Chuyên đề 25 NGUYÊN HÀM

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH – MỨC 5-6 ĐIỂM

Dạng. Nguyên hàm cơ bản

Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp (với C là hằng số tùy ý)	
① $\int 0\,\mathrm{d}x = C.$	$\longrightarrow \int k\,\mathrm{d}x = kx + C.$
② $\int x^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C.$	$\longrightarrow \int (ax+b)^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\dfrac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C.$
③ $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C.$	$\longrightarrow \int \dfrac{1}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C.$
④ $\int \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{x} + C.$	$\longrightarrow \int \dfrac{1}{(ax+b)^2}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{ax+b} + C.$
⑤ $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C.$	$\longrightarrow \int \sin(ax+b)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + C.$
⑥ $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C.$	$\longrightarrow \int \cos(ax+b)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + C.$
⑦ $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C.$	$\longrightarrow \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2(ax+b)} = -\dfrac{1}{a}\cot(ax+b) + C.$
⑧ $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C.$	$\longrightarrow \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2(ax+b)} = \dfrac{1}{a}\tan(ax+b) + C.$
⑨ $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C.$	$\longrightarrow \int e^{ax+b}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}e^{ax+b} + C.$
⑩ $\int a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$	$\longrightarrow \int a^{\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C.$

♦ ***Nhận xét***. *Khi thay* x *bằng* $(ax+b)$ *thì khi lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm* $\dfrac{1}{a}$.

Một số nguyên tắc tính cơ bản

- *Tích của đa thức hoặc lũy thừa* $\xrightarrow{PP}$ *khai triển.*
- *Tích các hàm mũ* $\xrightarrow{PP}$ *khai triển theo công thức mũ.*
- *Bậc chẵn của sin và cosin* $\Rightarrow$ *Hạ bậc:* $\sin^2 a = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2a,\ \ \cos^2 a = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2a.$
- *Chứa tích các căn thức của* x $\xrightarrow{PP}$ *chuyển về lũy thừa.*

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

A. $F'(x) = -f(x), \forall x \in K.$ **B.** $f'(x) = F(x), \forall x \in K.$

C. $F'(x) = f(x), \forall x \in K.$ **D.** $f'(x) = -F(x), \forall x \in K.$

Câu 2. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** $\int x^2 dx$ bằng

A. $2x + C.$ **B.** $\dfrac{1}{3}x^3 + C.$ **C.** $x^3 + C.$ **D.** $3x^3 + C$

Câu 3. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3$ là

A. $4x^4+C$. **B.** $3x^2+C$. **C.** x^4+C. **D.** $\frac{1}{4}x^4+C$.

Câu 4. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** $\int x^4\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{5}x^5+C$ **B.** $4x^3+C$ **C.** x^5+C **D.** $5x^5+C$

Câu 5. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** $\int x^5dx$ bằng

A. $5x^4+C$. **B.** $\frac{1}{6}x^6+C$. **C.** x^6+C. **D.** $6x^6+C$.

Câu 6. **(Mã 101- 2020 Lần 2)** $\int 5x^4dx$ bằng

A. $\frac{1}{5}x^5+C$. **B.** x^5+C. **C.** $5x^5+C$. **D.** $20x^3+C$.

Câu 7. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** $\int 6x^5dx$ bằng

A. $6x^6+C$. **B.** x^6+C. **C.** $\frac{1}{6}x^6+C$. **D.** $30x^4+C$.

Câu 8. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** $\int 3x^2\mathrm{d}x$ bằng

A. $3x^3+C$. **B.** $6x+C$. **C.** $\frac{1}{3}x^3+C$. **D.** x^3+C.

Câu 9. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** $\int 4x^3\mathrm{d}x$ bằng

A. $4x^4+C$. **B.** $\frac{1}{4}x^4+C$. **C.** $12x^2+C$. **D.** x^4+C.

Câu 10. **(Mã 103 2018)** Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^4+x^2$ là

A. $\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+C$ **B.** x^4+x^2+C **C.** x^5+x^3+C. **D.** $4x^3+2x+C$

Câu 11. **(Mã 104 - 2019)** Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+4$ là

A. x^2+C. **B.** $2x^2+C$. **C.** $2x^2+4x+C$. **D.** x^2+4x+C.

Câu 12. **(Mã 102 - 2019)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+6$ là

A. x^2+C. **B.** x^2+6x+C. **C.** $2x^2+C$. **D.** $2x^2+6x+C$.

Câu 13. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x+6x$ là

A. $\sin x+3x^2+C$. **B.** $-\sin x+3x^2+C$. **C.** $\sin x+6x^2+C$. **D.** $-\sin x+C$.

Câu 14. **(Mã 105 2017)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\sin x$.

A. $\int 2\sin x dx=-2\cos x+C$ **B.** $\int 2\sin x dx=2\cos x+C$

C. $\int 2\sin x dx=\sin^2 x+C$ **D.** $\int 2\sin x dx=\sin 2x+C$

Câu 15. **(Mã 101 2018)** Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+x$ là

A. $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$ **B.** $3x^2+1+C$ **C.** x^3+x+C **D.** x^4+x^2+C

Câu 16. **(Mã 103 - 2019)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+3$ là

A. x^2+3x+C. **B.** $2x^2+3x+C$. **C.** x^2+C. **D.** $2x^2+C$.

Câu 17. **(Đề Minh Họa 2017)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{2x-1}$.

Nguyễn Bảo Vương

A. $\int f(x)dx=\frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C.$ **B.** $\int f(x)dx=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C.$

C. $\int f(x)dx=-\frac{1}{3}\sqrt{2x-1}+C.$ **D.** $\int f(x)dx=\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}+C.$

Câu 18. **(Đề Tham Khảo 2017)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2+\frac{2}{x^2}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{x}+C$.

Câu 19. **(Mã 110 2017)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{5x-2}$.

A. $\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=\frac{1}{5}\ln|5x-2|+C$ **B.** $\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=\ln|5x-2|+C$

C. $\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=-\frac{1}{2}\ln|5x-2|+C$ **D.** $\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=5\ln|5x-2|+C$

Câu 20. **(Mã123 2017)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos 3x$

A. $\int\cos 3xdx=3\sin 3x+C$ **B.** $\int\cos 3xdx=\frac{\sin 3x}{3}+C$

C. $\int\cos 3xdx=\sin 3x+C$ **D.** $\int\cos 3xdx=-\frac{\sin 3x}{3}+C$

Câu 21. **(Mã 104 2018)** Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+x^2$ là

A. $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+C$ **B.** $3x^2+2x+C$ **C.** x^3+x^2+C **D.** x^4+x^3+C

Câu 22. **(Đề Tham Khảo 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x+x$ là

A. e^x+1+C **B.** e^x+x^2+C **C.** $e^x+\frac{1}{2}x^2+C$ **D.** $\frac{1}{x+1}e^x+\frac{1}{2}x^2+C$

Câu 23. **(Mã 101 - 2019)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+5$ là

A. x^2+C. **B.** x^2+5x+C. **C.** $2x^2+5x+C$. **D.** $2x^2+C$.

Câu 24. **(Mã 104 2017)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=7^x$.

A. $\int 7^x\mathrm{d}x=\frac{7^x}{\ln 7}+C$ **B.** $\int 7^x\mathrm{d}x=7^{x+1}+C$

C. $\int 7^x\mathrm{d}x=\frac{7^{x+1}}{x+1}+C$ **D.** $\int 7^x\mathrm{d}x=7^x\ln 7+C$

Câu 25. **(Mã 102 2018)** Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^4+x$ là

A. $4x^3+1+C$ **B.** x^5+x^2+C **C.** $\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^2+C$ **D.** x^4+x+C

Câu 26. **(Đề Tham Khảo 2018)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+1$ là

A. x^3+C **B.** $\frac{x^3}{3}+x+C$ **C.** $6x+C$ **D.** x^3+x+C

Câu 27. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Tìm nguyên hàm $\int x\left(x^2+7\right)^{15}\mathrm{d}x$?

A. $\frac{1}{2}\left(x^2+7\right)^{16}+C$ **B.** $-\frac{1}{32}\left(x^2+7\right)^{16}+C$ **C.** $\frac{1}{16}\left(x^2+7\right)^{16}+C$ **D.** $\frac{1}{32}\left(x^2+7\right)^{16}+C$

Câu 28. **(THPT Ba Đình -2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{3x}$ là hàm số nào sau đây?

A. $3e^{x}+C$. **B.** $\frac{1}{3}e^{3x}+C$. **C.** $\frac{1}{3}e^{x}+C$. **D.** $3e^{3x}+C$.

Câu 29. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Tính $\int(x-\sin 2x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{x^2}{2}+\sin x+C$. **B.** $\frac{x^2}{2}+\cos 2x+C$. **C.** $x^2+\frac{\cos 2x}{2}+C$. **D.** $\frac{x^2}{2}+\frac{\cos 2x}{2}+C$.

Câu 30. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Nguyên hàm của hàm số $y=\mathrm{e}^{2x-1}$ là

A. $2\mathrm{e}^{2x-1}+C$. **B.** $\mathrm{e}^{2x-1}+C$. **C.** $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x-1}+C$. **D.** $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}+C$.

Câu 31. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2x+3}$

A. $\ln|2x+3|+C$. **B.** $\frac{1}{2}\ln|2x+3|+C$. **C.** $\frac{1}{\ln 2}\ln|2x+3|+C$. **D.** $\frac{1}{2}\lg(2x+3)+C$.

Câu 32. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y=x^2-3^x+\frac{1}{x}$.

A. $\frac{x^3}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{1}{x^2}+C,\ C\in\mathbb{R}$. **B.** $\frac{x^3}{3}-3^x+\frac{1}{x^2}+C,\ C\in\mathbb{R}$.

C. $\frac{x^3}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}+\ln|x|+C,\ C\in\mathbb{R}$. **D.** $\frac{x^3}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}-\ln|x|+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Câu 33. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 3x$

A. $-3\cos 3x+C$. **B.** $3\cos 3x+C$. **C.** $\frac{1}{3}\cos 3x+C$. **D.** $-\frac{1}{3}\cos 3x+C$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 34. **(Chuyên KHTN 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+\sin x$ là

A. $x^3+\cos x+C$. **B.** $6x+\cos x+C$. **C.** $x^3-\cos x+C$. **D.** $6x-\cos x+C$.

Câu 35. **(Chuyên Bắc Ninh -2019)** Công thức nào sau đây là **sai**?

A. $\int\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{x}+C$. **B.** $\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x+C$.

C. $\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$. **D.** $\int\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+C$.

Câu 36. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Nếu $\int f(x)\mathrm{d}x=4x^3+x^2+C$ thì hàm số $f(x)$ bằng

A. $f(x)=x^4+\frac{x^3}{3}+Cx$. **B.** $f(x)=12x^2+2x+C$.

C. $f(x)=12x^2+2x$. **D.** $f(x)=x^4+\frac{x^3}{3}$.

Câu 37. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sin 2x+C$. **B.** $\int x^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x=\frac{x^{\mathrm{e}+1}}{\mathrm{e}+1}+C$.

C. $\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+C$. **D.** $\int\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{x+1}}{x+1}+C$.

Câu 38. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Nguyên hàm của hàm số $y=2^x$ là

A. $\int 2^x\mathrm{d}x=\ln 2.2^x+C$. **B.** $\int 2^x\mathrm{d}x=2^x+C$. **C.** $\int 2^x\mathrm{d}x=\frac{2^x}{\ln 2}+C$. **D.** $\int 2^x\mathrm{d}x=\frac{2^x}{x+1}+C$.

Câu 39. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x-\sin x$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=3x^2+\cos x+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{3x^2}{2}-\cos x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{3x^2}{2}+\cos x+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=3+\cos x+C$.

Câu 40. **(Sở Bình Phước 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x+\sin x$ là

A. $x^2+\cos x+C$ **B.** $x^2-\cos x+C$ **C.** $\frac{x^2}{2}-\cos x+C$ **D.** $\frac{x^2}{2}+\cos x+C$

Câu 41. **(THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x$ là:

A. $\cos x+C$. **B.** $-\cos x+C$. **C.** $-\sin x+C$. **D.** $\sin x+C$.

Câu 42. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương - 2019)** Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^4+x^2$ là

A. $4x^3+2x+C$. **B.** x^4+x^2+C. **C.** $\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+C$. **D.** x^5+x^3+C.

Câu 43. **(THPT Cù Huy Cận 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x-2x$ là.

A. e^x+x^2+C. **B.** e^x-x^2+C. **C.** $\frac{1}{x+1}e^x-x^2+C$. **D.** e^x-2+C.

Câu 44. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Họ các nguyên hàm của hàm số $y=\cos x+x$ là

A. $\sin x+\frac{1}{2}x^2+C$. **B.** $\sin x+x^2+C$. **C.** $-\sin x+\frac{1}{2}x^2+C$. **D.** $-\sin x+x^2+C$.

Câu 45. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $y=x^2-3x+\frac{1}{x}$ là

A. $\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}-\ln|x|+C$.

B. $\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+\ln x+C$.

C. $\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+\ln|x|+C$.

D. $\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+\frac{1}{x^2}+C$.

Câu 46. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x}+\sin x$ là

A. $\ln x-\cos x+C$. **B.** $-\frac{1}{x^2}-\cos x+C$. **C.** $\ln|x|+\cos x+C$. **D.** $\ln|x|-\cos x+C$.

Câu 47. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Hàm số $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây trên $(-\infty;+\infty)$?

A. $f(x)=3x^2$. **B.** $f(x)=x^3$. **C.** $f(x)=x^2$. **D.** $f(x)=\frac{1}{4}x^4$.

Câu 48. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=2^x+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2^x}{\ln 2}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=2^x\ln 2+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2^{x+1}}{x+1}+C$.

Câu 49. **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^4+2}{x^2}$.

Nguyễn Bảo Vương

A. $\int f(x)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$. **B.** $\int f(x)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$.

C. $\int f(x)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$. **D.** $\int f(x)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.

Câu 50. **(Sở Hà Nội 2019)** Hàm số nào trong các hàm số sau đây là một nguyên hàm của hàm số $y = e^x$?

A. $y = \frac{1}{x}$. **B.** $y = e^x$. **C.** $y = e^{-x}$. **D.** $y = \ln x$.

Câu 51. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Tính $F(x) = \int e^2 dx$, trong đó e là hằng số và $e \approx 2,718$.

A. $F(x) = \frac{e^2 x^2}{2} + C$. **B.** $F(x) = \frac{e^3}{3} + C$. **C.** $F(x) = e^2 x + C$. **D.** $F(x) = 2ex + C$.

Câu 52. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ trên $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

A. $\frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$. **B.** $\frac{1}{2}\ln(1-2x) + C$. **C.** $-\frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$. **D.** $\ln|2x-1| + C$.

Câu 53. **(Chuyên Hưng Yên 2019)** Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x + x$ là

A. $\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^2}{2} + C$. **B.** $2^x + x^2 + C$. **C.** $\frac{2^x}{\ln 2} + x^2 + C$. **D.** $2^x + \frac{x^2}{2} + C$.

Câu 54. **(Chuyên Sơn La 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + \sin x$

A. $1 + \cos x + C$. **B.** $1 - \cos x + C$. **C.** $x + \cos x + C$. **D.** $x - \cos x + C$.

Câu 55. **(THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019)** Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2019$ là

A. $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + C$. **B.** $\frac{1}{9}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2019x + C$.

C. $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2019x + C$. **D.** $\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 2019x + C$.

Câu 56. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3x-1}$ trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ là:

A. $\frac{1}{3}\ln(3x-1) + C$ **B.** $\ln(1-3x) + C$ **C.** $\frac{1}{3}\ln(1-3x) + C$ **D.** $\ln(3x-1) + C$

Câu 57. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int 2^x dx = 2^x \ln 2 + C$. **B.** $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$.

C. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$. **D.** $\int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| + C \ (\forall x \neq -1)$.

Câu 58. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^4 + 3}{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\int f(x)dx=\frac{2x^3}{3}+\frac{3}{2x}+C$.

B. $\int f(x)dx=\frac{2x^3}{3}-\frac{3}{x}+C$.

C. $\int f(x)dx=\frac{2x^3}{3}+\frac{3}{x}+C$.

D. $\int f(x)dx=2x^3-\frac{3}{x}+C$.

Câu 59. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $f(x)=2^x+x+1$. Tìm $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2^x+x^2+x+C$.

B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 2}2^x+\frac{1}{2}x^2+x+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2^x+\frac{1}{2}x^2+x+C$.

D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{x+1}2^x+\frac{1}{2}x^2+x+C$.

Câu 60. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x-\sin x$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=3x^2+\cos x+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{3x^2}{2}-\cos x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{3x^2}{2}+\cos x+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=3+\cos x+C$.

