)$, $B(-3;-2;-5)$. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn $AM^2 + BM^2 = 30$ là một mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R . Tính $T = -\frac{abc}{R}$.

ĐS:

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5. Bán kính của mặt cầu (S) là bao nhiêu?

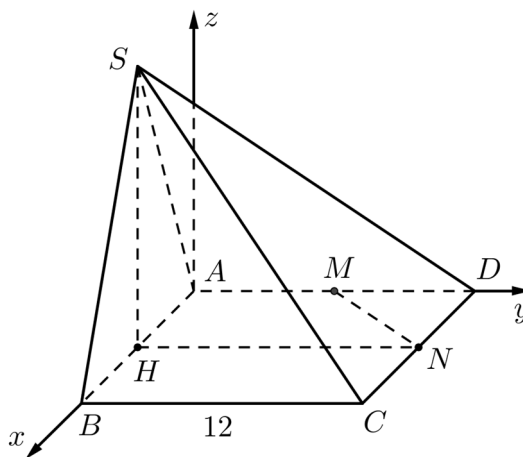
ĐS:

Câu 5. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng 6. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A , điểm B thuộc tia Oy , mặt phẳng (Oxy) trùng với (ABC) sao cho điểm C có hoành độ dương, điểm A' có cao độ dương. Khi đó tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ trên có tọa độ là $I(a;b;c)$. Tính $S = a+b+c$.



ĐS:

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=6$, $AD=12$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng A ; các điểm B, D lần lượt thuộc các tia Ox, Oy và điểm S có cao độ dương. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD, DC . Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.MND$.



ĐS:

E. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 3

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 12y + 2 = 0$ có bán kính bằng:

- A. $\frac{\sqrt{7}}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{21}}{3}$. D. $\sqrt{\frac{13}{3}}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x+y)^2 = 2xy - z^2 + 1 - 4x$ có tâm là:

- A. $I(2;0;0)$. B. $I(4;0;0)$. C. $I(-4;0;0)$. D. $I(-2;0;0)$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu?

- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$. B. $x^2 + y^2 - z^2 + 2x - y + 1 = 0$.
C. $2x^2 + 2y^2 = (x+y)^2 - z^2 + 2x - 1$. D. $(x+y)^2 = 2xy - z^2 - 1$.

Câu 4: Cho phương trình $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2(3-m)x - 2(m+1)y - 2mz + 2m^2 + 7 = 0$. Tìm tất cả giá trị của m để (S) là phương trình của một mặt cầu.

- A. $m = 1 \vee m = 3$. B. $1 \leq m \leq 3$. C. $m < 1 \vee m > 3$. D. $1 < m < 3$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-3)$ và đi qua $A(1;0;4)$.

- A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = \sqrt{53}$. B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 53$.
C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 53$. D. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 53$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;-2;5)$, $N(-1;6;-3)$. Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu có đường kính MN ?

- A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 36$. B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 6$.
C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 6$. D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 36$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt cầu (S) đi qua bốn điểm $M(2;2;2)$, $N(4;0;2)$, $P(4;2;0)$ và $Q(4;2;2)$ thì tâm I của (S) có tọa độ là:

- A. $(-1; -1; 0)$. B. $(3; 1; 1)$. C. $(1; 1; 1)$. D. $(1; 2; 1)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu có tâm $I(1; 2; 3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxz) là:

- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 10 = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 10 = 0$.
C. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z + 10 = 0$. D. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z - 10 = 0$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 3; 1)$ và $B(3; 2; 2)$. Mặt cầu đi qua hai điểm A, B và tâm thuộc trục Oz có đường kính là:

- A. $2\sqrt{6}$. B. $\sqrt{14}$. C. $2\sqrt{10}$. D. $2\sqrt{14}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) đi qua ba điểm $A(1; -2; 4)$, $B(1; 3; -1)$, $C(2; -2; -3)$ và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) là:

- A. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 21 = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + 3z - 21 = 0$.
C. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 21 = 0$. D. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 21 = 0$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu có tâm $I(4; 6; -1)$ và cắt trục Ox tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông là:

- A. $(x-4)^2 + (y-6)^2 + (z+1)^2 = 26$. B. $(x-4)^2 + (y-6)^2 + (z+1)^2 = 74$.
C. $(x-4)^2 + (y-6)^2 + (z+1)^2 = 34$. D. $(x-4)^2 + (y-6)^2 + (z+1)^2 = 104$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu có tâm $I(3; 6; -4)$ và cắt trục Oz tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác IAB bằng $6\sqrt{5}$ là:

- A. $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z+4)^2 = 54$. B. $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z+4)^2 = 45$.
C. $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z+4)^2 = 36$. D. $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z+4)^2 = 49$.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z = 0$ và điểm $M(0; 1; 0)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt (S) theo đường tròn (C) có chu vi nhỏ nhất.

- a) Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$, bán kính $R = \sqrt{6}$.
b) Phương trình mặt phẳng $(P): x - y + z + 1 = 0$.
c) Chu vi của đường tròn (C) bằng $\pi\sqrt{3}$.
d) Gọi $N(x_0; y_0; z_0)$ là điểm thuộc đường tròn (C) sao cho $ON = \sqrt{6}$. Khi đó $y_0 = 2$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1; 0; -1)$ là tâm của mặt cầu (S) và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 6$.

- a) Khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng d bằng 1.
b) Mặt cầu (S) có bán kính $R = \sqrt{10}$.

c) Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và đi qua gốc tọa độ O cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ hơn 3.

d) Không có mặt phẳng (α) nào chứa đường thẳng d thỏa $d(I, (\alpha)) > 1$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 10 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$ cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn (C) .

a) Gọi V_1 là thể tích khối cầu (S) . Khi đó $V_1 = \frac{500\pi}{3}$.

