

BỘ BINH PHÁP CỤC TRỊ OXYZ ANH TÚ DẠY TOÁN
CHÍNH PHỤC KÌ THI H-SCA MÔN TOÁN



KÌ THI ĐÁNH GIÁ NĂNG LỰC CHUYÊN BIỆT HCMUE
HCMUE Specialized Competency Assessment

TÀI LIỆU CHUYÊN ĐỀ
CỤC TRỊ HÌNH HỌC OXYZ VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Thực hiện biên soạn
Phạm Thanh Tú

Zalo
0382164170

Tiktok
Anh Tú Dạy Toán

Tài Liệu Lưu Hành Nội Bộ

Mục lục

1	BÀI TOÁN TÂM TỈ CỤ	2
1.1	CỰC TRỊ ĐỘ DÀI VECTƠ	2
1.2	CỰC TRỊ ĐỘ DÀI BÌNH PHƯƠNG VÔ HƯỚNG CỦA VECTƠ	9
2	BÀI TOÁN MIN MAX TỔNG HIỆU ĐỘ DÀI	16
3	BÀI TOÁN LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG, MẶT PHẲNG CÓ YẾU TỐ CỰC TRỊ	18
4	CỰC TRỊ VỀ GÓC	24
5	BÀI TOÁN PHƯƠNG TÍCH CỦA MỘT ĐIỂM VỚI MẶT CẦU	29
6	BÀI TẬP RÈN LUYỆN	34

1 BÀI TOÁN TÂM TỈ CỰ

Cho 3 điểm A, B, C (có thể cho 2 điểm hoặc n điểm trong trường hợp tổng quát). Điểm I gọi là tâm tỉ cự của hệ 3 điểm A, B, C gắn với các hệ số α, β, γ ($\alpha + \beta + \gamma \neq 0$):

$$1) \text{ Tọa độ điểm } I \text{ thỏa mãn } \alpha \vec{IA} + \beta \vec{IB} + \gamma \vec{IC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \\ y_I = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \\ z_I = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma} \end{cases}$$

$$2) \text{ Với mọi điểm } M, \text{ ta đều có } \begin{cases} \alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \vec{MI} \\ \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma) MI^2 + \alpha IA^2 + \beta IB^2 + \gamma IC^2 \end{cases}$$

Đặc biệt: Nếu $\alpha = \beta = \gamma = 1$ thì M là trọng tâm ΔABC .

1.1 CỤC TRỊ ĐỘ DÀI VECTO

Giả thiết

Cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ với n số $k_1, k_2, \dots, k_n$ mà $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k \neq 0$ và đường thẳng d (hoặc mặt phẳng (P)). Tìm điểm M trên đường thẳng d (hoặc mặt phẳng (P)) sao cho $|k_1 \vec{MA}_1 + k_2 \vec{MA}_2 + \dots + k_n \vec{MA}_n|$ nhỏ nhất

Phương pháp giải

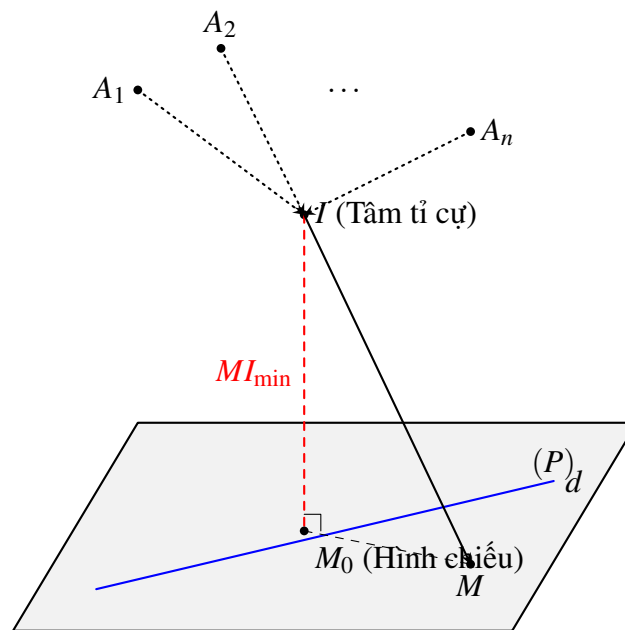
Gọi I là tâm tỉ cự hệ n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ với n số $k_1, k_2, \dots, k_n$, nghĩa là điểm I thỏa mãn

$$k_1 \vec{IA}_1 + k_2 \vec{IA}_2 + \dots + k_n \vec{IA}_n = \vec{0}$$

Áp dụng công thức:

$$|k_1 \vec{MA}_1 + k_2 \vec{MA}_2 + \dots + k_n \vec{MA}_n| = |(k_1 + k_2 + \dots + k_n) \vec{MI}| = |k_1 + k_2 + \dots + k_n| \cdot MI$$

Bài toán trở về tìm vị trí điểm M để $|\vec{MI}|$ nhỏ nhất



Câu 1. Cho ΔABC có $A(1;0;0)$, $B(3;2;4)$, $C(0;5;4)$. Biết $M(a;b;c)$ là điểm thuộc (Oxy) sao cho $\left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; -2; -1)$, $B(-2; -4; 3)$, $C(1; 3; -1)$ và mặt phẳng $(P): x + y - 2z - 3 = 0$. Điểm $M \in (P)$ thỏa mãn $\left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hoành độ của điểm M bằng

A. $-\frac{3}{2}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $A(0; 1; 0)$, $B(1; 0; 1)$, $C(5; -1; 1)$, $D(3; -3; 2)$. Điểm $M(a; b; c)$ thỏa mãn $\left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $a + b + c$ bằng:

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{7}{2}$.

Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1;3;5)$, $B(2;6;-1)$, $C(-4;-12;5)$ và $(P): x+2y-2z-5=0$. Gọi M là điểm thuộc (P) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}\right|+\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Cao độ của điểm M bằng

A. $z_M = \frac{5}{2}$.

B. $z_M = \frac{3}{8}$.

C. $z_M = \frac{3}{4}$.

D. $z_M = \frac{3}{2}$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;3)$, $B(2;-1;3)$, $C(1;3;0)$ và $(P): x+y+z=0$. Gọi M là điểm bất kỳ thuộc (P) . Giá trị nhỏ nhất của $\left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right| + \left| 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right|$ là

- A. $\sqrt{446}$. B. $\frac{\sqrt{446}}{4}$. C. $\sqrt{223}$. D. $\frac{\sqrt{223}}{4}$.