Câu 61. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Hàm số $F(x)=e^{x^2}$ là nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau:

A. $f(x)=2xe^{x^2}$.

B. $f(x)=x^2e^{x^2}-1$.

C. $f(x)=e^{2x}$.

D. $f(x)=\frac{e^{x^2}}{2x}$.

Câu 62. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^{-x}$ là

A. $-\frac{3^{-x}}{\ln 3}+C$

B. $-3^{-x}+C$

C. $3^{-x}\ln 3+C$

D. $\frac{3^{-x}}{\ln 3}+C$

Câu 63. **(Sở Phú Thọ 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+x^2$ là

A. $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+C$.

B. x^4+x^3+C.

C. $3x^2+2x+C$.

D. $\frac{x^4}{3}+\frac{x^3}{4}+C$

Câu 64. **(Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019)** Hàm số nào trong các hàm số sau đây không là nguyên hàm của hàm số $y=x^{2019}$?

A. $\frac{x^{2020}}{2020}+1$.

B. $\frac{x^{2020}}{2020}$.

C. $y=2019x^{2018}$.

D. $\frac{x^{2020}}{2020}-1$.

Câu 65. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y=x^2-3^x+\frac{1}{x}$.

A. $\frac{x^3}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}-\ln|x|+C, C\in R$

B. $\frac{x^3}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}+\ln|x|+C, C\in R$

C. $\frac{x^3}{3}-3^x+\frac{1}{x^2}+C, C\in R$

D. $\frac{x^3}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{1}{x^2}+C, C\in R$

Câu 66. **(Quảng Ninh 2019)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x\left(2017-\frac{2018e^{-x}}{x^5}\right)$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2017e^x-\frac{2018}{x^4}+C$.

B. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2017e^x+\frac{2018}{x^4}+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2017e^x+\frac{504,5}{x^4}+C$.

D. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=2017e^x-\frac{504,5}{x^4}+C$.

Câu 67. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $y = e^x\left(2 + \dfrac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)$ là

A. $2e^x + \tan x + C$ **B.** $2e^x - \tan x + C$ **C.** $2e^x - \dfrac{1}{\cos x} + C$ **D.** $2e^x + \dfrac{1}{\cos x} + C$

Câu 68. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Tìm nguyên $F(x)$ của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$?

A. $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - 6x^3 + \dfrac{11}{2}x^2 - 6x + C$. **B.** $F(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + C$.

C. $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + 2x^3 + \dfrac{11}{2}x^2 + 6x + C$. **D.** $F(x) = x^3 + 6x^2 + 11x^2 + 6x + C$.

Câu 69. **(Sở Bắc Ninh 2019)** họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{5x+4}$ là:

A. $\dfrac{1}{5}\ln(5x+4) + C$. **B.** $\ln|5x+4| + C$. **C.** $\dfrac{1}{\ln 5}\ln|5x+4| + C$. **D.** $\dfrac{1}{5}\ln|5x+4| + C$.

Nguyễn Bảo Vương

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – MỨC 7-8 ĐIỂM

Dạng 1. Nguyên hàm cơ bản có điều kiện

Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp (với C là hằng số tùy ý)

① $\int 0\mathrm{d}x = C.$	$\longrightarrow \int k\mathrm{d}x = kx + C.$
② $\int x^n\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$	$\longrightarrow \int (ax+b)^n\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C.$
③ $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C.$	$\longrightarrow \int \frac{1}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C.$
④ $\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C.$	$\longrightarrow \int \frac{1}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{ax+b} + C.$
⑤ $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C.$	$\longrightarrow \int \sin(ax+b)\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C.$
⑥ $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C.$	$\longrightarrow \int \cos(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C.$
⑦ $\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C.$
⑧ $\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C.$
⑨ $\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C.$	$\longrightarrow \int e^{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C.$
⑩ $\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C.$	$\longrightarrow \int a^{\alpha x+\beta}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\frac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C.$

♦ ***Nhận xét***. *Khi thay* x *bằng* $(ax+b)$ *thì khi lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm* $\frac{1}{a}$.

Một số nguyên tắc tính cơ bản

- *Tích của đa thức hoặc lũy thừa* $\xrightarrow{PP}$ *khai triển.*
- *Tích các hàm mũ* $\xrightarrow{PP}$ *khai triển theo công thức mũ.*
- *Bậc chẵn của sin và cosin* $\Rightarrow$ *Hạ bậc:* $\sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2a,\ \cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2a.$
- *Chứa tích các căn thức của* x $\xrightarrow{PP}$ *chuyển về lũy thừa.*

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}, f(0) = 1, f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

A. $2 + \ln 15$ **B.** $3 + \ln 15$ **C.** $\ln 15$ **D.** $4 + \ln 15$

Câu 2. **(Sở Phú Thọ 2019)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ thỏa mãn $F(e+1) = 4$ Tìm $F(x)$.

A. $2\ln(x-1)+2$ **B.** $\ln(x-1)+3$ **C.** $4\ln(x-1)$ **D.** $\ln(x-1)-3$

Câu 3. **(THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$, biết $F(1)=2$. Giá trị của $F(0)$ bằng

A. $2+\ln 2$. **B.** $\ln 2$. **C.** $2+\ln(-2)$. **D.** $\ln(-2)$.

Câu 4. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$; biết $F(0)=2$. Tính $F(1)$.

A. $F(1)=\dfrac{1}{2}ln3-2$. **B.** $F(1)=ln3+2$. **C.** $F(1)=2ln3-2$. **D.** $F(1)=\dfrac{1}{2}ln3+2$.

Câu 5. **(Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019)** Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{x}$ trên $(-\infty;0)$ thỏa mãn $F(-2)=0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $F(x)=\ln\left(\dfrac{-x}{2}\right)\ \forall x\in(-\infty;0)$

B. $F(x)=\ln|x|+C\ \forall x\in(-\infty;0)$ với C là một số thực bất kì.

C. $F(x)=\ln|x|+\ln 2\ \forall x\in(-\infty;0)$.

D. $F(x)=\ln(-x)+C\ \forall x\in(-\infty;0)$ với C là một số thực bất kì.

Câu 6. **(THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $R\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $f(0)=2017$, $f(2)=2018$. Tính $S=f(3)-f(-1)$.

A. $S=\ln 4035$. **B.** $S=4$. **C.** $S=\ln 2$. **D.** $S=1$.

Câu 7. **(Mã 105 2017)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x+2x$ thỏa mãn $F(0)=\dfrac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x)=e^x+x^2+\dfrac{1}{2}$ **B.** $F(x)=e^x+x^2+\dfrac{5}{2}$

C. $F(x)=e^x+x^2+\dfrac{3}{2}$ **D.** $F(x)=2e^x+x^2-\dfrac{1}{2}$

Câu 8. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{2x}$ và $F(0)=0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng

A. 2. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 9. **(Sở Bình Phước 2019)** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số e^{2x} và $F(0)=\dfrac{201}{2}$. Giá trị $F\left(\dfrac{1}{2}\right)$ là

A. $\dfrac{1}{2}e+200$ **B.** $2e+100$ **C.** $\dfrac{1}{2}e+50$ **D.** $\dfrac{1}{2}e+100$

Câu 10. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x)=2e^{2x}+1,\forall x, f(0)=2$. Hàm $f(x)$ là

A. $y=2e^x+2x$. **B.** $y=2e^x+2$. **C.** $y=e^{2x}+x+2$. **D.** $y=e^{2x}+x+1$.

Câu 11. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $f(x)=2x+e^x$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2019$.

A. $F(x)=x^2+e^x+2018$. **B.** $F(x)=x^2+e^x-2018$.

C. $F(x)=x^2+e^x+2017$. **D.** $F(x)=e^x-2019$.

Câu 12. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x$, thỏa mãn $F(0)=\dfrac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T=F(0)+F(1)+...+F(2018)+F(2019)$.

A. $T=1009.\dfrac{2^{2019}+1}{\ln 2}$. **B.** $T=2^{2019.2020}$.

C. $T=\dfrac{2^{2019}-1}{\ln 2}$. **D.** $T=\dfrac{2^{2020}-1}{\ln 2}$.

Câu 13. **(Mã 104 2017)** Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin x+\cos x$ thoả mãn $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$.

A. $F(x)=-\cos x+\sin x+3$ **B.** $F(x)=-\cos x+\sin x-1$

C. $F(x)=-\cos x+\sin x+1$ **D.** $F(x)=\cos x-\sin x+3$

Câu 14. **(Mã 123 2017)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=3-5\sin x$ và $f(0)=10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $f(x)=3x-5\cos x+15$ **B.** $f(x)=3x-5\cos x+2$

C. $f(x)=3x+5\cos x+5$ **D.** $f(x)=3x+5\cos x+2$

Câu 15. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=2-5\sin x$ và $f(0)=10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $f(x)=2x+5\cos x+3$. **B.** $f(x)=2x-5\cos x+15$.

C. $f(x)=2x+5\cos x+5$. **D.** $f(x)=2x-5\cos x+10$.

Câu 16. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)=\cos 3x$ và $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{3}$. Tính $F\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$.

A. $F\left(\dfrac{\pi}{9}\right)=\dfrac{\sqrt{3}+2}{6}$ **B.** $F\left(\dfrac{\pi}{9}\right)=\dfrac{\sqrt{3}-2}{6}$ **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{9}\right)=\dfrac{\sqrt{3}+6}{6}$ **D.** $F\left(\dfrac{\pi}{9}\right)=\dfrac{\sqrt{3}-6}{6}$

Câu 17. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$. Biết $F\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)=k$ với mọi $k\in\mathbb{Z}$. Tính $F(0)+F(\pi)+F(2\pi)+...+F(10\pi)$.

A. 55. **B.** 44. **C.** 45. **D.** 0.

Câu 18. **(Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020)** Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x$, thỏa mãn $F(0)=\dfrac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T=F(0)+F(1)+F(2)+...+F(2019)$.

A. $T=\dfrac{2^{2020}-1}{\ln 2}$. **B.** $T=1009.\dfrac{2^{2019}-1}{2}$. **C.** $T=2^{2019.2020}$. **D.** $T=\dfrac{2^{2019}-1}{\ln 2}$.

Dạng 2. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số

" Nếu $\int f(x)dx=F(x)+C$ thì $\int f(u(x)).u'(x)dx=F(u(x))+C$".

Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm $I=\int f(x)dx$, trong đó ta có thể phân tích $f(x)=g(u(x))u'(x)dx$ thì ta thức hiện phép đổi biến số $t=u(x)$

$\Rightarrow dt=u'(x)dx$. Khi đó: $I=\int g(t)dt=G(t)+C=G(u(x))+C$

Chú ý: Sau khi ta tìm được họ nguyên hàm theo t thì ta phải thay $t=u(x)$

1. <u>Đổi biến số với một số hàm thường gặp</u>

- $\int f(ax+b)^n x\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} t=ax+b.$ • $\int_a^b \sqrt[n]{f(x)}f'(x)\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} t=\sqrt[n]{f(x)}.$
- $\int_a^b f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} t=\ln x.$ • $\int_a^b f(e^x)e^x\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} t=e^x.$
- $\int_a^b f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} t=\sin x.$ • $\int_a^b f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} t=\cos x.$
- $\int_a^b f(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} t=\tan x.$ • $\int_a^b f(\sin x\pm\cos x).(\sin x\pm\cos x)\mathrm{d}x \Rightarrow t=\sin x\pm\cos x.$
- $\int_\alpha^\beta f(\sqrt{a^2-x^2})x^{2n}\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} x=a\sin t.$ • $\int_\alpha^\beta f\left((\sqrt{x^2+a^2})^m\right)x^{2n}\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} x=a\tan t.$
- $\int_\alpha^\beta f\left(\sqrt{\frac{a\pm x}{a\mp x}}\right)\mathrm{d}x \xrightarrow{PP} x=a\cos 2t.$ • $\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(ax+b)(cx+d)}} \Rightarrow t=\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}.$
- $\int_\alpha^\beta R\left[\sqrt[s_1]{ax+b},..,\sqrt[s_k]{ax+b}\right]\mathrm{d}x \Rightarrow t^n=ax+b.$ • $\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{(a+bx^n)\sqrt[n]{a+bx^n}} \xrightarrow{PP} x=\frac{1}{t}.$

2. <u>Đổi biến số với hàm ẩn</u>

- ***Nhận dạng tương đối***: *Đề cho $f(x)$, yêu cầu tính $f(\neq x)$ hoặc đề cho $f(\neq x)$, yêu cầu tính $f(x)$.*
- ***Phương pháp***: *Đặt $t=(\neq x)$.*
- ***Lưu ý***: *Đổi biến nhớ đổi cận và ở trên đã sử dụng tính chất: "**Tích phân không phụ thuộc vào biến số, mà chỉ phụ thuộc vào hai cận**", nghĩa là* $\int_a^b f(u)\mathrm{d}u=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\cdots=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\cdots$

Câu 19. **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Biết $F(x)=e^x+x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)dx$ bằng

A. $2e^x+2x^2+C.$ **B.** $\frac{1}{2}e^{2x}+x^2+C.$ **C.** $\frac{1}{2}e^{2x}+2x^2+C.$ **D.** $e^{2x}+4x^2+C.$

Câu 20. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Biết $F(x)=e^x-2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)dx$ bằng

A. $2e^x-4x^2+C.$ **B.** $\frac{1}{2}e^{2x}-4x^2+C.$ **C.** $e^{2x}-8x^2+C.$ **D.** $\frac{1}{2}e^{2x}-2x^2+C.$

Câu 21. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Biết $F(x)=e^x-x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{2}e^{2x}-2x^2+C.$ **B.** $e^{2x}-4x^2+C.$ **C.** $2e^x-2x^2+C.$ **D.** $\frac{1}{2}e^{2x}-x^2+C.$

Câu 22. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Biết $F(x)=\mathrm{e}^x+2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\mathrm{e}^{2x}+8x^2+C$. **B.** $2\mathrm{e}^x+4x^2+C$. **C.** $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+2x^2+C$. **D.** $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+4x^2+C$.

Câu 28. **[DS12.C3.1.D09.b] (Thi thử Lômônôxốp - Hà Nội lần V 2019)** Biết $\int f(2x)\mathrm{d}x=\sin^2 x+\ln x+C$. Tìm nguyên hàm $\int f(x)\mathrm{d}x$?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\sin^2\frac{x}{2}+\ln x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2\sin^2 2x+2\ln x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=2\sin^2\frac{x}{2}+2\ln x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2\sin^2 x+2\ln x+C$.

Câu 46. **[DS12.C3.1.D09.b]** Cho $\int f(4x)\mathrm{d}x=x^2+3x+c$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x+2)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{4}+2x+C$. **B.** $\int f(x+2)\mathrm{d}x=x^2+7x+C$.

C. $\int f(x+2)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{4}+4x+C$. **D.** $\int f(x+2)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+4x+C$.

Câu 5. **[DS12.C3.1.D09.b]** Cho $\int f(x)\mathrm{d}x=4x^3+2x+C_0$. Tính $I=\int xf(x^2)\mathrm{d}x$.

A. $I=2x^6+x^2+C$. **B.** $I=\frac{x^{10}}{10}+\frac{x^6}{6}+C$.

C. $I=4x^6+2x^2+C$. **D.** $I=12x^2+2$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 23. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2.\mathrm{e}^{x^3+1}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}.\mathrm{e}^{x^3+1}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=3\mathrm{e}^{x^3+1}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x^3+1}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3+1}+C$.

Câu 24. **(THPT Hà Huy Tập - 2018)** Nguyên hàm của $f(x)=\sin 2x.e^{\sin^2 x}$ là

A. $\sin^2 x.e^{\sin^2 x-1}+C$. **B.** $\frac{e^{\sin^2 x+1}}{\sin^2 x+1}+C$. **C.** $e^{\sin^2 x}+C$. **D.** $\frac{e^{\sin^2 x-1}}{\sin^2 x-1}+C$.

Câu 25. Tìm tất cả các họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x^9+3x^5}$

A. $\int f(x)dx=-\frac{1}{3x^4}+\frac{1}{36}\ln\left|\frac{x^4}{x^4+3}\right|+C$ **B.** $\int f(x)dx=-\frac{1}{12x^4}-\frac{1}{36}\ln\left|\frac{x^4}{x^4+3}\right|+C$

C. $\int f(x)dx=-\frac{1}{3x^4}-\frac{1}{36}\ln\left|\frac{x^4}{x^4+3}\right|+C$ **D.** $\int f(x)dx=-\frac{1}{12x^4}+\frac{1}{36}\ln\left|\frac{x^4}{x^4+3}\right|+C$

Câu 26. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Tìm hàm số $F(x)$ biết $F(x)=\int\frac{x^3}{x^4+1}\mathrm{d}x$ và $F(0)=1$.

