

MỤC LỤC

Chương I. Dãy số

2

§1. Các phương pháp tìm giới hạn dãy số

2

1) Xác định CTTQ

❖ Ví dụ 1

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} u_0 \in (-1; 1) \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Đặt $v_n = 4^n(1 - u_n)$. Chứng minh rằng dãy (b_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Do $u_0 \in (-1; 1)$, nên tồn tại $\phi \in (0; \pi)$ sao cho $u_0 = \cos \phi$. Bằng quy nạp ta chứng minh được

$$u_n = \cos \left(\frac{\phi}{2^n} \right).$$

Suy ra

$$v_n = 4^n \left(1 - \cos \left(\frac{\phi}{2^n} \right) \right) = 2 \cdot 2^{2n} \cdot \sin^2 \left(\frac{\phi}{2^{n+1}} \right).$$

Sử dụng $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ta có $\lim v_n = \frac{\phi^2}{2}$.

❖ Ví dụ 2

Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = \frac{1}{2}$ và

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{a_n^2 + \frac{1}{4^n}} + a_n \right], n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng dãy (a_n) hội tụ và tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Lời giải. Bằng quy nạp, ta chứng minh được: $a_n = \frac{1}{2^n} \cot \frac{\pi}{2^{n+1}}$ với $n \geq 1$. Từ đó, ta có $\lim a_n = \frac{2}{\pi}$.

2) Sử dụng nguyên lý Weierstrass

- ◇ Nếu dãy (u_n) tăng và bị chặn trên thì dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn.
- ◇ Nếu dãy (u_n) giảm và bị chặn dưới thì dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn.

Ví dụ 3

Cho dãy số (a_n) xác định bởi :

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{a_{n-1}}{n(n+1)}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) hội tụ.

 *Lời giải.* Ta có

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + \frac{a_{n-1}}{n(n+1)} \\ &< a_n \left(1 + \frac{1}{n(n+1)} \right) \\ &< a_{n-1} \left(1 + \frac{1}{n(n-1)} \right) \left(1 + \frac{1}{(n-1)n} \right) \\ &< \dots \\ &< a_2 \left(1 + \frac{1}{2.3} \right) \left(1 + \frac{1}{3.4} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{n(n+1)} \right). \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT AM-GM

$$\begin{aligned} &a_2 \left(1 + \frac{1}{2.3} \right) \left(1 + \frac{1}{3.4} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{n(n+1)} \right) \\ &\leq \left[\frac{a_2 + \left(1 + \frac{1}{2.3} \right) + \left(1 + \frac{1}{3.4} \right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{n(n+1)} \right)}{n} \right]^n \\ &= \left(\frac{n + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}}{n} \right)^n \\ &< \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n &= C_n^0 + \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{1!} + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2!} + \dots + \frac{1}{n^n} \cdot \frac{n(n-1)(n-2) \dots 2.1}{n!} \\ &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \\ &< 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) \\ &= 1 + \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} = \\ &= 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \end{aligned}$$

❖ Ví dụ 4

Cho dãy số (x_n) thỏa :

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_{n+1}^3 - 3x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn hữu hạn, tính giới hạn đó.

 *Lời giải.* Ta chứng minh dãy (x_n) giảm nghiêm ngặt bằng quy nạp. Dễ dàng kiểm tra được $x_2 < x_1$.

Giả sử $x_{n+1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có :

$$\sqrt{x_{n+1} + 2} < \sqrt{x_n + 2} \Rightarrow x_{n+2}^3 - 3x_{n+2} < x_{n+1}^3 - 3x_{n+1} \Rightarrow x_{n+2} < x_{n+1}.$$

Chú ý tính đồng biến của hàm $f(x) = x^3 - 3x$. Theo nguyên lý quy nạp ta có (x_n) giảm nghiêm ngặt.

Ta cũng sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng $x_n \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}$, hiển nhiên $x_0 = 3 \geq 2$, ta giả sử $x_n \geq 2$.

Khi đó

$$x_{n+1}^3 - 3x_{n+1} \geq 2 \Leftrightarrow x_{n+1} \geq 2,$$

như vậy theo nguyên lý quy nạp ta có $x_n \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}$. Ta có dãy (x_n) bị chặn dưới và giảm nghiêm ngặt nên nó có giới hạn hữu hạn l , chuyển qua giới hạn :

$$l^3 - 3l = \sqrt{l + 2}$$

Phương trình này cho nghiệm $l \in \left\{ 2; 2 \cos \frac{4\pi}{7}; 2 \cos \frac{4\pi}{5} \right\}$.

Mà $l \geq 2$ ta được $l = 2$. Như vậy $\lim x_n = 2$.

❖ Ví dụ 5

VMO 2011

Cho dãy (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 1; x_n = \frac{2n}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} x_i, n \geq 2.$$

Đặt $y_n = x_{n+1} - x_n, n = 1, 2, 3, \dots$. Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.

 *Lời giải.* Ta có

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} &= \frac{(n-1)^2}{2n} x_n \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n &= \frac{n^2}{2(n+1)} x_{n+1} \end{aligned}$$

Suy ra

$$x_n = \frac{n^2}{2(n+1)} x_{n+1} - \frac{(n-1)^2}{2n} x_n \Rightarrow x_{n+1} = \frac{(n^2 + 1)(n+1)}{n^3} x_n.$$

Do đó

$$y_n = x_{n+1} - x_n = \frac{n^2 + n + 1}{n^3} x_n.$$

Ta có :

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 1}{(n+1)^3} x_{n+1} - \frac{n^2 + n + 1}{n^3} x_n \\ &= \left(\frac{n^2 + 3n + 3}{(n+1)^3} \cdot \frac{(n+1)(n^2 + 1)}{n^3} - \frac{n^2 + n + 1}{n^3} \right) x_n \\ &= \frac{2x_n}{n^3(n+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

Từ đó (y_n) là dãy tăng. Bài toán sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được (y_n) bị chặn trên. Thật vậy, ta có :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{(n^2 + 1)(n+1)}{n^3} x_n \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \right) x_n \\ &= \frac{1 - \frac{1}{n^4}}{1 - \frac{1}{n}} \cdot x_n \\ &< \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \cdot x_n \\ &= \frac{n}{n-1} \cdot x_n \end{aligned}$$

Từ đó :

$$x_n < \frac{n-1}{n-2} x_{n-1} < \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n-2}{n-3} x_{n-2} < \dots < \frac{n-1}{n-2} \cdot \frac{n-2}{n-3} \dots \frac{2}{1} x_2 = 4(n-1).$$

Kéo theo:

$$y_n = \frac{n^2 + n + 1}{n^3} \cdot x_n < \frac{4(n-1)(n^2 + n + 1)}{n^3} = \frac{4(n^3 - 1)}{n^3} < 4$$

Như vậy (y_n) bị chặn trên bởi 4. Bài toán hoàn toàn được giải quyết.

❖ Ví dụ 6

VMO 2020

Cho dãy số thực (x_n) có $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ và $x_{n+1} = 3x_n^2 - 2nx_n^3$ với mọi $n \geq 1$.

- ① Chứng minh $\lim x_n = 0$.
- ② Với mỗi $n \geq 1$ đặt $y_n = x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n$. Chứng minh rằng dãy (y_n) có giới hạn hữu hạn.

🔑 *Lời giải.*

- ① Ta sẽ chứng minh

$$0 < x_n < \frac{1}{2(n-1)}, \quad \forall n \geq 2. \quad (1)$$

bằng quy nạp. Thật vậy, ta có

$$x_2 = 3x_1^2 - 2x_1^3.$$

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 2x^3$ trên $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, ta có

$$f'(x) = 6x(1-x) \geq 0, \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

nên

$$0 = f(0) < f(x) < f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

hay $0 < x_2 < \frac{1}{2}$.

Giả sử $0 < x_n < \frac{1}{2(n-1)}$ với $n \geq 2$.

Xét $g(x) = 3x^2 - 2nx^3$ trên $\left[0, \frac{1}{2(n-1)}\right]$, ta có $0 \leq x \leq \frac{1}{2(n-1)} \leq \frac{1}{n}$ nên $g'(x) = 6x(1 - nx) \geq 0$, suy ra

$$0 = g(0) < g(x_n) < g\left(\frac{1}{2(n-1)}\right)$$

Mà

$$\frac{1}{2n} - g\left(\frac{1}{2(n-1)}\right) = \frac{1}{2n} - \frac{2n-3}{4(n-1)^3} = \frac{(n-2)(2n^2-4n+1)}{4n(n-1)^3} \geq 0$$

với mọi $n \geq 2$ nên ta suy ra $0 < g(x_n) < \frac{1}{2n}$, hay $0 < x_{n+1} < \frac{1}{2n}$.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có $0 < x_n < \frac{1}{2(n-1)}$ với mọi $n \geq 2$. Từ đó, cho $n \rightarrow +\infty$, áp dụng nguyên lý kẹp ta có ngay $\lim x_n = 0$.

2 Từ câu trên, ta thấy

$$3 - 2nx_n > 3 - \frac{2n}{2(n-1)} > 0, \forall n \geq 2,$$

nên theo bất đẳng thức AM - GM, ta có

$$x_{n+1} = x_n^2(3 - 2nx_n) = \frac{1}{n^2}(nx_n)^2(3 - 2nx_n) \leq \frac{1}{n^2} \left(\frac{nx_n + nx_n + 3 - 2nx_n}{3} \right)^3 = \frac{1}{n^2}$$

với mọi $n \geq 2$. Vì $(n-1)^4 - 3(n+1)^3$ là một đa thức bậc 4 theo biến n nên tồn tại số tự nhiên $m > 2$ đủ lớn để $(n-1)^4 > 3(n+1)^3$ với mọi $n > m$. Lúc này, với mỗi $n > m$, ta có

$$x_{n+1} < 3x_n^2 < \frac{3}{(n-1)^4} < \frac{1}{(n+1)^3}$$

Từ đó ta có

$$y_n < \sum_{k=1}^m (kx_k) + \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

với mọi $n > m$. Tuy nhiên

$$\begin{aligned} \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} &< \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\ &< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{n+1} < 2 \end{aligned}$$

nên ta có $y_n < \sum_{k=1}^m (kx_k) + 2$ với mọi $n > m$, tức là (y_n) bị chặn trên.

Mặt khác, dễ thấy (y_n) là dãy tăng ngặt nên theo định lý Weierstrass, ta có (y_n) hội tụ.

Ví dụ 7

Cho dãy (x_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} x_0 = -2 \\ x_{n+1} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x_n}}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Đặt $u_n = (1 + x_0^2) \cdot (1 + x_1^2) \cdots (1 + x_n^2)$. Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn.

 *Lời giải.* Bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$-\frac{2}{n} < x_n < 0 \quad \forall n \geq 2.$$

◇ Với $n = 2$, ta có

$$x_2 = -1 = -\frac{2}{2}.$$

◇ Giả sử $x_k \in \left(-\frac{2}{k}; 0\right) \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$, khi đó dễ thấy $x_{n+1} < 0$ và

$$x_{n+1} > \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{8}{n}}}{2}.$$

Ta chứng minh

$$\frac{1 - \sqrt{1 + \frac{8}{n}}}{2} > -\frac{2}{n} \Leftrightarrow n - \sqrt{n^2 + 8n} > -4 \Leftrightarrow (n + 4)^2 > n^2 + 8n \Leftrightarrow 16 > 0,$$

điều này luôn đúng.

Từ đó, suy ra

$$x_n^2 < \frac{4}{n^2} \quad \forall n \geq 2.$$

Áp dụng bất đẳng thức

$$\ln(1 + x) \leq x \quad \forall x > -1,$$

ta có

$$\ln u_n = \sum_{i=0}^n \ln(1 + x_i^2) \leq \sum_{i=0}^n x_i^2 \leq x_0^2 \sum_{i=1}^n \frac{4}{i^2}$$

Ví dụ 8

VMO 2023

Xét dãy số (a_n) thỏa mãn $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \sqrt[3]{3a_{n+1} - a_n}$ và $0 \leq a_n \leq 1$, với mọi $n \geq 1$.

- ① Chứng minh rằng dãy (a_n) xác định duy nhất và có giới hạn hữu hạn.
- ② Cho dãy số (b_n) xác định bởi $b_n = (1 + 2a_1)(1 + 2^2a_2) \cdots (1 + 2^na_n)$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy (b_n) có giới hạn hữu hạn.

 *Lời giải.*

- ① Viết lại biểu thức $a_{n+1} = \sqrt[3]{3a_{n+1} - a_n}$ dưới dạng

$$a_n = 3a_{n+1} - a_{n+1}^3, \quad n = 1, 2, \dots$$

Xét hàm số $f(x) = 3x - x^3$. Khi đó, ta có

$$f'(x) = 3 - 3x^2 \geq 0 \quad \forall x \in [0; 1].$$

Điều này suy ra hàm f đồng biến trên $[0; 1]$. Vì vậy, từ

$$a_1 = \frac{1}{2} \in [f(0); f(1)] = [0; 2]$$

suy ra a_2 là nghiệm duy nhất của phương trình $a_1 = 3x - x^3$ trên $[0, 1]$.

Tiếp tục quá trình trên ta nhận được dãy (a_n) , trong đó a_n là nghiệm duy nhất của phương trình $a_{n-1} = 3x - x^3$ trên $[0; 1]$ với $n = 1, 2, \dots$

Vậy dãy (a_n) xác định duy nhất. Mặt khác, ta có

$$a_n - a_{n+1} = 2a_{n+1} - a_{n+1}^3 \geq a_{n+1} - a_{n+1}^3 = a_{n+1} (1 - a_{n+1}^2) \geq 0$$

với mọi $n = 1, 2, \dots$

Vì vậy (a_n) dãy giảm và bị chặn dưới. Do đó, (a_n) là dãy hội tụ (có giới hạn hữu hạn).

- ② Dễ thấy $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + 2^{n+1}a_{n+1} \geq 1$ với mọi n nên (b_n) là dãy tăng.

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp $a_n < \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ với mọi n .