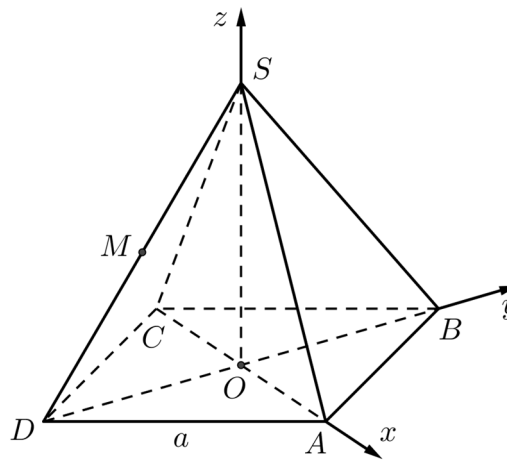
b) Gọi Δ là đường thẳng đi qua tâm I của mặt cầu (S) và vuông góc với mặt phẳng (P) .

Phương trình đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{-2}$.

c) Bán kính của đường tròn (C) là $r = 4$.

d) Gọi V_2 là thể tích khối nón (N) có đỉnh là giao điểm (S) và Δ , đáy là đường tròn (C) , biết chiều cao khối nón (N) lớn hơn bán kính của khối cầu (S) . Khi đó tỉ số $\frac{V_1}{V_2} = \frac{125}{96}$.

Câu 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , mặt bên tạo với đáy góc α . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O là tâm hình vuông $ABCD$; các điểm A, B, S lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz .



a) $A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$ và $S\left(0; 0; \frac{a}{2} \tan \alpha\right)$.

b) Mặt cầu (S) tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (SAB) có bán kính $R = \frac{a}{2} \sin \alpha$.

c) Để O trùng với tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ thì góc $\alpha = 45^\circ$.

d) Gọi M là trung điểm SD . Khi đó điểm C nằm trong mặt cầu đường kính MB .

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, gọi $I(a; b; c)$ là tâm mặt cầu đi qua điểm $A(1; -1; 4)$ và tiếp xúc với tất cả các mặt phẳng tọa độ. Tính $P = a - b + c$.

ĐS:

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng $d: \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=t \end{cases}$, $d': \begin{cases} x=2 \\ y=t' \\ z=1+t' \end{cases}$ và $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.

Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc Δ và tiếp xúc với hai đường thẳng d, d' . Bán kính của (S) là bao nhiêu?

ĐS:

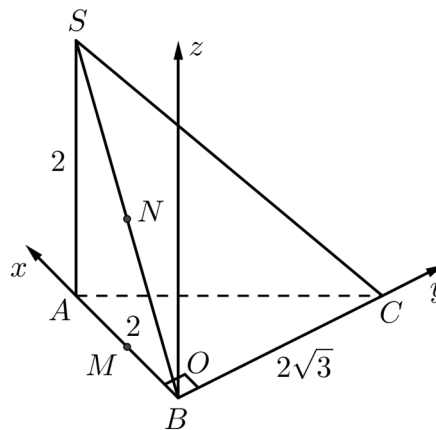
Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(1;2;-2)$. Mặt phẳng (α) đi qua H và cắt các trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC . Mặt cầu tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng (α) có bán kính R bằng bao nhiêu?

ĐS:

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y + z = 0$ và $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z = 0$ cắt nhau theo một đường tròn (C) . Biết (C) nằm trong mặt phẳng $(P): ax + by + 2z + d = 0$. Tính $S = a^2 + b^2 + d$.

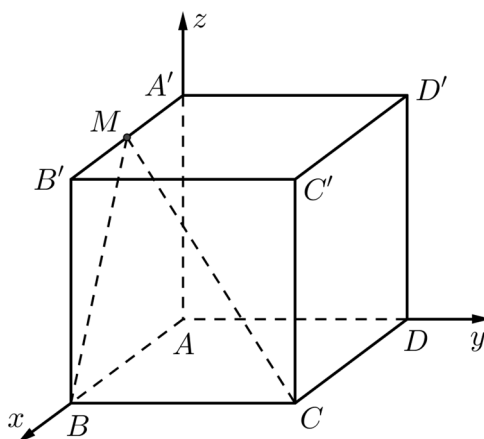
ĐS:

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B , $AB = 2$, $BC = 2\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng B ; các điểm A, C lần lượt thuộc các tia Ox, Oy và điểm S có cao độ dương. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, SB . Biết đường thẳng MN cắt mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ tại 2 điểm E, F . Tính độ dài EF .



ĐS:

Câu 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 64. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng A ; các điểm B, D, A' lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương đã cho đến mặt phẳng (MBC) với M là trung điểm $A'B'$ có giá trị bằng $\frac{a\sqrt{5}}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $S = a^2 + b^2$.



ĐS:

F. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

- Câu 1:** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(-1;2;-3)$ và đi qua điểm $A(2;0;0)$ có phương trình:
- A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 22$. B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 11$.
 C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 22$. D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 22$.
- Câu 2:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-3)$ và $B(3;2;1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là:
- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 6 = 0$. B. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z = 0$.
 C. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y + z - 6 = 0$. D. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z = 0$.
- Câu 3:** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I(2;4;6)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) có phương trình:
- A. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 16$. B. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 36$.
 C. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 4$. D. $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 20$.
- Câu 4:** Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu có tâm $I(3;6;-4)$ và tiếp xúc với trục Oz là:
- A. $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z+4)^2 = 54$. B. $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z+4)^2 = 45$.
 C. $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z+4)^2 = 36$. D. $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z+4)^2 = 16$.
- Câu 5:** Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S) biết (S) có tâm $I(3;-2;0)$ và (S) cắt trục Oy tại hai điểm A, B với $AB = 8$.
- A. $(x-3)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 68$. B. $(x-3)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 64$.
 C. $(x-3)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 73$. D. $(x-3)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 25$.
- Câu 6:** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$. Điểm nào trong các điểm $A(1;1;5)$, $B(1;-2;2)$, $C(1;2;3)$ thuộc mặt cầu trên?

- A. A và B . B. Chỉ A . C. Chỉ B . D. B và C .

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - m = 0$ có bán kính $R = 5$. Tìm giá trị của m .

- A. $m = -16$. B. $m = 16$. C. $m = 4$. D. $m = -4$.

Câu 8: Tìm t để $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2(2 - \ln t)x + 4 \ln t \cdot y + 2(\ln t + 1)z + 5 \ln^2 t + 8 = 0$ là phương trình mặt cầu.