A. $F(x)=\ln(x^4+1)+1$. **B.** $F(x)=\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+\frac{3}{4}$.

C. $F(x)=\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+1$. **D.** $F(x)=4\ln(x^4+1)+1$.

Câu 27. Biết $\int \frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}}dx = \frac{1}{a}.\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^b + C, x \neq -1$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a = 2b$. **B.** $b = 2a$. **C.** $a = 2018b$. **D.** $b = 2018a$.

Câu 28. **(Chuyên Quốc Học Huế - 2018)** Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x) = \frac{2017x}{(x^2+1)^{2018}}$ thỏa mãn $F(1) = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của $F(x)$.

A. $m = -\frac{1}{2}$. **B.** $m = \frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$. **C.** $m = \frac{1+2^{2017}}{2^{2018}}$. **D.** $m = \frac{1}{2}$.

Câu 29. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$ và $F(0) = -\ln 2e$. Tập nghiệm S của phương trình $F(x) + \ln(e^x+1) = 2$ là:

A. $S = \{3\}$ **B.** $S = \{2;3\}$ **C.** $S = \{-2;3\}$ **D.** $S = \{-3;3\}$

Câu 30. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3(x^2+1)^{2019}$ là

A. $\frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020}\right]$. **B.** $\frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020}$.

C. $\frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020} + C$. **D.** $\frac{1}{2}\left[\frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020}\right] + C$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 31. **(THPT Hà Huy Tập - 2018)** Nguyên hàm của $f(x) = \frac{1+\ln x}{x.\ln x}$ là:

A. $\int \frac{1+\ln x}{x.\ln x}dx = \ln|\ln x| + C$. **B.** $\int \frac{1+\ln x}{x.\ln x}dx = \ln|x^2.\ln x| + C$.

C. $\int \frac{1+\ln x}{x.\ln x}dx = \ln|x+\ln x| + C$. **D.** $\int \frac{1+\ln x}{x.\ln x}dx = \ln|x.\ln x| + C$.

Câu 32. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2e^{x^3+1}$

A. $\int f(x)dx = e^{x^3+1} + C$. **B.** $\int f(x)dx = 3e^{x^3+1} + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C$. **D.** $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3}e^{x^3+1} + C$.

Câu 33. **(Chuyên Lương Văn Chánh Phú Yên 2019)** Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{3x+1}$ là

A. $\int f(x)dx = (3x+1)\sqrt[3]{3x+1} + C$. **B.** $\int f(x)dx = \sqrt[3]{3x+1} + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}\sqrt[3]{3x+1} + C$. **D.** $\int f(x)dx = \frac{1}{4}(3x+1)\sqrt[3]{3x+1} + C$.

Câu 34. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{3x+2}$ là

A. $\frac{2}{3}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C$ **B.** $\frac{1}{3}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C$

C. $\frac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C$ **D.** $\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{3x+2}} + C$

Câu 35. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+1}$ là

A. $-\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+C$. **B.** $\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}+C$.

C. $\frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+C$. **D.** $\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+C$.

Câu 36. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Cho hàm số $f(x)=2^{\sqrt{x}}.\frac{\ln 2}{\sqrt{x}}$. Hàm số nào dưới đây **không** là nguyên hàm của hàm số $f(x)$?

A. $F(x)=2^{\sqrt{x}}+C$ **B.** $F(x)=2\left(2^{\sqrt{x}}-1\right)+C$

C. $F(x)=2\left(2^{\sqrt{x}}+1\right)+C$ **D.** $F(x)=2^{\sqrt{x}+1}+C$

Câu 37. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Khi tính nguyên hàm $\int\frac{x-3}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$, bằng cách đặt $u=\sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

A. $\int 2\left(u^2-4\right)\mathrm{d}u$. **B.** $\int\left(u^2-4\right)\mathrm{d}u$. **C.** $\int\left(u^2-3\right)\mathrm{d}u$. **D.** $\int 2u\left(u^2-4\right)\mathrm{d}u$.

Câu 38. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\sqrt{2x+1}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=2\sqrt{2x+1}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}+C$.

Câu 39. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến - 2018)** Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ là

A. $F(x)=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\sqrt{x^2+1}+C$. **B.** $F(x)=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}+C$.

C. $F(x)=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$. **D.** $F(x)=x^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$.

Câu 40. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Biết rằng trên khoảng $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$, hàm số $f(x)=\frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ có một nguyên hàm $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{2x-3}$ (a,b,c là các số nguyên). Tổng $S=a+b+c$ bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 41. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\sin x}{1+3\cos x}$.

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln\left|1+3\cos x\right|+C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\ln\left|1+3\cos x\right|+C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x=3\ln\left|1+3\cos x\right|+C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\ln\left|1+3\cos x\right|+C$.

Câu 42. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Tìm các hàm số $f(x)$ biết $f'(x)=\frac{\cos x}{(2+\sin x)^2}$.

A. $f(x)=\frac{\sin x}{(2+\sin x)^2}+C$. **B.** $f(x)=\frac{1}{(2+\cos x)}+C$.

C. $f(x)=-\frac{1}{2+\sin x}+C$. **D.** $f(x)=\frac{\sin x}{2+\sin x}+C$.

Câu 43. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+3\cos x}$ và $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$ .Tính $F(0)$.

A. $F(0)=-\dfrac{1}{3}\ln 2+2$. **B.** $F(0)=-\dfrac{2}{3}\ln 2+2$. **C.** $F(0)=-\dfrac{2}{3}\ln 2-2$. **D.** $F(0=-\dfrac{1}{3}\ln 2-2$.

Câu 44. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Biết $\int f(x)\mathrm{d}x=3x\cos(2x-5)+C$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $\int f(3x)\mathrm{d}x=3x\cos(6x-5)+C$ **B.** $\int f(3x)\mathrm{d}x=9x\cos(6x-5)+C$

C. $\int f(3x)\mathrm{d}x=9x\cos(2x-5)+C$ **D.** $\int f(3x)\mathrm{d}x=3x\cos(2x-5)+C$

Câu 45. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\tan^5 x$**.**

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\tan^4 x-\dfrac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\tan^4 x+\dfrac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\cos x|+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\tan^4 x+\dfrac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\tan^4 x-\dfrac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\cos x|+C$.

Câu 46. **(Hồng Bàng - Hải Phòng - 2018) Biết** $F(x)$ **là một nguyên hàm của hàm số** $f(x)=\sin^3 x.\cos x$ **và** $F(0)=\pi$**. Tính** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$**.**

A. $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\pi$. **B.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi$. **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}+\pi$. **D.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{4}+\pi$.

Câu 47. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=2$ và $F(\mathrm{e})=\ln 2$. Giá trị của biểu thức $F\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)+F(\mathrm{e}^2)$ bằng

A. $3\ln 2+2$. **B.** $\ln 2+2$. **C.** $\ln 2+1$. **D.** $2\ln 2+1$.

Câu 48. **(Chuyên Nguyễn Huệ-HN 2019)** Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{8-x^2}}$ thỏa mãn $F(2)=0$. Khi đó phương trình $F(x)=x$ có nghiệm là:

A. $x=0$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=1-\sqrt{3}$.

Câu 49. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{x^2}$. Biết $F(3)=6$, giá trị của $F(8)$ là

A. $\dfrac{217}{8}$. **B.** 27. **C.** $\dfrac{215}{24}$. **D.** $\dfrac{215}{8}$.

Câu 50. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ trên khoảng $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$ là

A. $(4x^2+2x+1)\sqrt{2x-3}+C$. **B.** $(4x^2-2x+1)\sqrt{2x-3}$.

C. $(3x^2-2x+1)\sqrt{2x-3}$. **D.** $(4x^2-2x+1)\sqrt{2x-3}+C$.

Dạng 3. Nguyên hàm của hàm số hữu tỉ

1. Công thức thường áp dụng

- $\int \frac{1}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$ • $\int \frac{1}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{ax+b} + C.$
- $\ln a + \ln b = \ln(ab).$ • $\ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}\cdot$
- $\ln a^n = n\ln a.$ • $\ln 1 = 0.$

2. Phương pháp tính nguyên hàm, tích phân của hàm số hữu tỷ $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x.$

- *Nếu bậc của tử số* $P(x) \geq$ *bậc của mẫu số* $Q(x) \xrightarrow{PP}$ *Chia đa thức.*
- *Nếu bậc của tử số* $P(x) <$ *bậc của mẫu số* $Q(x) \xrightarrow{PP}$ *phân tích mẫu* $Q(x)$ *thành tích số, rồi sử dụng phương pháp che để đưa về công thức nguyên hàm số 01.*
- *Nếu mẫu không phân tích được thành tích số* $\xrightarrow{PP}$ *thêm bớt để đổi biến hoặc lượng giác hóa bằng cách đặt* $X = a\tan t$, *nếu mẫu đưa được về dạng* $X^2 + a^2$.

Câu 51. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ là

A. $x+3\ln(x-1)+C.$ **B.** $x-3\ln(x-1)+C.$

C. $x-\frac{3}{(x-1)^2}+C.$ **D.** $x+\frac{3}{(x-1)^2}+C.$

Câu 52. **(Mã đề 104 - BGD - 2019)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2}$ trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $3\ln(x-2)+\frac{2}{x-2}+C$ **B.** $3\ln(x-2)-\frac{2}{x-2}+C$

C. $3\ln(x-2)-\frac{4}{x-2}+C$ **D.** $3\ln(x-2)+\frac{4}{x-2}+C$.

Câu 53. **(Mã đề 101 - BGD - 2019)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1;+\infty)$ là

A. $2\ln(x+1)+\frac{2}{x+1}+C.$ **B.** $2\ln(x+1)+\frac{3}{x+1}+C.$

C. $2\ln(x+1)-\frac{2}{x+1}+C.$ **D.** $2\ln(x+1)-\frac{3}{x+1}+C.$

Câu 54. **(Chuyên Lê Quý Đôn Diện Biên 2019)** Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = ax + \frac{b}{x^2}(x \neq 0)$, biết rằng $F(-1) = 1, F(1) = 4, f(1) = 0$

A. $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4x} - \frac{7}{4}.$ **B.** $F(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{7}{4}.$

C. $F(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}.$ **D.** $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2}.$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 55. Cho biết $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)}\mathrm{dx} = a\ln|x+1|+b\ln|x-2|+C$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+2b=8$. **B.** $a+b=8$. **C.** $2a-b=8$. **D.** $a-b=8$.

Câu 56. Cho biết $\int \frac{1}{x^3-x}\mathrm{dx} = a\ln|(x-1)(x+1)|+b\ln|x|+C$. Tính giá trị biểu thức: $P=2a+b$.

A. 0. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Câu 57. Cho biết $\int \frac{4x+11}{x^2+5x+6}\mathrm{dx} = a\ln|x+2|+b\ln|x+3|+C$. Tính giá trị biểu thức: $P=a^2+ab+b^2$.

A. 12. **B.** 13. **C.** 14. **D.** 15.

Câu 58. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=ax^2+\frac{b}{x^3}$, $f'(1)=3$, $f(1)=2$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{12}$. Khi đó $2a+b$ bằng

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** 5. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 59. **(Mã 102 2019)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{3x-1}{(x-1)^2}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ là

A. $3\ln(x-1)-\frac{1}{x-1}+c$. **B.** $3\ln(x-1)+\frac{2}{x-1}+c$.

C. $3\ln(x-1)-\frac{2}{x-1}+c$. **D.** $3\ln(x-1)+\frac{1}{x-1}+c$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 60. **(Mã 103 - 2019)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2x+1}{(x+2)^2}$ trên khoảng $(-2;+\infty)$ là

A. $2\ln(x+2)+\frac{3}{x+2}+C$. **B.** $2\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}+C$.

C. $2\ln(x+2)-\frac{1}{x+2}+C$. **D.** $2\ln(x+2)-\frac{3}{x+2}+C$.

Câu 61. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $F(1)=\frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S=F(1)+F(2)+F(3)+\ldots+F(2019)$ bằng

A. $\frac{2019}{2020}$. **B.** $\frac{2019.2021}{2020}$. **C.** $2018\frac{1}{2020}$. **D.** $-\frac{2019}{2020}$.

Câu 62. Giả sử $\int \frac{(2x+3)\mathrm{dx}}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{g(x)}+C$ (C là hằng số).

Tính tổng các nghiệm của phương trình $g(x)=0$.

A. -1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -3.

Câu 63. **(Nam Trực - Nam Định - 2018)** Cho $I=\int \frac{1}{x^3(1+x^2)}dx = \frac{-a}{x^2}-b\ln|x|+2c\ln(1+x^2)+C$. Khi đó $S=a+b+c$ bằng

A. $\frac{-1}{4}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 2.

Câu 64. **(Trường VINSCHOOL - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $R\setminus\{-1;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2-1}$. Biết $f(3)+f(-3)=4$ và $f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{-1}{3}\right)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-5)+f(0)+f(2)$ bằng

A. $5-\frac{1}{2}\ln 2$. **B.** $6-\frac{1}{2}\ln 2$. **C.** $5+\frac{1}{2}\ln 2$. **D.** $6+\frac{1}{2}\ln 2$.

Câu 65. **(Quảng Xương - Thanh Hóa - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2+x-2}$, $f(-3)-f(3)=0$ và $f(0)=\frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$ bằng

A. $\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}$. **B.** $\ln 80+1$. **C.** $\frac{1}{3}\ln\frac{4}{5}+\ln 2+1$. **D.** $\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}+1$.

Câu 66. **(Chuyên Nguyễn Quang Diêu - Đồng Tháp - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x-1}$, $f(0)=2017$,, $f(2)=2018$. Tính $S=(f(3)-2018)(f(-1)-2017)$.

A. $S=1$. **B.** $S=1+\ln^2 2$. **C.** $S=2\ln 2$. **D.** $S=\ln^2 2$.

Câu 67. **(Sở Phú Thọ - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{x^2-1}$, $f(-2)+f(2)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Tính $f(-3)+f(0)+f(4)$ được kết quả

A. $\ln\frac{6}{5}+1$. **B.** $\ln\frac{6}{5}-1$. **C.** $\ln\frac{4}{5}+1$. **D.** $\ln\frac{4}{5}-1$.

Nguyễn Bảo Vương

Dạng 4. Nguyên hàm từng phần

Cho hai hàm số u và v liên tục trên $[a;b]$ và có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$. Khi đó:

$\int udv=uv-\int vdu\,(*)$

Để tính tích phân $I=\int_a^b f(x)dx$ bằng phương pháp từng phần ta làm như sau:

Bước 1: Chọn u,v sao cho $f(x)dx=udv$ (chú ý: $dv=v'(x)dx$).

Tính $v=\int dv$ và $du=u'.dx$.

Bước 2: Thay vào công thức $(*)$ và tính $\int vdu$.

Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int vdu$ dễ tính hơn $\int udv$. Ta thường gặp các dạng sau

Dạng 1 : $I=\int P(x)\begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức

Với dạng này, ta đặt $u=P(x)$, $dv=\begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}dx$.

Dạng 2 : $I=\int(x)e^{ax+b}dx$

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b}dx \end{cases}$, trong đó $P(x)$ là đa thức

Dạng 3 : $I = \int P(x)\ln(mx+n)dx$

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \ln(mx+n) \\ dv = P(x)dx \end{cases}$.

Dạng 4 : $I = \int \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} e^x dx$

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} \\ dv = e^x dx \end{cases}$ để tính $\int vdu$ ta đặt $\begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} \\ dv = e^x dx \end{cases}$.

Câu 68. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1).f'(x)$ là

A. $\dfrac{x^2+2x-2}{2\sqrt{x^2+2}} + C$. **B.** $\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2}} + C$. **C.** $\dfrac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+2}} + C$. **D.** $\dfrac{x+2}{2\sqrt{x^2+2}} + C$.

Câu 69. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1)f'(x)$ là

A. $\dfrac{x^2+2x-3}{2\sqrt{x^2+3}} + C$. **B.** $\dfrac{x+3}{2\sqrt{x^2+3}} + C$. **C.** $\dfrac{2x^2+x+3}{\sqrt{x^2+3}} + C$. **D.** $\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+3}} + C$.

Câu 70. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1)f'(x)$

A. $\dfrac{x^2+2x-1}{2\sqrt{x^2+1}} + C$. **B.** $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + C$. **C.** $\dfrac{2x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}} + C$. **D.** $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} + C$.

