CHƯƠNG III

GIỚI HẠN
HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI 1: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

I LÝ THUYẾT.

1. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

1. Định nghĩa

Ta nói rằng dãy số (u_n) ***có giới hạn là 0*** khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $\lim u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Ta nói dãy số (v_n) có giới hạn hữu hạn là a (hay v_n dần tới a) khi $n \to +\infty$, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - a) = 0$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$ hay $\lim v_n = a$ hay $v_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

2. Một số giới hạn cơ bản:

a) $\lim\dfrac{1}{n} = 0$; $\lim\dfrac{1}{n^k} = 0, \left(k \in \mathbb{N}^*\right)$;

a) $\lim\dfrac{c}{n} = 0$; $\lim\dfrac{c}{n^k} = 0, \left(k \in \mathbb{N}^*\right)$; c là hằng số;

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$;

d) Dãy số (u_n) với $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ có giới hạn là một số vô tỉ và gọi giới hạn đó là e,

$$e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

.

II. ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ và c là hằng số thì :

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$ • $\lim(u_n - v_n) = a - b$
- $\lim(u_n.v_n) = a.b$ • $\lim\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}, (b \neq 0)$
- $\lim(c.u_n) = c.a$. • $\lim|u_n| = |a|$ và $\lim\sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{a}$

b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim\sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

Kỹ năng sử dụng máy tính

Tính $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ thì nhập u_n và ấn phím CALC $n = 10^{10}$.

III. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q, với $|q|<1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $S=\dfrac{u_1}{1-q}$

IV. GIỚI HẠN VÔ CỰC

• Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n\to+\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim u_n=+\infty$ hay $u_n\to+\infty$ khi $n\to+\infty$.

• Dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n\to+\infty$, nếu $\lim(-u_n)=+\infty$.

Kí hiệu: $\lim u_n=-\infty$ hay $u_n\to-\infty$ khi $n\to+\infty$.

Nhận xét: $u_n=+\infty\Leftrightarrow\lim(-u_n)=-\infty$.

Nhận xét

a) $\lim n^k=+\infty$ với k nguyên dương;

b) $\lim q^n=+\infty$ nếu $q>1$.

c) Nếu $\lim u_n=a$ và $\lim v_n=\pm\infty$ thì $\lim\dfrac{u_n}{v_n}=0$.

d) Nếu $\lim u_n=a>0$, $\lim v_n=0$ và $v_n>0,\forall n>0$ thì $\lim\dfrac{u_n}{v_n}=+\infty$.

e) $\lim u_n=+\infty\Leftrightarrow\lim(-u_n)=-\infty$

e) Nếu $\lim u_n=+\infty$ và $\lim v_n=a>0$ thì $\lim u_n.v_n=+\infty$.

CHÚ Ý:

Quy tắc tìm giới hạn tích $\lim(u_n.v_n)$

Nếu $\lim u_n=L,\lim v_n=+\infty(\text{hay}-\infty)$. Khi đó $\lim(u_n v_n)$

$\lim u_n=L$	$\lim v_n$	$\lim(u_n v_n)$
$+$	$+\infty$	$+\infty$
$+$	$-\infty$	$-\infty$
$-$	$+\infty$	$-\infty$
$-$	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc tìm giới hạn thương $\lim\frac{u_n}{v_n}$

$\lim u_n$	$\lim v_n$	Dấu của v_n	$\lim\frac{u_n}{v_n}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L>0$	0	+	$+\infty$
	0	–	$-\infty$
$L<0$	0	+	$-\infty$
	0	–	$+\infty$

Nhận xét: Ta thường dùng quy tắc giới hạn tích trong bài toán giới hạn vô cực của dãy số.

TÓM TẮT CÁC GIỚI HẠN ĐẶC BIỆT

Giới hạn hữu hạn	**Giới hạn vô cực**
1. Giới hạn đặc biệt: $\lim\frac{1}{n}=0$; $\lim\frac{1}{n^k}=0\ (k\in\mathbb{Z}^+)$ $\lim q^n=0\ (\lvert q\rvert<1)$; $\lim C=C$ ***2. Định lí:*** *a) Nếu lim u_n = a, lim v_n = b thì* • *lim = a + b* • *lim = a – b* • *lim = a.b* • $\lim\frac{u_n}{v_n}=\frac{a}{b}$ *b) Nếu $u_n\geq 0$, $\forall n$ và lim u_n= a* *thì $a\geq 0$ và lim* $\sqrt{u_n}=\sqrt{a}$ *c) Nếu* $\lvert u_n\rvert\leq v_n$, *$\forall n$ và lim v_n = 0* *thì lim u_n = 0* *d) Nếu lim u_n = a thì* $\lim\lvert u_n\rvert=\lvert a\rvert$ ***3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn*** $S=u_1+u_1q+u_1q^2+\ldots=\frac{u_1}{1-q}\ (\lvert q\rvert<1)$	***1. Giới hạn đặc biệt:*** $\lim\sqrt{n}=+\infty$; $\lim n^k=+\infty\ (k\in\mathbb{Z}^+)$ $\lim q^n=+\infty\ (q>1)$ ***2. Định lí:*** *a) Nếu* $\lim\lvert u_n\rvert=+\infty$ *thì* $\lim\frac{1}{u_n}=0$ *b) Nếu lim u_n = a, lim v_n = $\pm\infty$ thì* $\lim\frac{u_n}{v_n}=0$ *c) Nếu lim u_n = a $\neq$ 0, lim v_n = 0* *thì lim* $\frac{u_n}{v_n}=\begin{cases}+\infty & \text{nếu } a.v_n>0\\ -\infty & \text{nếu } a.v_n<0\end{cases}$ *d) Nếu lim u_n = $+\infty$, lim v_n = a* *thì lim =* $\begin{cases}+\infty & \text{nếu } a>0\\ -\infty & \text{nếu } a<0\end{cases}$ ** Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định:* $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0.\infty$ *thì phải tìm cách khử dạng vô định.*

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: CHỨNG MINH DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0

Phương pháp giải: Để chứng minh $\lim u_n = 0$ ta chứng minh với mỗi số $a > 0$ nhỏ tùy ý luôn tồn tại một số n_o sao cho $|u_n| < a \quad \forall n > n_o$.

Câu 1: Chứng minh rằng $\lim \dfrac{1}{n^2+1} = 0$

Câu 2: Chứng minh rằng $\lim \dfrac{\sin^2 n}{n+2} = 0$

Câu 3: Chứng minh rằng $\lim \left(\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \dfrac{1}{3^{n+1}} \right) = 0$

DẠNG 2: TÌM GIỚI HẠN BẰNG 0 CỦA DÃY SỐ

Phương pháp giải: Sử dụng *định nghĩa giới hạn 0* và *các giới hạn đặc biệt* để giải quyết bài toán.

Câu 4: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{n+2}$. Tính $\lim u_n$

Câu 5: Cho dãy số (u_n) với $u_n = (-0,97)^n$. Tính $\lim u_n$

Câu 6: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n + 2\sin(n+1)}{n\sqrt[3]{n} + 2\sqrt[3]{n}}$. Tính $\lim u_n$

Câu 7: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$. Tính $\lim u_n$

Câu 8: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{-2n^3 + 3n^2 + 4}{n^4 + 4n^3 + n}$. Tính $\lim u_n$

Câu 9: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{(-1)^n . 2^{5n+1}}{3^{5n+2}}$. Tính $\lim u_n$

Câu 10: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{(-5)^n + 4^n}{(-7)^{n+1} + 4^{n+1}}$. Tính $\lim u_n$

Câu 11: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n + \sqrt{n^2+1}}{n.3^n}$. Tính $\lim u_n$

Câu 12: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}$. Tính $\lim u_n$

Câu 13: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{\sqrt{4n^2+1} - 2n}{\sqrt{n^2+4n+1} - n}$. Tính $\lim u_n$

Câu 14: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1+2+3+4+...+n}{\left(1+3+3^2+3^3+...+3^n\right).(n+1)}$. Tính $\lim u_n$

Câu 15: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$. Tính $\lim(u_n - 1)$

Câu 16: Dùng định nghĩa dãy số có giới hạn 0 tìm $\lim u_n$ với $u_n = \dfrac{(-1)^n}{3n+2}$.

Câu 17: Dùng định nghĩa dãy số có giới hạn 0 tìm $\lim u_n$ với $u_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt{n^3+2n}}$.

Câu 18: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n\sqrt{n}+1}{n^2+2\sqrt{n}-3}$. Tính $\lim u_n$

Câu 19: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}$. Tính $\lim u_n$

Câu 20: Dùng định nghĩa dãy số có giới hạn 0 tìm $\lim u_n$ với $u_n = \dfrac{1+\cos n^3}{2n+3}$.

Câu 21: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n+\sqrt{n^2+1}}{n.3^n}$. Tính $\lim u_n$

Câu 22: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1.3.5.7....(2n-1)}{2.4.6...2\,\mathrm{n}}$. Tính $\lim u_n$

Câu 23: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2^n}, (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$. Tính $\lim(u_n - 2)$

DẠNG 3. TÍNH GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ (u_n) có $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ (trong đó $P(n), Q(n)$ là các đa thức của n)

Phương pháp giải: Chia tử và mẫu cho n^k với n^k là lũy thừa có số mũ cao nhất của $P(n), Q(n)$, sau đó áp dụng các định lí về giới hạn hữu hạn

Câu 24: $\lim u_n$, với $u_n = \dfrac{5n^2+3n-7}{n^2}$ bằng:

Câu 25: Tính giới hạn $\lim \dfrac{-4n^2+n+2}{2n^2+n+1}$

Câu 26: Tính giới hạn $\lim \dfrac{n^4}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}$

Câu 27: Tính giới hạn $\lim(2n+1)^2\left(\dfrac{3}{n^2+2n} - \dfrac{1}{n^2+3n-1}\right)$

DẠNG 4. TÍNH GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ $(\mathrm{u_n})$ có $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ (trong đó $P(n)$ và $Q(n)$ là các biểu thức chứa căn của n.

Phương pháp giải

- Đánh giá bậc của tử và và mẫu. Sau đó, chia cả tử và mẫy cho n^k với k là số mũ lớn nhất của $P(n)$ và $Q(n)$ (hoặc rút n^k là lũy thừa lớn nhất của $P(n)$ và $Q(n)$ ra làm nhân tử. Áp dụng các định lí về giới hạn để tìm giới hạn

Câu 28: Tìm $\lim \dfrac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n}+1}$.

Câu 29: Tìm $\lim \dfrac{\sqrt{2n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

Câu 30: Tìm $\lim \dfrac{\sqrt[3]{n^3+n}}{3n+2}$.

Câu 31: Tìm $\lim \dfrac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{4n-5}}$.

Câu 32: Tìm $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+3}-2n+1}{\sqrt{n^2+2n}+3n}$.

Câu 33: Tìm $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2-n+1}-n}{\sqrt{9n^2+3n}}$.

Câu 34: Tìm $\lim \dfrac{2n+1-\sqrt{n^2+2n-4}}{3n+\sqrt{n^2+7}}$.

Câu 35: Tìm $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+3}-2n+1}{n(\sqrt{n^2+3}-2n)}$.

Câu 36: Tìm $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2-1}+\sqrt[3]{8n^3+2n^2-3}}{\sqrt{16n^2+4n}-\sqrt[4]{n^4+1}}$.

DẠNG 5. NHÂN VỚI MỘT LƯỢNG LIÊN HỢP

Phương pháp giải

Sử dụng các công thức nhân liên hợp.

- $a^2-b^2=(a+b)(a-b)\rightarrow\left[\begin{array}{l} a-b=\dfrac{a^2-b^2}{a+b} \\ a+b=\dfrac{a^2-b^2}{a-b} \end{array}\right.$
- $a-b=\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ • $a+b=\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$.
- $\sqrt[3]{a}-b=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}-b\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.b+b^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.b+b^2}=\dfrac{a-b^3}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.b+b^2}$.
- $\sqrt[3]{a}+b=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}+b\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.b+b^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.b+b^2}=\dfrac{a+b^3}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.b+b^2}$
- $a-\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(a-\sqrt[3]{b}\right)\left[a^2+a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{a^2+a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a^3-b}{a^2+a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$
- $a+\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(a+\sqrt[3]{b}\right)\left[a^2-a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{a^2-a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a^3+b}{a^2-a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$

- $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a-b}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$.

- $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a+b}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$

Câu 37: Tìm $\lim\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)$.

Câu 38: Tìm $\lim\left(\sqrt{9n^2+3n-4}-3n+2\right)$.

Câu 39: Tìm $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n\right)$.

Câu 40: Tìm $\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}-2n+3\right)$.

Câu 41: Tìm $\lim\left(n+\sqrt[3]{4n^2-n^3}\right)$.

Câu 42: Tìm $\lim\left(\sqrt{4n^2+3n+7}-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)$.

Câu 43: Tìm $\lim\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-\sqrt[3]{n^6+1}\right)$.

Câu 44: Tìm $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+n}-n}{\sqrt{4n^2+3n}-2n}$.

Câu 45: Tìm $\lim\dfrac{2n-\sqrt{4n^2+n}}{n+\sqrt[3]{4n^2-n^3}}$.

Câu 46: Tìm $\lim\left(2n-\sqrt{9n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}\right)$.

Câu 47: Tìm $\lim\left(\sqrt{n^2-2n}+2\sqrt[3]{n^2-8n^3}+3\sqrt{n^2+n}\right)$.

DẠNG 6 $u_n=\dfrac{P(n)}{Q(n)}$ (trong đó $P(n)$ và $Q(n)$ là các biểu thức chứa hàm mũ $a^n,b^n,c^n,...$

Phương pháp giải: Chia cả tử và mẫu cho a^n trong đó a là cơ số lớn nhất.

Câu 48: Tìm $\lim\dfrac{1-2^n}{1+2^n}$.

Câu 49: Tìm $\lim\dfrac{4^n}{2.3^n+4^n}$.

Câu 50: Tìm $\lim\dfrac{2^n+4^n}{4^n-3^n}$.

Câu 51: Tìm $\lim\dfrac{3.2^n-5^n}{5.4^n+6.5^n}$.

Câu 52: Tìm $\lim\dfrac{3^n-2.5^n}{7+3.5^n}$.

Câu 53: Tìm $\lim\dfrac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}$.

Câu 54: Tìm $\lim\dfrac{4^{n+2}+6^{n+1}}{5^{n-1}+2.6^{n+3}}$.

Câu 55: Tìm $\lim\dfrac{2^n-3^n+4.5^{n+2}}{2^{n+1}+3^{n+2}+5^{n+1}}$.

Câu 56: Tìm $\lim\dfrac{2^n-3^n+5^{n+2}}{2^{n+1}+3^{n+2}+5^{n+1}}$.

Câu 57: Tìm $\lim\dfrac{2^n+3^n-4^{n+3}}{2^n-3^{n+1}+4^{n-1}}$.

Câu 58: Tìm $\lim\dfrac{(-2)^n-4.5^{n+1}}{2.4^n+3.5^n}$.

Câu 59: Tìm $\lim\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

Câu 60: Tìm $\lim\dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^n-2^{n+1}+1}{5.2^n+\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}-3}$.

Câu 61: Tìm $\lim\dfrac{\pi^n+3^n+2^{2n}}{3\pi^n-3^n+2^{2n+2}}$.

Câu 62: Tìm $\lim\dfrac{\pi^{n+1}+3^n+2^n}{5.\pi^n-4.3^n+2^{n+2}}$.

Câu 63: Tìm $\lim\dfrac{(-1)^n.2^{5n+1}}{3^{5n+2}}$.

Câu 64: Tìm $\lim\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{5^3}+...+\dfrac{1}{5^n}\right)$.

Câu 65: Tìm $\lim\left(\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{8}+...+\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right)$.

Câu 66: Tìm $\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+...+\dfrac{1}{3^n}}$.

Câu 67: Tìm $\lim\dfrac{1+2+2^2+2^3+...+2^n}{1+3+3^2+3^3+...+3^n}$.

DẠNG 7: Dãy số (u_n) trong đó u_n là một tổng hoặc một tích của n số hạng (hoặc n thừa số)

Phương pháp: Rút gọn u_n rồi tìm $\lim u_n$ theo định lí hoặc dùng nguyên lí định lí kẹp để suy ra $\lim u_n$

□ Cho hai dãy số (u_n) và (v_n). Nếu $|u_n|\le v_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$ với $\lim v_n=0$ thì $\lim u_n=0$.

□ Cho 3 dãy số (x_n), (y_n), (z_n) và số thực L. Nếu $x_n\le y_n\le z_n$ và $\lim x_n=\lim z_n=L$ thì $\lim y_n=L$.

Câu 68: Tính giới hạn $\lim\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$

Câu 69: Tính giới hạn $\lim\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

Câu 70: Tính giới hạn $\lim\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}\right)$

Câu 71: Tính giới hạn $\lim\frac{1.3.5.7...(2n-1)}{2.4.6.....(2n)}$

Câu 72: Tính giới hạn $\lim\frac{3\sin n-4\cos n}{2n^2+1}$

Câu 73: $\lim\frac{\sin(n!)}{n^2+1}$ bằng

Câu 74: $\lim\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ bằng

DẠNG 8. u_n **cho bằng công thức truy hồi**

Phương pháp giải: Tìm công thức số hạng tổng quát của u_n rồi sử dụng các phương pháp tính giới hạn dãy số.

Câu 75: Tìm $\lim u_n$ biết $(u_n):\begin{cases}u_1=\frac{1}{2}\\ u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n},\ n=1,2,3,...\end{cases}$.

Câu 76: Tìm $\lim u_n$ biết $(u_n):\begin{cases}u_1=2\\ u_{n+1}=\frac{u_n+1}{2},\ n=1,2,3,...\end{cases}$.

Câu 77: Tìm $\lim\frac{u_n}{n^2}$ biết $(u_n):\begin{cases}u_1=1,u_2=3\\ u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n+1,\ n=1,2,3,...\end{cases}$.

Câu 78: Tìm $\lim\frac{u_n}{3.2^n}$ biết $(u_n):\begin{cases}u_1=1,u_2=6\\ u_{n+2}=3u_{n+1}+2u_n,\ n=1,2,3,...\end{cases}$.

Câu 79: Tìm $\lim u_n$ biết (u_n) có giới hạn hữu hạn và $(u_n):\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=\frac{2u_n+3}{u_n+2},\ n=1,2,3,...\end{cases}$.

Câu 80: Tìm $\lim u_n$ biết (u_n) có giới hạn hữu hạn và $(u_n):\begin{cases}u_1=\sqrt{2}\\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n},\ n=1,2,3,...\end{cases}$.

Câu 81: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1=1,\ u_{n+1}=\frac{2(2u_n+1)}{u_n+3}$ với mọi $n\ge 1$. Biết dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, $\lim u_n$ bằng:

Câu 82: Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn $a=2,151515...$ (chu kỳ 15), a được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản, trong đó m,n là các số nguyên dương. Tìm tổng $m+n$.

Câu 83: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,32111...$ được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$, trong đó a,b là các số nguyên dương. Tính $a-b$.

DẠNG 9: GIỚI HẠN CỦA DÃY CHỨA ĐA THỨC HOẶC CĂN THEO n

Phương pháp: Rút bậc lớn nhất của đa thức làm nhân tử chung. **(Tử riêng, mẫu riêng)**.

Câu 84: Gía trị của $\lim\left(n^4-2n^2+3\right)$ là.

Câu 85: Giá trị của $\lim\left(-2n^3+3n-1\right)$ là.

Câu 86: Giá trị của $\lim\left(-2n^2+4\right)^3$ là.

Câu 87: Giá trị của $\lim\left(2n-\sqrt{n^3+2n-2}\right)$ là.

Câu 88: Giá trị của $\lim\frac{2n^4-3n^3+2}{n^3+2}$ là.

Câu 89: Giá trị của $\lim\frac{(2n-1)\left(3n^2+2\right)^3}{-2n^5+4n^3-1}$ là.

Câu 90: Giá trị của $\lim\frac{3n^2-\sqrt{2n^4+3n-2}}{4n-\sqrt{3n^2+2}}$ là.

Câu 91: $\lim\left(n^2-n\sqrt{4n+1}\right)$ bằng.

Câu 92: Cho dãy số (u_n) xác định $u_1=0$, $u_2=1$, $u_{n+1}=2u_n-u_{n-1}+2$ với mọi $n\geq 2$. Tìm giới hạn của dãy số (u_n).

DẠNG 10: GIỚI HẠN CỦA DÃY CHỨA LŨY THỪA BẬC n

Phương pháp: Rút cơ số lớn nhất của đa thức làm nhân tử chung. (Tử riêng, mẫu riêng).

Câu 93: $\lim\left(5^n-2^n\right)$ bằng.

Câu 94: $\lim\left(3.2^{n+1}-5.3^n+7n\right)$ bằng.

Câu 95: Giá trị của $\lim\frac{9^n-3.4^n}{6.7^n+8^n}$ là.

Câu 96: Giá trị của $\lim\frac{3+3^2+3^3+...+3^n}{1+2+2^2+...+2^n}$ là.

BÀI TẬP TỰ LUẬN TỔNG HỢP.

Câu 97: Tìm giới hạn sau $\lim\frac{2n^3-2n+3}{1-4n^3}$

Câu 98: Tìm giới hạn sau $\lim\frac{\sqrt{n^4+2n+2}}{n^2+1}$

Câu 99: Tìm giới hạn sau $\lim\frac{3^{n+1}-4^n}{4^{n-1}+3}$

Câu 100: Tìm giới hạn sau $\lim\dfrac{n^3+1}{n^2-2n+3}$

Câu 101: Tìm giới hạn sau $\lim\dfrac{1+2+2^2+...+2^n}{1+3+3^2+...+3^n}$

Câu 102: Giá trị của $L=\lim\dfrac{\left(2n^2+1\right)^4\left(n+2\right)^9}{n^{17}+1}$ bằng

Câu 103: Tìm tất cả các giá trị của tham số a để $L=\lim\dfrac{5n^2-3an^4}{\left(1-a\right)n^4+2n+1}>0.$

Câu 104: Kết quả của giới hạn $\lim\dfrac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n}$ bằng:

Câu 105: Biết rằng $\lim\dfrac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}}=b\sqrt{3}+c$ với a, b, c là các tham số. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{a+c}{b^3}.$

Câu 106: Tìm giới hạn sau $\lim(\sqrt{n^2-4n}-n)$

Câu 107: Tìm giới hạn sau $\lim\left(\sqrt[3]{2n-3n^3}+n-1\right)$

Câu 108: Tìm giới hạn sau $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$

Câu 109: Tìm giới hạn sau $\lim\left(\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2-3}\right)$

Câu 110: Tìm giới hạn sau $\lim\dfrac{\sqrt{4n^2+1}-n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}-n}$

Câu 111: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1}\right)$ bằng:

Câu 112: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2-n+1}-n\right)$ là:

Câu 113: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\right)$ là:

Câu 114: Có bao nhiêu giá trị của a để $\lim\left(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+\left(a+2\right)n+1}\right)=0.$

Câu 115: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thỏa $\lim\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=0$.

Câu 116: Cho dãy số $\left(u_n\right)$ với $u_n=\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}$, trong đó a là tham số thực. Tìm a để $\lim u_n=-1.$

Câu 117: Tính $\lim n\left(\sqrt{4n^2+3}-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)$

Câu 118: Tính giới hạn của dãy số $L=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-2\sqrt[3]{n^3+n^2-1}+n\right)$.:

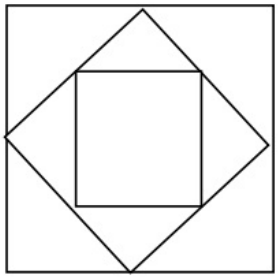
Câu 119: Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+....$

Câu 120: Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S=-4+2-1+....$

Câu 121: Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}+...$ có kết quả bằng:

Câu 122: Tính giới hạn $\lim\frac{1+\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+...+\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+...+\left(\frac{3}{4}\right)^n}$

Câu 123: Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài là 1. Ta nội tiếp trong hình vuông này một hình vuông thứ 2, có đỉnh là trung điểm của các cạnh của nó. Và cứ thế ta nội tiếp theo hình vẽ. Tính tổng chu vi của các hình vuông đó



CHƯƠNG III

GIỚI HẠN
HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI 1: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

I LÝ THUYẾT.

1. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

1. Định nghĩa

Ta nói rằng dãy số (u_n) ***có giới hạn là 0*** khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $\lim u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Ta nói dãy số (v_n) có giới hạn hữu hạn là a (hay v_n dần tới a) khi $n \to +\infty$, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - a) = 0$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$ hay $\lim v_n = a$ hay $v_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

2. Một số giới hạn cơ bản:

a) $\lim\dfrac{1}{n} = 0$; $\lim\dfrac{1}{n^k} = 0, \left(k \in \mathbb{N}^*\right)$;

a) $\lim\dfrac{c}{n} = 0$; $\lim\dfrac{c}{n^k} = 0, \left(k \in \mathbb{N}^*\right)$; c là hằng số;

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$;

d) Dãy số (u_n) với $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ có giới hạn là một số vô tỉ và gọi giới hạn đó là e,

$$e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

.

II. ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ và c là hằng số thì :

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$ • $\lim(u_n - v_n) = a - b$
- $\lim(u_n.v_n) = a.b$ • $\lim\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}, (b \neq 0)$
- $\lim(c.u_n) = c.a$. • $\lim|u_n| = |a|$ và $\lim\sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{a}$

b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim\sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

Kỹ năng sử dụng máy tính

Tính $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ thì nhập u_n và ấn phím CALC $n = 10^{10}$.

III. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q, với $|q|<1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $S=\dfrac{u_1}{1-q}$

IV. GIỚI HẠN VÔ CỰC

• Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n\to+\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim u_n=+\infty$ hay $u_n\to+\infty$ khi $n\to+\infty$.

• Dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n\to+\infty$, nếu $\lim(-u_n)=+\infty$.

Kí hiệu: $\lim u_n=-\infty$ hay $u_n\to-\infty$ khi $n\to+\infty$.

Nhận xét: $u_n=+\infty\Leftrightarrow\lim(-u_n)=-\infty$.

Nhận xét

a) $\lim n^k=+\infty$ với k nguyên dương;

b) $\lim q^n=+\infty$ nếu $q>1$.

c) Nếu $\lim u_n=a$ và $\lim v_n=\pm\infty$ thì $\lim\dfrac{u_n}{v_n}=0$.

d) Nếu $\lim u_n=a>0$, $\lim v_n=0$ và $v_n>0,\forall n>0$ thì $\lim\dfrac{u_n}{v_n}=+\infty$.

e) $\lim u_n=+\infty\Leftrightarrow\lim(-u_n)=-\infty$

e) Nếu $\lim u_n=+\infty$ và $\lim v_n=a>0$ thì $\lim u_n.v_n=+\infty$.

CHÚ Ý:

Quy tắc tìm giới hạn tích $\lim(u_n.v_n)$

Nếu $\lim u_n=L,\lim v_n=+\infty(\text{hay}-\infty)$. Khi đó $\lim(u_n v_n)$

$\lim u_n=L$	$\lim v_n$	$\lim(u_n v_n)$
$+$	$+\infty$	$+\infty$
$+$	$-\infty$	$-\infty$
$-$	$+\infty$	$-\infty$
$-$	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc tìm giới hạn thương $\lim\frac{u_n}{v_n}$

$\lim u_n$	$\lim v_n$	Dấu của v_n	$\lim\frac{u_n}{v_n}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L>0$	0	+	$+\infty$
	0	–	$-\infty$
$L<0$	0	+	$-\infty$
	0	–	$+\infty$

Nhận xét: Ta thường dùng quy tắc giới hạn tích trong bài toán giới hạn vô cực của dãy số.

TÓM TẮT CÁC GIỚI HẠN ĐẶC BIỆT

Giới hạn hữu hạn	**Giới hạn vô cực**
1. Giới hạn đặc biệt: $\lim\frac{1}{n}=0$; $\lim\frac{1}{n^k}=0\ (k\in\mathbb{Z}^+)$ $\lim q^n=0\ (\lvert q\rvert<1)$; $\lim C=C$ ***2. Định lí:*** *a) Nếu lim u_n = a, lim v_n = b thì* • *lim = a + b* • *lim = a – b* • *lim = a.b* • $\lim\frac{u_n}{v_n}=\frac{a}{b}$ *b) Nếu $u_n\geq 0$, $\forall n$ và lim u_n= a* *thì $a\geq 0$ và lim* $\sqrt{u_n}=\sqrt{a}$ *c) Nếu* $\lvert u_n\rvert\leq v_n$, *$\forall n$ và lim v_n = 0* *thì lim u_n = 0* *d) Nếu lim u_n = a thì* $\lim\lvert u_n\rvert=\lvert a\rvert$ ***3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn*** $S=u_1+u_1q+u_1q^2+\ldots=\frac{u_1}{1-q}\ (\lvert q\rvert<1)$	***1. Giới hạn đặc biệt:*** $\lim\sqrt{n}=+\infty$; $\lim n^k=+\infty\ (k\in\mathbb{Z}^+)$ $\lim q^n=+\infty\ (q>1)$ ***2. Định lí:*** *a) Nếu* $\lim\lvert u_n\rvert=+\infty$ *thì* $\lim\frac{1}{u_n}=0$ *b) Nếu lim u_n = a, lim v_n = $\pm\infty$ thì* $\lim\frac{u_n}{v_n}=0$ *c) Nếu lim u_n = a $\neq$ 0, lim v_n = 0* *thì lim* $\frac{u_n}{v_n}=\begin{cases}+\infty & \text{nếu } a.v_n>0\\ -\infty & \text{nếu } a.v_n<0\end{cases}$ *d) Nếu lim u_n = $+\infty$, lim v_n = a* *thì lim =* $\begin{cases}+\infty & \text{nếu } a>0\\ -\infty & \text{nếu } a<0\end{cases}$ ** Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định:* $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0.\infty$ *thì phải tìm cách khử dạng vô định.*

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: CHỨNG MINH DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0

Phương pháp giải: Để chứng minh $\lim u_n = 0$ ta chứng minh với mỗi số $a > 0$ nhỏ tùy ý luôn tồn tại một số n_o sao cho $|u_n| < a \quad \forall n > n_o$.

Câu 1: Chứng minh rằng $\lim \frac{1}{n^2+1} = 0$

Lời giải

Với $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta có $\left|\frac{1}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1} < a \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{1}{a}-1}$.

Chọn $n_o = \left[\sqrt{\frac{1}{a}-1}\right]$. Do đó $\forall a > 0$, $\exists n_0 : n > n_o$ ta luôn có $\left|\frac{1}{n^2+1}\right| < a \Rightarrow \lim \frac{1}{n^2+1} = 0$.

Chú ý: Kí hiệu $[a]$ là lấy phần nguyên của a.

Câu 2: Chứng minh rằng $\lim \frac{\sin^2 n}{n+2} = 0$

Lời giải

Với $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta có $\left|\frac{\sin^2 n}{n+2}\right| = \frac{\sin^2 n}{n+2} < \frac{1}{n+2} < a \Leftrightarrow n > \frac{1}{a} - 2$.

Chọn $n_o = \left[\frac{1}{a} - 2\right]$. Do đó $\forall a > 0$, $\exists n_0 : n > n_o$ ta luôn có $\left|\frac{\sin^2 n}{n+2}\right| < a \Rightarrow \lim \frac{\sin^2 n}{n+2} = 0$.

Chú ý: Kí hiệu $[a]$ là lấy phần nguyên của a.

Câu 3: Chứng minh rằng $\lim\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) = 0$

Lời giải

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $n < 2^n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Với $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta có $\left|\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right| = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < a \Leftrightarrow n > \frac{1}{a}$.

Chọn $n_o = \left[\frac{1}{a}\right]$. Do đó $\forall a > 0$, $\exists n_0 : n > n_o$ ta luôn có $\left|\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right| < a$

$\Rightarrow \lim\left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right) = 0$.

Chú ý: Kí hiệu $[a]$ là lấy phần nguyên của a.

DẠNG 2: TÌM GIỚI HẠN BẰNG 0 CỦA DÃY SỐ

Phương pháp giải: Sử dụng *định nghĩa giới hạn 0* và *các giới hạn đặc biệt* để giải quyết bài toán.

Câu 4: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{\sqrt{n+1}}{n+2}$. Tính $\lim u_n$

Lời giải

Ta có: $|u_n|=\left|\dfrac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right|<\dfrac{\sqrt{n+1}}{n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}<\dfrac{1}{\sqrt{n}},\forall n\in\mathbb{N}.$

Vì $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$ nên $\lim u_n=0$.

Câu 5: Cho dãy số (u_n) với $u_n=(-0,97)^n$. Tính $\lim u_n$

Lời giải

Theo công thức giới hạn đặc biệt, ta có: $|-0,97|<1$ nên $\lim u_n=0.$

Câu 6: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{n+2\sin(n+1)}{n\sqrt[3]{n}+2\sqrt[3]{n}}$. Tính $\lim u_n$

Lời giải

Ta có: $|u_n|=\left|\dfrac{n+2\sin(n+1)}{n\sqrt[3]{n}+2\sqrt[3]{n}}\right|<\dfrac{n+2}{\sqrt[3]{n}(n+2)}<\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}},\forall n\in\mathbb{N}.$

Vì $\lim\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}=0$ nên $\lim u_n=0$.

Câu 7: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\sqrt{n^2+1}-n$. Tính $\lim u_n$

Lời giải

Ta có: $u_n=\sqrt{n^2+1}-n=\dfrac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\dfrac{1}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1\right)}=\dfrac{1}{n}.\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1}$

Vì $\lim\dfrac{1}{n}=0,\ \lim\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1}=\dfrac{1}{2}$ nên $\lim u_n=0$.

Câu 8: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{-2n^3+3n^2+4}{n^4+4n^3+n}$. Tính $\lim u_n$

Lời giải

Ta có: $u_n=\dfrac{-2n^3+3n^2+4}{n^4+4n^3+n}=\dfrac{\dfrac{-2n^3+3n^2+4}{n^4}}{\dfrac{n^4+4n^3+n}{n^4}}=\dfrac{-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{4}{n^4}}{1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^3}}$

Mà $\lim\dfrac{2}{n}=0,\ \lim\dfrac{3}{n^2}=0,\ \lim\dfrac{4}{n^4}=0,\ \lim\dfrac{4}{n}=0$ và $\lim\dfrac{1}{n^3}=0$. Do đó $\lim u_n=\dfrac{0+0+0}{1+0+0}=0$.

Câu 9: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{(-1)^n.2^{5n+1}}{3^{5n+2}}$. Tính $\lim u_n$

Lời giải

Ta có: $u_n = \dfrac{(-1)^n.2^{5n+1}}{3^{5n+2}} = \dfrac{(-1)^n.2.2^{5n}}{3^2.3^{5n}} = \dfrac{(-1).2}{9}.\left(\dfrac{2}{3}\right)^{5n}$

Vì $\left|\dfrac{2}{3}\right|<1$ nên $\lim\left(\dfrac{2}{3}\right)^{5n} = 0$. Do đó $\lim u_n = 0$.

Câu 10: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{(-5)^n + 4^n}{(-7)^{n+1} + 4^{n+1}}$. Tính $\lim u_n$

Lời giải

Ta có: $u_n = \dfrac{(-5)^n\left(1+\dfrac{4^n}{(-5)^n}\right)}{(-7)^n\left(-7+\dfrac{4.4^n}{(-7)^n}\right)} = \left(\dfrac{5}{7}\right)^n.\left(\dfrac{1+\left(-\dfrac{4}{5}\right)^n}{-7+4.\left(\dfrac{-4}{7}\right)^n}\right)$

Vì $\lim\left(-\dfrac{4}{5}\right)^n = \lim\left(-\dfrac{4}{7}\right)^n = 0$ nên $\lim\left(\dfrac{1+\left(-\dfrac{4}{5}\right)^n}{-7+4.\left(\dfrac{-4}{7}\right)^n}\right) = -\dfrac{1}{7}$ và $\lim\left(\dfrac{5}{7}\right)^n = 0$. Do đó

$\lim u_n = 0$.

Câu 11: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n+\sqrt{n^2+1}}{n.3^n}$. Tính $\lim u_n$

Lời giải

Ta có: $u_n = \dfrac{n+\sqrt{n^2+1}}{n.3^n} = \dfrac{\dfrac{n+\sqrt{n^2+1}}{n}}{\dfrac{n.3^n}{n}} = \dfrac{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}{3^n} = \dfrac{1}{3^n}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\right)$

Vì $\lim\dfrac{1}{n^2} = 0$ nên $\lim\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^n}}\right) = 2$ và $\lim\dfrac{1}{3^n} = 0$. Do đó $\lim u_n = 0$.

Câu 12: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}$. Tính $\lim u_n$

Lời giải

Ta có:

$$u_n = \sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n} = \frac{n+2-n}{\left(\sqrt[3]{n+2}\right)^2 + \sqrt[3]{n+2}.\sqrt[3]{n} + \left(\sqrt[3]{n}\right)^2} = \frac{2}{\left(\sqrt[3]{n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}\right)^2 + \sqrt[3]{n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}.\sqrt[3]{n} + \left(\sqrt[3]{n}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\left(\sqrt[3]{n}\right)^2\left[\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{n}}\right)^2 + \sqrt[3]{1+\dfrac{2}{n}} + 1\right]}$$

Vì $\lim\dfrac{2}{3\left(\sqrt[3]{n}\right)^2} = 0$ và $\lim\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{n}}\right)^2 + \sqrt[3]{1+\dfrac{2}{n}} + 1} = \dfrac{1}{3}$. Do đó $\lim u_n = 0$.

Câu 13: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{\sqrt{4n^2+1}-2n}{\sqrt{n^2+4n+1}-n}$. Tính $\lim u_n$

Lời giải

Xử lí tử số : $\sqrt{4n^2+1}-2n = \dfrac{4n^2+1-4n^2}{\sqrt{4n^2+1}+2n} = \dfrac{1}{\sqrt{4n^2+1}+2n}$

Xử lí mẫu số: $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+4n+1}-n} = \dfrac{\sqrt{n^2+4n+1}+n}{n^2+4n+1-n^2} = \dfrac{\sqrt{n^2+4n+1}+n}{4n+1}$

$$\Rightarrow \lim u_n = \lim \frac{\sqrt{n^2+4n+1}+n}{\left(\sqrt{4n^2+1}+2n\right)(2n+1)} = \lim \frac{\sqrt{n^2\left(1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}+n}{\left(\sqrt{n^2\left(4+\frac{1}{n^2}\right)}+2n\right)(2n+1)}$$

$$= \lim \frac{n\left[\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}+1\right]}{n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+2\right)n\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}{n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+2\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \lim \frac{2}{n(2+2)2} = \lim \frac{1}{4n} = 0.$$

Do đó $\lim u_n = 0$.

Câu 14: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1+2+3+4+\ldots+n}{\left(1+3+3^2+3^3+\ldots+3^n\right).(n+1)}$. Tính $\lim u_n$

Lời giải

Xét tử số: Ta thấy $1,2,3,4,\ldots,n$ là một dãy số thuộc cấp số cộng có n số hạng với $u_1 = 1,\ d = 1$.

Tổng n số hạng của cấp số cộng: $S_n = \dfrac{(u_1+u_n)n}{2} = \dfrac{(1+n)n}{2}$.

Xét mẫu số: Ta thấy $1,3,3^2,3^3,\ldots,3^n$ là một dãy số thuộc cấp số nhân có $(n+1)$ số hạng với $u_1 = 1,\ q = 3$.

Tổng $(n+1)$ số hạng của cấp số nhân: $S_{n+1} = u_1.\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{1-3^{n+1}}{1-3} = \dfrac{3^{n+1}-1}{2}$.

$$\Rightarrow u_n = \frac{n}{3^{n+1}-1} = \frac{n}{3.3^n-1}$$

Bằng quy nạp ta luôn có $n < 2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $3^n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow |u_n| = \left|\dfrac{n}{3.3^n-1}\right| < \dfrac{n}{3^n} < \dfrac{2^n}{3^n} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Vì $\lim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ nên $\lim u_n = 0$.

Câu 15: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$. Tính $\lim(u_n-1)$

Lời giải

Ta có : $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)} = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

$= \dfrac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \dfrac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

Vậy $\lim\left(u_n - 1\right) = \lim\left(-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 0.$

Câu 16: Dùng định nghĩa dãy số có giới hạn 0 tìm $\lim u_n$ với $u_n = \dfrac{(-1)^n}{3n+2}$.

Lời giải

Với $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta có $\left|u_n\right| = \left|\dfrac{(-1)^n}{3n+2}\right| = \dfrac{1}{3n+2} < \dfrac{1}{3n} < a \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{3a}$.

Chọn $n_o = \left[\dfrac{1}{3a}\right]$. Do đó $\forall a > 0,\ \exists n_0 : n > n_o$ ta luôn có $\left|u_n\right| < a \Rightarrow \lim\dfrac{(-1)^n}{3n+2} = 0$.

Câu 17: Dùng định nghĩa dãy số có giới hạn 0 tìm $\lim u_n$ với $u_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt{n^3+2n}}$.

Lời giải

Với $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta có $\left|u_n\right| = \left|\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt{n^3+2n}}\right| < \dfrac{\sqrt[n]{n^n}}{\sqrt{n^3+2n}} = \dfrac{n}{\sqrt{n^3+2n}} < \dfrac{n}{n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} < a \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{a^2}$

Chọn $n_o = \left[\dfrac{1}{a^2}\right]$. Do đó $\forall a > 0,\ \exists n_0 : n > n_o$ ta luôn có $\left|u_n\right| < a \Rightarrow \lim\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt{n^3+2n}} = 0$

Câu 18: Cho dãy số $\left(u_n\right)$ với $u_n = \dfrac{2n\sqrt{n}+1}{n^2+2\sqrt{n}-3}$. Tính $\lim u_n$

Lời giải

Ta có: $u_n = \dfrac{2n\sqrt{n}+1}{n^2+2\sqrt{n}-3} = \dfrac{\dfrac{2n\sqrt{n}+1}{n^2}}{\dfrac{n^2+2\sqrt{n}-3}{n^2}} = \dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{2}{n\sqrt{n}}-\dfrac{3}{n^2}}$

Mà $\lim\dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0,\ \lim\dfrac{1}{n^2} = 0,\ \lim\dfrac{2}{n\sqrt{n}} = 0,\ \lim\dfrac{3}{n^2} = 0$ nên $\lim u_n = 0.$

Câu 19: Cho dãy số $\left(u_n\right)$ với $u_n = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}$. Tính $\lim u_n$

Lời giải

Ta có $\dfrac{2k-1}{2k} = \dfrac{2k-1}{\sqrt{4k^2}} \le \dfrac{2k-1}{\sqrt{4k^2-1}} = \sqrt{\dfrac{2k-1}{2k+1}}, \left(\forall k \in \mathbb{N}^*\right)$.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\le\sqrt{\frac{1}{3}}\\ \Rightarrow\frac{3}{4}\le\sqrt{\frac{3}{5}}\\ .....\\ \frac{2n-1}{2n}\le\sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{2}.\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\le\sqrt{\frac{1}{3}}.\sqrt{\frac{3}{5}}\cdots\sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}\Leftrightarrow u_n\le\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Do đó $|u_n|\le\frac{1}{\sqrt{2n+1}},\forall n$. Mà $\lim\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$ do đó $\lim u_n=0$.

Câu 20: Dùng định nghĩa dãy số có giới hạn 0 tìm $\lim u_n$ với $u_n=\frac{1+\cos n^3}{2n+3}$.

Lời giải

Ta luôn có $|\cos n^3|\le 1,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Với $a>0$ nhỏ tùy ý, $|u_n|=\left|\frac{1+\cos n^3}{2n+3}\right|\le\left|\frac{2}{2n+3}\right|\le\left|\frac{2}{2n}\right|=\frac{1}{n}<a\Leftrightarrow n>\frac{1}{a}$.

Chọn $n_o=\left[\frac{1}{a}\right]$. Do đó $\forall a>0$, $\exists n_0: n>n_o$ ta luôn có $|u_n|<a\Rightarrow\lim\frac{1+\cos n^3}{2n+3}=0$.

Câu 21: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{n.3^n}$. Tính $\lim u_n$

Lời giải

Ta có: $u_n=\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{n.3^n}=\frac{\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{n}}{\frac{n.3^n}{n}}=\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{3^n}=\frac{1}{3^n}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)$.

Mà $\lim\frac{1}{n^2}=0$ nên $\lim\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{n^n}}\right)=2$ và $\lim\frac{1}{3^n}=0$. Do đó $\lim u_n=0$.

Câu 22: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{1.3.5.7....(2n-1)}{2.4.6...2\text{n}}$. Tính $\lim u_n$

Lời giải

Ta có: $u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}*$ do đó $(u_n)^2>0,\forall n\in\mathbb{N}*$.

$$\Rightarrow(u_n)^2=\frac{1^2.3^2.5^2.7^2....(2n-1)^2}{2^2.4^2.6^2...(2\text{n})^2}<\frac{1^2.3^2.5^2.7^2....(2n-1)^2}{(2^2-1)(4^2-1)(6^2-1)...\left[(2n)^2-1\right]}$$

$$=\frac{1^2.3^2.5^2.7^2....(2n-1)^2}{1.3.3.5.5.7....(2\text{n}-1)(2\text{n}+1)}=\frac{1}{2n+1}.$$

Do đó ta có $\forall n\in\mathbb{N}*$ thì $0<(u_n)^2<\frac{1}{2n+1}$. Mà $\lim 0=0$ và $\lim\frac{1}{2n+1}=0$ nên $\lim(u_n)^2=0$.

Từ đó suy ra $\lim u_n=0$.

Câu 23: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{2^n}, (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$. Tính $\lim(u_n - 2)$

Lời giải

Ta có : $u_n = (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + ... + (u_2 - u_1) + u_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + ... + \frac{1}{2} + 1$.

Dãy $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}, ..., \frac{1}{2}$ là một cấp số nhân có $(n-1)$ số hạng với số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{2}$ và công bội $q = \frac{1}{2}$ nên $u_n = S_{n-1} + 1 = \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} + 1 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Vậy $\lim(u_n - 2) = \lim\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = 0.$

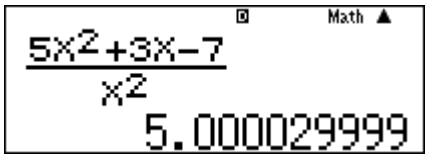
DẠNG 3. TÍNH GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ (u_n) có $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ (trong đó $P(n), Q(n)$ là các đa thức của n)

Phương pháp giải: Chia tử và mẫu cho n^k với n^k là lũy thừa có số mũ cao nhất của $P(n), Q(n)$, sau đó áp dụng các định lí về giới hạn hữu hạn

Câu 24: $\lim u_n$, với $u_n = \dfrac{5n^2 + 3n - 7}{n^2}$ bằng:

Cách 1: Ta có: $\lim u_n = \lim\left(\frac{5n^2}{n^2} + \frac{3n}{n^2} - \frac{7}{n^2}\right) = \lim\left(5 + \frac{3}{n} - \frac{7}{n^2}\right) = 5$.

Cách 2: Sử dụng máy tính bỏ túi tương tự những ví dụ trên.



Đây không phải là giá trị chính xác của giới hạn cần tìm, mà chỉ là giá trị gần đúng của một số hạng với n khá lớn, trong khi n dần ra vô cực. Tuy nhiên kết quả này cũng giúp ta lựa chọn đáp án đúng, đó là đáp án **B.**

Câu 25: Tính giới hạn $\lim \dfrac{-4n^2 + n + 2}{2n^2 + n + 1}$

Lời giải:

Cách 1: $\lim \dfrac{-4n^2 + n + 2}{2n^2 + n + 1} = \lim \dfrac{-4 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \dfrac{-4}{2} = -2$

Cách 2: Quan tâm đến hệ số của số hạng có số mũ cao nhất của tử và mẫu, khi đó ta có thể xem $u_n = \dfrac{-4n^2}{2n^2}$, rút gọn ta được – 2. Vậy giới hạn cần tìm bằng – 2.

Câu 26: Tính giới hạn $\lim \dfrac{n^4}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}$

Lời giải:

Cách 1: $\lim \dfrac{n^4}{(n+1)(2+n)(n^2+1)} = \lim \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{2}{n}+1\right)\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)} = 1$

Cách 2: Ta quan tâm đến hệ số của số hạng có số mũ cao nhất của tử, và hệ số của số hạng có bậc cao nhất trong từng thừa số của mẫu, ta có thể xem $u_n = \dfrac{n^4}{n.n.n^2}$, rút gọn ta được 1. Vậy kết quả giới hạn sẽ bằng 1.

Câu 27: Tính giới hạn $\lim(2n+1)^2\left(\dfrac{3}{n^2+2n} - \dfrac{1}{n^2+3n-1}\right)$

Lời giải:

$$\lim(2n+1)^2\left(\frac{3}{n^2+2n} - \frac{1}{n^2+3n-1}\right) = \lim \frac{(2n+1)^2\left(2n^2+7n-3\right)}{\left(n^2+2n\right)\left(n^2+3n-1\right)}$$

$$= \lim \frac{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^2\left(2+\dfrac{7}{n}-\dfrac{3}{n^2}\right)}{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{2^2.2}{1.1} = 8$$

DẠNG 4. TÍNH GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ (u_n) có $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ (trong đó $P(n)$ và $Q(n)$ là các biểu thức chứa căn của n.

Phương pháp giải

- Đánh giá bậc của tử và và mẫu. Sau đó, chia cả tử và mẫy cho n^k với k là số mũ lớn nhất của $P(n)$ và $Q(n)$ (hoặc rút n^k là lũy thừa lớn nhất của $P(n)$ và $Q(n)$ ra làm nhân tử. Áp dụng các định lí về giới hạn để tìm giới hạn

Câu 28: Tìm $\lim \dfrac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n}+1}$.

Lời giải

Cách 1. $\lim \dfrac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n}+1} = \lim \dfrac{\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}}{1+\sqrt{\dfrac{1}{n}}} = \sqrt{2}$.

Cách 2. Quan tâm đến số hạng có chứa số mũ cao nhất, ta có thể xem $u_n = \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{n}}$, sau đó rút gọn ta được $\sqrt{2}$. Vậy giới hạn cần tìm là $\sqrt{2}$.

Câu 29: Tìm $\lim \frac{\sqrt{2n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

Lời giải

Cách 1. $\lim \frac{\sqrt{2n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \lim \frac{\sqrt{2+\frac{2}{n}}-1}{1} = \sqrt{2}-1$.

Cách 2. Quan tâm đến số hạng có chứa số mũ cao nhất, ta có thể xem $u_n = \frac{\sqrt{2n}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}-1$, sau đó rút gọn ta được $\sqrt{2}-1$. Vậy giới hạn cần tìm là $\sqrt{2}-1$.

Câu 30: Tìm $\lim \frac{\sqrt[3]{n^3+n}}{3n+2}$.

Lời giải

Cách 1. $\lim \frac{\sqrt[3]{n^3+n}}{3n+2} = \lim \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{1}{3}$.

Cách 2. Quan tâm đến số hạng có chứa số mũ cao nhất, ta có thể xem $u_n = \frac{\sqrt[3]{n^3}}{3n}$, sau đó rút gọn ta được $\frac{1}{3}$. Vậy giới hạn cần tìm là $\frac{1}{3}$.

Câu 31: Tìm $\lim \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{4n-5}}$.

Lời giải

Cách 1. $\lim \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{4n-5}} = \lim \frac{\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\sqrt{1+\frac{3}{n}}}{\sqrt{4-\frac{5}{n}}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Cách 2. Quan tâm đến số hạng có chứa số mũ cao nhất, ta có thể xem $u_n = \frac{\sqrt{2n}-\sqrt{n}}{\sqrt{4n}}$, sau đó rút gọn ta được $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. Vậy giới hạn cần tìm là $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Câu 32: Tìm $\lim \frac{\sqrt{4n^2+3}-2n+1}{\sqrt{n^2+2n}+3n}$.

Lời giải

Cách 1. $\lim\dfrac{\sqrt{4n^2+3}-2n+1}{\sqrt{n^2+2n}+3n}=\lim\dfrac{\sqrt{4+\dfrac{3}{n^2}}-2+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+3}=0$.

Cách 2. Quan tâm đến số hạng có chứa số mũ cao nhất, ta có thể xem $u_n=\dfrac{\sqrt{4n^2}-2n}{\sqrt{n^2}+n}$, sau đó rút gọn ta được 0. Vậy giới hạn cần tìm là 0.

Câu 33: Tìm $\lim\dfrac{\sqrt{4n^2-n+1}-n}{\sqrt{9n^2+3n}}$.

Lời giải

Cách 1. $\lim\dfrac{\sqrt{4n^2-n+1}-n}{\sqrt{9n^2+3n}}=\lim\dfrac{\sqrt{4-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}-1}{\sqrt{9+\dfrac{3}{n}}}=\dfrac{2-1}{3}=\dfrac{1}{3}$.

Cách 2. Quan tâm đến số hạng có chứa số mũ cao nhất, ta có thể xem $u_n=\dfrac{\sqrt{4n^2}-n}{\sqrt{9n^2}}$, sau đó rút gọn ta được $\dfrac{1}{3}$. Vậy giới hạn cần tìm là $\dfrac{1}{3}$.

Câu 34: Tìm $\lim\dfrac{2n+1-\sqrt{n^2+2n-4}}{3n+\sqrt{n^2+7}}$.

Lời giải

Cách 1. $\lim\dfrac{2n+1-\sqrt{n^2+2n-4}}{3n+\sqrt{n^2+7}}=\lim\dfrac{2+\dfrac{1}{n}-\sqrt{1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{4}{n^2}}}{3+\sqrt{1+\dfrac{7}{n}}}=\dfrac{1}{4}$.

Cách 2. Quan tâm đến số hạng có chứa số mũ cao nhất, ta có thể xem $u_n=\dfrac{2n-\sqrt{n^2}}{3n+\sqrt{n^2}}$, sau đó rút gọn ta được $\dfrac{1}{4}$. Vậy giới hạn cần tìm là $\dfrac{1}{4}$.

Câu 35: Tìm $\lim\dfrac{\sqrt{4n^2+3}-2n+1}{n(\sqrt{n^2+3}-2n)}$.

Lời giải

Cách 1. $\lim\dfrac{\sqrt{4n^2+3}-2n+1}{n(\sqrt{n^2+3}-2n)}=\lim\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n^4}}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n^2}}-2}=0$.

Cách 2. Quan tâm đến số hạng có chứa số mũ cao nhất, ta có thể xem $u_n = \dfrac{\sqrt{4n^2}-2n}{n\left(\sqrt{n^2}-2n\right)}$, sau đó rút gọn ta được 0. Vậy giới hạn cần tìm là 0.

Câu 36: Tìm $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2-1}+\sqrt[3]{8n^3+2n^2-3}}{\sqrt{16n^2+4n}-\sqrt[4]{n^4+1}}$.

Lời giải

Cách 1. $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2-1}+\sqrt[3]{8n^3+2n^2-3}}{\sqrt{16n^2+4n}-\sqrt[4]{n^4+1}} = \lim \dfrac{\sqrt{4-\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{8+\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^3}}}{\sqrt{16+\dfrac{4}{n}}-\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{n^4}}} = \dfrac{2+2}{4-1} = \dfrac{4}{3}$.

Cách 2. Quan tâm đến số hạng có chứa số mũ cao nhất, ta có thể xem $u_n = \dfrac{\sqrt{4n^2}+\sqrt[3]{8n^3}}{\sqrt{16n^2}-\sqrt[4]{n^4}}$, sau đó rút gọn ta được $\dfrac{4}{3}$. Vậy giới hạn cần tìm là $\dfrac{4}{3}$.

DẠNG 5. NHÂN VỚI MỘT LƯỢNG LIÊN HỢP

Phương pháp giải

Sử dụng các công thức nhân liên hợp.

- $a^2-b^2=(a+b)(a-b) \rightarrow \left[\begin{array}{l} a-b=\dfrac{a^2-b^2}{a+b} \\ a+b=\dfrac{a^2-b^2}{a-b} \end{array}\right.$
- $a-b=\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ • $a+b=\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$.
- $\sqrt[3]{a}-b=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}-b\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.b+b^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.b+b^2}=\dfrac{a-b^3}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.b+b^2}$.
- $\sqrt[3]{a}+b=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}+b\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.b+b^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.b+b^2}=\dfrac{a+b^3}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.b+b^2}$
- $a-\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(a-\sqrt[3]{b}\right)\left[a^2+a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{a^2+a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a^3-b}{a^2+a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$
- $a+\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(a+\sqrt[3]{b}\right)\left[a^2-a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{a^2-a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a^3+b}{a^2-a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$

- $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a-b}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$.

- $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a+b}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$

Câu 37: Tìm $\lim\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)$.

Lời giải

Cách 1. $\lim\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)=\lim\dfrac{\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n+5}+n\right)}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}$

$=\lim\dfrac{3n+5}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}=\lim\dfrac{3+\dfrac{5}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}+1}=\dfrac{3}{2}$.

Cách 2. Nhân với một lượng liên hợp, sau đó rút gọn và làm như cách 2 ở trên.

Nhận xét: Khi nào sử dụng nhân với lượng liên hợp?

□ Khi $u_n=\sqrt{n^2+3n+5}-n=n\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}-1\right)$. Trong đó, $\lim n=+\infty,\lim\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}-1\right)$, khi đó $\lim u_n$ có dạng $+\infty.0$ (đây là một dạng vô định) và ta không thể tính giới hạn củ u_n theo hướng này.

□ Vậy khi nào thì chọn cách nhân với một lượng liên hợp???

Cụ thể với $u_n=\sqrt{n^2+3n+5}-n$ xét ở trên trong căn ta chỉ quan tâm đến biểu thức có chứa n^2 là cao nhất, còn lại bỏ hết, khi đó ta có thể xem $u_n=\sqrt{n^2}-n=0$, khi có điều này thì ta sẽ tìm giới hạn theo hướng nhân với một lượng liên hợp.

□ Một ví dụ sau cho thấy ta không cần nhân với một lượng liên hợp.

Ví dụ $u_n=\sqrt{2n^2+3n+5}-n$ xét ở trên trong căn ta chỉ quan tâm đến biểu thức có chứa n^2 là cao nhất, còn lại bỏ hết, khi đó ta có thể xem $u_n=\sqrt{2n^2}-n=n\left(\sqrt{2}-1\right)$, trong đó $\sqrt{2}-1>0$ và $\lim n=+\infty$, nên giới hạn của u_n là $+\infty$.

Cụ thể ta làm như sau: $\lim\left(\sqrt{2n^2+3n+5}-n\right)=\lim\left[n\left(\sqrt{2+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}-1\right)\right]=+\infty$

Câu 38: Tìm $\lim\left(\sqrt{9n^2+3n-4}-3n+2\right)$.

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt{9n^2+3n-4}-3n+2\right)=\lim\left[\frac{\left(\sqrt{9n^2+3n-4}-3n\right)\left(\sqrt{9n^2+3n-4}+3n\right)}{\sqrt{9n^2+3n-4}+3n}+2\right]$$

$$=\lim\left[\frac{3n-4}{\sqrt{9n^2+3n-4}+3n}+2\right]=\lim\left[\frac{3-\frac{4}{n}}{\sqrt{9+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}+3}+2\right]=\frac{3}{3+3}+2=\frac{5}{2}$$

Câu 39: Tìm $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n\right)$.

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n\right)=\lim\frac{\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n\right)\left(\sqrt[3]{\left(n^3+3n^2\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3+3n^2}+n^2\right)}{\sqrt[3]{\left(n^3+3n^2\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3+3n^2}+n^2}$$

$$=\lim\frac{3n^2}{\sqrt[3]{\left(n^3+3n^2\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3+3n^2}+n^2}=\lim\frac{3}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}}+1}=1$$

Câu 40: Tìm $\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}-2n+3\right)$.

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}-2n+3\right)$$

$$=\lim\left[\frac{\left(\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}-2n\right)\left(\sqrt[3]{\left(8n^3+4n^2+2\right)^2}+2n\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}+4n^2\right)}{\sqrt[3]{\left(8n^3+4n^2+2\right)^2}+2n\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}+4n^2}+3\right]$$

$$=\lim\left[\frac{4n^2+2}{\sqrt[3]{\left(8n^3+4n^2+2\right)^2}+2n\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}+4n^2}+3\right]$$

$$=\lim\left[\frac{4+\frac{2}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(8+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}\right)^2}+2\sqrt[3]{8+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}+4}+3\right]=\frac{4}{4+4+4}+3=\frac{10}{3}$$

Câu 41: Tìm $\lim\left(n+\sqrt[3]{4n^2-n^3}\right)$.

Lời giải

$$\lim\left(n+\sqrt[3]{4n^2-n^3}\right)=\lim\frac{\left(n+\sqrt[3]{4n^2-n^3}\right)\left(n^2-n\sqrt[3]{4n^2-n^3}+\sqrt[3]{\left(4n^2-n^3\right)^2}\right)}{n^2-n\sqrt[3]{4n^2-n^3}+\sqrt[3]{\left(4n^2-n^3\right)^2}}$$

$$=\lim\frac{4n^2}{n^2-n\sqrt[3]{4n^2-n^3}+\sqrt[3]{\left(4n^2-n^3\right)^2}}=\lim\frac{4}{1-\sqrt[3]{\frac{4}{n}-1}+\sqrt[3]{\left(\frac{4}{n}-1\right)^2}}=\frac{4}{1+1+1}=\frac{4}{3}$$

Câu 42: Tìm $\lim\left(\sqrt{4n^2+3n+7}-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)$.

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt{4n^2+3n+7}-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)=\lim\left(\sqrt{4n^2+3n+7}-2n+2n-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)$$

Trong đó

□ $\lim\left(\sqrt{4n^2+3n+7}-2n\right)=\lim\frac{\left(\sqrt{4n^2+3n+7}-2n\right)\left(\sqrt{4n^2+3n+7}+2n\right)}{\sqrt{4n^2+3n+7}+2n}$

$$=\lim\frac{3n+7}{\sqrt{4n^2+3n+7}+2n}=\lim\frac{3+\frac{7}{n}}{\sqrt{4+\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}}+2}=\frac{3}{4}$$

□ $\lim\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)=\lim\frac{\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)\left(4n^2+2n\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}+\sqrt[3]{\left(8n^3+5n^2+1\right)^2}\right)}{4n^2+2n\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}+\sqrt[3]{\left(8n^3+5n^2+1\right)^2}}$

$$=\lim\frac{-5n^2-1}{4n^2+2n\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}+\sqrt[3]{\left(8n^3+5n^2+1\right)^2}}$$

$$=\lim\frac{-5-\frac{1}{n^2}}{4+2\sqrt[3]{8+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{\left(8+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2}}=-\frac{5}{12}$$

Suy ra $\lim\left(\sqrt{4n^2+3n+7}-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)=\frac{3}{4}-\frac{5}{12}=\frac{1}{3}$

Câu 43: Tìm $\lim\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-\sqrt[3]{n^6+1}\right)$.

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-\sqrt[3]{n^6+1}\right)=\lim\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2+n^2-\sqrt[3]{n^6+1}\right)$$

Trong đó

$\square$ $\lim\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2\right)=\lim\dfrac{\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2\right)\left(\sqrt{n^4+n^2+1}+n^2\right)}{\sqrt{n^4+n^2+1}+n^2}=\lim\dfrac{n^2+1}{\sqrt{n^4+n^2+1}+n^2}$

$=\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1}=\dfrac{1}{2}$

$\square$ $\lim\left(n^2-\sqrt[3]{n^6+1}\right)=\lim\dfrac{\left(n^2-\sqrt[3]{n^6+1}\right)\left(n^4+n^2\sqrt[3]{n^6+1}+\sqrt[3]{\left(n^6+1\right)^2}\right)}{n^4+n^2\sqrt[3]{n^6+1}+\sqrt[3]{\left(n^6+1\right)^2}}$

$=\lim\dfrac{-1}{n^4+n^2\sqrt[3]{n^6+1}+\sqrt[3]{\left(n^6+1\right)^2}}=\lim\dfrac{-\dfrac{1}{n^4}}{1+\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n^6}}+\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{1}{n^6}\right)^2}}=0$

Suy ra $\lim\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-\sqrt[3]{n^6+1}\right)=\dfrac{1}{2}+0=\dfrac{1}{2}$.

Câu 44: Tìm $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+n}-n}{\sqrt{4n^2+3n}-2n}$.

Lời giải

Ta có

$\square$ $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim\dfrac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=\dfrac{1}{2}$

$\square$ $\lim\left(\sqrt{4n^2+3n}-2n\right)=\lim\dfrac{\left(\sqrt{4n^2+3n}-2n\right)\left(\sqrt{4n^2+3n}+2n\right)}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}=\lim\dfrac{3n}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}$

$=\lim\dfrac{3}{\sqrt{4+\dfrac{3}{n}}+2}=\dfrac{3}{4}$

Suy ra $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+n}-n}{\sqrt{4n^2+3n}-2n}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{3}{4}=\dfrac{2}{3}$.

Câu 45: Tìm $\lim\dfrac{2n-\sqrt{4n^2+n}}{n+\sqrt[3]{4n^2-n^3}}$.

Lời giải

Ta có

$\square\ \lim\left(2n-\sqrt{4n^2+n}\right)=\lim\dfrac{\left(2n-\sqrt{4n^2+n}\right)\left(2n+\sqrt{4n^2+n}\right)}{2n+\sqrt{4n^2+n}}=\lim\dfrac{-n}{2n+\sqrt{4n^2+n}}$

$=\lim\dfrac{-1}{2+\sqrt{4+\dfrac{1}{n}}}=-\dfrac{1}{4}$

$\square\ \lim\left(n+\sqrt[3]{4n^2-n^3}\right)=\lim\dfrac{\left(n+\sqrt[3]{4n^2-n^3}\right)\left(n^2-n\sqrt[3]{4n^2-n^3}+\sqrt[3]{\left(4n^2-n^3\right)^2}\right)}{n^2-n\sqrt[3]{4n^2-n^3}+\sqrt[3]{\left(4n^2-n^3\right)^2}}$

$=\lim\dfrac{4n^2}{n^2-n\sqrt[3]{4n^2-n^3}+\sqrt[3]{\left(4n^2-n^3\right)^2}}=\lim\dfrac{4}{1-\sqrt[3]{\dfrac{4}{n}-1}+\sqrt[3]{\left(\dfrac{4}{n}-1\right)^2}}=\dfrac{4}{1+1+1}=\dfrac{4}{3}$

Suy ra $\lim\dfrac{2n-\sqrt{4n^2+n}}{n+\sqrt[3]{4n^2-n^3}}=\left(-\dfrac{1}{4}\right):\dfrac{4}{3}=-\dfrac{3}{16}.$

Câu 46: Tìm $\lim\left(2n-\sqrt{9n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}\right).$

Lời giải

$\lim\left(2n-\sqrt{9n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}\right)=\lim\left(3n-\sqrt{9n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}-n\right)$

Trong đó

$\square\ \lim\left(3n-\sqrt{9n^2+n}\right)=\lim\dfrac{\left(3n-\sqrt{9n^2+n}\right)\left(3n+\sqrt{9n^2+n}\right)}{3n+\sqrt{9n^2+n}}=\lim\dfrac{-n}{3n+\sqrt{9n^2+n}}$

$=\lim\dfrac{-1}{3+\sqrt{9+\dfrac{1}{n}}}=-\dfrac{1}{6}$

$\square\ \lim\left(3n-\sqrt{9n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}-n\right)=\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)=\lim\dfrac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n}$

$=\lim\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1}=1$

Suy ra $\lim\left(2n-\sqrt{9n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}\right)=-\dfrac{1}{6}+1=\dfrac{5}{6}.$

Câu 47: Tìm $\lim\left(\sqrt{n^2-2n}+2\sqrt[3]{n^2-8n^3}+3\sqrt{n^2+n}\right).$

Lời giải

$\lim\left(\sqrt{n^2-2n}+2\sqrt[3]{n^2-8n^3}+3\sqrt{n^2+n}\right)$

$=\lim\left[\left(\sqrt{n^2-2n}-n\right)+2\left(n+\sqrt[3]{n^2-8n^3}\right)+3\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\right]$

Trong đó

$\square$ $\lim\left(\sqrt{n^2-2n}-n\right)=\lim\dfrac{\left(\sqrt{n^2-2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2-2n}+n\right)}{\sqrt{n^2-2n}+n}=\lim\dfrac{-2n}{\sqrt{n^2-2n}+n}=\lim\dfrac{-2n}{\sqrt{n^2-2n}+n}$

$=\lim\dfrac{-2}{\sqrt{1-\dfrac{2}{n}}+1}=-1$

$\square$ $\lim\left(n+\sqrt[3]{n^2-8n^3}\right)=\lim\dfrac{\left(2n+\sqrt[3]{n^2-8n^3}\right)\left(4n^3-2n\sqrt[3]{n^2-8n^3}+\sqrt[3]{\left(n^2-8n^3\right)^2}\right)}{4n^2-2n\sqrt[3]{n^2-8n^3}+\sqrt[3]{\left(n^2-8n^3\right)^2}}$

$=\lim\dfrac{n^2}{4n^3-2n\sqrt[3]{n^2-8n^3}+\sqrt[3]{\left(n^2-8n^3\right)^2}}=\lim\dfrac{1}{4-2\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}-8}+\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{n}-8\right)^2}}=\dfrac{1}{4+4+4}=\dfrac{1}{12}$

$\square$ $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim\dfrac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=\dfrac{1}{2}$

Suy ra $\lim\left(\sqrt{n^2-2n}+2\sqrt[3]{n^2-8n^3}+3\sqrt{n^2+n}\right)=-1+2.\dfrac{1}{12}+3\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}.$

DẠNG 6 $u_n=\dfrac{P(n)}{Q(n)}$ (trong đó $P(n)$ và $Q(n)$ là các biểu thức chứa hàm mũ $a^n,b^n,c^n,...$

Phương pháp giải: Chia cả tử và mẫu cho a^n trong đó a là cơ số lớn nhất.

Câu 48: Tìm $\lim\dfrac{1-2^n}{1+2^n}$.

Lời giải

Cách 1. $\lim\dfrac{1-2^n}{1+2^n}=\lim\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+1}=-1$

Cách 2. Chỉ quan tâm đến biểu thức chứa 2^n ở tử và mẫu, ta có thể xem $u_n=\dfrac{-2^n}{2^n}$ rút gọn ta được -1, đó chính là giới hạn cần tìm.

Câu 49: Tìm $\lim\dfrac{4^n}{2.3^n+4^n}$.

Lời giải

Cách 1. $\lim\dfrac{4^n}{2.3^n+4^n}=\lim\dfrac{1}{2.\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+1}=1$

Cách 2. Chỉ quan tâm đến biểu thức chứa hàm mũ có cơ số lớn nhất là 4 ở tử và mẫu, ta có thể xem $u_n = \dfrac{4^n}{4^n}$ rút gọn ta được 1, đó chính là giới hạn cần tìm.

Câu 50: Tìm $\lim \dfrac{2^n + 4^n}{4^n - 3^n}$.

Lời giải

Cách 1. $\lim \dfrac{2^n + 4^n}{4^n - 3^n} = \lim \dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 1}{1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n} = 1$

Cách 2. Chỉ quan tâm đến biểu thức chứa hàm mũ có cơ số lớn nhất là 4 ở tử và mẫu, ta có thể xem $u_n = \dfrac{4^n}{4^n}$ rút gọn ta được 1, đó chính là giới hạn cần tìm.

Câu 51: Tìm $\lim \dfrac{3.2^n - 5^n}{5.4^n + 6.5^n}$.

Lời giải

Cách 1. $\lim \dfrac{3.2^n - 5^n}{5.4^n + 6.5^n} = \lim \dfrac{3\left(\dfrac{2}{5}\right)^n - 1}{5\left(\dfrac{4}{5}\right)^n + 6} = -\dfrac{1}{6}$

Cách 2. Chỉ quan tâm đến biểu thức chứa hàm mũ có cơ số lớn nhất là 5 ở tử và mẫu, ta có thể xem $u_n = \dfrac{-5^n}{6.5^n}$ rút gọn ta được $-\dfrac{1}{6}$, đó chính là giới hạn cần tìm.

Câu 52: Tìm $\lim \dfrac{3^n - 2.5^n}{7 + 3.5^n}$.

Lời giải

Cách 1. $\lim \dfrac{3^n - 2.5^n}{7 + 3.5^n} = \lim \dfrac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n - 2}{7\left(\dfrac{1}{5}\right)^n + 3} = -\dfrac{2}{3}$.

Cách 2. Chỉ quan tâm đến biểu thức chứa hàm mũ có cơ số lớn nhất là 5 ở tử và mẫu, ta có thể xem $u_n = \dfrac{-2.5^n}{3.5^n}$ rút gọn ta được $-\dfrac{2}{3}$, đó chính là giới hạn cần tìm.

Câu 53: Tìm $\lim \dfrac{4.3^n + 7^{n+1}}{2.5^n + 7^n}$.

Lời giải

Cách 1. $\lim\dfrac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}=\lim\dfrac{4.3^n+7.7^n}{2.5^n+7^n}\lim\dfrac{4\left(\dfrac{3}{7}\right)^n+7}{2\left(\dfrac{5}{7}\right)^n+1}=7$.

Cách 2. Chỉ quan tâm đến biểu thức chứa hàm mũ có cơ số lớn nhất là 7 ở tử và mẫu, ta có thể xem $u_n=\dfrac{7^{n+1}}{7^n}$ rút gọn ta được 7, đó chính là giới hạn cần tìm.

Câu 54: Tìm $\lim\dfrac{4^{n+2}+6^{n+1}}{5^{n-1}+2.6^{n+3}}$.

Lời giải

Cách 1. $\lim\dfrac{4^{n+2}+6^{n+1}}{5^{n-1}+2.6^{n+3}}=\lim\dfrac{4^2.4^n+6.6^n}{\dfrac{1}{5}.5^n+2.6^3.6^n}=\lim\dfrac{4^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+6}{\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n+2.6^3}=\dfrac{1}{72}$.

Cách 2. Chỉ quan tâm đến biểu thức chứa hàm mũ có cơ số lớn nhất là 6 ở tử và mẫu, ta có thể xem $u_n=\dfrac{6^{n+1}}{2.6^{n+3}}$ rút gọn ta được $\dfrac{1}{72}$, đó chính là giới hạn cần tìm.

Câu 55: Tìm $\lim\dfrac{2^n-3^n+4.5^{n+2}}{2^{n+1}+3^{n+2}+5^{n+1}}$.

Lời giải

Cách 1. $\lim\dfrac{2^n-3^n+4.5^{n+2}}{2^{n+1}+3^{n+2}+5^{n+1}}=\lim\dfrac{\left(\dfrac{2}{5}\right)^n-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+4.5^2}{2.\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+3^2\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+5}=20$.

Cách 2. Chỉ quan tâm đến biểu thức chứa hàm mũ có cơ số lớn nhất là 5 ở tử và mẫu, ta có thể xem $u_n=\dfrac{4.5^{n+2}}{5^{n+1}}$ rút gọn ta được 20, đó chính là giới hạn cần tìm.

Câu 56: Tìm $\lim\dfrac{2^n-3^n+5^{n+2}}{2^{n+1}+3^{n+2}+5^{n+1}}$.

Lời giải

Cách 1. $\lim\dfrac{2^n-3^n+5^{n+2}}{2^{n+1}+3^{n+2}+5^{n+1}}=\lim\dfrac{\left(\dfrac{2}{5}\right)^n-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+5^2}{2.\left(\dfrac{2}{5}\right)^n+3^2.\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+5}=5$.

Cách 2. Chỉ quan tâm đến biểu thức chứa hàm mũ có cơ số lớn nhất là 5 ở tử và mẫu, ta có thể xem $u_n=\dfrac{5^{n+2}}{5^{n+1}}$ rút gọn ta được 5, đó chính là giới hạn cần tìm.

Câu 57: Tìm $\lim\dfrac{2^n+3^n-4^{n+3}}{2^n-3^{n+1}+4^{n-1}}$.

Lời giải

Cách 1. $\lim\dfrac{2^n+3^n-4^{n+3}}{2^n-3^{n+1}+4^{n-1}}=\lim\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n-4^3}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-3.\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+\dfrac{1}{4}}=-256$.

Cách 2. Chỉ quan tâm đến biểu thức chứa hàm mũ có cơ số lớn nhất là 4 ở tử và mẫu, ta có thể xem $u_n=\dfrac{-4^{n+3}}{4^{n-1}}$ rút gọn ta được 256, đó chính là giới hạn cần tìm.

Câu 58: Tìm $\lim\dfrac{(-2)^n-4.5^{n+1}}{2.4^n+3.5^n}$.

Lời giải

Cách 1. $\lim\dfrac{(-2)^n-4.5^{n+1}}{2.4^n+3.5^n}=\lim\dfrac{\left(-\dfrac{2}{5}\right)^n-4.5}{2.\left(\dfrac{4}{5}\right)^n+3}=-\dfrac{20}{3}$.

Cách 2. Chỉ quan tâm đến biểu thức chứa hàm mũ có cơ số lớn nhất là 5 ở tử và mẫu, ta có thể xem $u_n=\dfrac{-4.5^{n+1}}{3.5^n}$ rút gọn ta được $-\dfrac{20}{3}$, đó chính là giới hạn cần tìm.

Câu 59: Tìm $\lim\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

Lời giải

Cách 1. $\lim\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}=\lim\dfrac{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+1}{-2.\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n+3}=\dfrac{1}{3}$.

Cách 2. Chỉ quan tâm đến biểu thức chứa hàm mũ có cơ số lớn nhất là 3 ở tử và mẫu, ta có thể xem $u_n=\dfrac{3^n}{3^{n+1}}$ rút gọn ta được $\dfrac{1}{3}$, đó chính là giới hạn cần tìm.

Câu 60: Tìm $\lim\dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^n-2^{n+1}+1}{5.2^n+\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}-3}$.

Lời giải

Cách 1. $\lim\dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^n-2^{n+1}+1}{5.2^n+\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}-3}=\lim\dfrac{1-2.\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^n+\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^n}{5.\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^n+\sqrt{5}-3.\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^n}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Cách 2. Chỉ quan tâm đến biểu thức chứa hàm mũ có cơ số lớn nhất là $\sqrt{5}$ ở tử và mẫu, ta có thể xem $u_n = \dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^n}{\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}}$ rút gọn ta được $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, đó chính là giới hạn cần tìm.