- A. $t < \frac{1}{e} \vee t > 3e$. B. $\frac{1}{e} < t < 3e$. C. $e < t < e^3$. D. $0 < t < \frac{1}{e} \vee t > e^3$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 0)$, $B(3; -1; 1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm A và bán kính AB .

- A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 9 = 0$. B. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 14$.
C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 14$. D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 9 = 0$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình của mặt cầu (S) biết (S) tiếp xúc với mặt phẳng tọa độ (Oxz) tại điểm $M(-2; 0; 1)$ và (S) đi qua điểm $A(2; 2; 1)$.

- A. $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 20$. B. $(x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 20$.
C. $(x+2)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2 = 25$. D. $(x+2)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2 = 5$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+5)^2 = 16$ và điểm $A(1; 2; -1)$. Điểm B thuộc mặt cầu sao cho AB có độ dài lớn nhất. Tọa độ điểm B là:

- A. $(-3; -6; 11)$. B. $(1; 2; -9)$. C. $(-1; -2; 1)$. D. $(1; 2; 9)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; 1; 9)$, $N(1; 4; 0)$. Mặt cầu (S) đi qua điểm M và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại điểm N có phương trình là:

- A. $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 5$. B. $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 25$.
C. $(x+1)^2 + (y+4)^2 + (z+5)^2 = 25$. D. $(x+1)^2 + (y+4)^2 + (z+5)^2 = 5$.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1; 3; -2)$, $B(-3; 7; -18)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 1 = 0$.

- a) Hai điểm A, B nằm về cùng một phía so với mặt phẳng (P) .
b) Mặt cầu đường kính AB không cắt mặt phẳng (P) .
c) Góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (P) nhỏ hơn 30° .
d) Gọi điểm $M(a; b; c)$ thuộc (P) sao cho mặt phẳng (ABM) vuông góc với mặt phẳng (P) và $MA^2 + MB^2 = 246$. Khi đó $a + b + c = -1$.

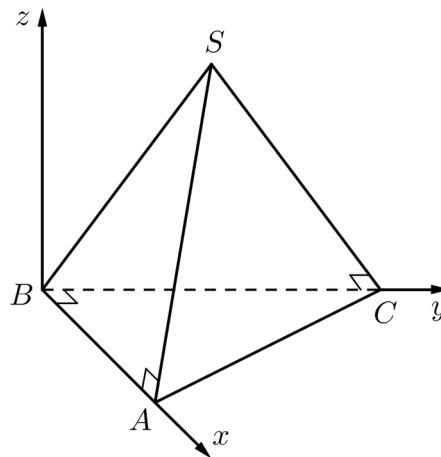
Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y - 2z - 6 = 0$ và hai mặt phẳng $(P): y = m$ và $(Q): x + z - 3 = 0$.

- a) Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -5; 1)$ và bán kính $R = 36$.
- b) Mặt cầu (S) không có điểm chung với mặt phẳng (Q) .
- c) Để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn bán kính bằng 2 thì $d(I, (P)) = 4\sqrt{2}$.
- d) Khi giao tuyến Δ của (P) và (Q) tiếp xúc với mặt cầu (S) , tích tất cả các giá trị của m nhận được là -11 .

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho các mặt phẳng $(P): x + y - 2z - 6 = 0$, $(P'): -x - y + 2z + 2 = 0$ và điểm $I(1; 0; -3)$.

- a) Mặt cầu có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) có bán kính $R = \sqrt{6}$.
- b) Mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng (P) và tiếp xúc với (P') có bán kính $R = \frac{4\sqrt{6}}{3}$.
- c) Tập hợp tâm các mặt cầu tiếp xúc với cả (P) và (P') là mặt phẳng $x + y - 2z - 4 = 0$.
- d) Mặt cầu có tâm I và đi qua gốc tọa độ O cắt hai mặt phẳng (P) và (P') theo giao tuyến là các đường tròn có bán kính lần lượt là r_1, r_2 . Khi đó $\frac{r_1}{r_2} = \frac{59}{35}$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = 2a$. Biết SA vuông góc với AB , SC vuông góc với BC và góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 60° . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng B ; các điểm A, C lần lượt thuộc các tia Ox, Oy và điểm S có tọa độ là $S(x_0; y_0; z_0)$ với $z_0 > 0$.



- a) Từ $SA \perp AB$ suy ra $x_0 = a$.
- b) Từ $SC \perp BC$ suy ra $y_0 = 2a$.
- c) Tọa độ điểm $S(a; 2a; a\sqrt{3})$.
- d) Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $V = \frac{8\pi a^3}{3}$.

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho các mặt phẳng $(P): x - y + 2z + 1 = 0$, $(Q): 2x + y + z - 1 = 0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc trục hoành, đồng thời (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2 và (S) cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng r . Xác định r sao cho chỉ có đúng một mặt cầu (S) thỏa yêu cầu.

ĐS:

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;2)$, $B(-1;0;4)$, $C(0;-1;3)$ và điểm M thuộc mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. Khi biểu thức $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì độ dài đoạn AM bằng bao nhiêu?

ĐS:

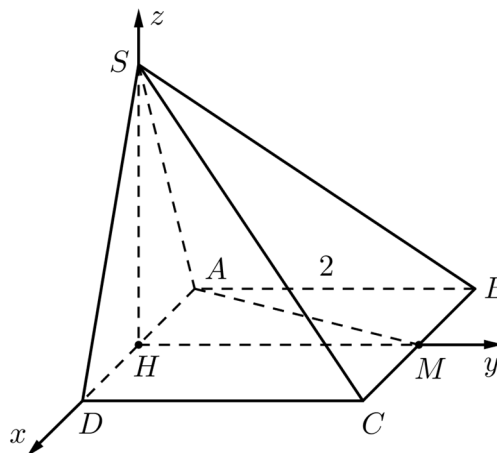
Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, gọi (S) là mặt cầu có tâm I thuộc đường thẳng $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{4}$ và đi qua điểm $M(0;3;9)$. Biết điểm I có hoành độ là số nguyên và cách đều hai mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 2z + 2 = 0$, $(\beta): 3x - 2 = 0$. Bán kính R của (S) là bao nhiêu?