Câu 71. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1)f'(x)$ là

A. $\dfrac{x+4}{2\sqrt{x^2+4}} + C$. **B.** $\dfrac{x-4}{\sqrt{x^2+4}} + C$. **C.** $\dfrac{x^2+2x-4}{2\sqrt{x^2+4}} + C$. **D.** $\dfrac{2x^2+x+4}{\sqrt{x^2+4}} + C$.

Câu 72. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ là:

A. $-\sin 2x + \cos 2x + C$. **B.** $-2\sin 2x + \cos 2x + C$.

C. $-2\sin 2x - \cos 2x + C$. **D.** $2\sin 2x - \cos 2x + C$.

Câu 73. **(Đề Tham Khảo 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1+\ln x)$ là:

A. $2x^2\ln x + 3x^2$. **B.** $2x^2\ln x + x^2$.

C. $2x^2\ln x + 3x^2 + C$. **D.** $2x^2\ln x + x^2 + C$.

Câu 74. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\sin x$ là

A. $F(x)=x\cos x+\sin x+C.$ **B.** $F(x)=x\cos x-\sin x+C.$

C. $F(x)=-x\cos x-\sin x+C.$ **D.** $F(x)=-x\cos x+\sin x+C.$

Câu 75. **(Chuyên Phan Bội Châu 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x.e^{2x}$ là :

A. $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C$ **B.** $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}(x-2)+C$

C. $F(x)=2e^{2x}(x-2)+C$ **D.** $F(x)=2e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C$

Câu 76. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x-1)e^x$ là

A. $(2x-3)e^x+C$. **B.** $(2x+3)e^x+C$.

C. $(2x+1)e^x+C$. **D.** $(2x-1)e^x+C$.

Câu 77. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=xe^{2x}$?

A. $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C.$ **B.** $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}(x-2)+C.$

C. $F(x)=2e^{2x}(x-2)+C.$ **D.** $F(x)=2e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C.$

Câu 78. **(Chuyên Sơn La 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x(1+\sin x)$ là

A. $\frac{x^2}{2}-x\sin x+\cos x+C$. **B.** $\frac{x^2}{2}-x\cos x+\sin x+C$.

C. $\frac{x^2}{2}-x\cos x-\sin x+C$. **D.** $\frac{x^2}{2}-x\sin x-\cos x+C$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 79. **(Chuyên Thái Bình - Lần 3 - 2020)** Giả sử $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2e^x$.Tính tích $P=abc$.

A. -4. **B.** 1. **C.** -5. **D.** -3.

Câu 80. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x(1+e^x)$ là

A. $(2x-1)e^x+x^2$. **B.** $(2x+1)e^x+x^2$. **C.** $(2x+2)e^x+x^2$. **D.** $(2x-2)e^x+x^2$.

Câu 81. Họ nguyên hàm của $f(x)=x\ln x$ là kết quả nào sau đây?

A. $F(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{2}x^2+C$. **B.** $F(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x^2+C$.

C. $F(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$. **D.** $F(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x+C$.

Câu 82. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=(3x^2+1).\ln x$.

A. $\int f(x)dx=x(x^2+1)\ln x-\frac{x^3}{3}+C$. **B.** $\int f(x)dx=x^3\ln x-\frac{x^3}{3}+C$.

C. $\int f(x)dx=x(x^2+1)\ln x-\frac{x^3}{3}-x+C$. **D.** $\int f(x)dx=x^3\ln x-\frac{x^3}{3}-x+C$.

Câu 83. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$ là

A. $-x\cot x+\ln(\sin x)+C$. **B.** $x\cot x-\ln|\sin x|+C$.

C. $x\cot x+\ln\left|\sin x\right|+C$. **D.** $-x\cot x-\ln\left(\sin x\right)+C$.

Câu 84. **(Sở Phú Thọ 2019) Họ nguyên hàm của hàm số** $y=3x\left(x+\cos x\right)$ **là**

A. $x^3+3\left(x\sin x+\cos x\right)+C$ **B.** $x^3-3\left(x\sin x+\cos x\right)+C$

C. $x^3+3\left(x\sin x-\cos x\right)+C$ **D.** $x^3-3\left(x\sin x-\cos x\right)+C$

Câu 85. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=x^4+xe^x$ là

A. $\frac{1}{5}x^5+\left(x+1\right)e^x+C$. **B.** $\frac{1}{5}x^5+\left(x-1\right)e^x+C$.

C. $\frac{1}{5}x^5+xe^x+C$. **D.** $4x^3+\left(x+1\right)e^x+C$.

Câu 86. Cho hai hàm số $F\left(x\right),G\left(x\right)$ xác định và có đạo hàm lần lượt là $f\left(x\right),g\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $F\left(x\right).G\left(x\right)=x^2\ln\left(x^2+1\right)$ và $F\left(x\right).g\left(x\right)=\frac{2x^3}{x^2+1}$. Họ nguyên hàm của $f\left(x\right).G\left(x\right)$ là

A. $\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)+2x^2+C.$ **B.** $\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)-2x^2+C.$

C. $\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)-x^2+C.$ **D.** $\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)+x^2+C.$

Câu 87. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\int xe^x\mathrm{d}x=e^x+xe^x+C$. **B.** $\int xe^x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}e^x+e^x+C$.

C. $\int xe^x\mathrm{d}x=xe^x-e^x+C$. **D.** $\int xe^x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}e^x+C$.

Câu 88. **(Sở Bắc Giang 2019)** Cho hai hàm số $F\left(x\right)$, $G\left(x\right)$ xác đinh và có đạo hàm lần lượt là $f\left(x\right)$, $g\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$. Biết $F\left(x\right).\mathrm{G}\left(x\right)=x^2\ln\left(x^2+1\right)$ và $F\left(x\right)g\left(x\right)=\frac{2x^3}{x^2+1}$. Tìm họ nguyên hàm của $f\left(x\right)G\left(x\right)$.

A. $\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)+2x^2+C$. **B.** $\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)-2x^2+C$.

C. $\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)-x^2+C$. **D.** $\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)+x^2+C$.

Câu 89. Cho biết $F\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)=\frac{\left(x^2+a\right)^2}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của $g\left(x\right)=x\cos ax$.

A. $x\sin x-\cos x+C$ **B.** $\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$

C. $x\sin x+\cos+C$ **D.** $\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$

Câu 90. Họ nguyên hàm của hàm số $y=\frac{\left(2x^2+x\right)\ln x+1}{x}$ là

A. $\left(x^2+x+1\right)\ln x-\frac{x^2}{2}+x+C$. **B.** $\left(x^2+x-1\right)\ln x+\frac{x^2}{2}-x+C$.

C. $\left(x^2+x+1\right)\ln x-\frac{x^2}{2}-x+C$. **D.** $\left(x^2+x-1\right)\ln x-\frac{x^2}{2}+x+C$.

Câu 91. **(Mã 104 2017)** Cho $F(x)=\dfrac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

A. $\int f'(x)\ln x\mathrm{d}x=-\left(\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}\right)+C$ **B.** $\int f'(x)\ln x\mathrm{d}x=\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{2x^2}+C$

C. $\int f'(x)\ln x\mathrm{d}x=-\left(\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{2x^2}\right)+C$ **D.** $\int f'(x)\ln x\mathrm{d}x=\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}+C$

Câu 92. **(Mã 105 2017)** Cho $F(x)=-\dfrac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$

A. $\int f'(x)\ln x\mathrm{d}x=\dfrac{\ln x}{x^3}+\dfrac{1}{5x^5}+C$ **B.** $\int f'(x)\ln x\mathrm{d}x=\dfrac{\ln x}{x^3}-\dfrac{1}{5x^5}+C$

C. $\int f'(x)\ln x\mathrm{d}x=-\dfrac{\ln x}{x^3}+\dfrac{1}{3x^3}+C$ **D.** $\int f'(x)\ln x\mathrm{d}x=\dfrac{\ln x}{x^3}+\dfrac{1}{3x^3}+C$

Câu 93. **(Mã 110 2017)** Cho $F(x)=(x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

A. $\int f'(x)e^{2x}\mathrm{d}x=(4-2x)e^x+C$ **B.** $\int f'(x)e^{2x}\mathrm{d}x=(x-2)e^x+C$

C. $\int f'(x)e^{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{2-x}{2}e^x+C$ **D.** $\int f'(x)e^{2x}\mathrm{d}x=(2-x)e^x+C$

Câu 94. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=xe^x$ và $f(0)=2$ .Tính $f(1)$.

A. $f(1)=3$. **B.** $f(1)=e$. **C.** $f(1)=5-e$. **D.** $f(1)=8-2e$.

Câu 95. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=\mathrm{e}^{-x},\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)\mathrm{e}^{2x}$ là

A. $(x-2)\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x+C$ **B.** $(x+2)\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+C$ **C.** $(x-1)\mathrm{e}^x+C$ **D.** $(x+1)\mathrm{e}^x+C$

Câu 96. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x, f(0)=0$ và $\int f(x)\mathrm{d}x=(ax+b)\mathrm{e}^x+c$ với a,b,c là các hằng số. Khi đó:

A. $a+b=2$. **B.** $a+b=3$. **C.** $a+b=1$. **D.** $a+b=0$.

Câu 97. **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Tĩnh - 2018)** Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}$. Tính $F(x)$ biết $F(0)=1$.

A. $F(x)=-(x+1)\mathrm{e}^{-x}+2$. **B.** $F(x)=(x+1)\mathrm{e}^{-x}+1$.

C. $F(x)=(x+1)\mathrm{e}^{-x}+2$. **D.** $F(x)=-(x+1)\mathrm{e}^{-x}+1$.

Câu 98. **(Sở Quảng Nam - 2018)** Biết $\int x\cos 2x\mathrm{d}x=ax\sin 2x+b\cos 2x+C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab?

A. $ab=\dfrac{1}{8}$. **B.** $ab=\dfrac{1}{4}$. **C.** $ab=-\dfrac{1}{8}$. **D.** $ab=-\dfrac{1}{4}$.

Câu 99. **(Chuyên Đh Vinh - 2018)** Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{\ln(x+3)}{x^2}$ sao cho $F(-2)+F(1)=0$. Giá trị của $F(-1)+F(2)$ bằng

A. $\frac{10}{3}\ln 2-\frac{5}{6}\ln 5$. **B.** 0. **C.** $\frac{7}{3}\ln 2$. **D.** $\frac{2}{3}\ln 2+\frac{3}{6}\ln 5$.

Câu 100. (THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018) Gọi $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\ln(x-1)$. Cho biết $g(2)=1$ và $g(3)=a\ln b$ trong đó a,b là các số nguyên dương phân biệt. Hãy tính giá trị của $T=3a^2-b^2$

A. $T=8$. **B.** $T=-17$. **C.** $T=2$. **D.** $T=-13$.

Câu 101. (Sở Quảng Nam - 2018) Biết $\int x\cos 2x\mathrm{d}x=ax\sin 2x+b\cos 2x+C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab?

A. $ab=\frac{1}{8}$. **B.** $ab=\frac{1}{4}$. **C.** $ab=-\frac{1}{8}$. **D.** $ab=-\frac{1}{4}$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 25 NGUYÊN HÀM

TÀI LIỆU DÀNH CHO HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Dạng 1. Nguyên hàm của hàm ẩn hoặc liên quan đến phương trình f(x),f'(x),f''(x)

Dạng 1. Bài toán tích phân liên quan đến đẳng thức $u(x)f'(x)+u'(x)f(x)=h(x)$

Phương pháp:

Dễ dàng thấy rằng $u(x)f'(x)+u'(x)f(x)=[u(x)f(x)]'$

Do đó $u(x)f'(x)+u'(x)f(x)=h(x)\Leftrightarrow[u(x)f(x)]'=h(x)$

Suy ra $u(x)f(x)=\int h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 2. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x)+f(x)=h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với e^x ta duroc $e^x\cdot f'(x)+e^x\cdot f(x)=e^x\cdot h(x)\Leftrightarrow\left[e^x\cdot f(x)\right]'=e^x\cdot h(x)$

Suy ra $e^x\cdot f(x)=\int e^x\cdot h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 3. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thúc $f'(x)-f(x)=h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với e^{-x} ta duroc $e^{-x}\cdot f'(x)-e^{-x}\cdot f(x)=e^{-x}\cdot h(x)\Leftrightarrow\left[e^{-x}\cdot f(x)\right]'=e^{-x}\cdot h(x)$

Suy ra $e^{-x}\cdot f(x)=\int e^{-x}\cdot h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 4. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x)+p(x)\cdot f(x)=h(x)$

(Phương trình vi phân tuyên tinh cấp 1)

Phương pháp:

Nhân hai vế với $e^{\int p(x)dx}$ ta được

$$f'(x)\cdot e^{\int p(x)dx}+p(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\cdot f(x)=h(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\Leftrightarrow\left[f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\right]'=h(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$$

Suy ra $f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}=\int e^{\int p(x)dx}h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 5. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thúc $f'(x)+p(x)\cdot f(x)=0$

Phương pháp:

Chia hai vế với $f(x)$ ta được $\dfrac{f'(x)}{f(x)}+p(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-p(x)$

Suy ra $\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=-\int p(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\ln|f(x)|=-\int p(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 6. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x)+p(x)\cdot[f(x)]^n=0$

Phương pháp:

Chia hai vế với $[f(x)]^n$ ta được $\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^n}+p(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^n}=-p(x)$

Suy ra $\int\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^n}\mathrm{d}x=-\int p(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\dfrac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1}=-\int p(x)\mathrm{d}x$

Từ dầy ta dễ dàng tính được $f(x)$

Câu 1. **(Mã 103 2018)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{25}$ và $f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{391}{400}$ **B.** $-\frac{1}{40}$ **C.** $-\frac{41}{400}$ **D.** $-\frac{1}{10}$

Câu 2. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\left(f'(x)\right)^2=f(x).e^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Khi đó $f(2)$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(12;13)$. **B.** $(9;10)$. **C.** $(11;12)$. **D.** $(13;14)$.

Câu 3. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{4}{19}$ và $f'(x)=x^3f^2(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** -1. **D.** $-\frac{3}{4}$.

Câu 4. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn điều kiện: $f(1)=-2\ln 2$ và $x.(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$. Biết $f(2)=a+b.\ln 3$ (a, $b\in\mathbb{Q}$). Giá trị $2\left(a^2+b^2\right)$ là

A. $\frac{27}{4}$. **B.** 9. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Câu 5. **(Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(x)<0,\forall x>0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)=(2x+1)f^2(x),\forall x>0$ và $f(1)=-\frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(1)+f(2)+...+f(2020)$ bằng

A. $-\frac{2020}{2021}$. **B.** $-\frac{2015}{2019}$. **C.** $-\frac{2019}{2020}$. **D.** $-\frac{2016}{2021}$.

Câu 6. **(Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn $f(1)=2\ln 2+1$, $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$. Biết $f(2)=a+b\ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ. Tính $T=a^2-b$.

A. $T=\frac{-3}{16}$. **B.** $T=\frac{21}{16}$. **C.** $T=\frac{3}{2}$. **D.** $T=0$.

Câu 7. **(THPT Nguyễn Trãi - Đà Nẵng - 2018)** Cho hs $y=f(x)$ thỏa mãn $y'=xy^2$ và $f(-1)=1$ thì giá trị $f(2)$ là

A. e^2. **B.** $2e$. **C.** $e+1$. **D.** e^3.

Câu 8. **(Sở Hà Nội Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(x)\neq 0$ với mọi x và thỏa mãn $f(1)=-\frac{1}{2}$, $f'(x)=(2x+1)f^2(x)$ .Biết $f(1)+f(2)+...+f(2019)=\frac{a}{b}-1$ với $a,b\in\mathbb{N},(a,b)=1$ .Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $a-b=2019$. **B.** $ab>2019$. **C.** $2a+b=2022$. **D.** $b\leq 2020$.

Câu 9. **(THPT Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=3x^2\sqrt{x}$. Biết $f(1)=\frac{1}{2}$. Tính $f(4)$?

A. 24. **B.** 14. **C.** 4. **D.** 16.

Câu 10. **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Cho hàm số $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$ và $f(x)=\sqrt{x+1}.f'(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x)<2$ **B.** $2<f(x)<4$ **C.** $f(x)>6$ **D.** $4<f(x)<6$

Câu 11. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2;4]$ và $f'(x)>0,\forall x\in[2;4]$. Biết $4x^3f(x)=\left[f'(x)\right]^3-x^3,\forall x\in[2;4],f(2)=\frac{7}{4}$. Giá trị của $f(4)$ bằng

A. $\frac{40\sqrt{5}-1}{2}$. **B.** $\frac{20\sqrt{5}-1}{4}$. **C.** $\frac{20\sqrt{5}-1}{2}$. **D.** $\frac{40\sqrt{5}-1}{4}$.

Câu 12. **(Chuyên Thái Bình 2019)** Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1$. Tính $f(1)$.