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $B(1;2;3)$, $C(-2;1;4)$ và mặt cầu có phương trình $(S): x^2 + y^2 + \left(z - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{10}{23}$. Biết rằng điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S) thỏa mãn biểu thức $\left|\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MB}\right| + \left|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị lớn nhất. Giá trị của $a + b - 14c$ bằng

A. -80 . B. -81 . C. -82 . D. -83 .

1.2 CỰC TRỊ ĐỘ DÀI BÌNH PHƯƠNG VÔ HƯỚNG CỦA VECTO

Giả thiết

Cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ với n số $k_1, k_2, \dots, k_n$ mà $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k \neq 0$ và đường thẳng d (hoặc mặt phẳng (P)). Tìm điểm M trên đường thẳng d (hoặc mặt phẳng (P)) sao cho

$$T = k_1 MA_1^2 + k_2 MA_2^2 + \dots + k_n MA_n^2$$

đạt giá trị nhỏ nhất

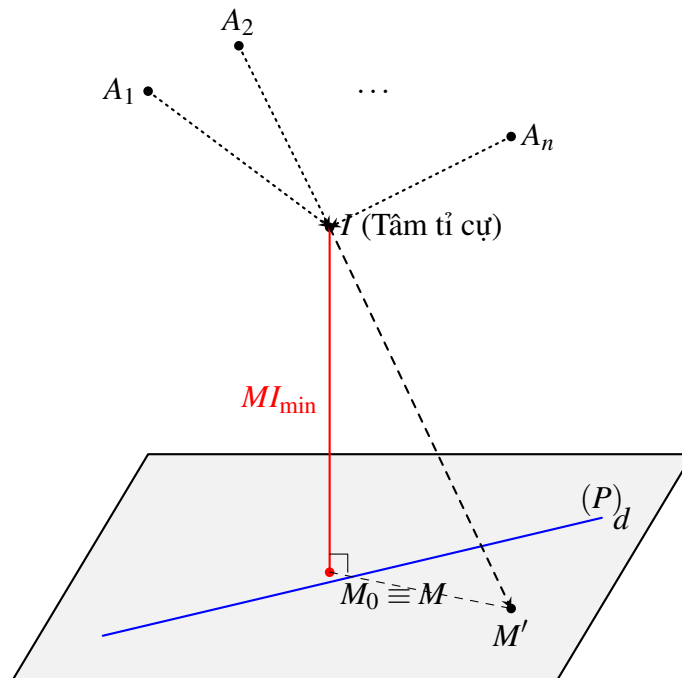
Phương pháp giải

Gọi I là tâm tỉ cự hệ n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ với n số $k_1, k_2, \dots, k_n$, nghĩa là điểm I thỏa mãn

$$k_1 \overrightarrow{IA_1} + k_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + k_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$$

Áp dụng công thức: $T = k_1 IA_1^2 + k_2 IA_2^2 + \dots + k_n IA_n^2 + (k_1 + k_2 + \dots + k_n) MI^2$

Bài toán trở về tìm vị trí điểm M để MI nhỏ nhất



Để MI nhỏ nhất thì M chính là hình chiếu vuông góc của tâm tỉ cự I lên đường thẳng d hoặc mặt phẳng (P) .

Câu 7. Cho 3 điểm $A(1; 1; 1), B(-1; 2; 1), C(3; 6; -5)$. Biết $M(a; b; c)$ thỏa mãn $M \in (Oxy)$ và biểu thức $T = MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;-1), B(-1;1;0), C(1;0;1)$. Điểm $M(a;b;c)$ thỏa mãn $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $4a + 2b + c$ bằng

A. -3 .B. 3 .C. -2 .D. 2 .

Câu 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y + 2z = 0$ và các điểm $A(1; 2; -1), B(3; 1; -2), C(1; -2; 1)$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc (P) sao cho $MA^2 - MB^2 - MC^2$ lớn nhất. Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. 0.

B. -2 .C. -4 .D. -6 .

- Câu 10.** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(\Delta): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ và hai điểm $A(2; 0; 3), B(2; -2; -3)$. Giá trị nhỏ nhất của $MA^4 + MB^4$ là
- A. 200. B. 400. C. 100. D. 300.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 2; 1), B\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Đường thẳng d đi qua tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle OAB$ và vuông góc với mặt phẳng (OAB) . Biết M là 1 điểm di động trên d . Giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + 2MB^2$ bằng

A. 20.

B. 25.

C. 30.

D. 35.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; -1), B(-1; 2; 0), C(3; -1; -2)$. Giả sử $M(a; b; c)$ thuộc $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 861$ sao cho $P = 2MA^2 - 7MB^2 + 4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $|a| + |b| + |c|$ bằng

A. 49.

B. 51.

C. 55.

D. 47.

2 BÀI TOÁN MIN MAX TỔNG HIỆU ĐỘ DÀI

Phương pháp giải:

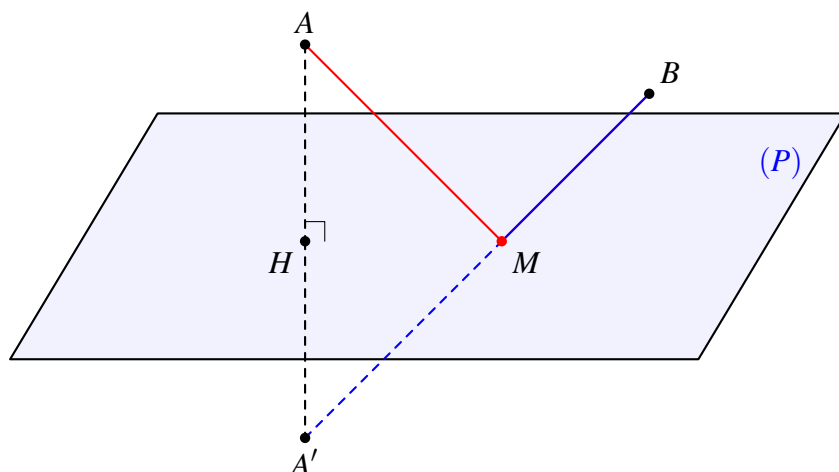
- +) Kiểm tra vị trí tương đối của các điểm A và B so với mặt phẳng (P) .
 +) Nếu A và B cùng phía (P) thì bài toán $(MA + MB)_{\min}$ phải lấy đối xứng A qua (P) khi đó

$$MA + MB = MA' + MB \geq A'B$$

đấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow A', M, B$ thẳng hàng hay $M = A'B \cap (P)$.