Thật vậy, $n = 1$ thì $a_1 = \frac{1}{2} < 1$. Giả thiết quy nạp đúng với $n = k$, tức là

$$a_k < \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}$$

Ta có a_{k+1} là nghiệm duy nhất của phương trình

$$a_k = 3x - x^3 \text{ trên } [0; 1].$$

Ta thấy rằng

$$f\left(\left(\frac{2}{5}\right)^k\right) = 3\left(\frac{2}{5}\right)^k - \left(\frac{2}{5}\right)^{3k} > \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} > a_k = f(a_{k+1})$$

Từ f đồng biến suy ra

$$a_{k+1} < \left(\frac{2}{5}\right)^k.$$

Ta nhận được $a_n < \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ với mọi $n = 1, 2, \dots$. Ta có

$$\begin{aligned} \ln b_n &= \ln(1 + 2a_1)(1 + 2^2a_2) \cdots (1 + 2^na_n) \\ &= \ln(1 + 2a_1) + \ln(1 + 2^2a_2) + \cdots + \ln(1 + 2^na_n) \\ &\leq 2a_1 + 2^2a_2 + \cdots + 2^na_n \\ &\leq 2 \left[1 + \left(\frac{4}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \right] \leq 10. \end{aligned}$$

với mọi n . Suy ra $b_n \leq e^{10}$ với mọi n .

Vậy dãy (b_n) bị chặn trên nên nó hội tụ (có giới hạn hữu hạn).

Cách 2:

- ① Đặt $\varphi = 3 \arcsin \frac{1}{4}$. Bằng quy nạp, ta sẽ chứng minh $a_n = 2 \sin \frac{\varphi}{3^n}$ với mọi n nguyên dương. Hiển nhiên khẳng định đúng với $n = 1$. Giả sử khẳng định đúng đến $n = k$, từ công thức xác

định dãy số, ta có $a_{k+1} = \sqrt[3]{3a_{k+1} - a_k}$, hay

$$3a_{k+1} - a_{k+1}^3 = a_k.$$

Do $a_{k+1} \in [0, 1]$ nên tồn tại số thực $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $a_{k+1} = 2 \sin \alpha$. Từ đẳng thức trên, ta có

$$\sin 3\alpha = \sin \frac{\varphi}{3^k}.$$

Suy ra $3\alpha = \frac{\varphi}{3^k}$, hay $\alpha = \frac{\varphi}{3^{k+1}}$. Như vậy, ta có $a_{k+1} = \sin \frac{\varphi}{3^{k+1}}$, tức khẳng định cũng đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp, ta có khẳng định đúng với mọi n nguyên dương. Từ kết quả trên, ta suy ra dãy (a_n) được xác định duy nhất. Ngoài ra $\lim a_n = \lim 2 \sin \frac{\varphi}{3^n} = 0$.

② Theo câu 1), ta có

$$b_n = \left(1 + 2^2 \sin \frac{\varphi}{3}\right) \left(1 + 2^3 \sin \frac{\varphi}{3^2}\right) \cdots \left(1 + 2^{n+1} \sin \frac{\varphi}{3^n}\right).$$

Dễ thấy (b_n) là dãy tăng. Ngoài sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc $1+x < e^x$ và $\sin x < x$, ta có

$$b_n < e^{2^2 \sin \frac{\varphi}{3} + 2^3 \sin \frac{\varphi}{3^2} + \cdots + 2^{n+1} \sin \frac{\varphi}{3^n}}$$

và

$$2^2 \sin \frac{\varphi}{3} + 2^3 \sin \frac{\varphi}{3^2} + \cdots + 2^{n+1} \sin \frac{\varphi}{3^n} < 2\varphi \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] < 4\varphi.$$

Suy ra $b_n < e^{4\varphi}$ với mọi n nguyên dương. Dãy (b_n) tăng và bị chặn trên nên có giới hạn hữu hạn.

3) Dãy số dạng $x_{n+1} = f(x_n)$



Cho dãy số xác định theo công thức $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

- ◆ Nếu $x_n \in [a; b]$, $\forall n$ và f là hàm tăng trên $[a; b]$ thì dãy (x_n) đơn điệu (tăng hay giảm tùy vào $x_1 \leq x_2$ hay $x_1 \geq x_2$)
- ◆ Nếu $x_n \in [a; b]$, $\forall n$ và f là hàm giảm trên $[a; b]$ thì các dãy con $(x_{2n}), (x_{2n+1})$ là các dãy đơn điệu (Ngược chiều nhau).
- ◆ Nếu $x_n \in [a; b]$, $\forall n$ và f có đạo hàm trên $(a; b)$, khi đó dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn ℓ với ℓ là nghiệm trên $[a; b]$ của phương trình $f(\ell) = \ell$.

◆ Ví dụ 9

VMO 2013

Cho dãy (a_n) được xác định bởi $a_1 = 1$ và

$$a_{n+1} = 3 - \frac{a_n + 2}{2^{a_n}} \quad \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

🔗 *Lời giải.* Xét hàm số $f(x) = 3 - \frac{x+2}{2^x}$ với $x \in (1; 2)$, ta có

$$f'(x) = \frac{(x+2) \ln 2 - 1}{2^x} > 0, \quad \forall x \in (1; 2).$$

Suy ra f là hàm đồng biến trên $(1; 2)$ và

$$1 < \frac{3}{2} = f(1) < f(x) < f(2) = 2 \quad \forall x \in (1; 2).$$

Chương 1. Dãy số

Ta có $a_2 = \frac{3}{2} \in (1; 2)$ và $a_2 > a_1$, suy ra dãy (a_n) là dãy tăng và $a_n \in (1; 2) \forall n \geq 2$. Nên dãy (a_n) hội tụ. Đặt $\lim a_n = x, x \in [1; 2]$ thì x là nghiệm của phương trình

$$x = 3 - \frac{x+2}{2^x} \Leftrightarrow x + \frac{x+2}{2^x} - 3 = 0.$$

Xét hàm số $g(x) = x + \frac{x+2}{2^x} - 3, x \in [1; 2]$ ta có

$$g'(x) = \frac{2^x + 1 - (x+2)\ln 2}{2^x}, x \in [1; 2].$$

Hàm số $h(x) = 2^x - x - 1, x \in [1; 2]$ có

$$h'(x) = 2^x \ln 2 - 1 > 0 \in [1; 2]$$

nên

$$h(x) \geq h(1) = 0 \Rightarrow 2^x + 1 \geq x + 2 \forall x \in [1; 2].$$

Mà $\ln 2 < 1$ nên

$$2^x + 1 \geq x + 2 > (x+2)\ln 2 \forall x \in [1; 2]$$

hay $g'(x) > 0 \forall x \in [1; 2]$.

Suy ra phương trình $h(x) = 0$ có duy nhất nghiệm $x = 2$ trên $[1; 2]$.

Vậy $\lim a_n = 2$.

❖ Ví dụ 10

Cho (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 4x_n + 1}{x_n^2 + x_n + 1}; n \geq 1.$$

Chứng minh (x_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

 **Lời giải.** Dễ thấy $x_n > 0, \forall n$, và

$$x_{n+1} = 1 + \frac{3x_n}{x_n^2 + x_n + 1} = 2 - \frac{(x_n - 1)^2}{x_n^2 + x_n + 1} \Rightarrow x_n \in [1; 2], \forall n.$$

Xét $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 1}; x \in [1; 2]$, ta có

$$f'(x) = \frac{3(1-x^2)}{(x^2+x+1)} \leq 0; \forall x \in [1; 2] \quad (f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1)$$

nên hàm số nghịch biến trên $[1; 2]$.

Ta thấy $x_1 < x_3$ nên (x_{2n+1}) tăng và bị chặn trên bởi 2, còn (x_{2n}) giảm và bị chặn dưới bởi 1. Do đó chúng có giới hạn hữu hạn. Giả sử $\lim x_{2n} = a, \lim x_{2n+1} = b; a, b \in [1; 2]$; ta có hệ

$$\begin{cases} a = f(b) \\ b = f(a) \end{cases} \Rightarrow (a-b) \left[1 - \frac{3(ab-1)}{(a^2+a+1)(b^2+b+1)} \right] = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ (a^2+a+1)(b^2+b+1) = 3(ab-1) \end{cases} \quad (2).$$

Do

$$a, b \in [1; 2] \Rightarrow 3(ab-1) \leq 9 \leq (a^2+a+1)(b^2+b+1)$$

nên $(2) \Leftrightarrow a = b = 1$ (loại).

Do (x_{2n+1}) tăng nghiêm ngặt và $x_1 = 1 \Rightarrow b > 1$

Vậy

$$a = b = t \Rightarrow t = \frac{t^2 + 4t + 1}{t^2 + t + 1} \Leftrightarrow t^3 - 3t = 1.$$

Từ đây tìm được $\lim x_n = 2 \cos \frac{\pi}{9}$.

❖ Ví dụ 11

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$; $u_{n+1} = \frac{2}{u_n} + \frac{\sqrt{3}}{u_n^2}$, $n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy số (x_n) không có giới hạn hữu hạn.

Lời giải. Xét hàm số $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{\sqrt{3}}{x^2}$, $x > 0$. Ta có $u_{n+1} = f(u_n)$ với $u_1 = 1$ có

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{2\sqrt{3}}{x^3} < 0, \forall x > 0.$$

Mặt khác $u_2 = 2 + \sqrt{3}$, $u_3 = -8 + 5\sqrt{3}$ nên

$$u_3 < u_1 < u_2 \Rightarrow \begin{cases} u_4 = f(u_3) > f(u_1) = u_2 \\ u_5 = f(u_4) < f(u_2) = u_3 \end{cases}.$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được dãy $\{u_{2n}\}$ tăng và $\{u_{2n+1}\}$ là dãy giảm với $n \geq 1$.

Do đó $1 = u_1 > u_3 > u_5 > \dots$ và $2 + \sqrt{3} = u_2 < u_4 < u_6 < \dots$.

Giả sử dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim u_n = x$. Suy ra $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = x$. Theo đánh giá trên ta có

$$\begin{cases} \lim u_{2n} = x < 1 \\ \lim u_{2n+1} = x > 2 + \sqrt{3} \end{cases} \text{ (vô lí).}$$

Vậy dãy (u_n) không có giới hạn hữu hạn.

❖ Ví dụ 12

Cho dãy số (x_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{3x_{n-1} + 2}{10x_n + 2x_{n-1} + 2}, n \geq 2 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Ta có $x_n > 0 \forall n$ và

$$2 - x_{n+1} = \frac{2(10x_n + 2x_{n-1} + 2) - (3x_{n-1} + 2)}{10x_n + 2x_{n-1} + 2} = \frac{20x_n + x_{n-1} + 2}{10x_n + 2x_{n-1} + 2} > 0.$$

Suy ra

$$0 < x_n < 2 \forall n.$$

Ta xét hàm hai biến sau trên tập số không âm :

$$f(x, y) = \frac{3x + 2}{10y + 2x + 2}.$$

Cố định x , lúc này f là hàm một biến theo y có đạo hàm :

$$f'_x = \frac{-10(3x + 2)}{(10y + 2x + 2)^2} < 0$$

Chương 1. Dãy số

Vậy f là hàm nghịch biến theo y .

Cố định y , lúc này f là hàm một biến theo x có đạo hàm :

$$f'_y = \frac{30y + 2}{(10y + 2x + 2)^2} > 0.$$

Vậy f là hàm đồng biến theo x .

Ta tính được $x_3 = \frac{1}{6} > x_1$ và $x_4 = \frac{15}{17} < x_2$. Từ đó ta giả sử rằng :

$$x_{2n+1} > x_{2n-1} \text{ và } x_{2n} < x_{2n-2}.$$

Chú ý vì $f(x, y)$ thì nghịch biến theo y và đồng biến theo x nên :

$$x_{2n+3} = f(x_{2n+1}, x_{2n+2}) > f(x_{2n-1}, x_{2n+2}) > f(x_{2n-1}, x_{2n}) = x_{2n+1}$$

$$x_{2n+2} = f(x_{2n}, x_{2n+1}) < f(x_{2n}, x_{2n-1}) < f(x_{2n-2}, x_{2n-1}) = x_{2n}$$

Quy nạp xong, ta được (x_{2n+1}) tăng và (x_{2n}) giảm. Cả hai dãy này đều bị chặn do (*) nên chúng đều hội tụ, giả sử chúng hội tụ lần lượt về X, Y . Ta được hệ :

$$\begin{cases} X = \frac{3X + 4}{10Y + 2X + 2} \\ Y = \frac{3Y + 4}{10X + 2Y + 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 10XY + 2X^2 - Y \\ (X - Y)(2(X + Y) - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = Y = \frac{1 + \sqrt{193}}{24} \quad (X, Y > 0)$$

Vậy:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{193}}{24}$$

❖ Ví dụ 13

Cho (x_n) được xác định bởi $x_1 = 1$ và

$$x_{n+1} = \frac{\pi}{8} \left(\cos x_n + \frac{\cos 2x_n}{2} + \frac{\cos 3x_n}{3} \right).$$

Chứng minh dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn.

 **Lời giải.** Xét hàm số $f(x) = \frac{\pi}{8} \left(\cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} \right)$, $x \in \mathbb{R}$ có

$$f'(x) = \frac{\pi}{8} (\sin x + \sin 2x + \sin 3x).$$

Ta có

$$\begin{aligned} (\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^2 &= (2 \sin 2x \cos x + \sin 2x)^2 \\ &= 4 (\sin 2x \cos x + \cos x \sin x)^2 \leq 4 (\sin^2 2x + \cos^2 x) \\ &= 4 \left(\frac{25}{16} - \left(\cos 2x - \frac{1}{4} \right)^2 \right) \leq \frac{25}{4}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$|f'(x)| = \frac{\pi}{8} |\sin x + \sin 2x + \sin 3x| \leq \frac{\pi}{8} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5\pi}{16} < 1, \quad \forall x.$$

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$ có

$$g'(x) = f'(x) - 1 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } g(0) = \frac{11\pi}{4} > 0, \quad g\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{8} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} \right) < 0$$

nên phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right)$. Theo định lí Lagrange, tồn tại β sao

cho

$$\begin{aligned} f(x_n) - f(\alpha) &= f'(\beta)(x_n - \alpha) \\ \Rightarrow |x_{n+1} - \alpha| &= |f'(\beta)| |x_n - \alpha| \leq \frac{5\pi}{16} |x_n - \alpha| \end{aligned}$$

Áp dụng qui nạp suy ra

$$0 \leq |x_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{5\pi}{16}\right)^n |x_1 - \alpha|.$$

Do $\lim \left(\frac{5\pi}{16}\right)^n = 0$ suy ra $\lim x_n = \alpha$.