A. $\frac{2}{e}$. **B.** $\frac{1}{e}$. **C.** e. **D.** $\frac{e}{2}$.

Câu 13. **(THPT NGHĨA HƯNG NĐ- GK2 - 2018 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[xf'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right]$ với mọi x dương. Biết $f(1)=f'(1)=1$. Giá trị $f^2(2)$ bằng

A. $f^2(2)=\sqrt{2\ln 2+2}$. **B.** $f^2(2)=2\ln 2+2$.

C. $f^2(2)=\ln 2+1$. **D.** $f^2(2)=\sqrt{\ln 2+1}$.

Câu 14. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2+f(x).f''(x)=x^3-2x,\quad\forall x\in R$ và $f(0)=f'(0)=1$. Tính giá trị của $T=f^2(2)$

A. $\frac{43}{30}$ **B.** $\frac{16}{15}$ **C.** $\frac{43}{15}$ **D.** $\frac{26}{15}$

Câu 15. **(Sở Bình Phước 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn $f(x)+\tan x.f'(x)=\frac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=a\pi\sqrt{3}+b\ln 3$ trong đó $a,b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của biểu thức $P=a+b$ bằng

A. $\frac{14}{9}$ **B.** $-\frac{2}{9}$ **C.** $\frac{7}{9}$ **D.** $-\frac{4}{9}$

Câu 16. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$; $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(3)=\frac{4}{9}$ và $\left[f'(x)\right]^2=(x+1).f(x)$. Tính $f(8)$.

A. $f(8)=49$. **B.** $f(8)=256$. **C.** $f(8)=\frac{1}{16}$. **D.** $f(8)=\frac{49}{64}$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=2$ và $(x^2+1)^2 f'(x)=[f(x)]^2(x^2-1)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. $\frac{2}{5}$ **B.** $-\frac{2}{5}$ **C.** $-\frac{5}{2}$ **D.** $\frac{5}{2}$

Câu 18. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$, biết $f'(x)+(2x+1)f^2(x)=0$, $f(x)>0,\ \forall x>0$ và $f(2)=\frac{1}{6}$. Tính giá trị của $P=f(1)+f(2)+...+f(2019)$.

A. $\frac{2021}{2020}$. **B.** $\frac{2020}{2019}$. **C.** $\frac{2019}{2020}$. **D.** $\frac{2018}{2019}$.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2;1]$ thỏa mãn $f(0)=3$ và $(f(x))^2.f'(x)=3x^2+4x+2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ là

A. $2\sqrt[3]{42}$. **B.** $2\sqrt[3]{15}$. **C.** $\sqrt[3]{42}$. **D.** $\sqrt[3]{15}$.

Câu 20. **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$ với mọi $x>0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. 5. **B.** 10. **C.** 20. **D.** 15.

Câu 21. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R thỏa mãn các điều kiện: $f(0)=2\sqrt{2}$, $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(x).f'(x)=(2x+1)\sqrt{1+f^2(x)},\ \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó giá trị $f(1)$ bằng

A. $\sqrt{26}$. **B.** $\sqrt{24}$. **C.** $\sqrt{15}$. **D.** $\sqrt{23}$.

Câu 22. **(Cần Thơ 2018)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2+f(x).f''(x)=2x^2-x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=3$. Giá trị của $[f(1)]^2$ bằng

A. 28. **B.** 22. **C.** $\frac{19}{2}$. **D.** 10.

Câu 23. **(Chuyên Lê Hồng Phong - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(x+2)f(x)+(x+1)f'(x)=e^x$ và $f(0)=\frac{1}{2}$. Tính $f(2)$.

A. $f(2)=\frac{e}{3}$. **B.** $f(2)=\frac{e}{6}$. **C.** $f(2)=\frac{e^2}{3}$. **D.** $f(2)=\frac{e^2}{6}$.

Câu 24. **(Liên Trường - Nghệ An - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=-2\ln 2$ và $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$. Giá trị $f(2)=a+b\ln 3$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính a^2+b^2.

A. $\frac{25}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

Câu 25. **(THPT Lê Xoay - 2018)** Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $f(x)=f'(x).\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2<f(5)<3$. **B.** $1<f(5)<2$. **C.** $4<f(5)<5$. **D.** $3<f(5)<4$.

Câu 26. **(THPT Quỳnh Lưu - Nghệ An - 2018)** Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3)f^2(x)$ và $f(0)=-\frac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)+f(2018)=\frac{a}{b}$ với $\left(a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}^*\right)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\frac{a}{b}<-1$. **B.** $\frac{a}{b}>1$. **C.** $a+b=1010$. **D.** $b-a=3029$.

Câu 27. **(THPT Nam Trực - Nam Định - 2018)** Cho hàm số $f(x)\neq 0$, $f'(x)=\frac{3x^4+x^2-1}{x^2}f^2(x)$ và $f(1)=-\frac{1}{3}$. Tính $f(1)+f(2)+...+f(80)$.

A. $-\frac{3240}{6481}$. **B.** $\frac{6480}{6481}$. **C.** $-\frac{6480}{6481}$. **D.** $\frac{3240}{6481}$.

Câu 28. **(Sở Hà Tĩnh - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ đồng biến có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $\left[f(x)\right]^2-f(x).f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=0$. Biết $f(0)=1, f(2)=e^6$. Khi đó $f(1)$ bằng

A. $e^{\frac{3}{2}}$. **B.** e^3. **C.** $e^{\frac{5}{2}}$. **D.** e^2.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)+2x.f(x)=e^{-x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Tính $f(1)$.

A. $f(1)=e^2$. **B.** $f(1)=-\frac{1}{e}$. **C.** $f(1)=\frac{1}{e^2}$. **D.** $f(1)=\frac{1}{e}$.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x).f(x)=x^4+x^2$. Biết $f(0)=2$. Tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2)=\frac{313}{15}$. **B.** $f^2(2)=\frac{332}{15}$. **C.** $f^2(2)=\frac{324}{15}$. **D.** $f^2(2)=\frac{323}{15}$.

Câu 31. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=e^{-x}, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ là

A. $(x-2)e^x+e^x+C$. **B.** $(x+2)e^{2x}+e^x+C$.

C. $(x-1)e^x+C$. **D.** $(x+1)e^x+C$.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=2x$ $\forall x\in(0;+\infty)$, $f(1)=1$. Giá trị của biểu thức $f(4)$ là:

A. $\frac{25}{6}$. **B.** $\frac{25}{3}$. **C.** $\frac{17}{6}$. **D.** $\frac{17}{3}$.

Câu 33. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $x^6\left[f'(x)\right]^3+27\left[f(x)-1\right]^4=0, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 7. **D.** -7.

Câu 34. **(Bến Tre 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $\left(f'(x)\right)^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 4.

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(1;+\infty)$ và thỏa mãn $(xf'(x)-2f(x)).\ln x=x^3-f(x)$, $\forall x\in(1;+\infty)$; biết $f(\sqrt[3]{e})=3e$. Giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(12;\frac{25}{2}\right)$. **B.** $\left(13;\frac{27}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{23}{2};12\right)$. **D.** $\left(14;\frac{29}{2}\right)$.

Câu 36. **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x).e^{f^3(x)-x^2-1}-\frac{2x}{f^2(x)}=0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$, tính tích phân $\int_0^{\sqrt{7}}x.f(x)\,dx$.

A. $\frac{11}{2}$. **B.** $\frac{15}{4}$. **C.** $\frac{45}{8}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Câu 37. **(SP Đồng Nai - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và không âm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x).f'(x)=2x\sqrt{f^2(x)+1}$ và $f(0)=0$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;3]$. Biết rằng giá trị của biểu thức $P=2M-m$ có dạng $a\sqrt{11}-b\sqrt{3}+c,(a,b,c\in\mathbb{Z})$. Tính $a+b+c$

A. $a+b+c=7$. **B.** $a+b+c=4$. **C.** $a+b+c=6$. **D.** $a+b+c=5$.

Câu 38. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn $f(1)=2\ln 2+1$, $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$. Biết $f(2)=a+b\ln 3$, với a,b là hai số hữu tỉ. Tính $T=a^2-b$.

A. $T=\frac{21}{16}$. **B.** $T=\frac{3}{2}$. **C.** $T=0$. **D.** $T=-\frac{3}{16}$.

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $3x.f(x)-x^2.f'(x)=2f^2(x)$, với $f(x)\neq 0,\forall x\in(0;+\infty)$ và $f(1)=\frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;2]$. Tính $M+m$.

A. $\frac{9}{10}$. **B.** $\frac{21}{10}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Dạng 2. Một số bài toán khác liên quan đến nguyên hàm

Câu 1. **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{x^2}(x^3-4x)$. Hàm số $F(x^2+x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 2. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho $F(x)=\int\frac{(1+\cos^2 x)(\sin x+\cot x)}{\sin^4 x}dx$ và S là tổng tất cả các nghiệm của phương trình $F(x)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ trên khoảng $(0;4\pi)$. Tổng S thuộc khoảng

A. $(6\pi;9\pi)$. **B.** $(2\pi;4\pi)$. **C.** $(4\pi;6\pi)$. **D.** $(0;2\pi)$.

Câu 3. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0;\pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$ **B.** $F\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ **D.** $F\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=3-\sqrt{3}$

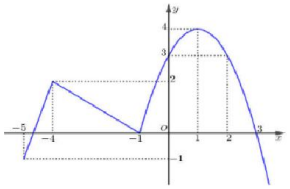
Câu 4. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0;4\pi)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 5. **(Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019)** Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x-\cos x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** vô số điểm. **D.** 0.

Câu 6. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $[-5;3]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y=ax^2+bx+c$).



Biết $f(0)=0$, giá trị của $2f(-5)+3f(2)$ bằng

A. 33. **B.** $\dfrac{109}{3}$. **C.** $\dfrac{35}{3}$. **D.** 11.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)+\dfrac{f(x)}{x}=4x^2+3x$ và $f(1)=2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A. $y=-16x-20$. **B.** $y=16x-20$. **C.** $y=16x+20$. **D.** $y=-16x+20$.

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH

Dạng. Nguyên hàm cơ bản

Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp (với C là hằng số tùy ý)

① $\int 0\mathrm{d}x = C.$	$\longrightarrow \int k\mathrm{d}x = kx + C.$
② $\int x^n\mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C.$	$\longrightarrow \int (ax+b)^n\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\dfrac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C.$
③ $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C.$	$\longrightarrow \int \dfrac{1}{ax+b}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C.$
④ $\int \dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{x} + C.$	$\longrightarrow \int \dfrac{1}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{ax+b} + C.$
⑤ $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C.$	$\longrightarrow \int \sin(ax+b)\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + C.$
⑥ $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C.$	$\longrightarrow \int \cos(ax+b)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + C.$
⑦ $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C.$	$\longrightarrow \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2(ax+b)} = -\dfrac{1}{a}\cot(ax+b) + C.$
⑧ $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C.$	$\longrightarrow \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2(ax+b)} = \dfrac{1}{a}\tan(ax+b) + C.$
⑨ $\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C.$	$\longrightarrow \int e^{ax+b}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}e^{ax+b} + C.$
⑩ $\int a^x\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$	$\longrightarrow \int a^{\alpha x+\beta}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C.$

♦ ***Nhận xét***. *Khi thay* x *bằng* $(ax+b)$ *thì khi lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm* $\dfrac{1}{a}$.

Một số nguyên tắc tính cơ bản

- *Tích của đa thức hoặc lũy thừa* $\xrightarrow{PP}$ *khai triển.*
- *Tích các hàm mũ* $\xrightarrow{PP}$ *khai triển theo công thức mũ.*
- *Bậc chẵn của sin và cosin* $\Rightarrow$ *Hạ bậc:* $\sin^2 a = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2a,\ \cos^2 a = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2a.$
- *Chứa tích các căn thức của* x $\xrightarrow{PP}$ *chuyển về lũy thừa.*

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

A. $F'(x) = -f(x), \forall x \in K.$ **B.** $f'(x) = F(x), \forall x \in K.$

C. $F'(x) = f(x), \forall x \in K.$ **D.** $f'(x) = -F(x), \forall x \in K.$

Lời giải

Chọn C

Theo định nghĩa thì hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in K.$

Câu 2. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** $\int x^2 dx$ bằng

A. $2x+C$. **B.** $\frac{1}{3}x^3+C$. **C.** x^3+C. **D.** $3x^3+C$

Lời giải

Chọn B.

Câu 3. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3$ là

A. $4x^4+C$. **B.** $3x^2+C$. **C.** x^4+C. **D.** $\frac{1}{4}x^4+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int x^3 \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}+C$.

Câu 4. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** $\int x^4 \mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{5}x^5+C$ **B.** $4x^3+C$ **C.** x^5+C **D.** $5x^5+C$

Lời giải

Chọn A

$\int x^4 \mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5+C$.

Câu 5. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** $\int x^5 dx$ bằng

A. $5x^4+C$. **B.** $\frac{1}{6}x^6+C$. **C.** x^6+C. **D.** $6x^6+C$.

Lời giải

Chọn B

Câu 6. **(Mã 101- 2020 Lần 2)** $\int 5x^4 dx$ bằng

A. $\frac{1}{5}x^5+C$. **B.** x^5+C. **C.** $5x^5+C$. **D.** $20x^3+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int 5x^4 dx = x^5+C$.

Câu 7. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** $\int 6x^5 dx$ bằng

A. $6x^6+C$. **B.** x^6+C. **C.** $\frac{1}{6}x^6+C$. **D.** $30x^4+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int 6x^5 dx = x^6+C$.

Câu 8. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** $\int 3x^2 \mathrm{d}x$ bằng

A. $3x^3+C$. **B.** $6x+C$. **C.** $\frac{1}{3}x^3+C$. **D.** x^3+C.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int 3x^2 \mathrm{d}x = 3.\frac{x^3}{3} + C = x^3 + C$

Câu 9. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** $\int 4x^3 \mathrm{d}x$ bằng

A. $4x^4 + C$. **B.** $\frac{1}{4}x^4 + C$. **C.** $12x^2 + C$. **D.** $x^4 + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int 4x^3 \mathrm{d}x = x^4 + C$.

Câu 10. **(Mã 103 2018)** Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

A. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$ **B.** $x^4 + x^2 + C$ **C.** $x^5 + x^3 + C$. **D.** $4x^3 + 2x + C$

Lời giải

Chọn A

$\int f(x)\,dx = \int (x^4 + x^2)\,dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$.

Câu 11. **(Mã 104 - 2019)** Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 4$ là

A. $x^2 + C$. **B.** $2x^2 + C$. **C.** $2x^2 + 4x + C$. **D.** $x^2 + 4x + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f(x)\,dx = \int (2x+4)\,dx = x^2 + 4x + C$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 12. **(Mã 102 - 2019)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 6$ là

A. $x^2 + C$. **B.** $x^2 + 6x + C$. **C.** $2x^2 + C$. **D.** $2x^2 + 6x + C$.

Lời giải

Chọn B

$\int (2x+6)\,dx = x^2 + 6x + C$

Câu 13. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là

A. $\sin x + 3x^2 + C$. **B.** $-\sin x + 3x^2 + C$. **C.** $\sin x + 6x^2 + C$. **D.** $-\sin x + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (\cos x + 6x)\mathrm{d}x = \sin x + 3x^2 + C$.

Câu 14. **(Mã 105 2017)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sin x$.

A. $\int 2\sin x dx = -2\cos x + C$ **B.** $\int 2\sin x dx = 2\cos x + C$

C. $\int 2\sin x dx = \sin^2 x + C$ **D.** $\int 2\sin x dx = \sin 2x + C$

Lời giải

Chọn A

Câu 15. **(Mã 101 2018)** Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

A. $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$ **B.** $3x^2+1+C$ **C.** x^3+x+C **D.** x^4+x^2+C

Lời giải

Chọn A

$\int\left(x^3+x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$.

Câu 16. **(Mã 103 - 2019)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+3$ là

A. x^2+3x+C. **B.** $2x^2+3x+C$. **C.** x^2+C. **D.** $2x^2+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int(2x+3)\mathrm{d}x=x^2+3x+C$.

Câu 17. **(Đề Minh Họa 2017)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{2x-1}$.

A. $\int f(x)dx=\frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$. **B.** $\int f(x)dx=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$.

C. $\int f(x)dx=-\frac{1}{3}\sqrt{2x-1}+C$. **D.** $\int f(x)dx=\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}+C$.

Lời giải

Chọn B

$$\int f(x)dx=\int\sqrt{2x-1}dx=\frac{1}{2}\int(2x-1)^{\frac{1}{2}}d(2x-1)$$
$$=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 18. **(Đề Tham Khảo 2017)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2+\frac{2}{x^2}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{x}+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\left(x^2+\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$.