Bài toán tìm $|MA - MB|_{\max}$, ta có $|MA - MB| \leq AB \Rightarrow M$ là giao điểm trực tiếp của đường thẳng AB và (P) .

- +) Nếu A và B khác phía (P) thì bài toán $|MA - MB|_{\max}$ phải lấy đối xứng A qua (P) bài toán tìm $(MA + MB)_{\min} \Rightarrow M$ là giao điểm trực tiếp của đường thẳng AB và (P) .



*Minh họa tìm $M \in (P)$ sao cho $(MA + MB)_{\min}$
 khi A, B nằm cùng phía so với mặt phẳng (P)*

Câu 13. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(-1; 3; -2); B(-3; 7; -18)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 1 = 0$. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x - y + 2z - 2 = 0$ và 2 điểm $A(2; 3; 0); B(2; -1; 2)$.
Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|MA - MB|$ lớn nhất.

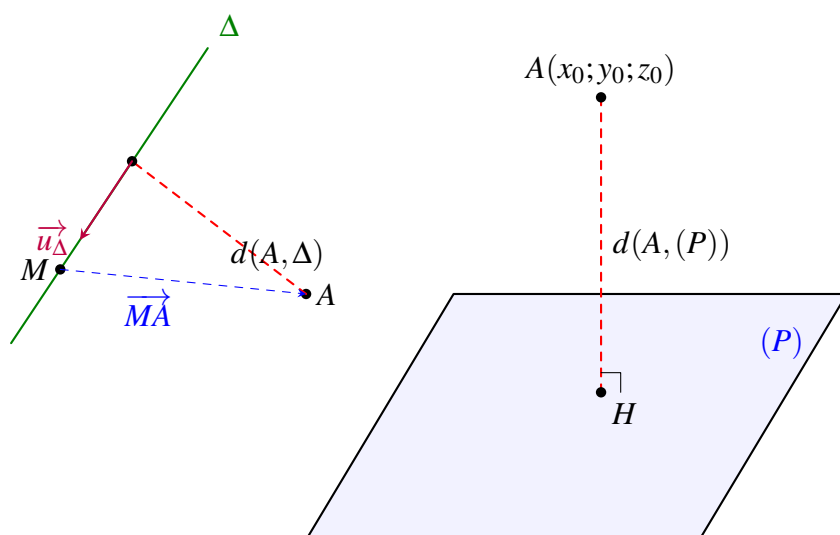
3 BÀI TOÁN LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG, MẶT PHẪNG CÓ YẾU TỐ CỰC TRỊ

Phương pháp đại số:

- Gọi véc tơ pháp tuyến hoặc véc tơ chỉ phương của mặt phẳng (hoặc đường thẳng) cần lập là $(a; b; c)$, $(a^2 + b^2 + c^2) > 0$.
- Thiết lập một phương trình quy ẩn (a theo b, c hoặc ngược lại) từ một dữ kiện về mặt phẳng chứa đường, song song hoặc vuông góc. Giả sử phương trình thu gọn ẩn là $a = f(b; c)$.
- Thiết lập phương trình khoảng cách mà đề bài yêu cầu, thay $a = f(b; c)$ vào ta được một phương trình hai ẩn $b; c$.
- Xét hàm khoảng cách $d = g(b; c)$
 - Nếu $c = 0$ thì $b \neq 0 \rightarrow d = d_1$ lưu lại giá trị khoảng cách d_1 này.
 - Nếu $c \neq 0 \Rightarrow d = g\left(\frac{b}{c}\right) = g(t); t = \frac{b}{c}$
 Khảo sát hàm $g(t)$ ta thu được kết quả.

Chú ý:

- Công thức khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng $d(A; (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
- Công thức khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng $d(A; \Delta) = \frac{|\left[\vec{u}_\Delta; \vec{AM}\right]|}{|\vec{u}_\Delta|}$; với M thuộc Δ .
- Công thức khoảng cách giữa hai đường thẳng $d(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{|\left[\vec{u}_{\Delta_1}; \vec{u}_{\Delta_2}\right] \vec{M_1M_2}|}{|\left[\vec{u}_{\Delta_1}; \vec{u}_{\Delta_2}\right]|}$



Phương pháp hình học:

Bài toán 1: Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất, với M là điểm không thuộc d .

Phương pháp giải:

Đường thẳng d xác định đi qua điểm A và có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_d$.

Kẻ $MH \perp (P); MK \perp d \Rightarrow MH = d(M; (P))$ và điểm K cố định.

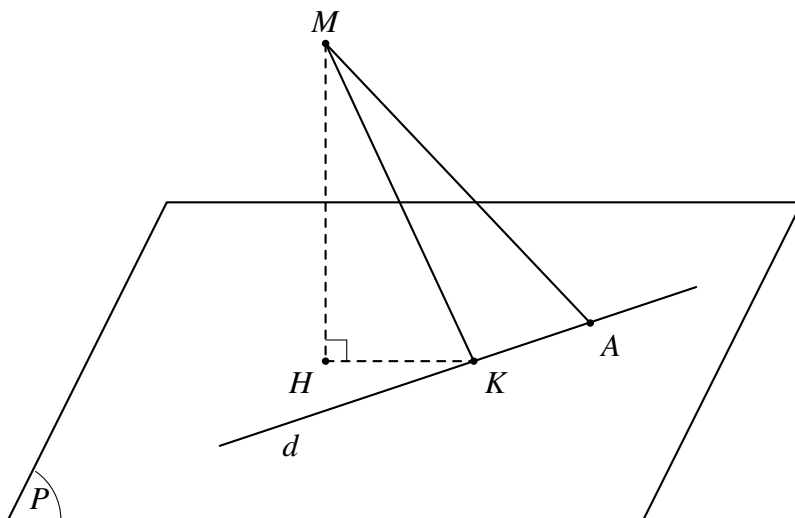
Ta có $d(M; (P)) = MH \leq MK$

Suy ra $d_{\max} = MK$. Khi đó $\begin{cases} d \subset (P) \\ (P) \perp (M; d) \end{cases}$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa M và d ta có:

$$\begin{cases} \vec{n}_{(P)} \perp \vec{u}_d \\ \vec{n}_{(P)} \perp \vec{n}_{\alpha} = [\vec{u}_d; \vec{MA}] \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_d; [\vec{u}_d; \vec{MA}]]$$