ĐS:

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{3}$ và $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-9}{3}$. Biết mặt cầu (S) có đường kính là đoạn thẳng vuông góc chung của d_1 và d_2 có tâm $I(a;b;c)$. Tính $S = a + b + c$.

ĐS:

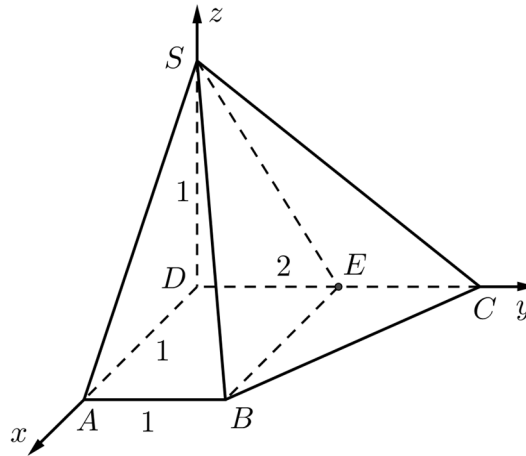
Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2$, $BC = 1$, hình chiếu của S lên $(ABCD)$ là trung điểm H của AD , $SH = \frac{\sqrt{3}}{2}$, M là trung điểm BC . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng H , các điểm D, M, S lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho và (S') là mặt cầu đường kính AM . Khi đó (S) và (S') cắt nhau theo một đường tròn (C) có bán kính r bằng bao nhiêu?



ĐS:

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D , $AB = AD = 1$, $CD = 2$. Cạnh bên SD vuông góc với mặt đáy và $SD = 1$. Gọi E là trung điểm CD . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$

sao cho O trùng D , các điểm A, C, S lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Xác định bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCE$.



ĐS:

G. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 5

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 10y + 3z + 1 = 0$ đi qua điểm:

- A. $(2; 1; 9)$. B. $(3; -2; -4)$. C. $(4; -1; 0)$. D. $(-1; 3; -1)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, bán kính mặt cầu đi qua bốn điểm $M(1; 0; 1)$, $N(1; 0; 0)$, $P(2; 1; 0)$ và $Q(1; 1; 1)$ bằng:

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. 1. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) tâm $I(3; -3; 1)$ và đi qua $A(5; -2; 1)$ có phương trình:

- A. $(x-5)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 5$. B. $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 5$.
C. $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = \sqrt{5}$. D. $(x-5)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = \sqrt{5}$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(1; -2; 3)$ và tiếp xúc với trục Oy là:

- A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10$. B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.
C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 8$. D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$. Phương trình mặt cầu nào sau đây là phương trình của mặt cầu đối xứng với mặt cầu (S) qua mặt phẳng (Oxy) ?

- A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$. B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$.
C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 9$. D. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 9$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 2)$ và $D(2; 2; 2)$. Tìm tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

- A. $I(-1; -1; -1)$. B. $I(1; -1; 1)$. C. $I(1; 1; 1)$. D. $I(1; 1; -1)$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 2; 1)$ và $B(0; 1; 1)$. Mặt cầu đi qua hai điểm A, B và có tâm thuộc trục hoành có đường kính là:

- A. $2\sqrt{5}$. B. $\sqrt{6}$. C. $2\sqrt{6}$. D. $\sqrt{5}$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu có tâm $I(\sqrt{3}; -\sqrt{3}; 0)$ và cắt trục Oz tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB đều là:

- A. $(x - \sqrt{3})^2 + (y + \sqrt{3})^2 + z^2 = 8$. B. $(x - \sqrt{3})^2 + (y + \sqrt{3})^2 + z^2 = 9$.
C. $(x + \sqrt{3})^2 + (y - \sqrt{3})^2 + z^2 = 9$. D. $(x + \sqrt{3})^2 + (y - \sqrt{3})^2 + z^2 = 8$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, để $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 2(m-2)y - 2(m+3)z + 8m + 37 = 0$ là phương trình mặt cầu thì giá trị của m thỏa:

- A. $m < -2 \vee m > 4$. B. $m < -4 \vee m > 2$.
C. $m < -4 \vee m > -2$. D. $m \leq -2 \vee m \geq 4$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(2; 1; -1)$ và cắt trục Ox tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông. Điểm nào sau đây thuộc mặt cầu (S) ?

- A. $(2; 1; 1)$. B. $(2; 1; 0)$. C. $(2; 0; 0)$. D. $(1; 0; 0)$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$ cắt mặt phẳng (Oxy) theo một đường tròn có chu vi bằng:

- A. $2\sqrt{7}\pi$. B. $\sqrt{7}\pi$. C. 7π . D. 14π .

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, biết mặt cầu (S) có tâm $I(-1; -4; 3)$ và cắt mặt phẳng tọa độ (Oxz) theo một đường tròn có diện tích bằng 9π . Khi đó phương trình của (S) là:

- A. $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z+3)^2 = 16$. B. $(x+1)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 9$.
C. $(x+1)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 25$. D. $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z+3)^2 = 25$.

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$ và đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - 2z - 4 = 0$ và $(\beta): 2x - 2y - z + 1 = 0$.

a) $m < 13$.

b) Đường thẳng Δ có phương trình tham số:
$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = t \\ z = -3 + 2t \end{cases}.$$

c) $d(I, \Delta) = 4$.

d) Đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $AB = 8$ khi $m = 12$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng

$$d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}.$$

a) (S) có tâm $I(1; -1; 0)$, bán kính $R = 1$.

b) Gọi K là điểm trên d sao cho khoảng cách từ I đến K là ngắn nhất. Khi đó tung độ của điểm K là 2.

c) Mặt cầu (S') có tâm thuộc d , tiếp xúc với (S) có bán kính nhỏ nhất bằng $\sqrt{6} - 1$.

d) Hai mặt phẳng (P) , (P') chứa d và tiếp xúc với (S) tại T và T' . Tọa độ trung điểm H của TT' là $H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 8$ và điểm $M(-1; 1; 2)$.