Câu 19. **(Mã 110 2017)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{5x-2}$.

A. $\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=\frac{1}{5}\ln|5x-2|+C$ **B.** $\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=\ln|5x-2|+C$

C. $\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=-\frac{1}{2}\ln|5x-2|+C$ **D.** $\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=5\ln|5x-2|+C$

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\int\frac{\mathrm{d}x}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C\ (a\neq 0)$ ta được $\int\frac{\mathrm{d}x}{5x-2}=\frac{1}{5}\ln|5x-2|+C$.

Câu 20. **(Mã123 2017)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos 3x$

A. $\int \cos 3x dx = 3\sin 3x + C$ **B.** $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$

C. $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$ **D.** $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$

Câu 21. **(Mã 104 2018)** Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+x^2$ là

A. $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+C$ **B.** $3x^2+2x+C$ **C.** x^3+x^2+C **D.** x^4+x^3+C

Lời giải

Chọn A

Câu 22. **(Đề Tham Khảo 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x+x$ là

A. e^x+1+C **B.** e^x+x^2+C **C.** $e^x+\frac{1}{2}x^2+C$ **D.** $\frac{1}{x+1}e^x+\frac{1}{2}x^2+C$

Lời giải

Chọn C

Câu 23. **(Mã 101 - 2019)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+5$ là

A. x^2+C. **B.** x^2+5x+C. **C.** $2x^2+5x+C$. **D.** $2x^2+C$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn B

Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+5$ là $F(x)=x^2+5x+C$.

Câu 24. **(Mã 104 2017)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=7^x$.

A. $\int 7^x \mathrm{d}x = \frac{7^x}{\ln 7}+C$ **B.** $\int 7^x \mathrm{d}x = 7^{x+1}+C$

C. $\int 7^x \mathrm{d}x = \frac{7^{x+1}}{x+1}+C$ **D.** $\int 7^x \mathrm{d}x = 7^x \ln 7 + C$

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}+C$,$(0<a\neq 1)$ ta được đáp án B

Câu 25. **(Mã 102 2018)** Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^4+x$ là

A. $4x^3+1+C$ **B.** x^5+x^2+C **C.** $\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^2+C$ **D.** x^4+x+C

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int (x^4+x)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^2+C$.

Câu 26. **(Đề Tham Khảo 2018)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+1$ là

A. x^3+C **B.** $\frac{x^3}{3}+x+C$ **C.** $6x+C$ **D.** x^3+x+C

Lời giải

Chọn D

$\int\left(3x^2+1\right)dx=x^3+x+C.$

Câu 27. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Tìm nguyên hàm $\int x\left(x^2+7\right)^{15}\,\mathrm{dx}$?

A. $\frac{1}{2}\left(x^2+7\right)^{16}+C$ **B.** $-\frac{1}{32}\left(x^2+7\right)^{16}+C$ **C.** $\frac{1}{16}\left(x^2+7\right)^{16}+C$ **D.** $\frac{1}{32}\left(x^2+7\right)^{16}+C$

Lời giải

Chọn D

$\int x\left(x^2+7\right)^{15}\,\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\int\left(x^2+7\right)^{15}d\left(x^2+7\right)=\frac{1}{32}\left(x^2+7\right)^{16}+C$

Câu 28. **(THPT Ba Đình -2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(\mathrm{x})=e^{3x}$ là hàm số nào sau đây?

A. $3e^x+C$. **B.** $\frac{1}{3}e^{3x}+C$. **C.** $\frac{1}{3}e^x+C$. **D.** $3e^{3x}+C$.

Lời giải

Ta có: $\int e^{3x}\mathrm{dx}=\frac{1}{3}e^{3x}+C,$ với C là hằng số bất kì.

Câu 29. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Tính $\int\left(x-\sin 2x\right)\mathrm{dx}$.

A. $\frac{x^2}{2}+\sin x+C$. **B.** $\frac{x^2}{2}+\cos 2x+C$. **C.** $x^2+\frac{\cos 2x}{2}+C$. **D.** $\frac{x^2}{2}+\frac{\cos 2x}{2}+C$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Ta có $\int\left(x-\sin 2x\right)\mathrm{dx}=\int x\mathrm{dx}-\int\sin 2x\mathrm{dx}=\frac{x^2}{2}+\frac{\cos 2x}{2}+C$.

Câu 30. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Nguyên hàm của hàm số $y=\mathrm{e}^{2x-1}$ là

A. $2\mathrm{e}^{2x-1}+C$. **B.** $\mathrm{e}^{2x-1}+C$. **C.** $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x-1}+C$. **D.** $\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+C$.

Lời giải

Ta có: $\int\mathrm{e}^{2x-1}\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^{2x-1}\mathrm{d}\left(2x-1\right)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x-1}+C$.

Câu 31. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{2x+3}$

A. $\ln\left|2x+3\right|+C$. **B.** $\frac{1}{2}\ln\left|2x+3\right|+C$. **C.** $\frac{1}{\ln 2}\ln\left|2x+3\right|+C$. **D.** $\frac{1}{2}\lg\left(2x+3\right)+C$.

Câu 32. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y=x^2-3^x+\frac{1}{x}$.

A. $\frac{x^3}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{1}{x^2}+C,\ C\in\mathbb{R}$. **B.** $\frac{x^3}{3}-3^x+\frac{1}{x^2}+C,\ C\in\mathbb{R}$.

C. $\frac{x^3}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}+\ln\left|x\right|+C,\ C\in\mathbb{R}$. **D.** $\frac{x^3}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}-\ln\left|x\right|+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có: $\int\left(x^2-3^x+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}+\ln|x|+C, C\in\mathbb{R}$.

Câu 33. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 3x$

A. $-3\cos 3x+C$. **B.** $3\cos 3x+C$. **C.** $\frac{1}{3}\cos 3x+C$. **D.** $-\frac{1}{3}\cos 3x+C$.

Lời giải

$\int \sin 3x\,dx=-\frac{\cos 3x}{3}+C$

Câu 34. **(Chuyên KHTN 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+\sin x$ là

A. $x^3+\cos x+C$. **B.** $6x+\cos x+C$. **C.** $x^3-\cos x+C$. **D.** $6x-\cos x+C$.

Lời giải

Ta có $\int\left(3x^2+\sin x\right)dx=x^3-\cos x+C$.

Câu 35. **(Chuyên Bắc Ninh -2019)** Công thức nào sau đây là **sai**?

A. $\int \ln x\,dx=\frac{1}{x}+C$. **B.** $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C$.

C. $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$. **D.** $\int e^x\,dx=e^x+C$.

Lời giải

Ta có: $\int \ln x\,dx=\frac{1}{x}+C$ sai.

Câu 36. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Nếu $\int f(x)dx=4x^3+x^2+C$ thì hàm số $f(x)$ bằng

A. $f(x)=x^4+\frac{x^3}{3}+Cx$. **B.** $f(x)=12x^2+2x+C$.

C. $f(x)=12x^2+2x$. **D.** $f(x)=x^4+\frac{x^3}{3}$.

Lời giải

Có $f(x)=\left(4x^3+x^2+C\right)'=12x^2+2x$.

Câu 37. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int\cos 2x dx=\frac{1}{2}\sin 2x+C$. **B.** $\int x^e dx=\frac{x^{e+1}}{e+1}+C$.

C. $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$. **D.** $\int e^x dx=\frac{e^{x+1}}{x+1}+C$.

Lời giải

Ta có: $\int e^x dx=\frac{e^{x+1}}{x+1}+C$ sai vì $\int e^x dx=e^x+C$.

Câu 38. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Nguyên hàm của hàm số $y=2^x$ là

A. $\int 2^x dx=\ln 2.2^x+C$. **B.** $\int 2^x dx=2^x+C$. **C.** $\int 2^x dx=\frac{2^x}{\ln 2}+C$. **D.** $\int 2^x dx=\frac{2^x}{x+1}+C$.

Lời giải

Do theo bảng nguyên hàm: $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

Câu 39. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x - \sin x$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = 3x^2 + \cos x + C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{3x^2}{2} - \cos x + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{3x^2}{2} + \cos x + C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = 3 + \cos x + C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (3x - \sin x)\mathrm{d}x = \frac{3x^2}{2} + \cos x + C$.

Câu 40. **(Sở Bình Phước 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \sin x$ là

A. $x^2 + \cos x + C$ **B.** $x^2 - \cos x + C$ **C.** $\frac{x^2}{2} - \cos x + C$ **D.** $\frac{x^2}{2} + \cos x + C$

Lời giải

Chọn C

Theo bảng nguyên hàm cơ bản

Câu 41. **(THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ là:

A. $\cos x + C$. **B.** $-\cos x + C$. **C.** $-\sin x + C$. **D.** $\sin x + C$.

Lời giải

Ta có $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$.

Câu 42. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương - 2019)** Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

A. $4x^3 + 2x + C$. **B.** $x^4 + x^2 + C$. **C.** $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$. **D.** $x^5 + x^3 + C$.

Lời giải.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (x^4 + x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$.

Câu 43. **(THPT Cù Huy Cận 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - 2x$ là.

A. $e^x + x^2 + C$. **B.** $e^x - x^2 + C$. **C.** $\frac{1}{x+1}e^x - x^2 + C$. **D.** $e^x - 2 + C$.

Lời giải

Ta có: $\int (e^x - 2x)dx = e^x - x^2 + C$

Câu 44. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Họ các nguyên hàm của hàm số $y = \cos x + x$ là

A. $\sin x + \frac{1}{2}x^2 + C$. **B.** $\sin x + x^2 + C$. **C.** $-\sin x + \frac{1}{2}x^2 + C$. **D.** $-\sin x + x^2 + C$.

Lời giải

$\int (\cos x + x)\mathrm{d}x = \sin x + \frac{1}{2}x^2 + C$.

Câu 45. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là

A. $\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}-\ln|x|+C$. **B.** $\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+\ln x+C$.

C. $\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+\ln|x|+C$. **D.** $\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+\frac{1}{x^2}+C$.

Lời giải

Ta có:

$\int(x^2-3x+\frac{1}{x})dx=\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+\ln|x|+C$.

Câu 46. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x}+\sin x$ là

A. $\ln x-\cos x+C$. **B.** $-\frac{1}{x^2}-\cos x+C$. **C.** $\ln|x|+\cos x+C$. **D.** $\ln|x|-\cos x+C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)dx=\int\left(\frac{1}{x}+\sin x\right)dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\sin xdx=\ln|x|-\cos x+C$.

Câu 47. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Hàm số $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây trên $(-\infty;+\infty)$?

A. $f(x)=3x^2$. **B.** $f(x)=x^3$. **C.** $f(x)=x^2$. **D.** $f(x)=\frac{1}{4}x^4$.

Lời giải

Gọi $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Suy ra $F'(x)=f(x)\Rightarrow f(x)=x^2$.

Câu 48. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x$.

A. $\int f(x)dx=2^x+C$. **B.** $\int f(x)dx=\frac{2^x}{\ln 2}+C$.

C. $\int f(x)dx=2^x\ln 2+C$. **D.** $\int f(x)dx=\frac{2^{x+1}}{x+1}+C$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)dx=\int 2^x dx=\frac{2^x}{\ln 2}+C$.

Câu 49. **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x^4+2}{x^2}$.

A. $\int f(x)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+C$. **B.** $\int f(x)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{x}+C$.

C. $\int f(x)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}+C$. **D.** $\int f(x)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)dx=\int\frac{x^4+2}{x^2}dx=\int\left(x^2+\frac{2}{x^2}\right)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$.

Câu 50. **(Sở Hà Nội 2019)** Hàm số nào trong các hàm số sau đây là một nguyên hàm của hàm số $y=e^x$?

A. $y=\frac{1}{x}$. **B.** $y=e^x$. **C.** $y=e^{-x}$. **D.** $y=\ln x$.

Lời giải

Ta có: $\left(e^x\right)'=e^x \Rightarrow y=e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $y=e^x$.

Câu 51. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Tính $F(x)=\int e^2 dx$, trong đó e là hằng số và $e\approx 2,718$.

A. $F(x)=\frac{e^2x^2}{2}+C$. **B.** $F(x)=\frac{e^3}{3}+C$. **C.** $F(x)=e^2x+C$. **D.** $F(x)=2ex+C$.

Lời giải

Ta có: $F(x)=\int e^2 dx=e^2x+C$.

Câu 52. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{1-2x}$ trên $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$.

A. $\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$. **B.** $\frac{1}{2}\ln(1-2x)+C$. **C.** $-\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$. **D.** $\ln|2x-1|+C$.

Lời giải

Trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$, ta có: $\int f(x)dx=\int\frac{1}{1-2x}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-2x}d(1-2x)=-\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$.

Câu 53. **(Chuyên Hưng Yên 2019)** Nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x+x$ là

A. $\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{x^2}{2}+C$. **B.** 2^x+x^2+C. **C.** $\frac{2^x}{\ln 2}+x^2+C$. **D.** $2^x+\frac{x^2}{2}+C$.

Lời giải

Ta có $\int\left(2^x+x\right)dx=\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{1}{2}x^2+C$.

Câu 54. **(Chuyên Sơn La 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=1+\sin x$

A. $1+\cos x+C$. **B.** $1-\cos x+C$. **C.** $x+\cos x+C$. **D.** $x-\cos x+C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)dx=\int(1+\sin x)dx=x-\cos x+C$.

Câu 55. **(THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019)** Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+x-2019$ là

A. $\frac{1}{12}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}+C$. **B.** $\frac{1}{9}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}-2019x+C$.

C. $\frac{1}{12}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}-2019x+C$. **D.** $\frac{1}{9}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}-2019x+C$.

Lời giải

Sử dụng công thức $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ta được:

$$\int\left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2019\right)dx = \frac{1}{3}.\frac{x^4}{4} - 2.\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2019x + C = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2019x + C.$$

Câu 56. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3x-1}$ trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ là:

A. $\frac{1}{3}\ln(3x-1) + C$ **B.** $\ln(1-3x) + C$ **C.** $\frac{1}{3}\ln(1-3x) + C$ **D.** $\ln(3x-1) + C$

Lời giải

Ta có: $\int \frac{1}{3x-1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-1)}{3x-1} = \frac{1}{3}\ln|3x-1| + C = \frac{1}{3}\ln(1-3x) + C$ (do $x \in \left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$)

Câu 57. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int 2^x dx = 2^x \ln 2 + C$. **B.** $\int e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$.

C. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$. **D.** $\int \frac{1}{x+1}dx = \ln|x+1| + C \ (\forall x \neq -1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 58. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^4+3}{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{2x} + C$. **B.** $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{x} + C$. **D.** $\int f(x)dx = 2x^3 - \frac{3}{x} + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f(x)dx = \int \frac{2x^4+3}{x^2}dx = \int\left(2x^2 + \frac{3}{x^2}\right)dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C$

Câu 59. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $f(x) = 2^x + x + 1$. Tìm $\int f(x)dx$.

A. $\int f(x)dx = 2^x + x^2 + x + C$. **B.** $\int f(x)dx = \frac{1}{\ln 2}2^x + \frac{1}{2}x^2 + x + C$.

C. $\int f(x)dx = 2^x + \frac{1}{2}x^2 + x + C$. **D.** $\int f(x)dx = \frac{1}{x+1}2^x + \frac{1}{2}x^2 + x + C$.

Lời giải

Ta có: $\int\left(2^x+x+1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln 2}2^x+\frac{1}{2}x^2+x+C.$

Câu 60. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=3x-\sin x$.

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=3x^2+\cos x+C$.

B. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{3x^2}{2}-\cos x+C$.

C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{3x^2}{2}+\cos x+C$.

D. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=3+\cos x+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(3x-\sin x\right)\mathrm{d}x=\frac{3x^2}{2}+\cos x+C$.

Câu 61. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Hàm số $F\left(x\right)=e^{x^2}$ là nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau:

A. $f(x)=2xe^{x^2}$.

B. $f(x)=x^2e^{x^2}-1$.

C. $f(x)=e^{2x}$.

D. $f(x)=\frac{e^{x^2}}{2x}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f\left(x\right)=F'\left(x\right)\Rightarrow f\left(x\right)=\left(e^{x^2}\right)'=2xe^{x^2}$.

Câu 62. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^{-x}$ là

A. $-\frac{3^{-x}}{\ln 3}+C$

B. $-3^{-x}+C$

C. $3^{-x}\ln 3+C$

D. $\frac{3^{-x}}{\ln 3}+C$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int 3^{-x}\mathrm{d}x=-\int 3^{-x}\mathrm{d}(-x)=-\frac{3^{-x}}{\ln 3}+C$.