Khi đó (P) đi qua A và có véc tơ pháp tuyến là: $\vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_d; [\vec{u}_d; \vec{MA}]]$

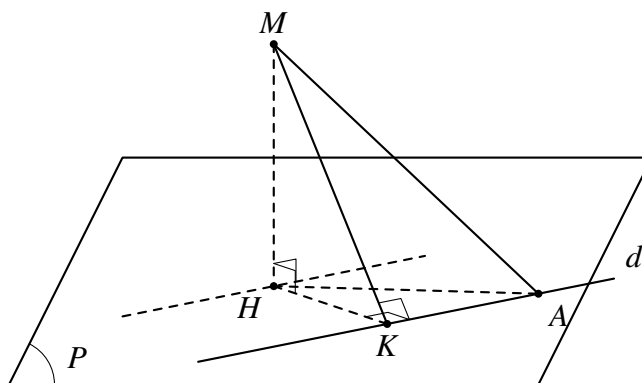


Câu 15. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $M(2;5;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Lập (P) chứa d sao cho khoảng cách từ M đến (P) đạt giá trị lớn nhất.

Câu 16. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(-1;2;4); A(0;2;1); B(1;0;2)$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng AB đồng thời cách điểm M một khoảng lớn nhất cắt các trục tọa độ tại các điểm N, P, Q . Thể tích V của khối chóp $O.NPQ$ là:

Bài toán 2: Lập phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) , đi qua điểm A sao cho khoảng cách từ điểm M đến d lớn nhất, nhỏ nhất?

Phương pháp giải:



+ Kẻ $MK \perp d$, $MH \perp (P) \Rightarrow MK = d(M; d)$ và điểm H cố định.

Ta có: $MH \leq MK \leq MA \Leftrightarrow MH \leq d \leq MA$.

+) Ta có $MK \leq MA \Rightarrow d(M; d)_{\max} = MA \Leftrightarrow K \equiv A$.

Khi đó đường thẳng d nằm trong (P) , đi qua A và vuông góc với đường thẳng AM , suy ra d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}; \vec{MA}]$.

+) Mặt khác, lại có $MK \geq MH \Rightarrow d(M; d)_{\min} = MH \Leftrightarrow H \equiv K$.

Khi đó đường thẳng d nằm trong (P) , đi qua A và đi qua hình chiếu H của M . Suy ra $d = (P) \cap (MHA)$.

Trong đó $\vec{n}_{(MHA)} = [\vec{n}_{(P)}; \vec{MA}]$

Khi đó đường thẳng d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}; [\vec{n}_{(P)}; \vec{MA}]]$

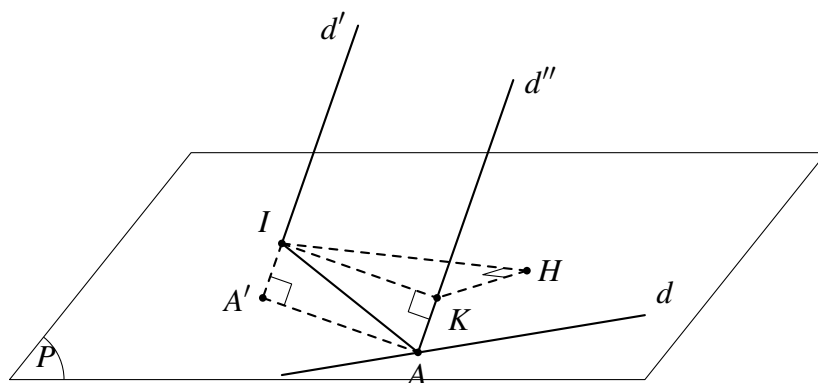
(**Chú ý:** Trong trường hợp $d_{\min}$ thì d chính là hình chiếu vuông góc của MA trên mặt phẳng (P)).

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $M(-1; 2; 1); A(1; 2; -3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{-1}$. Véc tơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M , vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng lớn nhất là

- A. $\vec{u} = (4; -3; 2)$. B. $\vec{u} = (1; 0; 2)$. C. $\vec{u} = (2; 0; -4)$. D. $\vec{u} = (2; 2; -1)$.

Bài toán 3: Lập phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) , đi qua điểm A cho trước sao cho khoảng cách giữa d và d' lớn nhất, với d' là đường thẳng cho trước và cắt (P) .

Phương pháp giải:



+) Gọi $I = d' \cap (P)$, qua A dựng đường thẳng $d'' \parallel d' \Rightarrow d' \parallel (Q)$, với (Q) là mặt phẳng chứa d và d'' .

Khi đó $d(d; d') = d(d'; (Q)) = d(I; (Q))$

+) Kẻ $IH \perp (Q); IK \perp d'' \Rightarrow IH = d(I; (Q))$ và điểm K cố định.

+) Ta có $IH \leq IK \Rightarrow d(I; (Q))_{\max} = IK \Leftrightarrow H \equiv K$. Khi đó đường thẳng d nằm trong (P) , đi qua A và vuông góc với đường thẳng IK , suy ra d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}; \vec{IK}]$

Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A lên d' , suy ra $AA' \parallel IK$, khi đó $\vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}; \vec{AA'}]$

Vậy đường thẳng d cần lập đi qua điểm A và có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}; \vec{AA'}]$

Câu 18. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1; 0; 1)$ và đường thẳng $d': \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1}$ và $(P): x - y + z - 2 = 0$. Lập phương trình đường thẳng d đi qua A , nằm trong (P) sao cho khoảng cách giữa d và d' lớn nhất?

4 CỰC TRỊ VỀ GÓC

Phương pháp đại số

- Gọi véc tơ pháp tuyến hoặc véc tơ chỉ phương của mặt phẳng (hoặc đường thẳng) cần lập là $(a; b; c)$ trong đó $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.
- Thiết lập một phương trình quy ẩn (a theo b, c hoặc ngược lại) từ một dữ kiện về mặt phẳng chứa đường, song song hoặc vuông góc. Giả sử phương trình thu gọn ẩn là $a = f(b; c)$.
- Thiết lập phương trình về góc, thay $a = f(b; c)$ vào ta được một phương trình hai ẩn b, c .