4) **Dãy số dạng** $u_{n+1} = f(n, u_n)$



Xét hàm số $f(x, y)$ với $x \in \mathcal{I}$, $y \in \mathcal{K}$. Nếu

- ◇ $f(x, y)$ nghịch biến trên $\mathcal{I}$ theo biến x ,
- ◇ $f(x, y)$ đồng biến trên $\mathcal{K}$ theo biến y ,
- ◇ Tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ để $u_{n_0} > u_{n_0+1}$.

Khi đó, dãy (u_n) là dãy giảm kể từ số hạng n_0 trở đi. Do đó, nếu dãy (u_n) bị chặn dưới thì dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn.

◇ **Ví dụ 14**

VMO 2012

Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi :

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2) \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và tính giới hạn đó.

Lời giải. **Cách 1:** Ta thấy $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Xét hàm số $f(x, y) = \frac{x+2}{3x}(y+2)$ với $x, y > 0$, khi đó $x_{n+1} = f(n, x_n)$.

Ta có

$$f'_x = -\frac{6}{(3x)^2}(y+2) < 0, \quad f'_y = \frac{x+2}{3x} > 0.$$

Mặt khác

$$x_2 = \frac{2}{3}(x_1 + 2) = \frac{10}{3}, \quad x_3 = \frac{5}{9}(x_2 + 2) = \frac{80}{27} < x_2.$$

Do đó, với $n \geq 2$ và $x_n > x_{n+1}$ thì ta có

$$x_{n+2} = f(n+1, x_{n+1}) < f(n, x_{n+1}) < f(n, x_n) = x_{n+1}.$$

Suy ra, dãy (x_n) là dãy giảm và bị chặn dưới, nên dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim x_n = x$, ta có x là nghiệm của phương trình

$$x = \frac{1}{3}(x+2) \Rightarrow x = 1.$$

Cách 2: Rõ ràng ta có $x_n > 0$ với mọi n nguyên dương.

(1)

Ta sẽ chứng minh kể từ số hạng thứ hai, dãy số đã cho là giảm.

Thật vậy, xét hiệu

$$x_n - x_{n-1} = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2) - x_{n-1} = \frac{2[(n+2) - (n-1)x_{n-1}]}{3n}.$$

Để chứng minh x_n giảm bắt đầu từ số hạng thứ hai, ta chỉ cần chứng minh:

$$(n+2) - (n-1)x_{n-1} < 0 \quad \forall n \geq 3. \quad (2)$$

Ta chứng minh điều này bằng quy nạp toán học.

Với $n = 3$, do $x_2 = \frac{10}{3}$ nên bất đẳng thức

$$(n+2) - (n-1)x_{n-1} = 5 - 2 \cdot \frac{10}{3} = -\frac{5}{3} < 0 \quad (\text{đúng}).$$

Giả sử ta đã có $(n+2) - (n-1)x_{n-1} < 0$ thì $x_{n-1} > \frac{n+2}{n-1}$.

Khi đó :

$$x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2) > \frac{n+2}{3n}\left(\frac{n+2}{n-1} + 2\right) = \frac{n+2}{n-1} > \frac{n+3}{n}.$$

Suy ra $(n+3) - nx_n < 0$.

Vậy (2) đúng đến $n+1$.

Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta có (2) đúng với mọi $n \geq 3$.

Như vậy, (x_n) là dãy số giảm kể từ số hạng thứ hai.

Ngoài ra, theo (1), nó bị chặn dưới bởi 0. Suy ra, tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim x_n = a$.

Chuyển đẳng thức $x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2)$ sang giới hạn, ta được $a = \frac{1}{3}(a+2)$. Từ đó suy ra $a = 1$.

Vậy dãy số đã cho có giới hạn khi n dần tới vô cùng và $\lim x_n = 1$.

❖ Ví dụ 15

Trường Đông - Vinh 2023

Cho dãy số $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ xác định bởi

$$u_0 = u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{n+1}{2n+3}\sqrt{u_n+2}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ có giới hạn hữu hạn và tìm $\lim u_n$.

Lời giải. Ta có hàm số $f(x) = \frac{x+1}{2x+3}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ và $u_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{5}\sqrt{3} > u_1$.

Giả sử $u_{k+1} > u_k$ với mọi $k = 1, 2, \dots, n$. Khi đó

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2}u_{n-1} + f(n)\sqrt{u_n+2} \\ &> \frac{1}{2}u_{n-2} + f(n-1)\sqrt{u_{n-1}+2} \\ &= u_n. \end{aligned}$$

Từ đó, suy ra (u_n) là dãy tăng.

Hơn nữa $u_0, u_1, u_2 < 2$ và nếu có $u_k < 2 \forall k = 1, 2, \dots, n$ thì

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{n+1}{2n+3}\sqrt{u_n+2} < 1 + \frac{2n+2}{2n+3} < 2.$$

Suy ra dãy (u_n) là dãy bị chặn.

Vì vậy, dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim u_n = x > 1$, ta có x là nghiệm của phương trình

$$x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{x+2} \Rightarrow x = 2.$$

❖ Ví dụ 16

VMO 2015

Cho a là số thực không âm và (u_n) là dãy số xác định bởi

$$u_1 = 3, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n^2}{4n^2+a}\sqrt{u_n^2+3} \quad \forall n \geq 1.$$

- ① Với $a = 0$, chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.
- ② Với mọi $a \in [0; 1]$, chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn.

Lời giải. Ta thấy $u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta chứng minh $u_n \leq 3 \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta thấy (1) đúng với $n = 1$.

(1)

Giả sử (1) đúng với mọi $k = 1, 2, \dots, n$, khi đó

$$u_{n+1} < 2 + \frac{4n^2}{4n^2 + a} < 3.$$

Do đó (1) đúng.

Đặt $f(n) = \frac{n^2}{4n^2 + a}$ với $a \in [0; 1]$, ta có

$$\begin{aligned} f(n+1) - f(n) &= \frac{(n+1)^2}{4(n+1)^2 + a} - \frac{n^2}{4n^2 + a} \\ &= \frac{a[(n+1)^2 - n^2]}{[(n+1)^2 + a](4n^2 + a)} \geq 0. \\ \Rightarrow f(n+1) &\geq f(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

- ◇ Nếu tồn tại n_0 , sao cho $u_{n_0+1} > u_{n_0}$. Khi đó, bằng quy nạp ta chứng minh được $u_{n+1} > u_n \quad \forall n \geq n_0$, hay dãy (u_n) tăng từ số hạng n_0 trở đi. Kết hợp với dãy (u_n) bị chặn trên ta có dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn.
- ◇ Ngược lại, không tồn tại n_0 để $u_{n_0+1} > u_{n_0}$. Khi đó, dãy (u_n) là dãy giảm và bị chặn dưới, nên dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn.

5) Sử dụng bổ đề giới hạn

Bổ đề. Cho k là một số nguyên dương và $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ là các số thực dương có tổng bằng 1. Xét dãy số (u_n) bị chặn dưới thỏa mãn tính chất:

$$u_{n+k} \leq \alpha_1 u_n + \alpha_2 u_{n+1} + \dots + \alpha_k u_{n+k-1}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, dãy (u_n) hội tụ.

Chứng minh: Đặt $A_n = \max \{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k-1}\}$. Khi đó, dễ thấy (A_n) cũng bị chặn dưới và:

$$A_n \geq \alpha_1 u_n + \alpha_2 u_{n+1} + \dots + \alpha_k u_{n+k-1} \geq u_{n+k} \quad (*)$$

với mọi $n = 1, 2, \dots$. Do vậy, ta có

$$\begin{aligned} A_n &= \max \{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k-1}, u_{n+k}\} \\ &\geq \max \{u_{n+1}, u_{n+2}, \dots, u_{n+k-1}, u_{n+k}\} \\ &= A_{n+1}. \end{aligned}$$

Kết quả này cho thấy (A_n) là dãy giảm và bị chặn dưới. Và như thế, nó hội tụ về một hằng số A nào đó. Theo tính chất giới hạn của dãy số, với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số tự nhiên n_0 đủ lớn để:

$$A - \varepsilon < A_n < A + \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0. \quad (1)$$

Ta sẽ chứng minh dãy (u_n) cũng hội tụ về A . Từ (1), ta suy ra

$$u_n \leq A_n < A + \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Đặt $K = \max \left\{ \frac{2 - \alpha_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{2 - \alpha_k}{\alpha_k} \right\}$. Ta chứng minh

$$u_n > A - K\varepsilon, \quad \forall n \geq n_0 + k - 1. \quad (2)$$

Nếu $u_n \geq A - \varepsilon$ thì bất đẳng thức (2) hiển nhiên đúng do $K > 1$. Giả sử có số $n \geq n_0 + k - 1$ mà $u_n < A - \varepsilon$. Khi đó, trong các số $u_{n+1}, \dots, u_{n+k-1}$ phải có ít nhất một số lớn hơn $A - \varepsilon$ (do (1)). Gọi số đó là u_{n+m} . Khi đó, với chú ý rằng $n + m - k \geq n_0$, ta có

$$u_{n+m-k}, \dots, u_{n+m-1} < A + \varepsilon.$$

Sử dụng các đánh giá này, ta thu được

$$\begin{aligned} u_{n+m} &\leq \sum_{i=1, i \neq k+1-m}^k \alpha_i u_{n+m-k+i-1} + \alpha_{k+1-m} u_n \\ &< (1 - \alpha_{k+1-m})(A + \varepsilon) + \alpha_{k+1-m} u_n. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} u_n &> \frac{u_{n+m} - (1 - \alpha_{k+1-m})(A + \varepsilon)}{\alpha_{k+1-m}} \\ &> \frac{A - \varepsilon - (1 - \alpha_{k+1-m})(A + \varepsilon)}{\alpha_{k+1-m}} \\ &= A - \frac{2 - \alpha_{k+1-m}}{\alpha_{k+1-m}} \varepsilon \geq A - K\varepsilon. \end{aligned}$$

Như vậy, bất đẳng thức (2) luôn được thỏa mãn với mọi $n \geq n_1 = n_0 + k - 1$. Từ đây, ta suy ra

$$A - K\varepsilon < u_n < A + \varepsilon < A + K\varepsilon, \quad \forall n \geq n_1$$

Đặt $\varepsilon' = K\varepsilon$. Khi đó, bất đẳng thức trên có thể được viết lại thành $A - \varepsilon' < u_n < A + \varepsilon'$, hay

$$|u_n - A| < \varepsilon', \quad \forall n \geq n_1.$$

Từ đây, sử dụng định nghĩa giới hạn, ta suy ra dãy (u_n) cũng hội tụ về A .

Bổ đề được chứng minh.



🔗 NHẬN XÉT. Một trong những mấu chốt của bài toán là đánh giá (*). Có thể thấy rằng nếu dãy (u_n) bị chặn dưới bởi 0 thì ta có thể thay đổi giả thiết thành $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k < 1$. Lúc này, bất đẳng thức (*) vẫn đúng. Do đó, các lý luận vẫn được đảm bảo. Kết quả bài toán và lời giải trên vẫn giữ được tính đúng đắn. Ngoài ra, dễ thấy rằng lúc này $\lim u_n = 0$. Đây là một chú ý quan trọng để ta có thể ứng dụng kết quả bài toán tổng quát cho các bài toán phía sau.

Ngoài ra, cũng cần chú ý rằng kết quả bài toán sẽ không còn đúng nếu ta thay giả thiết α_i dương thành không âm. Thật vậy, chẳng hạn ta có thể xét trường hợp $k = 2$ và $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$. Khi đó, (u_n) thỏa mãn

$$u_{n+2} \leq u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lúc này, nếu ta chọn $u_{2n} = 1$ và $u_{2n-1} = 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy này phân kỳ.

Bổ đề. Cho hai dãy số thực không âm (a_n) , (b_n) và số thực $q \in (0; 1)$ thỏa mãn

$$a_{n+1} \leq qa_n + b_n.$$

Nếu $\lim b_n = 0$ thì $\lim a_n = 0$.

Chứng minh: Lấy $\varepsilon > 0$ bất kì.

Do $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ nên

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 \Rightarrow b_n < \frac{\varepsilon}{2}(1 - q).$$

Do $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ nên

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 \Rightarrow q^n < \frac{\varepsilon}{2(a_{N_1} + 1)}.$$

Khi đó với mọi $n \in \mathbb{N}, n \geq N = N_1 + N_2$, ta có

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq qa_n + b_n \\ &\leq q^2 a_{n-1} + qb_{n-1} + b_n \\ &\leq \dots \\ &\leq q^{n-N_1+1} a_{N_1} + b_n + qb_{n-1} + \dots + q^{n-N_1} b_{N_1} \\ &< \frac{\varepsilon}{2(a_{N_1} + 1)} \cdot a_{N_1} + \frac{\varepsilon}{2}(1 - q)(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-N_1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}(1 - q) \frac{1 - q^{n-N_1+1}}{1 - q} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Vậy $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N_1 + N_2 : \forall n \geq N \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$ hay $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

❖ Ví dụ 17

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1, u_2 \in (0, 1)$ và:

$$u_{n+2} = \frac{1}{5}u_{n+1}^3 + \frac{4}{5}\sqrt[3]{u_n}, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Từ công thức truy hồi của dãy (u_n) , ta dễ dàng suy ra $0 < u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Điều này cho phép ta có thể sử dụng bất đẳng thức AM-GM như sau:

$$\frac{1}{5} \cdot u_{n+1}^3 + \frac{4}{5} \cdot \sqrt[3]{u_n} \geq \sqrt[5]{u_{n+1}^3 \cdot (\sqrt[3]{u_n})^4} = u_{n+1}^{\frac{3}{5}} u_n^{\frac{4}{15}}.$$

Từ đó suy ra

$$u_{n+2} \geq u_{n+1}^{\frac{3}{5}} u_n^{\frac{4}{15}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Lấy logarithm nepe hai vế và đặt $v_n = -\ln u_n$, ta có

$$v_{n+2} \leq \frac{3}{5}v_{n+1} + \frac{4}{15}v_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do $0 < u_n < 1$ nên $v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Từ đây, sử dụng kết quả bài toán tổng quát 2 trong trường hợp: dãy bị chặn dưới bởi 0, $k = 2, \alpha_1 = \frac{3}{5}, \alpha_2 = \frac{4}{15}$ và

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{13}{15} < 1,$$

ta có $\lim v_n = 0$. Từ đây, ta dễ thấy $\lim u_n = 1$.