Câu 61: Tìm $\lim \dfrac{\pi^n + 3^n + 2^{2n}}{3\pi^n - 3^n + 2^{2n+2}}$.

Lời giải

Cách 1. $\lim \dfrac{\pi^n + 3^n + 2^{2n}}{3\pi^n - 3^n + 2^{2n+2}} = \lim \dfrac{\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^n + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + 1}{3.\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^n - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n + 2^2} = \dfrac{1}{4}$.

Cách 2. Chỉ quan tâm đến biểu thức chứa hàm mũ có cơ số lớn nhất là 4 ở tử và mẫu, ta có thể xem $u_n = \dfrac{2^{2n}}{2^{2n+2}}$ rút gọn ta được $\dfrac{1}{4}$, đó chính là giới hạn cần tìm.

Câu 62: Tìm $\lim \dfrac{\pi^{n+1} + 3^n + 2^n}{5.\pi^n - 4.3^n + 2^{n+2}}$.

Lời giải

Cách 1. $\lim \dfrac{\pi^{n+1} + 3^n + 2^n}{5.\pi^n - 4.3^n + 2^{n+2}} = \lim \dfrac{\pi + \left(\dfrac{3}{\pi}\right)^n + \left(\dfrac{2}{\pi}\right)^n}{5 - 4.\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^n + 2^2.\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^n} = \dfrac{\pi}{5}$.

Cách 2. Chỉ quan tâm đến biểu thức chứa hàm mũ có cơ số lớn nhất là π ở tử và mẫu, ta có thể xem $u_n = \dfrac{\pi^{n+1}}{5.\pi^n}$ rút gọn ta được $\dfrac{\pi}{5}$, đó chính là giới hạn cần tìm.

Câu 63: Tìm $\lim \dfrac{(-1)^n.2^{5n+1}}{3^{5n+2}}$.

Lời giải

Cách 1. $\lim \dfrac{(-1)^n.2^{5n+1}}{3^{5n+2}} = \lim \dfrac{(-1)^{5n}.2.(2)^{5n}}{3^2.(3)^{5n}} = \lim \dfrac{2.\left(\dfrac{-2}{3}\right)^{5n}}{3^2} = 0$.

Cách 2. Tử chứa hàm số mũ có cơ số là 2 nhỏ hơn cơ số của hàm số mũ ở mẫu nên giới hạn là 0.

Câu 64: Tìm $\lim\left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{5^3} + ... + \dfrac{1}{5^n}\right)$.

Lời giải

Cách 1. $\lim\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+...+\frac{1}{5^n}\right)=\lim\frac{1}{5}\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}.$

Cách 2. Sử dụng tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.

Câu 65: Tìm $\lim\left(\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{8}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right).$

Lời giải

Cách 1. $\lim\left(\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{8}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right)=\lim\left[\frac{1}{2}.\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}}\right]=\frac{1}{3}.$

Cách 2. Sử dụng tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.

Câu 66: Tìm $\lim\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^n}}.$

Lời giải

Cách 1. $\lim\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^n}}=\lim\frac{1.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}}{1.\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}}=\frac{4}{3}.$

Cách 2. Sử dụng tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Câu 67: Tìm $\lim\frac{1+2+2^2+2^3+...+2^n}{1+3+3^2+3^3+...+3^n}.$

Lời giải

$$\lim\frac{1+2+2^2+2^3+...+2^n}{1+3+3^2+3^3+...+3^n}=\lim\frac{1.\frac{1-2^{n+1}}{1-2}}{1.\frac{1-3^{n+1}}{1-3}}==\lim\frac{2.\left(1-2^{n+1}\right)}{1-3^{n+1}}\lim\frac{2.\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1}=0.$$

DẠNG 7: Dãy số (u_n) trong đó u_n là một tổng hoặc một tích của n số hạng (hoặc n thừa số)

Phương pháp: Rút gọn u_n rồi tìm $\lim u_n$ theo định lí hoặc dùng nguyên lí định lí kẹp để suy ra $\lim u_n$

- Cho hai dãy số (u_n) và (v_n). Nếu $|u_n| \le v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ với $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.
- Cho 3 dãy số $(x_n), (y_n), (z_n)$ và số thực L. Nếu $x_n \le y_n \le z_n$ và $\lim x_n = \lim z_n = L$ thì $\lim y_n = L$.

Câu 68: Tính giới hạn $\lim\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$

Lời giải

Do $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}.\frac{2k+1-(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$\Rightarrow \lim\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$

$= \lim\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right) = \lim\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$

Câu 69: Tính giới hạn $\lim\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

Lời giải

Ta có: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)...\left(1-\frac{1}{(n-1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$= \frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{3}{4}.\frac{5}{4}...\frac{n-2}{n-1}.\frac{n}{n-1}.\frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n}$

$\Rightarrow \lim\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \lim\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$

Câu 70: Tính giới hạn $\lim\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}\right)$

Lời giải:

Ta có: $\frac{1}{\sqrt{4n^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2}}+...+\frac{1}{\sqrt{4n^2}} \le \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}$

$\le \frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}+...+\frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}$

$\Leftrightarrow \frac{n}{\sqrt{4n^2}} \le \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{4n^2+n}} \le \frac{n}{\sqrt{4n^2+n}}, \forall n \in N^*$

Mà $\lim\frac{n}{\sqrt{4n^2}} = \lim\frac{1}{2} = \frac{1}{2}; \lim\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}} = \lim\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}$

Nên $\lim\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{4n^2+n}}\right)=\frac{1}{2}$

Câu 71: Tính giới hạn $\lim\frac{1.3.5.7...(2n-1)}{2.4.6.....(2n)}$

Lời giải:

Cách 1: Ta có: $u_n=\frac{1.3.5.7...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}\Rightarrow u_n^2=\frac{1^2.3^2.5^2....(2n-1)^2}{2^2.4^2.6^2...(2n)^2}$

$=\frac{1.3}{2^2}.\frac{3.5}{4^2}....\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}.\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2n+1}$

Vậy ta có: $0<u_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}},\forall n\in N^*$

Mà $\lim\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0\Rightarrow\lim\frac{1.3.5.7...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}=0$

Cách 2: Đặt $u_n=\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}....\frac{2n-1}{2n}$. Ta có $\frac{2k-1}{2k}=\frac{2k-1}{\sqrt{4k^2}}\le\frac{2k-1}{\sqrt{4k^2-1}}=\sqrt{\frac{2k-1}{2k+1}}$.

Suy ra $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\le\sqrt{\frac{1}{3}}\\ \frac{3}{4}\le\sqrt{\frac{3}{5}}\\ ...\\ \frac{2n-1}{2n}\le\sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1.3.5.7...(2n-1)}{2.4.6.8...2n}<\sqrt{\frac{1}{3}}.\sqrt{\frac{3}{5}}.\sqrt{\frac{5}{7}}.\sqrt{\frac{7}{9}}...\sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$

Suy ra $|u_n|\le\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ mà $\lim\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$

Câu 72: Tính giới hạn $\lim\frac{3\sin n-4\cos n}{2n^2+1}$

Lời giải:

Vì $|3\sin n-4\cos n|\le\sqrt{\left(3^2+4^2\right)\left(\sin^2 n+\cos^2 n\right)}=5$ (bđt bunhia- copski)

Nên $0\le\left|\frac{3\sin n-4\cos n}{2n^2+1}\right|\le\frac{5}{2n^2+1}$

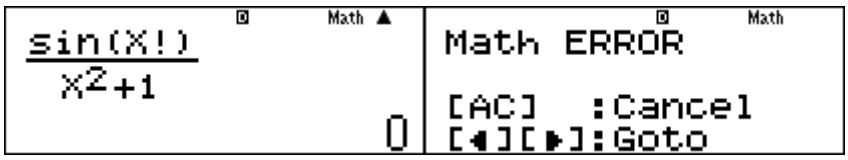
Mà $\lim\frac{5}{2n^2+1}=\lim\frac{\frac{5}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}=0$ nên $\lim\frac{3\sin n-4\cos n}{2n^2+1}=0$

Câu 73: $\lim\dfrac{\sin(n!)}{n^2+1}$ bằng

Lời giải

Ta có $\left|\dfrac{\sin(n!)}{n^2+1}\right|\le\dfrac{1}{n^2+1}$ mà $\lim\dfrac{1}{n^2+1}=0$ nên chọn đáp án **A.**

Lưu ý: Sử dụng MTCT. Với $X=13$, máy tính cho kết quả như hình bên. Với $X>13$, máy bào lỗi do việc tính toán vượt quá khả năng của máy. Do đó với bài này, MTCT sẽ cho kết quả chỉ mang tính chất tham khảo.



Nhận xét: Hoàn toàn tương tự, ta có thể chứng minh được rằng:

a) $\lim\dfrac{\sin^k(u_n)}{v_n}=0$; b) $\lim\dfrac{\cos^k(u_n)}{v_n}=0$.

Trong đó $\lim v_n=\pm\infty, k$ nguyên dương.

Chẳng hạn: $\lim\dfrac{\left(\sin\dfrac{n\pi}{5}\right)^2}{\sqrt{n^3+2n+1}}=0$; $\lim\dfrac{\cos^3(3n+1)\pi}{2^n}=0$; $\lim\dfrac{\cos\sqrt{2n+1}}{\sqrt[3]{n^2-5n^3+n+1}}=0$; ….

Câu 74: $\lim\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$ bằng

Lời giải

Cách 1: Ta có $\left|\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}\right|=\dfrac{1}{n(n+1)}<\dfrac{1}{n.n}=\dfrac{1}{n^2}$ mà $\lim\dfrac{1}{n^2}=0$ nên suy ra $\lim\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}=0$

Cách 2: Sử dụng MTCT tương tự các ví dụ trên.

Nhận xét: Dãy $\left((-1)^n\right)$ không có giới hạn nhưng mọi dãy $\left(\dfrac{(-1)^n}{v_n}\right)$, trong đó $\lim v_n=\pm\infty$ thì có giới hạn bằng 0.

DẠNG 8. u_n **cho bằng công thức truy hồi**

Phương pháp giải: Tìm công thức số hạng tổng quát của u_n rồi sử dụng các phương pháp tính giới hạn dãy số.

Câu 75: Tìm $\lim u_n$ biết $(u_n):\begin{cases}u_1=\dfrac{1}{2}\\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2-u_n},\ n=1,2,3,...\end{cases}$.

Lời giải

Tìm công thức số hạng tổng quát của $u_n=\dfrac{n}{n+1}$ suy ra $\lim u_n=\lim\dfrac{n}{n+1}=1$.

Câu 76: Tìm $\lim u_n$ biết $(u_n):\begin{cases}u_1=2\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+1}{2},\ n=1,2,3,...\end{cases}$.

Lời giải

Tìm công thức số hạng tổng quát của $u_n=\dfrac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$ suy ra $\lim u_n=\lim\dfrac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}=1$.

Câu 77: Tìm $\lim\dfrac{u_n}{n^2}$ biết $(u_n):\begin{cases}u_1=1,u_2=3\\ u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n+1,\ n=1,2,3,...\end{cases}$.

Lời giải

Tìm công thức số hạng tổng quát của $u_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ suy ra $\lim\dfrac{u_n}{n^2}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 78: Tìm $\lim\dfrac{u_n}{3.2^n}$ biết $(u_n):\begin{cases}u_1=1,u_2=6\\ u_{n+2}-3u_{n+1}+2u_n,\ n=1,2,3,...\end{cases}$.

Lời giải

Tìm công thức số hạng tổng quát của $u_n=-4+5.2^n$ suy ra $\lim\dfrac{u_n}{3.2^n}=\dfrac{5}{3}$.

Câu 79: Tìm $\lim u_n$ biết (u_n) có giới hạn hữu hạn và $(u_n):\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n+3}{u_n+2},\ n=1,2,3,...\end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\lim u_n=a$. Do $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+3}{u_n}$ nên $\lim u_{n+1}=\lim\dfrac{2u_n+3}{u_n+2}$ suy ra $a=\dfrac{2a+3}{a+2}\Leftrightarrow a=\pm\sqrt{3}$.

Do $u_n>0,\forall n=1,2,3,...$ nên $a\ge 0\Rightarrow a=\sqrt{3}$

Câu 80: Tìm $\lim u_n$ biết (u_n) có giới hạn hữu hạn và $(u_n):\begin{cases}u_1=\sqrt{2}\\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n},\ n=1,2,3,...\end{cases}$.

Lời giải

Đặt $\lim u_n=a$. Do $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$ nên $\lim u_{n+1}=\lim\sqrt{2+u_n}$ suy ra $a=\sqrt{2+a}\Leftrightarrow a=2$.

Câu 81: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1=1,\ u_{n+1}=\dfrac{2(2u_n+1)}{u_n+3}$ với mọi $n\ge 1$. Biết dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, $\lim u_n$ bằng:

Lời giải

Bằng phương pháp quy nạp, dễ dàng chứng minh được $u_n>0$ với mọi n

Đặt $\lim u_n=L\ge 0$. Ta có $\lim u_{n+1}=\lim\dfrac{2(2u_n+1)}{u_n+3}$ hay $L=\dfrac{2(2L+1)}{L+3}$

$\Rightarrow L^2 - L - 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} L = 2 & (n) \\ L = -1 & (l) \end{array}\right.$

Vậy $\lim u_n = 2$.

Lưu ý: Để giải phương trình $L = \dfrac{2(2L+1)}{L+3}$ ta có thể sử dụng chức năng SOLVE của MTCT (Chức năng SOLVE là chức năng tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình bằng phương pháp chia đôi). Ta làm như sau:

Nhập vào màn hình $X = \dfrac{2(2X+1)}{X+3}$; Bấm SHIFT CALC (tức SOLVE); Máy báo Solve for X; Nhập $\boxed{1}\boxed{=}$; Máy báo kết quả như hình bên.

$L - R = 0$ tức đây là nghiệm chính xác. Lại ấn phím $\boxed{=}$. Máy báo Solve for X; Nhập $\boxed{0}\boxed{=}$; Máy báo kết quả như bên.

$L - R = 0$ tức đây là nghiệm chính xác. Tuy nhiên ta chỉ nhận nghiệm không âm. Vậy $L = 2$.

(Ta chỉ tìm ra hai nghiệm thì dừng lại vì dễ thấy phương trình hệ quả là phương trình bậc hai).

Cách 2: Sử dụng MTCT (quy trình lặp). Nhập vào màn hình như hình bên. Bấm $\boxed{CALC}$. Máy tính hỏi X? nhập 1 rồi ấn phím $\boxed{=}$ liên tiếp. Khi nào thấy giá trị của Y không đổi thì dừng lại. Giá trị không đổi đó của Y là giới hạn cần tìm của dãy số. Giới hạn đó bằng 2.

Câu 82: Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn $a = 2{,}151515...$ (chu kỳ 15), a được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản, trong đó m, n là các số nguyên dương. Tìm tổng $m+n$.

Lời giải

Cách 1: Ta có $a = 2{,}151515... = 2 + \dfrac{15}{100} + \dfrac{15}{100^2} + \dfrac{15}{100^3} + ...$

Vì $\dfrac{15}{100} + \dfrac{15}{100^2} + \dfrac{15}{100^3} + ...$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = \dfrac{15}{100}$, công bội $q = \dfrac{1}{100}$ nên $a = 2 + \dfrac{\dfrac{15}{100}}{1 - \dfrac{1}{100}} = \dfrac{71}{33}$.

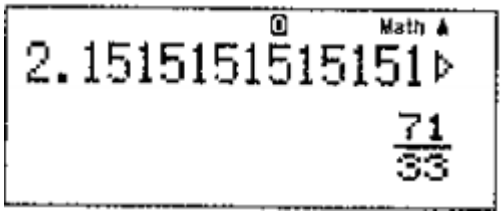
Vậy $m = 71, n = 33$ nên $m + n = 104$.

Cách 2: Đặt $b = 0{,}151515... \Rightarrow 100b = 15 + b \Leftrightarrow b = \dfrac{5}{33}$.

Vậy $a = 2 + b = 2 + \dfrac{5}{33} = \dfrac{71}{33}$.

Do đó $m = 71, n = 33$ nên $m + n = 104$.

Cách 3: Sử dụng MTCT. Nhập vào máy số $2{,}1515151515$ (Nhiều bộ số 15, cho tràn màn hình) rồi bấm phím $\boxed{=}$. Máy hiển thị kết quả như hình sau.



Có nghĩa là $2,(15)=\frac{71}{33}$.

Vậy $m=71,n=33$ nên $m+n=104$.

Cách 4: Sử dụng MTCT. Bấm $\boxed{2.\ ALPHA}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{1\ 5\ =}$. Máy hiển thị kết quả như hình sau.



Có nghĩa là $2,(15)=\frac{71}{33}$.

Vậy $m=71,n=33$ nên $m+n=104$.

Câu 83: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,32111...$ được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$, trong đó a,b là các số nguyên dương. Tính $a-b$.

Lời giải

Cách 1: Ta có:

$$0,32111...=\frac{32}{100}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^5}+...=\frac{32}{100}+\frac{\frac{1}{10^3}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{289}{900}.$$

Vậy $a=289,b=900$. Do đó $a-b=289-900=-611$.

Cách 2: Đặt $x=0,32111...\Rightarrow 100x=32,111...$ Đặt $y=0,111...\Rightarrow 100x=32+y$.

Ta có: $y=0,111...\Rightarrow 10y=1+y\Rightarrow y=\frac{1}{9}$.

Vậy $100x=32+\frac{1}{9}=\frac{289}{9}\Rightarrow x=\frac{289}{900}$.

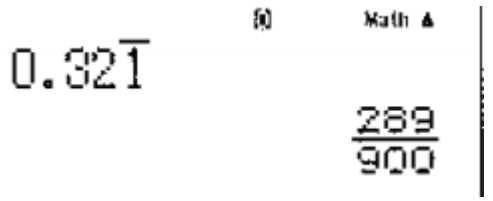
Vậy $a=289,b=900$. Do đó $a-b=289-900=-611$.

Cách 3: Sử dụng MTCT. Nhập vào máy số $0,3211111111$ (Nhập nhiều số 1, cho tràn màn hình), rồi bấm phím $\boxed{=}$. Màn hình hiển thị kết quả như sau.



Vậy $a=289, b=900$. Do đó $a-b=289-900=-611$.

Cách 4: Sử dụng MTCT. Bấm $\boxed{0.\ 3\ 2\ ALPHA}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{1=}$. Máy hiển thị kết quả như hình sau.



Vậy $a=289, b=900$. Do đó $a-b=289-900=-611$.

Tổng quát

Xét số thập phân vô hạn tuần hoàn $a=\overline{x_1x_2...x_m, y_1y_2...y_nz_1z_1...z_kz_1z_1...z_k...}$.

Khi đó $a=\overline{x_1x_2...x_m}+\dfrac{\overline{y_1y_2...y_n}}{1\underbrace{0...0}_{n-chu\ so}}+\dfrac{\overline{z_1z_2...z_k}}{\underbrace{99...9}_{k-chu\ so}\ \underbrace{0...0}_{n-chu\ so}}$

Chẳng hạn, $2,151515...=2+\dfrac{15}{99}; 0,32111..=\dfrac{32}{100}+\dfrac{1}{990}$.

DẠNG 9: GIỚI HẠN CỦA DÃY CHỨA ĐA THỨC HOẶC CĂN THEO n

Phương pháp: Rút bậc lớn nhất của đa thức làm nhân tử chung. **(Tử riêng, mẫu riêng)**.

Câu 84: Gía trị của $\lim\left(n^4-2n^2+3\right)$ là.

Lời giải

$$\lim\left(n^4-2n^2+3\right)=\lim n^4\left(1-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^4}\right)=+\infty$$

Vì $\lim n^4=+\infty$; $\lim\left(1-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^4}\right)=1$.

Máy tính

Nhập vào máy tính: X^4-2X^2+3 $\boxed{CALC}$ $X=10^8$ (Hiểu là số vô cùng lớn) ta được đáp án là 10^{32}

Nghĩa là $\lim\left(n^4-2n^2+3\right)=+\infty$.

Cách 3: Nhận xét giới hạn của dãy số chỉ phụ thuộc vào bậc cao nhất trong đa thức.

$\lim\left(n^4-2n^2+3\right)=\lim n^4=+\infty$.

Câu 85: Giá trị của $\lim\left(-2n^3+3n-1\right)$ là.

Lời giải

$$\lim\left(-2n^3+3n-1\right)=\lim n^3\left(-2+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)=-\infty$$

Vì $\lim n^3=+\infty$; $\lim\left(-2+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)=-2$.

Máy tính

Nhập vào máy tính: $-2X^3+3X-1$ CALC $X=10^8$ (Hiểu là số vô cùng lớn) ta được đáp án là -2.10^{24}

Nghĩa là $\lim\left(-2n^3+3n-1\right)=-\infty$.

Làm tắt: Nhận xét giới hạn của dãy số chỉ phụ thuộc vào bậc cao nhất trong đa thức.

$\lim\left(-2n^3+3n-1\right)=\lim\left(-2n^3\right)=-\infty$.

Câu 86: Giá trị của $\lim\left(-2n^2+4\right)^3$ là.

Lời giải

$$\lim\left(-2n^2+4\right)^3=\lim n^6\left(-2+\frac{4}{n^2}\right)^3=-\infty$$

Vì $\lim n^6=+\infty$; $\lim\left(-2+\frac{4}{n^2}\right)^3=-8$.

Cách 2: Máy tính

Nhập vào máy tính: $\left(-2X^2+4\right)^3$ CALC $X=10^8$ (Hiểu là số vô cùng lớn) ta được đáp án là -8.10^{48}

Nghĩa là $\lim\left(-2n^2+4\right)^3=-\infty$.

Cách 3: Nhận xét giới hạn của dãy số chỉ phụ thuộc vào bậc cao nhất trong đa thức.

$\lim\left(-2n^2+4\right)^3=\lim\left(-2n^2\right)^3=\lim\left(-8n^6\right)=-\infty$.

Câu 87: Giá trị của $\lim\left(2n-\sqrt{n^3+2n-2}\right)$ là.

Lời giải

Cách 1: tự luận

$$\lim\left(2n-\sqrt{n^3+2n-2}\right)=\lim n\sqrt{n}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}-\sqrt{1+\frac{2}{n^2}-\frac{2}{n^3}}\right)=-\infty$$

Vì $\lim n\sqrt{n}=+\infty$; $\lim\left(\frac{2}{\sqrt{n}}-\sqrt{1+\frac{2}{n^2}-\frac{2}{n^3}}\right)=-1$.

Cách 2: Máy tính

Nhập vào máy tính: $2X-\sqrt{X^3+2X-2}$ $\boxed{\text{CALC}}$ $X=10^6$ (Hiểu là số vô cùng lớn) ta được đáp án là -998000000

Nghĩa là $\lim\left(2n-\sqrt{n^3+2n-2}\right)=-\infty$.

Cách 3: Nhận xét giới hạn của dãy số chỉ phụ thuộc vào bậc cao nhất trong đa thức.

$\lim\left(2n-\sqrt{n^3+2n-2}\right)=\lim\left(-\sqrt{n^3}\right)=-\infty$.

Câu 88: Giá trị của $\lim\frac{2n^4-3n^3+2}{n^3+2}$ là.

Lời giải

Cách 1: tự luận

$$\lim\frac{2n^4-3n^3+2}{n^3+2}=\lim\frac{n^4\left(2-\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^4}\right)}{n^3\left(1+\frac{2}{n^3}\right)}=\lim\left[n.\frac{2-\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^4}}{1+\frac{2}{n^3}}\right]=+\infty$$

Vì $\lim n=+\infty$; $\lim\frac{2-\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^4}}{1+\frac{2}{n^3}}=2$.

Cách 2: Máy tính

Nhập vào máy tính: $\frac{2X^4-3X^2+2}{X^3+2}$ $\boxed{\text{CALC}}$ $X=10^6$ (Hiểu là số vô cùng lớn) ta được đáp án là 2000000

Nghĩa là $\lim\frac{2n^4-3n^3+2}{n^3+2}=+\infty$.

Cách 3: Nhận xét giới hạn của dãy số chỉ phụ thuộc vào bậc cao nhất trong đa thức của tử và mẫu

$\lim\frac{2n^4-3n^3+2}{n^3+2}=\lim\frac{2n^4}{n^3}=\lim 2n=+\infty$.

Câu 89: Giá trị của $\lim\frac{(2n-1)\left(3n^2+2\right)^3}{-2n^5+4n^3-1}$ là.

Lời giải

Cách 1: tự luận

$$\lim\frac{(2n-1)(3n^2+2)^3}{-2n^5+4n^3-1}=\lim\frac{n^7\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n^2}\right)^3}{n^5\left(-2+\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^5}\right)}=\lim n^2\frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n^2}\right)^3}{-2+\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^5}}=-\infty$$

Vì $\lim n^2=+\infty$; $\lim n^2\frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n^2}\right)^3}{-2+\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^5}}=-27$.

Cách 2: Máy tính

Nhập vào máy tính: $\frac{(2X-1)(3X^2+2)^3}{-2X^5+4X^3-1}$ CALC $X=10^6$ (Hiểu là số vô cùng lớn) ta được đáp án là $-2.69999865.10^{13}$

Nghĩa là $\lim\frac{(2n-1)(3n^2+2)^3}{-2n^5+4n^3-1}=-\infty$.

Cách 3: Nhận xét giới hạn của dãy số chỉ phụ thuộc vào bậc cao nhất trong đa thức của tử và mẫu

$$\lim\frac{(2n-1)(3n^2+2)^3}{-2n^5+4n^3-1}=\lim\frac{2n.(3n^2)^3}{-2n^5}=\lim(-27n^2)=-\infty.$$

Câu 90: Giá trị của $\lim\frac{3n^2-\sqrt{2n^4+3n-2}}{4n-\sqrt{3n^2+2}}$ là.

Lời giải

Cách 1: tự luận

$$\lim\frac{3n^2-\sqrt{2n^4+3n-2}}{4n-\sqrt{3n^2+2}}=\lim\frac{n^2\left(3-\sqrt{2+\frac{3}{n^3}-\frac{2}{n^4}}\right)}{n\left(4-\sqrt{3+\frac{2}{n^2}}\right)}=\lim n\frac{\left(3-\sqrt{2+\frac{3}{n^3}-\frac{2}{n^4}}\right)}{\left(4-\sqrt{3+\frac{2}{n^2}}\right)}=+\infty$$

Vì $\lim n=+\infty$; $\lim\frac{\left(3-\sqrt{2+\frac{3}{n^3}-\frac{2}{n^4}}\right)}{\left(4-\sqrt{3+\frac{2}{n^2}}\right)}=\frac{3-\sqrt{2}}{4-\sqrt{3}}>0$.

Cách 2: Máy tính

Nhập vào máy tính: $\frac{3X^2-\sqrt{2X^4+3X-2}}{4X-\sqrt{3X^2+2}}$ CALC $X=10^6$ (Hiểu là số vô cùng lớn) ta được đáp án là 699216.0331

Nghĩa là $\lim\dfrac{3n^2-\sqrt{2n^4+3n-2}}{4n-\sqrt{3n^2+2}}=+\infty$.

Cách 3: Nhận xét giới hạn của dãy số chỉ phụ thuộc vào bậc cao nhất trong đa thức của tử và mẫu

$$\lim\frac{3n^2-\sqrt{2n^4+3n-2}}{4n-\sqrt{3n^2+2}}=\lim\frac{3n^2-\sqrt{2n^4}}{4n-\sqrt{3n^2}}=\lim n\frac{3-\sqrt{2}}{4-\sqrt{3}}=+\infty.$$

Câu 91: $\lim\left(n^2-n\sqrt{4n+1}\right)$ bằng.

Lời giải

Cách 1: Ta có $n^2-n\sqrt{4n+1}=n^2\left(1-\sqrt{\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}}\right)$.

Vì $\lim n^2=+\infty$ và $\lim\left(1-\sqrt{\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}}\right)=1>0$ nên theo quy tắc 2, $\lim\left(n^2-n\sqrt{4n+1}\right)=+\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tương tự như các Câu trên.

Tổng quát:

Xét dãy số $u_n=\sqrt[r]{a_in^i+a_{i-1}n^{i-1}+...+a_1n+a_0}-\sqrt[s]{b_kn^k+b_{k-1}n^{k-1}+...+b_1n+b_0}$, trong đó $a_i,b_k>0$.

- Nếu $\sqrt[r]{a_i}=\sqrt[s]{b_k}$ và $\dfrac{i}{r}=\dfrac{k}{s}$: Giới hạn hữu hạn.

+ Nếu hai căn cùng bậc: Nhân chia với biểu thức liên hợp.

+ Nếu hai căn không cùng bậc: Thêm bớt với $\sqrt[r]{a_in^i}$ rồi nhân với biểu thức liên hợp.

- Nếu $\sqrt[r]{a_i}\neq\sqrt[s]{b_k}$ hoặc $\dfrac{i}{r}\neq\dfrac{k}{s}$: Đưa lũy thừa bậc cao nhất của n ra ngoài dấu căn. Trong trường hợp này u_n sẽ có giới hạn vô cực.

Nhận xét: Trong chương trình lớp 12, các em sẽ được học về căn bậc s (s nguyên dương) và lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Người ta định nghĩa rằng $a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[s]{a^r}$, trong đó a là số thực dương, r là số nguyên dương, s là số nguyên dương, $s\geq 2$. Các tính chất của lũy thừa với số mũ hữu tỉ tương tự lũy thừa với số mũ nguyên dương.

Chẳng hạn: $\sqrt{n}=n^{\frac{1}{2}},\sqrt[3]{n}=n^{\frac{1}{3}},\sqrt[3]{n^2}=n^{\frac{2}{3}}...$

Chẳng hạn:

a) Với $u_n=\sqrt{n^2-2n+3}-n=\sqrt{n^2-2n+3}-\sqrt{n^2}$: nhân chia với biểu thức liên hợp của $\sqrt{n^2-2n+3}-n$ là $\sqrt{n^2-2n+3}+n$. Dãy số có giới hạn hữu hạn bằng -1.

b) Với $u_n=n-\sqrt[3]{8n^3+3n+2}=\sqrt[3]{n^3}-\sqrt[3]{8n^3+3n+2}$: đưa n^3 ra ngoài dấu căn.

Giới hạn của $(u_n)=-\infty$.

c) Với $u_n = n^2 - n\sqrt{4n+1} = n\left(\sqrt{n^2} - \sqrt{4n+1}\right)$: đưa n^2 ra ngoài dấu căn.

Giới hạn của (u_n) bằng $+\infty$.

Câu 92: Cho dãy số (u_n) xác định $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 2$ với mọi $n \geq 2$. Tìm giới hạn của dãy số (u_n).

Lời giải

Phân tích: Đề bài không cho biết dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn hay không. Có đáp án là hữu hạn, có đáp án là vô cực. Do đó chưa thể khẳng định được dãy số có giới hạn hữu hạn hay vô cực.

Giả sử dãy có giới hạn hữu hạn là L.

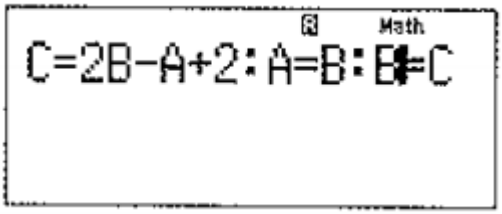
Ta có: $\lim u_{n+1} = 2\lim u_n - \lim u_{n-1} + 2 \Leftrightarrow L = 2L - L + 2 \Leftrightarrow 0 = 2$ (Vô lý)

Vậy có thể dự đoán dãy có giới hạn vô cực. Tuy nhiên có hai đáp án vô cực ($-\infty$ và $+\infty$), vậy chưa thể đoán là đáp án nào. Ta xem hai cách giải sau.

Cách 1: Ta có $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 4$, $u_4 = 9$. Vậy ta có thể dự đoán $u_n = (n-1)^2$ với mọi $n \geq 1$. Khi đó $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 2 = 2(n-1)^2 - (n-2)^2 + 2 = n^2 = \left[(n+1)-1\right]^2$.

Vậy $u_n = (n-1)^2$ với mọi $n \geq 1$. Do đó $\lim u_n = \lim(n-1)^2 = +\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT (quy trình lặp). Nhập vào như màn hình sau.



Bấm CALC Máy hỏi *B*? nhập 1 rồi bấm phím =, máy hỏi *A*? nhập 0 rồi ấn phím = liên tiếp. Ta thấy giá trị *C* ngày một tăng lên. Vậy chọn đáp án của dãy số là $+\infty$.

DẠNG 10: GIỚI HẠN CỦA DÃY CHỨA LŨY THỪA BẬC n

Phương pháp: Rút cơ số lớn nhất của đa thức làm nhân tử chung. (Tử riêng, mẫu riêng).

Câu 93: $\lim\left(5^n - 2^n\right)$ bằng.

Lời giải

Cách 1:

Ta có $5^n - 2^n = 5^n\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$

Vì $\lim 5^n = +\infty$ và $\lim\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) = 1 > 0$ nên $\lim\left(5^n - 2^n\right) = +\infty$.

Cách 2: Nhập vào máy tính $\left(5^X-2^X\right)$ CALC X = 10 ta có kết quả 9764601

Nên $\lim\left(5^n-2^n\right)=+\infty$

Câu 94: $\lim\left(3.2^{n+1}-5.3^n+7n\right)$ bằng.

Lời giải

Cách 1:

$$\lim\left(3.2^{n+1}-5.3^n+7n\right)=3^n\left(-5+6\left(\frac{2}{3}\right)^n+7\frac{n}{3^n}\right)=-\infty.$$

Cách 2: Nhập vào máy tính $3.2^{X+1}-5.3^X+7X$ CALC X = 10 ta được −289031

Nên $\lim\left(3.2^{n+1}-5.3^n+7n\right)=-\infty$

Câu 95: Giá trị của $\lim\frac{9^n-3.4^n}{6.7^n+8^n}$ là.

Lời giải

Cách 1: tự luận

$$\lim\frac{9^n-3.4^n}{6.7^n+8^n}=\lim\frac{9^n\left[1-3.\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]}{8^n\left[6\left(\frac{7}{8}\right)^n+1\right]}=\lim\left(\frac{9}{8}\right)^n\frac{\left[1-3.\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]}{\left[6\left(\frac{7}{8}\right)^n+1\right]}=+\infty$$

Vì $\lim\left(\frac{9}{8}\right)^n=+\infty$; $\lim\left[\frac{1-3.\left(\frac{4}{9}\right)^n}{6\left(\frac{7}{8}\right)^n+1}\right]=1$

Cách 2: Máy tính $\frac{9^X-3.4^X}{6.7^X+8^X}$ CALC X = 100 ta được kết quả 130391,1475

Nên $\lim\frac{9^n-3.4^n}{6.7^n+8^n}=+\infty$

Cách 3: Nhận xét giới hạn của dãy số chỉ phụ thuộc vào bậc cao nhất trong đa thức của tử và mẫu

$$\lim\frac{9^n-3.4^n}{6.7^n+8^n}=\lim\frac{9^n}{8^n}=\lim\left(\frac{9}{8}\right)^n=+\infty.$$

Câu 96: Giá trị của $\lim\frac{3+3^2+3^3+...+3^n}{1+2+2^2+...+2^n}$ là.

Lời giải

Cách 1:Ta có tử thức là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân $\left(u_n\right)$ với $u_1=3$ và $q=3$

Do đó $3+3^2+...+3^n=\frac{3\left(3^n-1\right)}{2}$

Mẫu thức là tổng của $n+1$ số hạng đầu tiên của cấp số nhân (v_n) với $v_1=1$ và $q=2$. Do đó

$$1+2+2^2+...+2^n=\frac{2\left(2^{n+1}-1\right)}{1}$$

Vậy $\lim\frac{3+3^2+3^3+...+3^n}{1+2+2^2+...+2^n}=\lim\left(\frac{3}{2}\right)^n.\frac{3\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{4\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}=+\infty$

Cách 2: Nhập vào màn hình $\frac{\sum_{X=1}^{20}3^X}{\sum_{1}^{20}2^{X-1}}$ thấy kết quả hiển thị trên màn hình là $2493,943736$.

Do đó chọn đáp án. **A.**

Tổng quát:

Nếu tử thức là tổng của $n+i$ số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có công bội $p>1$, mẫu thức là tổng của $n+k$ số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có công bội $q>1$ thì:

- Phân thức có giới hạn là $+\infty$ nếu $p>q$
- Phân thức có giới hạn là 0 nếu $p<q$

BÀI TẬP TỰ LUẬN TỔNG HỢP.

Câu 97: Tìm giới hạn sau $\lim\frac{2n^3-2n+3}{1-4n^3}$

Lời giải

$$\lim\frac{2n^3-2n+3}{1-4n^3}=\lim\frac{2-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}}{\frac{1}{n^3}-4}=-\frac{1}{2}$$

Câu 98: Tìm giới hạn sau $\lim\frac{\sqrt{n^4+2n+2}}{n^2+1}$

Lời giải

$$\lim\frac{\sqrt{n^4+2n+2}}{n^2+1}=\lim\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n^3}+\frac{2}{n^4}}}{1+\frac{1}{n^2}}=1$$

Câu 99: Tìm giới hạn sau $\lim\frac{3^{n+1}-4^n}{4^{n-1}+3}$

Lời giải

$$\lim\frac{3^{n+1}-4^n}{4^{n-1}+3}=\lim\frac{9.3^{n-1}-4.4^{n-1}}{4^{n-1}+3}=\lim\frac{9.\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-4}{1+3.\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}=-4$$

Câu 100: Tìm giới hạn sau $\lim\frac{n^3+1}{n^2-2n+3}$

Lời giải

$$\lim\frac{n^3+1}{n^2-2n+3}=\lim\frac{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}=\lim\left(n.\frac{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}\right)=+\infty$$

Câu 101: Tìm giới hạn sau $\lim\frac{1+2+2^2+...+2^n}{1+3+3^2+...+3^n}$

Lời giải

$$\lim\frac{1+2+2^2+...+2^n}{1+3+3^2+...+3^n}=\lim\frac{\frac{1-2^{n+1}}{-1}}{\frac{1-3^{n+1}}{-2}}=\lim\frac{\left(1-2^{n+1}\right).2}{1-3^{n+1}}=\lim\frac{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).2}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1}=0$$

Câu 102: Giá trị của $L=\lim\frac{\left(2n^2+1\right)^4\left(n+2\right)^9}{n^{17}+1}$ bằng

Lời giải

$$L=\lim\frac{n^8(2+\frac{1}{n^2})^4.n^9(1+\frac{2}{n})^9}{n^{17}(1+\frac{1}{n^{17}})}=\lim\frac{(2+\frac{1}{n^2})^4.(1+\frac{2}{n})^9}{1+\frac{1}{n^{17}}}\Rightarrow L=16$$

Câu 103: Tìm tất cả các giá trị của tham số a để $L=\lim\frac{5n^2-3an^4}{\left(1-a\right)n^4+2n+1}>0.$

Lời giải

$$L=\lim\frac{5n^2-3an^4}{\left(1-a\right)n^4+2n+1}=\lim\frac{\frac{5}{n^2}-3a}{\left(1-a\right)+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}}=\frac{-3a}{\left(1-a\right)}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<0\\a>1\end{array}\right.$$

Câu 104: Kết quả của giới hạn $\lim\frac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n}$ bằng:

Lời giải

$$\lim\frac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n}=\lim\frac{2\left(\frac{1}{5}\right)^n-25}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+2}=-\frac{25}{2}.$$

Câu 105: Biết rằng $\lim\dfrac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}}=b\sqrt{3}+c$ với a, b, c là các tham số. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{a+c}{b^3}$.

Lời giải

Ta có $\lim\dfrac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}}=\lim\dfrac{\sqrt[3]{a+\dfrac{5}{n}-\dfrac{7}{n^3}}}{\sqrt{3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}}=\dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt[3]{a}}{3}\sqrt{3}$

$=b\sqrt{3}+c\Rightarrow\begin{cases}\sqrt[3]{a}=\dfrac{b}{3}\\ c=0\end{cases}\Rightarrow P=\dfrac{1}{3}.$

Câu 106: Tìm giới hạn sau $\lim(\sqrt{n^2-4n}-n)$

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt{n^2-4n}-n\right)=\lim\frac{-4n}{\sqrt{n^2-4n}+n}=\lim\frac{-4}{\sqrt{1-\dfrac{4}{n}}+1}=-2$$

Câu 107: Tìm giới hạn sau $\lim\left(\sqrt[3]{2n-3n^3}+n-1\right)$

Lời giải

$$\lim n\left(\sqrt[3]{\frac{2}{n^2}-3}+1-\frac{1}{n}\right)=-\infty$$

Câu 108: Tìm giới hạn sau $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)=\lim\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim\frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1}=1$$

Câu 109: Tìm giới hạn sau $\lim\left(\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2-3}\right)$

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2-3}\right)=\lim n\left(\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{n^2}}\right)=+\infty$$

Câu 110: Tìm giới hạn sau $\lim\dfrac{\sqrt{4n^2+1}-n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}-n}$

Lời giải

$$\lim\frac{\sqrt{4n^2+1}-n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}-n}=\lim\left(\frac{\sqrt{4n^2+1}-n}{\sqrt{n^2+4n+1}-n}-\frac{1}{\sqrt{n^2+4n+1}-n}\right)$$

$$=\lim\left(\frac{\left(3n^2+1\right)\left(\sqrt{n^2+4n+1}+n\right)}{\left(\sqrt{4n^2+1}+n\right)\left(4n+1\right)}-\frac{\sqrt{n^2+4n+1}+n}{4n+1}\right)$$

$$=\lim\left(\frac{n^3\left(3+\frac{1}{n^2}\right)\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}+1\right)}{n^2\left(\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{n}\right)\left(4+\frac{1}{n}\right)}-\frac{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}{4+\frac{1}{n}}\right)$$

$$=\lim\left(n\frac{\left(3+\frac{1}{n^2}\right)\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}+1\right)}{\left(\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{n}\right)\left(4+\frac{1}{n}\right)}-\frac{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}{4+\frac{1}{n}}\right)=+\infty$$

Câu 111: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1}\right)$ bằng:

Lời giải

$\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1}\to 0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp

$$\lim\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1}\right)=\lim\frac{4}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+1}}=0$$

Câu 112: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2-n+1}-n\right)$ là:

Lời giải

$\sqrt{n^2-n+1}-n\to 0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp

$$\lim\left(\sqrt{n^2-n+1}-n\right)=\lim\frac{-n+1}{\sqrt{n^2-n+1}+n}=\lim\frac{-1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=-\frac{1}{2}$$

Câu 113: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\right)$ là:

Lời giải

$\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\to 0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\right)=\lim\frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}=\lim\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}=2.$$

Câu 114: Có bao nhiêu giá trị của a để $\lim\left(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}\right)=0.$

Lời giải

$\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}\to=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp:

Ta có $\lim\left(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}\right)=\lim\dfrac{(a^2-a-2)n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}$

$=\lim\dfrac{a^2-a-2-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=\dfrac{a^2-a-2}{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=2\end{array}\right.$.

Câu 115: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thỏa $\lim\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=0$.

Lời giải

Nếu $\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\to 0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

Ta có $\lim\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=\lim\dfrac{(2a^2-8)n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\dfrac{2a^2-8}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}$

$=a^2-4=0\Leftrightarrow a=\pm 2.$

Câu 116: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}$, trong đó a là tham số thực. Tìm a để $\lim u_n=-1.$

Lời giải

$\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}\to 0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$-1=\lim u_n=\lim\left(\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}\right)=\lim\dfrac{an+4}{\sqrt{n^2+an+5}+\sqrt{n^2+1}}$

$=\lim\dfrac{a+\dfrac{4}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{a}{n}+\dfrac{5}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=\dfrac{a}{2}\Leftrightarrow a=-2.$

Câu 117: Tính $\lim n\left(\sqrt{4n^2+3}-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)$

Lời giải

Ta có: $\lim n\left(\sqrt{4n^2+3}-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)=\lim n\left[\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right)+\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)\right]$

$=\lim\left[n\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right)+n\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)\right].$

Ta có: $\lim n\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right)=\lim\dfrac{3n}{\left(\sqrt{4n^2+3}+2n\right)}=\lim\dfrac{3}{\left(\sqrt{4+\dfrac{3}{n^2}}+2\right)}=\dfrac{3}{4}.$

Ta có: $\lim n\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)=\lim\dfrac{-n^2}{\left(4n^2+2n\sqrt[3]{8n^3+n}+\sqrt[3]{\left(8n^3+n\right)^2}\right)}$

$=\lim\dfrac{-1}{\left(4+2\sqrt[3]{8+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{\left(8+\dfrac{1}{n^2}\right)^2}\right)}=-\dfrac{1}{12}.$

Vậy $\lim n\left(\sqrt{4n^2+3}-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{2}{3}.$

Câu 118: Tính giới hạn của dãy số $L=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-2\sqrt[3]{n^3+n^2-1}+n\right)$.:

Lời giải

Ta có: $L=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)-2\lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-n\right)$

Mà: $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)=\lim\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}=\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+1}=\dfrac{1}{2}$

$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+n^2-1}-n\right)=\lim\dfrac{n^2-1}{\sqrt[3]{(n^3+n^2-1)^2}+n.\sqrt[3]{n^3+n^2-1}+n^2}$

$=\lim\dfrac{1-\dfrac{1}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{1}{n^4}-\dfrac{1}{n^6}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^3}}+1}=\dfrac{1}{3}$

Vậy $L=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{6}.$

Câu 119: Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+....$

Lời giải

Ta có $S=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+....=1.\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=2$

Câu 120: Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S=-4+2-1+....$

Lời giải

Ta có $S=-4+2-1+....=\dfrac{-4}{1+\dfrac{1}{2}}=-\dfrac{8}{3}$

Câu 121: Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+...+\dfrac{1}{2^n}+...$ có kết quả bằng:

Lời giải

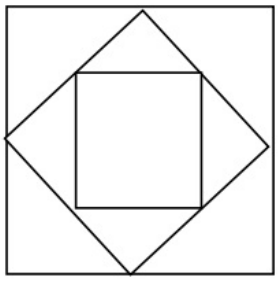
Ta có $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}+...=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

Câu 122: Tính giới hạn $\lim\frac{1+\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+...+\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+...+\left(\frac{3}{4}\right)^n}$

Lời giải

Ta có $\lim\frac{1+\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+...+\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+...+\left(\frac{3}{4}\right)^n}=\lim\frac{\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{5}\right)}}{\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}}=\lim\frac{\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{5}\right)}}{\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}}}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{4}}=\frac{5}{12}$

Câu 123: Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài là 1. Ta nội tiếp trong hình vuông này một hình vuông thứ 2, có đỉnh là trung điểm của các cạnh của nó. Và cứ thế ta nội tiếp theo hình vẽ. Tính tổng chu vi của các hình vuông đó



Lời giải

Gọi $a_1=1;a_2;a_3;...;a_n..$ lần lượt là cạnh của các hình vuông thứ 1, thứ 2. thứ n.

Ta có $a_2=\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$a_3=\frac{1}{2\sqrt{2}}.\sqrt{2}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$a_4=\frac{1}{4}.\sqrt{2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$

$a_5=\frac{1}{4}.\sqrt{2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$

.

$$a_n = \frac{1}{4}.\sqrt{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

Gọi S_n là tổng các chu vi của n hình vuông

Ta có $S_n = 4 + 4.\frac{1}{\sqrt{2}} + 4.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + ... + 4.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$ $4.\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right)$

$$= 4.\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Tổng chu vi của các hình vuông đó là: $\lim S_n = \lim 4.\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 4\left(2+\sqrt{2}\right)$

CHƯƠNG III

GIỚI HẠN
HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI 1: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG. CÂU HỎI LÝ THUYẾT

Câu 1: Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **sai?**.

A. Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim(u_n v_n) = +\infty$.

B. Nếu $\lim u_n = a \neq 0$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = 0$.

C. Nếu $\lim u_n = a > 0$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = +\infty$.

D. Nếu $\lim u_n = a < 0$ và $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = -\infty$.

Câu 2: Cho dãy (u_n) có $\lim u_n = 3$, dãy (v_n) có $\lim v_n = 5$. Khi đó $\lim(u_n.v_n) = ?$

A. 15. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 3: Cho $\lim u_n = -3$; $\lim v_n = 2$. Khi đó $\lim(u_n - v_n)$ bằng

A. -5. **B.** -1. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 4: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\lim(u_n + 3) = 0$. Giá trị của $\lim u_n$ bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 5: Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) thoả mãn $\lim u_n = 6$ và $\lim v_n = 2$. Giá trị của $\lim(u_n - v_n)$ bằng

A. 12. **B.** 8. **C.** -4. **D.** 4.

Câu 6: Cho hai dãy số (u_n), (v_n) thỏa mãn $\lim u_n = -4$ và $\lim v_n = 3$. Giá trị của $\lim(u_n.v_n)$ bằng

A. 12. **B.** -12. **C.** 1. **D.** 7.

Câu 7: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\lim u_n = \dfrac{3}{2}$. Giá trị của $\lim(u_n + 4)$ bằng

A. $\dfrac{11}{2}$. **B.** $\dfrac{11}{4}$. **C.** $\dfrac{13}{2}$. **D.** $\dfrac{13}{4}$.

Câu 8: Cho $\lim a_n = -3$, $\lim b_n = 5$. Khi đó $\lim(a_n - b_n)$ bằng

A. -2. **B.** 8. **C.** 2. **D.** -8.

Câu 9: Nếu $\lim u_n = -3$; $\lim v_n = 1$ thì $\lim(u_n + v_n)$ bằng:

A. -1. **B.** 1. **C.** -2. **D.** -4.

Câu 10: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\lim(u_n-2)=0$. Giá trị của $\lim u_n$ bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 11: Cho hai dãy số $(u_n),(v_n)$ thỏa mãn $\lim u_n=2, \lim v_n=-3$. Giá trị của $\lim(u_n.v_n)$ bằng

A. 6 **B.** 5 **C.** -6 **D.** -1

Câu 12: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\lim u_n=-5$. Giá trị của $\lim(u_n-2)$ bằng

A. 3 **B.** -7 **C.** 10 **D.** -10

Câu 13: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\lim(u_n-3)=0$. Giá trị của $\lim u_n$ bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** -3. **D.** 0.

Câu 14: Cho dãy số (u_n), (v_n) thỏa mãn $\lim u_n=11$, $\lim v_n=4$. Giá trị của $\lim(u_n+v_n)$ bằng

A. 4. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 15.

Câu 15: Tìm dạng hữu tỷ của số thập phân vô hạn tuần hoàn $P=2,13131313...$,

A. $P=\dfrac{212}{99}$ **B.** $P=\dfrac{213}{100}$. **C.** $P=\dfrac{211}{100}$. **D.** $P=\dfrac{211}{99}$.

Câu 16: Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số a khi $n\to+\infty$, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-a)=0$.

B. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới vô cực, nếu $|u_n|$ có thể lớn hơn một số dương tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

C. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n\to+\infty$ nếu u_n có thể nhỏ hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

D. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi $n\to+\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Câu 17: Cho các dãy số $(u_n),(v_n)$ và $\lim u_n=a, \lim v_n=+\infty$ thì $\lim\dfrac{u_n}{v_n}$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 18: Trong các khẳng định dưới đây có bao nhiêu khẳng định đúng?

$\lim n^k=+\infty$ với k nguyên dương.

$\lim q^n=+\infty$ nếu $|q|<1$.

$\lim q^n=+\infty$ nếu $q>1$

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 19: Cho dãy số (u_n) thỏa $|u_n-2|<\dfrac{1}{n^3}$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. Khi đó

A. $\lim u_n$ không tồn tại. **B.** $\lim u_n=1$. **C.** $\lim u_n=0$. **D.** $\lim u_n=2$.

Câu 20: Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. $\lim u_n=c$ ($u_n=c$ là hằng số). **B.** $\lim q^n=0\ (|q|>1)$.

C. $\lim\dfrac{1}{n}=0$. **D.** $\lim\dfrac{1}{n^k}=0\ (k>1)$.

DẠNG 1. DÃY SỐ DẠNG PHÂN THỨC

Dạng 1.1 Phân thức bậc tử bé hơn bậc mẫu

Câu 21: Tính $L=\lim\dfrac{n-1}{n^3+3}$.

A. $L=1$. **B.** $L=0$. **C.** $L=3$. **D.** $L=2$.

Câu 22: $\lim\dfrac{1}{5n+3}$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Câu 23: $\lim\dfrac{1}{2n+7}$ bằng

A. $\dfrac{1}{7}$. **B.** $+\infty$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 0.

Câu 24: $\lim\dfrac{1}{2n+5}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Câu 25: $\lim\dfrac{1}{5n+2}$ bằng

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

Câu 26: Tìm $I=\lim\dfrac{7n^2-2n^3+1}{3n^3+2n^2+1}$.

A. $\dfrac{7}{3}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 27: $\lim\dfrac{2n^2-3}{n^6+5n^5}$ bằng:

A. 2. **B.** 0. **C.** $\dfrac{-3}{5}$. **D.** -3.

Câu 28: $\lim\dfrac{2018}{n}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 29: Tính giới hạn $L=\lim\dfrac{2n+1}{2+n-n^2}$?

A. $L=-\infty$. **B.** $L=-2$. **C.** $L=1$. **D.** $L=0$.

Câu 30: Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $u_n=\dfrac{n^2-2}{5n+3n^2}$. **B.** $u_n=\dfrac{n^2-2n}{5n+3n^2}$. **C.** $u_n=\dfrac{1-2n}{5n+3n^2}$. **D.** $u_n=\dfrac{1-2n^2}{5n+3n^2}$.

Câu 31: Tính $I=\lim\dfrac{2n-3}{2n^2+3n+1}$

A. $I=-\infty$. **B.** $I=0$. **C.** $I=+\infty$. **D.** $I=1$.

Câu 32: Tìm $\lim u_n$ biết $u_n=\dfrac{1}{2^2-1}+\dfrac{1}{3^2-1}+\ldots+\dfrac{1}{n^2-1}$.

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$ **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Câu 33: Tính giới hạn $\lim\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right]$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 34: Tìm $L=\lim\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+...+\frac{1}{1+2+...+n}\right)$

A. $L=\frac{5}{2}$. **B.** $L=+\infty$. **C.** $L=2$. **D.** $L=\frac{3}{2}$.

Câu 35: Với n là số nguyên dương, đặt $S_n=\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+...+\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$. Khi đó $\lim S_n$ bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}+2}$.

Câu 36: Tính giá trị của $\lim\frac{\cos n+\sin n}{n^2+1}$.

A. 1. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Dạng 1.2 Phân thức bậc tử bằng bậc mẫu

Câu 37: Tìm $\lim\frac{3n^4-2n+4}{4n^2+2n+3}$.

A. -1. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 38: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n-1}$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** -2.

Câu 39: $\lim\frac{2n+1}{n-1}$ bằng

A. 2. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 1.

Câu 40: $\lim\frac{3n+5}{2n-4}$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $-\frac{5}{4}$. **C.** 3. **D.** -4.

Câu 41: Tính $L=\lim\frac{n-1}{n^3+3}$

A. $L=2$. **B.** $L=3$. **C.** $L=0$. **D.** $L=1$.

Câu 42: Tính $A=\lim\left(3+\frac{1}{n^2}\right)$

A. $A=3$. **B.** $A=-\infty$. **C.** $A=+\infty$. **D.** $A=0$.

Câu 43: Tính giới hạn $J=\lim\frac{(n+1)(2n+3)}{n^3-2}$?

A. $J=-\frac{3}{2}$. **B.** $J=2$. **C.** $J=0$. **D.** $J=-2$.

Câu 44: Giới hạn dãy số bằng: $\lim\frac{2n^2-3n+1}{n^2+2n}$

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Câu 45: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng -1?

A. $\lim\frac{n-2021}{n-2022}$. **B.** $\lim\frac{n-2022}{2022n-1}$. **C.** $\lim\frac{2n-2022}{2022n-1}$. **D.** $\lim\frac{n^2-2022}{2022n-n^2}$.

Câu 46: Dãy số (u_n) nào sau đây có giới hạn bằng $\frac{1}{5}$?

A. $u_n=\frac{1-2n^2}{5n+5}$. **B.** $u_n=\frac{1-2n}{5n+5n^2}$. **C.** $u_n=\frac{n^2-2n}{5n+5n^2}$. **D.** $u_n=\frac{1-2n}{5n+5}$.

Câu 47: Tìm a để $\lim\frac{an^2-3n}{9n^2+5}=\frac{2}{3}$.

A. $a=4$. **B.** $a=6$. **C.** $a=8$. **D.** $a=9$.

Câu 48: Tính giới hạn $I=\lim\frac{(n+1)(4n-2)}{n^3+2}$.

A. $I=0$. **B.** $I=2$. **C.** $I=1$. **D.** $I=3$.

Câu 49: Tính $\lim\frac{1+19n}{18n+19}$.

A. $+\infty$. **B.** $\frac{1}{19}$. **C.** $\frac{1}{18}$. **D.** $\frac{19}{18}$.

Câu 50: Biết $\lim\frac{an+4}{4n+3}=-2$ tìm

A. $2a+1=-7$ **B.** $2a+1=-8$ **C.** $2a+1=-15$ **D.** $2a+1=-17$

Câu 51: Kết quả của $I=\lim\frac{2n+2020}{3n+2021}$.

A. $I=\frac{3}{2}$. **B.** $I=\frac{2}{3}$. **C.** $I=\frac{2020}{2021}$. **D.** $I=1$.

Câu 52: Kết quả đúng của $\lim\frac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}}$ là:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Câu 53: Giá trị của $\lim\frac{2-n}{n+1}$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 0.

Câu 54: Kết quả của $\lim\frac{n-2}{3n+1}$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{1}{3}$. **C.** -2. **D.** 1.

Câu 55: Tìm giới hạn $I=\lim\frac{3n-2}{n+3}$.

A. $I=-\frac{2}{3}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=3$. **D.** $k\in\mathbb{Z}$.

Câu 56: Giới hạn $\lim\frac{1-2n}{3n+1}$ bằng?

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 1. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Câu 57: Tính giới hạn $I=\lim\frac{2n+2017}{3n+2018}$.

A. $I=\frac{2}{3}$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{2017}{2018}$. **D.** $I=1$.

Câu 58: $\lim\frac{1+19n}{18n+19}$ bằng

A. $\frac{19}{18}$. **B.** $\frac{1}{18}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{1}{19}$.

Câu 59: Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0?

A. $\frac{1}{n}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{n}}$. **C.** $\frac{n+1}{n}$. **D.** $\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

Câu 60: $\lim\frac{1-n^2}{2n^2+1}$ bằng

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Câu 61: Tính giới hạn $\lim\frac{4n+2018}{2n+1}$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 2018.

Câu 62: Tìm $\lim\frac{8n^5-2n^3+1}{4n^5+2n^2+1}$.

A. 2. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 63: Tính $\lim\frac{2n+1}{1+n}$ được kết quả là

A. 2. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Câu 64: $\lim\frac{2n^4-2n+2}{4n^4+2n+5}$ bằng

A. $\frac{2}{11}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Câu 65: Giá trị của $\lim\frac{2n^2-3}{1-2n^2}$ bằng

A. -3. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 0.

Câu 66: Giá trị $A=\lim\frac{n^2+n}{12n^2+1}$ bằng

A. $\frac{1}{12}$. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{24}$.

Câu 67: Tính $\lim\frac{5n+3}{2n+1}$.

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** 2. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 68: $\lim\dfrac{n^3+4n-5}{3n^3+n^2+7}$ bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 69: Tính giới hạn $\lim\dfrac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}$.

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** 0. **C.** $-\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 70: Giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{2n-1}{3-n}, n\in\mathbb{N}^*$ là:

A. -2. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Câu 71: Tính giới hạn $I=\lim\dfrac{10n+3}{3n-15}$ ta được kết quả:

A. $I=-\dfrac{10}{3}$. **B.** $I=\dfrac{10}{3}$. **C.** $I=\dfrac{3}{10}$. **D.** $I=-\dfrac{2}{5}$.

Câu 72: $\lim\dfrac{2n+1}{n+1}$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** $+\infty$.

Câu 73: $\lim\dfrac{3n^2+1}{n^2-2}$ bằng:

A. 3. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 74: Tính $\lim\dfrac{8n^2+3n-1}{4+5n+2n^2}$.

A. 2. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** 4. **D.** $-\dfrac{1}{4}$.

Câu 75: Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n=\dfrac{1}{n+1}$; $v_n=\dfrac{3}{n+3}$. Tính $\lim\dfrac{u_n}{v_n}$.

A. 0. **B.** 3. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $+\infty$.

Câu 76: Giới hạn $\lim\dfrac{8n^5-2n^3+1}{2n^2-4n^5+2019}$ bằng

A. -2. **B.** 4. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Câu 77: Giá trị của $B=\lim\dfrac{4n^2+3n+1}{(3n-1)^2}$ bằng:

A. $\dfrac{4}{9}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** 0. **D.** 4

Câu 78: Tính $L=\lim\dfrac{n^3+n^2+1}{2018-3n^3}$.

A. $\dfrac{1}{2018}$. **B.** -3. **C.** $+\infty$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Câu 79: Gọi S là tập hợp các tham số nguyên a thỏa mãn $\lim\left(\frac{3n+2}{n+2}+a^2-4a\right)=0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 80: Cho $a\in\mathbb{R}$ sao cho giới hạn $\lim\frac{an^2+a^2n+1}{(n+1)^2}=a^2-a+1$.Khi đó khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $0<a<2$. **B.** $0<a<\frac{1}{2}$. **C.** $-1<a<0$. **D.** $1<a<3$.

Câu 81: Dãy số (u_n) với $u_n=\frac{(3n-1)(3-n)^2}{(4n-5)^3}$ có giới hạn bằng phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $a.b$

A. 192 **B.** 68 **C.** 32 **D.** 128

Câu 82: Biết $\lim\frac{2n^3+n^2-4}{an^3+2}=\frac{1}{2}$ với a là tham số. Khi đó $a-a^2$ bằng

A. -12. **B.** -2. **C.** 0. **D.** -6.

Câu 83: Biết $\lim\frac{8n+1}{an-2}=4$ với a là tham số. Khi đó $a-a^2$ bằng:

A. -4. **B.** -6. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 84: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{1+2+3+...+n}{n^2+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\lim u_n=0$.

B. $\lim u_n=\frac{1}{2}$.

C. Dãy số (u_n) không có giới hạn khi $n\to+\infty$.

D. $\lim u_n=1$.

Câu 85: Giới hạn $\lim\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2}{n^3+2n+7}$ có giá trị bằng?

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** 0. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 86: $\lim\frac{1+3+5+...+2n+1}{3n^2+4}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $+\infty$.

Câu 87: $Lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+...+\frac{n}{n^2}\right)$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 88: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_n=\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^2}+...+\frac{2n-1}{n^2}$ với $n\in\mathbb{N}^*$ Giá trị của $\lim u_n$ bằng:

A. 0`. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 1

Câu 89: Tìm $\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n}{n^2}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{n}$. **D.** 0.

Câu 90: Tính giới hạn: $\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]$.

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 91: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{4}$.

Dạng 1.3 Phân thức bậc tử lớn hơn bậc mẫu

Câu 92: Tính $\lim(-2n^{2019}+3n^{2018}+4)$?

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** -2. **D.** 2019.

Câu 93: $\lim(2-3n)^4(n+1)^3$ là:

A. $-\infty$ **B.** $+\infty$ **C.** 81 **D.** 2

Câu 94: Tính giới hạn $L=\lim\frac{n^3-2n}{3n^2+n-2}$

A. $L=+\infty$. **B.** $L=0$. **C.** $L=\frac{1}{3}$. **D.** $L=-\infty$.

Câu 95: Tính giới hạn của dãy số $u_n=\frac{-2+3n-2n^3}{3n-2}$

A. $\frac{-2}{3}$. **B.** $-\infty$. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 96: Giới hạn $\lim\frac{\sqrt{1+5+...+(4n-3)}}{2n-1}$ bằng

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** 0.

Dạng 1.4 Phân thức chứa căn

Câu 97: $\lim\frac{\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{n+2}}{2n-3}$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 98: Cho $I=\lim\frac{\sqrt{4n^2+5}+n}{4n-\sqrt{n^2+1}}$. Khi đó giá trị của I là:

A. $I=1$. **B.** $I=\frac{5}{3}$. **C.** $I=-1$. **D.** $I=\frac{3}{4}$.

Câu 99: Tìm $\lim u_n$ biết $u_n=\frac{n\sqrt{1+3+5+...+(2n-1)}}{2n^2+1}$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

Câu 100: Tính $\lim\sqrt{\dfrac{1^2+2^2+3^3+...+n^2}{2n(n+7)(6n+5)}}$

A. $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

Câu 101: $\lim\dfrac{(2n-1)^2(5+3n^3)}{(3n+4)^3(1-n)^2}$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{9}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{9}$.

Câu 102: Tính $\lim\dfrac{(2n+1)^6}{(n+2)^4(2n-1)^2}$.

A. $\dfrac{1}{16}$. **B.** 15. **C.** 8. **D.** 16.

Câu 103: Dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{1+2+3+...+n}{1011n^2+1012}$. Khi đó $\lim(u_n+1)$ bằng

A. $\dfrac{2019}{2022}$. **B.** $\dfrac{2023}{2022}$. **C.** $\dfrac{2022}{2023}$. **D.** $\dfrac{2021}{2022}$.

CHƯƠNG III

GIỚI HẠN
HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI 1: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG. CÂU HỎI LÝ THUYẾT

Câu 1: Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **sai?**.

A. Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim(u_n v_n) = +\infty$.

B. Nếu $\lim u_n = a \neq 0$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = 0$.

C. Nếu $\lim u_n = a > 0$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = +\infty$.

D. Nếu $\lim u_n = a < 0$ và $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = -\infty$.

Lời giải

Chọn C

Nếu $\lim u_n = a > 0$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = +\infty$ là mệnh đề **sai** vì chưa rõ dấu của v_n là dương hay âm.

Câu 2: Cho dãy (u_n) có $\lim u_n = 3$, dãy (v_n) có $\lim v_n = 5$. Khi đó $\lim(u_n.v_n) = ?$

A. 15. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Nếu $\lim u_n = a, \lim v_n = b$ thì $\lim(u_n.v_n) = a.b$

$\lim(u_n.v_n) = 3.5 = 15$.

Câu 3: Cho $\lim u_n = -3$; $\lim v_n = 2$. Khi đó $\lim(u_n - v_n)$ bằng

A. -5. **B.** -1. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

$\lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n = -3 - 2 = -5$.

Câu 4: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\lim(u_n + 3) = 0$. Giá trị của $\lim u_n$ bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Ta có $\lim(u_n+3)=0 \Leftrightarrow \lim u_n=-3$.

Câu 5: Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) thoả mãn $\lim u_n=6$ và $\lim v_n=2$. Giá trị của $\lim(u_n-v_n)$ bằng

A. 12. **B.** 8. **C.** -4. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $\lim(u_n-v_n)=\lim u_n-\lim v_n=6-2=4$.

Câu 6: Cho hai dãy số (u_n), (v_n) thỏa mãn $\lim u_n=-4$ và $\lim v_n=3$. Giá trị của $\lim(u_n.v_n)$ bằng

A. 12. **B.** -12. **C.** 1. **D.** 7.

Lời giải

Ta có: $\lim(u_n.v_n)=\lim u_n.\lim v_n=(-4).3=-12$

Câu 7: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\lim u_n=\frac{3}{2}$. Giá trị của $\lim(u_n+4)$ bằng

A. $\frac{11}{2}$. **B.** $\frac{11}{4}$. **C.** $\frac{13}{2}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

Lời giải

$\lim(u_n+4)=\frac{3}{2}+4=\frac{11}{2}$

Câu 8: Cho $\lim a_n=-3$, $\lim b_n=5$. Khi đó $\lim(a_n-b_n)$ bằng

A. -2. **B.** 8. **C.** 2. **D.** -8.

Lời giải

Ta có: $\lim(a_n-b_n)=\lim a_n-\lim b_n=(-3)-5=-8$.

Câu 9: Nếu $\lim u_n=-3$; $\lim v_n=1$ thì $\lim(u_n+v_n)$ bằng:

A. -1. **B.** 1. **C.** -2. **D.** -4.

Lời giải

Ta có: $\lim(u_n+v_n)=\lim u_n+\lim v_n=-3+1=-2$

Câu 10: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\lim(u_n-2)=0$. Giá trị của $\lim u_n$ bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Xét: $\lim(u_n-2)=0 \Leftrightarrow \lim u_n=2$.

Câu 11: Cho hai dãy số $(u_n),(v_n)$ thỏa mãn $\lim u_n=2, \lim v_n=-3$. Giá trị của $\lim(u_n.v_n)$ bằng

A. 6 **B.** 5 **C.** -6 **D.** -1

Lời giải

$\lim(u_nv_n)=2.(-3)=-6$

Câu 12: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\lim u_n = -5$. Giá trị của $\lim(u_n - 2)$ bằng

A. 3 **B.** -7 **C.** 10 **D.** -10

Lời giải

Ta có $\lim(u_n - 2) = (-5) + (-2) = -7$

Câu 13: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\lim(u_n - 3) = 0$. Giá trị của $\lim u_n$ bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** -3. **D.** 0.

Lời giải

$\lim(u_n - 3) = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = 3$.

Câu 14: Cho dãy số (u_n), (v_n) thỏa mãn $\lim u_n = 11$, $\lim v_n = 4$. Giá trị của $\lim(u_n + v_n)$ bằng

A. 4. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 15.

Lời giải

Ta có $\lim(u_n + v_n) = 11 + 4 = 15$.

Câu 15: Tìm dạng hữu tỷ của số thập phân vô hạn tuần hoàn $P = 2,13131313...$,

A. $P = \dfrac{212}{99}$ **B.** $P = \dfrac{213}{100}$. **C.** $P = \dfrac{211}{100}$. **D.** $P = \dfrac{211}{99}$.

Lời giải

Chọn D

Lấy máy tính bấm từng phương án thì phần D ra kết quả đề bài

Câu 16: Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số a khi $n \to +\infty$, nếu $\lim\limits_{n \to +\infty}(u_n - a) = 0$.

B. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới vô cực, nếu $|u_n|$ có thể lớn hơn một số dương tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

C. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu u_n có thể nhỏ hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

D. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Lời giải

Chọn A

Câu 17: Cho các dãy số $(u_n), (v_n)$ và $\lim u_n = a, \lim v_n = +\infty$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

Dùng tính chất giới hạn: cho dãy số $(u_n), (v_n)$ và $\lim u_n = a, \lim v_n = +\infty$ trong đó a hữu hạn thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

Câu 18: Trong các khẳng định dưới đây có bao nhiêu khẳng định đúng?

$\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương.

$\lim q^n = +\infty$ nếu $|q| < 1$.

$\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

$\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương $\Rightarrow (I)$ là khẳng định đúng.

$\lim q^n = +\infty$ nếu $|q| < 1 \Rightarrow (II)$ là khẳng định sai vì $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$.

$\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1 \Rightarrow (III)$ là khẳng định đúng.

Vậy số khẳng định đúng là 2.

Câu 19: Cho dãy số (u_n) thỏa $|u_n - 2| < \frac{1}{n^3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó

A. $\lim u_n$ không tồn tại. **B.** $\lim u_n = 1$. **C.** $\lim u_n = 0$. **D.** $\lim u_n = 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $|u_n - 2| < \frac{1}{n^3} \Rightarrow \lim(u_n - 2) = \lim\frac{1}{n^3} = 0 \Rightarrow \lim u_n - 2 = 0 \Rightarrow \lim u_n = 2$.

Câu 20: Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. $\lim u_n = c$ ($u_n = c$ là hằng số). **B.** $\lim q^n = 0 \ (|q| > 1)$.

C. $\lim\frac{1}{n} = 0$. **D.** $\lim\frac{1}{n^k} = 0 \ (k > 1)$.

Lời giải

Theo định nghĩa giới hạn hữu hạn của dãy số thì $\lim q^n = 0 \ (|q| < 1)$.

DẠNG 1. DÃY SỐ DẠNG PHÂN THỨC

Dạng 1.1 Phân thức bậc tử bé hơn bậc mẫu

Câu 21: Tính $L = \lim\frac{n-1}{n^3+3}$.

A. $L = 1$. **B.** $L = 0$. **C.** $L = 3$. **D.** $L = 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\dfrac{n-1}{n^3+3}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}}{1+\dfrac{3}{n^3}}=\dfrac{0}{1}=0$.

Câu 22: $\lim\dfrac{1}{5n+3}$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\dfrac{1}{5n+3}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n}}{5+\dfrac{3}{n}}=0$.

Câu 23: $\lim\dfrac{1}{2n+7}$ bằng

A. $\dfrac{1}{7}$. **B.** $+\infty$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\lim\dfrac{1}{2n+7}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n}}{2+\dfrac{7}{n}}=0$.

Câu 24: $\lim\dfrac{1}{2n+5}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim\dfrac{1}{2n+5}=\lim\dfrac{1}{n}.\dfrac{1}{2+\dfrac{5}{n}}=0$.

Câu 25: $\lim\dfrac{1}{5n+2}$ bằng

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

$$\lim\frac{1}{5n+2}=\lim\frac{1}{n}\left(\frac{1}{5+\frac{2}{n}}\right)=0.\frac{1}{5}=0.$$

Câu 26: Tìm $I=\lim\frac{7n^2-2n^3+1}{3n^3+2n^2+1}$.

A. $\frac{7}{3}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $I=\lim\frac{7n^2-2n^3+1}{3n^3+2n^2+1}=\lim\frac{\frac{7}{n}-2+\frac{1}{n^3}}{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}=-\frac{2}{3}$.

Câu 27: $\lim\frac{2n^2-3}{n^6+5n^5}$ bằng:

A. 2. **B.** 0. **C.** $\frac{-3}{5}$. **D.** -3.

Lời giải

Ta có $\lim\frac{2n^2-3}{n^6+5n^5}=\lim\frac{\frac{2}{n^4}-\frac{3}{n^6}}{1+\frac{5}{n}}=0$.

Câu 28: $\lim\frac{2018}{n}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

Câu 29: Tính giới hạn $L=\lim\frac{2n+1}{2+n-n^2}$?

A. $L=-\infty$. **B.** $L=-2$. **C.** $L=1$. **D.** $L=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $L=\lim\frac{2n+1}{2+n-n^2}=\lim\frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n}-1}=0$.

Câu 30: Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $u_n=\frac{n^2-2}{5n+3n^2}$. **B.** $u_n=\frac{n^2-2n}{5n+3n^2}$. **C.** $u_n=\frac{1-2n}{5n+3n^2}$. **D.** $u_n=\frac{1-2n^2}{5n+3n^2}$.

Lời giải

Chọn C

➢ Xét đáp án **A.** $\lim\dfrac{n^2-2}{5n+3n^2}=\lim\dfrac{1-\dfrac{2}{n^2}}{\dfrac{5}{n}+3}=\dfrac{1}{3}$.

➢ Xét đáp án **B.** $\lim\dfrac{n^2-2n}{5n+3n^2}=\lim\dfrac{1-\dfrac{2}{n}}{\dfrac{5}{n}+3}=\dfrac{1}{3}$

➢ Xét đáp án **C.** $\lim\dfrac{1-2n}{5n+3n^2}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{2}{n}}{\dfrac{5}{n}+3}=0$.

➢ Xét đáp án **D.** $\lim\dfrac{1-2n^2}{5n+3n^2}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n^2}-2}{\dfrac{5}{n}+3}=-\dfrac{2}{3}$.

Câu 31: Tính $I=\lim\dfrac{2n-3}{2n^2+3n+1}$

A. $I=-\infty$. **B.** $I=0$. **C.** $I=+\infty$. **D.** $I=1$.

Lời giải

$$I=\lim\frac{2n-3}{2n^2+3n+1}=\lim\frac{n^2\left(\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}=\lim\frac{\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}}{2+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=0.$$

Câu 32: Tìm $\lim u_n$ biết $u_n=\dfrac{1}{2^2-1}+\dfrac{1}{3^2-1}+...+\dfrac{1}{n^2-1}$.

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$ **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u_n=\dfrac{1}{2^2-1}+\dfrac{1}{3^2-1}+...+\dfrac{1}{n^2-1}=\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{2.4}+\dfrac{1}{3.5}+...+\dfrac{1}{(n-1)(n+1)}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+...+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2(n+1)}$.

Suy ra: $\lim u_n=\lim\left[\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2(n+1)}\right]=\dfrac{3}{4}$.

Câu 33: Tính giới hạn $\lim\left[\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$.

Vậy $\lim\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right]=\lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$.

Câu 34: Tìm $L=\lim\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+...+\frac{1}{1+2+...+n}\right)$

A. $L=\frac{5}{2}$. **B.** $L=+\infty$. **C.** $L=2$. **D.** $L=\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có $1+2+3+...+k$ là tổng của cấp số cộng có $u_1=1$, $d=1$ nên $1+2+3+...+k=\frac{(1+k)k}{2}$

$\Rightarrow\frac{1}{1+2+...+k}=\frac{2}{k(k+1)}=\frac{2}{k}-\frac{2}{k+1}$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$.

$L=\lim\left(\frac{2}{1}-\frac{2}{2}+\frac{2}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{2}{4}+...+\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}\right)=\lim\left(\frac{2}{1}-\frac{2}{n+1}\right)=2$.

Câu 35: Với n là số nguyên dương, đặt $S_n=\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+...+\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$. Khi đó $\lim S_n$ bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}+2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Suy ra

$S_n=\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+...+\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$.

$=\frac{1}{1}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+....\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Suy ra $\lim S_n=1$

Câu 36: Tính giá trị của $\lim\frac{\cos n+\sin n}{n^2+1}$.

A. 1. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Ta có $0<\left|\dfrac{\cos n+\sin n}{n^2+1}\right|\le\dfrac{|\cos n|+|\sin n|}{n^2+1}<\dfrac{2}{n^2+1}$ và $\lim\dfrac{2}{n^2+1}=0$.

Suy ra $\lim\dfrac{\cos n+\sin n}{n^2+1}=0.$

Dạng 1.2 Phân thức bậc tử bằng bậc mẫu

Câu 37: Tìm $\lim\dfrac{3n^4-2n+4}{4n^2+2n+3}$.

A. -1. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\dfrac{3n^4-2n+4}{4n^2+2n+3}=\lim\dfrac{3-\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{4}{n^4}}{\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{3}{n^4}}=+\infty$.

Câu 38: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+1}{n-1}$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** -2.

Lời giải

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n+1}{n-1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{n}}{1-\dfrac{1}{n}}=2$.