Chú ý:

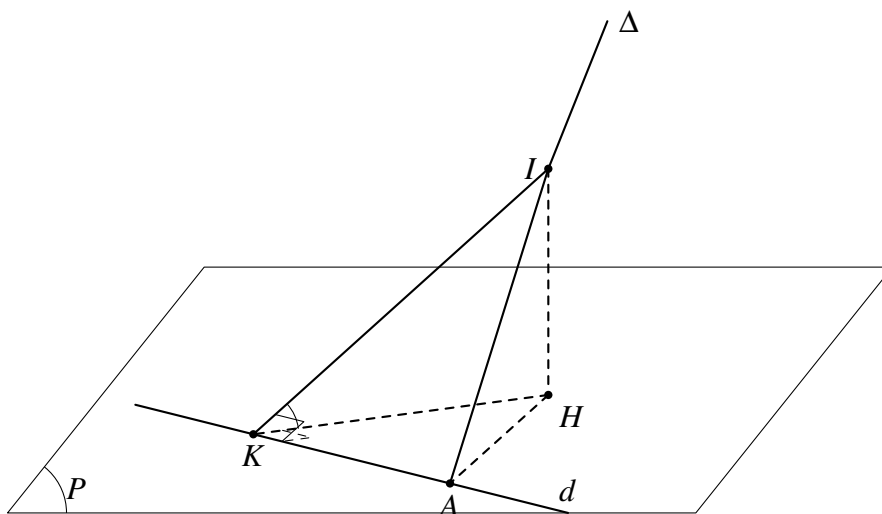
- Góc giữa hai đường thẳng $\cos(d_1; d_2) = |\cos(\vec{u}_1; \vec{u}_2)| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$
- Góc giữa hai mặt phẳng $\cos((P_1); (P_2)) = |\cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$
- Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng $\sin(d; (P)) = |\cos(\vec{n}_P; \vec{u}_d)| = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{u}_d|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{u}_d|}$
- Ta biết rằng hàm $\sin \varphi$ đồng biến khi $0 < \varphi < 90^\circ$, ngược lại hàm $\cos \varphi$ nghịch biến.

Vậy khi hàm xét $\max$, $\min$ là hàm $\sin$ thì góc lớn ứng với hàm $\max$, góc nhỏ ứng với hàm $\min$. Còn khi hàm xét $\max$, $\min$ là hàm $\cos$ thì ngược lại, đề bài yêu cầu tìm góc lớn thì hàm phải đạt $\min$, góc nhỏ thì hàm đạt $\max$.

Bài toán 1: Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa Δ sao cho mặt phẳng (Q) tạo với mặt phẳng (P) cho trước một góc nhỏ nhất (hoặc tạo với đường thẳng d cho trước một góc lớn nhất).

Phương pháp giải:

- TH1: $\left(\widehat{(P); (Q)} \right)_{\min}$



Gọi $A = \Delta \cap (P); d = (P) \cap (Q)$ với (Q) là mặt phẳng (IAK) trong hình vẽ.

Lấy $I \in \Delta \Rightarrow A; I$ cố định, dựng $IH \perp (P)$ và $IK \perp d \Rightarrow \left(\widehat{(P); (Q)} \right) = \widehat{IKH} = \varphi$.

Do $IA \geq IK \Rightarrow \sin \varphi = \frac{IH}{IK} \geq \frac{IH}{IA} \Rightarrow \varphi_{\min}$ khi $K \equiv A$ tức là $\Delta \perp d \Leftrightarrow d \perp (IHA) \Rightarrow \vec{n}_Q = [\vec{u}_\Delta; \vec{u}_d]$

Mặt khác $\begin{cases} IA \perp d \\ d \subset (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \perp d \\ d \subset (P) \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_d = [\vec{u}_\Delta; \vec{n}_{(P)}]$

Suy ra $\left(\widehat{(P); (Q)} \right)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \Delta \perp$ giao tuyến d của (P) và $(Q) \Leftrightarrow \vec{n}_{(Q)} = [\vec{u}_\Delta; [\vec{u}_\Delta; \vec{n}_{(P)}]]$

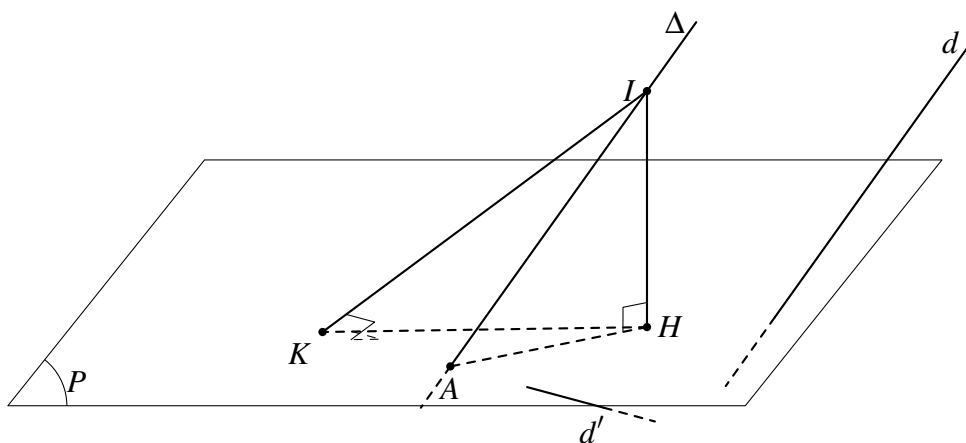
- TH2: $\left(\widehat{(Q); d} \right)_{\max} \Leftrightarrow \vec{n}_{(Q)} = [\vec{u}_\Delta; [\vec{u}_\Delta; \vec{u}_d]]$

$$\text{Tổng kết: } \begin{cases} \left(\widehat{(P); (Q)} \right)_{\min} \Leftrightarrow \vec{n}_{(Q)} = [\vec{u}_\Delta; [\vec{u}_\Delta; \vec{n}_{(P)}]] \\ \left(\widehat{(Q); d} \right)_{\max} \Leftrightarrow \vec{n}_{(Q)} = [\vec{u}_\Delta; [\vec{u}_\Delta; \vec{u}_d]] \end{cases}$$