❖ Ví dụ 18

Cho dãy (x_n) xác định bởi

$$x_1 = x_2 = 1, \quad x_{n+2} = \log_3(3x_{n+1} + 75) - \log_2(x_n + 2), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm $\lim x_n$.

Lời giải. Ta chứng minh $1 \leq x_n < 4, \forall n = 1, 2, 3, \dots$

Khi $n = 1, n = 2$ thì mệnh đề đúng.

Giả sử mệnh đề đúng khi $n = k, n = k + 1$, ta chứng minh mệnh đề đúng khi $n = k + 2$.

Ta có

$$x_{k+2} \geq \log_3 78 - \log_2 6 > 1 \text{ và } x_{k+2} \leq \log_3 87 - \log_2 3 < 4.$$

Vậy mệnh đề đúng khi $n = k + 2$ hay mệnh đề đúng với mọi n nguyên dương.

Theo định lý Lagrange, tồn tại $c, d \geq 1$ sao cho

$$|\log_3(3x + 75) - 4| = \frac{3}{(3c + 75) \ln 3} |x - 2|, \quad \forall x \geq 1$$

và

$$|\log_2(x + 2) - 2| = \frac{1}{(d + 2) \ln 2} |x - 2|, \quad \forall x \geq 1.$$

Do đó, ta có

$$|\log_3(3x + 75) - 4| \leq \frac{1}{6} |x - 2|, \quad \forall x \geq 1$$

và

$$|\log_2(x + 2) - 2| \leq \frac{1}{2} |x - 2|, \quad \forall x \geq 1$$

Do $x_n \geq 1, \forall n = 1, 2, 3, \dots$ nên

$$\begin{aligned} |x_{n+2} - 2| &= |\log_3(3x_{n+1} + 75) - 4 - \log_2(x_n + 2) + 2| \\ &\leq |\log_3(3x_{n+1} + 75) - 4| + |\log_2(x_n + 2) - 2|. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$|x_{n+2} - 2| \leq \frac{1}{6} |x_{n+1} - 2| + \frac{1}{2} |x_n - 2|, \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

Ta đặt

$$y_1 = y_2 = 1, y_{n+2} = \frac{1}{6} y_{n+1} + \frac{1}{2} y_n, \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

và từ quy nạp, ta có

$$|x_n - 2| < y_n, \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Mặt khác, dãy (y_n) có phương trình đặc trưng $x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{2} = 0$ nên có công thức nghiệm tổng quát là

$$y_n = a \cdot t_1^n + b \cdot t_2^n$$

với t_1, t_2 là nghiệm phương trình $x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{2} = 0$ nên $t_1, t_2 \in (-1; 1)$ và $\lim y_n = 0$. Từ (1), áp dụng định lý kẹp ta có

$$\lim |x_n - 2| = 0 \text{ hay } \lim x_n = 2.$$

❖ Ví dụ 19

Cho số thực a và xét dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_{n+2} = \frac{x_n^2 + x_{n+1}^2}{4} + a, \quad \forall n \geq 1$$

Tìm số thực a lớn nhất sao cho dãy $\{x_n\}$ hội tụ.

 **Lời giải.** Giả sử dãy $\{x_n\}$ hội tụ. Gọi L là giới hạn của dãy số thì L là nghiệm của phương trình

$$x = \frac{x^2}{2} + a \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2a = 0.$$

Chương 1. Dãy số

Phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = 1 - 2a \geq 0$, tức là $a \leq 1/2$. Khi $a = 1/2$, ta có

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_{n+2} = \frac{x_n^2 + x_{n+1}^2}{4} + \frac{1}{2}, \forall n \geq 1.$$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng $x_n \in [0, 1], \forall n \geq 1$. Suy ra

$$x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{4} + \frac{1}{2}, \forall n \geq 1,$$

hay

$$|x_{n+2} - 1| \leq \frac{1}{4}|x_{n+1} - 1| + \frac{1}{4}|x_n - 1|, \forall n \geq 1.$$

Áp dụng bổ đề ta có $\lim x_n = 1$.

❖ Ví dụ 20

Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{\frac{n+2}{n}} + \ln x_n$. Tính $\lim x_n$.

 *Lời giải.* Lấy logarit nepe hai vế và dùng BDT $\ln(x+1) \leq x$, ta có

$$\ln x_{n+1} = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{2}{n} + \ln x_n \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{n} + \ln x_n \right) = \frac{1}{2} \ln x_n + \frac{1}{n}.$$

Áp dụng bổ đề với $q = \frac{1}{2}$, $a_n = \ln x_n$ và $b_n = \frac{1}{n}$, ta có $\lim (\ln x_n) = 0$ nên $\lim x_n = 1$.

❖ Ví dụ 21

Cho dãy số (y_n) xác định bởi $y_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \dots + \frac{2^n}{n} \right)$. Tính $\lim y_n$.

 *Lời giải.* So sánh y_{n+1} với

$$y_n = \frac{n}{2^n} \left(\frac{2}{1} + \dots + \frac{2^{n-1}}{n-1} \right),$$

ta có

$$y_{n+1} = \frac{(n+2)(y_n + 1)}{2n+2} = \frac{n+2}{2n+2} y_n + \frac{n+2}{2n+2}.$$

Suy ra $|y_{n+1} - 1| = \left| \frac{n+2}{2n+2} (y_n - 1) + \frac{1}{n+1} \right| \leq \frac{2}{3} |y_n - 1| + \frac{1}{n+1}$ với mọi $n \geq 2$.

Áp dụng bổ đề với $q = \frac{2}{3}$, $a_n = |y_n - 1|$ và $b_n = \frac{1}{n+1}$, ta có

$$\lim (|y_n - 1|) = 0$$

nên $\lim y_n = 1$.

❖ Ví dụ 22

Cho dãy số (x_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} + \frac{x_n^2}{2} = \frac{2n+1}{2n} + x_n, \forall n \geq 1 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

 *Lời giải.* Ta chứng minh bằng quy nạp:

$$1 \leq x_n \leq 2 \quad \forall n. \quad (1)$$

◇ Với $n = 1$, khẳng định đúng.

◇ Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 1$.

Ta có

$$x_{k+1} = 1 + \frac{1}{2k} + \frac{x_k(2-x_k)}{2} > 1$$

do $x_k(2-x_k) \geq 0$ vì $1 \leq x_k \leq 2$. Mặt khác

$$x_{k+1} - 2 = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x_k(2-x_k)}{2} = \frac{2-2k}{2 \cdot 2k} - \frac{(1-x_k)^2}{2k} < 0.$$

Do đó $x_{k+1} \leq 2$.

Vậy khẳng định cũng đúng khi $n = k + 1$.

Ta có

$$x_{n+1} - \sqrt{2} = (x_n - \sqrt{2}) \left(1 - \frac{x_n + \sqrt{2}}{2} \right) + \frac{1}{2n},$$

suy ra

$$|x_{n+1} - \sqrt{2}| \leq |x_n - \sqrt{2}| \cdot \left| 1 - \frac{x_n + \sqrt{2}}{2} \right| + \frac{1}{2n}.$$

Mà ta chứng minh được với $1 \leq x_n \leq 2$ thì

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq 1 - \frac{x_n + \sqrt{2}}{2} \leq \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left| 1 - \frac{x_n + \sqrt{2}}{2} \right| \leq \frac{4}{5}.$$

Do đó

$$|x_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{4}{5} \cdot |x_n - \sqrt{2}| + \frac{1}{2n}.$$

Áp dụng bổ đề trên ta được $\lim x_n = \sqrt{2}$.

◇ Ví dụ 23

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} u_1 = \frac{15}{8}, \quad u_2 = 2, \\ u_{n+2} + \frac{1}{2} = \sqrt{u_{n+1}^2 + u_n + \frac{n^2}{4n^2 - 1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) hội tụ và tìm giới hạn của dãy.

 *Lời giải.* Từ công thức truy hồi, ta có

$$u_{n+2} + \frac{1}{2} = \sqrt{u_{n+1}^2 + u_n + \frac{1}{4} + \frac{1}{4(4n^2 - 1)}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được $u_n \geq \frac{15}{8}, \forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó ta có

$$u_{n+2}^2 + u_{n+2} = u_{n+1}^2 + u_n + \frac{1}{4(4n^2 - 1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Công thức trên có thể biến đổi thành

$$u_{n+2}^2 + u_{n+2} + u_{n+1} + \frac{1}{8(2n+1)} = u_{n+1}^2 + u_{n+1} + u_n + \frac{1}{8(2n-1)}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Từ đó ta suy ra

$$u_{n+1}^2 + u_{n+1} + u_n + \frac{1}{8(2n-1)} = u_n^2 + u_n + u_{n-1} + \frac{1}{8} = 8, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ta viết lại thành

$$(u_{n+1} - 2)(u_{n+1} + 3) + (u_n - 2) + \frac{1}{8(2n-1)} = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Suy ra

$$\frac{39}{8}|u_{n+1} - 2| \leq |(u_{n+1} - 2)(u_{n+1} + 3)| \leq |u_n - 2| + \frac{1}{8(2n-1)},$$

hay

$$|u_{n+1} - 2| \leq \frac{8}{39}|u_n - 2| + \frac{1}{39(2n-1)}.$$

Áp dụng bổ đề ta có $\lim u_n = 2$.

6) Sử dụng dãy phụ

❖ Ví dụ 24

Cho $a, b \in (0, 1)$ và dãy số (u_n) xác định bởi :

$$\begin{cases} u_0 = a, u_1 = b \\ u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1}^4 + \frac{2}{3}\sqrt[4]{u_n} \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

🔗 *Lời giải.* Xét dãy số (v_n) như sau :

$$\begin{cases} v_0 = \min\{a, b\} \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n^4 + \frac{2}{3}\sqrt[4]{v_n}, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Bằng quy nạp dễ thấy được $0 < v_n < 1$ với mọi n . Hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{3}\sqrt[4]{x}$ đồng biến trên $(0, +\infty)$. Theo AM-GM, ta lại có :

$$v_1 = \frac{1}{3}v_0^4 + \frac{2}{3}\sqrt[4]{v_0} \geq \sqrt[3]{v_0^4 \cdot (\sqrt[4]{v_0})^2} = v_0^{1013/4022} > v_0 \quad (v_0 \in (0, 1)).$$

Từ đó quy nạp lên ta được dãy (v_n) tăng. Kết hợp với việc (v_n) bị chặn trên bởi 1 ta suy ra (v_n) có giới hạn hữu hạn L^4 , chuyển qua giới hạn :

$$L^4 = \frac{L^{16} + 2L}{3} \Leftrightarrow L(L-1)(L^{14} + L^{13} + \dots + L^3 - 2L^2 - 2L - 2) = 0 \Leftrightarrow L = 1.$$

Từ đó

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$$

Ta chứng minh bằng quy nạp $v_n \leq \min\{u_{2n}, u_{2n+1}\}$.

Giả sử điều này đúng, xét với $n+1$.

$$u_{2n+2} = \frac{1}{3}u_{2n+1}^4 + \frac{2}{3}\sqrt[4]{u_{2n}} \geq \frac{1}{3}v_n^4 + \frac{2}{3}\sqrt[4]{v_n} = v_{n+1}.$$

Tương tự thì $u_{2n+3} \geq v_{n+1}$.

Suy ra :

$$v_{n+1} \leq \min\{u_{2n+2}, u_{2n+3}\}$$

Theo nguyên lý quy nạp ta được (*).

Hơn nữa cũng dễ dàng chứng minh được bằng quy nạp $0 < u_n < 1$. Vậy ta được :

$$v_n \leq \min\{u_{2n}, u_{2n+1}\} \leq \max\{u_{2n}, u_{2n+1}\} < 1$$

Lại có $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$ nên theo nguyên lý kẹp ta được :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = 1.$$

Do đó mà :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

❖ Ví dụ 25

Cho dãy số (x_n) được xác định bởi :

$$\begin{cases} x_0, x_1, x_2 \in (0, 1) \\ 3x_{n+3} = x_n^2 + x_{n+2}^2, \forall n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

🔗 *Lời giải.* Xét dãy số (a_n) như sau :

$$\begin{cases} a_0 = \max \{x_0, x_1, x_2\} \\ a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n^2, \forall n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Để thấy $a_1 < a_0$. Quy nạp ta được dãy (a_n) giảm mà (a_n) bị chặn dưới bởi 0 nên có giới hạn hữu hạn L . Chuyển qua giới hạn :

$$L = \frac{2}{3}L^2 \Rightarrow L \in \{0, 3/2\}$$

Mà để ý thấy :

$$\frac{3}{2} > 1 = a_0 > a_1 > \dots > a_n > \dots$$

Nên phải có $L = 0$ hay $a_n \rightarrow 0$.