Câu 39: $\lim\dfrac{2n+1}{n-1}$ bằng

A. 2. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 1.

Lời giải

$\lim\dfrac{2n+1}{n-1}=\lim\dfrac{2+\dfrac{1}{n}}{1-\dfrac{1}{n}}=2.$

Câu 40: $\lim\dfrac{3n+5}{2n-4}$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $-\dfrac{5}{4}$. **C.** 3. **D.** -4.

Lời giải

Ta có $\lim\dfrac{3n+5}{2n-4}=\lim\dfrac{3+\dfrac{5}{n}}{2-\dfrac{4}{n}}=\dfrac{3}{2}$.

Câu 41: Tính $L=\lim\dfrac{n-1}{n^3+3}$

A. $L=2$. **B.** $L=3$. **C.** $L=0$. **D.** $L=1$.

Lời giải

Ta có: $L=\lim\dfrac{n-1}{n^3+3}=\lim\dfrac{n^3\left(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\dfrac{3}{n^3}\right)}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}}{1+\dfrac{3}{n^3}}=\dfrac{0}{1}=0$

Câu 42: Tính $A=\lim\left(3+\dfrac{1}{n^2}\right)$

A. $A=3$. **B.** $A=-\infty$. **C.** $A=+\infty$. **D.** $A=0$.

Lời giải

Ta có: $A=\lim\left(3+\dfrac{1}{n^2}\right)=3+0=3$.

Câu 43: Tính giới hạn $J=\lim\dfrac{(n+1)(2n+3)}{n^3-2}$?

A. $J=-\dfrac{3}{2}$. **B.** $J=2$. **C.** $J=0$. **D.** $J=-2$.

Lời giải

Ta có: $J=\lim\dfrac{(n+1)(2n+3)}{n^3-2}=\lim\dfrac{2n^2+5n+3}{n^3-2}=\lim\dfrac{\dfrac{2}{n}+\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}}{1-\dfrac{2}{n^3}}=0$.

Câu 44: Giới hạn dãy số bằng: $\lim\dfrac{2n^2-3n+1}{n^2+2n}$

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có $\lim\dfrac{2n^2-3n+1}{n^2+2n}=\lim\dfrac{2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{2}{n}}=2.$

Câu 45: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng -1?

A. $\lim\dfrac{n-2021}{n-2022}$. **B.** $\lim\dfrac{n-2022}{2022n-1}$. **C.** $\lim\dfrac{2n-2022}{2022n-1}$. **D.** $\lim\dfrac{n^2-2022}{2022n-n^2}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\dfrac{n^2-2022}{2022n-n^2}=\lim\dfrac{1-\dfrac{2022}{n^2}}{\dfrac{2022}{n}-1}=\dfrac{1}{-1}=-1$.

Câu 46: Dãy số (u_n) nào sau đây có giới hạn bằng $\dfrac{1}{5}$?

A. $u_n=\dfrac{1-2n^2}{5n+5}$. **B.** $u_n=\dfrac{1-2n}{5n+5n^2}$. **C.** $u_n=\dfrac{n^2-2n}{5n+5n^2}$. **D.** $u_n=\dfrac{1-2n}{5n+5}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\dfrac{n^2-2n}{5n+5n^2}=\lim\dfrac{n^2\left(1-\dfrac{2}{n}\right)}{n^2\left(\dfrac{5}{n}+5\right)}=\dfrac{1}{5}$.

Câu 47: Tìm a để $\lim\dfrac{an^2-3n}{9n^2+5}=\dfrac{2}{3}$.

A. $a=4$. **B.** $a=6$. **C.** $a=8$. **D.** $a=9$.

Lời giải

Ta có: $\lim\dfrac{an^2-3n}{9n^2+5}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\lim\dfrac{a-\dfrac{3}{n}}{9+\dfrac{5}{n^2}}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\dfrac{a}{9}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow a=6$.

Vậy $a=6$.

Câu 48: Tính giới hạn $I=\lim\dfrac{(n+1)(4n-2)}{n^3+2}$.

A. $I=0$. **B.** $I=2$. **C.** $I=1$. **D.** $I=3$.

Lời giải

$$I=\lim\frac{(n+1)(4n-2)}{n^3+2}=\lim\frac{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(4-\dfrac{2}{n}\right)}{n^3\left(1+\dfrac{2}{n^3}\right)}=\lim\frac{1}{n}.\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(4-\dfrac{2}{n}\right)}{1+\dfrac{2}{n^3}}=0.$$

Vậy $I=0$.

Câu 49: Tính $\lim\dfrac{1+19n}{18n+19}$.

A. $+\infty$. **B.** $\dfrac{1}{19}$. **C.** $\dfrac{1}{18}$. **D.** $\dfrac{19}{18}$.

Lời giải

Ta có $\lim\dfrac{1+19n}{18n+19}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n}+19}{18+\dfrac{19}{n}}=\dfrac{19}{18}$.

Câu 50: Biết $\lim\dfrac{an+4}{4n+3}=-2$ tìm

A. $2a+1=-7$ **B.** $2a+1=-8$ **C.** $2a+1=-15$ **D.** $2a+1=-17$

Lời giải

$$\lim\frac{an+4}{4n+3}=-2\Leftrightarrow\lim\frac{a+\frac{4}{n}}{4+\frac{3}{n}}=-2\Leftrightarrow\frac{a}{4}=-2\Leftrightarrow a=-8\Rightarrow 2a+1=-15.$$

Câu 51: Kết quả của $I=\lim\frac{2n+2020}{3n+2021}$.

A. $I=\frac{3}{2}$. **B.** $I=\frac{2}{3}$. **C.** $I=\frac{2020}{2021}$. **D.** $I=1$.

Lời giải

Ta có $I=\lim\frac{2n+2020}{3n+2021}=\lim\frac{2+\frac{2020}{n}}{3+\frac{2021}{n}}=\frac{2}{3}$.

Câu 52: Kết quả đúng của $\lim\frac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}}$ là:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\frac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}}=\lim\frac{\left(-1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{3+\frac{2}{n^4}}}=\frac{-1+0+0}{\sqrt{3+0}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 53: Giá trị của $\lim\frac{2-n}{n+1}$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 0.

Lời giải

Ta có: $\lim\frac{2-n}{n+1}=\lim\frac{\frac{2}{n}-1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{0-1}{1+0}=-1$.

Câu 54: Kết quả của $\lim\frac{n-2}{3n+1}$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{1}{3}$. **C.** -2. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $\lim\frac{n-2}{3n+1}=\lim\frac{n\left(1-\frac{2}{n}\right)}{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}=\lim\frac{1-\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}$.

Câu 55: Tìm giới hạn $I=\lim\frac{3n-2}{n+3}$.

A. $I=-\frac{2}{3}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=3$. **D.** $k\in\mathbb{Z}$.

Lời giải

Ta có $I=\lim\frac{3n-2}{n+3}=\lim\frac{3-\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}=3$.

Câu 56: Giới hạn $\lim\frac{1-2n}{3n+1}$ bằng?

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 1. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Lời giải

Ta có $\lim\frac{1-2n}{3n+1}=\lim\frac{\frac{1}{n}-2}{3+\frac{1}{n}}=-\frac{2}{3}$.

Câu 57: Tính giới hạn $I=\lim\frac{2n+2017}{3n+2018}$.

A. $I=\frac{2}{3}$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{2017}{2018}$. **D.** $I=1$.

Lời giải

Ta có $I=\lim\frac{2n+2017}{3n+2018}=\lim\frac{2+\frac{2017}{n}}{3+\frac{2018}{n}}=\frac{2}{3}$.

Câu 58: $\lim\frac{1+19n}{18n+19}$ bằng

A. $\frac{19}{18}$. **B.** $\frac{1}{18}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{1}{19}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\frac{1+19n}{18n+19}=\lim\frac{\frac{1}{n}+19}{18+\frac{19}{n}}=\frac{19}{18}$.

Câu 59: Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0?

A. $\frac{1}{n}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{n}}$. **C.** $\frac{n+1}{n}$. **D.** $\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

Lời giải

Chọn C

Có $\lim\frac{n+1}{n}=\lim 1+\lim\frac{1}{n}=1$.

Câu 60: $\lim\dfrac{1-n^2}{2n^2+1}$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $\lim\dfrac{1-n^2}{2n^2+1}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n^2}-1}{2+\dfrac{1}{n^2}}=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 61: Tính giới hạn $\lim\dfrac{4n+2018}{2n+1}$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 2018.

Lời giải

Ta có $\lim\dfrac{4n+2018}{2n+1}=\lim\dfrac{4+\dfrac{2018}{n}}{2+\dfrac{1}{n}}=2$.

Câu 62: Tìm $\lim\dfrac{8n^5-2n^3+1}{4n^5+2n^2+1}$.

A. 2. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\dfrac{8n^5-2n^3+1}{4n^5+2n^2+1}=\lim\dfrac{n^5\left(8-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^5}\right)}{n^5\left(4+\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{1}{n^5}\right)}=\lim\dfrac{8-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^5}}{4+\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{1}{n^5}}=\dfrac{8}{4}=2$.

Câu 63: Tính $\lim\dfrac{2n+1}{1+n}$ được kết quả là

A. 2. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $\lim\dfrac{2n+1}{1+n}=\lim\dfrac{n\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(\dfrac{1}{n}+1\right)}=\lim\dfrac{2+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}+1}=\dfrac{2+0}{0+1}=2$.

Câu 64: $\lim\dfrac{2n^4-2n+2}{4n^4+2n+5}$ bằng

A. $\dfrac{2}{11}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Lời giải

Ta có $\lim\dfrac{2n^4-2n+2}{4n^4+2n+5}=\lim\dfrac{2-\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{2}{n^4}}{4+\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{5}{n^4}}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 65: Giá trị của $\lim\dfrac{2n^2-3}{1-2n^2}$ bằng

A. -3. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

$\lim\dfrac{2n^2-3}{1-2n^2}=\lim\dfrac{2-\dfrac{3}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}-2}=-1$.

Câu 66: Giá trị $A=\lim\dfrac{n^2+n}{12n^2+1}$ bằng

A. $\dfrac{1}{12}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{24}$.

Lời giải

Chọn A

$A=\lim\dfrac{n^2+n}{12n^2+1}=\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{12+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{1}{12}$.

Vậy $A=\dfrac{1}{12}$.

Câu 67: Tính $\lim\dfrac{5n+3}{2n+1}$.

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\dfrac{5n+3}{2n+1}=\lim\dfrac{5+\dfrac{3}{n}}{2+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{5}{2}$.

Câu 68: $\lim\dfrac{n^3+4n-5}{3n^3+n^2+7}$ bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim\dfrac{n^3+4n-5}{3n^3+n^2+7}=\lim\dfrac{1+\dfrac{4}{n^2}-\dfrac{5}{n^3}}{3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{7}{n^3}}=\dfrac{1}{3}$.

Câu 69: Tính giới hạn $\lim\dfrac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}$.

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** 0. **C.** $-\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\lim\dfrac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}=\lim\dfrac{n^3\left(\dfrac{1}{n}-3\right)}{n^3\left(2+\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}\right)}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n}-3}{2+\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}}=-\dfrac{3}{2}$.

Câu 70: Giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{2n-1}{3-n}, n\in\mathbb{N}^*$ là:

A. -2. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim u_n=\lim\dfrac{2n-1}{3-n}=\lim\dfrac{2-\dfrac{1}{n}}{\dfrac{3}{n}-1}=-\dfrac{1}{3}$.

Câu 71: Tính giới hạn $I=\lim\dfrac{10n+3}{3n-15}$ ta được kết quả:

A. $I=-\dfrac{10}{3}$. **B.** $I=\dfrac{10}{3}$. **C.** $I=\dfrac{3}{10}$. **D.** $I=-\dfrac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I=\lim\dfrac{10n+3}{3n-15}=\lim\dfrac{10+\dfrac{3}{n}}{3-\dfrac{15}{n}}=\dfrac{10}{3}$.

Câu 72: $\lim\dfrac{2n+1}{n+1}$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\dfrac{2n+1}{n+1}=\lim\dfrac{2+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}=2$.

Câu 73: $\lim\dfrac{3n^2+1}{n^2-2}$ bằng:

A. 3. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\lim\frac{3n^2+1}{n^2-2}=\lim\frac{3+\dfrac{1}{n^2}}{1-\dfrac{2}{n^2}}=3$$

Câu 74: Tính $\lim\dfrac{8n^2+3n-1}{4+5n+2n^2}$.

A. 2. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** 4. **D.** $-\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\dfrac{8n^2+3n-1}{4+5n+2n^2}=\lim\dfrac{8+\dfrac{3}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{5}{n}+2}=4$.

Câu 75: Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n=\dfrac{1}{n+1}$; $v_n=\dfrac{3}{n+3}$. Tính $\lim\dfrac{u_n}{v_n}$.

A. 0. **B.** 3. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I=\lim\dfrac{u_n}{v_n}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{3}{n+3}}=\lim\dfrac{n+3}{3(n+1)}=\lim\dfrac{1+\dfrac{3}{n}}{3\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}=\dfrac{1}{3}$.

Câu 76: Giới hạn $\lim\dfrac{8n^5-2n^3+1}{2n^2-4n^5+2019}$ bằng

A. -2. **B.** 4. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim\dfrac{8n^5-2n^3+1}{2n^2-4n^5+2019}=\lim\left(\dfrac{8-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^5}}{\dfrac{2}{n^3}-4+\dfrac{2019}{n^5}}\right)=-2$.

Câu 77: Giá trị của $B=\lim\dfrac{4n^2+3n+1}{(3n-1)^2}$ bằng:

A. $\dfrac{4}{9}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** 0. **D.** 4

Lời giải

Chọn A

Ta có: $B=\lim\dfrac{4n^2+3n+1}{(3n-1)^2}=\lim\dfrac{n^2\left(4+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3-\dfrac{1}{n}\right)^2}=\lim\dfrac{\left(4+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\left(3-\dfrac{1}{n}\right)^2}=\dfrac{4+0+0}{(3-0)^2}=\dfrac{4}{9}$

Câu 78: Tính $L=\lim\dfrac{n^3+n^2+1}{2018-3n^3}$.

A. $\dfrac{1}{2018}$. **B.** -3. **C.** $+\infty$. **D.** $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

$L=\lim\dfrac{n^3+n^2+1}{2018-3n^3}=\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{2018}{n^3}-3}=-\dfrac{1}{3}$.

Câu 79: Gọi S là tập hợp các tham số nguyên a thỏa mãn $\lim\left(\dfrac{3n+2}{n+2}+a^2-4a\right)=0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim\left(\dfrac{3n+2}{n+2}+a^2-4a\right)$

$=\lim\left(\dfrac{\left(a^2-4a+3\right)n+2+2a^2-8a}{n+2}\right)=\lim\left(\dfrac{a^2-4a+3+\dfrac{2+2a^2-8a}{n}}{1+\dfrac{2}{n}}\right)=a^2-4a+3$.

Theo giả thiết: $\lim\left(\dfrac{3n+2}{n+2}+a^2-4a\right)=0\Leftrightarrow a^2-4a+3=0\Leftrightarrow a=3\vee a=1$.

Vậy $S=\{1;3\}\Rightarrow 1+3=4$.

Câu 80: Cho $a \in \mathbb{R}$ sao cho giới hạn $\lim \dfrac{an^2+a^2n+1}{(n+1)^2} = a^2-a+1$.Khi đó khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $0<a<2$. **B.** $0<a<\dfrac{1}{2}$. **C.** $-1<a<0$. **D.** $1<a<3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim \dfrac{an^2+a^2n+1}{(n+1)^2} = \lim \dfrac{an^2+a^2n+1}{n^2+2n+1} = \lim \dfrac{a+\dfrac{a^2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}} = a$.

$a^2-a+1=a \Rightarrow a^2-2a+1=0 \Rightarrow a=1$.

Câu 81: Dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{(3n-1)(3-n)^2}{(4n-5)^3}$ có giới hạn bằng phân số tối giản $\dfrac{a}{b}$. Tính $a.b$

A. 192 **B.** 68 **C.** 32 **D.** 128

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim \dfrac{(3n-1)(3-n)^2}{(4n-5)^3} = \lim \dfrac{\left(3-\dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{3}{n}-1\right)^2}{\left(4-\dfrac{5}{n}\right)^3} = \dfrac{3}{64} = \dfrac{a}{b}$. Do đó: $a.b=192$

Câu 82: Biết $\lim \dfrac{2n^3+n^2-4}{an^3+2} = \dfrac{1}{2}$ với a là tham số. Khi đó $a-a^2$ bằng

A. -12. **B.** -2. **C.** 0. **D.** -6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim \dfrac{2n^3+n^2-4}{an^3+2} = \lim \dfrac{n^3\left(2+\dfrac{1}{n}-\dfrac{4}{n^3}\right)}{n^3\left(a+\dfrac{2}{n^3}\right)} = \dfrac{2}{a} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $a=4$. Khi đó $a-a^2 = 4-4^2 = -12$.

Câu 83: Biết $\lim \dfrac{8n+1}{an-2} = 4$ với a là tham số. Khi đó $a-a^2$ bằng:

A. -4. **B.** -6. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

$\lim \dfrac{8n+1}{an-2} = \lim \dfrac{n\left(8+\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(a-\dfrac{2}{n}\right)} = \lim \dfrac{8+\dfrac{1}{n}}{a-\dfrac{2}{n}} = \dfrac{8}{a} = 4 \Rightarrow a=2$

Khi đó $a-a^2 = 2-2^{\,2} = -2$

Câu 84: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1+2+3+...+n}{n^2+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\lim u_n = 0$.

B. $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$.

C. Dãy số (u_n) không có giới hạn khi $n \to +\infty$.

D. $\lim u_n = 1$.

Lời giải

Ta có: $\lim u_n = \lim \dfrac{1+2+3+...+n}{n^2+1} = \lim \dfrac{n(n+1)}{2(n^2+1)} = \dfrac{1}{2}$.

Câu 85: Giới hạn $\lim \dfrac{1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2}{n^3+2n+7}$ có giá trị bằng?

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có kết quả quen thuộc $1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Do đó $\lim \dfrac{1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2}{n^3+2n+7} = \lim \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+2n+7)} = \lim \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{6\left(1+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{7}{n^3}\right)} = \dfrac{1.2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Câu 86: $\lim \dfrac{1+3+5+...+2n+1}{3n^2+4}$ bằng

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có $1+3+5+...+(2n+1) = \dfrac{(1+2n+1)(n+1)}{2} = (n+1)^2$.

$\lim \dfrac{1+3+5+...+(2n+1)}{3n^2+4} = \lim \dfrac{(n+1)^2}{3n^2+4} = \lim \dfrac{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{3+\dfrac{4}{n^2}} = \dfrac{1}{3}$.

Câu 87: $Lim\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+...+\dfrac{n}{n^2}\right)$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

$Lim\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+...+\dfrac{n}{n^2}\right) = lim\left(\dfrac{1+2+3+...+n}{n^2}\right) = lim\left(\dfrac{n(n+1)}{2n^2}\right) = lim\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\right) = \dfrac{1}{2}$

Câu 88: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_n=\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{2n-1}{n^2}$ với $n\in\mathbb{N}^*$ Giá trị của $\lim u_n$ bằng:

A. 0`. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 1

Lời giải

Ta có $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2\longrightarrow\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{2n-1}{n^2}=\frac{1+3+\ldots+(2n-1)}{n^2}=\frac{n^2}{n^2}=1$

Suy ra $\lim u_n=1$.

Câu 89: Tìm $\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{n}$. **D.** 0.

Lời giải

$$\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim\left(\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}\right)=\lim\left(\frac{n(n+1)}{2n^2}\right)=\lim\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Câu 90: Tính giới hạn: $\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]$.

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Xét dãy số (u_n), với $u_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$, $n\geq 2, n\in\mathbb{N}$.

Ta có:

$u_2=1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}=\frac{2+1}{2.2}$;

$u_3=\left(1-\frac{1}{2^2}\right).\left(1-\frac{1}{3^2}\right)=\frac{3}{4}.\frac{8}{9}=\frac{4}{6}=\frac{3+1}{2.3}$;

$u_4=\left(1-\frac{1}{2^2}\right).\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)=\frac{3}{4}.\frac{8}{9}.\frac{15}{16}=\frac{5}{8}=\frac{4+1}{2.4}$

……

$u_n=\frac{n+1}{2n}$.

Dễ dàng chứng minh bằng phương pháp qui nạp để khẳng định $u_n=\frac{n+1}{2n},\forall n\geq 2$

Khi đó $\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]=\lim\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$.

Câu 91: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + ... + \frac{1}{(2n-1).(2n+1)}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có : $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + ... + \frac{1}{(2n-1).(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{n}{2n+1}$

Suy ra : $\lim u_n = \lim \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

Dạng 1.3 Phân thức bậc tử lớn hơn bậc mẫu

Câu 92: Tính $\lim(-2n^{2019} + 3n^{2018} + 4)$?

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** -2. **D.** 2019 .

Lời giải:

Ta có $\lim\left(-2n^{2019} + 3n^{2018} + 4\right) = \lim\left[n^{2019}.\left(-2 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^{2019}}\right)\right] = -\infty$.

Câu 93: $\lim(2-3n)^4(n+1)^3$ là:

A. $-\infty$ **B.** $+\infty$ **C.** 81 **D.** 2

Lời giải

$\lim(2-3n)^4(n+1)^3 = \lim\left[n^7\left(\frac{2}{n} - 3\right)^4\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3\right]$

Ta có $\lim n^7 = +\infty$

$\lim\left(\frac{2}{n} - 3\right)^4 = (-3)^4 = 3^4$

$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = 1$

$\Rightarrow \lim(2-3n)^4(n+1)^3 = +\infty$

Câu 94: Tính giới hạn $L = \lim\frac{n^3 - 2n}{3n^2 + n - 2}$

A. $L = +\infty$. **B.** $L = 0$. **C.** $L = \frac{1}{3}$. **D.** $L = -\infty$.

Lời giải

Ta có: $L = \lim\frac{n^3 - 2n}{3n^2 + n - 2} = \lim\frac{1 - \frac{2}{n^2}}{\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^3}} = +\infty$.

Câu 95: Tính giới hạn của dãy số $u_n = \frac{-2 + 3n - 2n^3}{3n - 2}$

A. $\frac{-2}{3}$. **B.** $-\infty$. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải

$\lim\frac{-2+3n-2n^3}{3n-2}=\lim\frac{\frac{-2}{n}+n-2n^2}{3-\frac{2}{n}}=-\infty$ do $\lim\left(\frac{-2}{n}+n-2n^2\right)=\lim\left[n^2\left(-2+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}\right)\right]=-\infty$

và $\lim\left(3-\frac{2}{n}\right)=3>0$.

Câu 96: Giới hạn $\lim\frac{\sqrt{1+5+...+(4n-3)}}{2n-1}$ bằng

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Ta có: $\lim\frac{\sqrt{1+5+...+(4n-3)}}{2n-1}=\lim\frac{\sqrt{1.\frac{1-4^n}{1-4}}}{2n-1}=\lim\frac{\sqrt{4^n-1}}{\sqrt{3}(2n-1)}=+\infty$.

Dạng 1.3 Phân thức chứa căn

Câu 97: $\lim\frac{\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{n+2}}{2n-3}$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có: $\lim\frac{\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{n+2}}{2n-3}=\lim\frac{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}{2-\frac{3}{n}}=\frac{2-0}{2}=1$.

Câu 98: Cho $I=\lim\frac{\sqrt{4n^2+5}+n}{4n-\sqrt{n^2+1}}$. Khi đó giá trị của I là:

A. $I=1$. **B.** $I=\frac{5}{3}$. **C.** $I=-1$. **D.** $I=\frac{3}{4}$.

Lời giải

Ta có $I=\lim\frac{\sqrt{4n^2+5}+n}{4n-\sqrt{n^2+1}}=\lim\frac{\sqrt{4+\frac{5}{n^2}}+1}{4-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$

Câu 99: Tìm $\lim u_n$ biết $u_n=\frac{n\sqrt{1+3+5+...+(2n-1)}}{2n^2+1}$

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

Lời giải

$$\lim u_n = \lim \frac{n\sqrt{1+3+5+...+(2n-1)}}{2n^2+1} = \lim \frac{n\sqrt{n^2}}{2n^2+1} = \lim \frac{n^2}{2n^2+1} = \lim \frac{1}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Câu 100: Tính $\lim \sqrt{\frac{1^2+2^2+3^3+...+n^2}{2n(n+7)(6n+5)}}$

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{2\sqrt{6}}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có: $1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Khi đó: $\lim \sqrt{\frac{1^2+2^2+3^3+...+n^2}{2n(n+7)(6n+5)}} = \lim \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n(n+7)(6n+5)}} = \lim \sqrt{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{12\left(1+\frac{7}{n}\right)\left(6+\frac{5}{n}\right)}} = \frac{1}{6}$.

Câu 101: $\lim \frac{(2n-1)^2(5+3n^3)}{(3n+4)^3(1-n)^2}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{2}{9}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

Lời giải

Ta có:

$$\lim \frac{(2n-1)^2(5+3n^3)}{(3n+4)^3(1-n)^2} = \lim \frac{\frac{(2n-1)^2}{n^2}\cdot\frac{(5+3n^3)}{n^3}}{\frac{(3n+4)^3}{n^3}\cdot\frac{(1-n)^2}{n^2}} = \lim \frac{\left(2-\frac{1}{n}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{n^3}+3\right)}{\left(3+\frac{4}{n}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{n}-1\right)^2} = \frac{2^2.3}{3^3} = \frac{4}{9}.$$

Vậy $\lim \frac{(2n-1)^2(5+3n^3)}{(3n+4)^3(1-n)^2} = \frac{4}{9}$.

Câu 102: Tính $\lim \frac{(2n+1)^6}{(n+2)^4(2n-1)^2}$.

A. $\frac{1}{16}$. **B.** 15. **C.** 8. **D.** 16.

Lời giải

Ta có $\lim\dfrac{(2n+1)^6}{(n+2)^4(2n-1)^2}=\lim\dfrac{n^6\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^6}{n^6\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^4\left(2-\dfrac{1}{n}\right)^2}=\lim\dfrac{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^6}{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^4\left(2-\dfrac{1}{n}\right)^2}=2^4=16.$

Câu 103: Dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{1+2+3+...+n}{1011n^2+1012}$. Khi đó $\lim(u_n+1)$ bằng

A. $\dfrac{2019}{2022}$. **B.** $\dfrac{2023}{2022}$. **C.** $\dfrac{2022}{2023}$. **D.** $\dfrac{2021}{2022}$.

Lời giải

Ta có $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Nên $u_n=\dfrac{1+2+3+...+n}{1011n^2+1012}=\dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{1011n^2+1012}=\dfrac{n^2+n}{2022n^2+2024}$

Do đó $u_n+1=\dfrac{2023n^2+n+2024}{2022n^2+2024}$

Suy ra $\lim(u_n+1)=\lim\dfrac{2023n^2+n+2024}{2022n^2+2024}=\lim\dfrac{2023+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2024}{n^2}}{2022+\dfrac{2024}{n^2}}=\dfrac{2023}{2022}.$

CHƯƠNG III

GIỚI HẠN
HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI 1: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 2. DÃY SỐ CHỨA CĂN THỨC

Câu 104: Cho dãy số $u_n = n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$. Khi đó $\lim u_n$ bằng

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 105: $\lim\left(\sqrt{n^2-3n+1}-n\right)$ bằng

A. -3. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Câu 106: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n^2+an-3}-\sqrt{n^2+n}$, trong đó a là tham số thự C. Tìm a để $\lim u_n = 3$.

A. 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 107: Giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+18n}-n\right)$ bằng

A. 9. **B.** $+\infty$. **C.** 18. **D.** 0.

Câu 108: Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào có giá trị bằng 1?

A. $\lim\frac{3^{n+1}+2n}{5+3^n}$. **B.** $\lim\frac{3n^2+n}{4n^2-5}$.

C. $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}\right)$. **D.** $\lim\frac{2n^3+3}{1+2n^2}$.

Câu 109: Giới hạn $\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+3}\right)$ bằng

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 110: Tính giới hạn $\lim\left(n-\sqrt{n^2-4n}\right)$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 111: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để $\lim\left(\sqrt{n^2-4n+7}+a-n\right)=0$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 112: *Tính* $I=\lim\left[n\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-1}\right)\right]$.

A. $I=+\infty$. **B.** $I=\dfrac{3}{2}$. **C.** $I=1,499$. **D.** $I=0$.

Câu 113: Tính $\lim n\left(\sqrt{4n^2+3}-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Câu 114: Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt{9n^2+2n-1}-\sqrt{4n^2+1}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

Câu 115: Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt{4n^2+n+1}-9n\right)$.

A. $+\infty$. **B.** -7. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

Câu 116: Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt{4n^2+n}-\sqrt{4n^2+2}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** -7. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Câu 117: Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n+25\right)$.

A. $+\infty$. **B.** -7. **C.** $\dfrac{53}{2}$. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

Câu 118: Tính giới hạn $L=\lim\dfrac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{4n-5}}$.

A. $+\infty$. **B.** -7. **C.** $\dfrac{53}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Câu 119: Tính giới hạn: $\lim\dfrac{3n-\sqrt{4n^2+n+1}}{n+\sqrt{n^2-2n-2}}$.

Câu 120: Tính giới hạn $\lim\dfrac{\sqrt{3n^2+1}+n}{1-2n^2}$.

A. -2. **B.** $-\dfrac{3}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Câu 121: Tính giới hạn sau $L=\lim\left(\sqrt[3]{n+4}-\sqrt[3]{n+1}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** -7. **C.** $\dfrac{53}{2}$. **D.** 0.

Câu 122: Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+3n^2-2}+\sqrt[3]{5n^2-8n^3}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** -7. **C.** $\dfrac{53}{2}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Câu 123: Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+3n^2+4}-2n+6\right)$.

A. $+\infty$. **B.** $\frac{25}{4}$. **C.** $\frac{53}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 124: Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt[3]{2n-n^3}+n-1\right)$.

A. $+\infty$. **B.** -1. **C.** $\frac{53}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 125: Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt[3]{n-n^3}+n+2\right)$.

A. $+\infty$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 126: Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n-1\right)$.

A. $+\infty$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{53}{2}$. **D.** $-\frac{5}{3}$.

Câu 127: Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt{n^4+n^2}-\sqrt[3]{n^6+1}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{5}{3}$.

Câu 128: Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{53}{2}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

DẠNG 3. DÃY SỐ CHỨA LŨY THỪA

Câu 129: $\lim\left(2^n-1\right)$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Câu 130: Giá trị đúng của $\lim\left(5^n\right)$ là:

A. $+\infty$. **B.** -2. **C.** 2. **D.** $-\infty$.

Câu 131: Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $\left(\frac{4}{\mathrm{e}}\right)^n$. **B.** $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. **C.** $\left(\frac{5}{3}\right)^n$. **D.** $\left(\frac{-5}{3}\right)^n$.

Câu 132: $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n$ bằng.

A. 2. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Câu 133: Trong các giới hạn sau giới hạn nào bằng 0

A. $\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n$. **B.** $\lim\left(\frac{5}{3}\right)^n$. **C.** $\lim\left(\frac{4}{3}\right)^n$. **D.** $\lim(2)^n$.

Câu 134: $\lim\left(\frac{2018}{2019}\right)^n$ bằng.

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Câu 135: Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $(0,999)^n$. **B.** $(-1)^n$. **C.** $(-1,0001)^n$. **D.** $(1,2345)^n$.

Câu 136: $\lim\frac{100^{n+1}+3.99^n}{10^{2n}-2.98^{n+1}}$ là

A. $+\infty$. **B.** 100. **C.** $\frac{1}{100}$. **D.** 0.

Câu 137: $\lim\left(3^n-4^n\right)$ là

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 1.

Câu 138: Tính giới hạn $\lim\frac{3.2^{n+1}-2.3^{n+1}}{4+3^n}$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** $\frac{6}{5}$. **D.** -6.

Câu 139: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim\frac{1+2.2017^n}{2016^n+2018^n}$. **B.** $\lim\frac{1+2.2018^n}{2016^n+2017^{n+1}}$.

C. $\lim\frac{1+2.2018^n}{2017^n+2018^n}$. **D.** $\lim\frac{2.2018^{n+1}-2018}{2016^n+2018^n}$.

Câu 140: Tính $\lim\frac{2^n+1}{2.2^n+3}$.

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 141: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(0;2019)$ để $\lim\sqrt{\frac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}}\le\frac{1}{2187}$?

A. 2018. **B.** 2012. **C.** 2019. **D.** 2011.

Câu 142: Tính giới hạn $T=\lim\left(\sqrt{16^{n+1}+4^n}-\sqrt{16^{n+1}+3^n}\right)$.

A. $T=0$. **B.** $T=\frac{1}{4}$. **C.** $T=\frac{1}{8}$. **D.** $T=\frac{1}{16}$.

DẠNG 4. TỔNG CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠNG

Câu 143: Tính tổng $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+....+\frac{1}{2^n}+.....$

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 144: Tổng $S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^n}+...$ có giá trị là:

A. $-\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Câu 145: Tính tổng S của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=1$ và công bội $q=-\frac{1}{2}$.

A. $S=2$. **B.** $S=\frac{3}{2}$. **C.** $S=1$. **D.** $S=\frac{2}{3}$.

Câu 146: Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $\frac{1}{2};-\frac{1}{4};...;\frac{(-1)^{n+1}}{2^n};...$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 1. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Câu 147: Tính tổng $S=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{18}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2.3^{n-1}}+\cdots$.

A. $S=\frac{3}{4}$. **B.** $S=\frac{8}{3}$. **C.** $S=\frac{2}{3}$. **D.** $S=\frac{3}{8}$.

Câu 148: Cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) có $u_1=-2$; $q=\frac{1}{2}$. Khi đó tổng S của cấp số nhân đã cho bằng :

A. 4. **B.** $-\frac{4}{3}$. **C.** -4. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 149: Tính tổng $S=16-8+4-2+...$

A. 32. **B.** $\frac{32}{3}$. **C.** 24. **D.** $-\frac{32}{3}$.

Câu 150: Cho tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn $S=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}-....$ Giá trị của S là

A. $S=-\frac{3}{4}$. **B.** $S=-\frac{4}{3}$. **C.** $S=\frac{3}{4}$. **D.** $S=\frac{4}{3}$.

Câu 151: Tổng vô hạn sau đây $S=2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{2}{3^n}+...$ có giá trị bằng mấy?

A. 2. **B.** 4. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** 3.

Câu 152: Tính tổng S của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=1$ và công bội $q=-\frac{1}{2}$.

A. $S=2$. **B.** $S=\frac{3}{2}$. **C.** $S=1$. **D.** $S=\frac{2}{3}$.

Câu 153: Tổng vô hạn sau đây $S=2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{2}{3^n}+...$ có giá trị bằng

A. $\frac{8}{3}$. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 154: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $3,15555...=3,1(5)$ viết dưới dạng hữu tỉ là

A. $\frac{63}{20}$. **B.** $\frac{142}{45}$. **C.** $\frac{1}{18}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Câu 155: Tổng $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2^n}+...$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 156: Cho dãy số $(u_n), n\in\mathbb{N}^*$, thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=-\frac{u_n}{5} \end{cases}$. Gọi $S=u_1+u_2+u_3+...+u_n$ là tổng n số hạng đầu tiên của dãy số đã cho. Khi đó $\lim S_n$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** 0. **D.** $\frac{5}{2}$.

Câu 157: Cho dãy số (u_n) thoả mãn $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+4,\ \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$. Tìm $\lim u_n$.

A. $\lim u_n=1$. **B.** $\lim u_n=4$. **C.** $\lim u_n=12$. **D.** $\lim u_n=3$.

DẠNG 5. MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

Câu 158: Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1=2$ và công sai $d=3$. Tìm $\lim\frac{n}{u_n}$.

A. $L=\frac{1}{3}$. **B.** $L=\frac{1}{2}$. **C.** $L=3$. **D.** $L=2$

Câu 159: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_n=\sqrt{n+2018}-\sqrt{n+2017}, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Dãy số (u_n) là dãy tăng. **B.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

C. $0<u_n<\frac{1}{2\sqrt{2018}}, \forall n\in\mathbb{N}^*$. **D.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$.

Câu 160: Đặt $f(n)=\left(n^2+n+1\right)^2+1$, xét dãy số (u_n) sao cho $u_n=\frac{f(1).f(3).f(5)...f(2n-1)}{f(2).f(4).f(6)...f(2n)}$. Tìm $\lim n\sqrt{u_n}$.

A. $\lim n\sqrt{u_n}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\lim n\sqrt{u_n}=\sqrt{3}$. **C.** $\lim n\sqrt{u_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\lim n\sqrt{u_n}=\sqrt{2}$.

Câu 161: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=0$ và $u_{n+1}=u_n+4n+3$, $\forall n\geq 1$. Biết

$$\lim\frac{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{4n}}+\sqrt{u_{4^2n}}+...+\sqrt{u_{4^{2018}n}}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{2n}}+\sqrt{u_{2^2n}}+...+\sqrt{u_{2^{2018}n}}}=\frac{a^{2019}+b}{c}$$

với a, b, c là các số nguyên dương và $b<2019$. Tính giá trị $S=a+b-c$.

A. $S=-1$. **B.** $S=0$. **C.** $S=2017$. **D.** $S=2018$.

Câu 162: Dãy số (u_n) nào sau đây có giới hạn khác số 1 khi n dần đến vô cùng?

A. $u_n=\dfrac{(2017-n)^{2018}}{n(2018-n)^{2017}}$. **B.** $u_n=n\left(\sqrt{n^2+2018}-\sqrt{n^2+2016}\right)$.

C. $\begin{cases}u_1=2017\\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}(u_n+1),\ \ n=1,2,3...\end{cases}$. **D.** $u_n=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}$.

Câu 163: Cho dãy số (u_n) được xác định như sau $u_1=2016; u_{n-1}=n^2(u_{n-1}-u_n)$, với mọi $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$, tìm giới hạn của dãy số (u_n).

A. 1011. **B.** 1010. **C.** 1008. **D.** 1009.

Câu 164: Cho dãy số (u_n) như sau: $u_n=\dfrac{n}{1+n^2+n^4}, \forall n=1,\ 2,...$ Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}(u_1+u_2+...+u_n)$.

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 165: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases}u_1=2\\ 3\sqrt{4u_{n+1}+1}=\sqrt{4u_n+1}+4,\left(n\in\mathbb{N}^*\right)\end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Câu 166: Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases}u_1=-2\\ u_n=3u_{n-1}-1,\forall n\geq 2\end{cases}$, khi đó $L=\lim\dfrac{u_n}{3^n}$

A. Không xác định. **B.** $L=+\infty$. **C.** $L=-\dfrac{5}{6}$. **D.** $L=0$.

Câu 167: Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC.

Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$,... sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n\geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S=S_1+S_2+...+S_n+...$?

A. $S=\dfrac{15\pi}{4}$. **B.** $S=4\pi$. **C.** $S=\dfrac{9\pi}{2}$. **D.** $S=5\pi$.

Câu 168: Trong các dãy số (u_n) cho dưới đây, dãy số nào có giới hạn khác 1?

A. $u_n=\dfrac{n(n-2018)^{2017}}{(n-2017)^{2018}}$. **B.** $u_n=n\left(\sqrt{n^2+2020}-\sqrt{4n^2+2017}\right)$.

C. $u_n=\dfrac{2}{1.3}+\dfrac{2}{3.5}+\ldots+\dfrac{2}{(2n+1)(2n+3)}$. **D.** $\begin{cases}u_1=2018\\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}(u_n+1),\ n\ge 1\end{cases}$.

Câu 169: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $u_1=1$; $u_{n+1}=\sqrt{\dfrac{2}{3}u_n^2+a},\forall n\in\mathbb{N}^*$. Biết rằng $\lim\left(u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2-2n\right)=b$. Giá trị của biểu thức $T=ab$ là

A. -2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 170: Với n là số tự nhiên lớn hơn 2, đặt $S_n=\dfrac{1}{C_3^3}+\dfrac{1}{C_4^3}+\dfrac{1}{C_5^4}+\ldots+\dfrac{1}{C_n^3}$. Tính $\lim S_n$

A. 1. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 171: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(0;2018)$ để có $\lim\sqrt{\dfrac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}}\le\dfrac{1}{2187}$?

A. 2011. **B.** 2016. **C.** 2019. **D.** 2009.

Câu 172: Cho hai dãy số $(u_n),(v_n)$ đều tồn tại giới hạn hữu hạn. Biết rằng hai dãy số đồng thời thỏa mãn các hệ thức $u_{n+1}=4v_n-2, v_{n+1}=u_n+1$ với mọi $\forall n\in\mathbb{Z}^+$. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+2v_n)$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** -1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 173: Một mô hình gồm các khối cầu xếp chồng lên nhau tạo thành một cột thẳng đứng. Biết rằng mỗi khối cầu có bán kính gấp đôi khối cầu nằm ngay trên nó và bán kính khối cầu dưới cùng là 50 cm. Hỏi mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Chiều cao mô hình không quá $1,5$ mét **B.** Chiều cao mô hình tối đa là 2 mét

C. Chiều cao mô hình dưới 2 mét. **D.** Mô hình có thể đạt được chiều cao tùy ý.

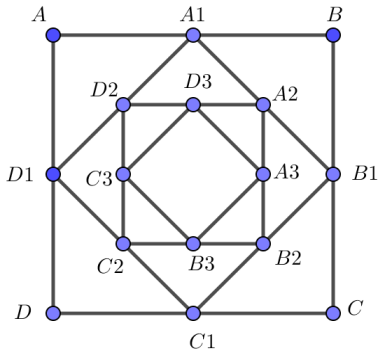
Câu 174: Trong một lần Đoàn trường Lê Văn Hưu tổ chức chơi bóng chuyền hơi, bạn Nam thả một quả bóng chuyền hơi từ tầng ba, độ cao $8m$ so với mặt đất và thấy rằng mỗi lần chạm đất thì quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng ba phần tư độ cao lần rơi trước. Biết quả bóng chuyển động vuông góc với mặt đất. Khi đó tổng quảng đường quả bóng đã bay từ lúc thả bóng đến khi quả bóng không máy nữa gần bằng số nào dưới đây nhất?

A. $57m$. **B.** $54m$. **C.** $56m$. **D.** $58m$.

Câu 175: Với mỗi số nguyên dương n, gọi s_n là số cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2+y^2\le n^2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{s_n}}{n}=\sqrt{2\pi}$. **B.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{s_n}}{n}=2$. **C.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{s_n}}{n}=\sqrt{\pi}$. **D.** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{s_n}}{n}=4$.

Câu 176: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Người ta dựng hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng $\frac{1}{2}$ đường chéo của hình vuông $ABCD$; dựng hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ có cạnh bằng $\frac{1}{2}$ đường chéo của hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ và cứ tiếp tục như vậy. Giả sử cách dựng trên có thể tiến ra vô hạn. Nếu tổng diện tích S của tất cả các hình vuông $ABCD, A_1B_1C_1\,\mathrm{D}_1, A_2B_2C_2\,\mathrm{D}_2 \ldots$ bằng 8 thì a bằng:



A. 2 **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $2\sqrt{2}$

Câu 177: Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC. Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$,... sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3. Với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tổng $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_{2021}$ là:

A. $S = 5\pi$. **B.** $S = \frac{9\pi}{2}$. **C.** $S = 4\pi$. **D.** $S = \frac{15\pi}{4}$.

CHƯƠNG III

GIỚI HẠN
HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI 1: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 2. DÃY SỐ CHỨA CĂN THỨC

Câu 104: Cho dãy số $u_n = n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$. Khi đó $\lim u_n$ bằng

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có

$$\lim u_n = \lim n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) = \lim \frac{n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

Câu 105: $\lim\left(\sqrt{n^2-3n+1}-n\right)$ bằng

A. -3. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có $\sqrt{n^2-3n+1}-n = \frac{-3n+1}{\sqrt{n^2-3n+1}+n} = \frac{-3+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}$

Nên $\lim\left(\sqrt{n^2-3n+1}-n\right) = -\frac{3}{2}$

Câu 106: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n^2+an-3}-\sqrt{n^2+n}$, trong đó a là tham số thự C. Tìm a để $\lim u_n = 3$.

A. 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Ta có $\lim u_n = 3 \Leftrightarrow \lim\left(\sqrt{n^2+an-3}-\sqrt{n^2+n}\right)=3 \Leftrightarrow \lim\dfrac{(a-1)n-3}{\sqrt{n^2+an-3}+\sqrt{n^2+n}}=3$

$\Leftrightarrow \lim\dfrac{(a-1)-\dfrac{3}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{a}{n}-\dfrac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}=3 \Leftrightarrow \dfrac{a-1}{2}=3 \Leftrightarrow a=7$.

Vậy giá trị của a cần tìm là $a=7$.

Câu 107: Giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+18n}-n\right)$ bằng

A. 9. **B.** $+\infty$. **C.** 18. **D.** 0.

Lời giải

$\lim\left(\sqrt{n^2+18n}-n\right)=\lim\dfrac{18n}{\sqrt{n^2+18n}+n}=\lim\dfrac{18}{\sqrt{1+\dfrac{18}{n}}+1}=9$.

Câu 108: Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào có giá trị bằng 1?

A. $\lim\dfrac{3^{n+1}+2n}{5+3^n}$. **B.** $\lim\dfrac{3n^2+n}{4n^2-5}$.

C. $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}\right)$. **D.** $\lim\dfrac{2n^3+3}{1+2n^2}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}\right)=\lim\dfrac{\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1}}$

$=\lim\dfrac{2n-1}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+1}}=\lim\dfrac{2-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{\dfrac{n^2+2n}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{n^2+1}{n^2}}}==\lim\dfrac{2-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}=1$.

Câu 109: Giới hạn $\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+3}\right)$ bằng

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\dfrac{7}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

$\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+3}\right)=\lim\sqrt{n}\dfrac{1}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+3}}=\lim\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 110: Tính giới hạn $\lim\left(n-\sqrt{n^2-4n}\right)$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $\lim\left(n-\sqrt{n^2-4n}\right)=\lim\dfrac{\left(n-\sqrt{n^2-4n}\right)\left(n+\sqrt{n^2-4n}\right)}{n+\sqrt{n^2-4n}}$

$=\lim\dfrac{4n}{n+\sqrt{n^2-4n}}=\lim\dfrac{4}{1+\sqrt{1-\dfrac{4}{n}}}=2.$

Câu 111: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để $\lim\left(\sqrt{n^2-4n+7}+a-n\right)=0$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt{n^2-4n+7}+a-n\right)=\lim\frac{-4n+7+2an-a^2}{\sqrt{n^2-4n+7}-(a-n)}=\lim\frac{2a-4+\dfrac{7-a^2}{n}}{\sqrt{1-\dfrac{4}{n}+\dfrac{7}{n^2}}-\dfrac{a}{n}+1}=a-2$$

Để $\lim\left(\sqrt{n^2-4n+7}+a-n\right)=0$ thì $a-2=0\Leftrightarrow a=2$.

Câu 112: *Tính* $I=\lim\left[n\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-1}\right)\right]$.

A. $I=+\infty$. **B.** $I=\dfrac{3}{2}$. **C.** $I=1,499$. **D.** $I=0$.

Lời giải

Ta có: $I=\lim\left[n\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-1}\right)\right]=\lim\dfrac{3n}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2-1}}=\lim\dfrac{3}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n^2}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}}=\dfrac{3}{2}$

Câu 113: Tính $\lim n\left(\sqrt{4n^2+3}-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Ta có: $\lim n\left(\sqrt{4n^2+3}-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)=\lim n\left[\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right)+\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)\right]$

$=\lim\left[n\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right)+n\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)\right].$

Ta có: $\lim n\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right)=\lim\dfrac{3n}{\left(\sqrt{4n^2+3}+2n\right)}=\lim\dfrac{3}{\left(\sqrt{4+\dfrac{3}{n^2}}+2\right)}=\dfrac{3}{4}.$

Ta có: $\lim n\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)=\lim\dfrac{-n^2}{\left(4n^2+2n\sqrt[3]{8n^3+n}+\sqrt[3]{\left(8n^3+n\right)^2}\right)}$

$$= \lim \frac{-1}{\left(4+2\sqrt[3]{8+\frac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{\left(8+\frac{1}{n^2}\right)^2}\right)} = -\frac{1}{12}.$$

Vậy $\lim n\left(\sqrt{4n^2+3}-\sqrt[3]{8n^3+n}\right) = \frac{3}{4}-\frac{1}{12} = \frac{2}{3}.$

Câu 114: Tính giới hạn $L = \lim\left(\sqrt{9n^2+2n-1}-\sqrt{4n^2+1}\right).$

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Lời giải

$$L = \lim\left(\sqrt{9n^2+2n-1}-\sqrt{4n^2+1}\right) = \lim \frac{\left(9n^2+2n-1\right)-\left(4n^2+1\right)}{\sqrt{9n^2+2n-1}+\sqrt{4n^2+1}}$$

$$= \lim \frac{5n^2+2n-2}{\sqrt{9n^2+2n-1}+\sqrt{4n^2+1}} = \lim \frac{n^2\left(5+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{n\left(\sqrt{9+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}\right)}$$

$$= \lim n\cdot\left(\frac{5+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}{\sqrt{9+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}\right) = +\infty.$$

Câu 115: Tính giới hạn $L = \lim\left(\sqrt{4n^2+n+1}-9n\right).$

A. $+\infty$. **B.** -7. **C.** $-\infty$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Lời giải

$$L = \lim\left(\sqrt{4n^2+n+1}-9n\right) = \lim \frac{4n^2+n+1-81n^2}{\sqrt{4n^2+n+1}+9n} = \lim \frac{-77n^2+n+1}{\sqrt{4n^2+n+1}+9n}$$

$$= \lim \frac{n^2\left(-77+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+9\right)} = \lim n\cdot\left(\frac{-77+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{4+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+9}\right) = -\infty$$

Vì: $\lim n = +\infty$ và $\lim\left(\frac{-77+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{4+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+9}\right) = -7 < 0.$

Câu 116: Tính giới hạn $L = \lim\left(\sqrt{4n^2+n}-\sqrt{4n^2+2}\right).$

A. $+\infty$. **B.** -7. **C.** $-\infty$. **D.** $\frac{1}{4}$.

$$L=\lim\frac{\left(4n^2+n\right)-\left(4n^2+2\right)}{\sqrt{4n^2+n}+\sqrt{4n^2+2}}=\lim\frac{n-2}{\sqrt{4n^2+n}+\sqrt{4n^2+2}}=\lim\frac{n\left(1-\frac{2}{n}\right)}{n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}+\sqrt{4+\frac{2}{n^2}}\right)}$$

$$=\lim\frac{1-\frac{2}{n}}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+\sqrt{4+\frac{2}{n^2}}}=\frac{1-0}{\sqrt{4+0}+\sqrt{4+0}}=\frac{1}{4}.$$

Câu 117: Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n+25\right)$.

A. $+\infty$. **B.** -7. **C.** $\frac{53}{2}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Lời giải

$$L=\lim 25+\lim\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)=25+\lim\frac{\left(n^2+3n+5\right)-n^2}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}=25+\lim\frac{3n+5}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}$$

$$=25+\lim\frac{n\left(3+\frac{5}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}+1\right)}=25+\lim\frac{3+\frac{5}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}+1}=25+\frac{3+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{53}{2}.$$

Câu 118: Tính giới hạn $L=\lim\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{4n-5}}$.

A. $+\infty$. **B.** -7. **C.** $\frac{53}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Lời giải

$$L=\lim\frac{\left(2n+1\right)-\left(n+3\right)}{\sqrt{4n-5}\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{n+3}\right)}=\lim\frac{n-2}{\sqrt{4n-5}\left(\sqrt{2n+1}+\sqrt{n+3}\right)}$$

$$=\lim\frac{n\left(1-\frac{2}{n}\right)}{n\sqrt{4-\frac{5}{n}}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}\right)}=\lim\frac{1-\frac{2}{n}}{\sqrt{4-\frac{5}{n}}\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}\right)}$$

$$=\frac{1-0}{\sqrt{4-0}\left(\sqrt{2+0}+\sqrt{1+0}\right)}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Câu 119: Tính giới hạn: $\lim\frac{3n-\sqrt{4n^2+n+1}}{n+\sqrt{n^2-2n-2}}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\frac{3n-\sqrt{4n^2+n+1}}{n+\sqrt{n^2-2n-2}}=\lim\frac{3n-n\sqrt{4+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{n+n\sqrt{1-\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}}=\lim\frac{3-\sqrt{4+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{1+\sqrt{1-\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}}=\frac{3-2}{1+1}=\frac{1}{2}.$

Câu 120: Tính giới hạn $\lim\dfrac{\sqrt{3n^2+1}+n}{1-2n^2}$.

A. -2. **B.** $-\dfrac{3}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Lời giải

Ta có $\lim\dfrac{\sqrt{3n^2+1}+n}{1-2n^2}=\lim\dfrac{n\sqrt{3+\dfrac{1}{n^2}}+n}{1-2n^2}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n}\sqrt{3+\dfrac{1}{n^2}}+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2}-2}=0$.

Câu 121: Tính giới hạn sau $L=\lim\left(\sqrt[3]{n+4}-\sqrt[3]{n+1}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** -7. **C.** $\dfrac{53}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

$$L=\lim\left(\sqrt[3]{n+4}-\sqrt[3]{n+1}\right)=\lim\frac{3}{\sqrt[3]{(n+4)^2}+\sqrt[3]{(n+4).(n+1)}+\sqrt[3]{(n+1)^2}}$$

$$=\lim\frac{3}{\sqrt[3]{n^2.\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{n^2.\left(1+\dfrac{4}{n}\right).\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}-\sqrt[3]{n^2.\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2}}$$

$$=\lim\frac{3}{\sqrt[3]{n^2}\left[\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{4}{n}\right).\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}+\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2}\right]}=0.$$

Câu 122: Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+3n^2-2}+\sqrt[3]{5n^2-8n^3}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** -7. **C.** $\dfrac{53}{2}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

$$L=\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+3n^2-2}+\sqrt[3]{5n^2-8n^3}\right)$$

$$=\lim\frac{8n^2-2}{\sqrt[3]{\left(8n^3+3n^2-2\right)^2}-\sqrt[3]{\left(8n^3+3n^2-2\right).\left(5n^2-8n^3\right)}+\sqrt[3]{\left(5n^2-8n^3\right)^2}}$$

$$=\lim\frac{8-\dfrac{2}{8n^2}}{\sqrt[3]{\left(8+\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^3}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(8+\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^3}\right).\left(\dfrac{5}{n}-8\right)}+\sqrt[3]{\left(\dfrac{5}{n}-8\right)^2}}=\frac{2}{3}.$$

Câu 123: Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+3n^2+4}-2n+6\right)$.

A. $+\infty$. **B.** $\dfrac{25}{4}$. **C.** $\dfrac{53}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

$$L=\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+3n^2+4}-2n+6\right)=6+\lim\left(\sqrt[3]{8n^3+3n^2+4}-2n\right)$$

$$=6+\lim\frac{3n^2+4}{\sqrt[3]{\left(8n^3+3n^2+4\right)^2}+2n.\sqrt[3]{8n^3+3n^2+4}+4n^2}$$

$$=6+\lim\frac{3+\frac{4}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(8+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^3}\right)^2}+2.\sqrt[3]{8+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^3}}+4}=6+\frac{1}{4}=\frac{25}{4}.$$

Câu 124: Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt[3]{2n-n^3}+n-1\right)$.

A. $+\infty$. **B.** -1. **C.** $\frac{53}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

$$L=\lim\left(\sqrt[3]{2n-n^3}+n-1\right)=-1+\lim\left(\sqrt[3]{2n-n^3}+n\right)$$

$$=-1+\lim\frac{2n}{\sqrt[3]{\left(2n-n^3\right)^2}-n\sqrt[3]{2n-2n^3}+n^2}=-1+\lim\frac{\frac{2}{n}}{\sqrt[3]{\left(\frac{2}{n^2}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{2}{n^2}-1}+1}=-1+0=-1.$$

Câu 125: Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt[3]{n-n^3}+n+2\right)$.

A. $+\infty$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

$$L=\lim\left(\sqrt[3]{n-n^3}+n+2\right)=2+\lim\left(\sqrt[3]{n-n^3}+n\right)=2+\lim\frac{n}{\sqrt[3]{\left(n-n^3\right)^2}-n.\sqrt[3]{n-n^3}+n^2}$$

$$=2+\lim\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n^2}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{1}{n^2}-1}+1}=2+0=2.$$

Câu 126: Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n-1\right)$.

A. $+\infty$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{53}{2}$. **D.** $-\frac{5}{3}$.

Lời giải

$$L=\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n-1\right)=-1+\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)$$

$$=-1+\lim\frac{-2n^2}{\sqrt[3]{\left(n^3-2n^2\right)^2}+n.\sqrt[3]{2n^3-2n^2}+n^2}=-1+\lim\frac{-2}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}}+1}=-1-\frac{2}{3}=-\frac{5}{3}.$$

Câu 127: Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt{n^4+n^2}-\sqrt[3]{n^6+1}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{5}{3}$.

Lời giải

$$L=\lim\left(\sqrt{n^4+n^2}-\sqrt[3]{n^6+1}\right)=\lim\left[\left(\sqrt{n^4+n^2}-n^2\right)-\left(\sqrt[3]{n^6+1}-n^2\right)\right]$$

$$=\lim\left(\sqrt{n^4+n^2}-n^2\right)-\lim\left(\sqrt[3]{n^6+1}-n^2\right)=\lim\frac{\left(n^4+n^2-n^4\right)}{\sqrt{n^4+n^2}+n^2}-\lim\frac{\left(n^6+1\right)-n^6}{\sqrt[3]{\left(n^6+1\right)^2}+n^2\sqrt[3]{n^6+1}+n^4}$$

$$=\lim\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n^2}+n^2}-\lim\frac{1}{\sqrt[3]{\left(n^6+1\right)^2}+n^2\sqrt[3]{n^6+1}+n^4}=\lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}+0=\frac{1}{2}$$

Câu 128: Tính giới hạn $L=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)$.

A. $+\infty$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{53}{2}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

$$L=\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)=\lim\left[\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)+\left(n-\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)\right]$$

$$=\lim\left[\frac{n^2+n+1-n^2}{\sqrt{n^2+n+1}+n}+\frac{n^3-\left(n^3+n^2\right)}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+n^2}+\left(\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)^2}\right]$$

$$=\lim\left[\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}-\frac{n^2}{n^2+n\sqrt[3]{n^3+n^2}+\left(\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)^2}\right]$$

$$=\lim\left[\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1\right)}-\frac{n^2}{n^2\left(1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\right)^2\right)}\right]$$

$$=\lim\left[\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}-\frac{1}{1+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\right)^2}\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

DẠNG 3. DÃY SỐ CHỨA LŨY THỪA

Câu 129: $\lim\left(2^n-1\right)$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Ta có: $\lim\left(2^n-1\right)=\lim 2^n\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$

Vì $\begin{cases}\lim 2^n=+\infty\\ \lim\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)=1>0\end{cases}$ nên $\lim\left(2^n-1\right)=+\infty$.

Câu 130: Giá trị đúng của $\lim\left(5^n\right)$ là:

A. $+\infty$. **B.** -2. **C.** 2. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Ta có $\lim\left(5^n\right)=\lim\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{5}\right)^n}=+\infty$ vì $\lim\left(\dfrac{1}{5}\right)^n=0$ và $\left(\dfrac{1}{5}\right)^n>0\ \ \forall n\in\mathbb{N}^*$

Câu 131: Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $\left(\dfrac{4}{\mathrm{e}}\right)^n$. **B.** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$. **C.** $\left(\dfrac{5}{3}\right)^n$. **D.** $\left(\dfrac{-5}{3}\right)^n$.

Lời giải

Ta có $\lim q^n=0$ nếu $|q|<1$.

Mặt khác $\left|\dfrac{4}{\mathrm{e}}\right|>1;\ \left|\dfrac{5}{3}\right|=\left|\dfrac{-5}{3}\right|>1;\ \left|\dfrac{1}{3}\right|<1$. Vậy $\lim\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$.

Câu 132: $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n$ bằng.

A. 2. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Lời giải

Câu 133: Trong các giới hạn sau giới hạn nào bằng 0

A. $\lim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. **B.** $\lim\left(\dfrac{5}{3}\right)^n$. **C.** $\lim\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$. **D.** $\lim(2)^n$.

Lời giải

$\lim q^n=0\ \ (|q|<1)$.

Câu 134: $\lim\left(\dfrac{2018}{2019}\right)^n$ bằng.

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Áp dụng $\lim q^n=0$, $|q|<1$

Câu 135: Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $(0,999)^n$. **B.** $(-1)^n$. **C.** $(-1,0001)^n$. **D.** $(1,2345)^n$.

Lời giải

Do $0,999<1$ nên $\lim\left(0,999\right)^n=0$.

Câu 136: $\lim\dfrac{100^{n+1}+3.99^n}{10^{2n}-2.98^{n+1}}$ là

A. $+\infty$. **B.** 100. **C.** $\dfrac{1}{100}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

$$\lim\frac{100^{n+1}+3.99^n}{10^{2n}-2.98^{n+1}}=\lim\frac{100+3.\left(\dfrac{99}{100}\right)^n}{1-2.\left(\dfrac{98}{100}\right)^n}=100$$

Câu 137: $\lim\left(3^n-4^n\right)$ là

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $\lim\left(3^n-4^n\right)=\lim 4^n\left(\left(\dfrac{3}{4}\right)^n-1\right)=-\infty$.

Câu 138: Tính giới hạn $\lim\dfrac{3.2^{n+1}-2.3^{n+1}}{4+3^n}$.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{6}{5}$. **D.** -6.

Lời giải

Ta có $\lim\dfrac{3.2^{n+1}-2.3^{n+1}}{4+3^n}=\lim\dfrac{6.\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-6}{4.\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+1}=-6$.

Câu 139: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim\dfrac{1+2.2017^n}{2016^n+2018^n}$. **B.** $\lim\dfrac{1+2.2018^n}{2016^n+2017^{n+1}}$.

C. $\lim\dfrac{1+2.2018^n}{2017^n+2018^n}$. **D.** $\lim\dfrac{2.2018^{n+1}-2018}{2016^n+2018^n}$.

Lời giải

Ta có $\lim\dfrac{1+2.2017^n}{2016^n+2018^n}=\lim\dfrac{\left(\dfrac{1}{2018}\right)^n+2.\left(\dfrac{2017}{2018}\right)^n}{\left(\dfrac{2016}{2018}\right)^n+1}=0$.

Câu 140: Tính $\lim\dfrac{2^n+1}{2.2^n+3}$.

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\dfrac{2^n+1}{2.2^n+3}=\lim\dfrac{1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{2+3.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}=\dfrac{1+0}{2+0}=\dfrac{1}{2}$

Câu 141: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(0;2019)$ để $\lim\sqrt{\dfrac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}}\le\dfrac{1}{2187}$?

A. 2018. **B.** 2012. **C.** 2019. **D.** 2011.

Lời giải

Ta có $\lim\sqrt{\dfrac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}}=\lim\sqrt{\dfrac{1+3\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{\left(\dfrac{5}{9}\right)^n+9^a}}=\dfrac{1}{3^a}\le\dfrac{1}{2187}\Leftrightarrow\dfrac{1}{3^a}\le\dfrac{1}{3^7}\Leftrightarrow a\ge 7.$

Do a nguyên thuộc khoảng $(0;2019)$ nên $a\in\{7;8;...;2018\}$.

Câu 142: Tính giới hạn $T=\lim\left(\sqrt{16^{n+1}+4^n}-\sqrt{16^{n+1}+3^n}\right)$.

A. $T=0$. **B.** $T=\dfrac{1}{4}$. **C.** $T=\dfrac{1}{8}$. **D.** $T=\dfrac{1}{16}$.

Lời giải

Ta có $T=\lim\left(\sqrt{16^{n+1}+4^n}-\sqrt{16^{n+1}+3}\right)=\lim\dfrac{4^n-3^n}{\sqrt{16^{n+1}+4^n}+\sqrt{16^{n+1}+3^n}}$

$=\lim\dfrac{4^n-3^n}{\sqrt{16.16^n+4^n}+\sqrt{16.16^n+3^n}}=\lim\dfrac{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}{\sqrt{16+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}+\sqrt{16+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}}=\dfrac{1}{4+4}=\dfrac{1}{8}.$

DẠNG 4. TỔNG CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠNG

Câu 143: Tính tổng $S=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+....+\dfrac{1}{2^n}+.....$

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $S=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+....+\dfrac{1}{2^n}+.....=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=2.$

Câu 144: Tổng $S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^n}+...$ có giá trị là:

A. $-\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có: S là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1=1;\ q=\frac{1}{3}$.

Suy ra: $S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$

Câu 145: Tính tổng S của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=1$ và công bội $q=-\frac{1}{2}$.

A. $S=2$. **B.** $S=\frac{3}{2}$. **C.** $S=1$. **D.** $S=\frac{2}{3}$.

Lời giải

Ta có: $S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$

Câu 146: Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $\frac{1}{2};-\frac{1}{4};...;\frac{(-1)^{n+1}}{2^n};...$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 1. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Lời giải

Cấp số nhân có công bội $q=-\frac{1}{2}$ và $u_1=\frac{1}{2}$.

Vậy $S=\frac{u_1}{1-q}=.\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$.

Câu 147: Tính tổng $S=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{18}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2.3^{n-1}}+\cdots$.

A. $S=\frac{3}{4}$. **B.** $S=\frac{8}{3}$. **C.** $S=\frac{2}{3}$. **D.** $S=\frac{3}{8}$.

Lời giải

Đây là tổng một cấp số nhân lùi vô hạn có : $\begin{cases}u_1=\frac{1}{2}\\ q=\frac{u_2}{u_1}=-\frac{1}{3}\end{cases}$

Áp dụng công thức : $S=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots=\dfrac{u_1}{1-q}\quad (|q|<1)$

Tổng cần tính là : $S=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{18}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{2.3^{n-1}}+\cdots.\ =\dfrac{\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{3}}=\dfrac{3}{8}.$

Câu 148: Cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) có $u_1=-2$; $q=\dfrac{1}{2}$. Khi đó tổng S của cấp số nhân đã cho bằng :

A. 4. **B.** $-\dfrac{4}{3}$. **C.** -4. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) có $u_1=-2$; $q=\dfrac{1}{2}$ có tổng $S=\dfrac{u_1}{1-q}=\dfrac{-2}{1-\dfrac{1}{2}}=-4$.

Câu 149: Tính tổng $S=16-8+4-2+\ldots$

A. 32. **B.** $\dfrac{32}{3}$. **C.** 24. **D.** $-\dfrac{32}{3}$.

Lời giải

Dãy số $16,-8,4,-2,\ldots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=16$ và công bội $q=-\dfrac{1}{2}$.

Do đó $S=\dfrac{u_1}{1-q}=\dfrac{16}{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{32}{3}$.

Câu 150: Cho tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn $S=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{81}-\ldots.$ Giá trị của S là

A. $S=-\dfrac{3}{4}$. **B.** $S=-\dfrac{4}{3}$. **C.** $S=\dfrac{3}{4}$. **D.** $S=\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Ta có dãy số $1,-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},-\dfrac{1}{27},\dfrac{1}{81},\ldots$ là 1 cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1=1, q=-\dfrac{1}{3}$ nên

$S=\dfrac{u_1}{1-q}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}=\dfrac{3}{4}$.

Câu 151: Tổng vô hạn sau đây $S=2+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\ldots+\dfrac{2}{3^n}+\ldots$ có giá trị bằng mấy?

A. 2. **B.** 4. **C.** $\dfrac{8}{3}$. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $S=2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{2}{3^n}+...=2.\lim\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}=2.\frac{1}{\frac{2}{3}}=2.\frac{3}{2}=3$.

Câu 152: Tính tổng S của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=1$ và công bội $q=-\frac{1}{2}$.

A. $S=2$. **B.** $S=\frac{3}{2}$. **C.** $S=1$. **D.** $S=\frac{2}{3}$.

Lời giải

$S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$.

Câu 153: Tổng vô hạn sau đây $S=2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{2}{3^n}+...$ có giá trị bằng

A. $\frac{8}{3}$. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $2;\frac{2}{3};\frac{2}{3^2};...;\frac{2}{3^n};...$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q=\frac{1}{3}<1$.

$S=2+\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+...+\frac{2}{3^n}+...=2.\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=3$.

Câu 154: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $3,15555...=3,1(5)$ viết dưới dạng hữu tỉ là

A. $\frac{63}{20}$. **B.** $\frac{142}{45}$. **C.** $\frac{1}{18}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Lời giải

$3,15555...=3,1(5)=3,1+5\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+...\right)=3,1+5.\frac{\frac{1}{10^2}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{142}{45}$

Câu 155: Tổng $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2^n}+...$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2^n}+...$ là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1=1$, $q=\frac{1}{2}$.

Áp dụng công thức được $S=\frac{u_1}{1-q}$ kết quả $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2^n}+...=2$.

Câu 156: Cho dãy số $(u_n), n \in \mathbb{N}^*$, thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = -\dfrac{u_n}{5} \end{cases}$. Gọi $S = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ là tổng n số hạng đầu tiên của dãy số đã cho. Khi đó $\lim S_n$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** 0. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{-\dfrac{u_n}{5}}{u_n} = -\dfrac{1}{5}$ do đó dãy $(u_n), n \in \mathbb{N}^*$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = 3$, $d = -\dfrac{1}{5}$.

Suy ra $\lim S_n = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{3}{1+\dfrac{1}{5}} = \dfrac{5}{2}$.

Câu 157: Cho dãy số (u_n) thoả mãn $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 4, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tìm $\lim u_n$.

A. $\lim u_n = 1$. **B.** $\lim u_n = 4$. **C.** $\lim u_n = 12$. **D.** $\lim u_n = 3$.

Lời giải

Đặt $v_n = u_n - 12, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó $v_{n+1} = u_{n+1} - 12 = \dfrac{2}{3}u_n + 4 - 12 = \dfrac{2}{3}(u_n - 12) = \dfrac{2}{3}v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra dãy số (v_n) là cấp số nhân với công bội $q = \dfrac{2}{3}$ và số hạng đầu $v_1 = -11$.

Suy ra $v_n = -11\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Từ đó $u_n = -11\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} + 12, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy $\lim u_n = 12$.

DẠNG 5. MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

Câu 158: Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$. Tìm $\lim \dfrac{n}{u_n}$.

A. $L = \dfrac{1}{3}$. **B.** $L = \dfrac{1}{2}$. **C.** $L = 3$. **D.** $L = 2$

Lời giải

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d = 2 + (n-1)3 = 3n - 1$.

$\lim \dfrac{n}{u_n} = \lim \dfrac{n}{3n-1} = \lim \dfrac{1}{3 - \dfrac{1}{n}} = \dfrac{1}{3}$.

Câu 159: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_n = \sqrt{n+2018} - \sqrt{n+2017}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Dãy số (u_n) là dãy tăng. **B.** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

C. $0 < u_n < \dfrac{1}{2\sqrt{2018}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **D.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Lời giải

Ta có: $u_n = \sqrt{n+2018} - \sqrt{n+2017} = \dfrac{1}{\sqrt{n+2018}+\sqrt{n+2017}}$.

Suy ra: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{n+2018}+\sqrt{n+2017}}{\sqrt{n+2019}+\sqrt{n+2018}} < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó, dãy số (u_n) giảm.

Chú ý:

+ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+2018}+\sqrt{n+2017}} = 0$.

+ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n+2018}+\sqrt{n+2017}}{\sqrt{n+2019}+\sqrt{n+2018}} = 1$.

+ $0 < u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+2018}+\sqrt{n+2017}} < \dfrac{1}{2\sqrt{n+2017}} \le \dfrac{1}{2\sqrt{2018}}$.

Câu 160: Đặt $f(n) = \left(n^2+n+1\right)^2 + 1$, xét dãy số (u_n) sao cho $u_n = \dfrac{f(1).f(3).f(5)...f(2n-1)}{f(2).f(4).\mathrm{f}(6)...f(2n)}$. Tìm $\lim n\sqrt{u_n}$.

A. $\lim n\sqrt{u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\lim n\sqrt{u_n} = \sqrt{3}$. **C.** $\lim n\sqrt{u_n} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\lim n\sqrt{u_n} = \sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có $f(n) = \left(n^2+n+1\right)^2 + 1 = \left(n^2+1\right)\left[(n+1)^2+1\right]$.

Do đó $u_n = \dfrac{\left(1^2+1\right)\left(2^2+1\right)\left(3^2+1\right)\left(4^2+1\right)...\left[(2n-1)^2+1\right]\left[4n^2+1\right]}{\left(2^2+1\right)\left(3^2+1\right)\left(4^2+1\right)\left(5^2+1\right)...\left[4n^2+1\right]\left[(2n+1)^2+1\right]}$

$\Rightarrow u_n = \dfrac{2}{(2n+1)^2+1} \Rightarrow n\sqrt{u(n)} = \sqrt{\dfrac{2n^2}{(2n+1)^2+1}}$.

$\lim n\sqrt{u(n)} = \lim \sqrt{\dfrac{2n^2}{(2n+1)^2+1}} = \lim \sqrt{\dfrac{2}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^2+\dfrac{1}{n^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 161: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 0$ và $u_{n+1} = u_n + 4n + 3$, $\forall n \ge 1$. Biết

$$\lim\frac{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{4n}}+\sqrt{u_{4^2n}}+...+\sqrt{u_{4^{2018}n}}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{2n}}+\sqrt{u_{2^2n}}+...+\sqrt{u_{2^{2018}n}}}=\frac{a^{2019}+b}{c}$$

với a, b, c là các số nguyên dương và $b<2019$. Tính giá trị $S=a+b-c$.

A. $S=-1$. **B.** $S=0$. **C.** $S=2017$. **D.** $S=2018$.

Lời giải

Ta có

$u_2=u_1+4.1+3$

$u_3=u_2+4.2+3$

...

$u_n=u_{n-1}+4.(n-1)+3$

Cộng vế theo vế và rút gọn ta được

$u_n=u_1+4.(1+2+...+n-1)+3(n-1)=4\frac{n(n-1)}{2}+3(n-1)=2n^2+n-3$, với mọi $n\geq 1$.

Suy ra

$u_{2n}=2(2n)^2+2n-3$

$u_{2^2n}=2(2^2n)^2+2^2n-3$

...

$u_{2^{2018}n}=2(2^{2018}n)^2+2^{2018}n-3$

Và

$u_{4n}=2(4n)^2+4n-3$

$u_{4^2n}=2(4^2n)^2+4^2n-3$

...

$u_{4^{2018}n}=2(4^{2018}n)^2+4^{2018}n-3$

Do đó $\lim\frac{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{4n}}+\sqrt{u_{4^2n}}+...+\sqrt{u_{4^{2018}n}}}{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_{2n}}+\sqrt{u_{2^2n}}+...+\sqrt{u_{2^{2018}n}}}$

$$=\lim\frac{\sqrt{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}+\sqrt{2.4^2+\frac{4}{n}-\frac{3}{n^2}}+...+\sqrt{2\left(4^{2018}\right)^2+\frac{4^{2018}}{n}-\frac{3}{n^2}}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}+\sqrt{2.2^2+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}+...+\sqrt{2\left(2^{2018}\right)^2+\frac{2^{2018}}{n}-\frac{3}{n^2}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(1+4+4^2+...+4^{2018}\right)}{\sqrt{2}\left(1+2+2^2+...+2^{2018}\right)}=\frac{1\frac{1-4^{2019}}{1-4}}{\frac{1-2^{2019}}{1-2}}=\frac{1}{3}\frac{4^{2019}-1}{2^{2019}-1}=\frac{2^{2019}+1}{3}.$$

Vì $2^{2019} > 2019$ cho nên sự xác định ở trên là duy nhất nên $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases}$

Vậy $S = a + b - c = 0$.

Câu 162: Dãy số (u_n) nào sau đây có giới hạn khác số 1 khi n dần đến vô cùng?

A. $u_n = \dfrac{(2017-n)^{2018}}{n(2018-n)^{2017}}$. **B.** $u_n = n\left(\sqrt{n^2+2018} - \sqrt{n^2+2016}\right)$.

C. $\begin{cases} u_1 = 2017 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + 1), \quad n = 1,2,3... \end{cases}$. **D.** $u_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Lời giải

Ta tính giới hạn của các dãy số trong từng đáp án:

+) Đáp án A: $\lim u_n = \lim \dfrac{(2017-n)^{2018}}{n(2018-n)^{2017}} = \lim\left[\dfrac{2017-n}{n}.\left(\dfrac{2017-n}{2018-n}\right)^{2017}\right]$

$= \lim\left[\left(\dfrac{2017}{n}-1\right)\left(\dfrac{\dfrac{2017}{n}-1}{\dfrac{2018}{n}-1}\right)^{2017}\right] = -1.$

+) Đáp án B: $\lim u_n = \lim n\left(\sqrt{n^2+2018} - \sqrt{n^2+2016}\right) = \lim \dfrac{n\left(n^2+2018-n^2-2016\right)}{\sqrt{n^2+2018}+\sqrt{n^2+2016}}$

$= \lim \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2018}+\sqrt{n^2+2016}} = \lim \dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2018}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{2016}{n^2}}} = 1.$

+) Đáp án C:

Cách 1: Ta có $u_{n+1} - 1 = \dfrac{1}{2}(u_n - 1) \Rightarrow u_n - 1 = \dfrac{1}{2}(u_{n-1} - 1) = ... = \dfrac{1}{2^{n-1}}(u_1 - 1)$

$\Rightarrow u_n = \dfrac{2016}{2^{n-1}} + 1 \Leftrightarrow u_n = 4032.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 1 \Rightarrow \lim u_n = 1.$

Cách 2:

Bước 1: Ta chứng minh (u_n) giảm và bị chặn dưới bởi 1.

Thật vậy bằng quy nạp ta có $u_1 = 2017 > 1$.

Giả sử $u_n > 1 \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + 1) > \dfrac{1}{2}(1+1) = 1$

Vậy $u_n > 1 \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Hơn nữa $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}(1-u_n)<0$ nên (u_n) là dãy giảm

Suy ra (u_n) có giới hạn $\lim u_n=a$

Bước 2: Ta có $a=\lim u_n=\lim u_{n+1}=\lim\frac{1}{2}(u_n+1)=\frac{1}{2}\lim u_n+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}$

$\Rightarrow a=1$.