Bài toán 2: Viết phương trình đường thẳng d' qua A nằm trong (P) sao cho góc giữa 2 đường thẳng d và d' nhỏ nhất (hoặc tạo với mặt phẳng (Q) cho trước một góc lớn nhất)

Phương pháp giải:

- TH1: $\left(\widehat{d; d'} \right)_{\min}$



Qua A dựng đường thẳng $\Delta \parallel d$, trên Δ lấy điểm I , hạ $IH \perp (P) \Rightarrow A, I, H$ cố định, điểm K thay đổi.

$$\left(\widehat{d; d'} \right) = \left(\widehat{\Delta; d'} \right) = \widehat{IAK} = \alpha$$

Mà $\sin \alpha = \frac{IK}{IA} \geq \frac{IH}{IA}$ (Do $IK \geq IH$) suy ra $\alpha_{\min} \Leftrightarrow H \equiv K$ hay d' qua A và H .

Khi đó d' là hình chiếu vuông góc của Δ trên (P) .

Ta có: $\left(\widehat{d; d'} \right)_{\min} \Leftrightarrow \vec{u}_{d'} = [\vec{n}_{(P)}; \vec{n}_{AIH}] = [\vec{n}_{(P)}; [\vec{n}_{(P)}; \vec{u}_\Delta]]$.

- TH2: $\left(\widehat{d; (Q)} \right)_{\max} \Leftrightarrow \vec{u}_{d'} = [\vec{n}_{(P)}; [\vec{n}_{(P)}; \vec{n}_{(Q)}]]$.

$$\text{Tổng kết: } \begin{cases} \left(\widehat{d; d'} \right)_{\min} \Leftrightarrow \vec{u}_{d'} = [\vec{n}_{(P)}; [\vec{n}_{(P)}; \vec{u}_\Delta]] \\ \left(\widehat{d; (Q)} \right)_{\max} \Leftrightarrow \vec{u}_{d'} = [\vec{n}_{(P)}; [\vec{n}_{(P)}; \vec{n}_{(Q)}]] \end{cases}$$

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua $A(1;0;1)$, nằm trong mặt phẳng $(P): 2x + y - z - 1 = 0$ và tạo với đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$ một góc nhỏ nhất. Biết $\vec{u} = (5; b; c)$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ . Tìm $b + c$.

Câu 20. Cho mặt phẳng $(P): x - y + z - 2 = 0$, điểm $A(2; 1; 1)$ thuộc mặt phẳng (P) và đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$. Đường thẳng d' qua A nằm trong (P) sao cho góc giữa 2 đường thẳng d và d' nhỏ nhất cắt mặt phẳng (Oyz) tại điểm E . Tính $P = OE$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -1); B(-1; 1; 2)$. Gọi (Q) là phương trình mặt phẳng đi qua 2 điểm A, B sao cho (Q) tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc nhỏ nhất. Khoảng cách từ gốc O đến mặt phẳng (Q) bằng:

A. $d = \frac{7}{\sqrt{35}}$.

B. $d = \frac{\sqrt{70}}{10}$.

C. $d = \frac{\sqrt{70}}{70}$.

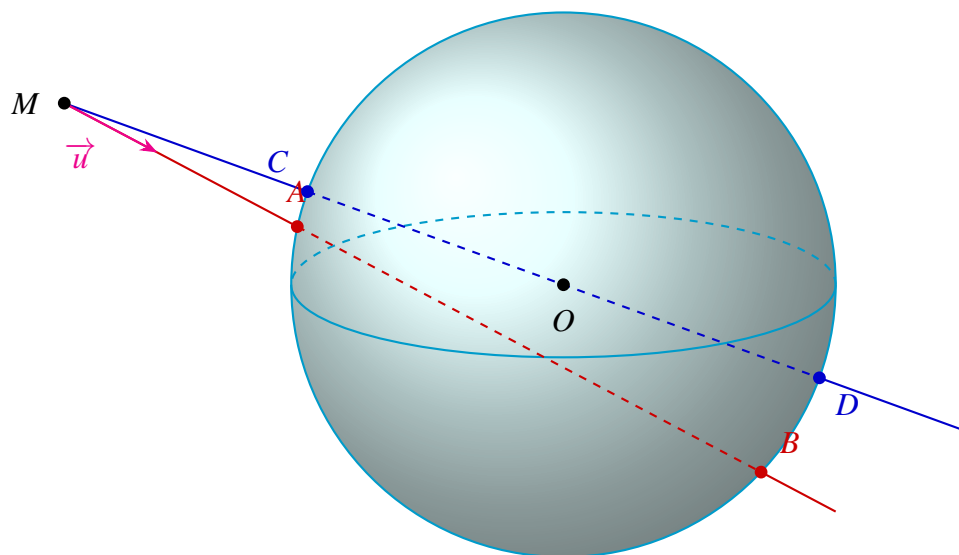
D. $d = \frac{\sqrt{70}}{35}$.

5 BÀI TOÁN PHƯƠNG TÍCH CỦA MỘT ĐIỂM VỚI MẶT CẦU

Cho mặt cầu (S) tâm O , bán kính R và một điểm M cố định. Một đường thẳng Δ bất kỳ đi qua M cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A và B . Khi đó, tích vô hướng của hai vector $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ là một hằng số, không phụ thuộc vào vị trí của cát tuyến Δ . Hằng số đó được gọi là phương tích của điểm M đối với mặt cầu (S) , ký hiệu là $\mathcal{P}_{M/(S)}$.

Công thức:

$$\mathcal{P}_{M/(S)} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2 \quad (1)$$



Cách 1: Chứng minh bằng Hình học thuần túy (Mặt cắt)

Phương pháp này chuyển bài toán từ không gian 3D về bài toán phẳng 2D cực kỳ trực quan.