Bây giờ ta sẽ chứng minh :

$$\max \{x_{3n}, x_{3n+1}, x_{3n+2}\} \leq a_n$$

Với $n = 0$ thì hiển nhiên (*) đúng. Giả sử có (*). Xét (*) với $n + 1$:

$$\begin{aligned} x_{3n+3} &= \frac{1}{3} (x_{3n}^2 + x_{3n+2}^2) \leq \frac{2}{3} a_n^2 = a_{n+1} \\ x_{3n+4} &= \frac{1}{3} (x_{3n+1}^2 + x_{3n+3}^2) \leq \frac{1}{3} (a_n^2 + a_{n+1}^2) \leq \frac{2}{3} a_n^2 = a_{n+1} \\ x_{3n+5} &= \frac{1}{3} (x_{3n+2}^2 + x_{3n+4}^2) \leq \frac{1}{3} (a_n^2 + a_{n+1}^2) \leq \frac{2}{3} a_n^2 = a_{n+1} \end{aligned}$$

Như vậy (*) cũng đúng với $n + 1$. Theo nguyên lý quy nạp ta có (*). Từ đó :

$$0 < x_{3n} \leq a_n, 0 < x_{3n+1} \leq a_n, 0 < x_{3n+2} \leq a_n$$

Hơn nữa do $a_n \rightarrow 0$ nên theo nguyên lý kẹp ta được :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{3n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{3n+2} = 0$$

Ta kết luận được :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

❖ Ví dụ 26

Cho số thực a và xét dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_{n+2} = \frac{x_n^2 + x_{n+1}^2}{4} + a, \forall n \geq 1$$

Tìm số thực a lớn nhất sao cho dãy $\{x_n\}$ hội tụ.

 **Lời giải.** Giả sử dãy $\{x_n\}$ hội tụ. Gọi L là giới hạn của dãy số thì L là nghiệm của phương trình

$$x = \frac{x^2}{2} + a \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2a = 0.$$

Phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = 1 - 2a \geq 0$, tức là $a \leq 1/2$. Khi $a = \frac{1}{2}$, ta có

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_{n+2} = \frac{x_n^2 + x_{n+1}^2}{4} + \frac{1}{2}, \forall n \geq 1.$$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng $x_n \in [0, 1], \forall n \geq 1$. Xét dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi

$$u_1 = 0, u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}, \forall n \geq 1.$$

Khi đó, $\{u_n\}$ là dãy tăng và $u_n \leq 1, \forall n \geq 1$ nên hội tụ. Giới hạn của dãy $\{u_n\}$ là $L = 1$.

Ta chứng minh rằng

$$u_n \leq \min\{x_{2n}, x_{2n-1}\}, \forall n \geq 1.$$

Thật vậy, với $n = 1$ thì (2) đúng. Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$. Khi đó,

$$\begin{aligned} x_{2k+1} &= \frac{x_{2k}^2 + x_{2k-1}^2}{4} + \frac{1}{2} \geq \frac{u_k^2 + u_k^2}{4} + \frac{1}{2} = u_{k+1}, \\ x_{2k+2} &= \frac{x_{2k+1}^2 + x_{2k}^2}{4} + \frac{1}{2} \geq \frac{u_{k+1}^2 + u_k^2}{4} + \frac{1}{2} \geq \frac{u_k^2}{2} + \frac{1}{2} = u_{k+1}, \end{aligned}$$

do đó $u_{k+1} \leq \min\{x_{2k+1}, x_{2k+2}\}$, nghĩa là (2) đúng với $n = k+1$. Vậy ta có (2) đúng với mọi $n \geq 1$. Điều này cho ta

$$u_n \leq x_{2n}, x_{2n-1} \leq 1, \forall n \geq 1.$$

Với chú ý rằng $\lim u_n = 1$ nên theo định lý kẹp, ta có $\lim x_{2n} = 1$ và $\lim x_{2n-1} = 1$, suy ra $\lim x_n = 1$. Vậy $a = \frac{1}{2}$ là giá trị lớn nhất để dãy số hội tụ.

❖ Ví dụ 27

Cho các số thực dương a, b . Xét dãy số (u_n) :

$$\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_{n+2} = 3\sqrt[5]{u_{n+1}} + 13\sqrt[5]{u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

 **Lời giải.** Ta xét hai dãy số phụ $(a_n), (b_n)$ như sau:

$$\begin{aligned} (a_n) : & \begin{cases} a_1 = \max\{a, b, 32\} \\ a_{n+1} = 16\sqrt[5]{a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \\ (b_n) : & \begin{cases} b_1 = \min\{a, b, 32\} \\ b_{n+1} = 16\sqrt[5]{b_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \end{aligned}$$

Ta thấy:

$$a_1 \geq 32 \text{ và } a_2 = 16\sqrt[5]{a_1} \geq 32.$$

Quy nạp ta được $a_n \geq 32, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Lại có:

$$a_{n+1} - a_n = 16\sqrt[5]{a_n} - a_n = \sqrt[5]{a_n} (16 - \sqrt[5]{a_n^4}) \leq 0.$$

Như vậy dãy (a_n) vừa bị chặn dưới, vừa giảm nên nó có giới hạn hữu hạn. giải phương trình giới

Chương 1. Dãy số

hạn ta được $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2$.

Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được dãy (b_n) bị chặn trên bởi 32 và tăng. Tìm được $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 2$.

Ta sẽ chứng minh rằng :

$$a_n \leq \max\{u_{2n-1}, u_{2n}\} \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad (*)$$

Với $n = 1$ thì hiển nhiên. Giả sử có $(*)$, xét với $n + 1$:

$$\begin{aligned} u_{2n+1} &= 16\sqrt[5]{u_{2n}} \leq 16\sqrt[5]{a_n} = a_{n+1} \\ u_{2n+2} &= 16\sqrt[5]{u_{2n+1}} \leq 16\sqrt[5]{a_{n+1}} \leq 16\sqrt[5]{a_n} = a_{n+1} \end{aligned}$$

Tức là :

$$a_{n+1} \geq \max\{u_{2n+1}, u_{2n+2}\}$$

Theo nguyên lí quy nạp, ta được $(*)$. Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được :

$$b_n \leq \min\{u_{2n-1}, u_{2n}\}.$$

Từ đó dẫn đến :

$$b_n \leq \min\{u_{2n-1}, u_{2n}\} \leq \max\{u_{2n-1}, u_{2n}\} \leq a_n$$

Mà ta đã tìm được $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 2$ Nên theo nguyên lí kẹp ta được :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = 2$$

Ta kết luận rằng :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

❖ Ví dụ 28

Bài toán: Cho các số thực a, b thuộc khoảng $(0, 4)$. Xét dãy số (x_n) như sau :

$$\begin{cases} x_0 = a, x_1 = b \\ x_{n+2} = \frac{2(x_{n+1} + x_n)}{\sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n}}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Tính giới hạn hữu hạn nếu có của (x_n) .

 *Lời giải.* Xét dãy số phụ (x_n) như sau :

$$\begin{cases} x_0 = \min\{a, b\} \\ x_{n+1} = 2\sqrt{x_n} \end{cases}$$

Bằng quy nạp ta được :

$$0 < x_n < 4, \forall n \in \mathbb{N}$$

Từ đó $x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n}(2 - \sqrt{x_n}) > 0$ nên dãy (x_n) tăng. Kết hợp với việc (x_n) bị chặn trên ta suy ra tồn tại giới hạn hữu hạn L của nó. Giải phương trình giới hạn ta được $L \in \{0, 4\}$.

Nhưng để ý thì thấy :

$$0 < x_0 < x_1 < \dots < x_n < \dots$$

Nên phải có $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 4$.

Ta có $a_0, a_1 \in (0, 4)$, giả sử rằng $a_n, a_{n+1} \in (0, 4)$. Ta có :

$$a_{n+2} = \frac{2(a_{n+1} + a_n)}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}} < \frac{2(2\sqrt{a_{n+1}} + 2\sqrt{a_n})}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n}} = 4$$

Theo nguyên lí quy nạp ta được a_n bị chặn trên bởi 4. Do dãy phụ $x_n \rightarrow 4$ nên ý tưởng của ta ở đây là sử dụng nguyên lí kẹp với :

$$x_n \leq a_n < 4$$

Ta sẽ chứng minh :

$$x_n \leq \min \{a_{2n}, a_{2n+1}\}, \forall n \in \mathbb{N} (*)$$

Với $n = 0$ thì hiển nhiên $(*)$ đúng. Giả sử có $(*)$. Xét với $n + 1$: Sử dụng BĐT quen thuộc

$$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$$

ta được :

$$\begin{aligned} a_{2n+2} &= \frac{2(a_{2n+1} + a_{2n})}{\sqrt{a_{2n+1}} + \sqrt{a_{2n}}} \\ &\geq \sqrt{a_{2n+1}} + \sqrt{a_{2n}} \geq 2\sqrt{x_n} = x_{n+1} \\ a_{2n+3} &= \frac{2(a_{2n+2} + a_{2n+1})}{\sqrt{a_{2n+2}} + \sqrt{a_{2n+1}}} \\ &\geq \sqrt{a_{2n+2}} + \sqrt{a_{2n+1}} \\ &\geq \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n} \geq 2\sqrt{x_n} = x_{n+1} \end{aligned}$$

Vậy nên $(*)$ cũng đúng với $n + 1$. Theo nguyên lí quy nạp thì $(*)$ đúng với mọi n tự nhiên. Ta được :

$$x_n \leq \min \{a_{2n}, a_{2n+1}\} \leq \max \{a_{2n}, a_{2n+1}\} < 4$$

Theo nguyên lí kẹp ta được hai dãy $(a_{2n}), (a_{2n+1})$ hội tụ về 4. Suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 4$

❖ Ví dụ 29

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_0 = 1, u_1 = 3$ và :

$$u_{n+1}^2 + 4u_{n+1} = u_n + u_{n-1} + 2\sqrt{(u_n + 2)(u_{n-1} + 2)}.$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn này.

 **Lời giải.** Biến đổi công thức xác định dãy :

$$(u_{n+1} + 2)^2 = \left(\sqrt{u_n + 2} + \sqrt{u_{n-1} + 2}\right)^2 \Rightarrow u_{n+1} + 2 = \sqrt{u_n + 2} + \sqrt{u_{n-1} + 2}$$

Đặt $x_n = u_n + 2$ ta được $x_0 = 3, x_1 = 5$

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n} + \sqrt{x_{n-1}}$$

Xét dãy $(a_n), (b_n)$ như sau :

$$(a_n) : \begin{cases} a_0 = 3 \\ a_n = 2\sqrt{a_{n-1}} \end{cases} \quad \text{và} \quad (b_n) : \begin{cases} b_0 = 5 \\ b_n = 2\sqrt{b_{n-1}} \end{cases}.$$

Bằng quy nạp ta được $a_n < 4, \forall n \in \mathbb{N}$.

Từ đó :

$$a_n - a_{n-1} = \sqrt{a_{n-1}}(2 - \sqrt{a_{n-1}}) > 0$$

Tức dãy (a_n) tăng, kết hợp với việc (a_n) bị chặn trên bởi 4 suy ra (a_n) hội tụ, giả sử L là giới hạn

hữu hạn của nó. Giải phương trình giới hạn ta được $L \in \{0, 4\}$. Do :

$$0 < a_0 < a_1 < \dots < a_n < \dots$$

nên ta có $a_n \rightarrow 4$.

Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được $b_n > 4, \forall n \in \mathbb{N}, (b_n)$ giảm và $b_n \rightarrow 4$.

Tiếp theo ta dễ dàng chứng minh :

$$a_n \leq \min \{x_{2n}, x_{2n+1}\}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n \geq \max \{x_{2n}, x_{2n+1}\}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Sử dụng nguyên lí kẹp ta được

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 4 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

❖ Ví dụ 30

Cho trước bốn số thực dương a, b, A, B . Xét dãy số (x_n) :

$$x_1 = a, x_2 = b, x_{n+2} = A\sqrt[3]{x_{n+1}^2} + B\sqrt[3]{x_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Chứng minh rằng dãy trên có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

 *Lời giải.* Xét hai dãy $(u_n), (v_n)$ như sau :

$$\begin{cases} u_1 = \min \{a, b, (A+B)^3\} \\ u_{n+1} = (A+B)\sqrt[3]{u_n^2} \\ v_1 = \max \{a, b, (A+B)^3\} \\ v_{n+1} = (A+B)\sqrt[3]{v_n^2} \end{cases}.$$

Trước hết ta sẽ chứng minh $(u_n), (v_n)$ hội tụ về cùng một giới hạn.

Ta có $u_1 \geq (A+B)^3$ nên giả sử $u_n \geq (A+B)^3$, ta có :

$$u_{n+1} = (A+B)\sqrt[3]{u_n^2} \geq (A+B)\sqrt[3]{(A+B)^6} = (A+B)^3.$$

Quy nạp thành công, tóm lại ta có (u_n) bị chặn dưới bởi $(A+B)^3$.

Ta xét :

$$u_{n+1} - u_n = (A+B)\sqrt[3]{u_n^2} - u_n = u_n^{\frac{2}{3}} \left[(A+B) - u_n^{\frac{1}{3}} \right] \leq 0 \Rightarrow u_{n+1} \leq u_n.$$

Như vậy dãy (u_n) giảm, lại bị chặn dưới nên hội tụ.

Giải phương trình giới hạn ta được $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = (A+B)^3$.

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được (v_n) tăng và bị chặn trên bởi $(A+B)^3$ và tính được $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = (A+B)^3$.

Tiếp theo ta chứng minh bằng quy nạp :

$$u_n \leq \min \{x_{2n-1}, x_{2n}\}.$$

Với $n = 1$ thì hiển nhiên. Giả sử như vậy, xét với $n + 1$:

$$u_{n+1} = (A+B)\sqrt[3]{u_n^2} \leq A\sqrt[3]{x_{2n}^2} + B\sqrt[3]{x_{2n-1}^2} = x_{2n+1}$$

$$u_{n+1} = (A+B)\sqrt[3]{u_n^2} \leq A\sqrt[3]{u_{n+1}^2} + B\sqrt[3]{u_n^2} \leq A\sqrt[3]{x_{2n+1}^2} + B\sqrt[3]{x_{2n}^2} = x_{2n+2}.$$

Vậy theo nguyên lí quy nạp ta được $u_n \leq \min \{x_{2n-1}, x_{2n}\}$.

Tương tự được :

$$v_n \geq \max \{x_{2n-1}, x_{2n}\}.$$

Áp dụng nguyên lý kẹp, ta được ngay:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = (A + B)^3.$$

❖ Ví dụ 31

Cho dãy số (x_n) được xác định như sau :

$$\begin{cases} x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \\ 3^{x_n} + 4^{x_{n+2}} = 5^{x_{n+3}}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn này.