+) Đáp án D:

Ta có $u_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

$\Rightarrow \lim u_n=\lim\frac{n}{n+1}=1$.

Câu 163: Cho dãy số (u_n) được xác định như sau $u_1=2016; u_{n-1}=n^2(u_{n-1}-u_n)$, với mọi $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$, tìm giới hạn của dãy số (u_n).

A. 1011. **B.** 1010. **C.** 1008. **D.** 1009.

Lời giải

Ta có $u_{n-1}=n^2(u_{n-1}-u_n)\Leftrightarrow u_{n-1}(n^2-1)=n^2u_n\Leftrightarrow u_n=\frac{n-1}{n}.\frac{n+1}{n}.u_{n-1}$. Khi đó ta có:

$u_2=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.u_1$

$u_3=\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.u_2$

…

$u_n=\frac{n-1}{n}.\frac{n+1}{n}.u_{n-1}$

Nhân theo vế các đẳng thức trên ta có $u_n=\frac{n+1}{2n}.u_1=\frac{n+1}{n}.1008$. Vậy $\lim u_n=1008$.

Câu 164: Cho dãy số (u_n) như sau: $u_n=\frac{n}{1+n^2+n^4}, \forall n=1, 2, ...$ Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}(u_1+u_2+...+u_n)$.

A. $\frac{1}{4}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có $u_n=\frac{n}{(1+n^2)^2-n^2}=\frac{n}{(n^2+n+1)(n^2-n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right)$

Ta có $u_1+u_2+...+u_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{13}+\frac{1}{13}-\frac{1}{21}+...+\frac{1}{n^2-n+1}-\frac{1}{n^2+n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2+n+1}\right)=\frac{1}{2}\frac{n^2+n}{n^2+n+1}$

Suy ra $\lim\left(u_1+u_2+...+u_n\right)=\frac{1}{2}\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$.

Câu 165: Cho dãy số $\left(u_n\right)$ thỏa mãn $\begin{cases}u_1=2\\3\sqrt{4u_{n+1}+1}=\sqrt{4u_n+1}+4,\left(n\in\mathbb{N}^*\right)\end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

- Chứng minh $\left(u_n\right)$ là dãy giảm, tức là chứng minh: $u_{n+1}\le u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

- Với $n=1$, ta có: $3\sqrt{4u_2+1}=\sqrt{4u_1+1}+4\Leftrightarrow u_2=\frac{10}{9}\le u_1$.

- Giả sử mệnh đề đúng với $n=k$, tức là: $u_{k+1}\le u_k,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

- Ta cần chứng minh mệnh đề đúng với $n=k+1$, tức là chứng minh: $u_{k+2}\le u_{k+1}$. Ta có:

$3\sqrt{4u_{k+2}+1}=\sqrt{4u_{k+1}+1}+4\le\sqrt{4u_k+1}+4=33\sqrt{4u_{k+1}+1}\Leftrightarrow u_{k+2}\le u_{k+1}$.

- Vậy theo nguyên lý quy nạp suy ra $u_{n+1}\le u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$, tức $\left(u_n\right)$ là dãy giảm.

- Tương tự, dùng quy nạp ta dễ dàng chứng minh được $\frac{3}{4}<u_n\le 2$, tức dãy $\left(u_n\right)$ bị chặn. Từ đó suy ra dãy số có giới hạn.

- Đặt $x=\lim u_n$. Khi $n\to+\infty$ thì $u_{n+1}\to x$ và

$3\sqrt{4x+1}=\sqrt{4x+1}+4\Leftrightarrow 36x+9=4x+1+16+8\sqrt{4x+1}\Leftrightarrow\sqrt{4x+1}=4x-1\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}$.

Vậy $\lim u_n=\frac{3}{4}$.

Câu 166: Cho dãy số $\left(u_n\right)$ biết $\begin{cases}u_1=-2\\u_n=3u_{n-1}-1,\forall n\ge 2\end{cases}$, khi đó $L=\lim\frac{u_n}{3^n}$

A. Không xác định. **B.** $L=+\infty$. **C.** $L=-\frac{5}{6}$. **D.** $L=0$.

Lời giải

Đặt $u_n=v_n+\frac{1}{2}$, thay vào biểu thức truy hồi ta có $v_n+\frac{1}{2}=3\left(v_{n-1}+\frac{1}{2}\right)-1\Leftrightarrow v_n=3v_{n-1},\forall n\ge 2$.

Dễ thấy (v_n) là cấp số nhân với $v_1 = u_1 - \frac{1}{2} = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$, công bội $q = 3$, suy ra $v_n = -\frac{5}{2}.3^{n-1}$.

Do đó $u_n = v_n + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}.3^{n-1} + \frac{1}{2}(n \ge 1)$.

Vậy $L = \lim \frac{u_n}{3^n} = \lim\left(-\frac{5}{6} + \frac{1}{2.3^n}\right) = -\frac{5}{6}$.

Câu 167: Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC.

Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$,... sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n \ge 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + ... + S_n + ...$?

A. $S = \frac{15\pi}{4}$. **B.** $S = 4\pi$. **C.** $S = \frac{9\pi}{2}$. **D.** $S = 5\pi$.

Lời giải

Vì dãy các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$,... là các tam giác đều nên bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác bằng cạnh $\times \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Với $n = 1$ thì tam giác đều $A_1B_1C_1$ có cạnh bằng 3 nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ có bán kính $R_1 = 3.\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_1 = \pi\left(3.\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$.

Với $n = 2$ thì tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng $\frac{3}{2}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ có bán kính $R_2 = 3.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_2 = \pi\left(3.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$.

Với $n = 3$ thì tam giác đều $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng $\frac{3}{4}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ có bán kính $R_3 = 3.\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_3 = \pi\left(3.\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$.

.

Như vậy tam giác đều $A_nB_nC_n$ có cạnh bằng $3.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$ có bán kính $R_n = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_n = \pi\left(3.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$.

Khi đó ta được dãy S_1, S_2, ...S_n... là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = S_1 = 3\pi$ và công bội $q = \frac{1}{4}$.

Do đó tổng $S = S_1 + S_2 + ... + S_n + ... = \frac{u_1}{1-q} = 4\pi$.

Câu 168: Trong các dãy số (u_n) cho dưới đây, dãy số nào có giới hạn khác 1?

A. $u_n = \frac{n(n-2018)^{2017}}{(n-2017)^{2018}}$. **B.** $u_n = n\left(\sqrt{n^2+2020} - \sqrt{4n^2+2017}\right)$.

C. $u_n = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \ldots + \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$. **D.** $\begin{cases} u_1 = 2018 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 1),\ n \ge 1 \end{cases}$.

Lời giải

+ Với phương án A:

$$u_n = \frac{n(n-2018)^{2017}}{(n-2017)^{2018}} \to \frac{n.n^{2017}}{n^{2018}} \to 1.$$

+ Với phương án B:

$$u_n = n\left(\sqrt{n^2+2020} - \sqrt{4n^2+2017}\right) \to n\left(\sqrt{n^2} - \sqrt{4n^2}\right) \to n.(-n) \to -\infty.$$

+ Với phương án C:

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right) = 1 - \frac{1}{2n+3} \to \frac{1}{2}.$$

+ Với phương án D:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 1) \Leftrightarrow u_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 1).$$

Đặt $v_n = u_n - 1$, ta có $\begin{cases} v_1 = 2017 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}.v_n,\ n \ge 1 \end{cases}$.

Suy ra dãy (v_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu bằng 2017, công bội bằng $\frac{1}{2}$ nên

$$v_n = 2017.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \ (n \ge 1).$$

Suy ra $u_n = 2017.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 \ (n \ge 1)$, do đó $\lim u_n = 1$.

Chú ý:

Ở phương án D, ta có thể chứng minh $u_n > 1$ với mọi $n \ge 1$ và (u_n) là dãy giảm nên (u_n) sẽ có giới hạn. Gọi $\lim u_n = a$.

Khi đó từ $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 1),\ n \ge 1$ suy ra $a = \frac{1}{2}(a+1) \Leftrightarrow a = 1$, do đó $\lim u_n = 1$.

Câu 169: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $u_1 = 1$; $u_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}u_n^2 + a}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Biết rằng $\lim\left(u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2 - 2n\right) = b$. Giá trị của biểu thức $T = ab$ là

A. -2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}u_n^2 + a} \Rightarrow u_{n+1}^2 - 3a = \frac{2}{3}\left(u_n^2 - 3a\right).$$

Đặt $v_n = u_n^2 - 3a$ thì (v_n) là cấp số nhân với $v_1 = 1 - 3a$ và công bội $q = \frac{2}{3}$.

Do đó $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(1-3a) \Rightarrow u_n^2 = v_n + 3a = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}(1-3a) + 3a$.

Suy ra $u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2 - 2n = (1-3a)\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} - 2n + 3na = 3(1-3a)\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) - n(3a-2)$.

Vì $\lim\left(u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2 - 2n\right) = b$ nên

$$\lim\left(3(1-3a)\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) - n(3a-2)\right) = b \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2=0 \\ b = 3(1-3a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -3 \end{cases},$$

suy ra $T = ab = -2$.

Câu 170: Với n là số tự nhiên lớn hơn 2, đặt $S_n = \frac{1}{C_3^3} + \frac{1}{C_4^3} + \frac{1}{C_5^4} + ... + \frac{1}{C_n^3}$. Tính $\lim S_n$

A. 1. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 3. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có $C_n^3 = \dfrac{n!}{3!(n-3)!} = \dfrac{(n-3)!(n-2)(n-1)n}{(n-3)! \times 6} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} \Rightarrow \dfrac{1}{C_n^3} = \dfrac{6}{n(n-1)(n-2)}$

Vậy ta có $S_n = \dfrac{6}{1.2.3} + \dfrac{6}{2.3.4} + \dfrac{6}{3.4.5} + ... + \dfrac{6}{n(n-1)(n-2)}$

Nhận xét $\frac{2}{1.2.3}=\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}$; $\frac{2}{2.3.4}=\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}$;…; $\frac{2}{(n-2)(n-1)n}=\frac{1}{(n-2)(n-1)}-\frac{1}{(n-1)n}$

$\Rightarrow S_n=3\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)=3\left(\frac{n-2}{2n}\right)=\frac{3n-6}{2n}$

Vậy $\lim S_n=\lim\left(\frac{3n-6}{2n}\right)=\lim\left(\frac{3-\frac{6}{n}}{2}\right)=\frac{3}{2}$.

Câu 171: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(0;2018)$ để có $\lim\sqrt{\frac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}}\le\frac{1}{2187}$?

A. 2011. **B.** 2016. **C.** 2019. **D.** 2009.

Lời giải

Do $\frac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}>0$ với $\forall n$ nên $\lim\sqrt{\frac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}}=\sqrt{\lim\frac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}}=\sqrt{\lim\frac{1+3.\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{5}{9}\right)^n+9^a}}=\sqrt{\frac{1}{9^a}}=\frac{1}{3^a}$.

Theo đề bài ta có $\lim\sqrt{\frac{9^n+3^{n+1}}{5^n+9^{n+a}}}\le\frac{1}{2187}\Leftrightarrow\frac{1}{3^a}\le\frac{1}{2187}\Leftrightarrow a\ge 7$. Do a là số nguyên thuộc khoảng $(0;2018)$ nên có $a\in\{7;8;9;...;2017\}\Rightarrow$ có 2011 giá trị của a.

Câu 172: Cho hai dãy số $(u_n),(v_n)$ đều tồn tại giới hạn hữu hạn. Biết rằng hai dãy số đồng thời thỏa mãn các hệ thức $u_{n+1}=4v_n-2, v_{n+1}=u_n+1$ với mọi $\forall n\in\mathbb{Z}^+$. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+2v_n)$ bằng

A. 0. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** -1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Giả sử $\begin{cases}\lim u_n=a\\ \lim v_n=b\end{cases}$, ta có $\begin{cases}\lim u_{n+1}=\lim(4v_n-2)\\ \lim v_{n+1}=\lim(u_n+1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4b-2\\ b=a+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{2}{3}\\ b=\frac{1}{3}\end{cases}$.

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+2v_n)=a+2b=-\frac{2}{3}+2.\frac{1}{3}=0$.

Câu 173: Một mô hình gồm các khối cầu xếp chồng lên nhau tạo thành một cột thẳng đứng. Biết rằng mỗi khối cầu có bán kính gấp đôi khối cầu nằm ngay trên nó và bán kính khối cầu dưới cùng là 50 cm. Hỏi mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Chiều cao mô hình không quá 1,5 mét **B.** Chiều cao mô hình tối đa là 2 mét

C. Chiều cao mô hình dưới 2 mét. **D.** Mô hình có thể đạt được chiều cao tùy ý.

Lời giải

Gọi bán kính khối cầu dưới cùng là $R_1=50$ cm.

Gọi R_2, R_3,…, R_n lần lượt là bán kính của các khối cầu $R_2, R_3, ..., R_n$ nằm nằm ngay trên khối cầu dưới cùng.

Ta có $R_2 = \frac{R_1}{2}$, $R_3 = \frac{R_2}{2} = \frac{R_1}{4}$,…., $R_n = \frac{R_{n-1}}{2} = \frac{R_1}{2^{n-1}}$

Gọi h_n là chiều cao của mô hình gồm có n khối cầu chồng lên nhau.

Ta có

$$h_n = 2R_1 + 2R_2 + 2R_3 + ... + 2R_n = 2\left(R_1 + \frac{1}{2}R_1 + \frac{1}{4}R_1 + ... + \frac{1}{2^{n-1}}R_1 \right) = 2R_1\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} \right)$$

Suy ra chiều cao mô hình là $h = \lim\limits_{n\to+\infty} h_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[2R_1\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} \right)\right]$

Xét dãy số $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; ...; \frac{1}{2^{n-1}}; \frac{1}{2^n}; ...$ là một cấp số nhân có $u_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2}$ nên là dãy cấp số nhân lùi vô hạn. Do đó $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + ... = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

Suy ra $h = 2R_1.2 = 200\,\text{cm}$. Vậy chiều cao mô hình nhỏ hơn $200\,\text{cm}$.

Câu 174: Trong một lần Đoàn trường Lê Văn Hưu tổ chức chơi bóng chuyền hơi, bạn Nam thả một quả bóng chuyền hơi từ tầng ba, độ cao $8m$ so với mặt đất và thấy rằng mỗi lần chạm đất thì quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng ba phần tư độ cao lần rơi trước. Biết quả bóng chuyển động vuông góc với mặt đất. Khi đó tổng quảng đường quả bóng đã bay từ lúc thả bóng đến khi quả bóng không máy nữa gần bằng số nào dưới đây nhất?

A. $57m$. **B.** $54m$. **C.** $56m$. **D.** $58m$.

Lời giải

Lần đầu rơi xuống, quảng đường quả bóng đã bay đến lúc chạm đất là $8m$.

Sau đó quả bóng nảy lên và rơi xuống chạm đất lần thứ 2 thì quảng đường quả bóng đã bay là $8 + 2.8.\frac{3}{4}$.

Tương tự, khi quả bóng nảy lên và rơi xuống chạm đất lần thứ n thì quảng đường quả bóng đã bay là $8 + 2.8.\frac{3}{4} + ... + 2.8.(\frac{3}{4})^{n-1} = 8 + \frac{1-(\frac{3}{4})^n}{1-\frac{3}{4}} = 8 + 48(1-(\frac{3}{4})^{n-1})$.

Quảng đường quả bóng đã bay từ lúc thả đến lúc không máy nữa bằng:

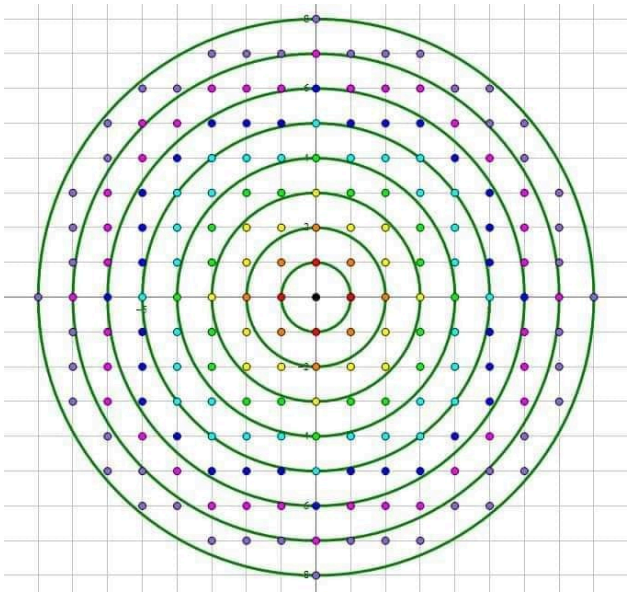
$\lim[8 + 48(1-(\frac{3}{4})^{n-1})] = 8 + 48 = 56$.

Câu 175: Với mỗi số nguyên dương n, gọi s_n là số cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2 + y^2 \le n^2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{s_n}}{n} = \sqrt{2\pi}$. **B.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{s_n}}{n} = 2$. **C.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{s_n}}{n} = \sqrt{\pi}$. **D.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{s_n}}{n} = 4$.

Lời giải

Cách 1:



Xét điểm $M(x;y)$ bất kì nằm trong của hình tròn (C_n): $x^2+y^2 \le n^2$.

Mỗi điểm M tương ứng với một và chỉ một hình vuông đơn vị $S(M)$ nhận M là đỉnh ở góc trái, phía dưới, có các cạnh lần lượt song song hoặc nằm trên các trục tọa độ.

Ta được s_n bằng số các hình vuông $S(M)$ và bằng tổng diện tích của $S(M)$, với $M \in (C_n)$.

Nhận xét: các hình vuông $S(M)$, $S(M)$ đều nằm trong hình tròn $\left(C_{n+\sqrt{2}}\right)$: $x^2+y^2 \le \left(n+\sqrt{2}\right)^2$. Do đó $s_n \le \pi\left(n+\sqrt{2}\right)^2$. (1)

Mặt khác, các hình vuông $S(M)$ phủ kín hình tròn $\left(C_{n-\sqrt{2}}\right)$: $x^2+y^2 \le \left(n-\sqrt{2}\right)^2$.

Vì thế $s_n \ge \pi\left(n-\sqrt{2}\right)^2$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\sqrt{\pi}\left(n-\sqrt{2}\right) \le \sqrt{s_n} \le \sqrt{\pi}\left(n+\sqrt{2}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \ge 2$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{\pi}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{n}\right) \le \frac{\sqrt{s_n}}{n} \le \sqrt{\pi}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{n}\right)$$

Mà $\lim \sqrt{\pi}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{n}\right) = \lim \sqrt{\pi}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{n}\right) = \sqrt{\pi}$, theo nguyên lí kẹp, ta được $\lim \frac{\sqrt{s_n}}{n} = \sqrt{\pi}$.

Cách 2: Gọi D_n là số cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2+y^2 \le n^2$ với $x \ne y$ và E_n là số cặp số nguyên $(x;x)$ thỏa mãn $x^2+y^2 \le n^2$. Ta có E_n là số các số nguyên k sao cho $2k^2 \le n^2$, từ $k \le \frac{\sqrt{2}}{2}n$, ta có $n \in \mathbb{Z}$ và $-\left\lfloor \frac{n\sqrt{2}}{2} \right\rfloor \le k \le \left\lfloor \frac{n\sqrt{2}}{2} \right\rfloor$. Cho nên $E_n = 2\left\lfloor \frac{n\sqrt{2}}{2} \right\rfloor + 1$.

Tiếp theo, ta đánh giá D_n.

Tổng số cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2+y^2\le n^2$ với $x\ne y$ là $4N_n$ với N_n là số các cặp số tự nhiên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2+y^2\le n^2$ và $x\ne y$. Giả sử $(x;y)\in\mathbb{N}^2$ thỏa mãn $x^2+y^2\le n^2$, khi đó $0\le x\le n$, $0\le y\le\left\lfloor\sqrt{n^2-x^2}\right\rfloor$.

Nên ta có đánh giá với D_n là $4\left(-n+\sum_{0\le x\le n}\left\lfloor n^2-x^2\right\rfloor\right)\le 4N_n\le D_n\le 4\sum_{0\le x\le n}\left\lfloor\sqrt{n^2-x^2}\right\rfloor$.

Vì thế cho nên từ $s_n=E_n+D_n$, có $-4n+1+T_n\le s_n\le 1+T_n$, trong đó $T_n=2\left\lfloor\frac{n\sqrt{2}}{2}\right\rfloor+4\sum_{1\le x\le n}\left\lfloor\sqrt{n^2-x^2}\right\rfloor$.

Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{s_n}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\left(2\left\lfloor\frac{n\sqrt{2}}{2}\right\rfloor+4\sum_{1\le x\le n}\left\lfloor\sqrt{n^2-x^2}\right\rfloor\right)$. Do đánh giá về phần nguyên

$$2\left\lfloor\frac{n\sqrt{2}}{2}\right\rfloor+4\sum_{1\le x\le n}\left\lfloor\sqrt{n^2-x^2}\right\rfloor\le 2\left(\frac{n\sqrt{2}}{2}\right)+4\sum_{1\le x\le n}\sqrt{n^2-x^2},$$

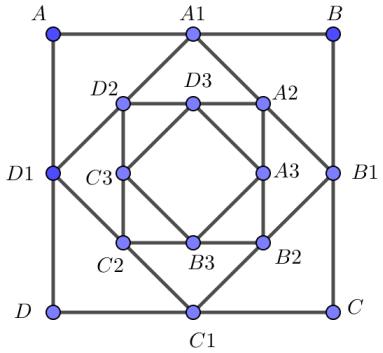
$$2\left\lfloor\frac{n\sqrt{2}}{2}\right\rfloor+4\sum_{1\le x\le n}\left\lfloor\sqrt{n^2-x^2}\right\rfloor\ge 2\left(\frac{n\sqrt{2}}{2}\right)+4\sum_{1\le x\le n}\left(\sqrt{n^2-x^2}-1\right)$$

Nên ta được $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{s_n}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{n^2}\sum_{1\le x\le n}\sqrt{n^2-x^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{n}\sum_{1\le x\le n}\sqrt{1-\left(\frac{x}{n}\right)^2}$

Về bản chất, kết quả giới hạn này là giá trị của tích phân xác định $I=\int_0^1 4\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx}=\pi$.

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{s_n}}{n}=\sqrt{\pi}$.

Câu 176: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Người ta dựng hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng $\frac{1}{2}$ đường chéo của hình vuông $ABCD$; dựng hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ có cạnh bằng $\frac{1}{2}$ đường chéo của hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ và cứ tiếp tục như vậy. Giả sử cách dựng trên có thể tiến ra vô hạn. Nếu tổng diện tích S của tất cả các hình vuông $ABCD, A_1B_1C_1\,\mathrm{D}_1, A_2B_2C_2\,\mathrm{D}_2\ldots$ bằng 8 thì a bằng:



A. 2 **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $2\sqrt{2}$

Lời giải

Ta có $S_{ABCD}=a^2$; $S_{A_1B_1C_1D_1}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$; $S_{A_2B_2C_2D_2}=\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2^2}$

$$S=S_{ABCD}+S_{A_1B_1C_1D_1}+S_{A_2B_2C_2D_2}+...=a^2+\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2^2}+....=a^2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...\right)=a^2.\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2a^2$$

Mà $S=8\Leftrightarrow 2a^2=8\Leftrightarrow a=2.$

Câu 177: Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC. Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$,... sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3. Với mỗi số nguyên dương $n\geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tổng $S=S_1+S_2+...+S_{2021}$ là:

A. $S=5\pi$. **B.** $S=\frac{9\pi}{2}$. **C.** $S=4\pi$. **D.** $S=\frac{15\pi}{4}$.

Lời giải

Vì dãy các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$,... là các tam giác đều nên bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác bằng cạnh $\times\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Với $n=1$ thì tam giác đều $A_1B_1C_1$ có cạnh bằng 3 nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ có bán kính $R_1=3.\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow S_1=\pi\left(3.\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=3\pi$.

Với $n=2$ thì tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng $\frac{3}{2}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ có bán kính $R_2=3.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow S_2=\pi\left(3.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$.

Với $n=3$ thì tam giác đều $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng $\frac{3}{4}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ có bán kính $R_3=3.\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_3=\pi\left(3.\frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$.

Như vậy tam giác đều $A_nB_nC_n$ có cạnh bằng $3.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$ có bán kính $R_n=3.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_n=\pi\left(3.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$.

Khi đó ta được dãy $S_1,S_2,\ldots,S_n,\ldots$ là một tổng cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1=S_1=3\pi$ và công bội $q=\frac{1}{4}$.

Do đó tổng $S=S_1+S_2+\ldots+S_n+\ldots=\frac{u_1}{1-q}=\frac{3\pi}{1-\frac{1}{4}}=4\pi$.

CHƯƠNG III

GIỚI HẠN
HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI 2: GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

I LÝ THUYẾT.

I. GIỚI HẠN CỦA HAM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM:

1. Định nghĩa

Cho khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0. Ta nói rằng hàm số $f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K\setminus\{x_0\}$. Hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K\setminus\{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có: $f(x_n)\to L$. Ta kí hiệu:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \text{ hay } f(x)\to L \text{ khi } x\to x_0.$$

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$; $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$

2. Các phép toán trên giới hạn hữu hạn của hàm số.

a) Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$. Khi đó

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=L+M;$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=L-M;$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=L.M;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M};$$

b) Nếu $f(x)\ge 0$ với mọi $x\in J\setminus\{x_0\}$, trong đó J là một khoảng nào đó chứa x_0 thì $L\ge 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$.

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to x_0} x^k = x_0^k$; $\lim\limits_{x\to x_0}\left[cf(x)\right]=c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

3. Giới hạn một phía

3.1 Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b),(x_0 \in R)$. Ta nói số L là giới hạn bên phải của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì thỏa mãn $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$ ta có $\lim f(x_n) = L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

3.2 Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0),(x_0 \in R)$. Ta nói số L là giới hạn bên trái của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì thỏa mãn $a < x_n < x_0$ và $x_n \to x_0$ ta có $\lim f(x_n) = L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

3.3 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

3.4 Chú ý:

a) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ thì không tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

B) Các định lí về giới hạn của hàm số vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to x_0^-$ hoặc $x \to x_0^+$.

II. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HAM SỐ TẠI VÔ CỰC

a) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a;+\infty)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là L khi $x \to +\infty$ nếu với mọi dãy số $(x_n) : x_n > a$ và $x_n \to +\infty$ thì $f(x_n) \to L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

b) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-\infty;b)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là L khi $x \to -\infty$ nếu với mọi dãy số $(x_n) : x_n < b$ và $x_n \to -\infty$ thì $f(x_n) \to L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.

Chú ý:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} c = c$ với c là hằng số

Với k nguyên dương, ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0; \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$

Các định lí về giới hạn của hàm số vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.

III. GIỚI HẠN VÔ CỰC (MỘT PHÍA) CỦA HAM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a;+\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn $+\infty$ khi $x \to a^+$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì, thỏa mãn $a < x_n$ và $x_n \to a$ ta có $\lim f(x_n) = +\infty$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$.

Các trường hợp $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ được định nghĩa tương tự.

IV. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HAM SỐ TẠI VÔ CỰC

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$.

Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x\to+\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$, ta có $f(x_n)\to+\infty$.

Kí hiệu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ hay $f(x)\to+\infty$ khi $x\to+\infty$.

- Các trường hợp $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ được định nghĩa tương tự.

Nhận xét :

+ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$ với k nguyên dương

+ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=-\infty$ với k nguyên dương lẻ

+ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=+\infty$ với k nguyên dương chẵn

II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1. HÀM SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN TẠI x_0 KHÔNG CÓ DẠNG VÔ ĐỊNH

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to2}\left(3x^2+7x+11\right)$ là:

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left|x^2-4\right|$ là:

Câu 3: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-3}{x^3+2}$ là:

Câu 4: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-x^3}{(2x-1)\left(x^4-3\right)}$ là:

Câu 5: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$ là:

Câu 6: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{\dfrac{9x^2-x}{(2x-1)\left(x^4-3\right)}}$ là:

Câu 7: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-4}-\sqrt{3x-2}}{x+1}$ là:

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 8: Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x+2}{-2x^2+x+3}$.

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Câu 9: $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+3x+2\right)$ có giá trị bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 6. **D.** $+\infty$.

Câu 10: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+3x-1}{x^2+1}$ ta được kết quả bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 11: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x^2+3x-5\right)$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** -5.

Câu 12: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}$ ta được kết quả là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 13: Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x+3}$.

A. 1. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 14: Với giá trị nào của tham số m thì $\lim\limits_{x\to -1}\left(mx^2+3x-2m\right)=0$?

A. $m=-3$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=0$. **D.** $m=3$.

Câu 15: Biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-ax+1}{x+1}=3$. Khi đó giá trị của a là

A. 4. **B.** 0. **C.** -4. **D.** 3.

Câu 16: Biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+1}=a+b\sqrt{2}$. Tính $a+b$ được kết quả đúng bằng:

A. 2. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 0.

Câu 17: Tìm m để $A=3$ với $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+m}{x+2}$.

A. 6. **B.** 14. **C.** 3. **D.** $\dfrac{10}{3}$.

Câu 18: Tìm m để $A=\dfrac{1}{2}$ với $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x+m}{mx-2}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** -10. **D.** $\dfrac{10}{3}$.

Câu 19: Tìm m để $A=7$ với $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x+m^2-1}{-x+2}$.

A. ± 2. **B.** 2. **C.** -2. **D.** $\dfrac{10}{3}$.

DẠNG 2. DẠNG VÔ ĐỊNH $\dfrac{0}{0}$

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 20: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ là:

Câu 21: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x^3+1}$ là:

Câu 22: Biết rằng $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2x^3+6\sqrt{3}}{3-x^2}=a\sqrt{3}$. Tính a

Câu 23: Tính $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ bằng:

Câu 24: Tính giới hạn $I=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$.

Câu 25: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ bằng

Câu 26: Tính $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{2x^2-6}{x-\sqrt{3}}=a\sqrt{b}$ (a, b nguyên). Khi đó giá trị của $P=a+b$ bằng

Câu 27: Biết $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+1}-1}{x}=\dfrac{a}{b}$, trong đó a, b là các số nguyên dương và phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị biểu thức $P=a^2+b^2$.

Câu 28: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2+\pi^{21}\right)\sqrt[7]{1-2x}-\pi^{21}}{x}$ là:

Câu 29: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}$ là:

Câu 30: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$ là:

Câu 31: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ bằng

Câu 32: $\lim\limits_{x\to 2^{2018}}\dfrac{x^2-4^{2018}}{x-2^{2018}}$ bằng

Câu 33: Tính gới hạn $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sqrt{2-x}-1}$.

Câu 34: Tính $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-12x+35}{25-5x}$.

Câu 35: Cặp (a,b) thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3}=3$ là

Câu 36: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}-\sqrt{1-2x}}{x}$.

Câu 37: Cho a,b là số nguyên và $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+bx-5}{x-1}=7$. Tính a^2+b^2+a+b.

Câu 38: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+5}}{x-3}$.

Câu 39: Biết rằng $b>0, a+b=5$ và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=2$. Tìm $a,b?$

Câu 40: Biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)}=\dfrac{a\sqrt{2}}{b}$ với a, $b\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a+b$ bằng:

Câu 41: Biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-ax+a-1}{x-1}=2$. Tính $M=a^2+2a$.

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 42: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}$ bằng

A. không tồn tại. **B.** 0. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 43: Giá trị của $I=\lim\limits_{x\to -\sqrt{2}}\dfrac{x+\sqrt{2}}{x^2-2}$ bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 44: Tính $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ bằng:

A. 3. **B.** 6. **C.** $+\infty$. **D.** -3.

Câu 45: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 2.

Câu 46: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-2x-5}{x^2-1}$ bằng

A. -3. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 47: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-4}$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $-\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 2.

Câu 48: Tính giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$

A. $A=-\infty$. **B.** $A=0$. **C.** $A=3$. **D.** $A=+\infty$.

Câu 49: Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$.

A. $L=-5$. **B.** $L=0$. **C.** $L=-3$. **D.** $L=5$.

Câu 50: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-4}$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $-\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 2.

Câu 51: Tính giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$

A. $A=-\infty$. **B.** $A=0$. **C.** $A=3$. **D.** $A=+\infty$.

Câu 52: Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$.

A. $L=-5$. **B.** $L=0$. **C.** $L=-3$. **D.** $L=5$.

Câu 53: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-2x-5}{x^2-1}$ bằng

A. -3. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 54: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ có giá trị bằng

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 55: Biết rằng $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2x^3+6\sqrt{3}}{3-x^2}=a\sqrt{3}+b$. Tính a^2+b^2.

A. 9. **B.** 25. **C.** 5. **D.** 13.

Câu 56: Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}$.

A. $L=\dfrac{3}{2}$. **B.** $L=3$. **C.** $L=1$. **D.** $L=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 57: Giá trị của $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Câu 58: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$ là

A. 1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** -1.

Câu 59: Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{3x^2+8x+5}$.

A. $L=-\dfrac{3}{2}$. **B.** $L=\dfrac{1}{2}$. **C.** $L=-\infty$. **D.** $L=0$.

Câu 60: Biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=a$. Hỏi a không là nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

A. $x^2+x+1>0$. **B.** $-2x+1>0$. **C.** $x^2-5x+6<0$. **D.** $x^2-3x\ge 0$.

Câu 61: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+2x-15}{x-3}$ bằng

A. $\dfrac{1}{8}$. **B.** 9. **C.** $+\infty$. **D.** 8.

Câu 62: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{x^2+3x+2}$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** -1. **D.** 2.

Câu 63: Tìm $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x+2}$.

A. -1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 64: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-2x-5}{x^2-1}$ bằng

A. 3. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 65: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ ta được kết quả là

A. $+\infty$. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 66: Tìm $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{x^2-4x+3}$. Kết quả là

A. -3. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 3.

Câu 67: Tìm $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$. Kết quả là

A. 7. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 68: Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{2x+2}$ là?

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

Câu 69: Kết quả $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ là

A. -1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 70: Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-3)}{1-x^2}$.

A. 0. **B.** -1. **C.** 1. **D.** -2.

Câu 71: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+x}$ bằng

A. -3. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 72: $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-12x+35}{25-5x}$ bằng

A. $-\dfrac{2}{5}$. **B.** $+\infty$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $-\infty$.

Câu 73: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** $+\infty$. **D.** -3.

Câu 74: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Câu 75: Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Câu 76: Biết rằng $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2x^3+6\sqrt{3}}{3-x^2}=a\sqrt{b}$ với a, b là các số nguyên. Tính $a+b$.

A. 10. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 77: Kết quả của $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2017\left(x^2-4\right)}{2|x-2|}$ bằng

A. 4034. **B.** -4034. **C.** $\dfrac{80683}{20}$. **D.** $-\dfrac{80683}{20}$.

Câu 78: Giới hạn của $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4-4x^3}{5x^3}$ bằng:

A. 0. **B.** -4. **C.** $\dfrac{-3}{5}$. **D.** $\dfrac{-4}{5}$.

Câu 79: Tìm $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$.

A. $+\infty$. **B.** -2. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 80: Tính $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Câu 81: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{3x^2-4x+1}$. **B.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x+3}{x+5}$. **C.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ **D.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Câu 82: Tính $I=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-3x+2}$.

A. $I=-12$. **B.** $I=12$. **C.** $I=-8$. **D.** $I=8$.

Câu 83: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1}$ bằng:

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $-\dfrac{1}{3}$. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Câu 84: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+4x}$ bằng

A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $-\dfrac{5}{4}$. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 85: Tìm $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x-2}$.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 86: Với a là số thực khác 0, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^2-a^2}$ bằng

A. $a-1$. **B.** $a+1$. **C.** $\dfrac{a-1}{2a}$. **D.** $\dfrac{a+1}{2a}$.

Câu 87: Giá trị $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** -2.

Câu 88: Biết $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2+2x-3}=\dfrac{a}{b}$, $a,b\in\mathbb{Z}; b\neq 0$. Giá trị nhỏ nhất của $a.b$ bằng

A. -10. **B.** 10. **C.** -15. **D.** 7.

Câu 89: Biết $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)}\dfrac{2x^2-5x-3}{2x^2+11x+5}=-\dfrac{a}{b}$, $a,b\in\mathbb{Z}; b\neq 0$. Giá trị nhỏ nhất của $a.b$ bằng

A. 63. **B.** 16. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 90: Cho $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(\sqrt{3x+1}-1\right)}{x}$ và $J=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$. Tính $I-J$.

A. 6. **B.** 3. **C.** -6. **D.** 0.

Câu 91: Tính giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

A. $A=-\infty$. **B.** $A=0$. **C.** $A=3$. **D.** $A=+\infty$.

Câu 92: Tính $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-12x+35}{25-5x}$.

A. $-\dfrac{2}{5}$. **B.** $+\infty$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $-\infty$.

Câu 93: Tính $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{2x^2-6}{x-\sqrt{3}}=a\sqrt{b}$ (a, b nguyên). Khi đó giá trị của $P=a+b$ bằng

A. 7. **B.** 10. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 94: Tính giới hạn $I=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$.

A. $I=-1$. **B.** $I=0$. **C.** $I=1$. **D.** $I=5$.

Câu 95: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}-\sqrt{1-2x}}{x}$.

A. 2. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 0.

Câu 96: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{2x^3+2}$.

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 97: Cho $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(\sqrt{3x+1}-1\right)}{x}$ và $J=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$. Tính $I-J$.

A. 6. **B.** 3. **C.** -6. **D.** 0.

Câu 98: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ bằng

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Câu 99: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{\sqrt{2x+5}-1}$ *bằng*

A. -3. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** -6. **D.** 8.

Câu 100: Tính giới hạn $K=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x^2-3x}$.

A. $K=-\dfrac{2}{3}$. **B.** $K=\dfrac{2}{3}$. **C.** $K=\dfrac{4}{3}$. **D.** $K=0$.

Câu 101: Tính giới hạn $K=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x^2-3x}$.

A. $K=-\dfrac{2}{3}$. **B.** $K=\dfrac{2}{3}$. **C.** $K=\dfrac{4}{3}$. **D.** $K=0$.

Câu 102: Giá trị $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ bằng

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{4}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 103: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 2.

Câu 104: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2}$. Tính $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

A. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-\dfrac{2}{3}$. **B.** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-\dfrac{3}{2}$. **C.** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\dfrac{2}{3}$. **D.** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\dfrac{3}{2}$.

Câu 105: Tìm $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2+x-2}$.

A. -5. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 106: Tìm $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x+1}-3}$.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** $-\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 107: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ bằng

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** 2. **C.** 1 **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 108: Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}$.

A. $-\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

Câu 109: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5x+3}-\sqrt{3}}{x}=\dfrac{m}{n\sqrt{k}}(m,n,k\in Z)$. Tính $m-n+k$?

A. 6. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 0

Câu 110: Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{x+1}}{3x}$ bằng ?

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{1}{9}$.

Câu 111: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ bằng?

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 112: Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{x^2-1}$.

A. $\dfrac{1}{8}$. **B.** $-\dfrac{1}{4}$. **C.** $-\dfrac{1}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Câu 113: Tính $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{x^2-1}$

A. $\dfrac{1}{8}$. **B.** $-\dfrac{1}{4}$. **C.** $-\dfrac{1}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Câu 114: Biết $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{2x+1}-1}=\dfrac{a}{b}$. Khẳng định nào sao đây là **đúng**?

A. $a+b=3$. **B.** $a+b=-3$. **C.** $a+b=2$. **D.** $a+b=1$.

Câu 115: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{2x-1}-1}=\dfrac{a}{b}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a+b=-5$ **B.** $a+b=2$ **C.** $a+b=1$ **D.** $a+b=5$

Câu 116: Cho $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}=\dfrac{a}{b}$, trong đó a, b là các số nguyên dương và phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị biểu thức $P=1984a^2+4b^2$.

A. 0. **B.** 2000. **C.** 8000. **D.** 2020.

Câu 117: Biết $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+1}-1}{x}=\dfrac{a}{b}$, trong đó a, b là các số nguyên dương và phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị biểu thức $P=a^2+b^2$.

A. $P=13$. **B.** $P=0$. **C.** $P=5$. **D.** $P=40$.

Câu 118: Số nào trong các số sau là bằng $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-2\sqrt{3}}{x-3}$?

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$. **B.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$. **D.** $-\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$.

Câu 119: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-x^2-x-2}$ bằng

A. 0. **B.** $-\dfrac{1}{7}$. **C.** -7. **D.** $+\infty$.

Câu 120: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-x^2+x-1}$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 121: Tính giới hạn sau $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}\right)$.

A. 6. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 10.

Câu 122: Tìm $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x^2+2}{x^3+2x-3}$.

A. $-\dfrac{5}{2}$. **B.** $-\dfrac{2}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $+\infty$.

Câu 123: Giới hạn $T=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^3+2x-3}$ bằng

A. $\dfrac{2}{9}$. **B.** $\dfrac{2}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $+\infty$.

Câu 124: Tính $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)$.

A. 2. **B.** $+\infty$. **C.** -2. **D.** 0.

Câu 125: Cho a thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\left(a^2-1\right)x+a^2-2}{x-1}=-1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a<-2$. **B.** $a<3$. **C.** $a>1$. **D.** $a>0$.

Câu 126: Có bao nhiêu giá trị $a>0$ sao $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-\left(1+a^2\right)x+a}{x^3-a^3}=\dfrac{1}{3}$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 127: Cho a và b là các số thực thỏa mãn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+ax+b}{x+1}=3$. Tính $a+b$

A. 9. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 128: Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\left(a+2\right)x+a+1}{x^3-1}$.

A. $\dfrac{2-a}{3}$ **B.** $\dfrac{-2-a}{3}$ **C.** $\dfrac{-a}{3}$ **D.** $\dfrac{a}{3}$

Câu 129: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+3a^2}-2a}{x-a}+a$,. Tính $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)$.

A. $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=\dfrac{2a-1}{2}$. **B.** $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=\dfrac{2a+1}{2}$. **C.** $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=\dfrac{2}{2a+1}$. **D.** $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=\dfrac{2}{2a-1}$.

Câu 130: Tìm $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-\left(1+a^2\right)x+a}{x^3-a^3}$.

A. $\dfrac{2a^2}{a^2+3}$. **B.** $\dfrac{2a^2-1}{3a^2}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{2a^2-1}{3}$.

Câu 131: Cho $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-1}=\dfrac{-1}{2};\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$. Tổng $S=a^2+b^2$ bằng

A. $S=4$. **B.** $S=1$. **C.** $S=13$. **D.** $S=9$.

Câu 132: Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+\left(3a+2\right)x-3a-3}{x-1}$.

A. $4-3a$. **B.** $3a+4$. **C.** $3a-4$. **D.** $3a$

Câu 133: *Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a+b=8$ và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2ax+1}-\sqrt{bx+1}}{x}=5$*

Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng?

A. $a\in\left(2;4\right)$. **B.** $a\in\left(3;8\right)$. **C.** $b\in\left(3;5\right)$. **D.** $b\in\left(4;9\right)$.

Câu 134: *Giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}$ bằng $\dfrac{a}{b}$. Giá trị thực của $a-b$ là*

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{9}$. **C.** -1. **D.** $\dfrac{9}{8}$.

Câu 135: *Tính giới hạn* $L=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2x^2+x+3}-3}{4-x^2}$.

A. $L=-\dfrac{2}{7}$. **B.** $L=-\dfrac{7}{24}$. **C.** $L=-\dfrac{9}{31}$. **D.** $L=0$.

Câu 136: *Tính giới hạn* $L=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2x^2+x+3}-3}{4-x^2}$.

A. $L=-\dfrac{2}{7}$. **B.** $L=-\dfrac{7}{24}$. **C.** $L=-\dfrac{9}{31}$. **D.** $L=0$.

Câu 137: Biết rằng $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}=\dfrac{a}{b}$. Tính $a-b$

A. 25. **B.** 1. **C.** -1. **D.** $-\dfrac{13}{12}$.

Câu 138: Cho $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt[3]{3x+5}}{x^2-3x+2}\right)=\dfrac{a}{b}$ ($\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản, a,b là số nguyên). Tính tổng $P=a^2+b^2$.

A. $P=5$. **B.** $P=3$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-2$.

Câu 139: Cho $f(x)$ là đa thức thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-20}{x-2}=10$. Tìm $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{6f(x)+5}-5}{x^2+x-6}$.

A. $T=\dfrac{4}{15}$. **B.** $T=\dfrac{12}{25}$. **C.** $T=\dfrac{6}{25}$. **D.** $T=\dfrac{4}{25}$.

Câu 140: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}$ bằng

A. 0. **B.** -1. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 141: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$ là:

A. $\dfrac{13}{12}$. **B.** $-\dfrac{13}{12}$. **C.** $\dfrac{11}{12}$. **D.** $\dfrac{5}{6}$.

Câu 142: Biết rằng $b>0, a+b=5$ và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=2$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $a^2+b^2>10$. **B.** $a^2-b^2>6$. **C.** $a-b\ge 0$. **D.** $1\le a\le 3$.

Câu 143: Biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x^2+2}-\sqrt{4+x}}{x^2-1}=\dfrac{\sqrt{a}}{b}$,. Tính $P=a-b$

A. $P=5$. **B.** $P=1$. **C.** $P=2$. **D.** $P=3$.

Câu 144: Biết $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{8-x}}{x}=\dfrac{a}{b}$. Giá trị của $b-a$ bằng

A. -1. **B.** $\dfrac{13}{12}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{12}$.

Câu 145: Biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2-\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+3}+x-3}=\dfrac{a}{b}$. Giá trị của $3a+2b$ bằng

A. 12. **B.** 13. **C.** 10. **D.** 5.

Câu 146: Biết $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}=\dfrac{a}{b}$. Giá trị của $a-b$ bằng

A. $\dfrac{1}{9}$. **B.** $\dfrac{9}{8}$. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 147: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x^2+x+2}}{x-1}$.

A. $\dfrac{1}{12}$ **B.** $+\infty$ **C.** $-\dfrac{3}{2}$ **D.** $-\dfrac{2}{3}$

Câu 148: Cho $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sqrt[7]{x+1}.\sqrt{x+4}-2}\right)=\dfrac{a}{b}$ ($\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính tổng $L=a+b$.

A. $L=43$. **B.** $L=23$. **C.** $L=13$. **D.** $L=53$.

Câu 149: Biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)}=\dfrac{a\sqrt{2}}{b}+c$ với $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a+b+c$ bằng:

A. 5. **B.** 37. **C.** 13. **D.** 51.

Câu 150: Tính $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2^{2018}-x^{1009}}{4-x}$, kết quả bằng

A. $+\infty$. **B.** 1009.2^{2016}. **C.** 1009.2^{2018}. **D.** 1009.4^{2018}.

Câu 151: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-x^n}{x-1}\left(m;n\in N^*\right)$ ta được kết quả bằng

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** m. **D.** $m-n$.

Câu 152: Tính giới hạn của hàm số $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-nx+n-1}{(x-1)^2}$.

A. $\dfrac{n^2-n}{2}$. **B.** $\dfrac{n^2+n}{2}$. **C.** $\dfrac{n}{2}$. **D.** $\dfrac{n^2}{2}$.

CHƯƠNG III

GIỚI HẠN
HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI 2: GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

I LÝ THUYẾT.

I. GIỚI HẠN CỦA HAM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM:

1. Định nghĩa

Cho khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0. Ta nói rằng hàm số $f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K\setminus\{x_0\}$. Hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K\setminus\{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có: $f(x_n)\to L$. Ta kí hiệu:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \text{ hay } f(x)\to L \text{ khi } x\to x_0.$$

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$; $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$

2. Các phép toán trên giới hạn hữu hạn của hàm số.

a) Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$. Khi đó

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=L+M;$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=L-M;$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=L.M;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M};$$

b) Nếu $f(x)\ge 0$ với mọi $x\in J\setminus\{x_0\}$, trong đó J là một khoảng nào đó chứa x_0 thì $L\ge 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$.

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to x_0} x^k = x_0^k$; $\lim\limits_{x\to x_0}\left[cf(x)\right]=c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

3. Giới hạn một phía

3.1 Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b),(x_0 \in R)$. Ta nói số L là giới hạn bên phải của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì thỏa mãn $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$ ta có $\lim f(x_n) = L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

3.2 Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0),(x_0 \in R)$. Ta nói số L là giới hạn bên trái của hàm số $y = f(x)$ khi $x \to x_0$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì thỏa mãn $a < x_n < x_0$ và $x_n \to x_0$ ta có $\lim f(x_n) = L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

3.3 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

3.4 Chú ý:

a) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ thì không tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

B) Các định lí về giới hạn của hàm số vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to x_0^-$ hoặc $x \to x_0^+$.

II. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HAM SỐ TẠI VÔ CỰC

a) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a;+\infty)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là L khi $x \to +\infty$ nếu với mọi dãy số $(x_n) : x_n > a$ và $x_n \to +\infty$ thì $f(x_n) \to L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

b) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-\infty;b)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là L khi $x \to -\infty$ nếu với mọi dãy số $(x_n) : x_n < b$ và $x_n \to -\infty$ thì $f(x_n) \to L$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.

Chú ý:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} c = c$ với c là hằng số

Với k nguyên dương, ta có: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0; \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$

Các định lí về giới hạn của hàm số vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.

III. GIỚI HẠN VÔ CỰC (MỘT PHÍA) CỦA HAM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a;+\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn $+\infty$ khi $x \to a^+$ nếu với mọi dãy số (x_n) bất kì, thỏa mãn $a < x_n$ và $x_n \to a$ ta có $\lim f(x_n) = +\infty$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$.

Các trường hợp $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ được định nghĩa tương tự.

IV. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HAM SỐ TẠI VÔ CỰC

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$.

Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x\to+\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$, ta có $f(x_n)\to+\infty$.

Kí hiệu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ hay $f(x)\to+\infty$ khi $x\to+\infty$.

- Các trường hợp $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ được định nghĩa tương tự.

Nhận xét :

+ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$ với k nguyên dương

+ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=-\infty$ với k nguyên dương lẻ

+ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=+\infty$ với k nguyên dương chẵn

II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1. HÀM SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN TẠI x_0 KHÔNG CÓ DẠNG VÔ ĐỊNH

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to2}\left(3x^2+7x+11\right)$ là:

Lời giải

$\lim\limits_{x\to2}\left(3x^2+7x+11\right)=3.2^2+7.2+11=37$

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left|x^2-4\right|$ là:

Lời giải

$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left|x^2-4\right|=\left|\left(\sqrt{3}\right)^2-4\right|=1$

Câu 3: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-3}{x^3+2}$ là:

Lời giải

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-3}{x^3+2}=\frac{(-1)^2-3}{(-1)^3+2}=-2$$

Câu 4: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^3}{(2x-1)(x^4-3)}$ là:

Lời giải

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-x^3}{(2x-1)(x^4-3)}=\frac{1-1^3}{(2.1-1)(1^4-3)}=0$$

Câu 5: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$ là:

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}=\dfrac{\sqrt{3+1}+1}{-1-1}=-\dfrac{3}{2}$

Câu 6: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{9x^2-x}{(2x-1)(x^4-3)}}$ là:

Lời giải

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{9x^2-x}{(2x-1)(x^4-3)}}=\sqrt{\frac{9.3^2-3}{(2.3-1)(3^4-3)}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Câu 7: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-4}-\sqrt{3x-2}}{x+1}$ là:

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2-4}-\sqrt{3x-2}}{x+1}=\dfrac{\sqrt[3]{12-4}-\sqrt{6-2}}{3}=\dfrac{0}{3}=0$

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 8: Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x+2}{-2x^2+x+3}$.

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x+2}{-2x^2+x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1^2+3.1+2}{-2.1^2+1+3}=3$.

Câu 9: $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x+2)$ có giá trị bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 6. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+3x+2\right)=1^2+3.1+2=6$.

Câu 10: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+3x-1}{x^2+1}$ ta được kết quả bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+3x-1}{x^2+1}=\dfrac{2.1^3+3.1-1}{1^2+1}=\dfrac{4}{2}=2$.

Câu 11: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x^2+3x-5\right)$.

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** -5.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x^2+3x-5\right)=-5$.

Câu 12: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}$ ta được kết quả là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Dễ thấy $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{2+2}{2-1}=4$.

Câu 13: Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x+3}$.

A. 1. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có: $L=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x+3}=\dfrac{0}{3}=0$.

Câu 14: Với giá trị nào của tham số m thì $\lim\limits_{x\to -1}\left(mx^2+3x-2m\right)=0$?

A. $m=-3$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=0$. **D.** $m=3$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to -1}\left(mx^2+3x-2m\right)=0\Leftrightarrow m.(-1)^2+3.(-1)-2m=0\Leftrightarrow m=-3$.

Câu 15: Biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-ax+1}{x+1}=3$. Khi đó giá trị của a là

A. 4. **B.** 0. **C.** -4. **D.** 3.

Lời giải

Có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-ax+1}{x+1}=3\Rightarrow\dfrac{1^2-a.1+1}{1+1}=3\Rightarrow a=-4$.

Câu 16: Biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+1}=a+b\sqrt{2}$. Tính $a+b$ được kết quả đúng bằng:

A. 2. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 0.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\Rightarrow a=\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a+b=1$.

Câu 17: Tìm m để $A=3$ với $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+m}{x+2}$.

A. 6. **B.** 14. **C.** 3. **D.** $\dfrac{10}{3}$.

Lời giải

Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+m}{x+2}=\dfrac{3.2+m}{2+2}=\dfrac{6+m}{4}=3\Rightarrow m=6$.

Câu 18: Tìm m để $A=\dfrac{1}{2}$ với $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x+m}{mx-2}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** -10. **D.** $\dfrac{10}{3}$.

Lời giải

Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x+m}{mx-2}=\dfrac{4+m}{m-2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow m=-10$.

Câu 19: Tìm m để $A=7$ với $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x+m^2-1}{-x+2}$.

A. ± 2. **B.** 2. **C.** -2. **D.** $\dfrac{10}{3}$.

Lời giải

Ta có: $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x+m^2-1}{-x+2}=\dfrac{4+m^2-1}{-1+2}=3+m^2=7\Rightarrow m=\pm 2$.

DẠNG 2. DẠNG VÔ ĐỊNH $\dfrac{0}{0}$

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 20: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ là:

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}=\dfrac{12}{4}=3$

Câu 21: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x^3+1}$ là:

Lời giải

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^5+1}{x^3+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right)}{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{x^4-x^3+x^2-x+1}{x^2-x+1}=\frac{5}{3}.$$

Câu 22: Biết rằng $\lim_{x\to -\sqrt{3}}\frac{2x^3+6\sqrt{3}}{3-x^2}=a\sqrt{3}$. Tính a

Lời giải

Ta có $\lim_{x\to -\sqrt{3}}\frac{2x^3+3\sqrt{3}}{3-x^2}=\lim_{x\to -\sqrt{3}}\frac{2\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x^2-\sqrt{3}x+3\right)}{\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)}=\lim_{x\to -\sqrt{3}}\frac{2\left(x^2-\sqrt{3}x+3\right)}{\sqrt{3}-x}$

$$=\frac{2\left[\left(-\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{3}.\left(-\sqrt{3}\right)+3\right]}{\sqrt{3}-\left(-\sqrt{3}\right)}=\frac{18}{2\sqrt{3}}=3\sqrt{3}.$$

Câu 23: Tính $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ bằng:

Lời giải

Ta có: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$.

Câu 24: Tính giới hạn $I=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}$.

Lời giải

$$I=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-3)=-1.$$

Câu 25: Giới hạn $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ bằng

Lời giải

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{4}.$$

Câu 26: Tính $\lim_{x\to \sqrt{3}}\frac{2x^2-6}{x-\sqrt{3}}=a\sqrt{b}$ (a, b nguyên). Khi đó giá trị của $P=a+b$ bằng

Lời giải

Ta có $\lim_{x\to \sqrt{3}}\frac{2x^2-6}{x-\sqrt{3}}=\lim_{x\to \sqrt{3}}\frac{2\left(x^2-3\right)}{x-\sqrt{3}}=\lim_{x\to \sqrt{3}}2\left(x+\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3}$.

Suy ra $a=4$, $b=3$. Vậy $P=a+b=7$.

Câu 27: Biết $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3x+1}-1}{x}=\frac{a}{b}$, trong đó a, b là các số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị biểu thức $P=a^2+b^2$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+1-1}{x\left(\sqrt{3x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+1}=\dfrac{3}{2}$.

Do đó, $a=3$, $b=2$ .Vậy $P=a^2+b^2=13$.

Câu 28: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2+\pi^{21}\right)\sqrt[7]{1-2x}-\pi^{21}}{x}$ là:

Lời giải

Ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+\pi^{21}\right)\sqrt[7]{1-2x}-\pi^{21}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+\pi^{21}\right)\left(\sqrt[7]{1-2x}-1\right)}{x}+\lim_{x\to 0}x=-\frac{2\pi^{21}}{7}.$$

Câu 29: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}$ là:

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}+2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)}{(4x+4-8)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}+2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)}{4\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}=\frac{12}{12}=1.$$

Câu 30: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$ là:

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\sqrt{1+x}-2}{x}+\dfrac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}+1}+\frac{1}{4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}}\right)=1+\frac{1}{12}=\frac{13}{12}.$$

Câu 31: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ bằng

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\dfrac{1}{4}$.

Câu 32: $\lim\limits_{x\to 2^{2018}}\dfrac{x^2-4^{2018}}{x-2^{2018}}$ bằng

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^{2018}}\dfrac{x^2-4^{2018}}{x-2^{2018}}=\lim\limits_{x\to 2^{2018}}\dfrac{\left(x-2^{2018}\right)\left(x+2^{2018}\right)}{x-2^{2018}}=\lim\limits_{x\to 2^{2018}}\left(x+2^{2018}\right)=2^{2018}+2^{2018}=2^{2019}$.

Câu 33: Tính gới hạn $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sqrt{2-x}-1}$.

Lời giải

$L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sqrt{2-x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{-x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{2-x}+1\right)=2$.

Câu 34: Tính $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-12x+35}{25-5x}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-12x+35}{25-5x}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-7)(x-5)}{5(5-x)}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{7-x}{5}=\dfrac{2}{5}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-12x+35}{25-5x}=\dfrac{2}{5}$.

Câu 35: Cặp (a,b) thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3}=3$ là

Lời giải

Cách 1:

Để $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3}=3$ thì ta phải có $x^2+ax+b=(x-3)(x-m)$.

Khi đó $3-m=3\Leftrightarrow m=0$. Vậy $x^2+ax+b=(x-3)x=x^2-3x$.

Suy ra $a=-3$ và $b=0$.

Cách 2:

Ta có $\dfrac{x^2+ax+b}{x-3}=x+a+3+\dfrac{3a+b+9}{x-3}$.

Vậy để có $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3}=3$ thì ta phải có $\begin{cases}3a+b+9=0\\ a+6=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=0\end{cases}$.

Câu 36: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}-\sqrt{1-2x}}{x}$.

Lời giải

Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x^2-2x+1}-\sqrt{1-2x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x\left(\sqrt{4x^2-2x+1}+\sqrt{1-2x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\left(\sqrt{4x^2-2x+1}+\sqrt{1-2x}\right)}=0.$$

Câu 37: Cho a,b là số nguyên và $\lim\limits_{x\to 1}\frac{ax^2+bx-5}{x-1}=7$. Tính a^2+b^2+a+b.

Lời giải

Vì $\lim\limits_{x\to 1}\frac{ax^2+bx-5}{x-1}=7$ hữu hạn nên $x=1$ phải là nghiệm của phương trình $ax^2+bx-5=0$ suy ra $a+b-5=0\Rightarrow b=5-a$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to 1}\frac{ax^2+(5-a)x-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(ax+5)}{x-1}$ $= a+5=7\Rightarrow a=2$ nên $b=3$

Suy ra: $a^2+b^2+a+b=18$.

Câu 38: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+5}}{x-3}$.

Lời giải

Ta có

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+5}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}-\frac{\sqrt[3]{x+5}-2}{x-3}\right).$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x+1-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}-\frac{x+5-8}{(x-3)\left(\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+4\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}-\frac{1}{\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+4}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$$

Câu 39: Biết rằng $b>0, a+b=5$ và $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=2$. Tìm $a,b?$

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{ax+1}-1}{x}+\frac{1-\sqrt{1-bx}}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{ax}{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}+\frac{bx}{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a}{\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}+\frac{b}{\left(1+\sqrt{1-x}\right)}\right)=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=2.$$

Vậy ta được: $\begin{cases} a+b=5 \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ 2a+3b=12 \end{cases} \Leftrightarrow a=3,\ b=2 \longrightarrow$

Câu 40: Biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)}=\dfrac{a\sqrt{2}}{b}$ với a, $b\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a+b$ bằng:

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2+2-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{\sqrt{2}(x-1)}+\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)}=I+J.$

Tính $I=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{\sqrt{2}(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+2-4}{\sqrt{2}(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{\sqrt{2}(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{\sqrt{2}\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}=\dfrac{3}{4\sqrt{2}}.$

và $J=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{8-7x-1}{\sqrt{2}(x-1)\left[4+2\sqrt[3]{7x+1}+\left(\sqrt[3]{7x+1}\right)^2\right]}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-7}{\sqrt{2}\left[4+2\sqrt[3]{7x+1}+\left(\sqrt[3]{7x+1}\right)^2\right]}=\dfrac{-7}{12\sqrt{2}}.$

Do đó $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)}=I+J=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

Suy ra $a=1$, $b=12$, $c=0$. Vậy $a+b+c=13$.

Câu 41: Biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-ax+a-1}{x-1}=2$. Tính $M=a^2+2a$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-ax+a-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)-a(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+x+1-a\right)=3-a\Rightarrow a=1.$

Vậy $M=a^2+2a=3$.

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 42: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}$ bằng

A. không tồn tại. **B.** 0. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+1)(x-4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}(x+1)=5$.

Câu 43: Giá trị của $I=\lim\limits_{x\to -\sqrt{2}}\dfrac{x+\sqrt{2}}{x^2-2}$ bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

$I=\lim\limits_{x\to -\sqrt{2}}\dfrac{x+\sqrt{2}}{x^2-2}=\lim\limits_{x\to -\sqrt{2}}\dfrac{x+\sqrt{2}}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)}=\lim\limits_{x\to -\sqrt{2}}\dfrac{1}{x-\sqrt{2}}=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$.

Câu 44: Tính $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ bằng:

A. 3. **B.** 6. **C.** $+\infty$. **D.** -3.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\left(x+3\right)=6$.

Câu 45: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(x+2\right)=4$.

Câu 46: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-2x-5}{x^2-1}$ bằng

A. -3. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-2x-5}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(3x-5\right)\left(x+1\right)}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x-5}{x-1}=\dfrac{3.(-1)-5}{(-1)-1}=\dfrac{-8}{-2}=4$.

Câu 47: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-4}$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $-\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\left(2x-1\right)\left(x+2\right)}{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x-1}{x-2}=\dfrac{5}{4}$.

Câu 48: Tính giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$

A. $A=-\infty$. **B.** $A=0$. **C.** $A=3$. **D.** $A=+\infty$.

Lời giải

Ta có:

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right)=3.$$

Câu 49: Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$.

A. $L=-5$. **B.** $L=0$. **C.** $L=-3$. **D.** $L=5$.

Lời giải

Ta có: $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+4)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+4)=5$.

Câu 50: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-4}$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $-\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(2x-1)(x+2)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x-1}{x-2}=\dfrac{5}{4}$.

Câu 51: Tính giới hạn $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$

A. $A=-\infty$. **B.** $A=0$. **C.** $A=3$. **D.** $A=+\infty$.

Lời giải

Ta có:

$$A=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(x^2+x+1\right)=3.$$

Câu 52: Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$.

A. $L=-5$. **B.** $L=0$. **C.** $L=-3$. **D.** $L=5$.

Lời giải

Ta có: $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+4)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+4)=5$.

Câu 53: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-2x-5}{x^2-1}$ bằng

A. -3. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-2x-5}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(3x-5)(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x-5}{x-1}=\dfrac{3.(-1)-5}{(-1)-1}=\dfrac{-8}{-2}=4$.

Câu 54: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ có giá trị bằng

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$.

Câu 55: Biết rằng $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2x^3+6\sqrt{3}}{3-x^2}=a\sqrt{3}+b$. Tính a^2+b^2.

A. 9. **B.** 25. **C.** 5. **D.** 13.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2x^3+6\sqrt{3}}{3-x^2}=\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x^2-\sqrt{3}x+3\right)}{\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)}=\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2\left(x^2-\sqrt{3}x+3\right)}{\sqrt{3}-x}$

$=\dfrac{2\left[\left(-\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{3}.\left(-\sqrt{3}\right)+3\right]}{\sqrt{3}-\left(-\sqrt{3}\right)}=\dfrac{18}{2\sqrt{3}}=3\sqrt{3}\longrightarrow\begin{cases}a=3\\b=0\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2=9$.

Câu 56: Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}$.

A. $L=\dfrac{3}{2}$. **B.** $L=3$. **C.** $L=1$. **D.** $L=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(2x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$.

Câu 57: Giá trị của $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-3}{x-1}=\dfrac{-1-3}{-1-1}=2$.

Câu 58: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$ là

A. 1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải

Có $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-3)=2-3=-1$.

Câu 59: Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{3x^2+8x+5}$.

A. $L=-\dfrac{3}{2}$. **B.** $L=\dfrac{1}{2}$. **C.** $L=-\infty$. **D.** $L=0$.

Lời giải

$$L=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{3x^2+8x+5}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(3x+5)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{3x+5}=-\frac{3}{2}.$$

Câu 60: Biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=a$. Hỏi a không là nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

A. $x^2+x+1>0$. **B.** $-2x+1>0$. **C.** $x^2-5x+6<0$. **D.** $x^2-3x\ge 0$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=0\Rightarrow a=0$

Xét các bất phương trình

$x^2+x+1>0$ tập nghiệm là $\mathbb{R}$, loại phương án A.

$-2x+1>0\Leftrightarrow x<\dfrac{1}{2}$, loại phương án B.

$x^2-5x+6<0\Leftrightarrow 2<x<3$, nhận phương án C.

$x^2-3x\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le 0\\ x\ge 3\end{array}\right.$, loại phương án D.

Câu 61: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+2x-15}{x-3}$ bằng

A. $\dfrac{1}{8}$. **B.** 9. **C.** $+\infty$. **D.** 8.

Lời giải

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2+2x-15}{x-3}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-3)(x+5)}{x-3}=9.$$

Câu 62: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x}{x^2+3x+2}$ bằng

A. 0. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{x}{x+2}=-1.$$

Câu 63: Tìm $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x+2}$.

A. -1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x+1)=-1$.

Câu 64: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-2x-5}{x^2-1}$ bằng

A. 3. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-2x-5}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(3x-5)(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x-5}{x-1}=4$.

Câu 65: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ ta được kết quả là

A. $+\infty$. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$.

Câu 66: Tìm $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{x^2-4x+3}$. Kết quả là

A. -3. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(-x-3)}{(x-3)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-x-3}{x-1}=-3$.

Câu 67: Tìm $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$. Kết quả là

A. 7. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}(x+4)=8$.

Câu 68: Chọn kết quả đúng trong các kết quả sau của $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{2x+2}$ là?

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{2x+2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)^2}{2(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{2}=0$.

Câu 69: Kết quả $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ là

A. -1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-2)=-1.$

Câu 70: Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-3)}{1-x^2}$.

A. 0. **B.** -1. **C.** 1. **D.** -2.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-3)}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-3)}{(1-x)(1+x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(x-3)}{(1+x)}=1.$

Câu 71: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+x}$ bằng

A. -3. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x+1}{x}=\dfrac{3}{-1}=-3.$

Vậy $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+x}=-3.$

Câu 72: $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-12x+35}{25-5x}$ bằng

A. $-\dfrac{2}{5}$. **B.** $+\infty$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-12x+35}{25-5x}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-7)(x-5)}{-5(x-5)}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-7}{-5}=\dfrac{2}{5}.$

Câu 73: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** $+\infty$. **D.** -3.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=6.$

Câu 74: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Lời giải

$A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3.$

Câu 75: Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+2)=3$.

Câu 76: Biết rằng $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2x^3+6\sqrt{3}}{3-x^2}=a\sqrt{b}$ với a, b là các số nguyên. Tính $a+b$.

A. 10. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2x^3+6\sqrt{3}}{3-x^2}=\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2(x^3+3\sqrt{3})}{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}=\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2(x^2-\sqrt{3}x+3)}{\sqrt{3}-x}=3\sqrt{3}$.

Suy ra $a=b=3\Rightarrow a+b=6$.

Câu 77: Kết quả của $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2017(x^2-4)}{2|x-2|}$ bằng

A. 4034. **B.** -4034. **C.** $\dfrac{80683}{20}$. **D.** $-\dfrac{80683}{20}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2017(x^2-4)}{2|x-2|}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2017(x-2)(x+2)}{2(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2017(x+2)}{2}=4034$

Câu 78: Giới hạn của $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4-4x^3}{5x^3}$ bằng:

A. 0. **B.** -4. **C.** $\dfrac{-3}{5}$. **D.** $\dfrac{-4}{5}$.

Lời giải

Cách 1: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4-4x^3}{5x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3(x-4)}{5x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-4)}{5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(0-4)}{5}=\dfrac{-4}{5}$.

Cách 2: Bấm máy tính như sau: $\dfrac{x^4-4x^3}{5x^3}$ + CACL + $x=0+10^{-9}$ và so đáp án.

Cách 3: Dùng chức lim của máy VNCALL 570VN Plus: $\lim\dfrac{x^4-4x^3}{5x^3}\Big|_{x\to 0+10^{-9}}$ và so đáp án.

Câu 79: Tìm $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$.

A. $+\infty$. **B.** -2. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x+3)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x+3)=1.$

Câu 80: Tính $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$

A. $\dfrac{1}{2}.$ **B.** $\dfrac{2}{5}.$ **C.** $\dfrac{1}{3}.$ **D.** $\dfrac{1}{5}.$

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{2}{5}.$

Câu 81: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{3x^2-4x+1}.$ **B.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x+3}{x+5}.$ **C.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ **D.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right).$

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{3x^2-4x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{3x-1}=\dfrac{2}{2}=1$

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x+3}{x+5}=\dfrac{-5}{3}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x^2+x+1}=\dfrac{2}{3}$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.$

Câu 82: Tính $I=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-3x+2}.$

A. $I=-12.$ **B.** $I=12.$ **C.** $I=-8.$ **D.** $I=8.$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-1)(x-2)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x+4}{x-1}=\dfrac{2^2+2.2+4}{2-1}=12$

Câu 83: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1}$ bằng:

A. $\dfrac{1}{3}.$ **B.** $-\dfrac{1}{3}.$ **C.** $0.$ **D.** $-\dfrac{2}{3}.$

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x^2+x+1}=-\dfrac{1}{3}.$

Câu 84: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+4x}$ bằng

A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $-\dfrac{5}{4}$. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

$$\lim_{x\to -4}\frac{x^2+3x-4}{x^2+4x}=\lim_{x\to -4}\frac{(x+4)(x-1)}{x(x+4)}=\lim_{x\to -4}\frac{x-1}{x}=\frac{-4-1}{-4}=\frac{5}{4}.$$

Câu 85: Tìm $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x-2}$.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Ta có. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2x-1)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=3$.

Câu 86: Với a là số thực khác 0, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^2-a^2}$ bằng

A. $a-1$. **B.** $a+1$. **C.** $\dfrac{a-1}{2a}$. **D.** $\dfrac{a+1}{2a}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^2-a^2}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-1)(x-a)}{(x+a)(x-a)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-1}{x+a}=\dfrac{a-1}{2a}$.

Câu 87: Giá trị $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** -2.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}(x-1)=-2$.

Câu 88: Biết $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2+2x-3}=\dfrac{a}{b}$, $a,b\in\mathbb{Z};\ b\neq 0$. Giá trị nhỏ nhất của $a.b$ bằng

A. -10. **B.** 10. **C.** -15. **D.** 7.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+5}{x-1}=\dfrac{7}{1}=\dfrac{14}{2}=7$.

Do đó, giá trị nhỏ nhất của $a.b$ bằng 7.

Câu 89: Biết $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)}\dfrac{2x^2-5x-3}{2x^2+11x+5}=-\dfrac{a}{b}$, $a,b\in\mathbb{Z};\ b\neq 0$. Giá trị nhỏ nhất của $a.b$ bằng

A. 63. **B.** 16. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)}\dfrac{2x^2-5x-3}{2x^2+11x+5}=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)}\dfrac{(2x+1)(x-3)}{(2x+1)(x+5)}=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)}\dfrac{x-3}{x+5}=-\dfrac{7}{9}=-\dfrac{14}{18}=-\dfrac{7}{9}$.

Do đó, giá trị nhỏ nhất của $a.b$ bằng 63.

Câu 90: Cho $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\left(\sqrt{3x+1}-1\right)}{x}$ và $J=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$. Tính $I-J$.

A. 6. **B.** 3. **C.** -6. **D.** 0.

Lời giải

Ta có

$$I=\lim_{x\to0}\frac{2\left(\sqrt{3x+1}-1\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{6x}{x\left(\sqrt{3x+1}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{6}{\sqrt{3x+1}+1}=3.$$

$$J=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x-2}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-2)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x-2)=-3.$$

Khi đó $I-J=6$.

Câu 91: Tính giới hạn $A=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

A. $A=-\infty$. **B.** $A=0$. **C.** $A=3$. **D.** $A=+\infty$.

Lời giải

$$A=\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left(x^2+x+1\right)=3.$$

Câu 92: Tính $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-12x+35}{25-5x}$.

A. $-\dfrac{2}{5}$. **B.** $+\infty$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-12x+35}{25-5x}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{(x-7)(x-5)}{-5(x-5)}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x-7}{-5}=\dfrac{2}{5}$.

Câu 93: Tính $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{2x^2-6}{x-\sqrt{3}}=a\sqrt{b}$ (a, b nguyên). Khi đó giá trị của $P=a+b$ bằng

A. 7. **B.** 10. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{2x^2-6}{x-\sqrt{3}}=\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{2\left(x^2-3\right)}{x-\sqrt{3}}=\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}2\left(x+\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3}$.

Suy ra $a=4$, $b=3$. Vậy $P=a+b=7$.

Câu 94: Tính giới hạn $I=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$.

A. $I=-1$. **B.** $I=0$. **C.** $I=1$. **D.** $I=5$.

Lời giải

$$I=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-3)=-1.$$

Câu 95: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}-\sqrt{1-2x}}{x}$.

A. 2. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 0.

Lời giải

Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4x^2-2x+1}-\sqrt{1-2x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x\left(\sqrt{4x^2-2x+1}+\sqrt{1-2x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\left(\sqrt{4x^2-2x+1}+\sqrt{1-2x}\right)}=0.$$

Câu 96: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{2x^3+2}$.

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{2x^3+2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)^2}{2(x+1)(x^2-x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{2(x^2-x+1)}=0$.

Câu 97: Cho $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(\sqrt{3x+1}-1\right)}{x}$ và $J=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x+1}$. Tính $I-J$.

A. 6. **B.** 3. **C.** -6. **D.** 0.

Lời giải

Ta có

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sqrt{3x+1}-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{x\left(\sqrt{3x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{6}{\sqrt{3x+1}+1}=3.$$

$$J=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x-2)=-3.$$

Khi đó $I-J=6$.

Câu 98: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ bằng

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1-x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x-1}{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{\sqrt{1-x}+1}=\dfrac{-1}{2}$.

Câu 99: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{\sqrt{2x+5}-1}$ *bằng*

A. -3. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** -6. **D.** 8.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{\sqrt{2x+5}-1}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\left(x^2-2x-8\right)\left(\sqrt{2x+5}+1\right)}{\left(\sqrt{2x+5}-1\right)\left(\sqrt{2x+5}+1\right)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x-4)\left(\sqrt{2x+5}+1\right)}{2(x+2)}$

$=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-4)\left(\sqrt{2x+5}+1\right)}{2}=\dfrac{-6.(1+1)}{2}=-6$.

Vậy $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{\sqrt{2x+5}-1}=-6$.

Câu 100: Tính giới hạn $K=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x^2-3x}$.

A. $K=-\dfrac{2}{3}$. **B.** $K=\dfrac{2}{3}$. **C.** $K=\dfrac{4}{3}$. **D.** $K=0$.

Lời giải

Ta có: $K=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{x(x-3)\left(\sqrt{4x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{(x-3)\left(\sqrt{4x+1}+1\right)}=-\dfrac{2}{3}$.

Câu 101: Tính giới hạn $K=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x^2-3x}$.

A. $K=-\dfrac{2}{3}$. **B.** $K=\dfrac{2}{3}$. **C.** $K=\dfrac{4}{3}$. **D.** $K=0$.

Lời giải

Ta có: $K=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{x(x-3)\left(\sqrt{4x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{(x-3)\left(\sqrt{4x+1}+1\right)}=-\dfrac{2}{3}$.

Câu 102: Giá trị $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{4}$.

Câu 103: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** 2.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}=\lim\limits_{x\to 6}\frac{x-6}{(x-6)\left(\sqrt{x-2}+2\right)}=\frac{1}{4}$

Câu 104: Cho hàm số $f(x)=\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2}$. Tính $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

A. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=-\frac{2}{3}$. **B.** $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=-\frac{3}{2}$. **C.** $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\frac{2}{3}$. **D.** $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\frac{3}{2}$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{4(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{4}{\sqrt{4x+1}+3}=\frac{2}{3}$

Câu 105: Tìm $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2+x-2}$.

A. -5. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{(x-1)(x+2)\left(x+\sqrt{2x-1}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{(x+2)\left(x+\sqrt{2x-1}\right)}=0$.

Câu 106: Tìm $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x+1}-3}$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** $-\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x+1}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{4(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-3)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{4}=-\frac{3}{2}$.

Câu 107: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** 2. **C.** 1 **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\frac{1}{4}.$$

Câu 108: Tính $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}$.

A. $-\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{\sqrt{x^2+x+2}+2}=\frac{3}{4}.$

Câu 109: Giới hạn $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5x+3}-\sqrt{3}}{x}=\frac{m}{n\sqrt{k}}(m,n,k\in Z)$. Tính $m-n+k$?

A. 6. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 0

Lời giải

Có $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5x+3}-\sqrt{3}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{x(\sqrt{5x+3}+\sqrt{3})}=\frac{5}{2\sqrt{3}}\Rightarrow m=5;n=2;k=3$.

Câu 110: Tính $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{x+1}}{3x}$ bằng ?