Câu 63. **(Sở Phú Thọ 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=x^3+x^2$ là

A. $\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+C$.

B. x^4+x^3+C.

C. $3x^2+2x+C$.

D. $\frac{x^4}{3}+\frac{x^3}{4}+C$

Lời giải

Chọn A

$\int f\left(x\right)dx=\int\left(x^3+x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+C$.

Câu 64. **(Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019)** Hàm số nào trong các hàm số sau đây không là nguyên hàm của hàm số $y=x^{2019}$?

A. $\frac{x^{2020}}{2020}+1$.

B. $\frac{x^{2020}}{2020}$.

C. $y=2019x^{2018}$.

D. $\frac{x^{2020}}{2020}-1$.

Lời giải

Ta có: $\int x^{2019}\mathrm{d}x=\frac{x^{2020}}{2020}+C,\ C$ là hằng số. Nên các phương án **A, B, D** đều là nguyên hàm của hàm số $y=x^{2019}$.

Câu 65. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y=x^2-3^x+\frac{1}{x}$.

A. $\frac{x^3}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}-\ln|x|+C, C\in R$ **B.** $\frac{x^3}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}+\ln|x|+C, C\in R$

C. $\frac{x^3}{3}-3^x+\frac{1}{x^2}+C, C\in R$ **D.** $\frac{x^3}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{1}{x^2}+C, C\in R$

Lời giải

Ta có: $\int\left(x^2-3^x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{3^x}{\ln 3}+\ln|x|+C,\ C\in R$.

Câu 66. **(Quảng Ninh 2019)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x\left(2017-\frac{2018e^{-x}}{x^5}\right)$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=2017e^x-\frac{2018}{x^4}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2017e^x+\frac{2018}{x^4}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=2017e^x+\frac{504,5}{x^4}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=2017e^x-\frac{504,5}{x^4}+C$.

Lời giải

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int e^x\left(2017-\frac{2018e^{-x}}{x^5}\right)\mathrm{d}x=\int\left(2017e^x-\frac{2018}{x^5}\right)\mathrm{d}x=2017e^x+\frac{504,5}{x^4}+C$$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 67. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $y=e^x\left(2+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)$ là

A. $2e^x+\tan x+C$ **B.** $2e^x-\tan x+C$ **C.** $2e^x-\frac{1}{\cos x}+C$ **D.** $2e^x+\frac{1}{\cos x}+C$

Lời giải

Ta có: $y=e^x\left(2+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)=2e^x+\frac{1}{\cos^2 x}$

$\int y\mathrm{d}x=\int\left(2e^x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=2e^x+\tan x+C$.

Câu 68. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Tìm nguyên $F(x)$ của hàm số $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)$?

A. $F(x)=\frac{x^4}{4}-6x^3+\frac{11}{2}x^2-6x+C$. **B.** $F(x)=x^4+6x^3+11x^2+6x+C$.

C. $F(x)=\frac{x^4}{4}+2x^3+\frac{11}{2}x^2+6x+C$. **D.** $F(x)=x^3+6x^2+11x^2+6x+C$.

Lời giải

Ta có: $f(x)=x^3+6x^2+11x+6\Rightarrow F(x)=\int\left(x^3+6x^2+11x+6\right)\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}+2x^3+\frac{11}{2}x^2+6x+C$.

Câu 69. **(Sở Bắc Ninh 2019)** họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{5x+4}$ là:

A. $\frac{1}{5}\ln(5x+4)+C$. **B.** $\ln|5x+4|+C$. **C.** $\frac{1}{\ln 5}\ln|5x+4|+C$. **D.** $\frac{1}{5}\ln|5x+4|+C$.

Lời giải

Ta có $\int\frac{1}{5x+4}\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int\frac{1}{5x+4}\mathrm{d}(5x+4)=\frac{1}{5}\ln|5x+4|+C$.

Nguyễn Bảo Vương

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

Dạng 1. Nguyên hàm cơ bản có điều kiện

Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp (với C là hằng số tùy ý)

① $\int 0\mathrm{d}x = C.$	$\longrightarrow \int k\mathrm{d}x = kx + C.$
② $\int x^n\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$	$\longrightarrow \int (ax+b)^n\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C.$
③ $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C.$	$\longrightarrow \int \frac{1}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + C.$
④ $\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C.$	$\longrightarrow \int \frac{1}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{ax+b} + C.$
⑤ $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C.$	$\longrightarrow \int \sin(ax+b)\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C.$
⑥ $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C.$	$\longrightarrow \int \cos(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C.$
⑦ $\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C.$
⑧ $\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C.$
⑨ $\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C.$	$\longrightarrow \int e^{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C.$
⑩ $\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C.$	$\longrightarrow \int a^{\alpha x+\beta}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\frac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C.$

♦ ***Nhận xét***. *Khi thay* x *bằng* $(ax+b)$ *thì khi lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm* $\frac{1}{a}$.

Một số nguyên tắc tính cơ bản

- *Tích của đa thức hoặc lũy thừa* $\xrightarrow{PP}$ *khai triển.*
- *Tích các hàm mũ* $\xrightarrow{PP}$ *khai triển theo công thức mũ.*
- *Bậc chẵn của sin và cosin* $\Rightarrow$ *Hạ bậc:* $\sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2a,\ \cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2a.$
- *Chứa tích các căn thức của* x $\xrightarrow{PP}$ *chuyển về lũy thừa.*

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}, f(0) = 1, f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

A. $2 + \ln 15$ **B.** $3 + \ln 15$ **C.** $\ln 15$ **D.** $4 + \ln 15$

Lời giải

Chọn C

$\int \frac{2}{2x-1}dx = \ln\lvert 2x-1\rvert + C = f(x)$

Với $x<\frac{1}{2}, f(0)=1 \Rightarrow C=1$ nên $f(-1)=1+\ln 3$

Với $x>\frac{1}{2}, f(1)=2 \Rightarrow C=2$ nên $f(3)=2+\ln 5$

Nên $f(-1)+f(3)=3+\ln 15$

Câu 2. **(Sở Phú Thọ 2019)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ thỏa mãn $F(e+1)=4$ Tìm $F(x)$.

A. $2\ln(x-1)+2$ **B.** $\ln(x-1)+3$ **C.** $4\ln(x-1)$ **D.** $\ln(x-1)-3$

Lờigiải

Chọn B

$F(x)= =\int \frac{1}{x-1}dx+C=\ln|x-1|+C$

$F(e+1)=4$. Ta có $1+C=4 \Rightarrow C=3$

Câu 3. **(THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x-2}$, biết $F(1)=2$. Giá trị của $F(0)$ bằng

A. $2+\ln 2$. **B.** $\ln 2$. **C.** $2+\ln(-2)$. **D.** $\ln(-2)$.

Lờigiải

Cách 1:

Ta có: $\int f(x)dx=\int \frac{1}{x-2}dx=\ln|x-2|+C, C\in\mathbb{R}$.

Giả sử $F(x)=\ln|x-2|+C_0$ là một nguyên hàm của hàm số đã cho thỏa mãn $F(1)=2$.

Do $F(1)=2 \Rightarrow C_0=2 \Rightarrow F(x)=\ln|x-2|+2$. Vậy $F(0)=2+\ln 2$.

Câu 4. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)=\frac{1}{2x+1}$; biết $F(0)=2$. Tính $F(1)$.

A. $F(1)=\frac{1}{2}ln3-2$. **B.** $F(1)=ln3+2$. **C.** $F(1)=2ln3-2$. **D.** $F(1)=\frac{1}{2}ln3+2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $F(x)=\int \frac{1}{2x+1}dx=\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$

Do $F(0)=2 \Rightarrow \frac{1}{2}\ln|2.0+1|+C=2 \Rightarrow C=2$

Vậy $F(x)=\frac{1}{2}\ln|2x+1|+2 \Rightarrow F(1)=\frac{1}{2}\ln 3+2$.

Câu 5. **(Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019)** Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=\frac{1}{x}$ trên $(-\infty;0)$ thỏa mãn $F(-2)=0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $F(x)=\ln\left(\frac{-x}{2}\right)\ \forall x\in(-\infty;0)$

B. $F(x)=\ln|x|+C\ \forall x\in(-\infty;0)$ với C là một số thực bất kì.

C. $F(x)=\ln|x|+\ln 2\ \forall x\in(-\infty;0)$.

D. $F(x)=\ln(-x)+C\ \forall x\in(-\infty;0)$ với C là một số thực bất kì.

Lời giải

Ta có $F(x)=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C=\ln(-x)+C$ với $\forall x\in(-\infty;0)$.

Lại có $F(-2)=0\Leftrightarrow\ln 2+C=0\Leftrightarrow C=-\ln 2$. Do đó $F(x)=\ln(-x)-\ln 2=\ln\left(\frac{-x}{2}\right)$.

Vậy $F(x)=\ln\left(\frac{-x}{2}\right)\ \forall x\in(-\infty;0)$.

Câu 6. **(THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $R\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x-1}$, $f(0)=2017$, $f(2)=2018$. Tính $S=f(3)-f(-1)$.

A. $S=\ln 4035$. **B.** $S=4$. **C.** $S=\ln 2$. **D.** $S=1$.

Lời giải

Trên khoảng $(1;+\infty)$ ta có $\int f'(x)dx=\int\frac{1}{x-1}dx=\ln(x-1)+C_1\Rightarrow f(x)=\ln(x-1)+C_1$.

Mà $f(2)=2018\Rightarrow C_1=2018$.

Trên khoảng $(-\infty;1)$ ta có $\int f'(x)dx=\int\frac{1}{x-1}dx=\ln(1-x)+C_2\Rightarrow f(x)=\ln(1-x)+C_2$.

Mà $f(0)=2017\Rightarrow C_2=2017$.

Vậy $f(x)=\begin{cases}\ln(x-1)+2018 & \text{khi } x>1\\ \ln(1-x)+2017 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Suy ra $f(3)-f(-1)=1$.

Câu 7. **(Mã 105 2017)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x+2x$ thỏa mãn $F(0)=\frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x)=e^x+x^2+\frac{1}{2}$ **B.** $F(x)=e^x+x^2+\frac{5}{2}$

C. $F(x)=e^x+x^2+\frac{3}{2}$ **D.** $F(x)=2e^x+x^2-\frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x)=\int(e^x+2x)dx=e^x+x^2+C$

Theo bài ra ta có: $F(0)=1+C=\frac{3}{2}\Rightarrow C=\frac{1}{2}$.

Câu 8. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{2x}$ và $F(0)=0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng

A. 2. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

$F(x)=\int e^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{2x}+C; F(0)=0\Rightarrow C=-\frac{1}{2}\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}$.

Khi đó $F(\ln 3)=\frac{1}{2}e^{2\ln 3}-\frac{1}{2}=4$.

Câu 9. **(Sở Bình Phước 2019)** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số e^{2x} và $F(0)=\frac{201}{2}\cdot$ Giá trị $F\left(\frac{1}{2}\right)$ là

A. $\frac{1}{2}e+200$ **B.** $2e+100$ **C.** $\frac{1}{2}e+50$ **D.** $\frac{1}{2}e+100$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int e^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}+C$.

Theo đề ra ta được: $F(0)=\frac{201}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot e^{0}+C=\frac{201}{2}\Leftrightarrow C=100$.

Vậy $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+100\Rightarrow F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{2\cdot\frac{1}{2}}+100=\frac{1}{2}e+100$.

Câu 10. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}+1, \forall x, f(0)=2$. Hàm $f(x)$ là

A. $y=2\mathrm{e}^{x}+2x$. **B.** $y=2\mathrm{e}^{x}+2$. **C.** $y=\mathrm{e}^{2x}+x+2$. **D.** $y=\mathrm{e}^{2x}+x+1$.

Lời giải

Ta có: $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(2\mathrm{e}^{2x}+1\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x}+x+C$.

Suy ra $f(x)=\mathrm{e}^{2x}+x+C$.

Theo bài ra ta có: $f(0)=2\Rightarrow 1+C=2\Leftrightarrow C=1$.

Vậy: $f(x)=\mathrm{e}^{2x}+x+1$.

Câu 11. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $f(x)=2x+e^{x}$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=2019$.

A. $F(x)=x^2+e^{x}+2018$. **B.** $F(x)=x^2+e^{x}-2018$.

C. $F(x)=x^2+e^{x}+2017$. **D.** $F(x)=e^{x}-2019$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)dx=\int\left(2x+e^{x}\right)dx=x^2+e^{x}+C$.

Có $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0)=2019$.

Suy ra $\begin{cases} F(x)=x^2+e^x+C \\ F(0)=2019 \end{cases} \Rightarrow 1+C=2019 \Leftrightarrow C=2018.$

Vậy $F(x)=x^2+e^x+2018.$

Câu 12. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x$, thỏa mãn $F(0)=\frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T=F(0)+F(1)+...+F(2018)+F(2019)$.

A. $T=1009.\frac{2^{2019}+1}{\ln 2}$. **B.** $T=2^{2019.2020}$.

C. $T=\frac{2^{2019}-1}{\ln 2}$. **D.** $T=\frac{2^{2020}-1}{\ln 2}$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)dx=\int 2^x dx=\frac{2^x}{\ln 2}+C$

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x$, ta có $F(x)=\frac{2^x}{\ln 2}+C$ mà $F(0)=\frac{1}{\ln 2}$

$\Rightarrow C=0 \Rightarrow F(x)=\frac{2^x}{\ln 2}.$

$T=F(0)+F(1)+...+F(2018)+F(2019)$

$=\frac{1}{\ln 2}\left(1+2+2^2+...+2^{2018}+2^{2019}\right)=\frac{1}{\ln 2}.\frac{2^{2020}-1}{2-1}=\frac{2^{2020}-1}{\ln 2}$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 13. **(Mã 104 2017)** Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin x+\cos x$ thoả mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

A. $F(x)=-\cos x+\sin x+3$ **B.** $F(x)=-\cos x+\sin x-1$

C. $F(x)=-\cos x+\sin x+1$ **D.** $F(x)=\cos x-\sin x+3$

Lời giải

Chọn C

Có $F(x)=\int f(x)dx=\int(\sin x+\cos x)dx=-\cos x+\sin x+C$

Do $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}+C=2 \Leftrightarrow 1+C=2 \Leftrightarrow C=1 \Rightarrow F(x)=-\cos x+\sin x+1.$

Câu 14. **(Mã 123 2017)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=3-5\sin x$ và $f(0)=10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $f(x)=3x-5\cos x+15$ **B.** $f(x)=3x-5\cos x+2$

C. $f(x)=3x+5\cos x+5$ **D.** $f(x)=3x+5\cos x+2$

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\int(3-5\sin x)dx=3x+5\cos x+C$

Theo giả thiết $f(0)=10$ nên $5+C=10 \Rightarrow C=5.$

Vậy $f(x)=3x+5\cos x+5.$

Câu 15. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=2-5\sin x$ và $f(0)=10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $f(x)=2x+5\cos x+3$. **B.** $f(x)=2x-5\cos x+15$.

C. $f(x)=2x+5\cos x+5$. **D.** $f(x)=2x-5\cos x+10$.

Lời giải

Ta có: $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(2-5\sin x)\mathrm{d}x=2x+5\cos x+C$.

Mà $f(0)=10$ nên $5+C=10\Rightarrow C=5$.

Vậy $f(x)=2x+5\cos x+5$.

Câu 16. **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)=\cos 3x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{3}$. Tính $F\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

A. $F\left(\frac{\pi}{9}\right)=\frac{\sqrt{3}+2}{6}$ **B.** $F\left(\frac{\pi}{9}\right)=\frac{\sqrt{3}-2}{6}$ **C.** $F\left(\frac{\pi}{9}\right)=\frac{\sqrt{3}+6}{6}$ **D.** $F\left(\frac{\pi}{9}\right)=\frac{\sqrt{3}-6}{6}$

Lời giải

$F(x)=\int\cos 3x\mathrm{d}x=\frac{\sin 3x}{3}+C$

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{3}\Rightarrow C=1\Rightarrow F(x)=\frac{\sin 3x}{3}+1\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{9}\right)=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{3}+1=\frac{\sqrt{3}+6}{6}$.

Câu 17. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$. Biết $F\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)=k$ với mọi $k\in\mathbb{Z}$. Tính $F(0)+F(\pi)+F(2\pi)+...+F(10\pi)$.