 *Lời giải.* Ta có thể viết công thức xác định dãy dưới dạng :

$$x_{n+3} = \log_5 (3^{x_n} + 4^{x_{n+2}}).$$

Ta đi xét hai dãy phụ sau :

$$\begin{aligned} (a_n) : & \begin{cases} a_1 = \min \{x_0, x_1, x_2, 2\} \\ a_{n+1} = \log_5 (3^{a_n} + 4^{a_n}) \end{cases} \\ (b_n) : & \begin{cases} b_1 = \max \{x_0, x_1, x_2, 2\} \\ b_{n+1} = \log_5 (3^{b_n} + 4^{b_n}) \end{cases}. \end{aligned}$$

Ta thấy $a_1 \leq 2$ nên

$$a_2 = \log_5 (3^{a_1} + 4^{a_1}) \leq \log_5 (3^2 + 4^2) = 2.$$

Quy nạp lên được $a_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tiếp theo ta chứng minh dãy (a_n) tăng. Thực vậy, ta thấy :

$$5^{a_2} = 3^{a_1} + 4^{a_1} \Rightarrow 5^{a_2 - a_1} = \left(\frac{3}{5}\right)^{a_1} + \left(\frac{4}{5}\right)^{a_1} \geq \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow a_2 \geq a_1.$$

Quy nạp lên ta được dãy (a_n) tăng, bản thân (a_n) còn bị chặn trên nên nó sẽ hội tụ. Giả sử giới hạn của nó là a . Chuyển qua giới hạn :

$$3^a + 4^a = 5^a \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^a + \left(\frac{4}{5}\right)^a = 1 \Leftrightarrow a = 2.$$

Như vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2$.

Hoàn toàn tương tự, dãy (b_n) bị chặn dưới và là dãy giảm, ta cũng tìm được $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 2$.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh :

$$a_n \leq \min \{x_{3n-3}, x_{3n-2}, x_{3n-1}\}.$$

Với $n = 1$ thì hiển nhiên. Giả sử có điều này. Ta xét với $n + 1$:

$$\begin{aligned} x_{3n} &= \log_5 (3^{x_{3n-3}} + 4^{x_{3n-1}}) \geq \log_5 (3^{a_n} + 4^{a_n}) = a_{n+1} \\ x_{3n+1} &= \log_5 (3^{x_{3n-2}} + 4^{x_{3n}}) \geq \log_5 (3^{a_n} + 4^{a_{n+1}}) \geq \log_5 (3^{a_n} + 4^{a_n}) = a_{n+1} \\ x_{3n+2} &= \log_5 (3^{x_{3n-1}} + 4^{x_{3n+1}}) \geq \log_5 (3^{a_n} + 4^{a_{n+1}}) \geq \log_5 (3^{a_n} + 4^{a_n}) = a_{n+1} \end{aligned}$$

Ta quy nạp hoàn tất, tức (*) là đúng.

Cũng hoàn toàn tương tự, ta được :

$$b_n \geq \max \{x_{3n-3}, x_{3n-2}, x_{3n-1}\}$$

Từ đó bằng nguyên lý kẹp, ta được :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{3n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{3n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{3n+3} = 2.$$

Kết luận bài toán :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2.$$

❖ Ví dụ 32

Xét dãy số (u_n) như sau :

$$\begin{cases} u_1 < 2, u_2 < 2 \\ u_{n+2} = \frac{1}{3}(u_{n+1} + 2^{u_n}), \forall n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn này.

 *Lời giải.* Xét hai dãy phụ :

$$(a_n) : \begin{cases} a_1 = \max\{u_1, u_2, 1\} \\ a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2^{a_n}) \end{cases}$$

$$(b_n) : \begin{cases} b_1 = \min\{u_1, u_2, 1\} \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}(b_n + 2^{b_n}) \end{cases}$$

Ta dễ thấy $1 \leq a_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta sẽ chứng minh dãy (a_n) là dãy giảm. Ta xét hàm số $f(x) = 2^x - 2x$, dễ dàng thấy được $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1, 2]$. Như vậy vì $a_1 \in [1, 2]$ nên $f(a_1) = 2^{a_1} - 2a_1 \leq 0$ hay $2^{a_1} \leq 2a_1$. Từ đó :

$$a_2 = \frac{1}{3}(a_1 + 2^{a_1}) \leq \frac{1}{3}(a_1 + 2a_1) = a_1$$

Từ đó quy nạp lên được dãy (a_n) giảm. Mà dãy (a_n) bị chặn nên nó hội tụ về A . Chuyển qua giới hạn

$$2^A = 2A$$

Rõ ràng nghiệm ở đây là $A = 1$ hoặc $A = 2$. Nhưng do

$$a_n \leq a_{n-1} \leq \dots \leq a_1 < 2,$$

nên $A = 1$. Tức là $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$.

Hoàn toàn tương tự dãy (b_n) tăng và bị chặn trên nên hội tụ và giới hạn hữu hạn là 1.

Ta sẽ chứng minh :

$$b_n \leq \min\{u_{2n-1}, u_{2n}\}$$

Với $n = 1$ thì điều này đúng. Giả sử như vậy, ta xét với $n + 1$:

$$u_{2n+1} = \frac{1}{3}(u_{2n} + 2^{u_{2n-1}}) \geq \frac{1}{3}(b_n + 2^{b_n}) = b_{n+1}$$

$$u_{2n+2} = \frac{1}{3}(u_{2n+1} + 2^{u_{2n}}) \geq \frac{1}{3}(b_{n+1} + 2^{b_n}) \geq \frac{1}{3}(b_n + 2^{b_n}) = b_{n+1}$$

Như vậy (*) đúng. Tương tự :

$$a_n \geq \max\{u_{2n-1}, u_{2n}\}.$$

Từ đó theo nguyên lý kẹp, ta được :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

7) Bài toán với tổng

Ví dụ 33

VMO 2009

Cho dãy

$$(x_n): \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_n = \frac{1}{2} \left(\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1} \right), \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (y_n) xác định bởi $y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}$ có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. Ta có $x_n > 0 \forall n$ nên

$$x_n - x_{n-1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} - x_{n-1} \right) = \frac{1}{2} \frac{x_{n-1}^2 + 3x_{n-1}}{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}} > 0.$$

Nên dãy (x_n) là dãy tăng. Giả sử dãy (x_n) bị chặn trên, suy ra tồn tại $\lim x_n = x > 0$.

Ta có phương trình $x = \frac{1}{2} (\sqrt{x^2 + 4x} + x) \Leftrightarrow x = 0$ (vô lí).

Do vậy, ta có được $\lim x_n = +\infty$.

Từ công thức truy hồi, ta có được

$$(2x_n - x_{n-1})^2 = x_{n-1}^2 + 4x_{n-1} \Leftrightarrow x_n^2 = (x_n + 1)x_{n-1}.$$

Dẫn tới

$$\frac{1}{x_{n-1}} = \frac{x_n + 1}{x_n^2} = \frac{1}{x_n^2} + \frac{1}{x_n} \Rightarrow \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n} \quad \forall n \geq 2.$$

Suy ra

$$y_n = \frac{1}{x_1^2} + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) + \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n} \right) = 6 - \frac{1}{x_n}.$$

Mà

$$\lim x_n = +\infty \Rightarrow \lim \frac{1}{x_n} = 0.$$

Vậy $\lim y_n = 6$.

Ví dụ 34

Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 9}{x_n^3 - x_n + 6}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ Với mỗi số nguyên dương n , ta đặt $y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k^3 + 3}$.

Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$.

Lời giải. Dễ dàng chứng minh được (x_n) là dãy dương bằng quy nạp toán học.

Ta chứng minh dãy (x_n) là dãy tăng. Thật vậy, giả sử :

$$x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 9}{x_n^3 - x_n + 6} > x_n \Leftrightarrow x_n^4 + 9 > x_n (x_n^3 - x_n + 6) \Leftrightarrow x_n^2 + 9 > 6x_n$$

Hiển nhiên đúng theo $AM - GM$.

Như vậy dãy (x_n) là dãy tăng.

Giả sử dãy trên có giới hạn hữu hạn là l , chuyển qua giới hạn ta được :

$$l = \frac{l^4 + 9}{l^3 - l + 6} \Leftrightarrow l^2 - 6l + 9 = 0 \Leftrightarrow l = 3$$

Điều này là mâu thuẫn vì do dãy tăng nên $x_n > x_1 = 4$, tức là $l > 4$. Do đó ta phải có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$$

Ta thêm vào một số a :

$$\begin{aligned} x_{n+1} + a &= \frac{x_n^4 + 9}{x_n^3 - x_n + 6} + a = \frac{x_n^4 + ax_n^3 - ax_n + 6a + 9}{x_n^3 - x_n + 6} \\ \Rightarrow \frac{1}{x_{n+1} + a} &= \frac{x_n^3 - x_n + 6}{x_n^4 + ax_n^3 - ax_n + 6a + 9} \end{aligned}$$

Ta sẽ chọn a sao cho :

$$x_n^4 + ax_n^3 - ax_n + 6a + 9 = (x_n^3 + 3)(x_n + a) \Rightarrow a = -3$$

Như vậy ta được :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_{n+1} - 3} &= \frac{x_n^3 - x_n + 6}{(x_n^3 + 3)(x_n - 3)} = \frac{1}{x_n - 3} - \frac{1}{x_n^3 + 3} \\ \Rightarrow \frac{1}{x_n^3 + 3} &= \frac{1}{x_n - 3} - \frac{1}{x_{n+1} - 3} \end{aligned}$$

Do vậy :

$$y_n = \frac{1}{x_1 - 3} - \frac{1}{x_{n+1} - 3} = 1 - \frac{1}{x_{n+1} - 3}$$

Như vậy thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 1$

◀ Ví dụ 35

Cho dãy số (x_n) xác định bởi :

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + x_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1}} \right)$.

 **Lời giải.** Dễ dàng chứng minh được $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$.

Từ công thức xác định dãy số, ta suy ra :

$$x_{n+1} - x_n = x_n^2 \Rightarrow \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n x_{n+1}} = \frac{x_n}{x_{n+1}} \Rightarrow \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1}} &= \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) + \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{x_{n+1}}. \end{aligned}$$

Do vậy mà :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x_{n+1}} \right) = 1.$$

Ví dụ 36

Cho dãy số (x_n) thỏa mãn :

$$\begin{cases} x_1 = a > 1 \\ 2014x_{n+1} = x_n^2 + 2013x_n, \forall n \geq 1 \end{cases}.$$

Tìm :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_1}{x_2 - 1} + \frac{x_2}{x_3 - 1} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1} - 1} \right).$$

 *Lời giải.* Ta có :

$$\begin{aligned} 2014(x_{n+1} - x_n) &= x_n(x_n - 1) \\ \Rightarrow 2014(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - 1) &= x_n(x_n - 1)(x_{n+1} - 1) \\ \Rightarrow \frac{2014(x_{n+1} - x_n)}{(x_{n+1} - 1)(x_n - 1)} &= \frac{x_n}{x_{n+1} - 1} \\ \Rightarrow \frac{x_n}{x_{n+1} - 1} &= 2014 \left(\frac{1}{x_n - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1} \right). \end{aligned}$$

Từ đó mà :

$$\sum_{i=0}^n \frac{x_i}{x_{i+1} - 1} = 2014 \left(\frac{1}{x_1 - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1} \right)$$

Hơn nữa ta chứng minh được bằng quy nạp $x_n > 1$. Do đó mà :

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2013x_n}{2014} > \frac{x_n + 2013x_n}{2014} = x_n$$

Tức dãy (x_n) tăng. Nếu nó có giới hạn hữu hạn là l thì chuyển qua giới hạn :

$$2014l = l^2 + 2013l \Leftrightarrow l \in \{0, 1\}$$

Vô lí. Do đó ta được $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$. Ta kết luận được :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_1}{x_2 - 1} + \frac{x_2}{x_3 - 1} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1} - 1} \right) = \frac{2014}{a - 1}$$

Ví dụ 37

Cho dãy (x_n) xác định bởi $a_0 = -1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ và

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+1}a_{n+2} - 15}{a_n}, n \geq 0.$$

Chứng minh $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_{2k-1} + a_{2k}}{a_k^3 - 5a_k} = 0$.

 *Lời giải.* Ta có

$$a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1}, \forall n \geq 1$$

và

$$a_n^2 - 5 = a_{n-1}a_{n+1}, \forall n \geq 1.$$

Ta chứng minh

$$a_{2n-1} + a_{2n} = a_n(a_{n+1} - a_{n-1}), \forall n \geq 1. \quad (*)$$

. Thật vậy, xét phương trình đặc trưng $x^2 - 3x + 1 = 0$ có hai nghiệm

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5} \pm 1}{2} \right)^2,$$

nên ta tìm được

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^{2n-1} - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^{2n-1}.$$

Đặt $\frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \alpha$, $\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \beta \Rightarrow \alpha\beta = 1$, $\alpha - \beta = 1$. Ta có

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \alpha^{4n-1} - \beta^{4n-1} \\ &= \alpha^{4n-1}(\alpha - \beta) - \beta^{4n-1}(\alpha - \beta) \\ &= \alpha^{4n} + \beta^{4n} - (\alpha^{4n-2} + \beta^{4n-2}) \\ &= [\alpha^{2n} + \beta^{2n}]^2 - 2 - [(\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1})^2 + 2] \\ &= [\alpha^{2n}(\alpha - \beta) + \beta^{2n}(\alpha - \beta)]^2 - (\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1})^2 - 4 \\ &= [(\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}) - (\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1})]^2 - a_n^2 - 4 \\ &= (a_{n+1} - a_n)^2 - a_n^2 - 4 \\ &= a_{n+1}^2 - 2a_n a_{n+1} - 4. \end{aligned}$$

Tương tự

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= \alpha^{4n-3} - \beta^{4n-3} \\ &= \alpha^{4n-3}(\alpha - \beta) - \beta^{4n-3}(\alpha - \beta) \\ &= (\alpha^{2n-1} - \beta^{2n-1})^2 - [\alpha^{2n-2}(\alpha - \beta) + \beta^{2n-2}(\alpha - \beta)]^2 + 4 \\ &= -a_{n-1}^2 + 2a_n a_{n-1} + 4. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} a_{2n-1} + a_{2n} &= (a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2) + 2a_n(a_{n-1} - a_{n+1}) \\ &= (a_{n+1} - a_{n-1})(a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n) \\ &= a_n(a_{n+1} - a_{n-1}). \end{aligned}$$

Dễ thấy $\lim a_n = +\infty$ nên

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_{2k-1} + a_{2k}}{a_k^3 - 5a_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_k(a_{k+1} - a_{k-1})}{a_{k-1}a_k a_{k+1}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) = 0. \end{aligned}$$

8) Dãy số sinh bởi phương trình

Ví dụ 38

VMO 2006

Cho số thực $a > 2$. Đặt

$$f_n(x) = a^{10}x^{n+10} + x^n + \dots + x + 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Chứng minh rằng với mỗi n phương trình $f_n(x) = a$ có đúng một nghiệm $x_n \in (0; +\infty)$ và dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.