A. $-\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 0. **D.** $-\frac{1}{9}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{x+1}}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{3x\left[1+\sqrt[3]{x+1}+\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{3\left[1+\sqrt[3]{x+1}+\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2\right]}=-\frac{1}{9}.$$

Câu 111: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ bằng?

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1-x}+1}=-\frac{1}{2}$

Câu 112: Tính $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{x^2-1}$.

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $-\frac{1}{4}$. **C.** $-\frac{1}{8}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{5-x-4}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{(x+1)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}=-\frac{1}{8}$$

Câu 113: Tính $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{x^2-1}$

A. $\dfrac{1}{8}$. **B.** $-\dfrac{1}{4}$. **C.** $-\dfrac{1}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{5+x}-2}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{5+x}-2\right)\left(\sqrt{5+x}+2\right)}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{5+x}+2\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{5+x}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x-1)\left(\sqrt{5+x}+2\right)}=-\frac{1}{8}.$$

Câu 114: Biết $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{2x+1}-1}=\dfrac{a}{b}$. Khẳng định nào sao đây là **đúng**?

A. $a+b=3$. **B.** $a+b=-3$. **C.** $a+b=2$. **D.** $a+b=1$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{2x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\left(\sqrt{2x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}{2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}+1}{2\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

Suy ra $a=1;\ b=2$. Vậy $a+b=3$.

Câu 115: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{2x-1}-1}=\dfrac{a}{b}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a+b=-5$ **B.** $a+b=2$ **C.** $a+b=1$ **D.** $a+b=5$

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{2x-1}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}{\left(\sqrt{2x-1}-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}$.

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}{(2x-2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{2x-1}+1\right)}{2\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\frac{1}{4}.$$

Do đó: $a=1;\ b=4$.

Vậy $a+b=5$.

Câu 116: Cho $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}=\dfrac{a}{b}$, trong đó a, b là các số nguyên dương và phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị biểu thức $P=1984a^2+4b^2$.

A. 0. **B.** 2000. **C.** 8000. **D.** 2020.

Lời giải

Ta có:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(2x+5)-9}{(x-2)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{2}{\sqrt{2x+5}+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

$\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$. Vậy $P=1984.1^2+4.3^2=2020$.

Câu 117: Biết $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+1}-1}{x}=\dfrac{a}{b}$, trong đó a, b là các số nguyên dương và phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị biểu thức $P=a^2+b^2$.

A. $P=13$. **B.** $P=0$. **C.** $P=5$. **D.** $P=40$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+1-1}{x\left(\sqrt{3x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+1}=\dfrac{3}{2}$.

Do đó, $a=3$, $b=2$. Vậy $P=a^2+b^2=13$.

Câu 118: Số nào trong các số sau là bằng $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-2\sqrt{3}}{x-3}$?

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$. **B.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$. **D.** $-\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-2\sqrt{3}}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{(x-3)\left(\sqrt{x^2+x}+2\sqrt{3}\right)}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)\left(\sqrt{x^2+x}+2\sqrt{3}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+4}{\sqrt{x^2+x}+2\sqrt{3}}=\frac{3+4}{\sqrt{3^2+3}+2\sqrt{3}}=\frac{7}{4\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{12}.$$

Câu 119: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-x^2-x-2}$ bằng

A. 0. **B.** $-\dfrac{1}{7}$. **C.** -7. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x^2+x+1}=\dfrac{-1}{7}$.

Câu 120: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-x^2+x-1}$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-x^2+x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{x^2+1}=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 121: Tính giới hạn sau $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}\right)$.

A. 6. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 10.

Lời giải:

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(\dfrac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{(2x-1)(3x-1)}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(\dfrac{4x^2+2x+1}{3x-1}\right)=6$.

Câu 122: Tìm $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x^2+2}{x^3+2x-3}$.

A. $-\dfrac{5}{2}$. **B.** $-\dfrac{2}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x^2+2}{x^3+2x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)(x^2-2)}{(x-1)(x^2+x+3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(x^2-2)}{x^2+x+3}=-\dfrac{2}{5}$.

Câu 123: Giới hạn $T=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^3+2x-3}$ bằng

A. $\dfrac{2}{9}$. **B.** $\dfrac{2}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

$T=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^3+2x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^3+x^2+x-2)}{(x-1)(x^2+x+3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2+x-2}{x^2+x+3}=\dfrac{1^3+1^2+1-2}{1^2+1+3}=\dfrac{1}{5}$.

Câu 124: Tính $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)$.

A. 2. **B.** $+\infty$. **C.** -2. **D.** 0.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-8x+8}{(x^2-3x+2)(x^2-5x+6)}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)^2}{(x-1)(x-2)(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{2}{(x-1)(x-3)}=-2.$$

Câu 125: Cho a thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-(a^2-1)x+a^2-2}{x-1}=-1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a<-2$. **B.** $a<3$. **C.** $a>1$. **D.** $a>0$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-(a^2-1)x+a^2-2}{x-1}=-1\Leftrightarrow\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x-(a^2-2)x+a^2-2}{x-1}=-1$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)-(a^2-2)(x-1)}{x-1}=-1\Leftrightarrow\lim_{x\to 1}(x-a^2+2)=-1.$$

$$\Leftrightarrow 1-a^2+2=-1\Leftrightarrow a^2=4\Leftrightarrow a=\pm 2.$$

Vậy $a<3$.

Câu 126: Có bao nhiêu giá trị $a>0$ sao $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-(1+a^2)x+a}{x^3-a^3}=\dfrac{1}{3}$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Có $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-(1+a^2)x+a}{x^3-a^3}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x(x^2-a^2)-(x-a)}{x^3-a^3}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x(x+a)-1}{x^2+ax+a^2}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow a=\pm 1.$

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy có 2 giá trị của a

Câu 127: Cho a và b là các số thực thỏa mãn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+ax+b}{x+1}=3$. Tính $a+b$

A. 9. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to -1}(x+1)=0$ và $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+ax+b}{x+1}=3$ nên $\lim\limits_{x\to -1}(x^2+ax+b)=0.$

Từ đó ta có $1-a+b=0\Rightarrow b=a-1$ và $x^2+ax+b=(x+1)(x+a-1))$

Khi đó $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+ax+b}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x+a-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}(x+a-1)=a-2.$

Suy ra $a-2=3\Leftrightarrow a=5,\ b=4.$

Vậy $a+b=9$

Câu 128: Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-(a+2)x+a+1}{x^3-1}$.

A. $\dfrac{2-a}{3}$ **B.** $\dfrac{-2-a}{3}$ **C.** $\dfrac{-a}{3}$ **D.** $\dfrac{a}{3}$

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-(a+2)x+a+1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2-a(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1-a}{x^2+x+1}\right)=\dfrac{-a}{3}$

Câu 129: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3a^2}-2a}{x-a}+a$,. Tính $\lim\limits_{x\to a}f(x)$.

A. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\dfrac{2a-1}{2}$. **B.** $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\dfrac{2a+1}{2}$. **C.** $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\dfrac{2}{2a+1}$. **D.** $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\dfrac{2}{2a-1}$.

Lời giải:

Ta có $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sqrt{x^2+3a^2}-2a}{x-a}+a\right)=\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{x^2-a^2}{(x-a)\left(\sqrt{x^2+3a^2}+2a\right)}+a\right]$

$=\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+3a^2}+2a}+a\right)=a+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2a+1}{2}$.

Câu 130: Tìm $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-(1+a^2)x+a}{x^3-a^3}$.

A. $\dfrac{2a^2}{a^2+3}$. **B.** $\dfrac{2a^2-1}{3a^2}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{2a^2-1}{3}$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-(1+a^2)x+a}{x^3-a^3}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-a^2x-x+a}{(x-a)(x^2+ax+a^2)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x(x+a)-1}{x^2+ax+a^2}=\dfrac{2a^2-1}{3a^2}$.

Câu 131: Cho $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-1}=\dfrac{-1}{2};(a,b\in\mathbb{R})$. Tổng $S=a^2+b^2$ bằng

A. $S=4$. **B.** $S=1$. **C.** $S=13$. **D.** $S=9$.

Lời giải

Do $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-1}=\dfrac{-1}{2};(a,b\in\mathbb{R})$ nên phương trình $x^2+ax+b=0$ có một nghiệm $x=1$.

Khi đó: $a+b+1=0$ nên $x^2+ax-a-1=(x-1).(x+a+1)$.

Suy ra: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+a+1}{x+1}=\dfrac{a+2}{2}$.

Mà $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-1}=\dfrac{-1}{2};(a,b\in\mathbb{R})$ nên $\dfrac{a+2}{2}=\dfrac{-1}{2}\Leftrightarrow a=-3$.

$\Rightarrow b=-a-1=2$.

Vậy $S=a^2+b^2=13$.

Câu 132: Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+(3a+2)x-3a-3}{x-1}$.

A. $4-3a$. **B.** $3a+4$. **C.** $3a-4$. **D.** $3a$

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+(3a+2)x-3a-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+3a+3)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+3a+3)=3a+4$.

Câu 133: *Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn $a+b=8$ và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2ax+1}-\sqrt{bx+1}}{x}=5$*

Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng?

A. $a\in(2;4)$. **B.** $a\in(3;8)$. **C.** $b\in(3;5)$. **D.** $b\in(4;9)$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2ax+1}-\sqrt{bx+1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+2ax+1)-(bx+1)}{x.\left(\sqrt{x^2+2ax+1}+\sqrt{bx+1}\right)}$.

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+(2a-b)x}{x.\left(\sqrt{x^2+2ax+1}+\sqrt{bx+1}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+(2a-b)}{\sqrt{x^2+2ax+1}+\sqrt{bx+1}}=\dfrac{2a-b}{2}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2ax+1}-\sqrt{bx+1}}{x}=5\Leftrightarrow\dfrac{2a-b}{2}=5\Leftrightarrow 2a-b=10$.

Từ đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases}a+b=8\\2a-b=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\b=2\end{cases}$.

Vậy $a\in(3;8)$.

Câu 134: *Giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}$ bằng $\dfrac{a}{b}$. Giá trị thực của $a-b$ là*

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{9}$. **C.** -1. **D.** $\dfrac{9}{8}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left[(x+1)^2-(5x+1)\right]\left[x+\sqrt{4x-3}\right]}{\left[x^2-4x+3\right]\left[x+1+\sqrt{5x+1}\right]}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left[x^2-3x\right]\left[x+\sqrt{4x-3}\right]}{\left[x^2-4x+3\right]\left[x+1+\sqrt{5x+1}\right]}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x\left(x+\sqrt{4x-3}\right)}{(x-1)\left(x+1+\sqrt{5x+1}\right)}=\dfrac{9}{8}$.

Do đó $a=9;b=8$ nên $a-b=1$.

Câu 135: *Tính giới hạn* $L=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2x^2+x+3}-3}{4-x^2}$.

A. $L=-\frac{2}{7}$. **B.** $L=-\frac{7}{24}$. **C.** $L=-\frac{9}{31}$. **D.** $L=0$.

Lời giải

Ta có $L=\lim\limits_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt{2x^2+x+3}-3\right)\left(\sqrt{2x^2+x+3}+3\right)}{-\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{2x^2+x+3}+3\right)}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2+x-6}{-\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{2x^2+x+3}+3\right)}$

$=\lim\limits_{x\to -2}\frac{(2x-3)(x+2)}{-(x-2)(x+2)\left(\sqrt{2x^2+x+3}+3\right)}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{3-2x}{(x-2)\left(\sqrt{2x^2+x+3}+3\right)}=-\frac{7}{24}$.

Câu 136: *Tính giới hạn* $L=\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{2x^2+x+3}-3}{4-x^2}$.

A. $L=-\frac{2}{7}$. **B.** $L=-\frac{7}{24}$. **C.** $L=-\frac{9}{31}$. **D.** $L=0$.

Lời giải

Ta có $L=\lim\limits_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt{2x^2+x+3}-3\right)\left(\sqrt{2x^2+x+3}+3\right)}{-\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{2x^2+x+3}+3\right)}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2+x-6}{-\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{2x^2+x+3}+3\right)}$

$=\lim\limits_{x\to -2}\frac{(2x-3)(x+2)}{-(x-2)(x+2)\left(\sqrt{2x^2+x+3}+3\right)}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{3-2x}{(x-2)\left(\sqrt{2x^2+x+3}+3\right)}=-\frac{7}{24}$.

Câu 137: Biết rằng $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}=\frac{a}{b}$. Tính $a-b$

A. 25. **B.** 1. **C.** -1. **D.** $-\frac{13}{12}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\sqrt{1+x}-2}{x}+\frac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}+1}+\frac{1}{4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}}\right)=1+\frac{1}{12}=\frac{13}{12}$.

Suy ra: $\frac{a}{b}=\frac{13}{12}\Rightarrow a-b=1$.

Câu 138: Cho $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt[3]{3x+5}}{x^2-3x+2}\right)=\frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, a, b là số nguyên). Tính tổng $P=a^2+b^2$.

A. $P=5$. **B.** $P=3$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-2$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt[3]{3x+5}}{x^2-3x+2}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^2-3x+2}+\frac{2-\sqrt[3]{3x+5}}{x^2-3x+2}\right)$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{x^2+x-2}{\left(x^2-3x+2\right)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}+\frac{3-3x}{\left(x^2-3x+2\right)\left[4+2\sqrt[3]{3x+5}+\left(\sqrt[3]{3x+5}\right)^2\right]}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}+\frac{-3(x-1)}{(x-1)(x-2)\left[4+2\sqrt[3]{3x+5}+\left(\sqrt[3]{3x+5}\right)^2\right]}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{x+2}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}+\frac{-3}{(x-2)\left[4+2\sqrt[3]{3x+5}+\left(\sqrt[3]{3x+5}\right)^2\right]}\right\}$$

$$=\frac{-3}{4}+\frac{3}{12}=\frac{-1}{2}.$$

Theo giả thiết ta có $-\frac{1}{2}=\frac{a}{b}$.

Vì $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, a, b là số nguyên $\Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow P=a^2+b^2=5$.

Câu 139: Cho $f(x)$ là đa thức thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-20}{x-2}=10$. Tìm $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{6f(x)+5}-5}{x^2+x-6}$.

A. $T=\frac{4}{15}$. **B.** $T=\frac{12}{25}$. **C.** $T=\frac{6}{25}$. **D.** $T=\frac{4}{25}$.

Lời giải

Vì $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-20}{x-2}=10$ nên $f(x)\to 20$ khi $x\to 2$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{6f(x)+5}-5}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{6f(x)+5-125}{(x-2)(x+3)\left[\sqrt[3]{\left(6f(x)+5\right)^2}+5.\sqrt[3]{6f(x)+5}+25\right]}$

$$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{f(x)-20}{x-2}.\frac{6}{(x+3)\left[\sqrt[3]{\left(6f(x)+5\right)^2}+5.\sqrt[3]{6f(x)+5}+25\right]}\right]$$

$$=10.\frac{6}{5.\left[\sqrt[3]{(6.+5)20^2}+5.\sqrt[3]{6.20+5}+25\right]}=\frac{4}{25}.$$

Câu 140: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}$ bằng

A. 0. **B.** -1. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1-x^2-x-1}{x\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{0}{2}=0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}=0$.

Câu 141: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$ là:

A. $\dfrac{13}{12}$. **B.** $-\dfrac{13}{12}$. **C.** $\dfrac{11}{12}$. **D.** $\dfrac{5}{6}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sqrt{1+x}-2}{x}+\frac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2x}{x.\left(\sqrt{x+1}+1\right)}+\frac{x}{x\left(4+2\sqrt[3]{8-x}+\left(\sqrt[3]{8-x}\right)^2\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{\sqrt{x+1}+1}+\frac{1}{4+2\sqrt[3]{8-x}+\left(\sqrt[3]{8-x}\right)^2}\right]$$

$$=1+\frac{1}{12}=\frac{13}{12}.$$

Câu 142: Biết rằng $b>0, a+b=5$ và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=2$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $a^2+b^2>10$. **B.** $a^2-b^2>6$. **C.** $a-b\ge 0$. **D.** $1\le a\le 3$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{ax+1}-1}{x}+\frac{1-\sqrt{1-bx}}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a}{\sqrt[3]{(ax+1)^2}+\sqrt[3]{ax+1}+1}+\frac{b}{1+\sqrt{bx+1}}\right)$$

$$=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}.$$

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases}\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}=2\\ a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=13\\ b=-8\end{cases}$.

Đối chiếu với các đáp án thì **D** là khẳng định **sai.**

Câu 143: Biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x^2+2}-\sqrt{4+x}}{x^2-1}=\dfrac{\sqrt{a}}{b}$,. Tính $P=a-b$

A. $P=5$. **B.** $P=1$. **C.** $P=2$. **D.** $P=3$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x^2+2}-\sqrt{4+x}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x^2+2}-\sqrt{4+x}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x^2+2}-\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{4+x}}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{3x^2+2}-\sqrt{5}}{x^2-1}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{4+x}}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{3\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{3x^2+2}+\sqrt{5}\right)}+\frac{1-x}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{4+x}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{\sqrt{3x^2+2}+\sqrt{5}}-\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{5}+\sqrt{4+x}\right)}\right)=\frac{\sqrt{5}}{4}\Rightarrow a=5,\ b=4 \text{ nên } P=1.$$

Câu 144: Biết $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{8-x}}{x}=\dfrac{a}{b}$. Giá trị của $b-a$ bằng

A. -1. **B.** $\dfrac{13}{12}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{12}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{8-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(\sqrt{x+1}-1\right)+\left(2-\sqrt[3]{8-x}\right)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)x}+\lim_{x\to 0}\frac{\left(2-\sqrt[3]{8-x}\right)\left(4+2\sqrt[3]{8-x}+\left(\sqrt[3]{8-x}\right)^2\right)}{x\left(4+2\sqrt[3]{8-x}+\left(\sqrt[3]{8-x}\right)^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)}+\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(4+2\sqrt[3]{8-x}+\left(\sqrt[3]{8-x}\right)^2\right)}=1+\frac{1}{12}=\frac{13}{12}.$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=13\\b=12\end{cases}\Rightarrow b-a=-1.$$

Vậy $b-a=-1$.

Câu 145: Biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2-\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+3}+x-3}=\dfrac{a}{b}$. Giá trị của $3a+2b$ bằng

A. 12. **B.** 13. **C.** 10. **D.** 5.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2-\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+3}+x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left[(x+2)^2-(x+8)\right]\left[\sqrt{x+3}-(x-3)\right]}{\left[(x+3)-(x-3)^2\right]\left[x+2+\sqrt{x+8}\right]}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2+3x-4\right)\left[\sqrt{x+3}-(x-3)\right]}{\left(-x^2+7x-6\right)\left[x+2+\sqrt{x+8}\right]}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+4)\left[\sqrt{x+3}-(x-3)\right]}{(x-1)(6-x)\left[x+2+\sqrt{x+8}\right]}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+4)\left[\sqrt{x+3}-(x-3)\right]}{(6-x)\left[x+2+\sqrt{x+8}\right]}=\frac{5.4}{5.6}=\frac{2}{3}.$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}\Rightarrow 3a+2b=12.$$

Vậy $3a+2b=12$.

Câu 146: Biết $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}=\dfrac{a}{b}$. Giá trị của $a-b$ bằng

A. $\dfrac{1}{9}$. **B.** $\dfrac{9}{8}$. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left[(x+1)^2-(5x+1)\right]\left[x+\sqrt{4x-3}\right]}{\left[x^2-(4x-3)\right]\left[x+1+\sqrt{5x+1}\right]}$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left(x^2-3x\right)\left[x+\sqrt{4x-3}\right]}{\left(x^2-4x+3\right)\left[x+1+\sqrt{5x+1}\right]}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)\left[x+\sqrt{4x-3}\right]}{(x-1)(x-3)\left[x+1+\sqrt{5x+1}\right]}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x\left[x+\sqrt{4x-3}\right]}{(x-1)\left[x+1+\sqrt{5x+1}\right]}=\frac{3.6}{2.8}=\frac{9}{8}.$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=9\\b=8\end{cases}\Rightarrow a-b=1.$$

Vậy $a-b=1$.

Câu 147: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x^2+x+2}}{x-1}$.

A. $\dfrac{1}{12}$ **B.** $+\infty$ **C.** $-\dfrac{3}{2}$ **D.** $-\dfrac{2}{3}$

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x^2+x+2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}+\dfrac{2-\sqrt{x^2+x+2}}{x-1}\right)$

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{x-1}{x-1}.\frac{1}{\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4}+\frac{2-x^2-x}{(x-1)\left(2+\sqrt{x^2+x+2}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4}-\frac{x+2}{2+\sqrt{x^2+x+2}}\right]=-\frac{2}{3}$$

Câu 148: Cho $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt[7]{x+1}.\sqrt{x+4}-2}\right)=\frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính tổng $L=a+b$.

A. $L=43$. **B.** $L=23$. **C.** $L=13$. **D.** $L=53$.

Lời giải

Đặt $L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt[7]{x+1}.\sqrt{x+4}-2}\right)=\frac{a}{b}$ thì $\frac{1}{L}=\lim\left(\frac{\sqrt[7]{x+1}.\sqrt{x+4}-2}{x}\right)=\frac{b}{a}$.

Ta có

$$\frac{b}{a}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[7]{x+1}.\sqrt{x+4}-\sqrt{x+4}+\sqrt{x+4}-2}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[7]{x+1}.\sqrt{x+4}-\sqrt{x+4}}{x}\right)+\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\right)$$

Xét $L_1=\lim_{x\to 0}\left(\frac{.\sqrt{x+4}\left(\sqrt[7]{x+1}-1\right)}{x}\right)$.Đặt $t=\sqrt[7]{x+1}$.Khi đó: $\begin{cases}x=t^7-1\\ x\to 0\Rightarrow t\to 1\end{cases}$

$$L_1=\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt{t^7+3}(t-1)}{t^7-1}=\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt{t^7+3}}{\left(t^6+t^5+t^4+t^3+t^2+t+1\right)}=\frac{2}{7}$$

Xét $L_2=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}$

Vậy $\frac{b}{a}=\frac{2}{7}+\frac{1}{4}=\frac{15}{28}\Rightarrow a=28,b=15\Rightarrow a+b=43\Rightarrow a+b=43$.

Câu 149: Biết $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)}=\frac{a\sqrt{2}}{b}+c$ với a, b, $c\in\mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a+b+c$ bằng:

A. 5. **B.** 37. **C.** 13. **D.** 51.

Lời giải

Ta có $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2+2-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{\sqrt{2}(x-1)}+\lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)}=I+J.$$

Tính $I=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{\sqrt{2}(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+2-4}{\sqrt{2}(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{\sqrt{2}(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{\sqrt{2}\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}=\frac{3}{4\sqrt{2}}.$$

và $J=\lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{8-7x-1}{\sqrt{2}(x-1)\left[4+2\sqrt[3]{7x+1}+\left(\sqrt[3]{7x+1}\right)^2\right]}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-7}{\sqrt{2}\left[4+2\sqrt[3]{7x+1}+\left(\sqrt[3]{7x+1}\right)^2\right]}=\frac{-7}{12\sqrt{2}}.$$

Do đó $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)}=I+J=\frac{\sqrt{2}}{12}$

Suy ra $a=1$, $b=12$, $c=0$. Vậy $a+b+c=13$.

Câu 150: Tính $\lim_{x\to 4}\frac{2^{2018}-x^{1009}}{4-x}$, kết quả bằng

A. $+\infty$. **B.** 1009.2^{2016}. **C.** 1009.2^{2018}. **D.** 1009.4^{2018}.

Lời giải

Ta có

$$\lim_{x\to 4}\frac{2^{2018}-x^{1009}}{4-x}=\lim_{x\to 4}\frac{4^{1009}-x^{1009}}{4-x}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(4^{1008}+4^{1007}.x+4^{1006}.x^2+...+4.x^{1007}+x^{1008}\right)}{4-x}$$

$$=\lim_{x\to 4}\left(4^{1008}+4^{1007}.x+4^{1006}.x^2+...+4.x^{1007}+x^{1008}\right)=1009.4^{1008}=1009.2^{2016}.$$

Câu 151: Tính giới hạn $\lim_{x\to 1}\frac{x^m-x^n}{x-1}\left(m;n\in N^*\right)$ ta được kết quả bằng

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** m. **D.** $m-n$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-x^n}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^m-1}{x-1}-\frac{x^n-1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\left(x^{m-1}+x^{m-2}+...+1\right)-\left(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1\right)\right)=m-n.$$

Câu 152: Tính giới hạn của hàm số $\lim_{x\to 1}\frac{x^n-nx+n-1}{(x-1)^2}$.

A. $\frac{n^2-n}{2}$. **B.** $\frac{n^2+n}{2}$. **C.** $\frac{n}{2}$. **D.** $\frac{n^2}{2}$.

Lời giải

Ta có:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^n+nx+n-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^n-1\right)-n(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\left(x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1\right)-n}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(x^{n-1}-1\right)+\left(x^{n-2}-1\right)+...+\left(x-1\right)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\left(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1\right)+\left(x^{n-3}+x^{n-4}+...+1\right)+...+1\right)$$

$$= \left(n-1\right)+\left(n-2\right)+...+1 = \frac{n\left(n-1\right)}{2} = \frac{n^2-n}{2}.$$

CHƯƠNG III

GIỚI HẠN
HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI 2: GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

DẠNG 3. DẠNG VÔ ĐỊNH $\frac{\infty}{\infty}$

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 153: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}$ là:

Câu 154: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-3}{x^2+6x+3}$ là:

Câu 155: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}$ là:

Câu 156: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ là:

Câu 157: Biết rằng $\dfrac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x\to+\infty$. Tính giá trị nhỏ nhất của $P=a^2-2a+4$.

Câu 158: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}$ là:

Câu 159: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}$ là:

Câu 160: Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+5}}{4x-1}$.

Câu 161: Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ bằng

Câu 162: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)(x+2)}{x^2+9}$ bằng

Câu 163: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2+2x+3}{x^2+1}$.

Câu 164: Tính giới hạn $K=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1}$.

Câu 165: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{cx^2+a}{x^2+b}$ bằng?

Câu 166: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+x}}{x+1}$ bằng

Câu 167: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{2x}$.

Câu 168: Cho a, 3, c là các số thực khác 0. Để giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}+ax}{bx-1}=3$ thì

Câu 169: Cho số thực a thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a\sqrt{2x^2+3}+2017}{2x+2018}=\dfrac{1}{2}$. Khi đó giá trị của a là

Câu 170: Để $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+4}{mx-2}=\dfrac{1}{2}$. Giá trị của m thuộc tập hợp nào sau đây?

Câu 171: Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}}=+\infty$. Giá trị nhỏ nhất của $P=a^2-2a+4$ là.

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 172: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x+2}$ bằng

A. 1. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $-\infty$.

Câu 173: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x+1}{-x+1}$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** -1. **D.** -4.

Câu 174: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x}{3x+2}$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 175: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-5}{-x+3}$ bằng

A. $\dfrac{-5}{3}$. **B.** -1. **C.** 3. **D.** -2.

Câu 176: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-x}{x^2+1}$.

A. $+\infty$. **B.** -1. **C.** $-\infty$. **D.** 3.

Câu 177: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{3x+2}$ bằng bao nhiêu?

A. 0. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Câu 178: Giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+7}{3-4x^2}$ bằng

A. $\dfrac{7}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 179: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{(4x+1)^3(2x+1)^4}{(3+2x)^7}$. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

A. 2. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 0.

Câu 180: Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}+5x}{x+1}$.

A. $-\infty$. **B.** -1. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 181: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2x^2+1}\right)\sqrt{\dfrac{4x^5-x^4+5}{2x-3}}$.

A. $+\infty$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 182: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{4x^2+1}-2}$.

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $-\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 0.

Câu 183: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+1}}{x+1}$ bằng

A. -9. **B.** 3. **C.** -3. **D.** 9.

Câu 184: Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+\sqrt{3x^2-2}}{\sqrt{4x^2+1}-|x|}=\dfrac{\sqrt{3}+b}{c}$. Giá trị của $A=bc$?

A. $A=6$. **B.** $A=-6$. **C.** $A=2$. **D.** $A=-2$.

Câu 185: Tính $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-1)(3x+2)(4x-5)}{8x^3+2x+7}$.

A. $L=3$. **B.** $L=\dfrac{3}{4}$. **C.** $L=\dfrac{4}{3}$. **D.** $L=-3$.

Câu 186: Cho $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Khi đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-2}{ax^2-1}\right)=3$ thì giá trị của a bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 187: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{9x^2+1}}{2x+3}$.

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 188: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-x}{3x-2}$ bằng

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Câu 189: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^4-5x^3}{3x^4+3x+2}=\dfrac{a}{b}$. Khẳng định nào đúng?

A. $a=-5$, $b=3$. **B.** $a=5$, $b=3$. **C.** $a=-2$, $b=3$. **D.** $a=2$, $b=3$.

Câu 190: Cho $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x+1}+ax+b\right)=1$. Khi đó giá trị của biểu thức $T=a+b$ bằng

A. -2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

DẠNG 4. DẠNG VÔ ĐỊNH $\infty-\infty$

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 191: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$ là:

Câu 192: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+2x^2}-x\right)$ là:

Câu 193: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ là:

Câu 194: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)$ là:

Câu 195: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)$ là:

Câu 196: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)$ là:

Câu 197: Tìm tất cả các giá trị của a để $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+ax\right)$ là $+\infty$.

Câu 198: Biết rằng $a+b=4$ và $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)$ hữu hạn. Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{b}{1-x^3}-\dfrac{a}{1-x}\right)$.

Câu 199: Biết rằng $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right)=a\sqrt{5}$. Tính $S=5a$.

Câu 200: Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)=5$ thì giá trị của a là một nghiệm của phương trình nào trong các phương trình sau?

Câu 201: Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0$. Tính $a-4b$ ta được

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 202: Tìm giới hạn $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+1}+x\right)$.

A. $I=-2$. **B.** $I=-4$. **C.** $I=1$. **D.** $I=-1$.

Câu 203: Tìm giới hạn $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+1}+x\right)$.

A. $I=-2$. **B.** $I=-4$. **C.** $I=1$. **D.** $I=-1$.

Câu 204: Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+\sqrt{5}\,x\right)=\sqrt{5}\,a+b$ với $a,\,b\in\mathbb{Q}$. Tính $S=5a+b$.

A. $S=-5$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=1$. **D.** $S=5$.

Câu 205: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+8x+2020}+3x\right)$ là

A. $-\infty$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{-4}{3}$. **D.** $+\infty$.

Câu 206: Tính $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+2}-x\right)$.

A. $I=-4$. **B.** $I=-2$. **C.** $I=4$. **D.** $I=2$.

Câu 207: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-x\right)$ bằng

A. -2. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Câu 208: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$.

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\infty$.

Câu 209: Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt[3]{x^3+2}\right)$.

A. -1. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Câu 210: Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}+x+2\right)$.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** -2.

Câu 211: Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right)=a\sqrt{5}+b$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $S=5a+b$.

A. $S=-5$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=1$. **D.** $S=5$.

Câu 212: Biết rằng $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x+1}+x\sqrt{2}\right)=\dfrac{a}{b}\sqrt{2},(a,b\in\mathbb{Z},\dfrac{a}{b}$ tối giản). Tổng $a+b$ có giá trị là

A. 1. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 213: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-6x+5}+2x\right)$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $-\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 214: Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x-1\right)$. Kết quả là

A. -2. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -1.

Câu 215: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{3x+\sqrt{2x}}}-\sqrt{x}\right)$ bằng:

A. $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. **B.** $+\infty$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 216: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$ bằng:

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Câu 217: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng O ?

A. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^3-1}$. **B.** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x+5}{x+10}$. **C.** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x-2}$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Câu 218: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-3}\right)$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 219: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$ bằng:

A. -2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 2.

Câu 220: Kết quả của $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$ bằng

A. 0. **B.** $-\infty$. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 221: Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2ax+1}+x\right)=1$ thì giá trị của a thuộc khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-5;-2]$. **B.** $[1;3)$. **C.** $[3;5)$. **D.** $(-2;1)$.

Câu 222: Giá trị của tham số $a\in\mathbb{R}$ để giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+ax-3}-2x+1\right)=1$ là

A. $a=2$. **B.** $a=-2$. **C.** $a=0$. **D.** $a=\pm2$.

Câu 223: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-2-\sqrt{4x^2-4x-3}\right)$.

A. -1. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 5.

Câu 224: Biết rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}-x\sqrt{5}\right)=a\sqrt{5}+b$. Tính $S=5a+b$.

A. $S=5$. **B.** $S=1$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=-5$.

Câu 225: Giới hạn nào dưới đây có kết quả là $\frac{1}{2}$?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

C. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Câu 226: Tìm giới hạn $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2-x+2}\right)$.

A. $I=1/2$. **B.** $I=46/31$. **C.** $I=17/11$. **D.** $I=3/2$.

Câu 227: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+2}-x\right)$.

A. -4. **B.** -2. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 228: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+2}-x\right)$.

A. -4. **B.** -2. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 229: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $c^2+a=18$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx}-cx\right)=-2$. Tính $P=a+b+5c$.

A. $P=18$. **B.** $P=12$. **C.** $P=9$. **D.** $P=5$.

Câu 230: Gọi a,b là các số thực thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0$. Khi đó $3a+8b$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 0. **D.** -1.

Câu 231: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)$ là

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Câu 232: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)$ là:

A. 0. **B.** -1. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Câu 233: Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+bx\right)=5$. Khi đó giá trị của $a+b$ là

A. -9. **B.** 6. **C.** 9. **D.** -6.

Câu 234: Biết rằng tồn tại duy nhất một số thực m để $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+mx+1}+x\right)=-\frac{1}{4}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m\in(1;2)$. **B.** $m\in(-1;0)$. **C.** $m\in(0;1)$. **D.** $m\in(-2;-1)$.

Câu 235: Cho $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-3ax^2+1}-bx\right)=5$, khi đó

A. $2a+b=-8$. **B.** $a+b=-8$. **C.** $a+2b=-8$. **D.** $a-b=-8$.

Câu 236: Cho $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3-ax^2+10}-2bx\right)=1$, khi đó

A. $2a+b=-11$. **B.** $a+b=-11$. **C.** $a+2b=-11$. **D.** $a-b=-11$.

Câu 237: Biết rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}-x\sqrt{2}\right)=a\sqrt{2}+b$. Tính $S=4a+b$

A. $S=5$. **B.** $S=1$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=-5$.

Câu 238: Biết rằng $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2-3x+1}+x\sqrt{5}\right)=\frac{a}{b}\sqrt{5}$, ($a$ là số nguyên, b là số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ tối giản). Tổng $a+b$ có giá trị là

A. 1. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 13.

DẠNG 5. DẠNG VÔ ĐỊNH $0.\infty$

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 239: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\left[x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]$ là:

Câu 240: Kết quả của giới hạn. $\lim\limits_{x\to0}x^2\left(\sin\pi x-\frac{1}{x^2}\right)$. là:

Câu 241: $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+5x-2}\right)$ bằng

DẠNG 6: GIỚI HẠN MỘT BÊN

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 242: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-15}{x-2}$ là:

Câu 243: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$ là:

Câu 244: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ là:

Câu 245: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{với } x<1\\ \sqrt{3x^2+1} & \text{với } x\ge 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ là:

Câu 246: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x<1\\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x\ge 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ là:

Câu 247: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-3 & \text{với } x\ge 2\\ x-1 & \text{với } x<2\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ là:

Câu 248: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-2}+3 & \text{với } x\ge 2\\ ax-1 & \text{với } x<2\end{cases}$. Tìm a để tồn tại $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Câu 249: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{khi } x>0\\ mx+m+\dfrac{1}{4} & \text{khi } x\le 0\end{cases}$, m là tham số. Tìm giá trị của m để hàm số có giới hạn tại $x=0$.

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 250: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-3x-1}{x+1}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** -2. **D.** 2.

Câu 251: Giới hạn $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{1}{x-a}$ bằng

A. $-\dfrac{1}{2a}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Câu 252: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x+1}{x-2}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 3. **D.** 7.

Câu 253: $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{4x-3}{x-3}$ có kết quả là

A. 9. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 254: Tính $I=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x+2}{1-x}$.

A. $I=+\infty$. **B.** $I=-\infty$. **C.** $I=0$. **D.** $I=-3$.

Câu 255: Tính $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+2}{x-2}$, kết quả bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 256: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x^3-2x & \text{khi } x\ge 1\\ x^3-3x & \text{khi } x<1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ bằng

A. -4. **B.** -3. **C.** -2. **D.** 2.

Câu 257: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+1 & \text{khi } x\le 2\\ 3x-2 & \text{khi } x>2\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$ bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** -8. **D.** 9.

Câu 258: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}4x^2+1 & \text{khi } x<-3\\ 2 & \text{khi } x\ge -3\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to(-3)^+}f(x)$ bằng

A. -3. **B.** 37. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 259: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-15}{x-2}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Câu 260: Xác định $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x^2}$.

A. 0. **B.** $-\infty$. **C.** Không tồn tại. **D.** $+\infty$.

Câu 261: Biết $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{3}x^2-2x}{|x|}=a$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a>0$. **B.** $a=0$. **C.** $a<0$. **D.** a là số vô tỉ.

Câu 262: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & khi\ x\ge 1\\ 2x+1 & khi\ x<1\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=0$. **B.** $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=3$. **C.** $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-1$. **D.** $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$.

DẠNG 7: GIỚI HẠN VÔ CỰC

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 263: Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+3x+1\right)$.

Câu 264: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^3-2x\right)$ bằng

Câu 265: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x-2}$.

Câu 266: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-x^2+1\right)$

Câu 267: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^3+2x\right)$

Câu 268: Biết $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=-1$. Khi đó $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)}{(x+2)^4}$ bằng?

Câu 269: Biết $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -2$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^2}$ bằng

Câu 270: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5;5]$ để $L = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x - 2\left(m^2-4\right)x^3\right] = -\infty$

Câu 271: Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc đoạn $[-20;20]$ để $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}+mx-1\right) = -\infty$

Câu 272: Giới hạn $I = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^3+4x+5\right)$ bằng

DẠNG 8. LIÊN QUAN ĐẾN HÀM ẨN

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 273: Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x-1} = 12$. Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{\left(x^2-1\right)\left[f(x)+1\right]}$

Câu 274: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-16}{x-2} = 12$. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2f(x)-16}-4}{x^2+x-6}$ bằng

CHƯƠNG III

GIỚI HẠN
HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI 2: GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

DẠNG 3. DẠNG VÔ ĐỊNH $\frac{\infty}{\infty}$

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 153: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}$ là:

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=2$.

Giải nhanh : khi $x\to-\infty$ thì : $\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}\sim\dfrac{2x^2}{x^2}=2.$

Câu 154: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-3}{x^2+6x+3}$ là:

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-3}{x^2+6x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}x.\dfrac{2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^3}}{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=-\infty.$

Giải nhanh : khi $x\to-\infty$ thì : $\dfrac{2x^3+5x^2-3}{x^2+6x+3}\sim\dfrac{2x^3}{x^2}=2x\to-\infty.$

Câu 155: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}$ là:

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{7}{x^4}+\dfrac{11}{x^6}}{3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^6}}=\dfrac{0}{3}=0.$

Giải nhanh : khi $x\to-\infty$ thì : $\dfrac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}\sim\dfrac{2x^3}{3x^6}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{x^3}\to 0.$

Câu 156: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ là:

Lời giải

Khi $x\to-\infty$ thì $\sqrt{x^2}=-x\longrightarrow\sqrt{x^2+1}-x\sim\sqrt{x^2}-x=-x-x=-2x\neq 0$

$\longrightarrow$ chia cả tử và mẫu cho x, ta được $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1}=-1.$

Câu 157: Biết rằng $\dfrac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x\to+\infty$. Tính giá trị nhỏ nhất của $P=a^2-2a+4.$

Lời giải

Khi $x\to+\infty$ thì $\sqrt{x^2}=x\longrightarrow\sqrt{x^2+1}-x\sim\sqrt{x^2}-x=x-x=0$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((2-a)x-3\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(2-a-\dfrac{3}{x}\right)\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right).$

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)=4>0\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=+\infty$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-a-\dfrac{3}{x}\right)=2-a>0\Rightarrow a<2.$

Giải nhanh : ta có $x\to+\infty\longrightarrow\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$

$=\left((2-a)x-3\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\sim(2-a)x.\left(\sqrt{x^2}+x\right)=2(2-a)x\to+\infty\Leftrightarrow a<2.$

Khi đó $P=a^2-2a+4=(a-1)^2+3\geq 3,\ P=3\Leftrightarrow a=1<2\Rightarrow P_{\min}=3.$

Câu 158: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}$ là:

Lời giải

Giải nhanh: khi $x\to-\infty\longrightarrow\dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}\sim\dfrac{\sqrt{4x^2}}{x}=\dfrac{-2x}{x}=-2.$

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{-\sqrt{4}}{1}=-2.$

Câu 159: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}$ là:

Lời giải

Giải nhanh : khi

$$x\to+\infty\longrightarrow\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}\sim\dfrac{\sqrt{4x^2}-x}{\sqrt{9x^2}+2x}=\dfrac{2x-x}{3x+2x}=\dfrac{1}{5}.$$

Cụ thể : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{2}{x}-1}{\sqrt{9-\dfrac{3}{x}}+2}=\dfrac{1}{5}.$

Câu 160: Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+5}}{4x-1}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+5}}{4x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}{4-\dfrac{1}{x}}=-\dfrac{1}{4}.$

Câu 161: Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ bằng

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{x}}=-2$.

Câu 162: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)(x+2)}{x^2+9}$ bằng

Lời giải

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)(x+2)}{x^2+9}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{1+\dfrac{9}{x^2}}=1.$

Câu 163: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2+2x+3}{x^2+1}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2+2x+3}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=5$.

Câu 164: Tính giới hạn $K=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1}$.

Lời giải

Ta có: $K=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=-2$.

Câu 165: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{cx^2+a}{x^2+b}$ bằng?

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{cx^2+a}{x^2+b}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{c+\dfrac{a}{x^2}}{1+\dfrac{b}{x^2}}=\dfrac{c+0}{1+0}=c$.

Câu 166: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+x}}{x+1}$ bằng

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+x}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}{1+\dfrac{1}{x}}=2$.

Câu 167: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{2x}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{2}=-\dfrac{1}{2}$

Câu 168: Cho a, 3, c là các số thực khác 0. Để giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}+ax}{bx-1}=3$ thì

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}+ax}{bx-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-3x-(ax)^2}{(bx-1)\left(\sqrt{x^2-3x}-ax\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left[\left(1-a^2\right)x-3\right]}{(bx-1)\left(\sqrt{x^2-3x}-ax\right)}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(1-a^2\right)-\frac{3}{x}}{\left(b-\frac{1}{x}\right)\left(-\sqrt{1-\frac{3}{x}}-a\right)} = \frac{\left(1-a^2\right)}{b\left(-1-a\right)} = \frac{a-1}{b} = 3.$$

Câu 169: Cho số thực a thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a\sqrt{2x^2+3}+2017}{2x+2018} = \frac{1}{2}$. Khi đó giá trị của a là

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a\sqrt{2x^2+3}+2017}{2x+2018} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}+\frac{2017}{x}}{2+\frac{2018}{x}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Câu 170: Để $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x+1}+4}{mx-2} = \frac{1}{2}$. Giá trị của m thuộc tập hợp nào sau đây?

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x+1}+4}{mx-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\frac{4}{x}}{m-\frac{2}{x}} = -\frac{2}{m}.$

Theo bài ra ta có: $-\frac{2}{m} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -4 \in [-6;-3]$.

Câu 171: Biết $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}} = +\infty$. Giá trị nhỏ nhất của $P = a^2-2a+4$ là.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[-\left((2-a)x-3\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right] = +\infty \Rightarrow -(2-a) \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 2.$

Với $a \geq 2 \Rightarrow a(a-2) \geq 0$ suy ra $P = a(a-2)+4 \geq 4$.

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 172: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{x+2}$ bằng

A. 1. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}} = 2.$

Câu 173: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x+1}{-x+1}$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** -1. **D.** -4.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x+1}{-x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4+\dfrac{1}{x}}{-1+\dfrac{1}{x}}=-4$.

Câu 174: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x}{3x+2}$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x}{3x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(\dfrac{1}{x}-1\right)}{x\left(3+\dfrac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-1}{3+\dfrac{2}{x}}=\dfrac{0-1}{3+0}=\dfrac{-1}{3}$.

Câu 175: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-5}{-x+3}$ bằng

A. $\dfrac{-5}{3}$. **B.** -1. **C.** 3. **D.** -2.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-5}{-x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\dfrac{5}{x}}{-1+\dfrac{3}{x}}=\dfrac{2}{-1}=-2.$

Câu 176: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-x}{x^2+1}$.

A. $+\infty$. **B.** -1. **C.** $-\infty$. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=3$.

Câu 177: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{3x+2}$ bằng bao nhiêu?

A. 0. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{3x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{5}{x}}{3+\dfrac{2}{x}}=0$.

Câu 178: Giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+7}{3-4x^2}$ bằng

A. $\dfrac{7}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+7}{3-4x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{x}+\dfrac{7}{x^2}}{\dfrac{3}{x}-4}=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 179: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{(4x+1)^3(2x+1)^4}{(3+2x)^7}$. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

A. 2. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 0.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(4x+1)^3(2x+1)^4}{(3+2x)^7}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(4+\dfrac{1}{x}\right)^3\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^4}{\left(\dfrac{3}{x}+2\right)^7}=2^3=8$.

Câu 180: Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}+5x}{x+1}$.

A. $-\infty$. **B.** -1. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}+5x}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+5}{1+\dfrac{1}{x}}=4$.

Câu 181: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2x^2+1}\right)\sqrt{\dfrac{4x^5-x^4+5}{2x-3}}$.

A. $+\infty$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2x^2+1}\right)\sqrt{\dfrac{4x^5-x^4+5}{2x-3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2x^2+1}\sqrt{\dfrac{4x-1+\dfrac{5}{x^4}}{2x-3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{x^2}}\sqrt{\dfrac{4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^5}}{2-\dfrac{3}{x}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 182: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{4x^2+1}-2}$.

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $-\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{4x^2+1}-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{2}{x}}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 183: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+1}}{x+1}$ bằng

A. -9. **B.** 3. **C.** -3. **D.** 9.

Lời giải

Ta có: $K=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{9+\dfrac{1}{x^2}}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{9+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=-3$.

Câu 184: Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+\sqrt{3x^2-2}}{\sqrt{4x^2+1}-|x|}=\dfrac{\sqrt{3}+b}{c}$. Giá trị của $A=bc$?

A. $A=6$. **B.** $A=-6$. **C.** $A=2$. **D.** $A=-2$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+\sqrt{3x^2-2}}{\sqrt{4x^2+1}-|x|}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-x\sqrt{3-\dfrac{2}{x^2}}}{-x\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\sqrt{3-\dfrac{2}{x^2}}}{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{-1}=\dfrac{\sqrt{3}+(-2)}{1}$.

Suy ra $b=-2$, $c=1$, $A=bc=-2$.

Câu 185: Tính $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-1)(3x+2)(4x-5)}{8x^3+2x+7}$.

A. $L=3$. **B.** $L=\dfrac{3}{4}$. **C.** $L=\dfrac{4}{3}$. **D.** $L=-3$.

Lời giải

$L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3\left(2-\dfrac{1}{x}\right)\left(3+\dfrac{2}{x}\right)\left(4-\dfrac{5}{x}\right)}{x^3\left(8+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(2-\dfrac{1}{x}\right)\left(3+\dfrac{2}{x}\right)\left(4-\dfrac{5}{x}\right)}{8+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}}=3$.

Câu 186: Cho $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Khi đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-2}{ax^2-1}\right)=3$ thì giá trị của a bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-2}{ax^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-\dfrac{2}{x^2}}{a-\dfrac{1}{x^2}}\right)=\dfrac{1}{a}=3\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{3}$.

Câu 187: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{9x^2+1}}{2x+3}$.

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{9x^2+1}}{2x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}-\sqrt{x^2\left(9+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{2x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}+x\sqrt{9+\dfrac{1}{x^2}}}{2x+3}$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(-\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}+\sqrt{9+\dfrac{1}{x^2}}\right)}{x\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}+\sqrt{9+\dfrac{1}{x^2}}}{2+\dfrac{3}{x}}=1$.

Câu 188: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-x}{3x-2}$ bằng

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Lời giải

Khi $x\to-\infty$ thì $x<0\Rightarrow|x|=-x$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-x}{3x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}-x}{x\left(3-\dfrac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}-x}{x\left(3-\dfrac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}-1}{\left(3-\dfrac{2}{x}\right)}=-\dfrac{2}{3}$.

Câu 189: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^4-5x^3}{3x^4+3x+2}=\dfrac{a}{b}$. Khẳng định nào đúng?

A. $a=-5,\ b=3$. **B.** $a=5,\ b=3$. **C.** $a=-2,\ b=3$. **D.** $a=2,\ b=3$.

Lời giải

Cách 1.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^4-5x^3}{3x^4+3x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4\left(2-\dfrac{5}{x}\right)}{x^4\left(3+\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{2}{x^4}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(2-\dfrac{5}{x}\right)}{\left(3+\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{2}{x^4}\right)}=\dfrac{2-0}{3+0+0}=\dfrac{2}{3}$.

Suy ra $a=2,\ b=3$.

Cách 2.

Nhập biểu thức $\dfrac{2x^4-5x^3}{3x^4+3x+2}$ vào máy tính bỏ túi.

Vì $x\to+\infty$ nên bấm CALC với $x=10^{20}$, ta thu được kết quả $\dfrac{2}{3}$, suy ra $a=2$ và $b=3$.

Câu 190: Cho $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x+1}+ax+b\right)=1$. Khi đó giá trị của biểu thức $T=a+b$ bằng

A. -2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x+1}+ax+b\right)=1\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(a+1)x^2+(a+b+3)x+b+1}{x+1}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(a+1)x+(a+b+3)+\dfrac{b+1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+1=0\\a+b+3=1\\b+1\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}\Rightarrow T=a+b=-2.$$

DẠNG 4. DẠNG VÔ ĐỊNH $\infty-\infty$

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 191: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$ là:

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{x+2-1}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{x+1}{x^2-4}\right)=-\infty$

Vì $\lim\limits_{x\to2^-}(x+1)=3>0$; $\lim\limits_{x\to2^-}(x^2-4)=0$ và $x^2-4<0$ với mọi $x\in(-2;2)$.

Câu 192: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+2x^2}-x\right)$ là:

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+2x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+2}-1\right)=+\infty$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+2}-1\right)=\sqrt{2}-1>0.$

Giải nhanh : $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{1+2x^2}-x\sim\sqrt{2x^2}-x=\sqrt{2}x-x=\left(\sqrt{2}-1\right)x\to+\infty.$

Câu 193: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ là:

Lời giải

$x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{x^2+1}-x\sim\sqrt{x^2}-x=x-x=0\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp.

Giải nhanh: $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\sim\dfrac{1}{\sqrt{x^2}+x}=\dfrac{1}{2x}\to 0.$

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\dfrac{0}{2}=0.$

Câu 194: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)$ là:

Lời giải

Khi $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\sim\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2}=0$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}$

$=\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+4x}}\sim\dfrac{-x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}=\dfrac{-x}{2x}=-\dfrac{1}{2}.$

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+4x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}}=-\dfrac{1}{2}.$

Câu 195: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)$ là:

Lời giải

Giải nhanh:

$$x\to-\infty\longrightarrow\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\sim\sqrt[3]{3x^3}+\sqrt{x^2}=\left(\sqrt[3]{3}-1\right)x\to-\infty.$$

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt[3]{3-\dfrac{1}{x^3}}-\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}\right)=-\infty$

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3-\dfrac{1}{x^3}}-\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}\right)=\sqrt[3]{3}-1>0.$

Câu 196: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)$ là:

Lời giải

$x\to+\infty\longrightarrow\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\sim\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{2x}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}=$

$$\frac{-2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{4x^2-1}-\sqrt[3]{(2x+1)^2}}\sim\frac{-2}{\sqrt[3]{4x^2}+\sqrt[3]{4x^2}+\sqrt[3]{4x^2}}=\frac{-2}{3\sqrt[3]{4x^2}}\to 0.$$

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{(2x-1)(2x+1)}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}}=0.$

Câu 197: Tìm tất cả các giá trị của a để $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+ax\right)$ là $+\infty$.

Lời giải

Giải nhanh: $x\to-\infty\longrightarrow\sqrt{2x^2+1}+ax\sim\sqrt{2x^2}+ax$

$=-\sqrt{2}x+ax=\left(a-\sqrt{2}\right)x\to+\infty\Leftrightarrow a-\sqrt{2}<0\Leftrightarrow a<\sqrt{2}.$

Cụ thể: vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+ax\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}+a\right)=+\infty$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}+a\right)=a-\sqrt{2}<0\Leftrightarrow a<\sqrt{2}.$

Câu 198: Biết rằng $a+b=4$ và $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)$ hữu hạn. Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{b}{1-x^3}-\dfrac{a}{1-x}\right)$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a+ax+ax^2-b}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a+ax+ax^2-b}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}.$

Khi đó $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)$ hữu hạn $\Leftrightarrow a+a.1+a.1^2-b=0\Leftrightarrow 3a-b=0.$

Vậy ta có $\begin{cases}a+b=4\\3a-b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}\Rightarrow L=-\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)$

$=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-(x+2)}{1+x+x^2}=1.$

Câu 199: Biết rằng $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right)=a\sqrt{5}$. Tính $S=5a$.

Lời giải

$x\to-\infty\longrightarrow\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\sim\sqrt{5x^2}+x\sqrt{5}=-\sqrt{5}x+x\sqrt{5}=0$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $x\to-\infty\longrightarrow\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}$

$=\dfrac{2x}{\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}}\sim\dfrac{2x}{\sqrt{5x^2}-x\sqrt{5}}=\dfrac{2x}{-2\sqrt{5}x}=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}.$

Cụ thể: Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{-\sqrt{5+\dfrac{2}{x}}+\sqrt{5}}=\dfrac{2}{-2\sqrt{5}}=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{1}{5}\sqrt{5}\longrightarrow a=-\dfrac{1}{5}\Rightarrow S=-1.$

Câu 200: Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)=5$ thì giá trị của a là một nghiệm của phương trình nào trong các phương trình sau?

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)=5\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+ax+5-x^2}{\sqrt{x^2+ax+5}-x}\right)=5$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{ax+5}{\sqrt{x^2+ax+5}-x}\right)=5\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{a+\dfrac{5}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{a}{x}+\dfrac{5}{x^2}}-1}\right)=5\Leftrightarrow\dfrac{a}{-2}=5\Leftrightarrow a=-10.$

Vì vậy giá trị của a là một nghiệm của phương trình $x^2+9x-10=0$.

Câu 201: Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0$. Tính $a-4b$ ta được

Lời giải

Ta có

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-ax\right)-b\right)=0$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^2-3x+1-a^2x^2}{\sqrt{4x^2-3x+1}+ax}-b\right)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\left(4-a^2\right)x^2-3x+1}{\sqrt{4x^2-3x+1}+ax}-b\right)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-a^2=0 \\ a>0 \\ \dfrac{-3}{2+a}-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Vậy $a-4b=5$.

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 202: Tìm giới hạn $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+1}+x\right)$.

A. $I=-2$. **B.** $I=-4$. **C.** $I=1$. **D.** $I=-1$.

Lời giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tính giới hạn vô cực của hàm số dạng $\infty-\infty$.

2. Hướng giải:

B1: Nhân liên hợp, nhân cả tử và mẫu của biểu thức $\sqrt{x^2+4x+1}+x$ với $\sqrt{x^2+4x+1}-x$.

Rút gọn biểu thức đó.

B2: Chia cả tử và mẫu của biểu thức tính giới hạn cho x ta được giới hạn cần tìm.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

$$I=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+4x+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+4x+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+4x+1}-x}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-x\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-x}{x}}\right)=\frac{4}{-2}=-2.$$

Câu 203: Tìm giới hạn $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+1}+x\right)$.

A. $I=-2$. **B.** $I=-4$. **C.** $I=1$. **D.** $I=-1$.

Lời giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tính giới hạn vô cực của hàm số dạng $\infty-\infty$.

2. Hướng giải:

B1: Nhân liên hợp, nhân cả tử và mẫu của biểu thức $\sqrt{x^2+4x+1}+x$ với $\sqrt{x^2+4x+1}-x$.

Rút gọn biểu thức đó.

B2: Chia cả tử và mẫu của biểu thức tính giới hạn cho x ta được giới hạn cần tìm.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

$$I=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+1}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{x^2+4x+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+4x+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+4x+1}-x}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4+\frac{1}{x}}{\frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}{x}}\right)=\frac{4}{-2}=-2.$$

Câu 204: Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+\sqrt{5}\,x\right)=\sqrt{5}\,a+b$ với $a,\ b\in\mathbb{Q}$. Tính $S=5a+b$.

A. $S=-5$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=1$. **D.** $S=5$.

Lời giải

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+\sqrt{5}\,x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{5x^2+2x}-\sqrt{5}x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-\sqrt{5+\frac{2}{x}}-\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{5}\\ b=0\end{cases}\Rightarrow S=5a+b=-1.$

Câu 205: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+8x+2020}+3x\right)$ là

A. $-\infty$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{-4}{3}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{9x^2+8x+2020}+3x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{9x^2+8x+2020-9x^2}{\sqrt{9x^2+8x+2020}-3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x+2020}{|x|\sqrt{9+\frac{8}{x}+\frac{2020}{x^2}}-3x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x+2020}{-x\sqrt{9+\frac{8}{x}+\frac{2020}{x^2}}-3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8+\frac{2020}{x}}{-\sqrt{9+\frac{8}{x}+\frac{2020}{x^2}}-3}=-\frac{4}{3}.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+8x+2020}+3x\right)=-\frac{4}{3}$.

Câu 206: Tính $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+2}-x\right)$.

A. $I=-4$. **B.** $I=-2$. **C.** $I=4$. **D.** $I=2$.

Lời giải

Ta có:

$$I=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x+2-x^2}{\sqrt{x^2-4x+2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x+2}{\sqrt{x^2-4x+2}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4+\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}=-2.$$

Câu 207: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-x\right)$ bằng

A. -2. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Lời giải

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}(-x)\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}}+1\right)=+\infty.$$

Câu 208: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$.

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $-\infty$.

Lời giải:

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)=\lim_{x\to-\infty}(-x(\sqrt{x^2-x+1}+1))=+\infty.$$

Câu 209: Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt[3]{x^3+2}\right)$.

A. -1. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+x-\sqrt[3]{x^3+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-2}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+2}+\left(\sqrt[3]{x^3+2}\right)^2}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-2}{x^2\left(1+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^3}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^3}}\right)^2\right)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\frac{-2}{x^2}}{1+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^3}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^3}}\right)^2}\right)=1$$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt[3]{x^3+2}\right)=1$

Câu 210: Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}+x+2\right)$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** -2.

Lời giải

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}+x+2\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+2-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+x+2}-x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x-2}{\sqrt{x^2+x+2}-x-2}.$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3-\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-1-\frac{2}{x}} = \frac{3}{2}.$$

Câu 211: Biết $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right)=a\sqrt{5}+b$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $S=5a+b$.

A. $S=-5$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=1$. **D.** $S=5$.

Lời giải

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{5x^2+2x}-x\sqrt{5}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-\sqrt{5+\frac{2}{x}}-\sqrt{5}}=-\frac{1}{5}\sqrt{5}.$$

Suy ra: $a=-\frac{1}{5}$, $b=0$. Vậy $S=-1$.

Câu 212: Biết rằng $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x+1}+x\sqrt{2}\right)=\frac{a}{b}\sqrt{2},(a,b\in\mathbb{Z},\frac{a}{b}$ tối giản). Tổng $a+b$ có giá trị là

A. 1. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

Ta có

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x+1}+x\sqrt{2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x+1}{\sqrt{2x^2-3x+1}-x\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3+\frac{1}{x}}{-\sqrt{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{2}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{4}\sqrt{2}\Rightarrow a=3,b=4\Rightarrow a+b=7$$

Câu 213: $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-6x+5}+2x\right)$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $-\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-6x+5}+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-6x+5}{\sqrt{4x^2-6x+5}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-6+\frac{5}{x}}{-\sqrt{4-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}-2}=\frac{3}{2}.$

Câu 214: Tìm $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x-1\right)$. Kết quả là

A. -2. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x-1\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}-x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1+\frac{1}{x}}=-1.$$

Câu 215: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{3x+\sqrt{2x}}}-\sqrt{x}\right)$ bằng:

A. $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. **B.** $+\infty$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{3x+\sqrt{2x}}}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\sqrt{3x+\sqrt{2x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{3x+\sqrt{2x}}}+\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{3x+\sqrt{2x}}}{\sqrt{x+\sqrt{3x+\sqrt{2x}}}+\sqrt{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{3+\sqrt{\dfrac{2}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{3}{x}+\sqrt{\dfrac{2}{x^3}}}}+1}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Câu 216: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$ bằng:

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Lời giải

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=-\frac{1}{2}.$$

Câu 217: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng 0 ?

A. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^3-1}$. **B.** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x+5}{x+10}$. **C.** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x-2}$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Lời giải

+ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{3}$.

+ $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x+5}{x+10}=\dfrac{1}{8}$.

+ $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x-2}=-\dfrac{3}{4}$.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$.

Câu 218: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-3}\right)$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x+3}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-3}}=0.$$

Câu 219: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$ bằng:

A. -2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-\left(x^2-4x\right)}{x+\sqrt{x^2-4x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x}{x+\sqrt{x^2-4x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x}{x\left(1+\sqrt{1-\dfrac{4}{x}}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{1+\sqrt{1-\dfrac{4}{x}}}=2$.

Câu 220: Kết quả của $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$ bằng

A. 0. **B.** $-\infty$. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}\right)=1$.

Câu 221: Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2ax+1}+x\right)=1$ thì giá trị của a thuộc khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-5;-2]$. **B.** $[1;3)$. **C.** $[3;5)$. **D.** $(-2;1)$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2ax+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2ax+1}{\sqrt{x^2+2ax+1}-x}=-a\Rightarrow a=-1$.

Câu 222: Giá trị của tham số $a\in\mathbb{R}$ để giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+ax-3}-2x+1\right)=1$ là

A. $a=2$. **B.** $a=-2$. **C.** $a=0$. **D.** $a=\pm2$.

Lời giải

Có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+ax-3}-2x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a+4)x-4}{\sqrt{4x^2+ax-3}+2x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a+4)-\dfrac{4}{x}}{\sqrt{4+\dfrac{a}{x}-\dfrac{3}{x^2}}+2-\dfrac{1}{x}}$.

Theo đề: $\dfrac{a+4}{4}=1\Leftrightarrow a=0$.

Câu 223: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-2-\sqrt{4x^2-4x-3}\right)$.

A. -1. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 5.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-2-\sqrt{4x^2-4x-3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x.\left(3-\frac{2}{x}-\sqrt{4-\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)=+\infty$.

Câu 224: Biết rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}-x\sqrt{5}\right)=a\sqrt{5}+b$. Tính $S=5a+b$.

A. $S=5$. **B.** $S=1$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=-5$.

Lời giải

Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}-x\sqrt{5}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{5+\frac{2}{x}}+\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{5}\sqrt{5}.$$

Theo giả thiết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5x+2x}-x\sqrt{5}\right)=a\sqrt{5}+b$.

Suy ra: $\begin{cases}a=\frac{1}{5}\\ b=0\end{cases}$ do đó: $S=5a+b=1$.

Câu 225: Giới hạn nào dưới đây có kết quả là $\frac{1}{2}$?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

C. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{2}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Lời giải

Xét: $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}$.

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$

Câu 226: Tìm giới hạn $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2-x+2}\right)$.

A. $I=1/2$. **B.** $I=46/31$. **C.** $I=17/11$. **D.** $I=3/2$.

Lời giải

Ta có: $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2-x+2}\right)\Leftrightarrow I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-x^2+x-2}{x+\sqrt{x^2-x+2}}+1\right)$

$\Leftrightarrow I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+\sqrt{x^2-x+2}}+1\right)\Leftrightarrow I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}+1\right)\Leftrightarrow I=\dfrac{3}{2}.$

Câu 227: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+2}-x\right)$.

A. -4. **B.** -2. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-4x+2-x^2}{\sqrt{x^2-4x+2}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x+2}{\sqrt{x^2-4x+2}+x}$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(-4+\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+1}=-2.$

Câu 228: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+2}-x\right)$.

A. -4. **B.** -2. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-4x+2-x^2}{\sqrt{x^2-4x+2}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x+2}{\sqrt{x^2-4x+2}+x}$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(-4+\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+1}=-2.$

Câu 229: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $c^2+a=18$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx}-cx\right)=-2$. Tính $P=a+b+5c$.

A. $P=18$. **B.** $P=12$. **C.** $P=9$. **D.** $P=5$.

Lời giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tính giới hạn hữu hạn tại vô cực của hàm số.

2. Hướng giải:

B1: Xác định điều kiện của tham số để tồn tại giới hạn đã cho.

B2: Tính giới hạn đã cho bằng phương pháp nhân liên hợp biểu thức cần tính giới hạn.

B3: Xác định điều kiện để tồn tại kết quả của giới hạn là một số thực.

B4: Kết hợp các điều kiện trong bài, giải hệ tìm ra giá trị của tham số, từ đó tính ra kết quả bài toán.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Để tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx}-cx\right)=-2 \Rightarrow a,c>0.$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx}-cx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{ax^2+bx}-cx\right)\left(\sqrt{ax^2+bx}+cx\right)}{\sqrt{ax^2+bx}+cx}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^2+bx-c^2x^2}{\sqrt{ax^2+bx}+cx}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^2+bx-c^2x^2}{\sqrt{ax^2+bx}+cx}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(a-c^2)x^2+bx}{\sqrt{ax^2+bx}+cx}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(18-2c^2)x+b}{\sqrt{\left(a+\frac{b}{x}\right)}+c}\right).$$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx}-cx\right)=-2\Leftrightarrow\begin{cases}18-2c^2=0\\ \dfrac{b}{\sqrt{a}+c}=-2\end{cases}.$

Mà $c^2+a=18$.

Khi đó ta có: $\begin{cases}18-2c^2=0\\ \dfrac{b}{\sqrt{a}+c}=-2\\ c^2+a=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=9\\ c=3\\ b=-12\end{cases}. \Rightarrow P=a+b+5c=9-12+5.3=12.$

Câu 230: Gọi a,b là các số thực thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0$. Khi đó $3a+8b$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-3x+1-(ax+b)^2}{\sqrt{4x^2-3x+1}+ax+b}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(4-a^2\right)x^2-(3+2ab)x+1-b^2}{\sqrt{4x^2-3x+1}+ax+b}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(4-a^2\right)x-(3+2ab)+\dfrac{1-b^2}{x}}{\sqrt{4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+a+\dfrac{b}{x}}.$$

Theo giả thiết ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(4-a^2\right)x-(3+2ab)+\dfrac{1-b^2}{x}}{\sqrt{4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+a+\dfrac{b}{x}}=0\Rightarrow\begin{cases}4-a^2=0\\ 3+2ab=0\\ 2+a\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-\dfrac{3}{4}\end{cases}.$

Do đó $3a+8b=0$.

Câu 231: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)$ là

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+4x}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}}=-\dfrac{1}{2}$

Câu 232: Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)$ là:

A. 0. **B.** -1. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{(2x-1)(2x+1)}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$

$=0$

Câu 233: Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+bx\right)=5$. Khi đó giá trị của $a+b$ là

A. -9. **B.** 6. **C.** 9. **D.** -6.

Lời giải

+ Nếu $b\le 0$ thì $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+bx\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{1+\dfrac{a}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+b\right)=+\infty$.

+ Nếu $b=1$ thì $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{ax+5}{\sqrt{x^2+ax+5}-x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{a+\dfrac{5}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{a}{x}+\dfrac{5}{x^2}}-1}\right)=\dfrac{a}{-2}=5\Leftrightarrow a=-10$

$\Rightarrow a+b=-9$.

+ Nếu $\begin{cases}b\ne 1\\ b>0\end{cases}$ thì $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+bx\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(1-b^2\right)x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+ax+5}-bx}=\pm\infty$.

Câu 234: Biết rằng tồn tại duy nhất một số thực m để $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+mx+1}+x\right)=-\dfrac{1}{4}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m\in(1;2)$. **B.** $m\in(-1;0)$. **C.** $m\in(0;1)$. **D.** $m\in(-2;-1)$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+mx+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{mx+1}{\sqrt{x^2+mx+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{m+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{m}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-1}=-\dfrac{m}{2}$.

Nên $m=\dfrac{1}{2}\in(0;1)$.

Câu 235: Cho $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-3ax^2+1}-bx\right)=5$, khi đó

A. $2a+b=-8$. **B.** $a+b=-8$. **C.** $a+2b=-8$. **D.** $a-b=-8$.

Lời giải

Ta có $b=1$ vì nếu $b\neq 1$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-3ax^2+1}-bx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x.\left(\sqrt[3]{1-\dfrac{3a}{x}+\dfrac{1}{x^3}}-b\right)=\pm\infty$.

Khi đó

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-3ax^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-3ax^2+1-x^3}{\sqrt[3]{\left(x^3-3ax^2+1\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3-3ax^2+1}+x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3ax^2+1}{\sqrt[3]{\left(x^3-3ax^2+1\right)^2}+x\sqrt[3]{x^3-3ax^2+1}+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3a+\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(1-\dfrac{3a}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\dfrac{3a}{x}+\dfrac{1}{x^3}}+1}$$

$$=\frac{-3a}{3}=5.$$

Nên $a=-5$. Vậy $a+2b=-8$.

Câu 236: Cho $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3-ax^2+10}-2bx\right)=1$, khi đó

A. $2a+b=-11$. **B.** $a+b=-11$. **C.** $a+2b=-11$. **D.** $a-b=-11$.

Lời giải

Ta có $b=1$ vì nếu $b\neq 1$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3-ax^2+10}-2bx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x.\left(\sqrt[3]{8-\dfrac{a}{x}+\dfrac{1}{x^3}}-2b\right)=\pm\infty$.

Khi đó

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3-ax^2+10}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x^3-ax^2+10-8x^3}{\sqrt[3]{\left(8x^3-ax^2+10\right)^2}+2x\sqrt[3]{8x^3-ax^2+10}+4x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-ax^2+10}{\sqrt[3]{\left(8x^3-ax^2+10\right)^2}+2x\sqrt[3]{8x^3-ax^2+10}+4x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-a+\dfrac{10}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(8-\dfrac{a}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)^2}+2\sqrt[3]{8-\dfrac{a}{x}+\dfrac{1}{x^3}}+4}$$

$$=\frac{-a}{12}=1.$$

Nên $a=-12$. Vậy $a+b=-11$.

Câu 237: Biết rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}-x\sqrt{2}\right)=a\sqrt{2}+b$. Tính $S=4a+b$

A. $S=5$. **B.** $S=1$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=-5$.

Lời giải

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}-x\sqrt{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2+x-2x^2}{\sqrt{2x^2+x}+x\sqrt{2}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{2x^2+x}+x\sqrt{2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}\right)}\right)==\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{2+\frac{1}{x}}+\sqrt{2}\right)}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Vậy $a=\frac{1}{4}$ và $b=0$. Do đó: $S=4.\frac{1}{4}+0=1$.

Câu 238: Biết rằng $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2-3x+1}+x\sqrt{5}\right)=\frac{a}{b}\sqrt{5}$, ($a$ là số nguyên, b là số nguyên dương, $\frac{a}{b}$ tối giản).

Tổng $a+b$ có giá trị là

A. 1. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 13.

Lời giải

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2-3x+1}+x\sqrt{5}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{5x^2-3x+1}+x\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5x^2-3x+1}-x\sqrt{5}\right)}{\sqrt{5x^2-3x+1}-x\sqrt{5}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x+1}{\sqrt{5x^2-3x+1}-x\sqrt{5}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{5-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{5}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3+\frac{1}{x}}{-\sqrt{5-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{5}}=\frac{3}{10}\sqrt{5}.$$ Vậy $a=3$, $b=10$ suy ra $a+b=3+10=13$.

DẠNG 5. DẠNG VÔ ĐỊNH $0.\infty$

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 239: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\left[x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]$ là:

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)=0-1=-1.$

Câu 240: Kết quả của giới hạn. $\lim\limits_{x\to 0}x^2\left(\sin\pi x-\dfrac{1}{x^2}\right)$. là:

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}x^2\left(\sin\pi x-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\sin\pi x-1\right)=-1.$

Câu 241: $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+5x-2}\right)$ bằng

Lời giải

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+5x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^2+5x+4}+\sqrt{x^2+5x-2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{x^2}}\right)}=3.$$

DẠNG 6: GIỚI HẠN MỘT BÊN

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 242: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-15}{x-2}$ là:

Lời giải

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}(x-15)=-13<0\\ \lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0\ \&\ x-2>0,\forall x>2\end{cases}\longrightarrow\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-15}{x-2}=-\infty.$

Câu 243: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$ là:

Lời giải

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x+2}=2>0\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0\ \&\ \sqrt{x-2}>0,\forall x>2\end{cases}\longrightarrow\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}=+\infty.$

Câu 244: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ là:

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2-x}{(2-x)(1-2x)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{1-2x}=-\dfrac{1}{3}.$

Câu 245: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{với } x<1\\ \sqrt{3x^2+1} & \text{với } x\ge 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ là:

Lời giải

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{3x^2+1}=\sqrt{3.1^2+1}=2$$

Câu 246: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x<1\\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x\ge 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ là:

Lời giải

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1}{1-x}=+\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+1\right)=2\\ \lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)=0 \ \&\ 1-x>0\ (\forall x<1)\end{cases}.$$

Câu 247: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-3 & \text{với } x\ge 2\\ x-1 & \text{với } x<2\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ là:

Lời giải

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2-3\right)=1\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x-1)=1\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=1.$

Câu 248: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-2}+3 & \text{với } x\ge 2\\ ax-1 & \text{với } x<2\end{cases}$. Tìm a để tồn tại $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(ax-1)=2a-1\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{x-2}+3\right)=3\end{cases}$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ tồn tại $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\Leftrightarrow 2a-1=3\Leftrightarrow a=2.$

Câu 249: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{khi } x>0\\ mx+m+\dfrac{1}{4} & \text{khi } x\le 0\end{cases}$, m là tham số. Tìm giá trị của m để hàm số có giới hạn tại $x=0$.

Lời giải:

Ta có:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+4)-2^2}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(mx+m+\dfrac{1}{4}\right)=m+\dfrac{1}{4}$

Hàm số đã cho có giới hạn tại $x=0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}=m+\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow m=0$.

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 250: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-3x-1}{x+1}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-3x-1}{x+1}=\dfrac{-3.1-1}{1+1}=-2.$

Câu 251: Giới hạn $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{1}{x-a}$ bằng

A. $-\dfrac{1}{2a}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^-}1=1>0\\ \lim\limits_{x\to a^-}(1-a)=0\\ x-a<0 \text{ khi } x\to a^-\end{cases}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{1}{x-a}=-\infty$.

Câu 252: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x+1}{x-2}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x+1}{x-2}=+\infty$ vì $\lim\limits_{x\to 2^+}(3x+1)=7>0, \lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0$ và $x-2>0, \forall x>2$.

Câu 253: $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{4x-3}{x-3}$ có kết quả là

A. 9. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 3^+}(4x-3)=9>0$, $\lim\limits_{x\to 3^+}(x-3)=0$ và $x-3>0$ với mọi $x>3$ nên $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{4x-3}{x-3}=+\infty$.

Câu 254: Tính $I=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x+2}{1-x}$.

A. $I=+\infty$. **B.** $I=-\infty$. **C.** $I=0$. **D.** $I=-3$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}(3x+2)=5$

$\lim\limits_{x\to 1^+}(1-x)=0$ và $1-x<0$ khi $x>1$

Nên $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x+2}{1-x}=+\infty$

Câu 255: Tính $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+2}{x-2}$, kết quả bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+2}{x-2}=-\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to 2^-}(x+2)=4>0$, $\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)=0$ và $x-2<0$ với mọi $x<2$.

Câu 256: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x^3-2x & \text{khi } x\ge 1\\ x^3-3x & \text{khi } x<1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ bằng

A. -4. **B.** -3. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^3-3x)=1-3=-2$.

Câu 257: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+1 & \text{khi } x\le 2\\ 3x-2 & \text{khi } x>2\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)$ bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** -8. **D.** 9.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+2x+1)=2^2+2.2+1=9$.

Câu 258: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}4x^2+1 & \text{khi } x<-3\\ 2 & \text{khi } x\ge -3\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to(-3)^+}f(x)$ bằng

A. -3. **B.** 37. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to(-3)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-3)^+}(2)=2$.

Câu 259: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-15}{x-2}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}(x-15)=-13<0\\ \lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0\end{cases}$.

Vì $x \to 2^+$ nên $x > 2$. Do đó $x - 2 > 0$.

Vậy $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-15}{x-2} = -\infty$.

Câu 260: Xác định $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x^2}$.

A. 0. **B.** $-\infty$. **C.** Không tồn tại. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-1}{x} = +\infty$.

Vậy không tồn tại $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x^2}$.

Câu 261: Biết $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{3}x^2 - 2x}{|x|} = a$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a > 0$. **B.** $a = 0$. **C.** $a < 0$. **D.** a là số vô tỉ.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{3}x^2 - 2x}{|x|} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{3}x^2 - 2x}{-x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(-\sqrt{3}x + 2\right) = 2$.

Câu 262: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & khi\ x \geq 1 \\ 2x + 1 & khi\ x < 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0$. **B.** $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3$. **C.** $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -1$. **D.** $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

Lời giải

Do $x \to 1^-$ nên $x < 1$. Ta có: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x + 1) = 2.1 + 1 = 3$.

Suy ra:Đáp án A, C sai.

Do $x \to 1^+$ nên $x > 1$. Ta có: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(x^2 - 1\right) = 1^2 - 1 = 0$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ không tồn tại.

Suy ra: Đáp án D sai.

Vậy đáp án đúng là **B.**

DẠNG 7: GIỚI HẠN VÔ CỰC

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 263: Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+3x+1\right)$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+3x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^3\left(1+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)\right]=-\infty$

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)=1>0$.

Câu 264: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^3-2x\right)$ bằng

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^3-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3(-2-\dfrac{2}{x^2})$

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}(-2-\dfrac{2}{x^2})=-2<0$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3(-2-\dfrac{2}{x^2})=-\infty$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^3-2x\right)=-\infty$

Câu 265: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x-2}$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x}.\dfrac{1+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}x.\dfrac{1+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x}}$.