- **Bước 1:** Xét mặt phẳng (P) chứa điểm M và cát tuyến Δ (đường thẳng chứa A, B). Nếu tâm $O \notin \Delta$, ta hoàn toàn có thể chọn mặt phẳng (P) chứa điểm M , điểm O và cắt Δ dọc theo chính nó.
- **Bước 2:** Mặt phẳng (P) sẽ cắt mặt cầu (S) theo một **đường tròn lớn** (đường tròn tâm O , bán kính R). Lúc này, A, B chính là các điểm nằm trên đường tròn lớn đó.
- **Bước 3:** Kẻ cát tuyến thứ hai đi qua M và tâm O , cắt mặt cầu tại C và D . Tứ giác $ACBD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn lớn.
- **Bước 4:** Xét hai tam giác $\triangle MAC$ và $\triangle MDB$:
 - Góc $\widehat{M}$ chung.
 - $\widehat{MCA} = \widehat{MBD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AD).

Do đó, $\triangle MAC \sim \triangle MDB$ (g-g).

- **Kết luận:** Ta có tỉ số đồng dạng:

$$\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB} \implies MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

Lại có C, D, O thẳng hàng, do đó khoảng cách $MC = MO - R$ và $MD = MO + R$.

$$\implies \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB = (MO - R)(MO + R) = MO^2 - R^2 \quad (\text{đpcm})$$

Cách 2: Chứng minh bằng Hình học Vector (Siêu gọn & Đỉnh cao)

Đây là cách tiếp cận bằng đại số vector, thể hiện bản chất nội tại của phương tích mà không cần kẻ vẽ phụ.

- **Bước 1:** Gọi $\vec{u}$ là vector đơn vị ($|\vec{u}| = 1$) nằm trên đường thẳng Δ có hướng từ M đi qua cát tuyến. Mọi điểm $X \in \Delta$ đều có thể biểu diễn dưới dạng tham số:

$$\overrightarrow{MX} = t\vec{u} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- **Bước 2:** Điểm X nằm trên mặt cầu (S) khi và chỉ khi khoảng cách từ X đến O bằng R :

$$OX^2 = R^2 \iff |\overrightarrow{MX} - \overrightarrow{MO}|^2 = R^2$$

- **Bước 3:** Thay $\overrightarrow{MX} = t\vec{u}$ vào phương trình, ta được:

$$|t\vec{u} - \overrightarrow{MO}|^2 = R^2 \iff t^2|\vec{u}|^2 - 2t(\overrightarrow{MO} \cdot \vec{u}) + MO^2 = R^2$$

Vì $|\vec{u}| = 1$, phương trình bậc hai theo t trở thành:

$$t^2 - 2(\overrightarrow{MO} \cdot \vec{u})t + (MO^2 - R^2) = 0$$

- **Bước 4:** Hai giao điểm A, B của đường thẳng và mặt cầu chính là 2 nghiệm t_1, t_2 của phương trình trên (tương ứng $\overrightarrow{MA} = t_1\vec{u}$ và $\overrightarrow{MB} = t_2\vec{u}$). Áp dụng định lý Viète:

$$t_1 \cdot t_2 = MO^2 - R^2$$

- **Kết luận:** Ta có tích vô hướng:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (t_1\vec{u}) \cdot (t_2\vec{u}) = t_1t_2|\vec{u}|^2 = t_1t_2$$

Suy ra:

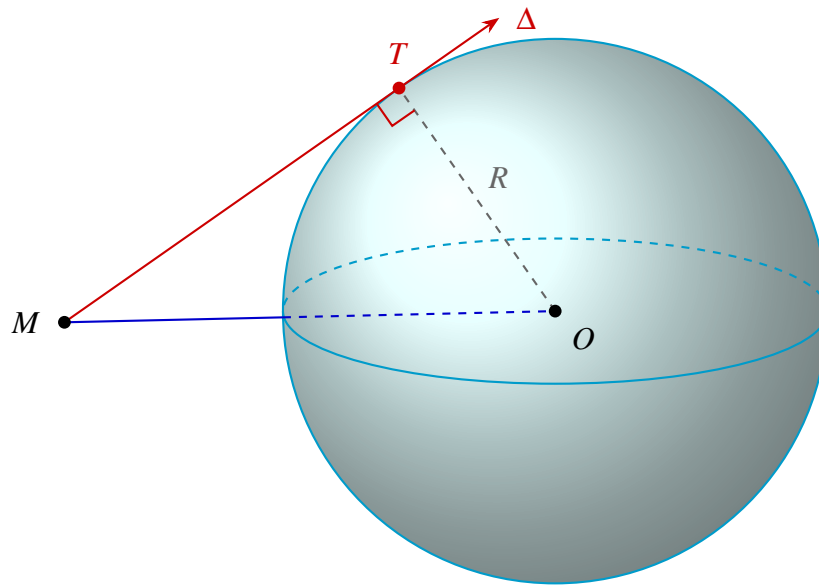
$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2 \quad (\text{đpcm})$$

Hệ quả: Trường hợp Δ là Tiếp tuyến

Khi đường thẳng Δ di chuyển ra xa tâm O và trở thành **tiếp tuyến** của mặt cầu (S) tại tiếp điểm T , hai giao điểm A và B chập làm một ($A \equiv B \equiv T$).

Khi đó, tam giác $\triangle MTO$ vuông tại T (do tiếp tuyến vuông góc với bán kính). Áp dụng định lý Pytago, công thức phương tích trở nên cực kỳ đơn giản:

$$\mathcal{P}_{M/(S)} = \overrightarrow{MT} \cdot \overrightarrow{MT} = MT^2 = MO^2 - R^2 \quad (2)$$



Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 3 = 0$ và hai điểm $A(1; 1; 1); B(-3; -3; -3)$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C . Biết rằng C luôn thuộc đường tròn cố định. Tính bán kính đường tròn đó.

- A. $R = 4$. B. $R = 6$. C. $R = \frac{2\sqrt{33}}{3}$. D. $R = \frac{2\sqrt{11}}{3}$.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 18 = 0$, M là điểm di chuyển trên mặt phẳng (P) ; N là điểm nằm trên tia OM sao cho $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 24$. Tìm giá trị nhỏ nhất của khoảng cách từ N đến mặt phẳng (P) .

- A. $\min d[N, (P)] = 6$. B. $\min d[N, (P)] = 4$. C. $\min d[N, (P)] = 2$. D. $\min d[N, (P)] = 0$.