Lời giải. Với mỗi n , đặt $g_n(x) = f_n(x) - a$; khi đó $g_n(x)$ là hàm liên tục, tăng trên $[0; +\infty)$.

Ta có

$$g_n(0) = 1 - a < 0; \quad g_n(1) = a^{10} + n + 1 - a > 0,$$

nên $g_n(x) = 0$ có nghiệm duy nhất x_n trên $(0; +\infty)$.

Để chứng minh tồn tại giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, ta chứng minh dãy (x_n) tăng và bị chặn.

Ta có

$$\begin{aligned} g_n\left(1 - \frac{1}{a}\right) &= a^{10} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+10} + \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+1}}{\frac{1}{a}} - a \\ &= a \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+1} \left(a^9 \left(1 - \frac{1}{a}\right)^9 - 1\right) \\ &= a \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n-1} ((a-1)^9 - 1) > 0. \end{aligned}$$

Suy ra $x_n < 1 - \frac{1}{a}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mặt khác

$$\begin{aligned} g_n(x_n) &= a^{10}x_n^{n+10} + x_n^n + \dots + 1 - a = 0 \\ \Rightarrow x_n g_n(x_n) &= a^{10}x_n^{n+11} + x_n^{n+1} + \dots + x_n - ax_n = 0 \\ \Rightarrow g_{n+1}(x_n) &= x_n g_n(x_n) + 1 + ax_n - a = ax_n + 1 - a < 0, \\ &\quad \left(\text{do } x_n < 1 - \frac{1}{a}\right). \end{aligned}$$

Vì g_{n+1} là hàm tăng và $0 = g_{n+1}(x_{n+1}) > g_{n+1}(x_n)$ nên $x_n < x_{n+1}$.

Vậy dãy (x_n) tăng và bị chặn, nên tồn tại $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Ví dụ 39

Với mỗi số nguyên dương n lớn hơn 1; xét phương trình $e^x - nx = n^3$

- ① Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm dương duy nhất, kí hiệu là x_n , chứng minh $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{\ln n} = 3$.
- ② Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\frac{x_n}{\ln n} - 3 \right)$.

Lời giải. Xét hàm số

$$f_n(x) = e^x - nx - n^3 \Rightarrow f'_n(x) = e^x - n.$$

Từ đó

$$f'_n(x) = 0 \Rightarrow x = \ln n$$

Lập bảng biến thiên, chú ý

$$f_n(0) = -n^3 + 1 < 0, \forall n > 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$$

nên dẫn đến phương trình $f_n(x) = 0$ chỉ có đúng một nghiệm dương.

Lại nhận xét:

$$f_n(3 \ln n) = -n \cdot 3 \ln n < 0,$$

$$f(3 \ln(n+1)) = 3n(n - \ln(n+1)) + 3n + 1 > 0.$$

Đồng thời $f_n(x) = 0$ chỉ có nghiệm dương duy nhất là x_n nên $x_n \in (3 \ln n; 3 \ln(n+1))$.

Do đó:

$$3 < \frac{x_n}{\ln n} < 3 \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$$

và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1,$$

$$\text{nên } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\ln n} = 3.$$

Từ đẳng thức:

$$e^{x_n} = n(x_n + n^2) \Rightarrow x_n = \ln n + \ln(x_n + n^2) \Rightarrow x_n - 3 \ln n = \ln\left(\frac{x_n}{n^2} + 1\right).$$

Mặt khác: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^2} = 0$ nên

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x_n}{n^2} + 1\right)}{\frac{x_n}{n^2}} = 1$$

hay suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(x_n - 3 \ln n)}{x_n} = 1.$$

Theo câu a, ta có

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(x_n - 3 \ln n)}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(x_n - 3 \ln n)}{\ln n \cdot \frac{x_n}{\ln n}}$$

$$\text{nên } \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{x_n}{\ln n} - 3 \right) = 3.$$

❖ Ví dụ 40

Ký hiệu x_n là nghiệm của phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \cdots + \frac{1}{x-n} = 0$$

thuộc khoảng $(0, 1)$.

- ① Chứng minh dãy x_n hội tụ
- ② Hãy tìm giới hạn đó.

 **Lời giải.** Rõ ràng x_n được xác định một cách duy nhất, $0 < x_n < 1$. Ta có

$$f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + \frac{1}{x_n - n - 1} = \frac{1}{x_n - n - 1} < 0,$$

trong khi đó $f_{n+1}(0^+) > 0$. Theo tính chất của hàm liên tục, trên khoảng $(0, x_n)$ có ít nhất 1 nghiệm của $f_{n+1}(x)$. Nghiệm đó chính là x_{n+1} . Như thế ta đã chứng minh được $x_{n+1} < x_n$. Tức là dãy số x_n giảm. Do dãy này bị chặn dưới bởi 0 nên dãy số có giới hạn.

Ta sẽ chứng minh giới hạn nói trên bằng 0. Để chứng minh điều này, ta cần đến kết quả quen thuộc sau:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n).$$

(Có thể chứng minh dễ dàng bằng cách sử dụng đánh giá $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$).

Thật vậy, giả sử $\lim x_n = a > 0$. Khi đó, do dãy số giảm nên ta có $x_n \geq a$ với mọi n .

Do

$$\lim \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = +\infty$$

nên tồn tại N sao cho với mọi $n \geq N$ ta có

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} > \frac{1}{a}.$$

Khi đó với $n \geq N$ ta có :

$$0 = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n - 1} + \cdots + \frac{1}{x_n - n} < \frac{1}{x_n} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-2} + \cdots + \frac{1}{-n} < \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0.$$

Mâu thuẫn. Vậy ta phải có $\lim x_n = 0$.

❖ Ví dụ 41

Bến Tre 2013

Cho phương trình:

$$x^{2n+1} = x + 1 \quad (1)$$

(với $n \in \mathbb{N}^*$).

- ① Chứng minh rằng với mỗi giá trị nguyên dương n , phương trình (1) có đúng một nghiệm dương.
- ② Xét dãy số (x_n) được xác định như sau x_n là nghiệm dương của $x^{2n+1} = x + 1$. Tính $\lim x_n$.

Lời giải. Phương trình tương đương với $x(x^{2n} - 1) = 1$. Từ đây suy ra $x < 1$ không phải là nghiệm của phương trình.

Đặt $f(x) = x^{2n+1} - x - 1$. Ta có $f'(x) = (2n+1)x^{2n} - 1 > 0$ với mọi $x > 1$.

Lại có $f(1) = -1 < 0$ nên phương trình có nghiệm duy nhất lớn hơn 1.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$x_n = \sqrt[2n+1]{x_n + 1} \leq \frac{2n + x_n + 1}{2n + 1} \Leftrightarrow x_n \leq \frac{2n + 1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \Rightarrow 1 \leq x_n \leq 1 + \frac{1}{2n}.$$

Theo nguyên lý kẹp ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$.

❖ Ví dụ 42

Ninh Bình 2013

Cho phương trình (ẩn x , tham số n nguyên dương)

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n - \frac{3}{4} = 0.$$

- ① Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n phương trình có 1 nghiệm dương duy nhất, kí hiệu nghiệm đó là x_n .
- ② Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{3}$.

🔗 *Lời giải.*

① Đặt

$$f_n(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n - \frac{3}{4}$$

liên tục trên toàn trục số. Ta có

$$f'_n(x) = 1 + 4x + 9x^2 + \cdots + n^2x^{n-1} > 0 \forall x \in (0; +\infty).$$

Ta suy ra $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Mặt khác $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và

$$f(0) = -\frac{3}{4} < 0, f(1) = \frac{1}{4} + 2 + 3 + \cdots + n > 0.$$

Từ đây ta suy ra $f(0).f(1) < 0$ Từ các điều kiện trên ta suy ra tồn tại duy nhất $x_n \in (0; +\infty)$ sao cho $f_n(x) = 0$ hay nói cách khác là $f_n(x)$ có nghiệm dương duy nhất x_n với mỗi n .

- ② Ta dễ thấy x_n là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 0. Thật vậy $x_n + 2x_n^2 + \cdots + nx_n^n = \frac{3}{4}$. Do x_n nguyên dương và $\frac{3}{4} < 1$ nên khi $n \rightarrow +\infty$ thì x_n giảm.

Vậy x_n tồn tại giới hạn hữu hạn.

Đặt $\lim x_n = L$ ($0 \leq L < 1$) $\Rightarrow \lim x_n^n = 0$.

Từ công thức truy hồi ta có:

$$\begin{aligned} x_n + 2x_n^2 + \cdots + nx_n^n &= \frac{3}{4} \\ \Rightarrow x_n^2 + 2x_n^3 + \cdots + nx_n^{n+1} &= \frac{3}{4}x_n \quad (x_n > 0) \\ \Rightarrow x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^n - nx_n^{n+1} &= \frac{3}{4} - \frac{3}{4}x_n \\ \Rightarrow \frac{x_n(1 - x_n^n)}{1 - x_n} - \frac{n}{a^{n+1}} &= \frac{3}{4} - \frac{3}{4}x_n \quad (a > 1, x^{n+1} = \frac{1}{a^{n+1}}). \end{aligned}$$

Vì với mọi $a > 1, n \in \mathbb{N}$ thì $\lim \frac{n}{a^n} = 0$ nên ta có

$$\frac{L}{1 - L} = \frac{3}{4}(1 - L) \Rightarrow L = \frac{1}{3} \quad (0 \leq L < 1).$$

Vậy $\lim x_n = \frac{1}{3}$.

❖ Ví dụ 43

Cho $n > 1$ là một số nguyên dương. Chứng minh rằng phương trình $x^n = x + 1$ có một nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là x_n . Chứng minh rằng $\lim x_n = 1$ và tìm $\lim n(x_n - 1)$.

 **Lời giải.** Rõ ràng $x_n > 1 \forall n$. Đặt $f_n(x) = x^n - x - 1$, khi đó $f_{n+1}(1) = -1 < 0$ và

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n - 1 > x_n^n - x_n - 1 = f_n(x_n) = 0.$$

Từ đó ta suy ra $1 < x_{n+1} < x_n$.

Suy ra dãy tồn tại $\lim x_n = a$. Ta chứng minh $a = 1$.

Thật vậy, giả sử $a > 1$.

Khi đó $x_n \geq a \forall n$ và ta tìm được n đủ lớn sao cho: $x_n^n \geq a^n > 3$ và $x_n + 1 < 3$, mâu thuẫn vì $f_n(x_n) = 0$.

Để giải phần cuối của bài toán, ta đặt $x_n = 1 + y_n$ với $\lim y_n = 0$. Thay vào phương trình $f_n(x_n) = 0$, ta được

$$(1 + y_n)^n = 2 + y_n.$$

Lấy logarithm hai vế, ta được

$$n \ln(1 + y_n) = \ln(2 + y_n).$$

Từ đó suy ra

$$\lim n \ln(1 + y_n) = \ln 2$$

Nhưng

$$\lim \frac{\ln(1 + y_n)}{y_n} = 1,$$

nên từ đây ta suy ra $\lim(ny_n) = \ln 2$, tức là $\lim n(x_n - 1) = \ln 2$.

Ví dụ 44

VMO 2002

Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng phương trình

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \cdots + \frac{1}{n^2x-1} = \frac{1}{2}$$

có một nghiệm duy nhất $x_n > 1$. Chứng minh rằng $\lim x_n = 4$.

 **Lời giải.** Đặt

$$f_n(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \cdots + \frac{1}{n^2x-1} - \frac{1}{2}$$

và gọi $x_n > 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f_n(x) = 0$. Ta có

$$\begin{aligned} f_n(4) &= \frac{1}{4-1} + \frac{1}{16-1} + \cdots + \frac{1}{4n^2-1} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4n}. \end{aligned}$$

Áp dụng định lý Lagrange, ta có

$$\frac{1}{4n} = |f_n(x_n) - f(4)| = |f'(c)||x_n - 4|$$

với $c \in (x_n, 4)$. Nhưng do

$$|f'_n(c)| = \frac{1}{(c-1)^2} + \frac{4}{(4c-1)^2} + \cdots > \frac{1}{9}.$$

Nên từ đây $|x_n - 4| < \frac{9}{4n}$, suy ra $\lim x_n = 4$.

Bài 1. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_0 > 0$ và

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+2}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Tìm $\lim u_n$.

Bài 2. Cho dãy (x_n) xác định bởi $x_1 = 2, x_2 = 3$ và với mọi $n \geq 2$,

$$x_{n+1} = \frac{n+1}{2n}x_n + \frac{n-2}{3n}x_{n-1} + \frac{1}{6}.$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 3. Cho dãy (u_n) thỏa mãn

$$u_1 = 1, u_2 = \frac{2}{3}, u_{n+2} < \frac{1}{4}u_{n+1}^2 + \frac{3}{4}u_n, n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh dãy (u_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 4. Cho dãy (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{x_n^4 - x_n + 1}{x_n^3 - x_n + 1}.$$

Chứng minh dãy $y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k^3}$ có giới hạn và tính giới hạn đó.

Bài 5. Cho (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 2, x_{n+1} = 1 + x_1x_2 \cdots x_n, \forall n \geq 1.$$

Tính $\lim \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}$.