Do $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x}}=1$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x-2}=-\infty$.

Câu 266: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-x^2+1\right)$

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-x^2+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^3\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)\right]=-\infty$ vì $\lim x^3=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)=2$.

Câu 267: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^3+2x\right)$

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^3+2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^3\left(-3+\dfrac{2}{x^2}\right)\right]$.

Ta thấy: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3+\dfrac{2}{x^2}\right)=-3<0\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^3\left(-3+\dfrac{2}{x^2}\right)\right]=+\infty$.

Vậy $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^3+2x\right)=+\infty$.

Câu 268: Biết $\lim\limits_{x\to-2}f\left(x\right)=-1$. Khi đó $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f\left(x\right)}{\left(x+2\right)^4}$ bằng?

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-2}f\left(x\right)=-1<0$

$\lim\limits_{x\to-2}\left(x+2\right)^4=0$ và với $\forall x\neq-2$ thì $\left(x+2\right)^4>0$

Suy ra $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f\left(x\right)}{\left(x+2\right)^4}=-\infty$

Câu 269: Biết $\lim\limits_{x\to1}f(x)=-2$. Khi đó $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{\left(x-1\right)^2}$ bằng

Lời giải

Có $\lim\limits_{x\to1}f(x)=-2<0$, $\lim\limits_{x\to1}\left(x-1\right)^2=0$ và $\left(x-1\right)^2>0,\ \forall x\neq1$ nên $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{\left(x-1\right)^2}=-\infty$

Câu 270: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5;5]$ để $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-2\left(m^2-4\right)x^3\right]=-\infty$

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-2\left(m^2-4\right)x^3\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left[\dfrac{1}{x^2}-2\left(m^2-4\right)\right]$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ nên $L=-\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x^2}-2\left(m^2-4\right)\right]<0\Leftrightarrow-2(m^2-4)<0$

$\Leftrightarrow m^2-4>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<-2.\end{array}\right.$

Lại có m thuộc đoạn $[-5;5]$ nên các giá trị nguyên thỏa mãn bài toán của m là $\{-5;-4;-3;3;4;5\}$.

Vậy có 6 số nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 271: Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc đoạn $\left[-20;20\right]$ để $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}+mx-1\right)=-\infty$

Lời giải

Ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}+mx-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+mx-1\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+m-\frac{1}{x}\right)$$

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+m-\frac{1}{x}\right)=2+m$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}+mx-1\right)=-\infty$

khi $2+m<0\Leftrightarrow m<-2$.

Do m nguyên thuộc đoạn $[-20;20]$ nên $m\in\{-20;-19;-18;...;-3\}$

Vậy có 18 giá trị m nguyên thuộc đoạn $[-20;20]$ thỏa bài toán.

Câu 272: Giới hạn $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^3+4x+5\right)$ bằng

Lời giải

Ta có $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2x^3+4x+5\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3\left(-2+\frac{4}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)\right]=-\infty$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2+\frac{4}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right)=-2<0$

DẠNG 8. LIÊN QUAN ĐẾN HÀM ẨN

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 273: Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=12$. Tính $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-2}{\left(x^2-1\right)\left[f(x)+1\right]}$

Lời giải

Theo giả thiết bài toán ta có: $\lim\limits_{x\to1}\left[f(x)-2\right]=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$.

Khi đó:

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{\left(x^2-1\right)\left[f(x)+1\right]}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{(x-1)(x+1)\left[f(x)+1\right]}$$

$$=12\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+1)\left[f(x)+1\right]}=12.\frac{1}{2.(2+1)}=\frac{12}{6}=2.$$

Cách 2:

Giả sử $f(x)=12(x-1)+2$ thỏa mãn giả thiết bài toán $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=12$.

Khi đó: $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-2}{\left(x^2-1\right)\left[f(x)+1\right]}=\lim\limits_{x\to1}\frac{12(x-1)}{(x-1)(x+1)\left(12(x-1)+3\right)}=\frac{12}{6}=2$.

Câu 274: Cho hàm số $f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f\left(x\right)-16}{x-2}=12.$ Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2f\left(x\right)-16}-4}{x^2+x-6}$ bằng

Lời giải

+) Vì $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f\left(x\right)-16}{x-2}=12\Rightarrow f\left(2\right)=16$

+) Có $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2f\left(x\right)-16}-4}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2f\left(x\right)-32}{\left(x^2+x-6\right)\left(\sqrt{2f\left(x\right)-16}+4\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f\left(x\right)-16}{x-2}.\dfrac{2}{\left(x+3\right)\left(\sqrt{2f\left(x\right)-16}+4\right)}$

$=12.\dfrac{2}{\left(2+3\right)\left(\sqrt{2f\left(2\right)-16}+4\right)}$

$=12.\dfrac{2}{5\left(\sqrt{2.16-16}+4\right)}=\dfrac{3}{5}.$

CHƯƠNG III

GIỚI HẠN
HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI 2: GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. GIỚI HẠN HỮU HẠN

Câu 1: Cho các giới hạn: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=2$; $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=3$, hỏi $\lim\limits_{x\to x_0}\left[3f(x)-4g(x)\right]$ bằng

A. 5. **B.** 2. **C.** -6. **D.** 3.

Câu 2: Giá trị của $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2-3x+1\right)$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Câu 3: Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x+3}$

A. $L=-\infty$. **B.** $L=0$. **C.** $L=+\infty$. **D.** $L=1$.

Câu 4: Giá trị của $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2-2x+1\right)$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 5: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2-x+7\right)$ bằng?

A. 5. **B.** 9. **C.** 0. **D.** 7.

Câu 6: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}$ bằng?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 7: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}$ ta được kết quả

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 8: $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left|x^2-4\right|$ bằng

A. -5. **B.** 1. **C.** 5. **D.** -1.

Câu 9: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x+2}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\infty$.

Câu 10: Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2+2020}{2x-1}$.

A. 0. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$ **D.** 2019.

Câu 11: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2|x+1|-5\sqrt{x^2-3}}{2x+3}$ bằng.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{7}$. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 12: Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+1}{x^2+x+4}$.

A. $-\dfrac{1}{6}$. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Câu 13: Giới hạn nào sau đây có kết quả bằng $+\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{(x-1)^2}$ **B.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{(x-1)^2}$ **C.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x-1}{(x-1)^2}$ **D.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$

Câu 14: Cho $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=-2$. Tính $\lim\limits_{x\to 3}\left[f(x)+4x-1\right]$.

A. 5. **B.** 6. **C.** 11. **D.** 9.

DẠNG 2. GIỚI HẠN MỘT BÊN

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;\ b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên đoạn $[a;\ b]$ là?

A. $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$. **B.** $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+}f(x)=f(b)$.

C. $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+}f(x)=f(b)$. **D.** $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$.

Câu 16: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai?**

A. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$. **B.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=-\infty$. **C.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^5}=+\infty$. **D.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$.

Câu 17: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-3x+4}{x-2}$. **B.** $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-3x+4}{x-2}$. **C.** $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-3x+4}{x-2}$. **D.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-3x+4}{x-2}$.

Câu 18: Trong các giới hạn dưới đây, giới hạn nào là $+\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{2x-1}{4-x}$. **B.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-x^3+2x+3\right)$. **C.** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$. **D.** $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{2x-1}{4-x}$.

Câu 19: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-2x+1}{x-1}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 20: $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+2}{x-1}$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\infty$ **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 21: $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$ bằng?

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $-\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$ **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Câu 22: Tính $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{1}{x-3}$.

A. $-\dfrac{1}{6}$. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 23: Tính $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x+1}{x-1}$.

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

Câu 24: Giới hạn $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{1}{x-a}$ bằng:

A. $-\dfrac{1}{2a}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Câu 25: Giới hạn $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** Kết quả khác.

Câu 26: Tính $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-2x+1}{x-1}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 27: Cho $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}$. Tính giới hạn đó.

A. $+\infty$. **B.** **1** **C.** **0**. **D.** $-\infty$

Câu 28: $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x+1}{x-1}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 1. **D.** 0

Câu 29: Tìm $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1-2x}{x-1}$.

A. $-\infty$. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 30: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 1.

Câu 31: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-2\right)=-\dfrac{3}{2}$. **B.** $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{3x+2}{x+1}=-\infty$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-2\right)=+\infty$. **D.** $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{3x+2}{x+1}=-\infty$.

Câu 32: Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4x-3}{x-1}$

A. $+\infty$. **B.** 2. **C.** $-\infty$. **D.** -2.

Câu 33: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{3+2x}{x+2}$.

A. $-\infty$. **B.** 2. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 34: Tính giới hạn bên phải của hàm số $f(x)=\dfrac{3x-7}{x-2}$ khi $x\to 2$.

A. $-\infty$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{7}{2}$. **D.** $-\infty$.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1} & \text{khi } x\neq 1\\ \dfrac{1}{8} & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tính $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$.

A. $\dfrac{1}{8}$. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $-\dfrac{1}{8}$.

Câu 36: Biết $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=4$. Khi đó $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{(x+1)^4}$ bằng:

A. $-\infty$. **B.** 4. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^3-8} & \text{khi } x>2\\ x+\dfrac{m^2}{2}-2m & \text{khi } x\le 2\end{cases}$. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số có giới hạn tại $x=2$.

A. $m=3$ hoặc $m=-2$. **B.** $m=1$ hoặc $m=3$.
C. $m=0$ hoặc $m=1$. **D.** $m=2$ hoặc $m=1$.

Câu 38: Gọi a,b là các giá trị để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4}, x<-2\\ x+1, x\ge -2\end{cases}$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới -2. Tính $3a-b$?

A. 8. **B.** 4. **C.** 24. **D.** 12.

Câu 39: Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+1 \text{ khi } x>2\\ 2x^2-x+1 \text{ khi } x\le 2\end{cases}$ có giới hạn tại $x=2$.

A. -1. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 40: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{khi } x>0\\ mx+m+\dfrac{1}{4} & \text{khi } x\le 0\end{cases}$, m là tham số. Tìm giá trị của m để hàm số có giới hạn tại $x=0$.

A. $m=\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=0$. **D.** $m=-\dfrac{1}{2}$.

DẠNG 3. GIỚI HẠN TẠI VÔ CỰC

Câu 41: Giả sử ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=b$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x).g(x)\right]=a.b$.

B. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=a-b$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$.

D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+g(x)\right]=a+b$.

Câu 42: Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4x^5-3x^3+x+1\right)$.

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** -4.

Câu 43: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-x^2+1\right)$

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 44: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^3+5x^2-9\sqrt{2}x-2017\right)$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 3. **C.** -3. **D.** $+\infty$.

Câu 45: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{4x+2}$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{-1}{4}$. **D.** $\dfrac{-1}{2}$

Câu 46: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{2x+5}$ bằng:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 47: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x}{3x+2}$ bằng:

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 48: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{x+5}$ bằng:

A. 3. **B.** -3. **C.** $-\dfrac{1}{5}$. **D.** 5.

Câu 49: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-4x}{5x+2}$ bằng

A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $-\dfrac{5}{4}$. **C.** $-\dfrac{4}{5}$. **D.** $\dfrac{4}{5}$.

Câu 50: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+8}{x-2}$ bằng

A. -2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 2.

Câu 51: Tính $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x+1}$.

A. $L=-2$. **B.** $L=-1$. **C.** $L=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $L=2$.

Câu 52: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{3-x}$ bằng.

A. -2. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 53: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2018x+3}{2x^2+2018x}$ được.

A. 2018. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{1}{2018}$.

Câu 54: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+1}$ có kết quả là

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 2 **D.** $\dfrac{1}{2}$

Câu 55: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^5-3x^3+1}{4x^3-2x^4-x^5-3}$ bằng

A. -2. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** -3. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 56: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)(x+2)}{x^2+9}$ bằng

A. $\dfrac{2}{9}$. **B.** 1. **C.** -1. **D.** $-\dfrac{1}{9}$.

Câu 57: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$?

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 58: Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}+x\right)$?

A. $+\infty$. **B.** -1. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Câu 59: Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+5}}{4x-1}$.

A. $-\dfrac{1}{4}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Câu 60: Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ bằng

A. 0. **B.** -2. **C.** $-\infty$. **D.** 2.

Câu 61: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+3}$ bằng

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -3.

Câu 62: Tính giới hạn $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-2}{2x+1}$.

A. $I=-2$. **B.** $I=-\dfrac{3}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\dfrac{3}{2}$.

Câu 63: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+1}$ bằng.

A. $-\infty$. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Câu 64: Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+3x}{\sqrt{2x^2+3}}$.

A. $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 65: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x}{3x+2}$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 66: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{x+5}$ bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** $-\dfrac{1}{5}$. **D.** 5.

Câu 67: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{cx^2+a}{x^2+b}$ bằng?

A. a. **B.** b. **C.** c. **D.** $\dfrac{a+b}{c}$.

Câu 68: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x+1}{-x+1}$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** -1. **D.** -4.

Câu 69: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{6x-2}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** 1.

Câu 70: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{4x+3}$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 71: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-2}{x-2}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** -1

Câu 72: Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x+3}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** -1. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Câu 73: Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x+3}$ là.

A. $-\infty$. **B.** -1. **C.** $+\infty$. **D.** 1

Câu 74: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^4+x^2+2}{\left(x^3+1\right)\left(3x-1\right)}}$ có kết quả là

A. $-\sqrt{3}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 75: Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{\left(4x+1\right)^3\left(2x+1\right)^4}{\left(3+2x\right)^7}$. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)$.

A. 2. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 0.

Câu 76: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{mx^2-7x+5}{2x^2+8x-1}=-4$.

A. $m=-4$. **B.** $m=-8$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-3$.

Câu 77: Cho hai số thực a và b thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^2-3x+1}{x+2}-ax-b\right)=0$. Khi đó $a+b$ bằng

A. -4. **B.** 4. **C.** 7. **D.** -7.

Câu 78: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2018}}{x+1}$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** -2018.

Câu 79: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x+1}$ bằng

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 1.

Câu 80: Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax+\sqrt{x^2-3x+5}}{2x-7}=2$. Khi đó

A. $-1\le a\le 2$. **B.** $a<-1$. **C.** $a\ge 5$. **D.** $2<a<5$.

Câu 81: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-3}{x^2+2}$ bằng

A. -2. **B.** $-\dfrac{3}{2}$. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 82: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$?

A. 0. **B.** Giới hạn không tồn tại.
C. 1. **D.** $+\infty$.

Câu 83: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x-3}{x+2}$ bằng

A. $\dfrac{-3}{2}$. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 84: Tìm giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2018}\sqrt{4x^2+1}}{(2x+1)^{2019}}$

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{2^{2018}}$. **C.** $\dfrac{1}{2^{2019}}$. **D.** $\dfrac{1}{2^{2017}}$.

Câu 85: Cho $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x+1}+ax+b\right)=1$.Khi đó giá trị của biểu thức $T=a+b$ bằng

A. -2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 86: Biết rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2}+ax-b\right)=-5$. Tính tổng $a+b$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 5.

Câu 87: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x+5}{2-3x^2}$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Câu 88: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x-3}{1-2x}$ bằng số nào sau đây?

A. $\dfrac{-5}{2}$. **B.** $\dfrac{-2}{3}$. **C.** 5. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 89: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+3}$ bằng.

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -3.

Câu 90: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-5}{-x+3}$ bằng

A. $\dfrac{-5}{3}$. **B.** -1. **C.** 3. **D.** -2.

Câu 91: Tìm giới hạn $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-1}{1-2x}$

A. $L=3$. **B.** $L=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $L=-\dfrac{3}{2}$. **D.** $L=\dfrac{3}{2}$.

Câu 92: Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x+3}$ bằng:

A. $-\infty$. **B.** -1. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Câu 93: Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$?

A. 0. **B.** $-\infty$. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 94: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2+2x+3}{x^2+1}$.

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 95: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=+\infty$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=1$. **C.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=-\infty$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=0$.

Câu 96: Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3}{1-3x}$:

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** $-\dfrac{3}{2}$. **D.** 2.

Câu 97: Tính giới hạn $K=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1}$.

A. $K=0$. **B.** $K=1$. **C.** $K=-2$. **D.** $K=4$.

Câu 98: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^{2018}-1}$.

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 99: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+x-x^2}{x}$

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

Câu 100: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+x}}{x+1}$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Câu 101: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x}{x^2-1}$ bằng

A. -2. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -1.

Câu 102: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x+1}{x}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Câu 103: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{2x}$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 104: Cho a, b, c là các số thực khác 0. Để giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}+ax}{bx-1}=3$ thì

A. $\dfrac{a-1}{b}=3$. **B.** $\dfrac{a+1}{b}=3$. **C.** $\dfrac{-a-1}{b}=3$. **D.** $\dfrac{a-1}{-b}=3$.

Câu 105: Cho số thực a thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a\sqrt{2x^2+3}+2017}{2x+2018}=\dfrac{1}{2}$. Khi đó giá trị của a là

A. $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a=\dfrac{1}{2}$. **D.** $a=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 106: Để $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+4}{mx-2}=\dfrac{1}{2}$. Giá trị của m thuộc tập hợp nào sau đây?

A. $[3;6]$. **B.** $[-3;0]$. **C.** $[-6;-3]$. **D.** $[1;3]$.

Câu 107: Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}}=+\infty$. Giá trị nhỏ nhất của $P=a^2-2a+4$ là.

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 1.

Câu 108: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+3}}{3x+2}$.

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Câu 109: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{4x^2+1}-2}$

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{3}{2}$. **D.** 0.

DẠNG 4. GIỚI HẠN VÔ ĐỊNH

DẠNG 4.1 DẠNG $\dfrac{0}{0}$

Dạng 4.1.1 Không chứa căn

Câu 110: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+1}{(x+2)^2}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** $\dfrac{3}{16}$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 111: Tính giới hạn $A=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

A. $A=-\infty$. **B.** $A=0$. **C.** $A=3$. **D.** $A=+\infty$.

Câu 112: Tính $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-12x+35}{25-5x}$.

A. $-\dfrac{2}{5}$. **B.** $+\infty$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $-\infty$.

Câu 113: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** –4. **D.** 2.

Câu 114: Tính $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ bằng:

A. 3. **B.** 6. **C.** $+\infty$. **D.** -3.

Câu 115: Tính giới hạn $I=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$.

A. $I=-1$. **B.** $I=0$. **C.** $I=1$. **D.** $I=5$.

Câu 116: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 117: Cho giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\dfrac{a}{b}$ trong đó $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S=a^2+b^2$.

A. $S=20$. **B.** $S=17$. **C.** $S=10$. **D.** $S=25$.

Câu 118: Giá trị của $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2018}+x-2}{x^{2017}+x-2}$ bằng $\dfrac{a}{b}$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của a^2-b^2.

A. 4037. **B.** 4035. **C.** -4035. **D.** 4033.

Câu 119: $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{|10-2x|}{x^2-6x+5}$ là

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 120: Tìm $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-\left(1+a^2\right)x+a}{x^3-a^3}$.

A. $\dfrac{2a^2}{a^2+3}$. **B.** $\dfrac{2a^2-1}{3a^2}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{2a^2-1}{3}$.

Câu 121: Tìm $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x^2+2}{x^3+2x-3}$.

A. $-\dfrac{5}{2}$. **B.** $-\dfrac{2}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $+\infty$.

Câu 122: Cho $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\dfrac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính tổng $S=a+b$.

A. 5. **B.** 10. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 123: Biết $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+bx+c}{x-3}=8.\ (b,c\in\mathbb{R})$. Tính $P=b+c.$

A. $P=-13.$ **B.** $P=-11.$ **C.** $P=5.$ **D.** $P=-12.$

Câu 124: Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2+1}{3x^2+8x+5}$.

A. $L=-\dfrac{3}{2}$. **B.** $L=\dfrac{1}{2}$. **C.** $L=-\infty$. **D.** $L=0$.

Câu 125: Cặp (a,b) thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3}=3$ là

A. $a=-3,b=0$. **B.** $a=3,b=0$.

C. $a=0,b=-9$. **D.** không tồn tại cặp (a,b) thỏa mãn như vậy.

Câu 126: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 0.

Câu 127: Tính $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$.

A. $L=-5$. **B.** $L=0$. **C.** $L=-3$. **D.** $L=5$.

Câu 128: Cho a,b là số nguyên và $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+bx-5}{x-1}=7$. Tính a^2+b^2+a+b.

A. 18. **B.** 1. **C.** 15. **D.** 5.

Câu 129: Hãy xác định xem kết quả nào **sai**

A. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x}=2$. **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x-4}=1$.

C. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=-1$. **D.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}=\dfrac{9}{8}$.

Câu 130: Biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-ax+a-1}{x-1}=2$. Tính $M=a^2+2a$.

A. $M=3$. **B.** $M=1$. **C.** $M=-1$. **D.** $M=8$.

Câu 131: Tìm giới hạn $L=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$.

A. $L=1$. **B.** $L=-1$. **C.** $L=0$. **D.** $L=\dfrac{\pi}{2}$.

Câu 132: Cho $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-1}=\dfrac{-1}{2}$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Tổng $S=a^2+b^2$ bằng

A. $S=13$. **B.** $S=9$. **C.** $S=4$. **D.** $S=1$.

Dạng 4.1.2 Chứa căn

Câu 133: Số nào trong các số sau là bằng $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-2\sqrt{3}}{x-3}$?

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$. **B.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$. **D.** $-\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$.

Câu 134: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$. Tính $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

A. $\dfrac{1}{12}$. **B.** $\dfrac{13}{12}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{10}{11}$.

Câu 135: Biết $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{x^2+16}-4}=\dfrac{a}{\sqrt{b}}$, trong đó a là số nguyên, b là số nguyên tố. Ta có tổng $a+2b$ bằng :

A. 13. **B.** 3. **C.** 14. **D.** 8.

Câu 136: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+4}-2}{x}$ bằng

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{3}{4}$. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Câu 137: Tính $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-3x+2}{6\sqrt{x+8}-x-17}$.

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Câu 138: Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+x^2}-2}{x^2}$.

A. $\dfrac{1}{12}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Câu 139: Giá trị của $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x^2}$ bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** -1. **D.** 0.

Câu 140: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}=\dfrac{a}{b}$, với $a,b\in Z,b>0$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a-b$ là

A. 1. **B.** -1. **C.** $\dfrac{8}{9}$. **D.** $\dfrac{1}{9}$.

Câu 141: Tìm $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x+1}-3}$ là

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** $-\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 142: Tìm $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2+x-2}$.

A. -5. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 143: Biết $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\dfrac{a}{b^2}$ ($\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $\sqrt{a}+b+2018$.

A. 2021. **B.** 2023. **C.** 2024. **D.** 2022.

Câu 144: Cho a,b là hai số nguyên thỏa mãn $2a-5b=-8$ và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=4$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $|a|\le 5$. **B.** $a-b>1$. **C.** $a^2+b^2>50$. **D.** $a+b>9$.

Câu 145: Cho $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-2018}{x-4}=2019$. Tính $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1009\left[f(x)-2018\right]}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{2019f(x)+2019}+2019\right)}$.

A. 2019 **B.** 2020 **C.** 2021 **D.** 2018

Câu 146: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}$ bằng $\dfrac{a}{b}$. Giá trị của $a-b$ là

A. $\dfrac{1}{9}$. **B.** $\dfrac{9}{8}$. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 147: Cho biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{x^3-3x+2}(a,b\in\mathbb{R})$ có kết quả là một số thực. Giá trị của biểu thức a^2+b^2 bằng?

A. $6+5\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{45}{16}$ **C.** $\dfrac{9}{4}$. **D.** $87-48\sqrt{3}$

Câu 148: Cho giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}=\dfrac{a}{b}$. Giá trị của $T=2a-b$ là

A. $\dfrac{1}{9}$. **B.** -1. **C.** 10. **D.** $\dfrac{9}{8}$.

Câu 149: Tính $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{\sqrt{2x+5}-1}$.

A. -3. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** -6. **D.** 8.

Câu 150: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-16}{x-2}=12$. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{5f(x)-16}-4}{x^2+2x-8}$

A. $\dfrac{5}{24}$. **B.** $\dfrac{1}{5}$. **C.** $\dfrac{5}{12}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Câu 151: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ bằng

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $+\infty$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 1.

Câu 152: Tính giới hạn $K=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x^2-3x}$.

A. $K=-\dfrac{2}{3}$. **B.** $K=\dfrac{2}{3}$. **C.** $K=\dfrac{4}{3}$. **D.** $K=0$.

Câu 153: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 154: Tính gới hạn $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sqrt{2-x}-1}$.

A. $L=-6$. **B.** $L=-4$. **C.** $L=2$. **D.** $L=-2$.

Câu 155: Tính $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{2x^2-6}{x-\sqrt{3}}=a\sqrt{b}$ (a, b nguyên). Khi đó giá trị của $P=a+b$ bằng

A. 7. **B.** 10. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 156: Biết $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+1}-1}{x}=\dfrac{a}{b}$, trong đó a, b là các số nguyên dương và phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị biểu thức $P=a^2+b^2$.

A. $P=13$. **B.** $P=0$. **C.** $P=5$. **D.** $P=40$.

Câu 157: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}-\sqrt{1-2x}}{x}$.

A. 2. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 0.

Câu 158: Biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)}=\dfrac{a\sqrt{2}}{b}+c$ với a, b, $c\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a+b+c$ bằng:

A. 5. **B.** 37. **C.** 13. **D.** 51.

Câu 159: Giá trị của $I=\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}}\dfrac{x+\sqrt{2}}{x^2-2}$ bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 160: Tính $I=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$?

A. $I=\dfrac{7}{8}$. **B.** $I=\dfrac{3}{2}$. **C.** $I=\dfrac{3}{8}$. **D.** $I=\dfrac{3}{4}$.

Câu 161: Giá trị giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}$ bằng:

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 162: Cho $f(x)$ là đa thức thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-20}{x-2}=10$. Tính $T=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{6f(x)+5}-5}{x^2+x-6}$

A. $T=\dfrac{12}{25}$. **B.** $T=\dfrac{4}{25}$. **C.** $T=\dfrac{4}{15}$. **D.** $T=\dfrac{6}{25}$.

Câu 163: Giới hạn: $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{3x+1}-4}{3-\sqrt{x+4}}$ có giá trị bằng:

A. $-\dfrac{9}{4}$. **B.** -3. **C.** -18. **D.** $-\dfrac{3}{8}$.

Câu 164: Cho $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-16}{x-1}=24$. Tính $I=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-16}{(x-1)\left(\sqrt{2f(x)+4}+6\right)}$

A. 24. **B.** $I=+\infty$. **C.** $I=2$. **D.** $I=0$.

Câu 165: Cho $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sqrt[7]{x+1}.\sqrt{x+4}-2}\right)=\dfrac{a}{b}$ ($\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính tổng $L=a+b$.

A. $L=43$. **B.** $L=23$. **C.** $L=13$. **D.** $L=53$.

Câu 166: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+5}}{x-3}$.

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

DẠNG 4.2 DẠNG $\infty-\infty$

Câu 167: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào có kết quả là 0 ?

A. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^3-1}$. **B.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+5}{x+10}$. **C.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Câu 168: Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}+3x\right)=-2$. Tính giá trị của a.

A. -6. **B.** 12. **C.** 6. **D.** -12

Câu 169: Tìm giới hạn $\mathrm{M}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-x}\right)$. Ta được M bằng

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 170: Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right)=a\sqrt{5}+b$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $S=5a+b$.

A. $S=-5$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=1$. **D.** $S=5$.

Câu 171: Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+2x\right)$

A. 2. **B.** $-\infty$. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 172: Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}+x+2\right)$.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** -2.

Câu 173: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2-1}\right)$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** -1.

Câu 174: Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+ax+1}+bx\right)=-1$. Tính giá của biểu thức $P=a^2-2b^3$.

A. $P=32$. **B.** $P=0$. **C.** $P=16$. **D.** $P=8$.

Câu 175: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+8x+1}+2x\right)$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** -2. **D.** $+\infty$

Câu 176: Tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt[3]{x^3+2}\right)$.

A. -1. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Câu 177: Biết rằng $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x+1}+x\sqrt{2}\right)=\dfrac{a}{b}\sqrt{2}$, ($a;b\in\mathbb{Z},\dfrac{a}{b}$ tối giản). Tổng $a+b$ có giá trị là

A. 1. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 178: Cho giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{36x^2+5ax+1}-6x+b\right)=\dfrac{20}{3}$ và đường thẳng $\Delta: y=ax+6b$ đi qua điểm $M(3;42)$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $T=a^2+b^2$ là:

A. 104. **B.** 100. **C.** 41. **D.** 169.

Câu 179: Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)=5$. Khi đó giá trị a là

A. 10. **B.** -6. **C.** 6. **D.** -10.

Câu 180: Tìm giới hạn $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+1}+x\right)$.

A. $I=-2$. **B.** $I=-4$. **C.** $I=1$. **D.** $I=-1$.

Câu 181: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+2}-x\right)$.

A. -4. **B.** -2. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 182: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$ bằng:

A. 3. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $-\dfrac{5}{2}$. **D.** -3.

Câu 183: Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)=5$ thì giá trị của a là một nghiệm của phương trình nào trong các phương trình sau?

A. $x^2-11x+10=0$. **B.** $x^2-5x+6=0$. **C.** $x^2-8x+15=0$. **D.** $x^2+9x-10=0$.

Câu 184: Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0$. Tính $a-4b$ ta được

A. 3. **B.** 5. **C.** -1. **D.** 2.

Câu 185: $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+5x-2}\right)$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 186: Giới hạn nào dưới đây có kết quả là $\dfrac{1}{2}$?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{2}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

C. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{2}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Câu 187: Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a\sqrt{x^2+1}+2017}{x+2018}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+bx+1}-x\right)=2$. Tính $P=4a+b$.

A. $P=3$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=2$. **D.** $P=1$.

Câu 188: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+2}-x\right)$

A. -4. **B.** -2. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 189: Tìm giới hạn $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2-x+2}\right)$.

A. $I=1/2$. **B.** $I=46/31$. **C.** $I=17/11$. **D.** $I=3/2$.

CHƯƠNG III

GIỚI HẠN
HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI 2: GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

DẠNG 1. GIỚI HẠN HỮU HẠN

Câu 1: Cho các giới hạn: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=2$; $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=3$, hỏi $\lim\limits_{x\to x_0}\left[3f(x)-4g(x)\right]$ bằng

A. 5. **B.** 2. **C.** -6. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to x_0}\left[3f(x)-4g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}3f(x)-\lim\limits_{x\to x_0}4g(x)=3\lim\limits_{x\to x_0}f(x)-4\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=-6$.

Câu 2: Giá trị của $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2-3x+1\right)$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2-3x+1\right)=0$.

Câu 3: Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x+3}$

A. $L=-\infty$. **B.** $L=0$. **C.** $L=+\infty$. **D.** $L=1$.

Lời giải

Ta có $L=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x+3}=\dfrac{3-3}{3+3}=0$.

Câu 4: Giá trị của $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2-2x+1\right)$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2-2x+1\right)=3.1^2-2.1+1=2.$

Câu 5: Giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2-x+7\right)$ bằng?

A. 5. **B.** 9. **C.** 0. **D.** 7.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2-x+7\right)=(-1)^2-(-1)+7=9$.

Câu 6: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}$ bằng?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+3}{x+1}=\dfrac{1^2-2.1+3}{1+1}=1$.

Câu 7: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}$ ta được kết quả

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Dễ thấy $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{2+2}{2-1}=4$

Câu 8: $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left|x^2-4\right|$ bằng

A. -5. **B.** 1. **C.** 5. **D.** -1.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\left|x^2-4\right|=\left|3-4\right|=1$

Câu 9: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x+2}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{2}{3}$

Câu 10: Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2+2020}{2x-1}$.

A. 0. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$ **D.** 2019.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2+2020}{2x-1}=\dfrac{1^3-2.1^2+2020}{2.1-1}=2019$.

Câu 11: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2\left|x+1\right|-5\sqrt{x^2-3}}{2x+3}$ bằng.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{7}$. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2\left|x+1\right|-5\sqrt{x^2-3}}{2x+3}=\dfrac{2-5}{-1}=3$.

Câu 12: Tìm giới hạn $A=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+1}{x^2+x+4}$.

A. $-\frac{1}{6}$. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: Với $x=-2$; $x^2+x+4\neq 0$

Nên $A=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+1}{x^2+x+4}=\dfrac{(-2)+1}{(-2)^2+(-2)+4}=-\dfrac{1}{6}$.

Câu 13: Giới hạn nào sau đây có kết quả bằng $+\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{(x-1)^2}$ **B.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2}{(x-1)^2}$ **C.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-x-1}{(x-1)^2}$ **D.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$

Lời giải

Ta có $(x-1)^2\geq 0, \forall x\neq 1$

Do đó để giới hạn bằng $+\infty$ thì giới hạn của tử phải dương

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{(x-1)^2}=+\infty$.

Câu 14: Cho $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=-2$. Tính $\lim\limits_{x\to 3}\left[f(x)+4x-1\right]$.

A. 5. **B.** 6. **C.** 11. **D.** 9.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 3}\left[f(x)+4x-1\right]=9$.

DẠNG 2. GIỚI HẠN MỘT BÊN

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;\ b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên đoạn $[a;\ b]$ là?

A. $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$. **B.** $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+}f(x)=f(b)$.

C. $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+}f(x)=f(b)$. **D.** $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$.

Lời giải

Hàm số f xác định trên đoạn $[a;\ b]$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a;\ b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;\ b)$, đồng thời $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$.

Câu 16: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai?**

A. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$. **B.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=-\infty$. **C.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x^5}=+\infty$. **D.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ do $\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$ và $x>0$. Vậy đáp án A đúng.

Suy ra đáp án B sai.

Các đáp án C và D đúng. Giải thích tương tự đáp án **A.**

Câu 17: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng $-\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x+4}{x-2}$. **B.** $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{-3x+4}{x-2}$. **C.** $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{-3x+4}{x-2}$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x+4}{x-2}$.

Lời giải

Dễ thấy $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x+4}{x-2}=-3$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x+4}{x-2}=-3$.

Vì $\lim\limits_{x\to2^+}(-3x+4)=-2$; $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)=0; x-2>0,\forall x>2$ nên $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{-3x+4}{x-2}=-\infty$

Câu 18: Trong các giới hạn dưới đây, giới hạn nào là $+\infty$?

A. $\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{2x-1}{4-x}$. **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3+2x+3\right)$. **C.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$. **D.** $\lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{2x-1}{4-x}$.

Lời giải

Xét $\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{2x-1}{4-x}$

Ta có $\lim\limits_{x\to4^-}(2x-1)=7>0$, $\lim\limits_{x\to4^-}(4-x)=0$ và $4-x>0$ với mọi $x<4$

Do đó $\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{2x-1}{4-x}=+\infty$.

Câu 19: Giới hạn $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-2x+1}{x-1}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to1^+}(-2x+1)=-1<0$, $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0$, $x-1>0$ khi $x\to1^+$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-2x+1}{x-1}=-\infty$.

Câu 20: $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x+2}{x-1}$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\infty$ **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x+2}{x-1}=-\infty$ vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to1}(x+2)=3>0\\ \lim\limits_{x\to1}(x-1)=0\\ x-1<0,\forall x<1\end{cases}$.

Câu 21: $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$ bằng?

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}=\dfrac{\sqrt{4}+1}{-1-1}=-\dfrac{3}{2}$.

Câu 22: Tính $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{1}{x-3}$.

A. $-\frac{1}{6}$. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to3^-}(x-3)=0, x-3<0, \forall x<3$.

Câu 23: Tính $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x+1}{x-1}$.

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x+1}{x-1}=-\infty$ do $\lim\limits_{x\to1^-}(x+1)=2>0$, $\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0$ và $(x-1)<0$ với $x<1$.

Câu 24: Giới hạn $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{1}{x-a}$ bằng:

A. $-\frac{1}{2a}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^-}1=1>0\\ \lim\limits_{x\to a^-}(1-a)=0\\ x-a<0 \text{ khi } x\to a^-\end{cases}$

Vậy $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{1}{x-a}=-\infty$.

Câu 25: Giới hạn $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** Kết quả khác.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{x}\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}=0$.

Câu 26: Tính $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-2x+1}{x-1}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}(-2x+1)=-1\\ \lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0\\ x\to 1^+\Rightarrow x-1>0\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{-2x+1}{x-1}=-\infty$$

Câu 27: Cho $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$. Tính giới hạn đó.

A. $+\infty$. **B.** **1** **C.** **0**. **D.** $-\infty$

Lời giải

$$\lim_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}=\lim_{x\to 2^+}\sqrt{\frac{x(x-2)^2}{x^2-4}}=\lim_{x\to 2^+}\sqrt{\frac{(x-2)x}{x+2}}=0$$

Câu 28: $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 1. **D.** 0

Lời giải

Đặt $f(x)=x+1; g(x)=x-1$. Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=2; \lim\limits_{x\to 1^+}g(x)=0; g(x)>0 khi x\to 1^+$

Vậy $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}=+\infty$.

Câu 29: Tìm $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1-2x}{x-1}$.

A. $-\infty$. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}(1-2x)=-1$; $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$ và $x-1>0, \forall x>1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1-2x}{x-1}=-\infty$.

Câu 30: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2+1}{x-1}$.

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)=2>0; \lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0$ và $x-1<0, \forall x<1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2+1}{x-1}=-\infty$.

Câu 31: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-2\right)=-\frac{3}{2}$. **B.** $\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{3x+2}{x+1}=-\infty$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-2\right)=+\infty$. **D.** $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{3x+2}{x+1}=-\infty$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x+1-(x-2)^2}{\sqrt{x^2-x+1}-(x-2)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-3}{\sqrt{x^2-x+1}-x+2}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-1+\dfrac{2}{x}}=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow$ đáp án **A** đúng.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+x-2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1-\dfrac{2}{x}\right)$.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1-\dfrac{2}{x}\right)=2>0$ nên $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1-\dfrac{2}{x}\right)=+\infty\Rightarrow$ đáp án **C** đúng.

Do $\lim\limits_{x\to-1^-}(3x+2)=-1<0$ và $x+1<0$ với $\forall x<-1$ nên $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{3x+2}{x+1}=+\infty\Rightarrow$ đáp án **B** sai.

Do $\lim\limits_{x\to-1^+}(3x+2)=-1<0$ và $x+1>0$ với $\forall x>-1$ nên $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{3x+2}{x+1}=-\infty\Rightarrow$ đáp án **D** đúng.

Câu 32: Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{4x-3}{x-1}$

A. $+\infty$. **B.** 2. **C.** $-\infty$. **D.** -2.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{4x-3}{x-1}=+\infty$ vì $\lim\limits_{x\to1^+}(4x-3)=1$, $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0$, $x-1>0$ khi $x\to1^+$.

Câu 33: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{3+2x}{x+2}$.

A. $-\infty$. **B.** 2. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Xét $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{3+2x}{x+2}$ thấy: $\lim\limits_{x\to-2^-}(3+2x)=-1$, $\lim\limits_{x\to-2^-}(x+2)=0$ và $x+2<0$ với mọi $x<-2$ nên $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{3+2x}{x+2}=+\infty$.

Câu 34: Tính giới hạn bên phải của hàm số $f(x)=\dfrac{3x-7}{x-2}$ khi $x\to2$.

A. $-\infty$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{7}{2}$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+}(3x-7)=-1<0 \\ \lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0 \\ x\to 2^+ \Rightarrow x-2>0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 2^+}\frac{3x-7}{x-2}=-\infty .$$

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1} & \text{khi } x\neq 1 \\ \dfrac{1}{8} & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tính $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $-\frac{1}{8}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{4-x-3}{(x-1)(x+1)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-1}{(x+1)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}=+\infty$

.

Câu 36: Biết $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=4$. Khi đó $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{(x+1)^4}$ bằng:

A. $-\infty$. **B.** 4. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Ta có: + $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=4>0$.

+ $\lim\limits_{x\to -1}(x+1)^4=0$ và với $\forall x\neq -1$ thì $(x+1)^4>0$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{(x+1)^4}=+\infty$.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^3-8} & \text{khi } x>2 \\ x+\dfrac{m^2}{2}-2m & \text{khi } x\le 2\end{cases}$. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số có giới hạn tại $x=2$.

A. $m=3$ hoặc $m=-2$. **B.** $m=1$ hoặc $m=3$.

C. $m=0$ hoặc $m=1$. **D.** $m=2$ hoặc $m=1$.

Lời giải

Ta có : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+2x-8}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-2)(x+4)}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+4}{x^2+2x+4}=\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x+\dfrac{m^2}{2}-2m\right)=\dfrac{m^2}{2}-2m+2$

Hàm số có giới hạn tại $x=2$ khi chỉ khi $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\Leftrightarrow \dfrac{m^2}{2}-2m+2=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{m^2}{2}-2m+\dfrac{3}{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=1 \end{array}\right.$.

Câu 38: Gọi a,b là các giá trị để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-4}, x<-2\\ x+1, x\ge -2\end{cases}$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới -2. Tính $3a-b$?

A. 8. **B.** 4. **C.** 24. **D.** 12.

Lời giải

Do hàm số $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới -2 nên $x=-2$ là nghiệm của phương trình $x^2+ax+b=0$, do đó ta $4-2a+b=0$.

Ta viết lại hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2+a}{x-2}, x<-2\\ x+1, x\ge -2\end{cases}$

Mặt khác hàm số tồn tại giới hạn

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^+} f(2)\Leftrightarrow \frac{-2-2+a}{-2-2}=-1\Leftrightarrow a=8\Rightarrow b=12$$

Do đó $3a-b=12$.

Câu 39: Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+1 \text{ khi } x>2\\ 2x^2-x+1 \text{ khi } x\le 2\end{cases}$ có giới hạn tại $x=2$.

A. -1. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

$D=\mathbb{R}$.

Xét: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2+ax+1\right)=2a+5; \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(2x^2-x+1\right)=7.$

Hàm số $y=f(x)$ có giới hạn tại $x=2$ khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\Leftrightarrow 2x+5=7\Leftrightarrow a=1..$

Câu 40: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{khi } x>0\\ mx+m+\dfrac{1}{4} & \text{khi } x\le 0\end{cases}$, m là tham số. Tìm giá trị của m để hàm số có giới hạn tại $x=0$.

A. $m=\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=0$. **D.** $m=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải:

Ta có:

$$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(x+4)-2^2}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

$$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(mx+m+\frac{1}{4}\right)=m+\frac{1}{4}$$

Hàm số đã cho có giới hạn tại $x=0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}=m+\frac{1}{4}\Leftrightarrow m=0.$$

DẠNG 3. GIỚI HẠN TẠI VÔ CỰC

Câu 41: Giả sử ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=b$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x).g(x)\right]=a.b$.

B. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-g(x)\right]=a-b$.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}$.

D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+g(x)\right]=a+b$.

Lời giải

Vì có thể $b=0$.

Câu 42: Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4x^5-3x^3+x+1\right)$.

A. 0.

B. $+\infty$.

C. $-\infty$.

D. -4.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4x^5-3x^3+x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^5\left(-4-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}\right)=+\infty$.

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}\right)=-4<0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}x^5=-\infty\end{cases}$.

Câu 43: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-x^2+1\right)$

A. $+\infty$.

B. $-\infty$.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-x^2+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(2-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)=-\infty$.

Câu 44: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^3+5x^2-9\sqrt{2}x-2017\right)$ bằng

A. $-\infty$.

B. 3.

C. -3.

D. $+\infty$.

Lời giải

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x^3+5x^2-9\sqrt{2}x-2017\right)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(3+5\frac{1}{x}-9\sqrt{2}\frac{1}{x^2}-2017\frac{1}{x^3}\right)=-\infty.$$

Câu 45: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{4x+2}$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{-1}{4}$. **D.** $\dfrac{-1}{2}$

Lời giải

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{4x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{4+\frac{2}{x}}=\frac{1}{2}.$$

Câu 46: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{2x+5}$ bằng:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Áp dụng quy tắc tìm giới hạn, ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{2x+5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{x\left(2+\frac{5}{x}\right)}=0$.

Câu 47: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x}{3x+2}$ bằng:

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x}{3x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{3+\frac{2}{x}}=-\dfrac{1}{3}$.

Câu 48: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{x+5}$ bằng:

A. 3. **B.** -3. **C.** $-\dfrac{1}{5}$. **D.** 5.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{x+5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-\frac{1}{x}}{1+\frac{5}{x}}=3$.

Câu 49: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-4x}{5x+2}$ bằng

A. $\dfrac{5}{4}$. **B.** $-\dfrac{5}{4}$. **C.** $-\dfrac{4}{5}$. **D.** $\dfrac{4}{5}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3-4x}{5x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\frac{3}{x}-4\right)}{x\left(5+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\frac{3}{x}-4\right)}{\left(5+\frac{2}{x}\right)}=\frac{-4}{5}.$$

Câu 50: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+8}{x-2}$ bằng

A. -2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 2.

Lời giải

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+8}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+\frac{8}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{8}{x}}{1-\frac{2}{x}}=2.$$

Câu 51: Tính $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x+1}$.

A. $L=-2$. **B.** $L=-1$. **C.** $L=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $L=2$.

Lời giải

Ta có $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\dfrac{2+0}{1+0}=2.$

Câu 52: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{3-x}$ bằng.

A. -2. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{3-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\frac{1}{x}}{\frac{3}{x}-1}=-2$.

Câu 53: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2018x+3}{2x^2+2018x}$ được.

A. 2018. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{1}{2018}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2018x+3}{2x^2+2018x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2018}{x}+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{2018}{x}}=\frac{1}{2}$$

Câu 54: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+1}$ có kết quả là

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 2 **D.** $\frac{1}{2}$

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$

Câu 55: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^5-3x^3+1}{4x^3-2x^4-x^5-3}$ bằng

A. -2. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** -3. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^5-3x^3+1}{4x^3-2x^4-x^5-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^5}}{\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}-1-\frac{3}{x^5}}=-2$.

Câu 56: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)(x+2)}{x^2+9}$ bằng

A. $\frac{2}{9}$. **B.** 1. **C.** -1. **D.** $-\frac{1}{9}$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)(x+2)}{x^2+9}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)}{1+\frac{9}{x^2}}=1$.

Câu 57: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$?

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1+0=1$.

.

Câu 58: Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}+x\right)$?

A. $+\infty$. **B.** -1. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x}\right)}+x\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{2+\frac{1}{x}}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(-\sqrt{2+\frac{1}{x}}+1\right)\right]$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ và $=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{2+\dfrac{1}{x}}+1\right)=1-\sqrt{2}<0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+x}+x\right)=+\infty.$

Câu 59: Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+5}}{4x-1}$.

A. $-\dfrac{1}{4}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+5}}{4x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}{4-\dfrac{1}{x}}=-\dfrac{1}{4}$.

Câu 60: Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ bằng

A. 0. **B.** -2. **C.** $-\infty$. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{x}}=-2$.

Câu 61: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+3}$ bằng

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -3.

Lời giải

Chia cả tử và mẫu cho x, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{3}{x}}=\dfrac{1}{1}=1$.

Câu 62: Tính giới hạn $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-2}{2x+1}$.

A. $I=-2$. **B.** $I=-\dfrac{3}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-2}{2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-\dfrac{2}{x}}{2+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{3}{2}$.

Câu 63: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+1}$ bằng.

A. $-\infty$. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=0$.

Câu 64: Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+3x}{\sqrt{2x^2+3}}$.

A. $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+3x}{\sqrt{2x^2+3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(\dfrac{1}{x}+3\right)}{|x|\sqrt{2+\dfrac{3}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+3}{\sqrt{2+\dfrac{3}{x^2}}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 65: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x}{3x+2}$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x}{3x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-1}{3+\dfrac{2}{x}}=-\dfrac{1}{3}$.

Câu 66: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{x+5}$ bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** $-\dfrac{1}{5}$. **D.** 5.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{x+5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{5}{x}}=3$.

Câu 67: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{cx^2+a}{x^2+b}$ bằng?

A. a. **B.** b. **C.** c. **D.** $\dfrac{a+b}{c}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{cx^2+a}{x^2+b}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{c+\dfrac{a}{x^2}}{1+\dfrac{b}{x^2}}=\dfrac{c+0}{1+0}=c$.

Câu 68: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x+1}{-x+1}$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** -1. **D.** -4.

Lời giải

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x+1}{-x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4+\dfrac{1}{x}}{-1+\dfrac{1}{x}}=-4.$$

Câu 69: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{6x-2}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

- Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{6x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{6-\dfrac{2}{x}}=\dfrac{1}{6}$.

Câu 70: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{4x+3}$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{4x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{4+\dfrac{3}{x}}=\dfrac{1}{4}$.

Câu 71: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-2}{x-2}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** -1

Lời giải

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}-2}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}-\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}=1$$

Câu 72: Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x+3}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** -1. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Lời giải

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-3}}{x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{3}{x^2}\right)}}{x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}}{x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}}{1+\dfrac{3}{x}}=-1.$$

Câu 73: Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x+3}$ là.

A. $-\infty$. **B.** -1. **C.** $+\infty$. **D.** 1

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}}{x(1+\dfrac{3}{x})}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}}{(1+\dfrac{3}{x})}=-1$.

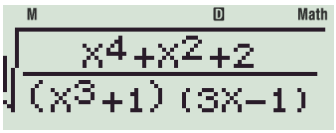
Câu 74: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^4+x^2+2}{(x^3+1)(3x-1)}}$ có kết quả là

A. $-\sqrt{3}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^4+x^2+2}{(x^3+1)(3x-1)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^4\left(1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^4}\right)}{x^4\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^4}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

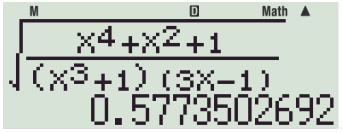
Trắc nghiệm: Sử dụng máy tính Casio

+ Bước 1: Nhập biểu thức vào màn hình máy tính: 

+ Bước 2: Nhấn phím 

+ Bước 3: Nhập giá trị của X: 

và nhấn phím 

+ Bước 4: Kết quả 

. Vậy chọn đáp án B

Câu 75: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{(4x+1)^3(2x+1)^4}{(3+2x)^7}$. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

A. 2. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 0.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(4x+1)^3(2x+1)^4}{(3+2x)^7}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(4+\dfrac{1}{x}\right)^3\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^4}{\left(\dfrac{3}{x}+2\right)^7}=2^3=8$.

Câu 76: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{mx^2-7x+5}{2x^2+8x-1}=-4$.

A. $m=-4$. **B.** $m=-8$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-3$.

Lời giải

$$-4=\lim_{x\to-\infty}\frac{mx^2-7x+5}{2x^2+8x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{m-\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}}{2+\frac{8}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{m}{2}\Rightarrow m=-8$$

Câu 77: Cho hai số thực a và b thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^2-3x+1}{x+2}-ax-b\right)=0$. Khi đó $a+b$ bằng

A. -4. **B.** 4. **C.** 7. **D.** -7.

Lời giải

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2-3x+1}{x+2}-ax-b\right)=0\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left((4-a)x-b-11+\frac{23}{x+2}\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}4-a=0\\-11-b=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=-11\end{cases}\Rightarrow a+b=-7.$$

Câu 78: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2018}}{x+1}$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** -2018.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2018}}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1+\frac{2018}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{2018}{x^2}}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}=1.$

Câu 79: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1}{x+1}$ bằng

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 1.

Lời giải

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}x\left[\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\right]=-\infty.$$

Câu 80: Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax+\sqrt{x^2-3x+5}}{2x-7}=2$. Khi đó

A. $-1\le a\le 2$. **B.** $a<-1$. **C.** $a\ge 5$. **D.** $2<a<5$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax+\sqrt{x^2-3x+5}}{2x-7}=2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a+\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}}{2-\dfrac{7}{x}}=2\Leftrightarrow\dfrac{a+1}{2}=2\Leftrightarrow\dfrac{a+1}{2}=3.$

$\Leftrightarrow a+1=6\Leftrightarrow a=5$

Câu 81: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-3}{x^2+2}$ bằng

A. -2. **B.** $-\dfrac{3}{2}$. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-3}{x^2+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x^2}}=\dfrac{0}{1}=0.$

Câu 82: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$?

A. 0. **B.** Giới hạn không tồn tại. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Xét mọi dãy số (x_n) sao cho $\lim x_n=+\infty\Rightarrow\lim\dfrac{1}{x_n}=0$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)=\lim\left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)$

Ta có $\left|\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right|\le\dfrac{1}{x_n}$ mà $\lim\left(\dfrac{1}{x_n}\right)=0$ nên $\left|\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right|$ nhỏ hơn một số dương bé tùy ý kể từ số hạng nào đó trở đi

Theo định nghĩa dãy số có giới hạn 0 ta có $\lim\left(\dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)=0$

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)=0$

Câu 83: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x-3}{x+2}$ bằng

A. $\dfrac{-3}{2}$. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x-3}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1-\dfrac{3}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}=-1.$$

Câu 84: Tìm giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2018}\sqrt{4x^2+1}}{(2x+1)^{2019}}$

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{2^{2018}}$. **C.** $\dfrac{1}{2^{2019}}$. **D.** $\dfrac{1}{2^{2017}}$.

Lời giải

Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2018}\sqrt{4x^2+1}}{(2x+1)^{2019}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2018}\sqrt{4x^2+1}}{\left[x\left(2+\frac{1}{x}\right)\right]^{2019}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2018}.x.\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{x^{2019}\left(2+\frac{1}{x}\right)^{2019}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{\left(2+\frac{1}{x}\right)^{2019}}=\frac{\sqrt{4+0}}{(2+0)^{2019}}=\frac{2}{2^{2019}}=\frac{1}{2^{2018}}$$

Câu 85: Cho $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x+1}+ax+b\right)=1$.Khi đó giá trị của biểu thức $T=a+b$ bằng

A. -2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+3x+1}{x+1}+ax+b\right)=1\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(a+1)x^2+(a+b+3)x+b+1}{x+1}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(a+1)x+(a+b+3)+\frac{b+1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+1=0\\a+b+3=1\\b+1\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}\Rightarrow T=a+b=-2.$$

Câu 86: Biết rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-2}+ax-b\right)=-5$. Tính tổng $a+b$.

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 5.

Lời giải

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-2}+ax-b\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(a+1)x^2-(2a+b)x+2b+1}{x-2}\right)=-5$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+1=0\\2a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=7\end{cases}$$

Vậy $a+b=6$

Câu 87: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x+5}{2-3x^2}$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+5}{2-3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{2}{x^2}-3}=-\frac{1}{3}.$$

Câu 88: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x-3}{1-2x}$ bằng số nào sau đây?

A. $\dfrac{-5}{2}$. **B.** $\dfrac{-2}{3}$. **C.** 5. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x-3}{1-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5-\dfrac{3}{x}}{\dfrac{1}{x}-2}=\dfrac{5}{-2}$.

Câu 89: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+3}$ bằng.

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -3.

Lời giải

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{3}{x}}=1.$$

Câu 90: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-5}{-x+3}$ bằng

A. $\dfrac{-5}{3}$. **B.** -1. **C.** 3. **D.** -2.

Lời giải

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-5}{-x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\dfrac{5}{x}}{-1+\dfrac{3}{x}}=\frac{2}{-1}=-2.$$

Câu 91: Tìm giới hạn $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-1}{1-2x}$

A. $L=3$. **B.** $L=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $L=-\dfrac{3}{2}$. **D.** $L=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có: $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-1}{1-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}-2}=\dfrac{3-0}{0-2}=-\dfrac{3}{2}$.

Câu 92: Giá trị của $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x+3}$ bằng:

A. $-\infty$. **B.** -1. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Lời giải

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-3}}{x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{3}{x^2}\right)}}{x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}}{x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}}{1+\dfrac{3}{x}}=-1.$$

Câu 93: Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$?

A. 0. **B.** $-\infty$. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2(1+\dfrac{1}{x^2})}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-1}=-1$.

Câu 94: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2+2x+3}{x^2+1}$.

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2+2x+3}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=5$.

Câu 95: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=+\infty$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=1$. **C.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=-\infty$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=0$.

Lời giải

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-x}}{1-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{x^2-\dfrac{1}{x}}}{x\left(\dfrac{1}{x}-2x\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-\dfrac{1}{x}}}{\dfrac{1}{x}-2x}=+\infty$. Vậy A đúng.

Câu 96: Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3}{1-3x}$:

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** $-\dfrac{3}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3}{1-3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\dfrac{3}{x}}{\dfrac{1}{x}-3}=-\dfrac{2}{3}$.

Câu 97: Tính giới hạn $K=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1}$.

A. $K=0$. **B.** $K=1$. **C.** $K=-2$. **D.** $K=4$.

Lời giải

Ta có: $K=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}}=-2$.

Câu 98: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^{2018}-1}$.

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^{2018}-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^{2017}}.\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{1-\dfrac{1}{x^{2017}}}=0$.

Câu 99: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+x-x^2}{x}$

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+x-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}-1)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}-1)\right)=+\infty$

Câu 100: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+x}}{x+1}$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2+x}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}}{1+\dfrac{1}{x}}=2$.

Câu 101: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x}{x^2-1}$ bằng

A. -2. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x}{x^2-1}=2$.

Câu 102: Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x+1}{x}$ bằng

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0+0=0$.

Câu 103: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{2x}$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{2}=-\dfrac{1}{2}$

Câu 104: Cho a, b, c là các số thực khác 0. Để giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}+ax}{bx-1}=3$ thì

A. $\dfrac{a-1}{b}=3$. **B.** $\dfrac{a+1}{b}=3$. **C.** $\dfrac{-a-1}{b}=3$. **D.** $\dfrac{a-1}{-b}=3$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}+ax}{bx-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-3x-(ax)^2}{(bx-1)\left(\sqrt{x^2-3x}-ax\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left[\left(1-a^2\right)x-3\right]}{(bx-1)\left(\sqrt{x^2-3x}-ax\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(1-a^2\right)-\dfrac{3}{x}}{\left(b-\dfrac{1}{x}\right)\left(-\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}-a\right)}=\dfrac{\left(1-a^2\right)}{b(-1-a)}=\dfrac{a-1}{b}=3$.

Câu 105: Cho số thực a thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a\sqrt{2x^2+3}+2017}{2x+2018}=\dfrac{1}{2}$. Khi đó giá trị của a là

A. $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a=\dfrac{1}{2}$. **D.** $a=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a\sqrt{2x^2+3}+2017}{2x+2018}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a\sqrt{2+\dfrac{3}{x^2}}+\dfrac{2017}{x}}{2+\dfrac{2018}{x}}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{a\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 106: Để $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+4}{mx-2}=\dfrac{1}{2}$. Giá trị của m thuộc tập hợp nào sau đây?

A. $[3;6]$. **B.** $[-3;0]$. **C.** $[-6;-3]$. **D.** $[1;3]$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+4}{mx-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{4}{x}}{m-\dfrac{2}{x}}=-\dfrac{2}{m}$.

Theo bài ra ta có: $-\dfrac{2}{m}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m=-4\in[-6;-3]$.

Câu 107: Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}}=+\infty$. Giá trị nhỏ nhất của $P=a^2-2a+4$ là.

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\left((2-a)x-3\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]=+\infty\Rightarrow-(2-a)\geq0\Leftrightarrow a\geq2$.

Với $a\geq2\Rightarrow a(a-2)\geq0$ suy ra $P=a(a-2)+4\geq4$.

Câu 108: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+3}}{3x+2}$.

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+3}}{3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+x\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}{3x+2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}}{3+\dfrac{2}{x}}=-\frac{1}{3}.$$

Câu 109: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{4x^2+1}-2}$

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{3}{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{4x^2+1}-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{x\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{x}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{2}{x}}=\dfrac{1}{2}.$

DẠNG 4. GIỚI HẠN VÔ ĐỊNH

DẠNG 4.1 DẠNG $\dfrac{0}{0}$

Dạng 4.1.1 Không chứa căn

Câu 110: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+1}{(x+2)^2}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** $\dfrac{3}{16}$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+1}{(x+2)^2}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{1}{(x+2)^2}.(x+1)=-\infty$.

Do $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{1}{(x+2)^2}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-2}(x+1)=-1<0$.

Câu 111: Tính giới hạn $A=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

A. $A=-\infty$. **B.** $A=0$. **C.** $A=3$. **D.** $A=+\infty$.

Lời giải

$A=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x^2+x+1)=3$.

Câu 112: Tính $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-12x+35}{25-5x}$.

A. $-\dfrac{2}{5}$. **B.** $+\infty$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-12x+35}{25-5x}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{(x-7)(x-5)}{-5(x-5)}=\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x-7}{-5}=\dfrac{2}{5}$.

Câu 113: Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ bằng

A. 0. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4$.

Câu 114: Tính $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ bằng:

A. 3. **B.** 6. **C.** $+\infty$. **D.** -3.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=6$.

Câu 115: Tính giới hạn $I=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$.

A. $I=-1$. **B.** $I=0$. **C.** $I=1$. **D.** $I=5$.

Lời giải

$I=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-3)=-1$.

Câu 116: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-2)=-1$

Câu 117: Cho giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\dfrac{a}{b}$ trong đó $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S=a^2+b^2$.

A. $S=20$. **B.** $S=17$. **C.** $S=10$. **D.** $S=25$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{1}{4}$.

Do đó $a=1;\ b=4$ suy ra $S=1^2+4^2=17$.

Câu 118: Giá trị của $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2018}+x-2}{x^{2017}+x-2}$ bằng $\dfrac{a}{b}$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của a^2-b^2.

A. 4037. **B.** 4035. **C.** -4035. **D.** 4033.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2018}+x-2}{x^{2017}+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2018}-1+x-1}{x^{2017}-1+x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(x^{2017}+x^{2016}...+x+1\right)+x-1}{(x-1)\left(x^{2016}+x^{2015}+...+x+1\right)+x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2017}+x^{2016}...+x+2}{x^{2016}+x^{2015}+...+x+2}$

$=\dfrac{1+1+....+1+2}{1+1+...+1+2}=\dfrac{2019}{2018}$

Vậy $a^2-b^2=4037$.

Câu 119: $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{|10-2x|}{x^2-6x+5}$ là

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{|10-2x|}{x^2-6x+5}=\lim_{x\to 5^+}\frac{2x-10}{x^2-6x+5}=\lim_{x\to 5^+}\frac{2}{x-1}=\frac{1}{2}$$

Câu 120: Tìm $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3-\left(1+a^2\right)x+a}{x^3-a^3}$.

A. $\dfrac{2a^2}{a^2+3}$. **B.** $\dfrac{2a^2-1}{3a^2}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{2a^2-1}{3}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to a}\frac{x^3-\left(1+a^2\right)x+a}{x^3-a^3}=\lim_{x\to a}\frac{x^3-a^2x-x+a}{\left(x-a\right)\left(x^2+ax+a^2\right)}=\lim_{x\to a}\frac{x\left(x+a\right)-1}{x^2+ax+a^2}=\frac{2a^2-1}{3a^2}.$$

Câu 121: Tìm $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x^2+2}{x^3+2x-3}$.

A. $-\dfrac{5}{2}$. **B.** $-\dfrac{2}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{5}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-3x^2+2}{x^3+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(x^2-2\right)}{\left(x-1\right)\left(x^2+x+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x+1\right)\left(x^2-2\right)}{x^2+x+3}=-\frac{2}{5}.$$

Câu 122: Cho $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\dfrac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính tổng $S=a+b$.

A. 5. **B.** 10. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}\Rightarrow S=5$.

Câu 123: Biết $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+bx+c}{x-3}=8.\ (b,c\in\mathbb{R})$. Tính $P=b+c.$

A. $P=-13.$ **B.** $P=-11.$ **C.** $P=5.$ **D.** $P=-12.$

Lời giải

Vì $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+bx+c}{x-3}=8$ là hữu hạn nên tam thức x^2+bx+c có nghiệm $x=3$

$\Leftrightarrow 3b+c+9=0\Leftrightarrow c=-9-3b$

Khi đó

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+bx+c}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+bx-9-3b}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3+b)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3}(x+3+b)=8\Leftrightarrow 6+b=8\Leftrightarrow b=2\Rightarrow c=-15$$

Vậy $P=b+c=-13$.

Câu 124: Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2+1}{3x^2+8x+5}$.

A. $L=-\dfrac{3}{2}$. **B.** $L=\dfrac{1}{2}$. **C.** $L=-\infty$. **D.** $L=0$.

Lời giải

$$L=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{3x^2+8x+5}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(3x+5)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-2}{3x+5}=-\frac{3}{2}.$$

Câu 125: Cặp (a,b) thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3}=3$ là

A. $a=-3,b=0$. **B.** $a=3,b=0$.

C. $a=0,b=-9$. **D.** không tồn tại cặp (a,b) thỏa mãn như vậy.

Lời giải

Cách 1:

Để $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3}=3$ thì ta phải có $x^2+ax+b=(x-3)(x-m)$.

Khi đó $3-m=3\Leftrightarrow m=0$. Vậy $x^2+ax+b=(x-3)x=x^2-3x$.

Suy ra $a=-3$ và $b=0$.

Cách 2:

Ta có $\dfrac{x^2+ax+b}{x-3}=x+a+3+\dfrac{3a+b+9}{x-3}$.

Vậy để có $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+ax+b}{x-3}=3$ thì ta phải có $\begin{cases}3a+b+9=0\\a+6=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\b=0\end{cases}$.

Câu 126: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 0.

Lời giải

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

Câu 127: Tính $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$.

A. $L=-5$. **B.** $L=0$. **C.** $L=-3$. **D.** $L=5$.

Lời giải

Ta có: $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+4)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+4)=5$.

Câu 128: Cho a,b là số nguyên và $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+bx-5}{x-1}=7$. Tính a^2+b^2+a+b.

A. 18. **B.** 1. **C.** 15. **D.** 5.

Lời giải

Vì $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+bx-5}{x-1}=7$ hữu hạn nên $x=1$ phải là nghiệm của phương trình $ax^2+bx-5=0$ suy ra $a+b-5=0\Rightarrow b=5-a$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+(5-a)x-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(ax+5)}{x-1}=a+5=7\Rightarrow a=2$ nên $b=3$

Suy ra: $a^2+b^2+a+b=18$.

Câu 129: Hãy xác định xem kết quả nào **sai**

A. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x}=2$. **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x-4}=1$.

C. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=-1$. **D.** $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}=\dfrac{9}{8}$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x+5)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+4}{x+5}=\dfrac{8}{9}$.

Câu 130: Biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-ax+a-1}{x-1}=2$. Tính $M=a^2+2a$.

A. $M=3$. **B.** $M=1$. **C.** $M=-1$. **D.** $M=8$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-ax+a-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)-a(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1-a)=3-a\Rightarrow a=1$.

Vậy $M=a^2+2a=3$.

Câu 131: Tìm giới hạn $L=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$.

A. $L=1$. **B.** $L=-1$. **C.** $L=0$. **D.** $L=\dfrac{\pi}{2}$.

Lời giải

Đặt: $t=x-\dfrac{\pi}{2}$.

Khi $x\to\dfrac{\pi}{2}$ thì $t\to 0$. Vậy $L=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-\sin t}{t}=-1$.

Câu 132: Cho $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-1}=\dfrac{-1}{2}$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Tổng $S=a^2+b^2$ bằng

A. $S=13$. **B.** $S=9$. **C.** $S=4$. **D.** $S=1$.

Lời giải

Vì hàm số có giới hạn hữu hạn tại $x=1$ nên biểu thức tử nhận $x=1$ làm nghiệm, hay $1+a+b=0$.

Áp dụng vào giả thiết, được $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax-1-a}{x^2-1}=\dfrac{-1}{2}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1+a)}{(x-1)(x+1)}=-\dfrac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1+a}{x+1}=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{2+a}{2}=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow a=-3$. Suy ra $b=2$.

Vậy $a^2+b^2=13$.

Dạng 4.1.2 Chứa căn

Câu 133: Số nào trong các số sau là bằng $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-2\sqrt{3}}{x-3}$?

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$. **B.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$. **D.** $-\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+x}-2\sqrt{3}}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{(x-3)\left(\sqrt{x^2+x}+2\sqrt{3}\right)}$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+4)}{(x-3)\left(\sqrt{x^2+x}+2\sqrt{3}\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2+x}+2\sqrt{3}}=\dfrac{3+4}{\sqrt{3^2+3}+2\sqrt{3}}=\dfrac{7}{4\sqrt{3}}=\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$.

Câu 134: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$. Tính $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

A. $\dfrac{1}{12}$. **B.** $\dfrac{13}{12}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{10}{11}$.

Lời giải

Ta có: $\dfrac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}=\dfrac{\left(2\sqrt{1+x}-2\right)+\left(2-\sqrt[3]{8-x}\right)}{x}=\dfrac{2\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x}+\dfrac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+1}+\dfrac{1}{4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}}$. Do vậy:

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+1}+\dfrac{1}{4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+1}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}}$

$=1+\frac{1}{12}=\frac{13}{12}$.

Câu 135: Biết $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{x^2+16}-4}=\frac{a}{\sqrt{b}}$, trong đó a là số nguyên, b là số nguyên tố. Ta có tổng $a+2b$ bằng :

A. 13. **B.** 3. **C.** 14. **D.** 8.

Lời giải

Ta có

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{x^2+16}-4}=\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{5-x^2}\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{5-x^2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{5-x^2}\right)}{x^2\left(\sqrt{5}+\sqrt{5-x^2}\right)}=\frac{x^2\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{x^2\left(\sqrt{5}+\sqrt{5-x^2}\right)}=\frac{\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{5-x^2}\right)}$$

Khi đó ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{x^2+16}-4}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{5-x^2}\right)}=\frac{4}{\sqrt{5}}\Rightarrow a+2b=14$$

Câu 136: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-3x+4}-2}{x}$ bằng

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{3}{4}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-3x+4}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x+4-4}{x\left(\sqrt{x^2-3x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-3}{\sqrt{x^2-3x+4}+2}=-\frac{3}{4}.$$

Câu 137: Tính $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-3x+2}{6\sqrt{x+8}-x-17}$.

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-3x+2}{6\sqrt{x+8}-x-17}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x-2)\left(6\sqrt{x+8}+x+17\right)}{-(x-1)^2}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-2)\left(6\sqrt{x+8}+x+17\right)}{-(x-1)}$$

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-2)\left(6\sqrt{x+8}+x+17\right)=-36$

$\lim\limits_{x\to 1^+}(-x+1)=0$ và $-x+1<0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-3x+2}{6\sqrt{x+8}-x-17}=+\infty$.

Câu 138: Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+x^2}-2}{x^2}$.

A. $\dfrac{1}{12}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+x^2}-2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8+x^2-8}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(8+x^2\right)^2}+2\sqrt[3]{8+x^2}+4\right)}$.

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(8+x^2\right)^2}+2\sqrt[3]{8+x^2}+4}=\dfrac{1}{12}$.

Câu 139: Giá trị của $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x^2}$ bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** -1. **D.** 0.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+x^2+1-1}{x^2\left(\sqrt{x^3+x^2+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{\left(\sqrt{x^3+x^2+1}+1\right)}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 140: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}=\dfrac{a}{b}$, với $a,b\in Z,b>0$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a-b$ là

A. 1. **B.** -1. **C.** $\dfrac{8}{9}$. **D.** $\dfrac{1}{9}$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}=\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{x+\sqrt{4x-3}}{x+1+\sqrt{5x+1}}.\dfrac{(x+1)^2-(5x+1)}{x^2-4x+3}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{x+\sqrt{4x-3}}{x+1+\sqrt{5x+1}}.\dfrac{x^2-3x}{x^2-4x+3}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 3}\left[\dfrac{x+\sqrt{4x-3}}{x+1+\sqrt{5x+1}}.\dfrac{x}{x-1}\right]=\dfrac{6}{8}.\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{8}\Rightarrow a=9,\ b=8\ \Rightarrow a-b=1$.

Câu 141: Tìm $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x+1}-3}$ là

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** $-\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x+1}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-3)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{4(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-3)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{4}=-\dfrac{3}{2}$.

Câu 142: Tìm $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2+x-2}$.

A. -5. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{(x-1)(x+2)\left(x+\sqrt{2x-1}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x+2)\left(x+\sqrt{2x-1}\right)}=0$.

Câu 143: Biết $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\dfrac{a}{b^2}$ ($\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $\sqrt{a}+b+2018$.

A. 2021. **B.** 2023. **C.** 2024. **D.** 2022.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\dfrac{1}{2^2}$.

Suy ra $a=1;b=2$.

$\sqrt{a}+b+2018=1+2+2018=2021$.

Câu 144: Cho a,b là hai số nguyên thỏa mãn $2a-5b=-8$ và $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=4$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $|a|\le 5$. **B.** $a-b>1$. **C.** $a^2+b^2>50$. **D.** $a+b>9$.

Lời giải

+ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-1+1-\sqrt{1-bx}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-1}{x}+\dfrac{1-\sqrt{1-bx}}{x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{ax+1-1}{x\left[\left(\sqrt[3]{ax+1}\right)^2+\sqrt[3]{ax+1}+1\right]}+\dfrac{1-(1-bx)}{x\left(1+\sqrt{1-bx}\right)}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a}{\left(\sqrt[3]{ax+1}\right)^2+\sqrt[3]{ax+1}+1}+\dfrac{b}{1+\sqrt{1-bx}}\right)=\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}$

Theo giả thiết $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=4\Rightarrow\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}=4\Leftrightarrow 2a+3b=24$

+ Ta có hệ $\begin{cases}2a-5b=-8\\2a+3b=24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\b=4\end{cases}$ nên $|a|\le 5$ là sai.

Câu 145: Cho $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-2018}{x-4}=2019$. Tính $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1009\left[f(x)-2018\right]}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{2019f(x)+2019}+2019\right)}$.

A. 2019 **B.** 2020 **C.** 2021 **D.** 2018

Lời giải

Theo giả thiết ta có $f(4)=2018$

Ta có $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1009\left[f(x)-2018\right]}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{2019f(x)+2019}+2019\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1009\left[f(x)-2018\right]\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2019f(x)+2019}+2019\right)}=\dfrac{1009.4.2019}{\sqrt{2019.2018+2019}+2019}=2018$

Câu 146: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}$ bằng $\dfrac{a}{b}$. Giá trị của $a-b$ là

A. $\dfrac{1}{9}$. **B.** $\dfrac{9}{8}$. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(x^2-3x\right)\left(x+\sqrt{4x-3}\right)}{\left(x^2-4x+3\right)\left(x+1+\sqrt{5x+1}\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x\left(x+\sqrt{4x-3}\right)}{(x-1)\left(x+1+\sqrt{5x+1}\right)}$

$=\dfrac{3.6}{2.8}=\dfrac{9}{8}$. Vậy $\begin{cases}a=9\\b=8\end{cases}\Rightarrow a-b=1$.

Câu 147: Cho biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{x^3-3x+2}(a,b\in\mathbb{R})$ có kết quả là một số thực. Giá trị của biểu thức a^2+b^2 bằng?

A. $6+5\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{45}{16}$ **C.** $\dfrac{9}{4}$. **D.** $87-48\sqrt{3}$

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{x^3-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{(x-1)^2(x+2)}=L,$ với $L\in\mathbb{R}$

Khi đó $\sqrt{a+1}-b-2=0\Leftrightarrow\sqrt{a+1}=b+2\Leftrightarrow\begin{cases}b\geq -2\\a+1=b^2+4b+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b\geq -2\\a=b^2+4b+3\end{cases}$

Thay $a=b^2+4b+3$ vào:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{x^3-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{\left(b^2+4b+3\right)x^2+1}-bx-2}{(x-1)^2(x+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(b^2+4b+3\right)x^2+1-(bx+2)^2}{(x-1)^2(x+2)\left[\sqrt{\left(b^2+4b+3\right)x^2+1}+bx+2\right]}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(4b+3)x^2-4bx-3}{(x-1)^2(x+2)\left[\sqrt{(b^2+4b+3)x^2+1}+bx+2\right]}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(4b+3)x+3}{(x-1)(x+2)\left[\sqrt{(b^2+4b+3)x^2+1}+bx+2\right]}=L,\ L\in\mathbb{R}.$$

Khi đó: $(4b+3)+3=0\Leftrightarrow b=-\frac{3}{2}\Rightarrow a=-\frac{3}{4}.$

Vậy $a^2+b^2=\frac{45}{16}$

Câu 148: Cho giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}=\frac{a}{b}$. Giá trị của $T=2a-b$ là

A. $\frac{1}{9}$. **B.** -1. **C.** 10. **D.** $\frac{9}{8}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-3x)\left(x+\sqrt{4x-3}\right)}{(x^2-4x+3)\left(x+1+\sqrt{5x+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x\left(x+\sqrt{4x-3}\right)}{(x-1)\left(x+1+\sqrt{5x+1}\right)}=\frac{3.(3+3)}{2.(4+4)}=\frac{9}{8}.$$

Vậy $T=2a-b=10$.

Câu 149: Tính $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{\sqrt{2x+5}-1}$.

A. -3. **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** -6. **D.** 8.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-2x-8}{\sqrt{2x+5}-1}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-4)(\sqrt{2x+5}+1)}{(\sqrt{2x+5}-1)(\sqrt{2x+5}+1)}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-4)(\sqrt{2x+5}+1)}{2(x+2)}$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{(x-4)(\sqrt{2x+5}+1)}{2}=-6$$

Câu 150: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-16}{x-2}=12$. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{5f(x)-16}-4}{x^2+2x-8}$

A. $\frac{5}{24}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{5}{12}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Do $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-16}{x-2}=12$ nên ta có $f(2)-16=0$ hay $f(2)=16$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{5f(x)-16}-4}{x^2+2x-8}=\lim_{x\to 2}\frac{5(f(x)-16)}{(x-2)(x+4)(\sqrt[3]{(5f(x)-16)^2}+4\sqrt[3]{5f(x)-16}+16)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-16}{x-2}.\frac{5}{(x+4)(\sqrt[3]{(5f(x)-16)^2}+4\sqrt[3]{5f(x)-16}+16)}$$

$$=12.\frac{5}{6.48}=\frac{5}{24}.$$

Câu 151: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ bằng

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $+\infty$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\dfrac{1}{4}$.

Câu 152: Tính giới hạn $K=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x^2-3x}$.

A. $K=-\dfrac{2}{3}$. **B.** $K=\dfrac{2}{3}$. **C.** $K=\dfrac{4}{3}$. **D.** $K=0$.

Lời giải

Ta có $K=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{x(x-3)\left(\sqrt{4x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{(x-3)\left(\sqrt{4x+1}+1\right)}=-\dfrac{2}{3}$.

Câu 153: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\dfrac{1}{4}$.

Câu 154: Tính gới hạn $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sqrt{2-x}-1}$.