6 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài tập 1

Bài toán: (GHK2, Nguyễn Đình Chiểu-Tiền Giang, lần 1, 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-2; 1; 2)$, $B(2; 1; -2)$ và $C(1; 1; 1)$. Gọi d là đường thẳng đi qua C sao cho tổng khoảng cách từ A và B đến d lớn nhất. Giao điểm của d với mặt phẳng $(P): 2x + y + z = 0$ có tọa độ là

- A. $\left(1; -\frac{1}{10}; 1\right)$. B. $(1; 3; 1)$. C. $(1; -3; 1)$. D. $\left(1; \frac{1}{10}; 1\right)$.

Bài tập 2

Bài toán: (TT, Lê Xoay, Vĩnh Phúc, 2018, L3) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 2; -2)$, $B(3; -3; 3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng

A. $6\sqrt{3}$.

B. $12\sqrt{3}$.

C. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

D. $5\sqrt{3}$.

Bài tập 3

Bài toán: (Đề TT lần 1, Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai, Sóc Trăng 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + 2z - 13 = 0$. Xét các mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ đi qua điểm A , tiếp xúc với mặt phẳng (P) . Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + 2b^2 + 3c^2$ khi (S) có bán kính nhỏ nhất.

Bài tập 4

Bài toán: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c là các số thực dương thay đổi sao cho $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tính khoảng cách lớn nhất từ O đến mặt phẳng (ABC) .

A. $\frac{1}{3}$.

B. 3.

C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

D. 1.

Bài tập 5

Bài toán: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ có phương trình lần lượt là $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 16$ và $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 = 4$. Gọi (P) là mặt phẳng thay đổi tiếp xúc với cả hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$. Tính khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) .

A. $\frac{9}{2} - \sqrt{15}$.

B. $\sqrt{15}$.

C. $\frac{9 + \sqrt{15}}{2}$.

D. $\frac{8\sqrt{3} + \sqrt{5}}{2}$.

Bài tập 6

Bài toán: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a \geq 4, b \geq 5, c \geq 6$ và mặt cầu (S) có bán kính bằng $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Khi tổng $OA + OB + OC$ đạt giá trị nhỏ nhất thì mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

A. $\sqrt{2}x + 2y + 2z + 3 - 2\sqrt{2} = 0.$

B. $\sqrt{2}x + 2y - \sqrt{2}z + 6 + 3\sqrt{2} = 0.$

C. $\sqrt{2}x + 2y - 2z + 3 + 2\sqrt{2} = 0.$

D. $2x + \sqrt{2}y + 2z + 7 - 2\sqrt{2} = 0.$

Bài tập 7

Bài toán: Cho ba tia Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc. Một điểm M cố định và khoảng cách từ điểm M đến các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$ lần lượt là a, b, c . Biết tồn tại mặt phẳng (P) qua M và cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

- A. $V_{\min} = \frac{9abc}{2}$. B. $V_{\min} = \frac{abc}{6}$. C. $V_{\min} = 27abc$. D. $V_{\min} = \frac{abc}{3}$.

Bài tập 8

Bài toán: Trong không gian với trục hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): ax + by + cz + d = 0$ với $(a^2 + b^2 + c^2 > 0)$ đi qua hai điểm $M(5; 1; 3)$ và $N(1; 6; 2)$. Biết rằng khoảng cách từ điểm $P(5; 0; 4)$ đến mặt phẳng (α) đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị biểu thức $S = \frac{|a + b + c + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

A. $S = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

B. $S = \frac{4\sqrt{14}}{7}$.

C. $S = \frac{\sqrt{14}}{7}$.

D. $S = \frac{10\sqrt{14}}{7}$.

Bài tập 9

Bài toán: Cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z + 3 = 0$. Đường thẳng d đi qua O và cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt A, B . Giá trị lớn nhất của $OA + OB$ bằng

A. $3\sqrt{6}$.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $2\sqrt{6}$.

D. $\sqrt{6}$.

Bài tập 10

Bài toán: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(m; 0; 0)$, $B(0; 2m + 1; 0)$, $C(0; 0; 2m + 5)$ khác O . D là một điểm nằm khác phía với O so với mặt phẳng (ABC) sao cho tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối diện bằng nhau. Tìm khoảng cách ngắn nhất từ O đến tâm I mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$

A. $\sqrt{11}$.

B. $\sqrt{10}$.

C. $\sqrt{6}$.

D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Bài tập 11

Bài toán: Trong không gian với tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;-2)$ và $B(3;4;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 25$ và $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 14 = 0$. M, N là hai điểm thuộc (P) sao cho $MN = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ là

A. $\sqrt{34} - 1$.

B. 5.

C. $\sqrt{34}$.

D. 3.

Bài tập 12

Bài toán: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y - 3)^2 + (z - 6)^2 = 45$ và $M(1; 4; 5)$. Ba đường thẳng thay đổi d_1, d_2, d_3 nhưng đôi một vuông góc tại O cắt mặt cầu tại điểm thứ hai lần lượt là A, B, C . Tính khoảng cách lớn nhất từ M đến mặt phẳng (ABC) là

A. 3.

B. $\sqrt{5}$.

C. 4.

D. $\sqrt{6}$.

Bài tập 13

Bài toán: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(1; 3; 10)$, $B(4; 6; 5)$ và M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (Oxy) sao cho MA, MB cùng tạo với mặt phẳng (Oxy) các góc bằng nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của AM

A. $6\sqrt{3}$.

B. 10.

C. $\sqrt{10}$.

D. $8\sqrt{2}$.

Bài tập 14

Bài toán: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 3)$, $B(1; 0; 5)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{2}$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng d để $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

Bài tập 15

Bài toán: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -4; 4)$, $B(-1; -2; 4)$ và $C(0; -4; 4)$. Mặt phẳng (P) có dạng $ax + 2025y + cz + d = 0$ đi qua điểm A sao cho hai điểm B, C nằm về cùng một phía. Đặt $h_1 = d(B, (P))$ là khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (P) và $h_2 = d(C, (P))$ là khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (P) . Khi biểu thức $2025h_1 + 2026h_2$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của biểu thức $T = -9a + 10c + d$ bằng bao nhiêu?

Bài tập 16

Bài toán: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;1)$, $B(m;0;0)$, $C(0;n;0)$ và một điểm $D(1;1;1)$, với $m+n=1$. Biết rằng luôn tồn tại một mặt cầu đi qua điểm $D(1;1;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) . Tính bán kính của mặt cầu đó.