Bài 6. Cho (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)} + 1, \forall n \geq 1.$$

Tính $\lim \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k + 2}$.

Bài 7. Cho (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 5, x_{n+1} = x_n^2 - 2, \forall n \geq 1.$$

Tính $\lim \frac{x_{n+1}}{x_1x_2 \cdots x_n}$ và $\lim \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1x_2} + \cdots + \frac{1}{x_1x_2 \cdots x_n} \right)$.

Bài 8. Cho dãy số $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ xác định bởi công thức: $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{k!}{A_n^k}, \forall n = 1, 2, \dots$ Tính giới hạn của dãy số đã cho.

Bài 9.

① Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) biết rằng

$$u_1 = 2; u_2 = 8; u_{n+1} = 4u_n - u_{n-1}, \forall n > 1; n \in \mathbb{N}.$$

② Từ kết quả trên chứng minh rằng phương trình sau đây có vô số nghiệm nguyên dương

$$\frac{x^2 + y^2}{xy + 1} = 4.$$

Bài 10. Dãy (a_n) được định nghĩa như sau: Nếu $p_1, p_2, \dots, p_k$ là các ước nguyên tố khác nhau của số nguyên dương n thì $a_n = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k}$. Chứng tỏ rằng với bất kì số nguyên dương

$N \geq 2$ ta có: $\sum_{n=2}^N a_2 a_3 \cdots a_n < 1$.

Bài 11. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 2, u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 5}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

- ① Chứng minh (u_n) là dãy số giảm.
- ② Tìm công thức tổng quát của u_n .

Bài 12. Cho n là số nguyên dương và gọi x_n là nghiệm dương duy nhất của đa thức

$$f_n(t) = t^3 + 3t^2 - \frac{12}{n^2}.$$

Chứng minh rằng dãy (y_n) được xác định bởi $y_n = n(nx_n - 2)$ có giới hạn, tìm giới hạn đó.

Bài 13. Cho số thực a và dãy số (x_n) xác định bởi:

$$x_1 = a; x_{n+1} = \frac{2017}{2018} \ln(2x_n^2 + 15) - 9 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.

Bài 14. Cho dãy số (u_n) được xác định : $\begin{cases} u_1 = \frac{139}{2017} \\ u_n^2(2 - 9u_{n+1}) = 2u_{n+1}(2 - 5u_n), \forall n \geq 1. \end{cases}$

Xét dãy số $v_n = \frac{u_1}{1 - u_1} + \frac{u_2}{1 - u_2} + \dots + \frac{u_n}{1 - u_n}$. Tìm $\lim v_n$.

Bài 15. a) Cho q là số thực thuộc khoảng $(0; 1)$ và dãy $\{u_n\}_{n \geq 1}$ thỏa mãn điều kiện $|u_{n+2} - u_{n+1}| < q|u_{n+1} - u_n|, \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy $\{u_n\}$ có giới hạn hữu hạn.

b) Cho dãy $\{v_n\}_{n \geq 1}$ xác định bởi $0 < v_1 \neq 1$ và $v_{n+1} = \frac{3}{2 + v_n}, \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy $\{v_n\}$ có giới hạn hữu hạn và tính $\lim v_n$.

Bài 16. Xét dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = \frac{5}{4} \text{ và } x_{n+1} = \frac{n+a}{n} + x_n - \frac{x_n^2}{2} \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và tìm giới hạn đó trong các trường hợp

- ① $a = 0$.
- ② $a = \frac{1}{2}$.

Bài 17. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_0 = 2017; x_n = -\frac{2017}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k (n \geq 1)$. Tìm giới hạn

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot \sum_{k=0}^{2017} 2^k x_k + 5}{-2018n^2 + 4n - 3}$$

Bài 18. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) biết

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_2 = 673 \\ u_{n+2} = \frac{2(n+2)^2 \cdot u_{n+1} - (n^3 + 4n^2 + 5n + 2)u_n}{n+3}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1. \end{cases}$$

Bài 19. Cho số thực $q \in (0; 1)$. Xét hai dãy số $(a_n), (b_n)$ xác định bởi $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ và $b_n = a_n q^n + a_{n+1} q^{n-1} + \dots + a_{2n}$ với mọi n nguyên dương. Chứng minh rằng

① $a_n \leq a_{n+1}$ với mọi n nguyên dương.

② Dãy (b_n) có giới hạn hữu hạn và giới hạn đó bằng $\frac{2}{1-q}$.

Bài 20. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $\begin{cases} x_1 = a > 0 \\ x_{n+1} = x_n + \frac{n}{x_n}, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$

1) Chứng minh rằng $x_n \geq n$ với mọi $n \geq 2$.

2) Chứng minh rằng dãy $\left(\frac{x_n}{n}\right)$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 21. Cho dãy số $(u_n)_{n=1}^\infty$ xác định như sau $u_1 = 1; u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{u_n + 2}, \forall n \geq 1$
Chứng minh rằng dãy $(u_n)_{n=1}^\infty$ hội tụ và tính giới hạn của dãy.

Bài 22. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 > 0 \\ u_{n+1} = \frac{2 + \sqrt{u_n^2 + 2u_n + 4}}{u_n}, \forall n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 23. Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi công thức:

$$\begin{cases} x_0 = 1, x_1 = 5 \\ x_{n+1} = 6x_n - x_{n-1} (n \geq 1; n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \{\sqrt{2}x_n\}$ với $\{a\} = a - [a]$ là phần lẻ của a .

Bài 24. Cho dãy số (x_n) xác định như sau: $\begin{cases} x_0 = 1, x_1 = 5 \\ x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + \sqrt{x_n^2 + 6}}{3}, \forall n \geq 0. \end{cases}$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 25. Cho dãy (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1}^3 - 3u_{n+1}(u_{n+1} - 1) = u_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn.

Bài 26. Cho dãy số (x_n) với $x_1 = 2017, x_{n+1} = \sqrt{3} + \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 - 1}}; (n \in \mathbb{N}^*)$. Chứng minh (x_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 27. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $x_1 = 4; x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 9}{x_n^3 - x_n + 6}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

① Chứng minh rằng $\lim x_n = +\infty$.

② Với mỗi số nguyên dương n , đặt $y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k^3 + 3}$. Tìm $\lim y_n$.

Bài 28. Cho dãy số (x_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) được xác định bởi:

$$x_1 = a \geq 1, x_{n+1} = \frac{x_n^2 - 2\{x_n\}^2}{[x_n]^2}; n \in \mathbb{N}^*$$

Trong đó $[x]$ là phần nguyên của x , $\{x\}$ là phần thập phân của x .

① Với $a = 2017$, chứng minh dãy số (x_n) trên có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

② Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn với $a \geq 1$ và tìm giới hạn đó.

Bài 29. Cho các dãy số $(x_n), (y_n)$ xác định bởi $x_1 = 2017$, y_n là chữ số tận cùng của x_n , và $x_{n+1} = x_n + 2y_n \forall n \geq 1$.

- ① Chứng minh rằng dãy (y_n) là dãy tuần hoàn.
- ② Chứng minh rằng dãy (x_n) chứa vô số số hạng là lũy thừa của 17.

Bài 30. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi: $x_1 = 1; x_{n+1} = \frac{(2x_n - 1)^{10}}{52} + x_n$. Với n là số nguyên dương. Đặt $u_n = \frac{(2x_1 - 1)^9}{2x_2 - 1} + \frac{(2x_2 - 1)^9}{2x_3 - 1} + \frac{(2x_3 - 1)^9}{2x_4 - 1} + \dots + \frac{(2x_n - 1)^9}{2x_{n+1} - 1}$. Tìm $\lim u_n$.

Bài 31. Xét dãy số (x_n) xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \\ x_n = \frac{n}{n-1}x_{n-1} + \frac{2n}{n-2}x_{n-2} + 2n, \forall n = 3, 4, 5, \dots \end{cases}$$

- ① Tìm công thức tổng quát của x_n . Chứng minh x_{2017} chia hết cho 2017^2 .
- ② Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho x_p là lũy thừa k của một số nguyên dương nào đó (k là số tự nhiên lớn hơn 1).

Bài 32. Cho dãy số (x_n) thỏa mãn: $\begin{cases} x_1 = 3, x_2 = 7 \\ x_{n+2} = x_{n+1}^2 - x_n^2 + x_n \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Đặt $y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}$. Chứng minh dãy (y_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 33. Cho dãy số dương $(a_n)_{n \geq 1}$ với tính chất sau: với mọi số nguyên dương N , tồn tại chỉ số n nào đó sao cho $2 - \frac{1}{N} < a_n < 2 + \frac{1}{N}$.

- ① Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương k , tồn tại vô hạn chỉ số n để $3^{-\sqrt{k}} < a_n < 3^{\sqrt{k}}$.
- ② Chứng minh rằng có thể sắp xếp lại thứ tự các số hạng của dãy số $(a_n)_{n \geq 1}$ để được dãy số $(b_n)_{n \geq 1}$ sao cho $\sqrt[n]{b_n}$ có giới hạn hữu hạn khi n tiến ra $+\infty$.

Bài 34. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 2016 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{1 + u_n}, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

- ① Chứng minh dãy số (u_n) là dãy giảm.
- ② Tìm phần nguyên của u_{1000} .

Bài 35. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 34, a_{n+1} = 4a_n^3 - 104a_n^2 - 107a_n$ với mọi số n nguyên dương. Tìm tất cả các số nguyên tố p thỏa mãn hai điều kiện $p \equiv 3 \pmod{4}$ và $a_{2017} + 1$ chia hết cho p .

Bài 36. Cho dãy số Fibonaci xác định như sau: $u_1 = u_2 = 1, u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, n = 3, 4, \dots$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố $p \geq 7$ thì có đúng một trong hai số u_{p-1}, u_{p+1} chia hết cho p .

Bài 37. Cho số thực $a \geq 2$ và dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = a; u_{n+1} = u_n + \ln \frac{u_n + 1}{2u_n - 3}, n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn của (u_n) .

Bài 38. Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 3 \text{ và } x_{n+1} = \sqrt{21 + \sqrt{2x_n + 6}} \text{ với } n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn. Tính giới hạn đó.

Bài 39. Cho dãy số $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 24, u_n = \frac{6u_{n-1}^2 u_{n-3} - 8u_{n-1} u_{n-2}^2}{u_{n-2} u_{n-3}}, \forall n \geq 4$. Chứng minh rằng u_n luôn chia hết cho n với mọi n nguyên dương.

Bài 40. Với mỗi số nguyên dương n xét hàm số f_n trên $\mathbb{R}$ được xác định bởi:

$$f_n(x) = x^{2n} + x^{2n-1} + \dots + x^2 + x + 1.$$

- ① Chứng minh hàm số f_n đạt giá trị nhỏ nhất tại một điểm duy nhất.
- ② Gọi giá trị nhỏ nhất của hàm số f_n là s_n . Chứng minh dãy số (s_n) có giới hạn hữu hạn.

Bài 41. Cho dãy (x_n) được xác định như sau:

$$x_0 > 0; x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + x_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Tìm $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2n} x_n$.

Bài 42. Cho dãy số (x_n) xác định bởi hệ thức:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n + 1)(x_n + 2)(x_n + 3) + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Đặt $y = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + 2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Xác định giới hạn của dãy số (y_n) .

Bài 43. Tìm a để dãy số (u_n) hội tụ biết $u_1 = a$ và

$$u_{n+1} = \begin{cases} 2u_n - 1 & \text{khi } u_n > 0 \\ -1 & \text{khi } -1 \neq u_n \leq 0 \\ u_n^2 + 4u_n + 2 & \text{khi } u_n < -1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Bài 44. Cho số thực a thỏa mãn $0 < a \leq 2$. Xét dãy số $(a_n)_{n \geq 0}$ xác định bởi $a_0 = a$ và

$$a_{n+1} = \frac{1 + \sqrt{2a_n^2 + 1}}{a_n} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Chứng minh rằng dãy $(a_n)_{n \geq 0}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 45. Cho dãy số $(x_n)_{n \geq 1}$ với $x_1 = 1, x_2 = 2$ và $x_{n+2} = 5x_{n+1} - x_n$ với mọi n nguyên dương.

- a) Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n để các số dư của các số hạng x_n, x_{n+1}, x_{n+2} khi đem chia 2016^{2017} là một hoán vị của ba số nguyên liên tiếp
- b) Chứng minh rằng $21x_n^2 - 20$ là số chính phương với mọi n nguyên dương.

Bài 46. Cho a là một số thực và dãy số (x_n) được xác định bởi $x_n = 2016n + a\sqrt[3]{n^3 + 1}, \forall n = 1, 2, \dots$

- ① Tìm a sao cho dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn.
- ② Tìm a sao cho dãy số (x_n) là dãy số tăng (kể từ số hạng nào đó).

Bài 47. Cho a, b là các số nguyên dương. Xét dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = a^2 n^2 + bn$, với $n = 1; 2; \dots$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{u_n}\}$, trong đó kí hiệu $\{x\}$ là phần lẻ của số thực x .

Bài 48.

Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 3 \\ u_{n+2} = (n+3)u_{n+1} - (n+2)u_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- 1) Xác định công thức tính u_n theo n .
- 2) Trong các số hạng của dãy số (u_n) , tìm các số hạng là số chính phương.

Bài 49. Xét dãy số (u_n) xác định bởi công thức:
$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = \frac{3}{2} \\ u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + 2}{u_n + 2}, n \geq 1. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 50. Cho dãy số (a_n) có $a_1 \in \mathbb{R}$ và $a_{n+1} = |a_n - 2^{1-n}| \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm $\lim u_n$

Bài 51. (2,0 điểm).

Cho A_n ($n \in \mathbb{N}^*$) là tập hợp chứa các số có biểu diễn thập phân dạng $0, a_1 a_2 \dots a_n$, trong đó $a_n = 1$ và a_i bằng 0 hoặc 1 với mọi $i = 1, 2, \dots, n-1$. Gọi x_n là số phần tử của A_n và y_n là tổng các phần tử của A_n .

- a) Tìm công thức của x_n theo n .
- b) Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{y_n}{x_n}$.