A. $L=-6$. **B.** $L=-4$. **C.** $L=2$. **D.** $L=-2$.

Lời giải

$L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sqrt{2-x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{-x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{2-x}+1\right)=2$.

Câu 155: Tính $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{2x^2-6}{x-\sqrt{3}}=a\sqrt{b}$ (a, b nguyên). Khi đó giá trị của $P=a+b$ bằng

A. 7. **B.** 10. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{2x^2-6}{x-\sqrt{3}}=\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{2\left(x^2-3\right)}{x-\sqrt{3}}=\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}2\left(x+\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3}$.

Suy ra $a=4$, $b=3$. Vậy $P=a+b=7$.

Câu 156: Biết $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3x+1}-1}{x}=\dfrac{a}{b}$, trong đó a, b là các số nguyên dương và phân số $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị biểu thức $P=a^2+b^2$.

A. $P=13$. **B.** $P=0$. **C.** $P=5$. **D.** $P=40$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x+1-1}{x\left(\sqrt{3x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+1}=\dfrac{3}{2}$.

Câu 157: Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}-\sqrt{1-2x}}{x}$.

A. 2. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 0.

Lời giải

Ta có:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4x^2-2x+1}-\sqrt{1-2x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{4x^2}{x\left(\sqrt{4x^2-2x+1}+\sqrt{1-2x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4x}{\left(\sqrt{4x^2-2x+1}+\sqrt{1-2x}\right)}=0.$$

Câu 158: Biết $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}\left(x-1\right)}=\dfrac{a\sqrt{2}}{b}+c$ với a, b, $c\in\mathbb{Z}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a+b+c$ bằng:

A. 5. **B.** 37. **C.** 13. **D.** 51.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}\left(x-1\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2+2-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}\left(x-1\right)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{\sqrt{2}\left(x-1\right)}+\lim_{x\to1}\frac{2-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}\left(x-1\right)}=I+J.$$

Tính $I=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{\sqrt{2}(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+2-4}{\sqrt{2}(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{\sqrt{2}(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{\sqrt{2}\left(\sqrt{x^2+x+2}+2\right)}=\dfrac{3}{4\sqrt{2}}$.

và $J=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{8-7x-1}{\sqrt{2}(x-1)\left[4+2\sqrt[3]{7x+1}+\left(\sqrt[3]{7x+1}\right)^2\right]}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-7}{\sqrt{2}\left[4+2\sqrt[3]{7x+1}+\left(\sqrt[3]{7x+1}\right)^2\right]}=\dfrac{-7}{12\sqrt{2}}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)}=I+J=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

Suy ra $a=1$, $b=12$, $c=0$. Vậy $a+b+c=13$.

Câu 159: Giá trị của $I=\lim\limits_{x\to -\sqrt{2}}\dfrac{x+\sqrt{2}}{x^2-2}$ bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

$I=\lim\limits_{x\to -\sqrt{2}}\dfrac{x+\sqrt{2}}{x^2-2}=\lim\limits_{x\to -\sqrt{2}}\dfrac{x+\sqrt{2}}{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)}=\lim\limits_{x\to -\sqrt{2}}\dfrac{1}{x-\sqrt{2}}=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}$.

Câu 160: Tính $I=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$?

A. $I=\dfrac{7}{8}$. **B.** $I=\dfrac{3}{2}$. **C.** $I=\dfrac{3}{8}$. **D.** $I=\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

$I=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-\sqrt{x+3}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(2x-\sqrt{x+3}\right)\left(2x+\sqrt{x+3}\right)}{(x-1)(x+1)\left(2x+\sqrt{x+3}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-x-3}{(x-1)(x+1)\left(2x+\sqrt{x+3}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(4x+3)}{(x-1)(x+1)\left(2x+\sqrt{x+3}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x+3}{(x+1)\left(2x+\sqrt{x+3}\right)}=\dfrac{7}{8}$

Câu 161: Giá trị giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}$ bằng:

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}}{2x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}-|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}}=\frac{-\sqrt{1-0}+\sqrt{4+0}}{2+0}=\frac{1}{2}$$

Câu 162: Cho $f(x)$ là đa thức thỏa mãn $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-20}{x-2}=10$. Tính $T=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{6f(x)+5}-5}{x^2+x-6}$

A. $T=\dfrac{12}{25}$. **B.** $T=\dfrac{4}{25}$. **C.** $T=\dfrac{4}{15}$. **D.** $T=\dfrac{6}{25}$.

Lời giải

Cách 1:

Chọn $f(x)=10x$, ta có $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-20}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{10x-20}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{10(x-2)}{x-2}=10$.

Lúc đó $T=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{6f(x)+5}-5}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{60x+5}-5}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{60x+5}-5}{(x-2)(x+3)}$

$$=\lim_{x\to2}\frac{60x+5-5^3}{(x-2)(x+3)\left(\sqrt[3]{60x+5}^2+5\sqrt[3]{60x+5}+25\right)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{60(x-2)}{(x-2)(x+3)\left(\sqrt[3]{60x+5}^2+5\sqrt[3]{60x+5}+25\right)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{60}{(x+3)\left(\sqrt[3]{60x+5}^2+5\sqrt[3]{60x+5}+25\right)}=\frac{4}{25}$$

Cách 2:

Theo giả thiết có $\lim\limits_{x\to2}\left(f(x)-20\right)=0$ hay $\lim\limits_{x\to2}f(x)=20\ (*)$

Khi đó $T=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt[3]{6f(x)+5}-5}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{6f(x)+5-125}{(x^2+x-6)\left[\left(\sqrt[3]{6f(x)+5}\right)^2+5\left(\sqrt[3]{6f(x)+5}\right)+25\right]}$

$$T=\lim_{x\to2}\frac{6\left[f(x)-20\right]}{(x-2)(x+3)\left[\left(\sqrt[3]{6f(x)+5}\right)^2+5\left(\sqrt[3]{6f(x)+5}\right)+25\right]}$$

$T=\dfrac{10.6}{5.75}=\dfrac{4}{25}$.

Câu 163: Giới hạn: $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{3x+1}-4}{3-\sqrt{x+4}}$ có giá trị bằng:

A. $-\dfrac{9}{4}$. **B.** -3. **C.** -18. **D.** $-\dfrac{3}{8}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{3x+1}-4}{3-\sqrt{x+4}}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\left[(3x+1)-16\right]\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{\left[9-(x+4)\right]\left(\sqrt{3x+1}+4\right)}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{-3\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{\sqrt{3x+1}+4}=\dfrac{-18}{8}=-\dfrac{9}{4}$.

Câu 164: Cho $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-16}{x-1}=24$. Tính $I=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-16}{(x-1)\left(\sqrt{2f(x)+4}+6\right)}$

A. 24. **B.** $I=+\infty$. **C.** $I=2$. **D.** $I=0$.

Lời giải

Vì $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-16}{x-1}=24\Rightarrow f(1)=16$ vì nếu $f(1)\neq 16$ thì $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-16}{x-1}=\infty$.

Ta có $I=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-16}{(x-1)\left(\sqrt{2f(x)+4}+6\right)}=\dfrac{1}{12}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-16}{(x-1)}=2$.

Câu 165: Cho $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sqrt[7]{x+1}.\sqrt{x+4}-2}\right)=\dfrac{a}{b}$ ($\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính tổng $L=a+b$.

A. $L=43$. **B.** $L=23$. **C.** $L=13$. **D.** $L=53$.

Lời giải

Đặt $L=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sqrt[7]{x+1}.\sqrt{x+4}-2}\right)=\dfrac{a}{b}$ thì $\dfrac{1}{L}=\lim\left(\dfrac{\sqrt[7]{x+1}.\sqrt{x+4}-2}{x}\right)=\dfrac{b}{a}$.

Ta có

$$\frac{b}{a}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[7]{x+1}.\sqrt{x+4}-\sqrt{x+4}+\sqrt{x+4}-2}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[7]{x+1}.\sqrt{x+4}-\sqrt{x+4}}{x}\right)+\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\right)$$

Xét $L_1=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{.\sqrt{x+4}\left(\sqrt[7]{x+1}-1\right)}{x}\right)$.Đặt $t=\sqrt[7]{x+1}$.Khi đó: $\begin{cases}x=t^7-1\\ x\to 0\Rightarrow t\to 1\end{cases}$

$$L_1=\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt{t^7+3}(t-1)}{t^7-1}=\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt{t^7+3}}{\left(t^6+t^5+t^4+t^3+t^2+t+1\right)}=\frac{2}{7}$$

Xét $L_2=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\dfrac{1}{4}$

Vậy $\dfrac{b}{a}=\dfrac{2}{7}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{15}{28}\Rightarrow a=28,b=15\Rightarrow a+b=43\Rightarrow a+b=43$.

Câu 166: Giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+5}}{x-3}$.

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{6}$.

Lời giải

Ta có

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+5}}{x-3}=\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}-\frac{\sqrt[3]{x+5}-2}{x-3}\right).$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x+1-4}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}-\frac{x+5-8}{(x-3)\left(\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+4\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}-\frac{1}{\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+4}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$$

DẠNG 4.2 DẠNG $\infty-\infty$

Câu 167: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào có kết quả là 0 ?

A. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^3-1}$. **B.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+5}{x+10}$. **C.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Lời giải

Xét $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$.

Câu 168: Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}+3x\right)=-2$. Tính giá trị của a.

A. -6. **B.** 12. **C.** 6. **D.** -12

Lời giải

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+ax}+3x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{ax}{\sqrt{9x^2+ax}-3x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{a}{-\sqrt{9+\frac{a}{x}}-3}=-\frac{a}{6}$$

$$\Rightarrow -\frac{a}{6}=-2\Leftrightarrow a=12$$

Câu 169: Tìm giới hạn $\mathrm{M}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-x}\right)$. Ta được M bằng

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\mathrm{M}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x^2-x}}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{|x|.\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{\sqrt{1-\frac{4}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{3}{2}.$$

Câu 170: Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right)=a\sqrt{5}+b$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $S=5a+b$.

A. $S=-5$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=1$. **D.** $S=5$.

Lời giải

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{5x^2+2x}-x\sqrt{5}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-\sqrt{5+\frac{2}{x}}-\sqrt{5}} = -\frac{1}{5}\sqrt{5}.$$

Suy ra: $a=-\frac{1}{5}$, $b=0$. Vậy $S=-1$.

Câu 171: Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+2x\right)$

A. 2. **B.** $-\infty$. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+2x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+2x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+2x\right)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\left(2-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\right) = -\infty$ vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=1$.

Câu 172: Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}+x+2\right)$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** -2.

Lời giải

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}+x+2\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+2-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+x+2}-x-2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-3x-2}{\sqrt{x^2+x+2}-x-2}.$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-3-\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}-1-\frac{2}{x}} = \frac{3}{2}.$$

Câu 173: Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2-1}\right)$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** -1.

Lời giải

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2-1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(3x+x\sqrt{9-\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty}x\left(3+\sqrt{9-\frac{1}{x^2}}\right) = -\infty$$

Câu 174: Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+ax+1}+bx\right)=-1$. Tính giá của biểu thức $P=a^2-2b^3$.

A. $P=32$. **B.** $P=0$. **C.** $P=16$. **D.** $P=8$.

Lời giải

TH1: $b=2$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+ax+1}+2x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+1}{\sqrt{4x^2+ax+1}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a+\frac{1}{x}}{-\sqrt{4+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}}-2}=-\frac{a}{4}.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+ax+1}+bx\right)=-1\Leftrightarrow -\frac{a}{4}=-1\Rightarrow a=4.$$

TH2: $b\neq 2\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+ax+1}+bx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(-\sqrt{4+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}}+b\right)\right]=\begin{cases}-\infty \text{ neáu b}>2\\ +\infty \text{ neáu b}<2\end{cases}$

Vậy $a=4, b=2\Rightarrow P=a^2-2b^3=0$.

Câu 175: $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+8x+1}+2x\right)$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 0. **C.** -2. **D.** $+\infty$

Lời giải

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2+8x+1}+2x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x+1}{\sqrt{4x^2+8x+1}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8+\frac{1}{x}}{-\sqrt{4+\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}}-2}=-2$$

.

Câu 176: Tìm $\lim_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt[3]{x^3+2}\right)$.

A. -1. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+x-\sqrt[3]{x^3+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-2}{x^2+x\sqrt[3]{x^3+2}+\left(\sqrt[3]{x^3+2}\right)^2}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-2}{x^2\left(1+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^3}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^3}}\right)^2\right)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\frac{-2}{x^2}}{1+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^3}}+\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^3}}\right)^2}\right)=1$$

Vậy $\lim_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt[3]{x^3+2}\right)=1$

Câu 177: Biết rằng $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x+1}+x\sqrt{2}\right)=\frac{a}{b}\sqrt{2}$, ($a;b\in\mathbb{Z}, \frac{a}{b}$ tối giản). Tổng $a+b$ có giá trị là

A. 1. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-3x+1}+x\sqrt{2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3x+1-2x^2}{\sqrt{2x^2-3x+1}-x\sqrt{2}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3+\frac{1}{x}}{-\sqrt{2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Vậy $a=3$; $b=4\Rightarrow a+b=7$.

Câu 178: Cho giới hạn $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{36x^2+5ax+1}-6x+b\right)=\frac{20}{3}$ và đường thẳng $\Delta: y=ax+6b$ đi qua điểm $M(3;42)$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Giá trị của biểu thức $T=a^2+b^2$ là:

A. 104. **B.** 100. **C.** 41. **D.** 169.

Lời giải

Đường thẳng $\Delta: y=ax+6b$ đi qua điểm $M(3;42)$ nên $3a+6b=42\Rightarrow a+2b=14$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{36x^2+5ax+1}-6x+b\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5ax+1}{\sqrt{36x^2+5ax+1}+6}+b\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5a+\frac{1}{x}}{\sqrt{36+\frac{5a}{x}+\frac{1}{x^2}}+6}+b\right)=\frac{5a}{12}+b.$$

Do đó $\frac{5a}{12}+b=\frac{20}{3}\Rightarrow 5a+12b=80$. Ta có hệ: $\begin{cases}5a+12b=80\\a+2b=14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=5\end{cases}$.

Vậy $T=a^2+b^2=41$.

Câu 179: Cho $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)=5$. Khi đó giá trị a là

A. 10. **B.** -6. **C.** 6. **D.** -10.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)\left(\sqrt{x^2+ax+5}-x\right)}{\sqrt{x^2+ax+5}-x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+5}{\sqrt{x^2+ax+5}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{a+\frac{5}{x}}{-\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{5}{x^2}}-1}=\frac{a}{-2}.$$

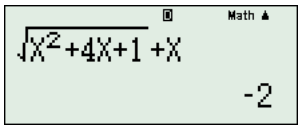
Do đó: $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)=5\Leftrightarrow\frac{a}{-2}=5\Leftrightarrow a=-10$.

Câu 180: Tìm giới hạn $I=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+1}+x\right)$.

A. $I=-2$. **B.** $I=-4$. **C.** $I=1$. **D.** $I=-1$.

Lời giải

Cách 1: Sử dụng máy tính cầm tay tính giá trị biểu thức $\sqrt{x^2+4x+1}+x$ tại $x=-10^{10}$:



Vậy $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+1}+x\right)=-2$. Chọn đáp án **A.**

Cách 2: Ta có $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x+1}{\sqrt{x^2+4x+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-1}$

$=\dfrac{4}{-2}=-2$.

Câu 181: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+2}-x\right)$.

A. -4. **B.** -2. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-4x+2-x^2}{\sqrt{x^2-4x+2}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x+2}{\sqrt{x^2-4x+2}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+1}$

$=-2$.

Câu 182: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$ bằng:

A. 3. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $-\dfrac{5}{2}$. **D.** -3.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-5x+6}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-5+\dfrac{6}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}}+1}=-\dfrac{5}{2}$.

Câu 183: Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)=5$ thì giá trị của a là một nghiệm của phương trình nào trong các phương trình sau?

A. $x^2-11x+10=0$. **B.** $x^2-5x+6=0$. **C.** $x^2-8x+15=0$. **D.** $x^2+9x-10=0$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)=5 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2+ax+5-x^2}{\sqrt{x^2+ax+5}-x}\right)=5 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{ax+5}{\sqrt{x^2+ax+5}-x}\right)=5$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{a+\dfrac{5}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{a}{x}+\dfrac{5}{x^2}}-1}\right)=5 \Leftrightarrow \dfrac{a}{-2}=5 \Leftrightarrow a=-10.$

Vì vậy giá trị của a là một nghiệm của phương trình $x^2+9x-10=0$.

Câu 184: Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0$. Tính $a-4b$ ta được

A. 3. **B.** 5. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải

Ta có

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-ax\right)-b\right)=0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x^2-3x+1-a^2x^2}{\sqrt{4x^2-3x+1}+ax}-b\right)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\left(4-a^2\right)x^2-3x+1}{\sqrt{4x^2-3x+1}+ax}-b\right)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4-a^2=0\\ a>0\\ \dfrac{-3}{2+a}-b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=-\dfrac{3}{4}\end{cases}.$

Vậy $a-4b=5$.

Câu 185: $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+5x-2}\right)$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+5x-2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{\sqrt{x^2+5x+4}+\sqrt{x^2+5x-2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{x^2}}\right)}=3.$

Câu 186: Giới hạn nào dưới đây có kết quả là $\dfrac{1}{2}$?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{2}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. **B.** $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

C. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{2}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$. **D.** $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Lời giải

Xét: $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+x}$.

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 187: Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a\sqrt{x^2+1}+2017}{x+2018}=\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+bx+1}-x\right)=2$. Tính $P=4a+b$.

A. $P=3$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=2$. **D.** $P=1$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a\sqrt{x^2+1}+2017}{x+2018}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(-a\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{2017}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{2018}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-a\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{2017}{x}}{1+\dfrac{2018}{x}}=-a$.

Nên $-a=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+bx+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+bx+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+bx+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+bx+1}+x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{bx+1}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{b}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(b+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{b}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{b+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{b}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\dfrac{b}{2}$.

Nên $\dfrac{b}{2}=2\Leftrightarrow b=4$.

Vậy $P=4\left(-\dfrac{1}{2}\right)+4=2$.

Câu 188: Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+2}-x\right)$

A. -4. **B.** -2. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-4x+2-x^2}{\sqrt{x^2-4x+2}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4x+2}{\sqrt{x^2-4x+2}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4+\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+1}$

$=-2$.

Câu 189: Tìm giới hạn $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2-x+2}\right)$.

A. $I=1/2$. **B.** $I=46/31$. **C.** $I=17/11$. **D.** $I=3/2$.

Lời giải

Ta có: $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2-x+2}\right)\Leftrightarrow I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-x^2+x-2}{x+\sqrt{x^2-x+2}}+1\right)$

$\Leftrightarrow I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+\sqrt{x^2-x+2}}+1\right)\Leftrightarrow I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}}+1\right)\Leftrightarrow I=\dfrac{3}{2}.$

CHƯƠNG III

GIỚI HẠN
HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI 3: HÀM SỐ LIÊN TỤC

I LÝ THUYẾT.

I. KHÁI NIỆM

1. Hàm số liên tục tại một điểm.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Hàm số $y=f(x)$ gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là $f(x)$ gián đoạn tại x_0 và x_0 là điểm gián đoạn của hàm số $f(x)$.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn.

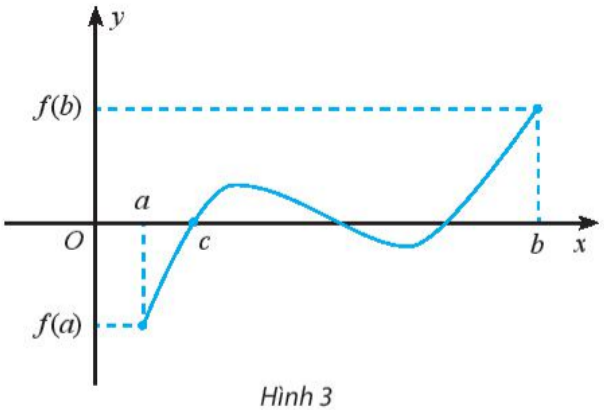
Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên một khoảng $(a;b)$ nếu hàm số liên tục tại mọi điểm trên khoảng đó.

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên $[a;b]$ nếu nó liên tục trên $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

Nhận xét: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a)f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$.

Nhận xét: Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ là một đường liền, có điểm đầu, điểm cuối (Hình 3). Nếu hai điểm này nằm về hai phía so với trục hoành thì đường liền nói trên luôn cắt trục hoành tại ít nhất một điểm. Điều này có thể được phát biểu dưới dạng như sau:

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì luôn tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$.



Hình 3

II. MỘT SỐ ĐỊNH LÍ CƠ BẢN

1. Tính liên tục của một số hàm số sơ cấp cơ bản.

Các hàm số đa thức $P(x)$ và hai hàm số lượng giác $y=\sin x, y=\cos x$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$.

Các hàm số phân thức hữu tỉ và hai hàm số lượng giác $y=\tan x, y=\cot x$ là những hàm số liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

Hàm căn thức $\sqrt{x}$ liên tục trên nửa khoảng $[0;+\infty)$.

2. Tính liên tục của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm liên tục.

Giả sử $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là các hàm số liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

a) Các hàm số $y=f(x)+g(x), y=f(x)-g(x), y=f(x).g(x)$ liên tục tại x_0.

b) Hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0)\neq 0$.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Câu 1: Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ tại điểm $x_0=2$

Câu 2: Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{2} & khi\ x\le 1\\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & khi\ x>1\end{cases}$ tại $x_0=1$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ mx+1 & \text{khi } x=2\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x=2$.

Câu 4: Chon hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-3|}{x-3} & khi\ x\neq 3\\ m & khi\ x=3\end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x=3$.

Câu 5: Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\sqrt{x+2}}{x+1} & ,\text{khi } x>-1\\ 2x+3 & ,\text{khi } x\le -1\end{cases}$. tại $x_0=-1$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{6}}{x-2} & ,\text{khi } x\neq 2\\ a & ,\text{khi } x=2\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của a để hàm số liên tục tại $x=2$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & ,x>1\\ x^2+3 & ,x<1\\ k^2 & ,x=1\end{cases}$. Tìm k để $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

Câu 8: Cho a và b là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{ax+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 4x^2+5b & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{3x+1}}{x-1}, x\neq 1\\ ax, x=1\end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0=1$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3m & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số gián đoạn tại $x=1$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ m^2+3m & \text{khi } x=2\end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x_0=2$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x^2-4} & \text{khi } x>2\\ x^2+ax+3b & \text{khi } x<2\\ 2a+b-6 & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$. Tính $I=a+b$?

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x}{x-2} & \text{khi } x>2\\ mx-4 & \text{khi } x\leq 2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

Câu 14: Để hàm số $y=\begin{cases}x^2+3x+2 & \text{khi } x\leq -1\\ 4x+a & \text{khi } x>-1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=-1$ thì giá trị của a là

Câu 15: Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4} & \text{khi } x>4\\ mx+1 & \text{khi } x\leq 4\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=4$.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{\left|2x^2-7x+6\right|}{x-2} & \text{khi } x<2\\ a+\dfrac{1-x}{2+x} & \text{khi } x\geq 2\end{cases}$. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=2$

Câu 17: Giá trị của tham số a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & khi\ x>1\\ ax-\dfrac{1}{2} & khi\ x\leq 1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=1$ là

Câu 18: Giá trị của a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-3x+2} & \text{khi } x\neq 2\\ \dfrac{2a+1}{6} & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

DẠNG 2: HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

a. Các hàm số đa thức, phân thức hữu tỉ, lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

b. Tổng, hiệu, tích của các hàm số liên tục tại x_0 thì cũng liên tục tại x_0.

c. Nếu hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục tại x_0 và $g(x_0)\neq 0$ thì hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0.

Câu 19: Tìm các khoảng liên tục của hàm số

a) $y=x^3+3x^2+x$ b) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ c) $y=\dfrac{x+1}{x^2+x-2}$; d) $y=\tan x+\cos x$

Câu 20: Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+2 & \text{khi } x\geq 0\\ x^2+a & \text{khi } x<0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Câu 21: Định a để hàm số $f(x)=\begin{cases}ax+\dfrac{1}{4} & khi \quad x\leq 2\\ \dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & khi \quad x>2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 22: Định a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{8x+1}-1}{x} & khi \quad x>0\\ x^2+2x-4a & khi \quad x\leq 0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 23: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{9-x}}{x} & ,0<x<9\\ m & ,x=0\\ \dfrac{3}{x} & ,x\geq 9\end{cases}$. Tìm m để $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[0;+\infty\right)$.

Câu 24: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{2x-4}+3 & \text{khi } x\geq 2\\ \dfrac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} & \text{khi } x<2\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 25: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}a^2x^2 & \text{khi } x\leq\sqrt{2},a\in\mathbb{R}\\ \left(2-a\right)x^2 & \text{khi } x>\sqrt{2}\end{cases}$. Giá trị của a để $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ là:

Câu 26: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}3x+a-1 & \text{khi} \quad x\leq 0\\ \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & \text{khi} \quad x>0\end{cases}$. Tìm tất cả giá trị của a để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 27: Tìm a để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} & \text{khi} \quad x>4\\ \dfrac{\left(a+2\right)x}{4} & \text{khi} \quad x\leq 4\end{cases}$ liên tục trên tập xác định.

Câu 28: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-4x^2+3}{x-1} & \text{khi} \quad x\neq 1\\ ax+\dfrac{5}{2} & \text{khi} \quad x=1\end{cases}$. Xác định a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-4}+3 & \text{khi } x\geq 2\\ \dfrac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} & \text{khi } x<2\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 30: Cho a, b là hai số thực sao cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1} & \text{khi} \quad x\neq 1\\ 2ax-1 & \text{khi} \quad x=1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $a-b$.

Câu 31: Nếu hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & \text{khi } x<-5\\ x+17 & \text{khi} -5\leq x\leq 10\\ ax+b+10 & \text{khi } x>10\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $a+b$ bằng

Câu 32: Tìm tham số thực m để hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-12}{x+4} & \text{khi } x\neq -4\\ mx+1 & \text{khi } x=-4\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=-4$.

Câu 33: Biết rằng hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+5x+6}{x+2} & \text{khi} \quad x>-2\\ mx+n & \text{khi} \quad x\leq -2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và n là một số thực tùy ý. Giá trị của m bằng

DẠNG 3: CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

Câu 34: CMR phương trình sau đây có nghiệm: $x^4-3x+1=0$

Câu 35: CMR phương trình $2x^3-6x+1=0$ có 3 nghiệm trong khoảng.

Câu 36: CMR phương trình $x^3+(m+3)x^2+(1-m)x-1=0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

Câu 37: CMR phương trình $a\cos 3x+b\cos 2x+c\cos x+\sin x=0$ luôn có nghiệm trên $[0;2\pi]$

Câu 38: Chứng minh rằng với mọi giá trị thực của tham số m phương trình sau luôn có nghiệm

$$x^3-2x^2+x-1-\frac{2}{x}+\frac{m}{x+3}=0.$$

Câu 39: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình sau có nghiệm: $(2m^2-5m+2)(x-1)^{2017}(x^{2018}-2)+2x+3=0$

Câu 40: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $x^3-3x^2+(2m-2)x+m-3=0$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1<-1<x_2<x_3$.

Câu 1: Với mọi giá trị thực của tham số m, chứng minh phương trình $(m^2+2m+3)(x^4-5x^2+4)+4x^3-9x=0$ luôn có ít nhất ba nghiệm thực.

Câu 2: Vậy với mọi số thực m thì phương trình đã cho có ít nhất 3 nghiệm thực. Chứng minh rằng phương trình $\left(1-m^2\right)x^5-3x-1=0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Câu 3: Cho phương trình $ax^2+bx+505c=0$ ($a\neq 0$) thỏa mãn $a+2b+2022c=0$. Chứng minh phương trình trên có nghiệm.

Câu 4: Cho phương trình: $\left(m^2-m+5\right)x^3-3x-6=0$. Chứng minh rằng: Với mọi $m\in\mathbb{R}$, phương trình đã cho có ít nhất 1 nghiệm.

Câu 5: Với mọi giá trị thực của tham số m, chứng minh phương trình $\left(1-m^2\right)x^5-3x-1=0$ luôn có nghiệm thực.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\left(m^2-3m+2\right)x^3-3x+1=0$ có nghiệm.

CHƯƠNG III

GIỚI HẠN
HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI 3: HÀM SỐ LIÊN TỤC

I LÝ THUYẾT.

I. KHÁI NIỆM

1. Hàm số liên tục tại một điểm.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Hàm số $y=f(x)$ gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Nhận xét: Hàm số $f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là $f(x)$ gián đoạn tại x_0 và x_0 là điểm gián đoạn của hàm số $f(x)$.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn.

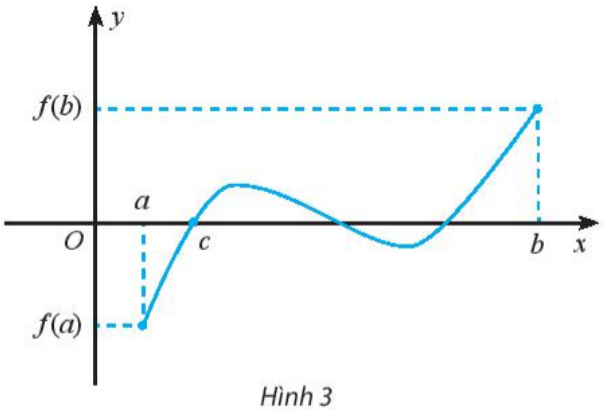
Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên một khoảng $(a;b)$ nếu hàm số liên tục tại mọi điểm trên khoảng đó.

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên $[a;b]$ nếu nó liên tục trên $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

Nhận xét: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a)f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$.

Nhận xét: Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ là một đường liền, có điểm đầu, điểm cuối (Hình 3). Nếu hai điểm này nằm về hai phía so với trục hoành thì đường liền nói trên luôn cắt trục hoành tại ít nhất một điểm. Điều này có thể được phát biểu dưới dạng như sau:

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì luôn tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$.



Hình 3

II. MỘT SỐ ĐỊNH LÍ CƠ BẢN

1. Tính liên tục của một số hàm số sơ cấp cơ bản.

Các hàm số đa thức $P(x)$ và hai hàm số lượng giác $y=\sin x, y=\cos x$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$.

Các hàm số phân thức hữu tỉ và hai hàm số lượng giác $y=\tan x, y=\cot x$ là những hàm số liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

Hàm căn thức $\sqrt{x}$ liên tục trên nửa khoảng $[0;+\infty)$.

2. Tính liên tục của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm liên tục.

Giả sử $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là các hàm số liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

a) Các hàm số $y=f(x)+g(x), y=f(x)-g(x), y=f(x).g(x)$ liên tục tại x_0.

b) Hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0)\neq 0$.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Câu 1: Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ tại điểm $x_0=2$

Lời giải

Tập xđ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}, 2\in D$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{x-1}=1=f(2)$

Vậy hàm số liên tục tại $x_0=2$.

Câu 2: Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{x}{2} & khi\ \ x\le 1\\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & khi\ x>1\end{cases}$ tại $x_0=1$

Lời giải

Tập xđ: $D=\mathbb{R}, 1\in D$. $f(1)=-\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-x}{2}=-\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-2}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$

Vậy hàm số liên tục tại $x_0=1$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ mx+1 & \text{khi } x=2\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x=2$.

Lời giải

$D=\mathbb{R},1\in \mathrm{D}$ $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(2)=2m+1$ và $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+2x+4\right)=12$.

Để $f(x)$ liên tục tại $x=2$ thì $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)\Leftrightarrow 2m+1=12\Leftrightarrow m=\dfrac{11}{2}$.

Câu 4: Chon hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-3|}{x-3} & khi\ \ x\neq 3\\ m & khi\ \ x=3\end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x=3$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{|x-3|}{x-3}=-1$.

Tương tự ta có $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=1$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)$ nên $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ không tồn tại. Vậy với mọi, hàm số đã cho không liên tục tại $x=3$.

Câu 5: Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\sqrt{x+2}}{x+1} & ,\text{khi } x>-1\\ 2x+3 & ,\text{khi } x\leq -1\end{cases}$. tại $x_0=-1$

Lời giải

Ta có: $f(-1)=1$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=1$.

$$\lim_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x+\sqrt{x+2}}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^2-x-2}{(x+1)\left(x-\sqrt{x+2}\right)}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x-2}{x-\sqrt{x+2}}=\frac{3}{2}.$$

Suy ra: $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)$.

Vậy hàm số gián đoạn tại $x=-1$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{6}}{x-2} & ,\text{khi } x\neq 2\\ a & ,\text{khi } x=2\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của a để hàm số liên tục tại $x=2$.

Lời giải

Ta có: $f(2)=a$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{6}}{x-2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

Hàm số liên tục tại $x=2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & ,x>1\\ x^2+3 & ,x<1\\ k^2 & ,x=1\end{cases}$. Tìm k để $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Với $x=1$ ta có: $f(1)=k^2$

Với $x\neq 1$ ta có:

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+3\right)=4$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)^2=4$ suy ra $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=4$.

Vậy để hàm số gián đoạn tại $x=1$ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq k^2\Leftrightarrow k^2\neq 4\Leftrightarrow k\neq\pm 2$.

Câu 8: Cho a và b là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{ax+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 4x^2+5b & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$.

Lời giải

Cách 1: Theo kết quả đã biết thì $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+1}-1}{x}=\dfrac{a}{2}$. Mặt khác $f(0)=5b$. Để hàm số đã cho liên tục tại $x=0$ thì $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\Leftrightarrow a=10b$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{3x+1}}{x-1}, x\neq 1\\ ax, x=1\end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0=1$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{3x+1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}+\dfrac{2-\sqrt{3x+1}}{x-1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{(x-1)\left[\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^2+2.\sqrt[3]{x+7}+4\right]}+\dfrac{-3(x-1)}{(x-1)\left(2+\sqrt{3x+1}\right)}\right)$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^2+2.\sqrt[3]{x+7}+4}-\frac{3}{2+\sqrt{3x+1}}\right)=-\frac{3}{2}.$$

Hàm số liên tục tại $x_0=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1) \Leftrightarrow a=-\frac{3}{2}$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3m & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số gián đoạn tại $x=1$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Hàm số gián đoạn tại $x=1$ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}\neq 3m$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}\neq 3m \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}(x+2)\neq 3m \Leftrightarrow 3\neq 3m \Leftrightarrow m\neq 1.$

Câu 11: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ m^2+3m & \text{khi } x=2\end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x_0=2$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$.

Hàm số đã cho liên tục tại $x_0=2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

$\Leftrightarrow 4=m^2+3m \Leftrightarrow m^2+3m-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-4\end{array}\right.$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x^2-4} & \text{khi } x>2\\ x^2+ax+3b & \text{khi } x<2\\ 2a+b-6 & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$. Tính $I=a+b$?

Lời giải

Để hàm $f(x)$ liên tục tại $x=2$ cần có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-x-2}{(x+2)(x-2)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+1}{(x+2)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}=\dfrac{3}{16}$.

$\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2+ax+3b\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2+ax+3b\right)=2a+3b+4$

$f(2)=2a+b-6$

Suy ra ta được hệ phương trình: $\begin{cases} 2a+b-6=\dfrac{3}{16} \\ 2a+3b+4=\dfrac{3}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{179}{32} \\ b=-5 \end{cases} \Rightarrow a+b=\dfrac{19}{32}.$

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x}{x-2} & \text{khi} \quad x>2 \\ mx-4 & \text{khi} \quad x\le 2 \end{cases}$ liên tục tại $x=2.$

Lời giải

Ta có: $f(2)=2m-4;\ \lim\limits_{x\to 2^-}(mx-4)=2m-4;\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-2x}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}x=2.$

Để hàm số liên tục tại $x=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=f(2) \Leftrightarrow 2m-4=2 \Leftrightarrow m=3.$

Câu 14: Để hàm số $y=\begin{cases} x^2+3x+2 & \text{khi} \quad x\le -1 \\ 4x+a & \text{khi} \quad x>-1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x=-1$ thì giá trị của a là

Lời giải

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(-1)=0.$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}(x^2+3x+2)=0$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}(4x+a)=a-4.$

Hàm số đã cho liên tục tại $x=-1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=f(-1)$

$\Leftrightarrow a-4=0 \Leftrightarrow a=4.$

Câu 15: Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x-4} & \text{khi } x>4 \\ mx+1 & \text{khi } x\le 4 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x=4.$

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 4^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4^+}(x+4)=8.$

Và: $\lim\limits_{x\to 4^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(mx+1)=4m+1=f(4).$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x=4$ nếu $\lim\limits_{x\to 4^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}f(x)=f(4).$

$\Rightarrow 4m+1=8 \Leftrightarrow m=\dfrac{7}{4}.$

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases} \dfrac{\left|2x^2-7x+6\right|}{x-2} & \text{khi } x<2 \\ a+\dfrac{1-x}{2+x} & \text{khi } x\ge 2 \end{cases}$. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=2$

Lời giải

Tại $x_0 = 2$, ta có:

❍ $f(2) = a - \frac{1}{4}$

❍ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(a + \frac{1-x}{2+x}\right) = a - \frac{1}{4}.$

❍ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{|2x^2 - 7x + 6|}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{|(x-2)(2x-3)|}{x-2}$

$= \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)(2x-3)}{x-2} = -\lim\limits_{x\to 2^-}(2x-3) = -1.$

Để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$ thì $f(2) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

$\Leftrightarrow a - \frac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}.$

Câu 17: Giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \ khi \ x > 1 \\ ax - \frac{1}{2} \ khi \ x \le 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 1$ là

Lời giải

$f(1) = a - \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(ax - \frac{1}{2}\right) = a - \frac{1}{2}.$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}.$

Hàm số liên tục tại $x = 1$ khi $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow a - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1.$

Câu 18: Giá trị của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-3x+2} & \text{khi} \quad x \ne 2 \\ \frac{2a+1}{6} & \text{khi} \quad x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

Lời giải

Ta có: $f(2) = \frac{2a+1}{6}.$

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x-1)\left(\sqrt{x-1}+1\right)} = \frac{1}{2}.$

Hàm số liên tục tại $x=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2) \Leftrightarrow \dfrac{2a+1}{6}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a=1$.

DẠNG 2: HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

a. Các hàm số đa thức, phân thức hữu tỉ, lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

b. Tổng, hiệu, tích của các hàm số liên tục tại x_0 thì cũng liên tục tại x_0.

c. Nếu hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục tại x_0 và $g(x_0)\neq 0$ thì hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0.

Câu 19: Tìm các khoảng liên tục của hàm số

a) $y=x^3+3x^2+x$ b) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ c) $y=\dfrac{x+1}{x^2+x-2}$; d) $y=\tan x+\cos x$

Lời giải

a) Hàm số y có tập xác định $D=\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục trên R

b) Hàm số y có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ nên hàm số liên tục trên $(-\infty;1),(1;+\infty)$

c) Hàm số y có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1;-2\}$ nên hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;-2),(-2;1);(1;+\infty)$

d) Hàm số y có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$ nên hàm số liên tục trên các khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right)$

Câu 20: Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+2 & \text{khi } x\geq 0\\ x^2+a & \text{khi } x<0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Lời giải

Trên $(0;+\infty),(-\infty;0)$ hàm số là các hàm số đa thức nên nó đều liên tục trên các khoảng đó

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ ta cần hàm số liên tục tại 0

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2, \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=a, f(0)=2$

Vậy hàm số liên tục tại $x_0=2$ khi và chỉ khi $a=2$.

Câu 21: Định a để hàm số $f(x)=\begin{cases}ax+\dfrac{1}{4} & khi \quad x\leq 2\\ \dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & khi \quad x>2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Trên $(2;+\infty),(-\infty;2)$ hàm số liên tục trên các khoảng đó

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ ta cần hàm số liên tục tại 2

Ta có

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{3x-6}{(x-2)\left(\sqrt[3]{3x+2}^2+2\sqrt[3]{3x+2}+4\right)}=\frac{1}{4}$$

$$,\lim_{x\to 2^-} f(x)=2a+\frac{1}{4}, f(2)=2a+\frac{1}{4}$$

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a=0.$

Câu 22: Định a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{8x+1}-1}{x} & khi \quad x>0\\ x^2+2x-4a & khi \quad x\le 0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Trên $(0;+\infty),(-\infty;0)$ hàm số liên tục trên các khoảng đó

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ ta cần hàm số liên tục tại 0

Ta có

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-4a, \lim_{x\to 0^+} f(x)=-4, f(0)=-4a$$

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a=1.$

Câu 23: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{9-x}}{x} & ,0<x<9\\ m & ,x=0\\ \dfrac{3}{x} & ,x\ge 9\end{cases}$. Tìm m để $f(x)$ liên tục trên $[0;+\infty)$.

Lời giải

Với $x\in(0;9)$: $f(x)=\dfrac{3-\sqrt{9-x}}{x}$ liên tục trên $(0;9)$.

Với $x\in[9;+\infty)$: $f(x)=\dfrac{3}{x}$ liên tục trên $[9;+\infty)$.

Với $x=0$ ta có $f(0)=m$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3-\sqrt{9-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{3+\sqrt{9-x}}=\dfrac{1}{6}$.

Vậy để hàm số liên tục trên $[0;+\infty)$ khi nó phải liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=m$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{6}$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-4}+3 & \text{khi } x\ge 2\\ \dfrac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} & \text{khi } x<2\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Cách 1: Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục trên khoảng $(2;+\infty)$.

Ta có $f(2)=3;\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{2x-4}+3\right)=3$.

Nếu $m=6$ thì $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{x^2-12x+20}=-\infty$ nên hàm số không liên tục tại $x=2$.

Nếu $m\ne 6$ thì ta có $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{x^2-2mx+3m+2}=\dfrac{3}{6-m}$.

Để hàm số liên tục tại $x=2$ thì $\dfrac{3}{6-m}=3\Leftrightarrow 6-m=1\Leftrightarrow m=5$.

Với $m=5$ thì khi $x<2$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-10x+17}$ liên tục trên $(-\infty;2)$.

Tóm lại với $m=5$ thì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Cách 2: Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục trên khoảng $(2;+\infty)$.

Ta có $f(2)=3;\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{2x-4}+3\right)=3$.

Thử lần lượt các giá trị từ A đến C thấy $m=5$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=3$. Do đó chọn đáp án.

C.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}a^2x^2 & \text{khi } x\le\sqrt{2},a\in\mathbb{R}\\ (2-a)x^2 & \text{khi } x>\sqrt{2}\end{cases}$. Giá trị của a để $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ là:

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Với $x>\sqrt{2}$ ta có hàm số $f(x)=a^2x^2$ liên tục trên khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Với $x<\sqrt{2}$ ta có hàm số $f(x)=(2-a)x^2$ liên tục trên khoảng $\left(-\infty;\sqrt{2}\right)$.

Với $x=\sqrt{2}$ ta có $f\left(\sqrt{2}\right)=2a^2$.

$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+}(2-a)x^2=2(2-a);\ \lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-}f(x)=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-}a^2x^2=2a^2$.

Để hàm số liên tục tại $x=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+}f(x)=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-}f(x)=f\left(\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow 2a^2=2(2-a)\Leftrightarrow a^2+a-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\ a=-2\end{array}\right.$.

Vậy $a=1$ hoặc $a=-2$ thì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x+a-1 & \text{khi} \quad x\le 0\\ \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & \text{khi} \quad x>0\end{cases}$. Tìm tất cả giá trị của a để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(3x+a-1)=a-1.$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2}{\sqrt{1+2x}+1}=1.$

$f(0)=a-1.$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow$ Hàm số liên tục tại điểm $x=0\Leftrightarrow a-1=1\Leftrightarrow a=2.$

Câu 27: Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} & \text{khi} \quad x>4\\ \dfrac{(a+2)x}{4} & \text{khi} \quad x\le 4\end{cases}$ liên tục trên tập xác định.

Lời giải

* TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

NX: Hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;4)$ và $(4;+\infty)$

Do đó, để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ ta cần tìm a để hàm số liên tục tại $x=4$

ĐK: $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=f(4)$

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}\right)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}\right)}=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}}=\dfrac{1}{6}$

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{(a+2)x}{4}=a+2=f(4)$

Cần có: $a+2=\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow a=-\dfrac{11}{6}.$

Câu 28: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-4x^2+3}{x-1} & \text{khi} \quad x\ne 1\\ ax+\dfrac{5}{2} & \text{khi} \quad x=1\end{cases}$. Xác định a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Với $x\neq 1$, ta có $f\left(x\right)=\dfrac{x^3-4x^2+3}{x-1}$ liên tục trên tập xác định.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^2-3x-3\right)\left(x-1\right)}{x-1}=-5$.

$f\left(1\right)=a+\dfrac{5}{2}$.

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x=1$. Điều này xảy ra khi

$\lim\limits_{x\to 1}f\left(x\right)=f\left(1\right)\Leftrightarrow a+\dfrac{5}{2}=-5\Leftrightarrow a=-\dfrac{15}{2}$.

Câu 29: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{2x-4}+3 & \text{khi } x\geq 2\\ \dfrac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} & \text{khi } x<2\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Cách 1: Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$.

Ta có. $f\left(2\right)=3;\lim\limits_{x\to 2^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{2x-4}+3\right)=3$

Nếu $m=6$ thì $\lim\limits_{x\to 2^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{x^2-12x+20}=-\infty$ nên hàm số không liên tục tại $x=2$.

Nếu $m\neq 6$ thì ta có $\lim\limits_{x\to 2^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{x^2-2mx+3m+2}=\dfrac{3}{6-m}$.

Để hàm số liên tục tại $x=2$ thì $\dfrac{3}{6-m}=3\Leftrightarrow 6-m=1\Leftrightarrow m=5$.

Với $m=5$ thì khi $x<2$ $f\left(x\right)=\dfrac{x+1}{x^2-10x+17}$ liên tục trên $\left(-\infty;2\right)$.

Tóm lại với $m=5$ thì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 30: Cho a, b là hai số thực sao cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 2ax-1 & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $a-b$.

Lời giải

Ta có $f\left(1\right)=2a-1$.

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì phải tồn tại $\lim\limits_{x\to 1}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}$ và $\lim\limits_{x\to 1}f\left(x\right)=f\left(1\right)$.

Để tồn tại $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}$ thì $\left(x^2+ax+b\right)\vdots\left(x-1\right)\Rightarrow 1+a+b=0\Rightarrow b=-a-1$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to 1}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x-1\right)\left(x+a+1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(x+a+1\right)=a+2$.

Do đó để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$

$\Leftrightarrow 2a-1 = a+2 \Leftrightarrow a = 3$. Suy ra $b = -4$.

Vậy $a - b = 7$.

Câu 31: Nếu hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b \text{ khi } x < -5 \\ x + 17 \quad \text{khi} -5 \le x \le 10 \\ ax + b + 10 \text{ khi } x > 10 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $a + b$ bằng

Lời giải

Với $x < -5$ ta có $f(x) = x^2 + ax + b$, là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty; -5)$.

Với $-5 < x < 10$ ta có $f(x) = x + 7$, là hàm đa thức nên liên tục trên $(-5; 10)$.

Với $x > 10$ ta có $f(x) = ax + b + 10$, là hàm đa thức nên liên tục trên $(10; +\infty)$.

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x = -5$ và $x = 10$.

Ta có:

$f(-5) = 12$; $f(10) = 17$.

$\lim\limits_{x\to -5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -5^-} (x^2 + ax + b) = -5a + b + 25$.

$\lim\limits_{x\to -5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -5^+} (x + 17) = 12$.

$\lim\limits_{x\to 10^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 10^-} (x + 17) = 27$.

$\lim\limits_{x\to 10^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 10^+} (ax + b + 10) = 10a + b + 10$.

Hàm số liên tục tại $x = -5$ và $x = 10$ khi

$$\begin{cases} 5a + b + 25 = 12 \\ 10a + b + 10 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5a + b = -13 \\ 10a + b = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow a + b = -1$$

Câu 32: Tìm tham số thực m để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 12}{x + 4} & \text{khi } x \ne -4 \\ mx + 1 & \text{khi } x = -4 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = -4$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có:

+ $\lim\limits_{x\to -4} f(x) = \lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2 + x - 12}{x + 4} = \lim\limits_{x\to -4} \dfrac{(x-3)(x+4)}{x+4} = \lim\limits_{x\to -4} (x - 3) = -7$.

+ $f(-4) = -4m + 1$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=-4$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to -4} f(x)=f(-4) \Leftrightarrow -4m+1=-7$

$\Leftrightarrow m=2$.

Câu 33: Biết rằng hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+5x+6}{x+2} & \text{khi} \quad x>-2\\ mx+n & \text{khi} \quad x\le -2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và n là một số thực tùy ý. Giá trị của m bằng

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}(x+3)=-1$.

$\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^-}(mx+n)=-2m+n$.

$f(-2)=-2m+n$.

Để hàm số liên tục tại $x=-2$ thì $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=f(-2) \Leftrightarrow -2m+n=1$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{n-1}{2}$.

DẠNG 3: CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

Câu 34: CMR phương trình sau đây có nghiệm: $x^4-3x+1=0$

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^4-3x+1$ liên tục trên R nên cũng liên tục trên đoạn $[0;1]$

$f(0)=1>0, f(1)=-1<0 \Rightarrow f(1).f(-1)<0$. Vậy phương trình có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(0;1)$. ĐPcm.

Câu 35: CMR phương trình $2x^3-6x+1=0$ có 3 nghiệm trong khoảng.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=2x^3-6x+1$ liên tục trên R nên cũng liên tục trên các đoạn $[-2;-1];[-1;1];[1;2]$

$f(-2)=-3<0, f(-1)=5>0, f(1)=-3, f(2)=5$

Vậy trên mỗi khoảng $(-2;-1);(-1;1);(1;2)$ phương trình có ít nhất nghiệm. Mà ba khoảng này rời nhau nên phương trình có 3 nghiệm trong khoảng $(-2;2)$.

Câu 36: CMR phương trình $x^3+(m+3)x^2+(1-m)x-1=0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3+(m+3)x^2+(1-m)x-1$ liên tục trên R nên cũng liên tục trên các đoạn $[0;1]$

$f(0)=-1<0, f(1)=4>0,$

Vậy trên khoảng $(0;1)$ phương trình có ít nhất nghiệm.

Câu 37: CMR phương trình $a\cos 3x+b\cos 2x+c\cos x+\sin x=0$ luôn có nghiệm trên $[0;2\pi]$

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=a\cos 3x+b\cos 2x+c\cos x+\sin x$ liên tục trên R nên cũng liên tục trên các đoạn $[0;2\pi]$

$$f(0)=a+b+c, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-b+1, f(\pi)=-a+b-c, f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-b-1$$

Suy ra $f(0)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f(\pi)+f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0$ nên suy ra nếu không có giá trị nào trong bốn giá trị bằng 0 thì ít nhất có một giá trị âm và dương. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Câu 38: Chứng minh rằng với mọi giá trị thực của tham số *m* phương trình sau luôn có nghiệm

$$x^3-2x^2+x-1-\frac{2}{x}+\frac{m}{x+3}=0.$$

Lời giải

TXĐ: $D=R\setminus\{-3;0\}$.

Trên *D*, phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$mx+(x-2)(x+3)(x^3+x+1)=0$$

Đặt $f(x)=mx+(x-2)(x+3)(x^3+x+1)$.

Nhận xét *f* liên tục trên *R* và $\begin{cases} f(-3).f(0)=18m \\ f(0).f(2)=-12m \end{cases}$

TH1: Nếu $m=0$, phương trình luôn có 1 nghiệm $x=2$

TH2: Nếu $m\neq 0\Rightarrow$ (*) có ít nhất một nghiệm thuộc $(-3;0)$ hoặc

Suy ra: $\forall m\in R$, luôn có ít nhất một nghiệm thuộc ***D.***

Vậy: $\forall m\in R$, phương trình đã cho luôn có ít nhất một nghiệm.

Câu 39: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực *m* sao cho phương trình sau có nghiệm: $\left(2m^2-5m+2\right)(x-1)^{2017}\left(x^{2018}-2\right)+2x+3=0$

Lời giải

+ Nếu $2m^2-5m+2=0$ thì phương trình đã cho trở thành $2x+3=0\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$.

+ Nếu $2m^2-5m+2\neq 0$ phương trình đã cho là một đa thực bậc lẻ nên phương trình có ít nhất một nghiệm.

Vậy với mọi $m\in\mathbb{R}$, phương trình đã cho luôn có ít nhất một nghiệm.

Câu 40: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $x^3-3x^2+(2m-2)x+m-3=0$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1<-1<x_2<x_3$.

Lời giải

Đặt $f(x)=x^3-3x^2+(2m-2)x+m-3$. Ta thấy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Điều kiện cần: $af(-1)>0\Leftrightarrow -m-5>0\Leftrightarrow m<-5$.

Điều kiện đủ: với $m<-5$ ta có

*) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ nên tồn tại $a<-1$ sao cho $f(a)<0$

Mặt khác $f(-1)=-m-5>0$. Suy ra $f(a).f(-1)<0$.

Do đó tồn tại $x_1\in(a;-1)$ sao cho $f(x_1)=0$.

*) $f(0)=m-3<0$, $f(-1)>0$. Suy ra $f(0).f(-1)<0$.

Do đó tồn tại $x_2\in(-1;0)$ sao cho $f(x_2)=0$.

*) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ nên tồn tại $b>0$ sao cho $f(b)>0$

Mặt khác $f(0)<0$. Suy ra $f(0).f(b)<0$.

Do đó tồn tại $x_3\in(0;b)$ sao cho $f(x_3)=0$.

Vậy $m<-5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 1: Với mọi giá trị thực của tham số m, chứng minh phương trình $(m^2+2m+3)(x^4-5x^2+4)+4x^3-9x=0$ luôn có ít nhất ba nghiệm thực.

Lời giải

Đặt $f(x)=(m^2+2m+3)(x^4-5x^2+4)+4x^3-9x$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

$f(-2)=-14$, $f(-1)=5$, $f(1)=-5$, $f(2)=14$.

Ta có : $f(-2).f(-1)<0$, $f(-1).f(1)<0$, $f(1).f(2)<0$ với mọi $m\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)=0$ luôn có ít nhất 1 nghiệm trên mỗi khoảng $(-2;-1)$, $(-1;1)$, $(1;2)$.

Câu 2: Vậy với mọi số thực m thì phương trình đã cho có ít nhất 3 nghiệm thực. Chứng minh rằng phương trình $(1-m^2)x^5-3x-1=0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=\left(1-m^2\right)x^5-3x-1$.

Vì $f(0)=-1<0$ và $f(-1)=m^2+1>0$ nên $f(0).f(-1)<0$ với mọi m.

Mặt khác, $f(x)$ là hàm đa thức, liên tục trên $\mathbb{R}$, nên liên tục trên đoạn $[-1;0]$.

Từ và suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1;0)$, nghĩa là phương trình $\left(1-m^2\right)x^5-3x-1=0$ luôn có nghiệm với mọi m.

Câu 3: Cho phương trình $ax^2+bx+505c=0$ ($a\neq 0$) thỏa mãn $a+2b+2022c=0$. Chứng minh phương trình trên có nghiệm.

Lời giải

Đặt $f(x)=ax^2+bx+505c$ với $a\neq 0$. Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

Vì $f(x)$ là hàm số đa thức bậc hai liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ (1).

Lại có: $f(0)=505c$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+505c=\frac{1}{4}(a+2b+2022c)-\frac{1}{2}c=-\frac{1}{2}c$.

Khi đó: $f(0)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{505}{2}c^2\leq 0$.

TH.1: Nếu $c=0$ thì phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x=0$; $x=-\frac{b}{a}$.

TH.2: Nếu $c\neq 0$ thì $f(0)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)<0$ (2). Từ (1) và (2), suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Câu 4: Cho phương trình: $\left(m^2-m+5\right)x^3-3x-6=0$. Chứng minh rằng: Với mọi $m\in\mathbb{R}$, phương trình đã cho có ít nhất 1 nghiệm.

Lời giải

• Xét hàm số: $f(x)=\left(m^2-m+5\right)x^3-3x-6$ trên $\mathbb{R}$

Ta có: $f(0)=-6<0$; $f(2)=8m^2-8m+28=2(2m-1)^2+26>0,\forall m\in\mathbb{R}$;

Thấy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$ và $f(0).f(2)<0,\forall m\in\mathbb{R}$

Suy ra: phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(0;2)$.

Câu 5: Với mọi giá trị thực của tham số m, chứng minh phương trình $\left(1-m^2\right)x^5-3x-1=0$ luôn có nghiệm thực.

Lời giải

Xét hàm số $f\left(x\right)=\left(1-m^2\right)x^5-3x-1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mà: $f\left(0\right).f\left(-1\right)=-1.\left(m^2+1\right)<0,\forall m$ nên phương trình $f\left(x\right)=0$ có ít nhất một nghiệm thực thuộc $\left(-1;0\right)$.

Vậy với mọi giá trị thực của tham số m, phương trình $\left(1-m^2\right)x^5-3x-1=0$ luôn có nghiệm thực.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\left(m^2-3m+2\right)x^3-3x+1=0$ có nghiệm.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} f\left(x\right)=\left(m^2-3m+2\right)x^3-3x+1 \\ A=m^2-3m+2 \end{cases}$

Xét $A=m^2-3m+2=0\Leftrightarrow m=1$ hoặc $m=2$.

Khi đó phương trình trở thành $-3x+1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$

Xét $A=m^2-3m+2\neq 0\Leftrightarrow m\neq 1$ và $m\neq 2$. Khi đó:

+ Xét hàm số $f\left(x\right)=\left(m^2-3m+2\right)x^3-3x+1$, đây là hàm đa thức, xác định trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$

+ Mặt khác, ta có:

TH1: $A>0\Rightarrow m\in\left(-\infty;1\right)\cup\left(2;+\infty\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[Ax^3-3x+1\right]=+\infty$ nên tồn tại $x_1\in\mathbb{R}$ sao cho $f\left(x_1\right)>0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[Ax^3-3x+1\right]=-\infty$ nên tồn tại $x_2\in\mathbb{R}$ sao cho $f\left(x_2\right)<0$.

Áp dụng hệ quả của định lí về giá trị trung gian, suy ra tồn tại $t\in\left(x_2;x_1\right)$ sao cho $f\left(t\right)=0$.

TH2: $A<0\Rightarrow m\in\left(1;2\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[Ax^3-3x+1\right]=-\infty$ nên tồn tại $x_1\in\mathbb{R}$ sao cho $f\left(x_1\right)<0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[Ax^3-3x+1\right]=+\infty$ nên tồn tại $x_2\in\mathbb{R}$ sao cho $f\left(x_2\right)>0$.

Áp dụng hệ quả của định lí về giá trị trung gian, suy ra tồn tại $t\in\left(x_2;x_1\right)$ sao cho $f\left(t\right)=0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

CHƯƠNG III

GIỚI HẠN
HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI 3: HÀM SỐ LIÊN TỤC

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. CÂU HỎI LÝ THUYẾT

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(a;b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên $[a;b]$ là

A. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)$.
B. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.
C. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)$.
D. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

Câu 2: Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

I. $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có nghiệm.

II. $f(x)$ không liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)\ge 0$ thì phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm.

A. Cả I và II đúng. **B.** Cả I và II sai. **C.** Chỉ I đúng. **D.** Chỉ II đúng.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a;b]$. Tìm mệnh đề đúng.

A. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a)f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

B. Nếu $f(a)f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

C. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục, tăng trên $[a;b]$ và $f(a)f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

D. Nếu phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trong khoảng $(a;b)$ thì hàm số $f(x)$ phải liên tục trên $(a;b)$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

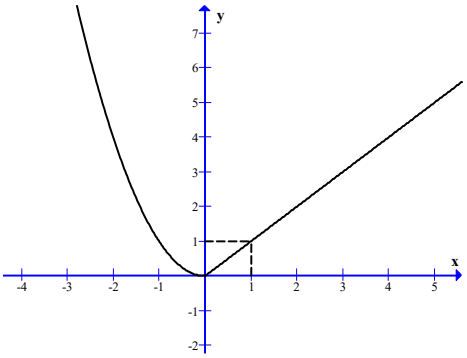
A. Nếu $f(a).f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm nằm trong $(a;b)$.

B. Nếu $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong $(a;b)$.

C. Nếu $f(a).f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong $(a;b)$.

D. Nếu phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong $(a;b)$ thì $f(a).f(b)<0$.

Câu 5: Cho đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ sau:



Chọn mệnh đề đúng.

A. Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x=0$ nhưng không liên tục tại điểm $x=0$.

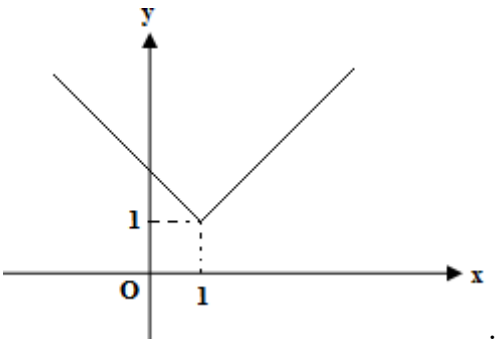
B. Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm $x=0$ nhưng không có đạo hàm tại điểm $x=0$.

C. Hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại điểm $x=0$.

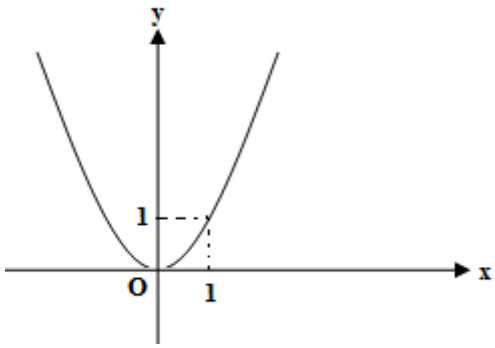
D. Hàm số $y=f(x)$ không liên tục và không có đạo hàm tại điểm $x=0$.

Câu 6: Hình nào trong các hình dưới đây là đồ thị của hàm số không liên tục tại $x=1$?

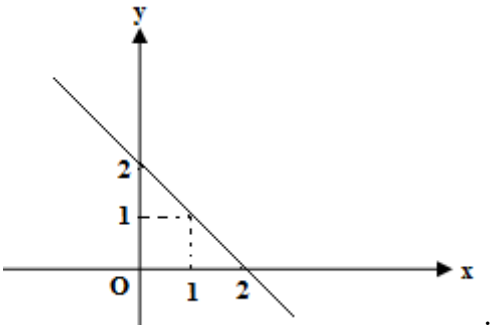
A.



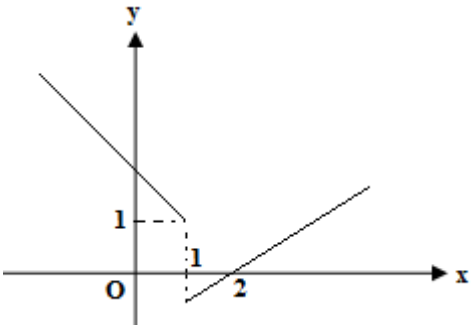
B.



C.



D.



Câu 7: Cho các mệnh đề:

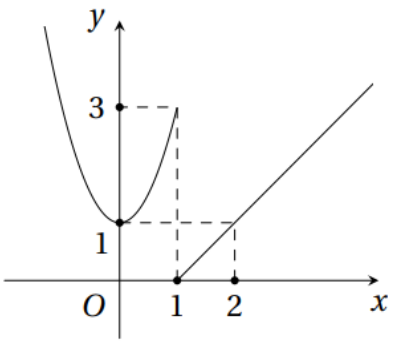
1. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(a;b)$ và $f(a).f(b)<0$ thì tồn tại $x_0\in(a;b)$ sao cho $f(x_0)=0$.

2. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có nghiệm.

3. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục, đơn điệu trên $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất.

A. Có đúng hai mệnh đề sai. **B.** Cả ba mệnh đề đều đúng.
C. Cả ba mệnh đề đều sai. **D.** Có đúng một mệnh đề sai.

Câu 8: Hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số gián đoạn tại điểm có hoành độ bằng bao nhiêu?



A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

DẠNG 2. LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Dạng 2.1 Xét tính liên tục tại điểm của hàm số

Câu 9: Hàm số nào sau đây không liên tục tại $x=2$?

A. $y=\sqrt{x+2}$. **B.** $y=\sin x$. **C.** $y=\dfrac{x^2}{x-2}$. **D.** $y=x^2-3x+2$.

Câu 10: Hàm số $y=\dfrac{1}{x(x-2)\left(x^2-9\right)}$ liên tục tại điểm nào dưới đây?

A. 0. **B.** 2. **C.** -3. **D.** 1.

Câu 11: Hàm số $y=\dfrac{-5}{x\left(x^2-4\right)}$ liên tục tại điểm nào dưới đây?

A. $x=0$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-2$.

Câu 12: Hàm số nào sau đây gián đoạn tại điểm $x_0=-1$.

A. $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x}{x-1}$. **C.** $y=(x+1)(x^2+2)$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$.

Câu 13: Hàm số $y=\dfrac{1}{2x-4}$ gián đoạn tại điểm nào dưới đây?

A. $x=1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-1$.

Câu 14: Cho hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{1-x^3}{1-x}, \text{khi } x<1\\ 1 \quad\quad , \text{khi } x\ge 1\end{cases}$. Hãy chọn kết luận đúng

A. y liên tục phải tại $x=1$.
B. y liên tục tại $x=1$.
C. y liên tục trái tại $x=1$.
D. y liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 15: Cho hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-7x+12}{x-3} & \text{khi } x\ne 3\\ -1 & \text{khi } x=3\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm tại $x_0=3$.
B. Hàm số gián đoạn và không có đạo hàm tại $x_0=3$.
C. Hàm số có đạo hàm nhưng không liên tục tại $x_0=3$.
D. Hàm số liên tục và có đạo hàm tại $x_0=3$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x\ne 2\\ 4 & \text{khi } x=2\end{cases}$. Chọn mệnh đề đúng?

A. Hàm số liên tục tại $x=2$.
B. Hàm số gián đoạn tại $x=2$.
C. $f(4)=2$.
D. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^3-x}$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. Hàm số liên tục tại $x=-1$.
B. Hàm số liên tục tại $x=0$.
C. Hàm số liên tục tại $x=1$.
D. Hàm số liên tục tại $x=\dfrac{1}{2}$.

Câu 18: Hàm số nào sau đây liên tục tại $x=1$:

A. $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$. **B.** $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$. **C.** $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x}$. **D.** $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Dạng 2.2 Điểm gián đoạn của hàm số

Câu 19: Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x_0=-1$.

A. $y=(x+1)(x^2+2)$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$.

Câu 20: Hàm số nào sau đây gián đoạn tại $x=2$?

A. $y=\dfrac{3x-4}{x-2}$. **B.** $y=\sin x$. **C.** $y=x^4-2x^2+1$ **D.** $y=\tan x$.

Câu 21: Hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}$ gián đoạn tại điểm x_0 bằng?

A. $x_0=2018$. **B.** $x_0=1$. **C.** $x_0=0$ **D.** $x_0=-1$.

Câu 22: Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^2-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số không liên tục tại các điểm $x=\pm 1$. **B.** Hàm số liên tục tại mọi $x\in\mathbb{R}$.
C. Hàm số liên tục tại các điểm $x=-1$. **D.** Hàm số liên tục tại các điểm $x=1$.

Câu 23: Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x_0 = 2$?

A. $y=(x-1)(x-2)$. **B.** $y=\dfrac{(x-2)(x^2+3)}{x-2}$. **C.** $y=\dfrac{x-2}{x+2}$. **D.** $y=\dfrac{x+2}{x^2+2}$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & khi\ x>0\\ x+2021 & khi\ x\le 0\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **ĐÚNG**?

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. **B.** Hàm số liên tục tại $x=3$.
C. Hàm số gián đoạn tại $x=0$. **D.** Hàm số gián đoạn tại $x=1$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}-x\cos x, x<0\\ \dfrac{x^2}{1+x}, 0\le x<1\\ x^3, x\ge 1\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $f(x)$ liên tục tại mọi điểm x thuộc $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $f(x)$ bị gián đoạn tại điểm $x=0$.

C. Hàm số $f(x)$ bị gián đoạn tại điểm $x=1$.

D. Hàm số $f(x)$ bị gián đoạn tại điểm $x=0$ và $x=1$.

Dạng 2.3 Bài toán chứa tham số

Câu 26: Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x+2} & khi\ x\ne -2\\ m & khi\ x=-2\end{cases}$ liên tục tại $x=-2$.

A. $m=2$. **B.** $m=-4$. **C.** $m=4$. **D.** $m=0$.

Câu 27: Biết hàm số $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx-5 & \text{khi} \quad x\le 1\\ 2ax-3b & \text{khi} \quad x>1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$. Tính giá trị của biểu thức $P=a-4b$.

A. $P=-4$. **B.** $P=5$. **C.** $P=-5$. **D.** $P=4$.

Câu 28: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2-(a-2)x-2}{\sqrt{x+3}-2} & khi x\ne 1\\ a^2+11 & khi x=1\end{cases}$. Tổng tất cả các giá trị của tham số a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ bằng:

A. -4. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 4.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{khi} \quad x\ne 2\\ m & \text{khi} \quad x=2\end{cases}$. Giá trị của m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=2$ là

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=0$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+3x-14}{x^2-4} & khi\ x\neq 2\\ m & khi\ x=2\end{cases}$. Với giá trị nào của m thì hàm số liên tục tại $x=2$?

A. $-\dfrac{11}{4}$. **B.** $-\dfrac{11}{2}$. **C.** $\dfrac{11}{2}$. **D.** $\dfrac{11}{4}$.

Câu 31: Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x+2} & khi\ x\neq -2\\ m & khi\ x=-2\end{cases}$ liên tục tại $x=-2$

A. $m=-4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=0$.

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 2m+1 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Giá trị của tham số m để hàm số liên tục tại điểm $x_0=1$ là:

A. $m=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=0$.

Câu 33: Để hàm số $y=\begin{cases}x^2+3x+2 & \text{khi} \quad x\leq -1\\ 4x+a & \text{khi} \quad x>-1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=-1$ thì giá trị của a là

A. -4. **B.** 4. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 34: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & khi\ x\neq 1\\ 3x+m & khi\ x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

A. $m=0$. **B.** $m=6$. **C.** $m=4$. **D.** $m=2$.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{2016}+x-2}{\sqrt{2018x+1}-\sqrt{x+2018}} & khi\ x\neq 1\\ k & khi\ x=1\end{cases}$. Tìm k để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

A. $k=2\sqrt{2019}$. **B.** $k=\dfrac{2017.\sqrt{2018}}{2}$. **C.** $k=1$. **D.** $k=\dfrac{20016}{2017}\sqrt{2019}$.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & khi\ x\neq 1\\ a & khi\ x=1\end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0=1$.

A. $a=0$. **B.** $a=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $a=\dfrac{1}{2}$. **D.** $a=1$.

Câu 37: Biết hàm số $f(x)=\begin{cases}3x+b & khi\ x\leq -1\\ x+a & khi\ x>-1\end{cases}$ liên tục tại $x=-1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a=b-2$. **B.** $a=-2-b$. **C.** $a=2-b$. **D.** $a=b+2$.

Câu 38: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x\neq 3\\ m & \text{khi } x=3\end{cases}$. Hàm số đã cho liên tục tại $x=3$ khi $m=?$

A. -1. **B.** 1. **C.** 4. **D.** -4.

Câu 39: Biết hàm số $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx-5 & \text{khi } x\le 1\\ 2ax-3b & \text{khi } x>1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$ Tính giá trị của biểu thức $P=a-4b$.

A. $P=-4$. **B.** $P=-5$. **C.** $P=5$. **D.** $P=4$.

Câu 40: Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{x-1} & khi\ x\neq 1\\ m-1 & khi\ \ x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$

A. $m=0$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=1$ **D.** $m=2$.

Câu 41: Có bao nhiêu số tự nhiên m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & khi\ x\neq 1\\ m^2+m-1 & khi\ x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=1$?

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 42: Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ 2x+a & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$?

A. $\dfrac{15}{4}$. **B.** $-\dfrac{15}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 1.

Câu 43: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+2}-2} & khi\ \ x>2\\ m^2x-4m+6 & khi\ \ x\le 2\end{cases}$, m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của m để hàm số đã cho liên tục tại $x=2$?

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1

Câu 44: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3x^2+2x-1}-2}{x^2-1}, & x\neq 1\\ 4-m & x=1\end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=1$ khi

A. $m=3$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=7$. **D.** $m=-7$.

Câu 45: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x<-1\\ mx+2 & \text{khi } x\ge -1\end{cases}$ liên tục tại $x=-1$.

A. $m=\dfrac{-3}{2}$. **B.** $m=\dfrac{-5}{2}$. **C.** $m=\dfrac{3}{2}$. **D.** $m=\dfrac{5}{2}$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} & \text{khi } x\neq 0\\ 2a-\dfrac{5}{4} & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

A. $a=-\dfrac{3}{4}$. **B.** $a=\dfrac{4}{3}$. **C.** $a=-\dfrac{4}{3}$. **D.** $a=\dfrac{3}{4}$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 & \text{khi } x\neq 1\\ 3x+m-1 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x_0=1$.

A. $m=1$. **B.** $m=3$. **C.** $m=0$. **D.** $m=2$.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ a & \text{khi } x=2\end{cases}$. Hàm số liên tục tại $x=2$ khi a bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -1.

Câu 49: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & khi \quad x\neq 3\\ mx+2 & khi \quad x=3\end{cases}$. Hàm số liên tục tại điểm $x=3$ khi m bằng:

A. -2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 2.

Câu 50: Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4} & khi\, x>4\\ mx+1 & khi\, x\leq 4\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=4$.

A. $m=\dfrac{7}{4}$. **B.** $m=8$. **C.** $m=-\dfrac{7}{4}$. **D.** $m=-8$.

Câu 51: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x}{x-2} & \text{khi x}>2\\ mx-4 & \text{khi x}\leq 2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

A. $m=3$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-2$. **D.** Không tồn tại m.

Câu 52: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-m}{x-1} & khi\, x\neq 1\\ n & khi\, x=1\end{cases}$. Để hàm số liên tục tại $x_0=1$ thì giá trị của biểu thức $(m+n)$ tương ứng bằng:

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** 1. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

Câu 53: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x-3} & \text{khi } x\neq 3\\ m & \text{khi } x=3\end{cases}$. Tìm giá trị của m để hàm số liên tục tại $x=3$?

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=0$.

Câu 54: Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x+1} & khi\ x>-1\\ mx-2m^2 & \text{khi } x\le -1\end{cases}$ liên tục tại $x=-1$.

A. $m\in\left\{1;-\dfrac{3}{2}\right\}$. **B.** $m\in\{1\}$. **C.** $m\in\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$. **D.** $m\in\left\{-1;\dfrac{3}{2}\right\}$..

Câu 55: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x} & khi\ x<2\\ mx+m+1 & khi\ x\ge 2\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=2$

.

A. $m=\dfrac{1}{6}$. **B.** $m=-\dfrac{1}{6}$. **C.** $m=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=\dfrac{1}{2}$.

Câu 56: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} & \text{khi } x\ne 0\\ 2a-\dfrac{5}{4} & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tìm các giá trị thực của tham số a để hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=0$.

A. $a=-\dfrac{3}{4}$. **B.** $a=\dfrac{4}{3}$. **C.** $a=-\dfrac{4}{3}$. **D.** $a=\dfrac{3}{4}$.

Câu 57: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{4x^3-3x+1} & \text{khi } x\ne\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{c}{2} & \text{khi } x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$, $\left(a,b,c\in\mathbb{R}\right)$. Biết hàm số liên tục tại $x=\dfrac{1}{2}$. Tính $S=abc$.

A. $S=-36$. **B.** $S=18$. **C.** $S=36$. **D.** $S=-18$.

Câu 58: Tìm a để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\ne 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

A. $a=1$. **B.** $a=0$. **C.** $a=2$. **D.** $a=-1$.

Câu 59: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x\ne 2\\ m & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại x=2.

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=0$.

Câu 60: Để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-3x+1}{2\left(x-1\right)} & khi\ x\ne 1\\ m & khi\ x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$ thì giá trị m bằng

A. $0,5$. **B.** $1,5$. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 61: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3m & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số gián đoạn tại $x=1$.

A. $m\neq 2$. **B.** $m\neq 1$. **C.** $m\neq 2$. **D.** $m\neq 3$.

Câu 62: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x<0\\ m+\dfrac{1-x}{1+x} & \text{khi } x\geq 0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$.

A. $m=1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=0$.

Câu 63: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2-(a-2)x-2}{\sqrt{x+3}-2} & \text{khi } x\neq 1\\ 8+a^2 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của a để hàm số liên tục tại $x=1$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 64: Giá trị của tham số a để hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ a+2x & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** 1. **C.** $-\dfrac{15}{4}$. **D.** 4.

Câu 65: Hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+1 \ khi \ x\leq 1\\ x+m \ khi \ x>1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=1$ khi m nhận giá trị

A. $m=-2$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=1$.

Câu 66: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} & \text{khi } x\neq 4\\ a+2 & \text{khi } x=4\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để hàm số liên tục tại $x_0=4$.

A. $a=\dfrac{5}{2}$. **B.** $a=-\dfrac{11}{6}$. **C.** $a=3$. **D.** $a=2$.

Câu 67: Tìm tham số thực m để hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-12}{x+4} & \text{khi } x\neq -4\\ mx+1 & \text{khi } x=-4\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=-4$.

A. $m=4$. **B.** $m=3$. **C.** $m=2$. **D.** $m=5$.

Câu 68: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\dfrac{3}{4}$. **D.** $m=\dfrac{1}{2}$.

Câu 69: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } (x>1)\\ m^2+m+\dfrac{1}{4} & \text{khi } (x\le 1)\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

A. $m\in\{0;1\}$. **B.** $m\in\{0;-1\}$. **C.** $m\in\{1\}$. **D.** $m\in\{0\}$.

Câu 70: Tìm a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$: $f(x)=\begin{cases}2x+a & \text{khi } x\le 1\\ \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x>1.\end{cases}$

A. $a=-2$. **B.** $a=1$. **C.** $a=2$. **D.** $a=-1$.

Câu 71: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & khi\ x\ne 2\\ m^2 & khi\ x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

A. $m=\sqrt{3}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\pm\sqrt{3}$. **D.** $m=\pm 1$.

Câu 72: Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+4x+3}{x+1} & khi\ x>-1\\ mx+2 & khi\ x\le -1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=-1$.

A. $m=2$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=4$.

Câu 73: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} & khi\ \ x\ne 2\\ 2m+1 & khi\ \ x=2\end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x_0=2$.