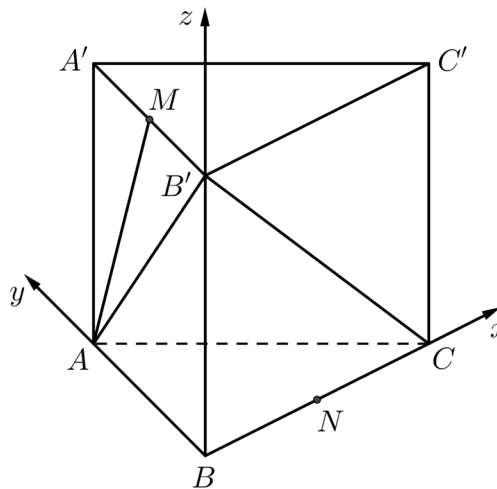
a) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; -1)$ và bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

b) Mặt cầu (S') tâm M , tiếp xúc trong với mặt cầu (S) có bán kính là $R' = \sqrt{22} - 2\sqrt{2}$.

c) Đường thẳng OM cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm phân biệt.

d) Hai đường thẳng d_1, d_2 đi qua M và tiếp xúc mặt cầu (S) lần lượt tại A, B . Biết góc giữa d_1 và d_2 bằng α với $\cos \alpha = \frac{3}{4}$. Khi đó $AB = \sqrt{11}$.

Câu 4. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BC = 2AB$, $AB \perp BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ bằng $\frac{2a}{\sqrt{7}}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C)$ và $(BCC'B')$ bằng 60° . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng B ; các điểm C, A, B' lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Đặt $AB = x$ và $BB' = y$ ($x, y > 0$).



a) $[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}] = \left(\frac{xy}{2}; -2xy; x^2\right).$

b) $x = 2a, y = \frac{4a}{11}.$

c) Thể tích khối chóp $M.ABC$ bằng $\frac{8\sqrt{11}a^3}{33}$.

d) Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $B'.ANC$ là $R = 3a\sqrt{\frac{31}{11}}$.

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 1$, mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$. Gọi (C) là đường tròn giao tuyến của (P) và (S) . Mặt cầu (S') chứa đường tròn (C) và qua điểm $A(1;1;1)$ có tâm là $I(a;b;c)$. Tính $S = a + b + c$.

ĐS:

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, xét đường thẳng d xác định bởi $\begin{cases} x=1 \\ y+z=2 \end{cases}$ và đường thẳng d' xác định bởi $\begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases}$. Tính bán kính nhỏ nhất R của mặt cầu tiếp xúc cả hai đường thẳng d và d' .

ĐS:

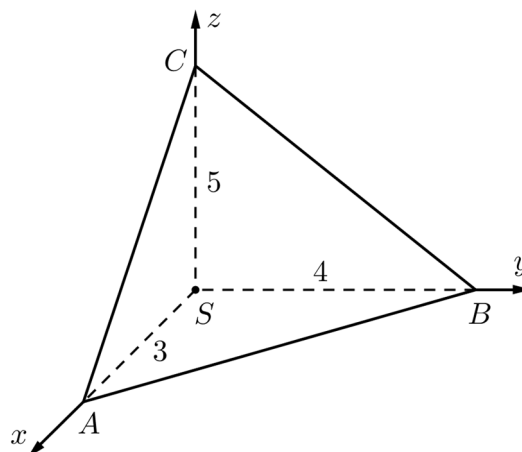
Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;-4;5)$. Bán kính R của mặt cầu tâm A và cắt trục Oz tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông là bao nhiêu?

ĐS:

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 9 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$. Tọa độ điểm M nằm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất có dạng $M(a;b;c)$. Tính giá trị biểu thức $T = 27abc$.

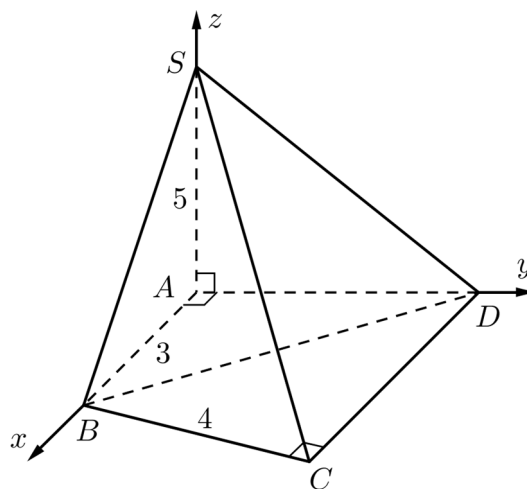
ĐS:

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3, SB = 4, SC = 5$ và SA, SB, SC đôi một vuông góc. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng với S ; các điểm A, B, C lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$. Tính khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác SBC đến tâm I của mặt cầu (S) .



ĐS:

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AB = 3$, $BC = 4$, $SA = 5$, $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 90^\circ$. Biết SA vuông góc với đáy và diện tích tứ giác $ABCD$ bằng 12. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O trùng với A ; các điểm B, D, S lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz . Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.



ĐS:

ĐÁP ÁN**BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG****C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 1****Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn**

1.D	2.A	3.C	4.A	5.A	6.B	7.C	8.C	9.A	10.B
11.D	12.A								

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4
a)	S	S	Đ	S
b)	S	Đ	Đ	Đ
c)	Đ	S	S	Đ
d)	S	Đ	S	Đ

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
-3	1296	15	28	2,06	0,83

1. HD: $(P): 3x + 2y + z - 14 = 0$; $N(5; -3; 5)$; $b = -3$.

2. HD: $V_{\min} = \frac{81}{16}$; $a = 81$, $b = 16$; $P = 1296$.

3. HD: $(Q): 2x + 2y + 3z - 7 = 0$; $a = 2$, $b = 2$, $c = 3$; $S = 15$.

4. HD: $(P): x + 2y - z - 2 = 0$; $b = 2$, $c = -1$, $d = -2$; $S = 28$.

5. HD: $(BCD): 4x + 3y + 3z - 12 = 0$; $d(A, (BCD)) = \frac{12}{\sqrt{34}} \approx 2,06$.

6. HD: $(SBC): 3x + 2z - 6 = 0$, $M\left(0; 1; \frac{3}{2}\right)$; $d(M, (SBC)) = \frac{3\sqrt{13}}{13} \approx 0,83$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 2

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

1.B	2.A	3.A	4.C	5.A	6.C	7.A	8.C	9.A	10.B
11.C	12.B								

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4
a)	S	Đ	S	S
b)	Đ	Đ	Đ	Đ
c)	Đ	Đ	Đ	S
d)	Đ	Đ	S	Đ

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
-12	0,5	-32	5	0,77	5,67

1. HD: $a = 6, b = 27, c = -45; S = a + b + c = -12$.

2. HD: $b = c = \frac{1}{2}; S = \frac{1}{2} = 0,5$.

3. HD: $(P): -2x + y + 2z + 8 = 0; a = -2, c = 2, d = 8; T = -32$.

4. HD: Đề ý D, A, B thẳng hàng. Có 5 mặt phẳng thỏa mãn là $(OAB), (OBC), (OAC), (ABC)$ và (OCD) .

5. HD: $\overrightarrow{n_{(SBC)}} = (1; 1; 1); \overrightarrow{n_{(SCD)}} = (2; 0; 1); \cos((SBC), (SCD)) = \frac{\sqrt{15}}{5} \approx 0,77$.

6. HD: Gọi $F = AN \cap BC, E = MF \cap SC$. Khi đó E là trọng tâm $\triangle SBF$. Suy ra $E\left(2; 2; \frac{5}{3}\right)$.

$a = 2, b = 2, c = \frac{5}{3}; P = \frac{17}{3} \approx 5,67$.

E. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 3

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

1.C	2.A	3.B	4.D	5.C	6.A	7.B	8.B	9.C	10.A
11.A	12.A								

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4
a)	Đ	S	Đ	Đ
b)	S	Đ	S	Đ
c)	Đ	S	Đ	S
d)	Đ	Đ	Đ	S

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
793	4	18	-3	0,89	0,25

1. HD: $V = \frac{27}{8}$; $a = 27$, $b = 8$; $S = 793$.

2. HD: $(P): x + y - \sqrt{2}z - 1 = 0$; $a = 1$, $b = 1$, $c = -\sqrt{2}$; $S = 4$.

3. HD: BĐT Cauchy cho 3 số. Tứ diện $OABC$ có thể tích nhỏ nhất bằng 18.

4. HD: $x + 5y - 7z - 15 = 0$; $b = 5$, $c = 7$, $d = -15$; $S = -3$.

5. HD: (AMC) và (SBC) lần lượt có VTPT là $\vec{n}_1 = (-2; 2; -1)$ và $\vec{n}_2 = (2; 0; 1)$.

Khi đó $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0,89$.

6. HD: $(\alpha): x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z - \frac{3}{4} = 0$; $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$, $d = -\frac{3}{4}$; $S = \frac{1}{4} = 0,25$.

F. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

1.D	2.D	3.C	4.D	5.B	6.B	7.C	8.A	9.C	10.D
11.D	12.D								

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4
a)	Đ	S	Đ	S
b)	S	Đ	S	Đ
c)	Đ	S	Đ	S
d)	S	S	Đ	Đ

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
2,67	0,67	1,96	6	3,54	1,3

1. HD: $(\alpha): \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1; V_{O.ABC} = \frac{1}{6} \cdot OA \cdot OB \cdot OC = \frac{8}{3} \approx 2,67.$

2. HD: $h = \frac{2}{3} \approx 0,67.$

3. HD: $(P): 3x - y + 4z + 5 = 0; d(M, (P)) = \frac{5\sqrt{26}}{13} \approx 1,96.$

4. HD: $G\left(\frac{5}{3}; \frac{10}{3}; 1\right); a = \frac{5}{3}, b = \frac{10}{3}, c = 1; T = 6.$

5. HD: $d(B_1, (A_1BD)) = d(A, (A_1BD)) = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3,54.$

6. HD: $(AEC): 2x - 2y - z = 0, B(0; 2; 0); d(B, (AEC)) = \frac{4}{3} \approx 1,3.$

G. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 5

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

1.A	2.B	3.A	4.A	5.A	6.C	7.D	8.C	9.B	10.D
11.C	12.B								

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4
a)	Đ	Đ	S	Đ
b)	Đ	S	S	S
c)	S	Đ	Đ	Đ
d)	S	Đ	Đ	Đ

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
-72	2,64	5	40	1114	2,83

1. HD: $(P): 5x + 3y - 6z + 16 = 0$; $a = 5$, $c = -6$, $d = 16$; $S = -72$.

2. HD: M thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng $(Q): x - 7y - 4z + 7 = 0$, $(P): 3x + y - z + 5 = 0$.

Cho $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{13}{11}$, $z = \frac{42}{11}$; $y + z = \frac{29}{11} \approx 2,64$.

3. HD: $(Q): 2y + 3z - 11 = 0$; $a = 0$, $b = 2$, $c = 3$; $S = 5$.

4. HD: $m = 4$, $n = -4$; $S = 40$.

5. HD: (ABC) có VTPT $\vec{n}_1 = (0; 0; 1)$, (MNC) có VTPT $\vec{n}_2 = (0; 2\sqrt{2}; 5)$.

$\cos((ABC), (MNC)) = \frac{5\sqrt{33}}{33}$; $b = 5$, $c = 33$; $S = 1114$.

6. HD: Ta có $(AMG): y - z = 0$ và $B(0; 4; 0)$. Khi đó $d(B, (AMG)) = 2\sqrt{2} \approx 2,83$.

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN**C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 1****Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn**

1.A	2.D	3.A	4.A	5.B	6.D	7.A	8.B	9.A	10.C
11.A	12.C								

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4
a)	Đ	Đ	Đ	S
b)	S	Đ	S	S
c)	Đ	Đ	Đ	S
d)	Đ	Đ	S	Đ

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
13	-9	6075	1,33	-1	64,3

1. HD: $\frac{x-4}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{2}$; $M(2;3;0)$; $a=2$, $b=3$; $S=13$.

2. HD: $M\left(-\frac{5}{2}; 10; -\frac{13}{2}\right)$; $a=-\frac{5}{2}$, $c=-\frac{13}{2}$; $S=-9$.

3. HD: $\vec{u} = (0; 1; -3)$; $a=0$; $b=-3$; $P=6075$.

4. HD: $M\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; $S = \frac{4}{3} \approx 1,33$.

5. HD: $\vec{u} = (4m; 0; -m)$, $m \neq 0$; $a+c=4m-m=\frac{1}{2} \Rightarrow m=\frac{1}{6}$; $a=\frac{2}{3}$, $c=-\frac{1}{6}$; $P=-1$.