A. $m=\dfrac{3}{2}$. **B.** $m=\dfrac{13}{2}$. **C.** $m=\dfrac{11}{2}$. **D.** $m=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 74: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^2+2x+8}{x+2} & \text{khi } \ x\ne -2\\ m^2x^2+5mx & \text{khi } \ x=-2\end{cases}$ $(m\in\mathbb{R})$. Biết hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=-2$. Số giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

DẠNG 3. LIÊN TỤC TRÊN KHOẢNG

Dạng 3.1 Xét tính liên tục trên khoảng của hàm số

Câu 75: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+5x+6}$. Khi đó hàm số $y=f(x)$ liên tục trên các khoảng nào sau đây?

A. $(-3;2)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(-3;3)$.

Câu 76: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x^2+5x+4}$. Khi đó, hàm số liên tục trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;2)$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $(-5;3)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Câu 77: Hàm số $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$ liên tục trên khoảng:

A. $(0;2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-\infty;+\infty)$. **D.** $(1;3)$.

Câu 78: Hàm số nào dưới đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y=2x-3\cos x$. **B.** $y=1+\tan x$. **C.** $y=x-\cot x$. **D.** $y=\dfrac{1}{\cos x}$.

Câu 79: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 2 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số liên tục tại mọi điểm $x\neq 1$ và gián đoạn tại $x=1$.

B. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số không liên tục trên $(1;+\infty)$.

D. Hàm số gián đoạn tại điểm $x=1$.

Câu 80: Hàm số nào sau đây không liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$. **B.** $y=\cos x$. **C.** $y=x^2-3x+2$. **D.** $y=\dfrac{3x}{x+2}$.

Câu 81: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số liên tục trên khoảng $(1;5)$. **B.** Hàm số gián đoạn tại $x=2020$.

C. Hàm số liên tục tại $x=2$. **D.** Hàm số gián đoạn tại $x=2$.

Câu 82: Hàm số nào dưới đây liên tục trên khoảng $(0;5)$?

A. $y=\dfrac{3x-2}{x-3}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x+2}$. **C.** $y=\dfrac{5x+1}{x-4}$. **D.** $y=\dfrac{1}{x^2-1}$.

Câu 83: Hàm số nào dưới đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x+\cos x$. **B.** $y=x-\tan x$. **C.** $y=1+\cot x$. **D.** $y=\dfrac{1}{\cos x}$.

Câu 84: Hàm số nào trong các hàm số dưới đây không liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^2+6x+20$. **B.** $y=\cos x$. **C.** $y=\dfrac{x}{x^2+x+2}$. **D.** $y=\dfrac{x}{x+1}$.

Câu 85: Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^3-x$. **B.** $y=\cot x$. **C.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **D.** $y=\sqrt{x^2-1}$.

Câu 86: Cho bốn hàm số $f_1(x)=2x^3-3x+1$, $f_2(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$, $f_3(x)=\cos x+3$ và $f_4(x)=\log_3 x$. Hỏi có bao nhiêu hàm số liên tục trên tập $\mathbb{R}$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 87: Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $f(x)=\tan x+5$. **B.** $f(x)=\dfrac{x^2+3}{5-x}$. **C.** $f(x)=\sqrt{x-6}$. **D.** $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2+4}$.

Câu 88: Cho hàm số $y=\begin{cases}-x^2+x+3 & \text{khi } x\ge 2\\ 5x+2 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số liên tục tại $x_0=1$.

B. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;2),(2;+\infty)$.

D. Hàm số gián đoạn tại $x_0=2$.

Câu 89: Hàm số nào sau đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $f(x)=\sqrt{x}$. **B.** $f(x)=x^4-4x^2$. **C.** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^4-4x^2}{x+1}}$. **D.** $f(x)=\dfrac{x^4-4x^2}{x+1}$.

Câu 90: Hàm số nào trong các hàm số dưới đây **không** liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y=|x|$. **B.** $y=\dfrac{x}{x+1}$. **C.** $y=\sin x$. **D.** $y=\dfrac{x}{|x|+1}$.

Câu 91: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{neu } \cos x\ge 0\\ 1+\cos x & \text{neu } \cos x<0\end{cases}$. Hỏi hàm số f có tất cả bao nhiêu điểm gián đoạn trên khoảng $(0;2018)$?

A. 2018. **B.** 1009. **C.** 642. **D.** 321.

Dạng 3.2 Bài toán chứa tham số

Câu 92: Cho hàm số $y=\begin{cases}x+2 & \text{khi } x\ge -1\\ x+m & \text{khi } x<-1\end{cases}$, m là tham số. Tìm m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

A. $m=2$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=5$. **D.** $m=3$.

Câu 93: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2mx^2-4 & \text{khi } x\le 3\\ 5 & \text{khi } x>3\end{cases}$ (m là tham số). Tìm giá trị của m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{18}$. **C.** 18. **D.** 2.

Câu 94: Biết hàm số $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx-4 & khi\ x\le 1\\ 2ax-2b & khi\ x>1\end{cases}$ liên tục trên R. Tìm giá trị của biểu thức $P=a-3b$

A. $P=-4$ **B.** $P=5$ **C.** $P=4$ **D.** $P=-5$

Câu 95: Biết hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-7x+6}{x^2-3x+2}, & \text{khi } x\ne 1 \text{ và } x\ne 2\\ 2a, & \text{khi } x=1\\ b-3, & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục trên R. Tính $P=a^2+b^2$.

A. $P=68$. **B.** $P=45$. **C.** $P=41$. **D.** $P=10$.

Câu 96: Tìm m để hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt[3]{x}-x-1}{x-1}, & x\ne 1\\ mx+1 & ,x=1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m=-\dfrac{4}{3}$. **B.** $m=-\dfrac{1}{3}$. **C.** $m=\dfrac{4}{3}$. **D.** $m=\dfrac{2}{3}$.

Câu 97: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2} & , \ x\neq 2\\ ax+3 & , \ x=2\end{cases}$. Xác định a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $a=-1$. **B.** $a=\dfrac{1}{6}$. **C.** $a=\dfrac{4}{3}$. **D.** $a=-\dfrac{4}{3}$.

Câu 98: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} \text{ khi } x\neq 1\\ m-2 \text{ khi } x=1\end{cases}$. Tìm m để hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=-4$.

Câu 99: Tìm m để hàm số $y=f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+2\sqrt{x-2} & khi\, x\geq 2\\ 5x-5m+m^2 & khi\, x<2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $m=2;m=3$. **B.** $m=-2;m=-3$. **C.** $m=1;m=6$. **D.** $m=-1;m=-6$.

Câu 100: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}3x+a-1 & khi\ \ x\leq 0\\ \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & khi\ \ x>0\end{cases}$. Tìm tất cả giá trị thực của a để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $a=1$. **B.** $a=3$. **C.** $a=4$. **D.** $a=2$.

Câu 101: Cho biết hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x\left(x-2\right)} & \text{khi} \quad x\left(x-2\right)\neq 0\\ a & \text{khi} \quad x=0\\ b & \text{khi} \quad x=2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $T=a^2+b^2$.

A. $T=2$. **B.** $T=122$. **C.** $T=101$. **D.** $T=145$.

Câu 102: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}m^2x^2 & \text{khi } x\leq 2\\ \left(1-m\right)x & \text{khi } x>2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 103: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{x}-m & \text{khi } x\geq 0\\ mx+1 & \text{khi } x<0\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của m để $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m=1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-2$.

Câu 104: Tìm P để hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} \text{ khi } x>1\\ 6Px-3 \quad \text{khi } x\leq 1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $P=\dfrac{5}{6}$. **B.** $P=\dfrac{1}{2}$. **C.** $P=\dfrac{1}{6}$. **D.** $P=\dfrac{1}{3}$.

Câu 105: Hàm số $f(x)=\begin{cases}ax+b+1, khi\, x>0\\ a\cos x+b\sin x, \ khi\, x\leq 0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

A. $a-b=1$. **B.** $a-b=-1$. **C.** $a+b=1$ **D.** $a+b=1$

Câu 106: Cho hàm số $y=\begin{cases}3x+1 & khi\, x\ge -1\\ x+m & khi\, x<-1\end{cases}$, m là tham số. Tìm m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m=5$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-3$.

Câu 107: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & khi\ \ x>0\\ \sqrt{x^2+1}-m & khi\ \ x\le 0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m=\dfrac{3}{2}$. **B.** $m=\dfrac{1}{2}$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 108: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-5}{x-3} & \text{khi}\ \ x\ne 3\\ a & \text{khi}\ \ x=3\end{cases}$. Tập các giá trị của a để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ là:

A. $\left\{\dfrac{2}{5}\right\}$. **B.** $\left\{\dfrac{1}{5}\right\}$. **C.** $\{0\}$. **D.** $\left\{\dfrac{3}{5}\right\}$.

Câu 109: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4} & \text{khi}\ \ x>4\\ mx+1 & \text{khi}\ \ x\le 4\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m=8$ hoặc $m=-\dfrac{7}{4}$. **B.** $m=\dfrac{7}{4}$.

C. $m=-\dfrac{7}{4}$. **D.** $m=-8$ hoặc $m=\dfrac{7}{4}$.

Câu 110: Nếu hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & \text{khi}\ x<-5\\ x+17 & \text{khi}-5\le x\le 10\\ ax+b+10 & \text{khi}\, x>10\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $a+b$ bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

DẠNG 4. CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

Câu 111: Cho hàm số $f(x)=x^5-4x^4-4x^3+14x^2+4x-10$. Số nghiệm của phương trình $f(x)=0$ trên $\mathbb{R}$ là:

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 112: Cho phương trình $x^3-3x^2+2=0$ (1). Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

A. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $(-2;3)$.

B. Phương trình (1) có đúng một nghiệm trên khoảng $(-2;3)$.

C. Phương trình (1) vô nghiệm.

D. Phương trình (1) có hai nghiệm trên khoảng $(-2;0)$.

Câu 113: Cho phương trình $2x^4-5x^2+x+1=0$ (1). Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau

A. Phương trình (1) có đúng một nghiệm trên khoảng $(-2;1)$.

B. Phương trình (1) vô nghiệm.

C. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $(0;2)$.

D. Phương trình (1) vô nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 114: Phương trình nào dưới đây có nghiệm trong khoảng $(0;1)$

A. $2x^2-3x+4=0$. **B.** $(x-1)^5-x^7-2=0$.

C. $3x^4-4x^2+5=0$. **D.** $3x^{2017}-8x+4=0$.

Câu 115: Cho phương trình $4x^4+2x^2-x-3=0$ (1). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Phương trình (1) vô nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

B. Phương trình (1) có đúng một nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

C. Phương trình (1) có đúng hai nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

D. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 116: Phương trình $3x^5+5x^3+10=0$ có nghiệm thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-10;-2)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 117: Cho phương trình $2x^3-8x-1=0$ (1). Khẳng định nào **sai**?

A. Phương trình không có nghiệm lớn hơn 3.

B. Phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt.

C. Phương trình có 2 nghiệm lớn hơn 2.

D. Phương trình có nghiệm trong khoảng $(-5;-1)$.

Câu 118: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và thỏa mãn $f(a)=b$, $f(b)=a$ với $a,b>0$, $a\neq b$. Khi đó phương trình nào sau đây có nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

A. $f(x)=0$. **B.** $f(x)=x$. **C.** $f(x)=-x$. **D.** $f(x)=a$.

Câu 119: Cho số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases}-8+4a-2b+c>0\\8+4a+2b+c<0\end{cases}$. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ và trục Ox là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 120: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases}a+c>b+1\\a+b+c+1<0\end{cases}$. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ và trục Ox.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

CHƯƠNG III

GIỚI HẠN
HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI 3: HÀM SỐ LIÊN TỤC

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. CÂU HỎI LÝ THUYẾT

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(a;b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên $[a;b]$ là

A. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)$.

B. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

C. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)$.

D. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

Lời giải

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(a;b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên $[a;b]$ là liên tục phải tại a và liên tục trái tại b, tức là $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

Câu 2: Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

I. $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có nghiệm.

II. $f(x)$ không liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)\ge 0$ thì phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm.

A. Cả I và II đúng. **B.** Cả I và II sai. **C.** Chỉ I đúng. **D.** Chỉ II đúng.

Lời giải

Chỉ I đúng.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a;b]$. Tìm mệnh đề đúng.

A. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a)f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

B. Nếu $f(a)f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

C. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục, tăng trên $[a;b]$ và $f(a)f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

D. Nếu phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trong khoảng $(a;b)$ thì hàm số $f(x)$ phải liên tục trên $(a;b)$.

Lời giải

Vì $f(a)f(b)>0$ nên $f(a)$ và $f(b)$ cùng dương hoặc cùng âm. Mà $f(x)$ liên tục, tăng trên $[a;b]$ nên đồ thị hàm $f(x)$ nằm trên hoặc nằm dưới trục hoành trên $[a;b]$ hay phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Nếu $f(a).f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm nằm trong $(a;b)$.

B. Nếu $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong $(a;b)$.

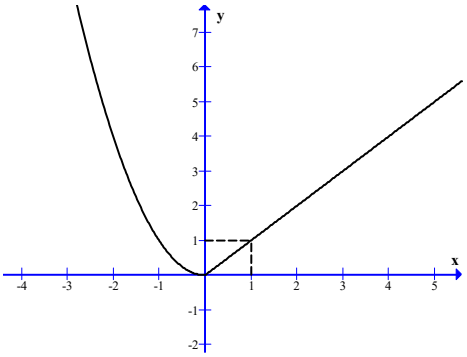
C. Nếu $f(a).f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong $(a;b)$.

D. Nếu phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong $(a;b)$ thì $f(a).f(b)<0$.

Lời giải

Vì theo định lý 3 trang 139/sgk.

Câu 5: Cho đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ sau:



Chọn mệnh đề đúng.

A. Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x=0$ nhưng không liên tục tại điểm $x=0$.

B. Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại điểm $x=0$ nhưng không có đạo hàm tại điểm $x=0$.

C. Hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại điểm $x=0$.

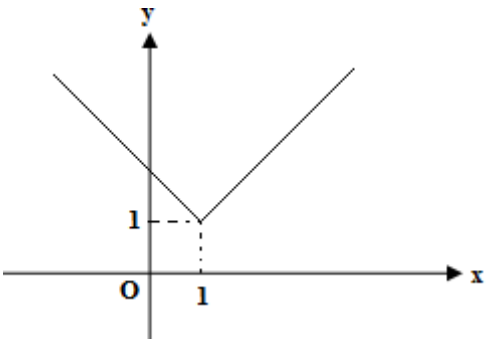
D. Hàm số $y=f(x)$ không liên tục và không có đạo hàm tại điểm $x=0$.

Lời giải

Đồ thị là một đường liền nét, nhưng bị "gãy" tại điểm $x=0$ nên nó liên tục tại điểm $x=0$ nhưng không có đạo hàm tại điểm $x=0$.

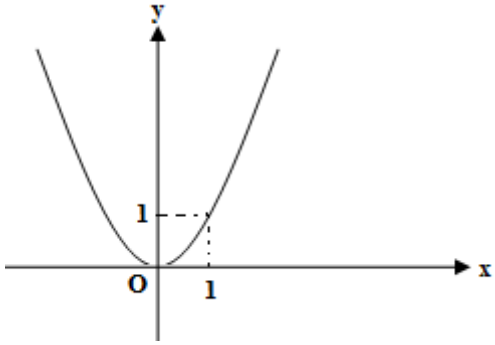
Câu 6: Hình nào trong các hình dưới đây là đồ thị của hàm số không liên tục tại $x=1$?

A.

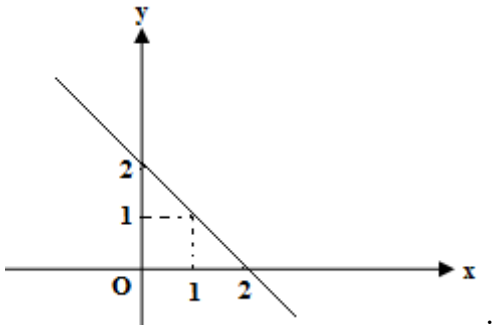


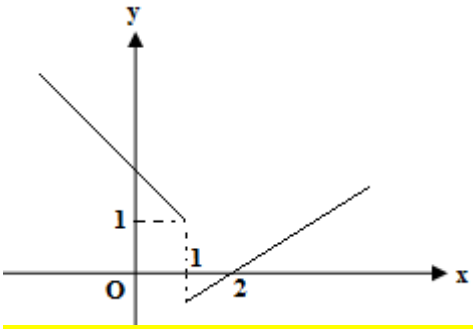
.

B.



.

C. 

D. 

Lời giải

Vì $\lim\limits_{x\to 1^+} y \neq \lim\limits_{x\to 1^-} y$ nên hàm số không liên tục tại $x=1$.

Câu 7: Cho các mệnh đề:

1. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(a;b)$ và $f(a).f(b)<0$ thì tồn tại $x_0 \in (a;b)$ sao cho $f(x_0)=0$.

2. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có nghiệm.

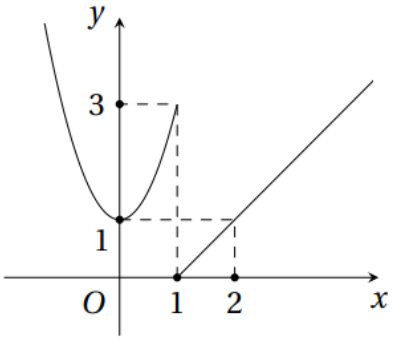
3. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục, đơn điệu trên $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất.

A. Có đúng hai mệnh đề sai.
B. Cả ba mệnh đề đều đúng.
C. Cả ba mệnh đề đều sai.
D. Có đúng một mệnh đề sai.

Lời giải

Khẳng định thứ nhất sai vì thiếu tính liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Câu 8: Hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số gián đoạn tại điểm có hoành độ bằng bao nhiêu?



A. 0.
B. 2.
C. 3.
D. 1.

Lời giải

Dựa vào đồ thị của hàm số, ta thấy hàm số gián đoạn tại điểm có hoành độ bằng 1.

DẠNG 2. LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Dạng 2.1 Xét tính liên tục tại điểm của hàm số

Câu 9: Hàm số nào sau đây không liên tục tại $x=2$?

A. $y=\sqrt{x+2}$. **B.** $y=\sin x$. **C.** $y=\dfrac{x^2}{x-2}$. **D.** $y=x^2-3x+2$.

Lời giải

Hàm số $y=\dfrac{x^2}{x-2}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ nên không liên tục tại $x=2$.

Câu 10: Hàm số $y=\dfrac{1}{x(x-2)(x^2-9)}$ liên tục tại điểm nào dưới đây?

A. 0. **B.** 2. **C.** -3. **D.** 1.

Lời giải

ĐKXĐ: $x(x-2)(x^2-9)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 2 \\ x\neq \pm 3 \end{cases}$.

$\Rightarrow$ hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;-3),(-3;0),(0;2),(2;+\infty)$.

Vậy hàm số liên tục tại $x=1$.

Câu 11: Hàm số $y=\dfrac{-5}{x(x^2-4)}$ liên tục tại điểm nào dưới đây?

A. $x=0$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-2$.

Lời giải

Hàm số $y=\dfrac{-5}{x(x^2-4)}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;0;2\}$.

Theo lý thuyết ta có hàm phân thức luôn liên tục trên tập xác định D.

Khi đó $x=1\in D$ nên suy ra hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=1$.

Câu 12: Hàm số nào sau đây gián đoạn tại điểm $x_0=-1$.

A. $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x}{x-1}$. **C.** $y=(x+1)(x^2+2)$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$.

Lời giải

Hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ xác định khi và chỉ khi $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$

Tập xác định của hàm số là $D=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$

Hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên từng khoảng của tập xác định.

Vậy hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ gián đoạn tại điểm $x_0=-1$.

Câu 13: Hàm số $y=\dfrac{1}{2x-4}$ gián đoạn tại điểm nào dưới đây?

A. $x=1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$, suy ra hàm số gián đoạn tại $x=2$.

Câu 14: Cho hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{1-x^3}{1-x}, \text{khi} & x<1\\ 1 \quad\quad, \text{khi} & x\ge 1\end{cases}$. Hãy chọn kết luận đúng

A. y liên tục phải tại $x=1$. **B.** y liên tục tại $x=1$.

C. y liên tục trái tại $x=1$. **D.** y liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có: $y(1)=1$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} y=1$; $\lim\limits_{x\to 1^-} y=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x^3}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}(1+x+x^2)=4$

Nhận thấy: $\lim\limits_{x\to 1^+} y=y(1)$. Suy ra y liên tục phải tại $x=1$.

Câu 15: Cho hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-7x+12}{x-3} & \text{khi } x\ne 3\\ -1 & \text{khi } x=3\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm tại $x_0=3$.

B. Hàm số gián đoạn và không có đạo hàm tại $x_0=3$.

C. Hàm số có đạo hàm nhưng không liên tục tại $x_0=3$.

D. Hàm số liên tục và có đạo hàm tại $x_0=3$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x-4)=-1=y(3)$ nên hàm số liên tục tại $x_0=3$.

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x^2-7x+12)-(3^2-7.3+12)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x^2-7x+12)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x-4)=-1\Rightarrow y'(3)=-1$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x\ne 2\\ 4 & \text{khi } x=2\end{cases}$. Chọn mệnh đề đúng?

A. Hàm số liên tục tại $x=2$. **B.** Hàm số gián đoạn tại $x=2$.

C. $f(4)=2$. **D.** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x+2}+2\right)=4$

$f(2)=4$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

Vậy hàm số liên tục tại $x=2$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^3-x}$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. Hàm số liên tục tại $x=-1$.

B. Hàm số liên tục tại $x=0$.

C. Hàm số liên tục tại $x=1$.

D. Hàm số liên tục tại $x=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Tại $x=\dfrac{1}{2}$, ta có: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x-1}{x^3-1}=0=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Vậy hàm số liên tục tại $x=2$.

Câu 18: Hàm số nào sau đây liên tục tại $x=1$:

A. $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$. **B.** $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$. **C.** $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x}$. **D.** $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Lời giải

A) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ suy ra $f(x)$ không liên tục tại $x=1$.

B) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-1}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-2}{x-1}=-\infty$ suy ra $f(x)$ không liên tục tại $x=1$.

C) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x+1}{x}=3=f(1)$ suy ra $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

D) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=+\infty$ suy ra $f(x)$ không liên tục tại $x=1$.

Dạng 2.2 Điểm gián đoạn của hàm số

Câu 19: Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x_0=-1$.

A. $y=(x+1)\left(x^2+2\right)$. **B.** $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x}{x-1}$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$.

Lời giải

Ta có $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ không xác định tại $x_0=-1$ nên gián đoạn tại $x_0=-1$.

Câu 20: Hàm số nào sau đây gián đoạn tại $x=2$?

A. $y=\dfrac{3x-4}{x-2}$. **B.** $y=\sin x$. **C.** $y=x^4-2x^2+1$ **D.** $y=\tan x$.

Lời giải

Ta có: $y=\dfrac{3x-4}{x-2}$ có tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$, do đó gián đoạn tại $x=2$.

Câu 21: Hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}$ gián đoạn tại điểm x_0 bằng?

A. $x_0=2018$. **B.** $x_0=1$. **C.** $x_0=0$ **D.** $x_0=-1$.

Lời giải

Vì hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ nên hàm số gián đoạn tại điểm $x_0=-1$.

Câu 22: Cho hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^2-1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số không liên tục tại các điểm $x=\pm1$. **B.** Hàm số liên tục tại mọi $x\in\mathbb{R}$.
C. Hàm số liên tục tại các điểm $x=-1$. **D.** Hàm số liên tục tại các điểm $x=1$.

Lời giải

Hàm số $y=\dfrac{x-3}{x^2-1}$ có tập xác định $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$. Do đó hàm số không liên tục tại các điểm $x=\pm1$.

Câu 23: Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x_0=2$?

A. $y=(x-1)(x-2)$. **B.** $y=\dfrac{(x-2)(x^2+3)}{x-2}$. **C.** $y=\dfrac{x-2}{x+2}$. **D.** $y=\dfrac{x+2}{x^2+2}$.

Lời giải

Hàm số gián đoạn tại điểm $x_0=2$ là $y=\dfrac{(x-2)(x^2+3)}{x-2}$ vì hàm số có tập xác định $D=R\setminus\{2\}$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & khi\ \ x>0\\ x+2021 & khi\ \ x\le 0\end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây **ĐÚNG**?

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. **B.** Hàm số liên tục tại $x=3$.
C. Hàm số gián đoạn tại $x=0$. **D.** Hàm số gián đoạn tại $x=1$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2}{\sqrt{1+2x}+1}=1$.

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x+2021)=2021$.

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ nên hàm số gián đoạn tại $x=0$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} -x\cos x, x<0 \\ \dfrac{x^2}{1+x}, 0\le x<1 \\ x^3, x\ge 1 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số $f(x)$ liên tục tại mọi điểm x thuộc $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $f(x)$ bị gián đoạn tại điểm $x=0$.

C. Hàm số $f(x)$ bị gián đoạn tại điểm $x=1$.

D. Hàm số $f(x)$ bị gián đoạn tại điểm $x=0$ và $x=1$.

Lời giải

* $f(x)$ liên tục tại $x\neq 0$ và $x\neq 1$.

* Tại $x=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x\cos x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{1+x}=0$, $f(0)=0$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$. Hàm số liên tục tại $x=0$.

* Tại $x=1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{1+x}=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x^3=1$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$. Hàm số gián đoạn tại $x=1$.

Dạng 2.3 Bài toán chứa tham số

Câu 26: Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & khi\ x\neq -2 \\ m & khi\ x=-2 \end{cases}$ liên tục tại $x=-2$.

A. $m=2$. **B.** $m=-4$. **C.** $m=4$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Ta có

$\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x-2)=-4$.

Để hàm số liên tục tại $x_0=-2$ thì $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2)=m \Leftrightarrow m=-4$.

Câu 27: Biết hàm số $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx-5 & \text{khi}\ \ x\le 1 \\ 2ax-3b & \text{khi}\ \ x>1 \end{cases}$ liên tục tại $x=1$. Tính giá trị của biểu thức $P=a-4b$.

A. $P=-4$. **B.** $P=5$. **C.** $P=-5$. **D.** $P=4$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(ax^2+bx-5\right)=a+b-5=f(1)$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(2ax-3b\right)=2a-3b$.

Do hàm số liên tục tại $x=1$ nên $a+b-5=2a-3b\Rightarrow a-4b=-5$.

Câu 28: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2-(a-2)x-2}{\sqrt{x+3}-2} & khi\, x\neq 1\\ a^2+11 & khi\, x=1\end{cases}$. Tổng tất cả các giá trị của tham số a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ bằng:

A. -4. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 4.

Lời giải

Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{ax^2-(a-2)x-2}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(ax+2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}(ax+2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)=4(a+2)$$

$f(1)=a^2+11$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow 4(a+2)=a^2+11\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\ a=3\end{array}\right.$.

Vậy tổng các giá trị của a là: $1+3=4$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ m & \text{khi } x=2\end{cases}$. Giá trị của m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=2$ là

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Ta có:

$f(2)=m$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=1$.

Vậy giá trị của m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=2$ là: $m=1$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2+3x-14}{x^2-4} & khi\ x\neq 2\\ m & khi\ x=2\end{cases}$. Với giá trị nào của m thì hàm số liên tục tại $x=2$?

A. $-\dfrac{11}{4}$. **B.** $-\dfrac{11}{2}$. **C.** $\dfrac{11}{2}$. **D.** $\dfrac{11}{4}$.

Lời giải

Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Ta có:

$$f(2)=m;\quad \lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2+3x-14}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+7)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x+7}{(x+2)}=\frac{11}{4}$$

Để hàm số liên tục tại $x=2$ thì $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)\Leftrightarrow m=\dfrac{11}{4}$

Câu 31: Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x+2} & khi\ x\neq -2\\ m & khi\ x=-2\end{cases}$ liên tục tại $x=-2$

A. $m=-4$. **B.** $m=2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Hàm số liên tục tại $x=-2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{x^2-4}{x+2}\right)=\lim\limits_{x\to -2}m=m\ \Leftrightarrow m=-4$

Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 2m+1 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Giá trị của tham số m để hàm số liên tục tại điểm $x_0=1$ là:

A. $m=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Ta có $f(1)=2m+1$

$$\lim\limits_{x\to 1}y=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)=3$$

Để hàm số liên tục tại điểm $x_0=1$ thì $f(1)=\lim\limits_{x\to 1}y\Rightarrow 2m+1=3\Leftrightarrow m=1$.

Câu 33: Để hàm số $y=\begin{cases}x^2+3x+2 & \text{khi} \quad x\leq -1\\ 4x+a & \text{khi} \quad x>-1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=-1$ thì giá trị của a là

A. -4. **B.** 4. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Hàm số liên tục tại $x=-1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to -1^+} y=\lim\limits_{x\to -1^-} y==y(-1)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -1^+}(4x+a)=\lim\limits_{x\to -1^-}(x^2+3x+2)=y(-1) \Leftrightarrow a-4=0\Leftrightarrow a=4$.

Câu 34: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & khi\ x\neq 1\\ 3x+m & khi\ x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$

.

A. $m=0$. **B.** $m=6$. **C.** $m=4$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Ta có: $f(1)=m+3$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2)=3$.

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ thì $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow 3=m+3\Leftrightarrow m=0$.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{2016}+x-2}{\sqrt{2018x+1}-\sqrt{x+2018}} & khi\ x\neq 1\\ k & khi\ x=1\end{cases}$. Tìm k để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

A. $k=2\sqrt{2019}$. **B.** $k=\dfrac{2017.\sqrt{2018}}{2}$. **C.** $k=1$. **D.** $k=\dfrac{20016}{2017}\sqrt{2019}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2016}+x-2}{\sqrt{2018x+1}-\sqrt{x+2018}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^{2016}-1+x-1)(\sqrt{2018x+1}+\sqrt{x+2018})}{2017x-2017}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^{2015}+x^{2014}+...+x+1+1)(\sqrt{2018x+1}+\sqrt{x+2018})}{2017(x-1)}=2\sqrt{2019}$

Để hàm số liên tục tại $x=1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow k=2\sqrt{2019}$.

Câu 36: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & khi\ x\neq 1\\ a & khi\ x=1\end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0=1$.

A. $a=0$. **B.** $a=-\dfrac{1}{2}$. **C.** $a=\dfrac{1}{2}$. **D.** $a=1$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$.

Để hàm số liên tục tại $x_0=1$ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$.

Câu 37: Biết hàm số $f(x)=\begin{cases}3x+b & khi\ x\le -1\\ x+a & khi\ x>-1\end{cases}$ liên tục tại $x=-1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a=b-2$. **B.** $a=-2-b$. **C.** $a=2-b$. **D.** $a=b+2$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=f(-1)=b-3$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=a-1$.

Hàm số liên tục tại $x=-1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)\Leftrightarrow b-3=a-1\Leftrightarrow a=b-2$

Câu 38: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi x} \ne 3\\ m & \text{khi x=3}\end{cases}$. Hàm số đã cho liên tục tại $x=3$ khi $m=?$

A. -1. **B.** 1. **C.** 4. **D.** -4.

Lời giải

$f(3)=m$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(3-x)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\left(-\sqrt{x+1}-2\right)=-4$

Để hàm số liên tục tại $x=3$ thì $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$

Suy ra, $m=-4$.

Câu 39: Biết hàm số $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx-5 & \text{khi} \quad x\le 1\\ 2ax-3b & \text{khi} \quad x>1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$ Tính giá trị của biểu thức $P=a-4b$.

A. $P=-4$. **B.** $P=-5$. **C.** $P=5$. **D.** $P=4$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(ax^2+bx-5\right)=a+b-5=f(1)$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2ax-3b)=2a-3b$.

Do hàm số liên tục tại $x=1$ nên $a+b-5=2a-3b\Rightarrow a-4b=-5$.

Câu 40: Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{x-1} & khi\ x\ne 1\\ m-1 & khi\quad x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$

A. $m=0$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=1$ **D.** $m=2$.

Lời giải

TXĐ: $D=R$

Ta có $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1} x=1$

Và $f(1)=m-1$.

Hàm số liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow m-1=1 \Leftrightarrow m=2$

Câu 41: Có bao nhiêu số tự nhiên m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & khi\ x\neq 1\\ m^2+m-1 & khi\ x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=1$?

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-2)=-1$.

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x=1$ cần: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

$\Leftrightarrow m^2+m-1=-1$

$\Leftrightarrow m^2+m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \quad (\text{TM})\\ m=-1\ (\text{L})\end{array}\right.$.

Câu 42: Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ 2x+a & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$?

A. $\dfrac{15}{4}$. **B.** $-\dfrac{15}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $f(2)=4+a$.

Ta tính được $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\dfrac{1}{4}$.

Hàm số đã cho liên tục tại $x=2$ khi và chỉ khi $f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x) \Leftrightarrow 4+a=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow a=-\dfrac{15}{4}$.

Vậy hàm số liên tục tại $x=2$ khi $a=-\dfrac{15}{4}$.

Câu 43: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+2}-2} & khi\ \ x>2\\ m^2x-4m+6 & khi\ \ x\leq 2\end{cases}$, m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của m để hàm số đã cho liên tục tại $x=2$?

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1

Lời giải

Ta có

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x+2}-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x-1)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}(x-1)\left(\sqrt{x+2}+2\right)=4$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(m^2x-4m+6\right)=2m^2-4m+6$$

$$f(2)=2m^2-4m+6$$

Để hàm số liên tục tại $x=2$ thì

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)\Leftrightarrow 2m^2-4m+6=4\Leftrightarrow 2m^2-4m+2=0\Leftrightarrow m=1$$

Vậy có một giá trị của m thỏa mãn hàm số đã cho liên tục tại $x=2$.

Câu 44: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3x^2+2x-1}-2}{x^2-1}, & x\neq 1\\ 4-m & x=1\end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=1$ khi

A. $m=3$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=7$. **D.** $m=-7$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$, $x_0=1\in\mathbb{R}$.

Ta có $f(1)=4-m$.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x^2+2x-1}-2}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(3x+5)}{(x+1)(x-1)\left(\sqrt{3x^2+2x-1}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3x+5}{(x+1)\left(\sqrt{3x^2+2x-1}+2\right)}=1$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=1$ khi và chỉ khi $\lim_{x\to 1}(x)=f(1)\Leftrightarrow 4-m=1\Leftrightarrow m=3$.

Câu 45: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1} & \text{khi} \quad x<-1\\ mx+2 & \text{khi} \quad x\geq -1\end{cases}$ liên tục tại $x=-1$.

A. $m=\dfrac{-3}{2}$. **B.** $m=\dfrac{-5}{2}$. **C.** $m=\dfrac{3}{2}$. **D.** $m=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

- Ta có:

+ $f(-1)=-m+2$.

+ $\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=-m+2$.

+ $\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to(-1)^-}\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to(-1)^-}\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{-1}{2}$.

- Hàm số liên tục tại $x=-1 \Leftrightarrow f(-1)=\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) \Leftrightarrow -m+2=\dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow m=\dfrac{5}{2}$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} & \text{khi } x\neq 0\\ 2a-\dfrac{5}{4} & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

A. $a=-\dfrac{3}{4}$. **B.** $a=\dfrac{4}{3}$. **C.** $a=-\dfrac{4}{3}$. **D.** $a=\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+4-4}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

$f(0)=2a-\dfrac{5}{4}$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0) \Leftrightarrow 2a-\dfrac{5}{4}=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow a=\dfrac{3}{4}$.

Vậy $a=\dfrac{3}{4}$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 & \text{khi } x\neq 1\\ 3x+m-1 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x_0=1$.

A. $m=1$. **B.** $m=3$. **C.** $m=0$. **D.** $m=2$.

Lời giải

TXĐ $D=\mathbb{R}$

Ta có $f(1)=2+m$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-2x+3\right)=2$.

Hàm số liên tục tại $x_0=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1) \Leftrightarrow 2=m+2 \Leftrightarrow m=0$.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ a & \text{khi } x=2\end{cases}$. Hàm số liên tục tại $x=2$ khi a bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải

Hàm số liên tục tại $x=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$.

Ta có $f(2)=a, \lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=1$. Do đó $a=1$

Câu 49: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & khi \quad x\neq 3\\ mx+2 & khi \quad x=3\end{cases}$. Hàm số liên tục tại điểm $x=3$ khi m bằng:

A. -2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 2.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f(3)=3m+2$ và $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=\lim\limits_{x\to 3}\left[-\left(\sqrt{x+1}+2\right)\right]=-4$.

Hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3) \Leftrightarrow 3m+2=-4 \Leftrightarrow m=-2$.

Câu 50: Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4} & khi\, x>4\\ mx+1 & khi\, x\le 4\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=4$.

A. $m=\dfrac{7}{4}$. **B.** $m=8$. **C.** $m=-\dfrac{7}{4}$. **D.** $m=-8$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=f(4)=4m+1$; $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4^+}(x+4)=8$.

Hàm số liên tục tại điểm $x=4 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=f(4) \Leftrightarrow 4m+1=8 \Leftrightarrow m=\dfrac{7}{4}$.

Câu 51: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x}{x-2} & \text{khi } x>2\\ mx-4 & \text{khi } x\le 2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

A. $m=3$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-2$. **D.** Không tồn tại m.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-2x}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+} x=2$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(mx-4)=2m-4$

Hàm số liên tục tại $x=2$ khi $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \Leftrightarrow 2m-4=2 \Leftrightarrow m=3$.

Câu 52: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-m}{x-1} & khi\, x\neq 1\\ n & khi\, x=1\end{cases}$. Để hàm số liên tục tại $x_0=1$ thì giá trị của biểu thức $(m+n)$ tương ứng bằng:

A. $\frac{3}{4}$. **B.** 1. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Ta có: $f(1)=n$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+3-m^2}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+m\right)}$.

Hàm số liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow n=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+3-m^2}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+m\right)}$ (1).

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ tồn tại khi 1 là nghiệm của phương trình: $1+3-m^2=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

+ Khi $m=2$ thì $(1)\Rightarrow n=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}\Rightarrow n=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}\Rightarrow n=\dfrac{1}{4}$.

+ Khi $m=-2$ thì $(1)\Rightarrow n=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}-2}$ suy ra không tồn tại n.

Vậy $m+n=2+\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{4}$.

Câu 53: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x-3} & \text{khi } x\neq 3 \\ m & \text{khi } x=3\end{cases}$. Tìm giá trị của m để hàm số liên tục tại $x=3$?

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Ta có: $f(3)=m$.

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-3x+2\right)=2$.

Câu 54: Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x+1} & khi\ x>-1 \\ mx-2m^2 & \text{khi } x\leq -1\end{cases}$ liên tục tại $x=-1$.

A. $m\in\left\{1;-\dfrac{3}{2}\right\}$. **B.** $m\in\{1\}$. **C.** $m\in\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$. **D.** $m\in\left\{-1;\dfrac{3}{2}\right\}$..

Lời giải

Tập xác định $D=R$.

* $f(-1)=-m-2m^2$

* $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(mx-2m^2)=-m-2m^2$.

* $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2-x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{(x+1)(x-2)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}(x-2)=-3.$

Hàm số liên tục tại $x=-1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1)$

$\Leftrightarrow -m-2m^2=-3\Leftrightarrow 2m^2+m-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

Vậy các giá trị của m là $m\in\left\{1;-\dfrac{3}{2}\right\}$.

Câu 55: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x} & khi\ x<2\\ mx+m+1 & khi\ x\ge 2\end{cases}$ liên tục tại điểm $x=2$

.

A. $m=\dfrac{1}{6}$. **B.** $m=-\dfrac{1}{6}$. **C.** $m=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-1)}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{1}{2}$.

$f(2)=3m+1$.

Để hàm số liên tục tại điểm $x=2\Leftrightarrow 3m+1=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{6}$.

Câu 56: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} & \text{khi } x\ne 0\\ 2a-\dfrac{5}{4} & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tìm các giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

A. $a=-\dfrac{3}{4}$. **B.** $a=\dfrac{4}{3}$. **C.** $a=-\dfrac{4}{3}$. **D.** $a=\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

+ Ta có $f(0)=2a-\dfrac{5}{4}$.

+ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}+2}\right)=\dfrac{1}{4}$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0$ khi $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\Leftrightarrow 2a-\dfrac{5}{4}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow a=\dfrac{3}{4}$.

Câu 57: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{4x^3-3x+1} & \text{khi } x\neq\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{c}{2} & \text{khi } x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$, $(a,b,c\in\mathbb{R})$. Biết hàm số liên tục tại $x=\dfrac{1}{2}$. Tính $S=abc$.

A. $S=-36$. **B.** $S=18$. **C.** $S=36$. **D.** $S=-18$.

Lời giải

Ta có $\dfrac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{4x^3-3x+1}=\dfrac{\left(\sqrt{ax^2+1}\right)^2-(bx+2)^2}{(2x-1)^2(x+1)\left(\sqrt{ax^2+1}+bx+2\right)}=\dfrac{\left(a-b^2\right)x^2-4bx-3}{(2x-1)^2(x+1)\left(\sqrt{ax^2+1}+bx+2\right)}$.

Để hàm số liên tục tại $x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\left(a-b^2\right)x^2-4bx-3=m(2x-1)^2\\ \sqrt{\dfrac{a}{4}+1}+\dfrac{b}{2}+2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-3\\ b=-3\\ a=-3\end{cases}$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{4x^3-3x+1}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{-12x^2+12x-3}{(2x-1)^2(x+1)\left(\sqrt{-3x^2+1}-3x+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{-3}{(x+1)\left(\sqrt{-3x^2+1}-3x+2\right)}=\dfrac{-3}{\frac{3}{2}}=-2=\dfrac{c}{2}\Rightarrow c=-4$.

Vậy $S=abc=-3(-3)(-4)=-36$.

Câu 58: Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

A. $a=1$. **B.** $a=0$. **C.** $a=2$. **D.** $a=-1$.

Lời giải

Tập xác định $D=R$.

$f(1)=a$.

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$.

$f(x)$ liên tục tại $x_0=1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow a=2$.

Câu 59: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ m & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3$.

Hàm số liên tục tại $x=2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)\Leftrightarrow m=3$.

Câu 60: Để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-3x+1}{2(x-1)} & khi\ \ x\neq 1\\ m & khi\ \ x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$ thì giá trị m bằng

A. $0,5$. **B.** $1,5$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

$f(1)=m$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(2x-1)}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ thì $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

Câu 61: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & \text{khi}\ \ x\neq 1\\ 3m & \text{khi}\ \ x=1\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số gián đoạn tại $x=1$.

A. $m\neq 2$. **B.** $m\neq 1$. **C.** $m\neq 2$. **D.** $m\neq 3$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Hàm số gián đoạn tại $x=1$ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\neq f(1)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}\neq 3m$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}\neq 3m\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}(x+2)\neq 3m\Leftrightarrow 3\neq 3m\Leftrightarrow m\neq 1.$

Câu 62: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{khi}\ \ x<0\\ m+\dfrac{1-x}{1+x} & \text{khi}\ \ x\geq 0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$.

A. $m=1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Ta có

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(m+\dfrac{1-x}{1+x}\right)=m+1$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2x}{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=-1$.

$f(0)=m+1$

Để hàm liên tục tại $x=0$ thì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\Leftrightarrow m+1=-1\Rightarrow m=-2$.

Câu 63: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2-(a-2)x-2}{\sqrt{x+3}-2} & \text{khi}\ x\neq 1\\ 8+a^2 & \text{khi}\ x=1\end{cases}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của a để hàm số liên tục tại $x=1$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Tập xác định: $D=[-3;+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2-(a-2)x-2}{\sqrt{x+3}-2}$.

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(ax+2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x-1}$.

$=\lim\limits_{x\to 1}(ax+2)\left(\sqrt{x+3}+2\right)=4(a+2)$.

$f(1)=8+a^2$.

Hàm số đã cho liên tục tại $x=1$ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow 4(a+2)=8+a^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=4\end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của a để hàm số đã cho liên tục tại $x=1$.

Câu 64: Giá trị của tham số a để hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ a+2x & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** 1. **C.** $-\dfrac{15}{4}$. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\dfrac{1}{4}$.

Hàm số liên tục tại $x=2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow a+4=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow a=-\dfrac{15}{4}$.

Câu 65: Hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+1 \ khi \ x\le 1\\ x+m \ khi \ x>1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=1$ khi m nhận giá trị

A. $m=-2$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2+1\right)=2$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+m)=1+m$. Để hàm số liên tục tại $x_0=1$ thì $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\Leftrightarrow 2=m+1\Leftrightarrow m=1$.

Câu 66: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} & \text{khi } x\neq 4\\ a+2 & \text{khi } x=4\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để hàm số liên tục tại $x_0=4$.

A. $a=\dfrac{5}{2}$. **B.** $a=-\dfrac{11}{6}$. **C.** $a=3$. **D.** $a=2$.

Lời giải

$\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}\right)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}}=\dfrac{1}{6}$

$f(4)=a+2$.

Hàm số liên tục tại $x_0=4$ khi: $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=f(4)\Leftrightarrow \dfrac{1}{6}=a+2\Leftrightarrow a=-\dfrac{11}{6}$.

Câu 67: Tìm tham số thực m để hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-12}{x+4} & \text{khi } x\neq -4\\ mx+1 & \text{khi } x=-4\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=-4$.

A. $m=4$. **B.** $m=3$. **C.** $m=2$. **D.** $m=5$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có:

+ $\lim\limits_{x\to -4} f(x)=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+x-12}{x+4}=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{(x-3)(x+4)}{x+4}=\lim\limits_{x\to -4}(x-3)=-7$.

+ $f(-4)=-4m+1$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0=-4$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to -4} f(x)=f(-4)\Leftrightarrow -4m+1=-7$

$\Leftrightarrow m=2$.

Câu 68: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\dfrac{3}{4}$. **D.** $m=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+1-2^2}{(x-1)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}+2}=\dfrac{3}{4}$.

Với $f(1)=m$ ta suy ra hàm số liện tục tại $x=1$ khi $m=\dfrac{3}{4}$.

Câu 69: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } (x>1)\\ m^2+m+\dfrac{1}{4} & \text{khi } (x\leq 1)\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

A. $m\in\{0;1\}$. **B.** $m\in\{0;-1\}$. **C.** $m\in\{1\}$. **D.** $m\in\{0\}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\dfrac{1}{4}$; $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=m^2+m+\dfrac{1}{4}$.

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ thì $m^2+m+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=0 \end{array}\right.$.

Câu 70: Tìm a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$: $f(x)=\begin{cases} 2x+a & \text{khi } x\le 1 \\ \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x>1. \end{cases}$

A. $a=-2$. **B.** $a=1$. **C.** $a=2$. **D.** $a=-1$.

Lời giải

• Khi $x<1$ thì $f(x)=2x+a$ là hàm đa thức nên liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$.

• Khi $x>1$ thì $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}$ là hàm phân thức hữu tỉ xác định trên khoảng $(1;+\infty)$ nên liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$.

• Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x=1$, ta có:

+ $f(1)=2+a$.

+ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+a)=2+a$.

+ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x^2+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+2)=3$.

• Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\Leftrightarrow 2a+1=3\Leftrightarrow a=1$.

Câu 71: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & khi\ x\ne 2 \\ m^2 & khi\ x=2 \end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

A. $m=\sqrt{3}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\pm\sqrt{3}$. **D.** $m=\pm 1$.

Lời giải

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=m^2\Leftrightarrow 3=m^2\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{3}$.

Câu 72: Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+4x+3}{x+1} & khi\ x>-1 \\ mx+2 & khi\ x\le -1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x=-1$.

A. $m=2$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=4$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2+4x+3}{x+1}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{(x+1)(x+3)}{x+1}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+3)=2$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}(mx+2)=-m+2$.

$f(-1)=-m+2$.

Để hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=-1$ thì $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=f(-1)\Leftrightarrow 2=-m+2$

$\Leftrightarrow m=0$.

Câu 73: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} & khi \quad x\neq 2\\ 2m+1 & khi \quad x=2\end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x_0=2$.

A. $m=\dfrac{3}{2}$. **B.** $m=\dfrac{13}{2}$. **C.** $m=\dfrac{11}{2}$. **D.** $m=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

$f(2)=2m+1$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$.

Hàm số liên tục tại $x_0=2\Leftrightarrow f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)\Leftrightarrow 2m+1=12\Leftrightarrow m=\dfrac{11}{2}$.

Câu 74: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^2+2x+8}{x+2} & \text{khi} \quad x\neq -2\\ m^2x^2+5mx & \text{khi} \quad x=-2\end{cases}$ $(m\in\mathbb{R})$. Biết hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=-2$. Số giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$; có: $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{-x^2+2x+8}{x+2}=6, f(2)=4m^2-10m$.

Hàm số liên tục tại $x_0=-2$ khi và chỉ khi $4m^2-10m=6\Leftrightarrow 4m^2-10m-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\ m=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Mà m là số nguyên nên $m=3$.

DẠNG 3. LIÊN TỤC TRÊN KHOẢNG

Dạng 3.1 Xét tính liên tục trên khoảng của hàm số

Câu 75: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+5x+6}$. Khi đó hàm số $y=f(x)$ liên tục trên các khoảng nào sau đây?

A. $(-3;2)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(-3;3)$.

Lời giải

Hàm số có nghĩa khi $x^2+5x+6\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -3 \\ x\neq -2 \end{cases}$.

Vậy theo định lí ta có hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+5x+6}$ liên tục trên khoảng $(-\infty;-3);(-3;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

Câu 76: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x^2+5x+4}$. Khi đó, hàm số liên tục trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;2)$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $(-5;3)$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Lời giải

Hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2+5x+4\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ x\neq -4 \end{cases}$.

Tập xác định của làm số là $D=(-\infty;-4)\cup(-4;-1)\cup(-1;+\infty)$.

Hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x^2+5x+4}$ là hàm phân thức hữu tỉ, nên liên tục trên từng khoảng của tập xác định $(-\infty;-4)$, $(-4;-1)$ và $(-1;+\infty)$. Vậy hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Câu 77: Hàm số $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$ liên tục trên khoảng:

A. $(0;2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-\infty;+\infty)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Hàm số $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$ liên tục khi $x^2-3x+2\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq 2 \end{cases}$

Ta có: $x=1\in(0;2)$ loại A

$x=2\in(1;3)$ loại D

$\{1;2\}\subset(-\infty;+\infty)$ loại C

Câu 78: Hàm số nào dưới đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y=2x-3\cos x$. **B.** $y=1+\tan x$. **C.** $y=x-\cot x$. **D.** $y=\dfrac{1}{\cos x}$.

Lời giải

+ Do hàm số $y=1+\tan x$ và hàm số $y=\dfrac{1}{\cos x}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ nên hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó loại phương án B, D

+ Do hàm số $y=x-\cot x$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ nên hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó loại phương án C

+ Do hàm số $y=2x-3\cos x$ là hàm số sơ cấp có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 79: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 2 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số liên tục tại mọi điểm $x\neq 1$ và gián đoạn tại $x=1$.

B. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số không liên tục trên $(1;+\infty)$.

D. Hàm số gián đoạn tại điểm $x=1$.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ $(x\neq 1)$ là hàm phân thức nên liên tục trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

Ta xét tính liên tục của $f(x)$ tại $x=1$.

Ta có

+) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$

+) $f(1)=2$

Do đó $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=2$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 80: Hàm số nào sau đây không liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$. **B.** $y=\cos x$. **C.** $y=x^2-3x+2$. **D.** $y=\dfrac{3x}{x+2}$.

Lời giải

Hàm số $y=\dfrac{3x}{x+2}$ không xác định tại $x=2$ nên không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 81: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số liên tục trên khoảng $(1;5)$. **B.** Hàm số gián đoạn tại $x=2020$.

C. Hàm số liên tục tại $x=2$. **D.** Hàm số gián đoạn tại $x=2$.

Lời giải

Hàm số $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$ không xác định tại $x=2$ nên hàm số này gián đoạn tại $x=2$.

Câu 82: Hàm số nào dưới đây liên tục trên khoảng $(0;5)$?

A. $y=\dfrac{3x-2}{x-3}$. **B.** $y=\dfrac{x+1}{x+2}$. **C.** $y=\dfrac{5x+1}{x-4}$. **D.** $y=\dfrac{1}{x^2-1}$.

Lời giải

Hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ nên liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$. Vậy hàm số đó liên tục trên khoảng $(0;5)$

Câu 83: Hàm số nào dưới đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x+\cos x$. **B.** $y=x-\tan x$. **C.** $y=1+\cot x$. **D.** $y=\dfrac{1}{\cos x}$.

Lời giải

Hàm số $y=x+\cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 84: Hàm số nào trong các hàm số dưới đây không liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^2+6x+20$. **B.** $y=\cos x$. **C.** $y=\dfrac{x}{x^2+x+2}$. **D.** $y=\dfrac{x}{x+1}$.

Lời giải

Hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}$ không xác định tại điểm $x=-1$ nên không liên tục tại điểm đó.

Câu 85: Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^3-x$. **B.** $y=\cot x$. **C.** $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$. **D.** $y=\sqrt{x^2-1}$.

Lời giải

Vì $y=x^3-x$ là đa thức nên nó liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 86: Cho bốn hàm số $f_1(x)=2x^3-3x+1$, $f_2(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$, $f_3(x)=\cos x+3$ và $f_4(x)=\log_3 x$. Hỏi có bao nhiêu hàm số liên tục trên tập $\mathbb{R}$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

* Ta có hai hàm số $f_2(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$ và $f_4(x)=\log_3 x$ có tập xác định không phải là tập $\mathbb{R}$ nên không thỏa yêu cầu.

* Cả hai hàm số $f_1(x)=2x^3-3x+1$ và $f_3(x)=\cos x+3$ đều có tập xác định là $\mathbb{R}$ đồng thời liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 87: Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $f(x)=\tan x+5$. **B.** $f(x)=\dfrac{x^2+3}{5-x}$. **C.** $f(x)=\sqrt{x-6}$. **D.** $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2+4}$.

Lời giải

Hàm số $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2+4}$ là hàm phân thức hữu tỉ và có TXĐ là $D=\mathbb{R}$ do đó hàm số $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2+4}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 88: Cho hàm số $y=\begin{cases}-x^2+x+3 & \text{khi } x\geq 2\\ 5x+2 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Hàm số liên tục tại $x_0=1$.

B. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;2),(2;+\infty)$.

D. Hàm số gián đoạn tại $x_0=2$.

Lời giải

+ Với $x>2$, ta có $f(x)=-x^2+x+3$ là hàm đa thức

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(2;+\infty)$.

+ Với $x<2$, ta có $f(x)=5x+2$ là hàm đa thức

$\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-\infty;2)$.

+ Tại $x=2$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(-x^2+x+3)=1$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(5x+2)=12$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\Rightarrow$ không tồn tại $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\Rightarrow$ hàm số gián đoạn tại $x_0=2$.

$\Rightarrow$ Hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 89: Hàm số nào sau đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $f(x)=\sqrt{x}$. **B.** $f(x)=x^4-4x^2$. **C.** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^4-4x^2}{x+1}}$. **D.** $f(x)=\dfrac{x^4-4x^2}{x+1}$.

Lời giải

Vì hàm số $f(x)=x^4-4x^2$ có dạng đa thức với TXĐ: $D=\mathbb{R}$ nên hàm số này liên tục trên $\mathbb{R}$

Câu 90: Hàm số nào trong các hàm số dưới đây **không** liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y=|x|$. **B.** $y=\dfrac{x}{x+1}$. **C.** $y=\sin x$. **D.** $y=\dfrac{x}{|x|+1}$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{x}{x+1}$ là $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Hàm số liên tục trên từng khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ nên hàm số **không** liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 91: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{neu } \cos x\ge 0\\ 1+\cos x & \text{neu } \cos x<0\end{cases}$. Hỏi hàm số f có tất cả bao nhiêu điểm gián đoạn trên khoảng $(0;2018)$?

A. 2018. **B.** 1009. **C.** 642. **D.** 321.

Lời giải

Vì f là hàm lượng giác nên hàm số f gián đoạn khi và chỉ khi hàm số f gián đoạn tại x làm cho $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)\in(0;2018) \Leftrightarrow 0<\frac{\pi}{2}+k\pi<2018 \Leftrightarrow 0<\frac{1}{2}+k<\frac{2018}{\pi}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<k<\frac{2018}{\pi}-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0\le k\le 641$.

Dạng 3.2 Bài toán chứa tham số

Câu 92: Cho hàm số $y=\begin{cases}x+2 & \text{khi } x\ge -1\\ x+m & \text{khi } x<-1\end{cases}$, m là tham số. Tìm m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

A. $m=2$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=5$. **D.** $m=3$.

Lời giải

+ Với $x\ge -1$: hàm số $y=x+2$, suy ra hàm số liên tục trên khoảng $(-1;+\infty)$.

+ Với $x<-1$: hàm số $y=x+m$, suy ra hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty;-1)$, do đó để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số cần liên tục tại $x=-1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to -1^+} y=\lim\limits_{x\to -1^-} y=f(-1)$.

+ Ta có: $\lim\limits_{x\to -1^+} y=\lim\limits_{x\to -1^+}(x+2)=1$; $\lim\limits_{x\to -1^-} y=\lim\limits_{x\to -1^-}(x+m)=-1+m$; $f(-1)=1$

Suy ra $1=-1+m \Leftrightarrow m=2$.

Câu 93: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2mx^2-4 & \text{khi } x\le 3\\ 5 & \text{khi } x>3\end{cases}$ (m là tham số). Tìm giá trị của m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{18}$. **C.** 18. **D.** 2.

Lời giải

Khi $x<3$ thì $f(x)=2mx^2-4$ là hàm sơ cấp nên liên tục trên $(-\infty;3)$.

Khi $x>3$ thì $f(x)=5$ là hàm hằng nên liên tục trên $(+\infty;3)$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=3$ hay

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 3^-}\left(2mx^2-4\right)=\lim\limits_{x\to 3^+} 5=18m-4$

$\Leftrightarrow 18m-4=5 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

Câu 94: Biết hàm số $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx-4 & khi\ x\le 1 \\ 2ax-2b & khi\ x>1 \end{cases}$ liên tục trên R. Tìm giá trị của biểu thức $P=a-3b$

A. $P=-4$ **B.** $P=5$ **C.** $P=4$ **D.** $P=-5$

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(ax^2+bx-4\right)=a+b-4$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left(2ax-2b\right)=2a-2b$

Để hàm số liên tục trên R thì hàm số liên tục tại điểm $x=1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x) \Leftrightarrow a+b-4=2a-2b \Leftrightarrow a-3b=-4$

Câu 95: Biết hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-7x+6}{x^2-3x+2}, & \text{khi } x\ne 1 \text{ và } x\ne 2 \\ 2a, & \text{khi } x=1 \\ b-3, & \text{khi } x=2 \end{cases}$ liên tục trên R. Tính $P=a^2+b^2$.

A. $P=68$. **B.** $P=45$. **C.** $P=41$. **D.** $P=10$.

Lời giải

Khi $x\ne 1$ và $x\ne 2$ thì hàm số $f(x)=\dfrac{x^3-7x+6}{x^2-3x+2}$ liên tục trên tập xác định.

Xét tại $x=1, x=2$:

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-7x+6}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)(x+3)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}(x+3)=4$

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-7x+6}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)(x-2)(x+3)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}(x+3)=5$

$f(1)=2a;\ f(2)=b-3$

Để hàm số liên tục trên R thì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1}=f(1) \\ \lim\limits_{x\to 2}=f(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=4 \\ b-3=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=8 \end{cases}$

Vậy $P=2^2+8^2=68$.

Câu 96: Tìm m để hàm số $y=\begin{cases} \dfrac{2\sqrt[3]{x}-x-1}{x-1}, & x\ne 1 \\ mx+1 & ,x=1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m=-\frac{4}{3}$. **B.** $m=-\frac{1}{3}$. **C.** $m=\frac{4}{3}$. **D.** $m=\frac{2}{3}$.

Lời giải

+) Xét $x\neq 1$, hàm số $y=\frac{2\sqrt[3]{x}-x-1}{x-1}$ liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

+) Xét $x=1$, ta có $y(1)=m+1$ và

$$\lim_{x\to 1} y=\lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt[3]{x}-x-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2\left(\sqrt[3]{x}-1\right)-(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}-1=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}.$$

Đề hàm số liên tục tại $x=1$ thì $\lim_{x\to 1} y=y(1)\Leftrightarrow m+1=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow m=-\frac{4}{3}$.

Vậy với $m=-\frac{4}{3}$ thì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 97: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2} & , \ x\neq 2\\ ax+3 & , \ x=2\end{cases}$. Xác định a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $a=-1$. **B.** $a=\frac{1}{6}$. **C.** $a=\frac{4}{3}$. **D.** $a=-\frac{4}{3}$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

Nếu $x\neq 2$, ta có $f(x)=\frac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}$. Hàm số $f(x)=\frac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}$ xác định và liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Tại $x=2$, ta có:

$f(2)=2a+3$.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt[3]{4x}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{4x}\right)^2+2\sqrt[3]{4x}+4\right]}{(x-2)\left[\left(\sqrt[3]{4x}\right)^2+2\sqrt[3]{4x}+4\right]}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{4(x-2)}{(x-2)\left[\left(\sqrt[3]{4x}\right)^2+2\sqrt[3]{4x}+4\right]}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{4}{\left(\sqrt[3]{4x}\right)^2+2\sqrt[3]{4x}+4}$$

$$= \frac{1}{3}$$

Hàm số liên tục tại $x=2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 2a+3 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = -\frac{4}{3}$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a = -\frac{4}{3}$.

Câu 98: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m-2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=-4$.

Lời giải

Do $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$ nên hàm số liên tục tại $x=1$ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m-2 = 2 \Leftrightarrow m = 4$. Khi đó hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 99: Tìm m để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2+2\sqrt{x-2} & khi\ x \geq 2 \\ 5x-5m+m^2 & khi\ x < 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $m=2; m=3$. **B.** $m=-2; m=-3$. **C.** $m=1; m=6$. **D.** $m=-1; m=-6$.

Lời giải

TXĐ: $\mathbb{R}$.

+ Xét trên $(2;+\infty)$ khi đó $f(x) = x^2+2\sqrt{x-2}$.

$\forall x_0 \in (2;+\infty): \lim\limits_{x\to x_0}\left({x_0}^2+2\sqrt{x_0-2}\right) = {x_0}^2+2\sqrt{x_0-2} = f(x_0) \Rightarrow$ hàm số liên tục trên $(2;+\infty)$.

+ Xét trên $(-\infty;2)$ khi đó $f(x) = 5x-5m+m^2$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số liên tục trên $(-\infty;2)$.

+ Xét tại $x_0 = 2$, ta có: $f(2) = 4$.

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2+2\sqrt{x-2}\right)=4;\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(5x-5m+m^2\right)=m^2-5m+10$.

Để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ thì nó phải liên tục tại $x_0=2$.

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)\Leftrightarrow m^2-5m+10=4\Leftrightarrow m^2-5m+6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2\\ m=3\end{array}\right.$$

Câu 100: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x+a-1 & khi\ \ x\le 0\\ \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & khi\ \ x>0\end{cases}$. Tìm tất cả giá trị thực của a để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $a=1$. **B.** $a=3$. **C.** $a=4$. **D.** $a=2$.

Lời giải

Hàm số liên tục tại mọi điểm $x\neq 0$ với bất kỳ a.

Với $x=0$ Ta có $f(0)=a-1$;

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(3x+a-1)=a-1$;

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{\sqrt{1+2x}+1}=1;$$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x=0\Leftrightarrow a-1=1\Leftrightarrow a=2$.

Câu 101: Cho biết hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2+2x}{x(x-2)} & \text{khi} \quad x(x-2)\neq 0\\ a & \text{khi} \quad x=0\\ b & \text{khi} \quad x=2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $T=a^2+b^2$.

A. $T=2$. **B.** $T=122$. **C.** $T=101$. **D.** $T=145$.

Lời giải

Vì hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ suy ra hàm số cũng liên tục tại $x=0$ và $x=2$. Do đó

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x^2+2x}{x(x-2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)(x-2)}{x(x-2)}=f(0)\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(x-1)(x-2)}{x-2}=a\Leftrightarrow a=-1.$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x^2+2x}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-1)(x-2)}{x(x-2)}=f(2)\Leftrightarrow \lim_{x\to 2}\frac{x(x-1)}{x}=b\Leftrightarrow b=1.$$

Vậy $T=a^2+b^2=1+1=2$.

Câu 102: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}m^2x^2 & \text{khi } x\le 2\\ (1-m)x & \text{khi } x>2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có hàm số luôn liên tục $\forall x\neq 2$.

Tại $x=2$, ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(1-m)x=(1-m)2$;

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(m^2x^2)=4m^2$; $f(2)=4m^2$.

Hàm số liên tục tại $x=2$ khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\Leftrightarrow 4m^2=(1-m)2\Leftrightarrow 4m^2+2m-2=0(1)$

Phương trình luôn có hai nghiệm thực phân biệt. Vậy có hai giá trị của m.

Câu 103: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}-m & \text{khi } x\ge 0\\ mx+1 & \text{khi } x<0\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của m để $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m=1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\sqrt{x}-m)=-m$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(mx+1)=1$; $f(0)=-m$.

$f(x)$ liên tục tại $x=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\Leftrightarrow -m=1\Leftrightarrow m=-1$.

Câu 104: Tìm P để hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & \text{khi } x>1\\ 6Px-3 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $P=\dfrac{5}{6}$. **B.** $P=\dfrac{1}{2}$. **C.** $P=\dfrac{1}{6}$. **D.** $P=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\Rightarrow y=f(x)$ liên tục tại $x=1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-3)=-2$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(6Px-3)=6P-3$

$f(1)=6P-3$

Do đó $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\Leftrightarrow 6P-3=-2\Leftrightarrow P=\dfrac{1}{6}$.

Câu 105: Hàm số $f(x)=\begin{cases}ax+b+1, khi\, x>0\\ a\cos x+b\sin x,\ khi\, x\le 0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

A. $a-b=1$. **B.** $a-b=-1$. **C.** $a+b=1$ **D.** $a+b=1$

Lời giải

Khi $x<0$ thì $f(x)=a\cos x+b\sin x$ liên tục với $x<0$.

Khi $x>0$ thì $f(x)=ax+b+1$ liên tục với mọi $x>0$.

Tại $x=0$ ta có $f(0)=a$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(ax+b+1)=b+1$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(a\cos x+b\sin x)=a$.

Để hàm số liên tục tại $x=0$ thì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\Leftrightarrow a=b+1\Leftrightarrow a-b=1$.

Câu 106: Cho hàm số $y=\begin{cases}3x+1 & khi\ x\ge -1\\ x+m & khi\ x<-1\end{cases}$, m là tham số. Tìm m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m=5$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-3$.

Lời giải

Ta có hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Xét tính liên tục của hàm số tại $x=-1$.

Có $y(-1)=-2=\lim\limits_{x\to -1^+} y$ và $\lim\limits_{x\to -1^-} y=-1+m$.

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $y(-1)=\lim\limits_{x\to -1^+} y=\lim\limits_{x\to -1^-} y\Leftrightarrow -2=-1+m\Leftrightarrow m=-1$.

Câu 107: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & khi\ \ x>0\\ \sqrt{x^2+1}-m & khi\ \ x\le 0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m=\dfrac{3}{2}$. **B.** $m=\dfrac{1}{2}$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Khi $x>0$ ta có: $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$.

Khi $x<0$ ta có: $f(x)=\sqrt{x^2+1}-m$ liên tục trên khoảng $(-\infty;0)$.

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x=0$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\sqrt{x^2+1}-m\right)=1-m=f(0)$.

Do đó hàm số liên tục tại $x=0$ khi và chỉ khi $\dfrac{1}{2}=1-m\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

Câu 108: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-5}{x-3} & \text{khi}\quad x\ne 3\\ a & \text{khi}\quad x=3\end{cases}$. Tập các giá trị của a để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ là:

A. $\left\{\frac{2}{5}\right\}$. **B.** $\left\{\frac{1}{5}\right\}$. **C.** $\{0\}$. **D.** $\left\{\frac{3}{5}\right\}$.

Lời giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Khi $x\neq 3$ thì $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+16}-5}{x-3}$ xác định và liên tục trên các khoảng $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$.

Khi $x=3$ thì $f(3)=a$ và $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+16}-5}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+16}+5}=\frac{3}{5}$.

Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi nó liên tục tại điểm $x=3\Leftrightarrow a=\frac{3}{5}$.

Câu 109: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-16}{x-4} & \text{khi } x>4\\ mx+1 & \text{khi } x\leq 4\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m=8$ hoặc $m=-\frac{7}{4}$. **B.** $m=\frac{7}{4}$.

C. $m=-\frac{7}{4}$. **D.** $m=-8$ hoặc $m=\frac{7}{4}$.

Lời giải

*) Với $x>4$ thì $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$ là hàm phân thức nên liên tục trên TXĐ của nó $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên $(4;+\infty)$.

*) Với $x<4$ thì $f(x)=mx+1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}\Rightarrow f(x)$ liên tục trên $(-\infty;4)$.

Do vậy hàm số $f(x)$ đã liên tục trên các khoảng $(4;+\infty)$, $(-\infty;4)$.

Suy ra: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=4$.

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=f(4)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 4^+}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4^-}(mx+1)=4m+1\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 4^+}(x+4)=4m+1$

$\Leftrightarrow 4m+1=8\Leftrightarrow m=\frac{7}{4}$.

Câu 110: Nếu hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & \text{khi } x<-5\\ x+17 & \text{khi } -5\leq x\leq 10\\ ax+b+10 & \text{khi } x>10\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $a+b$ bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Với $x<-5$ ta có $f(x)=x^2+ax+b$, là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty;-5)$.

Với $-5<x<10$ ta có $f(x)=x+7$, là hàm đa thức nên liên tục trên $(-5;10)$.

Với $x>10$ ta có $f(x)=ax+b+10$, là hàm đa thức nên liên tục trên $(10;+\infty)$.

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x=-5$ và $x=10$.

Ta có:

$f(-5)=12$; $f(10)=17$.

$\lim\limits_{x\to -5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -5^-}\left(x^2+ax+b\right)=-5a+b+25$.

$\lim\limits_{x\to -5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -5^+}(x+17)=12$.

$\lim\limits_{x\to 10^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 10^-}(x+17)=27$.

$\lim\limits_{x\to 10^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 10^+}(ax+b+10)=10a+b+10$.

Hàm số liên tục tại $x=-5$ và $x=10$ khi

$$\begin{cases}5a+b+25=12\\10a+b+10=27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5a+b=-13\\10a+b=17\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-3\end{cases}\Rightarrow a+b=-1$$

DẠNG 4. CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

Câu 111: Cho hàm số $f(x)=x^5-4x^4-4x^3+14x^2+4x-10$. Số nghiệm của phương trình $f(x)=0$ trên $\mathbb{R}$ là:

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Hàm số $f(x)=x^5-4x^4-4x^3+14x^2+4x-10$ là hàm đa thức có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó hàm số liên tục trên mỗi khoảng $\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2};0\right)$, $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;5)$.

Ta có: $\begin{cases}f(-2)=-26\\f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{37}{32}\end{cases}\Rightarrow f(-2).f\left(-\frac{3}{2}\right)<0$. Suy ra phương trình có nghiệm thuộc $\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$.

$\begin{cases}f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{37}{32}\\f(0)=-10\end{cases}\Rightarrow f\left(-\frac{3}{2}\right)f(0)<0$. Suy ra phương trình có nghiệm thuộc $\left(-\frac{3}{2};0\right)$.

$\begin{cases} f(0)=-10 \\ f(1)=1 \end{cases} \Rightarrow f(0)f(1)<0$. Suy ra phương trình có nghiệm thuộc $(0;1)$.

$\begin{cases} f(1)=1 \\ f(2)=-10 \end{cases} \Rightarrow f(1)f(2)<0$. Suy ra phương trình có nghiệm thuộc $(1;2)$.

$\begin{cases} f(2)=-10 \\ f(5)=485 \end{cases} \Rightarrow f(2)f(5)<0$. Suy ra phương trình có nghiệm thuộc $(2;5)$.

Như vậy phương trình có ít nhất 5 nghiệm thuộc khoảng $(-2;5)$.

Tuy nhiên $f(x)=0$ là phương trình bậc 5 có nhiều nhất 5 nghiệm. Vậy phương trình $f(x)=0$ có đúng 5 nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Câu 112: Cho phương trình $x^3-3x^2+2=0$ (1). Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

A. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $(-2;3)$.

B. Phương trình (1) có đúng một nghiệm trên khoảng $(-2;3)$.

C. Phương trình (1) vô nghiệm.

D. Phương trình (1) có hai nghiệm trên khoảng $(-2;0)$.

Lời giải

Ta có hàm số $f(x)=x^3-3x^2+2=0$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số liên trên $[-2;3]$.

Ta có: $\begin{cases} f(-2)=-18 \\ f(0)=2 \end{cases} \Rightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2;0)$.

$\begin{cases} f(0)=2 \\ f(2)=-2 \end{cases} \Rightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;2)$.

Do đó phương trình có ít nhất hai nghiệm thuộc khoảng $(-2;3)$.

Câu 113: Cho phương trình $2x^4-5x^2+x+1=0$ (1). Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau

A. Phương trình (1) có đúng một nghiệm trên khoảng $(-2;1)$.

B. Phương trình (1) vô nghiệm.

C. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $(0;2)$.

D. Phương trình (1) vô nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

Lời giải

Vì ta có: $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=-1 \\ f(2)=15 \end{cases}$.

Câu 114: Phương trình nào dưới đây có nghiệm trong khoảng $(0;1)$

A. $2x^2-3x+4=0$. **B.** $(x-1)^5-x^7-2=0$.

C. $3x^4-4x^2+5=0$. **D.** $3x^{2017}-8x+4=0$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=3x^{2017}-8x+4$.

Hàm số liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0).f(1)=4.(-1)=-4 \Rightarrow f(0).f(1)<0$.

Vậy phương trình $3x^{2017}-8x+4=0$ có nghiệm trong khoảng $(0;1)$.

Câu 115: Cho phương trình $4x^4+2x^2-x-3=0$ (1). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Phương trình (1) vô nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

B. Phương trình (1) có đúng một nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

C. Phương trình (1) có đúng hai nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

D. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

Lời giải

Xét $f(x)=4x^4+2x^2-x-3=0$ trên khoảng $[-1;1]$.

Ta có $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

$f(-1)=4$, $f(0)=-3$, $f(1)=2 \Rightarrow f(-1).f(0)<0$, $f(1).f(0)<0$.

Như vậy phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm trong khoảng $(-1;1)$.

Mặt khác $f'(x)=6x^3+4x-1$. Ta có $f'(-1)=-11$, $f'(1)=9 \Rightarrow f'(-1).f'(1)<0$. Do đó phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm trong khoảng $(-1;1)$.

$f''(x)=18x^2+4>0$ với $\forall x \in (-1;1)$ nên $f'(x)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1) \Rightarrow$ phương trình $f'(x)=0$ có duy nhất nghiệm trên khoảng $(-1;1)$. Do đó $f(x)=0$ có tối đa hai nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

Vậy phương trình (1) có đúng hai nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 116: Phương trình $3x^5+5x^3+10=0$ có nghiệm thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-2;-1)$. **B.** $(-10;-2)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Đặt $f(x)=3x^5+5x^3+10$

$f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục trên $[-2;-1]$ (1)

Ta có: $\begin{cases} f(-2) = -126 \\ f(-1) = 2 \end{cases}$

Suy ra $f(-2).f(-1) = -126.2 = -252 < 0 \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(-2;-1)$.

Câu 117: Cho phương trình $2x^3 - 8x - 1 = 0 \ (1)$. Khẳng định nào **sai**?

A. Phương trình không có nghiệm lớn hơn 3.

B. Phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt.

C. Phương trình có 2 nghiệm lớn hơn 2.

D. Phương trình có nghiệm trong khoảng $(-5;-1)$.

Lời giải

Hàm số $f(x) = 2x^3 - 8x - 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do $f(-5) = -211$, $f(-1) = 5 > 0$, $f(2) = -1 < 0$, $f(3) = 29 > 0$ nên phương trình có ít nhất 3 nghiệm trên $(-5;-1),(-1;2),(2;3)$. Mà phương trình bậc ba có tối đa 3 nghiệm nên phương trình có đúng 3 nghiệm trên $\mathbb{R}$. Do đó **C** sai.

Câu 118: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và thỏa mãn $f(a) = b$, $f(b) = a$ với $a,b > 0$, $a \neq b$. Khi đó phương trình nào sau đây có nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

A. $f(x) = 0$. **B.** $f(x) = x$. **C.** $f(x) = -x$. **D.** $f(x) = a$.

Lời giải

Hàm số $y = f(x) - x$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

$[f(a) - a][f(b) - b] = (b-a)(a-b) = -(a-b)^2 < 0$.

Suy ra: phương trình $f(x) = x$ có nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

Câu 119: Cho số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} -8 + 4a - 2b + c > 0 \\ 8 + 4a + 2b + c < 0 \end{cases}$. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và trục Ox là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Đặt $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Khi đó $\begin{cases} f(2) = 8 + 4a + 2b + c < 0 \\ f(-2) = -8 + 4a - 2b + c > 0 \end{cases}$

$f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.

$\begin{cases} f(2) < 0 \\ f(-2) > 0 \end{cases} \Rightarrow f(-2).f(2) < 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại ít nhất một điểm trong khoảng $(-2;2)$.

$\begin{cases} f(2) < 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại ít nhất một điểm trong khoảng $(2;+\infty)$.

$\begin{cases} f(-2)>0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \end{cases} \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục Ox tại ít nhất một điểm trong khoảng $(-\infty;-2)$.

Mà hàm số $f(x)$ là hàm bậc ba nên đồ thị của nó cắt trục Ox tối đa tại 3 điểm.

Vậy đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục Ox tại đúng 3 điểm.

Câu 120: Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} a+c>b+1 \\ a+b+c+1<0 \end{cases}$. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ và trục Ox.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Vì hàm số đã cho là hàm đa thức bậc ba nên đồ thị hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và số giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox nhiều nhất là 3.

Theo đề bài ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$

$y(-1)=a+c-b-1>0$, $y(1)=a+b+c+1<0$,

Do đó hàm số đã cho có ít nhất một nghiệm trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$, $(1;+\infty)$.

Từ đó suy ra số giao điểm cần tìm là 3.