6. HD: $\cos(A'C, AM) = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow (A'C, AM) \approx 64,3^\circ$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 2

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

1.B	2.C	3.B	4.C	5.C	6.A	7.B	8.B	9.B	10.C
11.A	12.C								

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4
a)	S	Đ	Đ	Đ
b)	Đ	Đ	Đ	Đ
c)	S	Đ	S	S
d)	Đ	S	Đ	S

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
6078	2028	74	-696	1,22	5,77

1. HD:
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t; a = 2, b = -1, c = 2, d = 0; S = 6078. \\ z = 2 \end{cases}$$

2. HD:
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = t; y = 2025 \Rightarrow t = 2025 \Rightarrow x = 3 + t = 2028. \\ z = 1 \end{cases}$$

3. HD: $d: \frac{x}{6} = \frac{y}{7} = \frac{z}{5}; b = 7, c = 5; S = 74.$

4. HD:
$$\begin{cases} x = t \\ y = 7 - 3t; M(12; -29; 24); P = -696. \\ z = 2t \end{cases}$$

5. HD: $A(1; 0; -2), B(-1; 1; 3); S_{OAB} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \right\| = \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1,22.$

6. HD: $d(B'D', A'B) = \frac{10\sqrt{3}}{3} \approx 5,77.$

E. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 3

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

1.A	2.B	3.D	4.A	5.A	6.C	7.C	8.B	9.D	10.C
11.D	12.B								

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4
a)	Đ	S	Đ	S
b)	S	S	Đ	S
c)	Đ	Đ	S	Đ
d)	S	Đ	Đ	Đ

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
2,83	-3,5	10	429	6075	396

1. HD: $M(0;1;1)$; $T_{\min} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$.

2. HD: $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 6a - 4b + 8c + 5$

$$= \left(2a + \frac{3}{2}\right)^2 + (2b-1)^2 + (2c+2)^2 - \frac{9}{4} \geq -\frac{9}{4}.$$

Khi đó $M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right)$; $a = -\frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -1$; $S = -\frac{7}{2} = -3,5$.

3. HD: $M\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right)$; $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{4}{3}$, $c = \frac{7}{3}$; $T = 10$.

4. HD: $d: \begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = -1 + 3t \\ z = 4 - t \end{cases}$; $M(-2-4t; -1+3t; 4-t) \in d$. Với $a+b+c=9 \Rightarrow t=-4$.

Khi đó $M(14; -13; 8)$; $a = 14$, $b = -13$, $c = 8$; $S = 429$.

5. HD: $\vec{u} = (a; 0; 2a)$; $|\vec{u}| = 2025\sqrt{5} \Rightarrow a = 2025$; $S = 6075$.

6. HD: $N\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a}{2}\right)$, $I\left(\frac{a}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; 0\right)$. Khi đó $\vec{u} = (6; 6\sqrt{2}; 18)$; $b = 6\sqrt{2}$, $c = 18$; $S = 396$.

F. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

1.C	2.C	3.A	4.A	5.B	6.B	7.D	8.D	9.A	10.A
11.D	12.D								

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4
a)	S	Đ	Đ	Đ
b)	S	Đ	Đ	Đ
c)	Đ	S	S	Đ
d)	Đ	Đ	S	S

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
-13	5,48	149	0,67	-323	585

1. HD: $M\left(-\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; -\frac{11}{2}\right)$. Tổng hoành độ và cao độ là -13.

2. HD: $M(0; 1; -2)$, $MA_{\min} = \sqrt{30} \approx 5,48$.

3. HD: Đường thẳng $MN: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$. Khi $t = 4$: $N(5; -10; 7)$; $S = 149$.

4. HD: $OH: \begin{cases} x = 6t \\ y = 4t \\ z = -3t \end{cases}$. Khi đó $\vec{u} = \left(1; \frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right)$; $a = 1$, $b = \frac{2}{3}$; $P = \frac{2}{3} \approx 0,67$.

5. HD: $\begin{cases} (P): 3x - 2y - z - 12 = 0 \\ (Q): 5x + 34y - 11z - 38 = 0 \end{cases}$; $b = 34$, $d = -38$; $T = -323$.

6. HD: $\cos(AB', BC) = \frac{9\sqrt{13}}{65}$; $a = 9$, $b = 65$; $P = 585$.

G. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 5

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

1.C	2.D	3.B	4.B	5.B	6.A	7.C	8.A	9.D	10.D
11.C	12.A								

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4
a)	Đ	S	Đ	S
b)	S	S	Đ	S
c)	Đ	Đ	S	S
d)	S	Đ	S	S

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
8	7,5	30	28	3	60

1. HD: $I\left(0;0;-\frac{1}{2}\right)$, $M\left(6;6;\frac{5}{2}\right)$ hoặc $M\left(-6;-6;-\frac{7}{2}\right)$; $d(M,(P))=8$.

2. HD: $\vec{u}=(3;b;c)$ cùng phương với $\vec{v}=(2;2;3)$. Suy ra $\vec{u}=\left(3;3;\frac{9}{2}\right)$; $b=3$, $c=\frac{9}{2}$; $S=\frac{15}{2}=7,5$.

3. HD: $\Delta: \frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-4}{-2}$; $a=3$, $b=1$, $c=4$, $d=-2$; $S=30$.

4. HD: $M(-1;0;4)$. Giá trị nhỏ nhất của MA^2+MB^2 là 28.

5. HD: $A(3;0;0)$.

6. HD: $\cos(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{OM})=-\frac{1}{2}$. Suy ra $(BC,OM)=60^\circ$.

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU**C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 1****Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn**

1.A	2.B	3.B	4.A	5.D	6.D	7.D	8.A	9.C	10.A
11.B	12.A								

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4
a)	Đ	S	Đ	Đ
b)	S	S	S	S
c)	S	Đ	S	Đ
d)	Đ	S	Đ	Đ

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
10,2	2	113	2,8	6,83	0,87

1. HD: $l = 2\sqrt{26} \approx 10,2$.

2. HD: $I\left(\frac{1}{2}; -1; 2\right)$; $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$, $c = 2$; $S = 2$.

3. HD: $A(0; 0; 3)$, $B(4; -2; 7)$; $R = \frac{AB}{2} = 3$. Khi đó $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \approx 113$.

4. HD: $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow G(1; 4; -3)$. T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất, khi đó M là một trong hai giao điểm của đường thẳng IG và mặt cầu (S) . Tìm được $M\left(1; \frac{8}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

Khi đó $a = 1$, $b = \frac{8}{5}$, $c = \frac{1}{5}$; $S = \frac{14}{5} = 2,8$.

5. HD: $I(1; 1; \sqrt{2})$; $E(2; 2; 2\sqrt{2})$; $a = 2$, $b = 2$, $c = 2\sqrt{2}$; $S = 4 + 2\sqrt{2} \approx 6,83$.

6. HD: $I\left(0; 0; \frac{5\sqrt{33}}{33}\right)$; $c = \frac{5\sqrt{33}}{33} \approx 0,87$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 2

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

1.A	2.B	3.C	4.C	5.A	6.B	7.B	8.C	9.B	10.D
11.D	12.D								

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4
a)	Đ	Đ	Đ	S
b)	S	S	Đ	Đ
c)	Đ	S	Đ	S
d)	Đ	S	S	Đ

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
20,8	1,66	1,33	5,83	7,73	10,1

1. HD: Gọi $M(x; y; z)$. Từ $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$ tìm được điểm M thuộc mặt cầu (S) tâm $I(-6; 6; -6)$ và bán kính $R = 6\sqrt{3}$. Khi đó OM lớn nhất bằng $OI + R = 12\sqrt{3} \approx 20,8$.

2. HD: $d(\Delta_1, \Delta_2) = \sqrt{11} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{11}}{2} \approx 1,66$.

3. HD: $I(-1; -1; -4)$ và $R = 3$; $a = -1$, $b = -1$, $c = -4$; $T = \frac{4}{3} \approx 1,33$.

4. HD: $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34$; $R = \sqrt{34} \approx 5,83$.

5. HD: $I(\sqrt{3}; 3; 3)$; $a = \sqrt{3}$, $b = 3$, $c = 3$; $S = 6 + \sqrt{3} \approx 7,73$.

6. HD: $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 18y - 11\sqrt{3}z + 72 = 0$; $R = \sqrt{102} \approx 10,1$.

E. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 3

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

1.D	2.D	3.A	4.C	5.B	6.D	7.B	8.A	9.D	10.D
11.B	12.D								

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4
a)	Đ	Đ	Đ	Đ
b)	S	Đ	S	Đ
c)	S	S	Đ	S
d)	Đ	Đ	S	S

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
9	1	3	45	2,83	29

1. HD: $I(a; -a; a)$, $a > 0$. Tìm được $a = 3$, suy ra $b = -3$, $c = 3$; $P = 9$.

2. HD: $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$; $R = 1$.

3. HD: $OH \perp (ABC)$; $R = OH = 3$.

4. HD: $(P): 6x + 3y + 2z = 0$; $a = 6$, $b = 3$, $d = 0$; $S = 45$.

5. HD: (S) có tâm $I(1; \sqrt{3}; 1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$; $d(I, MN) = \sqrt{3}$. Suy ra $EF = 2\sqrt{2} \approx 2,83$.

6. HD: $I(2; 2; 2)$, $(MBC): 2x + z - 8 = 0$; $d(I, (MBC)) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $a = 2$, $b = 5$, $S = 29$.

F. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

1.A	2.D	3.B	4.B	5.D	6.A	7.B	8.D	9.A	10.C
11.B	12.B								

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4
a)	Đ	S	S	Đ
b)	S	S	S	Đ
c)	S	Đ	Đ	Đ
d)	Đ	Đ	S	S

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
2,12	1,41	9,38	10	1,02	1,66

1. HD: $r = \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2,12$.

2. HD: $M(0;0;2)$; $AM = \sqrt{2} \approx 1,41$.

3. HD: $I(6;9;13)$; $R = IM = \sqrt{88} \approx 9,38$.

4. HD: $I\left(\frac{8}{3}; \frac{1}{3}; 7\right)$; $a = \frac{8}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = 7$; $S = 10$.

5. HD: (S) có tâm $I\left(0;1;\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, bán kính $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; (S') có tâm $I'\left(-\frac{1}{4};1;0\right)$, bán kính $R' = \frac{\sqrt{17}}{4}$. Đường

tròn (C) nằm trong mặt phẳng $(\alpha): 6x + 4\sqrt{3}z + 3 = 0$. Tính được $r = \frac{\sqrt{203}}{14} \approx 1,02$.

6. HD: $R = \frac{\sqrt{11}}{2} \approx 1,66$.

G. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 5

Phần 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

1.C	2.A	3.B	4.A	5.A	6.C	7.C	8.A	9.A	10.A
11.A	12.C								

Phần 2. Câu trắc nghiệm đúng sai

	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4
a)	Đ	S	Đ	S
b)	Đ	Đ	S	S
c)	S	Đ	Đ	S
d)	S	Đ	S	Đ

Phần 3. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
0,5	0,5	6,32	5278	1,84	3,54

1. HD: $(S'): x^2 + y^2 + z^2 - x - 2y + 2z - 2 = 0$; $I\left(\frac{1}{2}; 1; -1\right)$; $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = -1$; $S = \frac{1}{2} = 0,5$.

2. HD: $d(d, d') = 1$. Suy ra $R = \frac{1}{2} = 0,5$.

3. HD: $R = d(A, Oz) \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{10} \approx 6,32$.

4. HD: $M\left(\frac{29}{3}; -\frac{26}{3}; -\frac{7}{3}\right)$; $a = \frac{29}{3}$, $b = -\frac{26}{3}$, $c = -\frac{7}{3}$; $T = 5278$.

5. HD: $G\left(0; \frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$, $I\left(\frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}\right)$; $IG = \frac{\sqrt{122}}{6} \approx 1,84$.

6. HD: $R = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3,54$.