A. 55. **B.** 44. **C.** 45. **D.** 0.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\tan x+C$.

Suy ra $F(x)=\begin{cases}\tan x+C_0,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\\ \tan x+C_1,\ x\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)\\ \tan x+C_2,\ x\in\left(\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right)\\ ...\\ \tan x+C_9,\ x\in\left(\frac{17\pi}{2};\frac{19\pi}{2}\right)\\ \tan x+C_{10},\ x\in\left(\frac{19\pi}{2};\frac{21\pi}{2}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F\left(\frac{\pi}{4}+0\pi\right)=1+C_0=0\Rightarrow C_0=-1\\ F\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)=1+C_1=1\Rightarrow C_1=0\\ F\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)=1+C_2=2\Rightarrow C_0=1\\ ...\\ F\left(\frac{\pi}{4}+9\pi\right)=1+C_9=9\Rightarrow C_9=8\\ F\left(\frac{\pi}{4}+10\pi\right)=1+C_{10}=10\Rightarrow C_{10}=9.\end{cases}$

Vậy $F(0)+F(\pi)+F(2\pi)+...+F(10\pi)=\tan 0-1+\tan\pi+\tan 2\pi+1+...+\tan 10\pi+9=44.$

Câu 18. **(Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020)** Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2^x$, thỏa mãn $F(0)=\frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T=F(0)+F(1)+F(2)+...+F(2019)$.

A. $T=\frac{2^{2020}-1}{\ln 2}$. **B.** $T=1009.\frac{2^{2019}-1}{2}$. **C.** $T=2^{2019.2020}$. **D.** $T=\frac{2^{2019}-1}{\ln 2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $F(x)=\int 2^x dx=\frac{2^x}{\ln 2}+C$.

Theo giả thiết $F(0)=\frac{1}{\ln 2}\Leftrightarrow\frac{2^0}{\ln 2}+C=\frac{1}{\ln 2}\Leftrightarrow C=0$. Suy ra: $F(x)=\frac{2^x}{\ln 2}$

Vậy $T=F(0)+F(1)+F(2)+...+F(2019)=\frac{2^0}{\ln 2}+\frac{2^1}{\ln 2}+\frac{2^2}{\ln 2}+...+\frac{2^{2019}}{\ln 2}$

$=\frac{1}{\ln 2}\left(2^0+2^1+2^2+...+2^{2019}\right)=\frac{1}{\ln 2}.1.\frac{1-2^{2020}}{1-2}=\frac{2^{2020}-1}{\ln 2}$.

Dạng 2. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số

" Nếu $\int f(x)dx=F(x)+C$ thì $\int f(u(x)).u'(x)dx=F(u(x))+C$".

Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm $I=\int f(x)dx$, trong đó ta có thể phân tích

$f(x)=g(u(x))u'(x)dx$ thì ta thực hiện phép đổi biến số $t=u(x)$

$\Rightarrow dt=u'(x)dx$. Khi đó: $I=\int g(t)dt=G(t)+C=G(u(x))+C$

Chú ý: Sau khi ta tìm được họ nguyên hàm theo t thì ta phải thay $t=u(x)$

1. Đổi biến số với một số hàm thường gặp

- $\int f(ax+b)^n x dx\xrightarrow{PP}t=ax+b.$ • $\int_a^b \sqrt[n]{f(x)}f'(x)dx\xrightarrow{PP}t=\sqrt[n]{f(x)}.$
- $\int_a^b f(\ln x)\frac{1}{x}dx\xrightarrow{PP}t=\ln x.$ • $\int_a^b f(e^x)e^x dx\xrightarrow{PP}t=e^x.$
- $\int_a^b f(\sin x)\cos x dx\xrightarrow{PP}t=\sin x.$ • $\int_a^b f(\cos x)\sin x dx\xrightarrow{PP}t=\cos x.$
- $\int_a^b f(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}dx\xrightarrow{PP}t=\tan x.$ • $\int_a^b f(\sin x\pm\cos x).(\sin x\pm\cos x)dx\Rightarrow t=\sin x\pm\cos x.$
- $\int_\alpha^\beta f(\sqrt{a^2-x^2})x^{2n}dx\xrightarrow{PP}x=a\sin t.$ • $\int_\alpha^\beta f\left((\sqrt{x^2+a^2})^m\right)x^{2n}dx\xrightarrow{PP}x=a\tan t.$
- $\int_\alpha^\beta f\left(\sqrt{\frac{a\pm x}{a\mp x}}\right)dx\xrightarrow{PP}x=a\cos 2t.$ • $\int_\alpha^\beta\frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(cx+d)}}\Rightarrow t=\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}.$
- $\int_\alpha^\beta R\left[\sqrt[s_1]{ax+b},..,\sqrt[s_k]{ax+b}\right]dx\Rightarrow t^n=ax+b.$ • $\int_\alpha^\beta\frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt[n]{a+bx^n}}\xrightarrow{PP}x=\frac{1}{t}.$

2. Đổi biến số với hàm ẩn

- ***Nhận dạng tương đối***: *Đề cho $f(x)$, yêu cầu tính $f(\neq x)$ hoặc đề cho $f(\neq x)$, yêu cầu tính $f(x)$.*
- ***Phương pháp***: *Đặt $t=(\neq x)$.*

• ***Lưu ý**: Đổi biến nhớ đổi cận và ở trên đã sử dụng tính chất: "**Tích phân không phụ thuộc vào biến số, mà chỉ phụ thuộc vào hai cận**", nghĩa là* $\int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \cdots = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \cdots$

Câu 19. **(Mã 101 – 2020 Lần 2)** Biết $F(x)=e^x+x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)dx$ bằng

A. $2e^x+2x^2+C.$ **B.** $\frac{1}{2}e^{2x}+x^2+C.$ **C.** $\frac{1}{2}e^{2x}+2x^2+C.$ **D.** $e^{2x}+4x^2+C.$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F(x)=e^x+x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int f(2x)dx=\frac{1}{2}\int f(2x)d2x=\frac{1}{2}F(2x)+C=\frac{1}{2}e^{2x}+2x^2+C.$$

Câu 20. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Biết $F(x)=e^x-2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)dx$ bằng

A. $2e^x-4x^2+C.$ **B.** $\frac{1}{2}e^{2x}-4x^2+C.$ **C.** $e^{2x}-8x^2+C.$ **D.** $\frac{1}{2}e^{2x}-2x^2+C.$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $F(x)=e^x-2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$

Suy ra:

$$f(x)=F'(x)=\left(e^x-2x^2\right)'=e^x-4x \Rightarrow f(2x)=e^{2x}-8x$$

$$\Rightarrow \int f(2x)dx=\int\left(e^{2x}-8x\right)dx=\frac{1}{2}e^{2x}-4x^2+C.$$

Câu 21. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Biết $F(x)=e^x-x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{2}e^{2x}-2x^2+C.$ **B.** $e^{2x}-4x^2+C.$ **C.** $2e^x-2x^2+C.$ **D.** $\frac{1}{2}e^{2x}-x^2+C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int f(2x)\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}F(2x)+C=\frac{1}{2}e^{2x}-2x^2+C.$

Câu 22. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Biết $F(x)=\mathrm{e}^x+2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\mathrm{e}^{2x}+8x^2+C.$ **B.** $2\mathrm{e}^x+4x^2+C.$ **C.** $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+2x^2+C.$ **D.** $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+4x^2+C.$

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2}$

$\int f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}F(t)+C=\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{t}+2t^{2}\right]+C=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+(2x)^{2}+C=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+4x^{2}+C$.

Câu 28. **[DS12.C3.1.D09.b] (Thi thử Lômônôxốp - Hà Nội lần V 2019)** Biết $\int f(2x)\mathrm{d}x=\sin^{2}x+\ln x+C$. Tìm nguyên hàm $\int f(x)\mathrm{d}x$?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\sin^{2}\frac{x}{2}+\ln x+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=2\sin^{2}2x+2\ln x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=2\sin^{2}\frac{x}{2}+2\ln x+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=2\sin^{2}x+2\ln x+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int f(2x)\mathrm{d}x=\sin^{2}x+\ln x+C\Leftrightarrow\frac{1}{2}\int f(2x)\mathrm{d}(2x)=\frac{1-\cos 2x}{2}+\ln(2x)-\ln 2+C$

$\Leftrightarrow\int f(2x)\mathrm{d}(2x)=1-\cos 2x+2\ln(2x)-2\ln 2+2C$

$\Leftrightarrow\int f(x)\mathrm{d}x=1-\cos x+2\ln x-2\ln 2+2C\Leftrightarrow\int f(x)\mathrm{d}x=2\sin^{2}\frac{x}{2}+2\ln x+C'$.

Câu 46. **[DS12.C3.1.D09.b]** Cho $\int f(4x)\mathrm{d}x=x^{2}+3x+c$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x+2)\mathrm{d}x=\frac{x^{2}}{4}+2x+C$.

B. $\int f(x+2)\mathrm{d}x=x^{2}+7x+C$.

C. $\int f(x+2)\mathrm{d}x=\frac{x^{2}}{4}+4x+C$.

D. $\int f(x+2)\mathrm{d}x=\frac{x^{2}}{2}+4x+C$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết bài toán $\int f(4x)\,\mathrm{d}x=x^{2}+3x+c$.

Đặt $t=4x\Rightarrow\mathrm{d}t=4\mathrm{d}x$ từ đó ta có $\frac{1}{4}\int f(t)\mathrm{d}t=\left(\frac{t}{4}\right)^{2}+3\left(\frac{t}{4}\right)+c\Rightarrow\int f(t)\mathrm{d}t=\frac{t^{2}}{4}+3t+c$.

Xét $\int f(x+2)\mathrm{d}x=\int f(x+2)\mathrm{d}(x+2)=\frac{(x+2)^{2}}{4}+3(x+2)+c=\frac{x^{2}}{4}+4x+C$.

Vậy mệnh đề đúng là $\int f(x+2)\mathrm{d}x=\frac{x^{2}}{4}+4x+C$.

Câu 5. **[DS12.C3.1.D09.b]** Cho $\int f(x)\mathrm{d}x=4x^{3}+2x+C_{0}$. Tính $I=\int xf\left(x^{2}\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=2x^{6}+x^{2}+C$.

B. $I=\frac{x^{10}}{10}+\frac{x^{6}}{6}+C$.

C. $I=4x^{6}+2x^{2}+C$.

D. $I=12x^{2}+2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $I=\int xf\left(x^{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int f\left(x^{2}\right)\mathrm{d}x^{2}=\frac{1}{2}\left(4\left(x^{2}\right)^{3}+2\left(x^{2}\right)\right)+C=2x^{6}+x^{2}+C$.

Câu 23. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^{2}.\mathrm{e}^{x^{3}+1}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}.\mathrm{e}^{x^3+1}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=3\mathrm{e}^{x^3+1}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x^3+1}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3+1}+C$.

Lời giải

$\int f(x)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{e}^{x^3+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int \mathrm{e}^{x^3+1}\mathrm{d}\left(x^3+1\right)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{x^3+1}+C$.

Câu 24. **(THPT Hà Huy Tập - 2018)** Nguyên hàm của $f(x)=\sin 2x.e^{\sin^2 x}$ là

A. $\sin^2 x.e^{\sin^2 x-1}+C$. **B.** $\frac{e^{\sin^2 x+1}}{\sin^2 x+1}+C$. **C.** $e^{\sin^2 x}+C$. **D.** $\frac{e^{\sin^2 x-1}}{\sin^2 x-1}+C$.

Lời giải

Ta có $\int \sin 2x.e^{\sin^2 x}dx=\int e^{\sin^2 x}d\left(\sin^2 x\right)=e^{\sin^2 x}+C$

Câu 25. Tìm tất cả các họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x^9+3x^5}$

A. $\int f(x)dx=-\frac{1}{3x^4}+\frac{1}{36}\ln\left|\frac{x^4}{x^4+3}\right|+C$ **B.** $\int f(x)dx=-\frac{1}{12x^4}-\frac{1}{36}\ln\left|\frac{x^4}{x^4+3}\right|+C$

C. $\int f(x)dx=-\frac{1}{3x^4}-\frac{1}{36}\ln\left|\frac{x^4}{x^4+3}\right|+C$ **D.** $\int f(x)dx=-\frac{1}{12x^4}+\frac{1}{36}\ln\left|\frac{x^4}{x^4+3}\right|+C$

Lời giải

Chọn A

$\int f(x)dx=\int\frac{1}{x^9+3x^5}dx=\int\frac{x^3}{\left(x^4\right)^2\left(x^4+3\right)}dx=\frac{1}{4}\int\frac{dx^4}{\left(x^4\right)^2\left(x^4+3\right)}=\frac{1}{12}\int\frac{\left(x^4+3\right)-x^4}{\left(x^4\right)^2\left(x^4+3\right)}dx^4$

$=\frac{1}{12}\int\frac{dx^4}{\left(x^4\right)^2}-\frac{1}{12}\int\frac{dx^4}{x^4\left(x^4+3\right)}=-\frac{1}{12x^4}-\frac{1}{36}\ln\left(\frac{x^4}{x^4+3}\right)+C$

Câu 26. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Tìm hàm số $F(x)$ biết $F(x)=\int\frac{x^3}{x^4+1}\mathrm{d}x$ và $F(0)=1$.

A. $F(x)=\ln\left(x^4+1\right)+1$. **B.** $F(x)=\frac{1}{4}\ln\left(x^4+1\right)+\frac{3}{4}$.

C. $F(x)=\frac{1}{4}\ln\left(x^4+1\right)+1$. **D.** $F(x)=4\ln\left(x^4+1\right)+1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F(x)=\frac{1}{4}\int\frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}\left(x^4+1\right)=\frac{1}{4}\ln\left(x^4+1\right)+C$.

Do $F(0)=1$ nên $\frac{1}{4}\ln(0+1)+C=1\Leftrightarrow C=1$.

Vậy: $F(x)=\frac{1}{4}\ln\left(x^4+1\right)+1$.

Câu 27. Biết $\int \frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}}dx = \frac{1}{a}.\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^b + C, x \neq -1$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a = 2b$. **B.** $b = 2a$. **C.** $a = 2018b$. **D.** $b = 2018a$.

Lời giải

Ta có:

$$\int \frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}}dx = \int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2017}.\frac{1}{(x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2017} d\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{1}{4036}.\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2018} + C.$$

$\Rightarrow a = 4036, b = 2018$

Do đó: $a = 2b$.

Câu 28. **(Chuyên Quốc Học Huế - 2018)** Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số $f(x) = \frac{2017x}{(x^2+1)^{2018}}$ thỏa mãn $F(1) = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của $F(x)$.

A. $m = -\frac{1}{2}$. **B.** $m = \frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$. **C.** $m = \frac{1+2^{2017}}{2^{2018}}$. **D.** $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)dx = \int \frac{2017x}{(x^2+1)^{2018}}dx = \frac{2017}{2}\int (x^2+1)^{-2018} d(x^2+1) = \frac{2017}{2}.\frac{(x^2+1)^{-2017}}{-2017} + C$

$= -\frac{1}{2(x^2+1)^{2017}} + C = F(x)$

Nguyễn Bảo Vương

Mà $F(1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2.2^{2017}} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2^{2018}}$

Do đó $F(x) = -\frac{1}{2.(x^2+1)^{2017}} + \frac{1}{2^{2018}}$ suy ra

$F(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{1}{2(x^2+1)^{2017}}$ lớn nhất $\Leftrightarrow (x^2+1)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = 0$

Vậy $m = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2018}} = \frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$.

Câu 29. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$ và $F(0) = -\ln 2e$. Tập nghiệm S của phương trình $F(x) + \ln(e^x+1) = 2$ là:

A. $S = \{3\}$ **B.** $S = \{2;3\}$ **C.** $S = \{-2;3\}$ **D.** $S = \{-3;3\}$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{dx}{e^x+1} = \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right)dx = x - \ln(e^x+1) + C$

$F(0) = -\ln 2 + C = -\ln 2e \Rightarrow C = -1$

$PT: F(x) + \ln(e^x+1) = 2 \Leftrightarrow x - \ln(e^x+1) - 1 + \ln(e^x+1) = 2 \Leftrightarrow x = 3$.

Câu 30. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3\left(x^2+1\right)^{2019}$ là

A. $\frac{1}{2}\left[\frac{\left(x^2+1\right)^{2021}}{2021}-\frac{\left(x^2+1\right)^{2020}}{2020}\right]$.

B. $\frac{\left(x^2+1\right)^{2021}}{2021}-\frac{\left(x^2+1\right)^{2020}}{2020}$.

C. $\frac{\left(x^2+1\right)^{2021}}{2021}-\frac{\left(x^2+1\right)^{2020}}{2020}+C$.

D. $\frac{1}{2}\left[\frac{\left(x^2+1\right)^{2021}}{2021}-\frac{\left(x^2+1\right)^{2020}}{2020}\right]+C$.

Lời giải

Xét $\int f(x)\mathrm{d}x=\int x^3\left(x^2+1\right)^{2019}\mathrm{d}x=\int x^2\left(x^2+1\right)^{2019}x\,\mathrm{d}x$.

Đổi biến $t=x^2+1\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\,\mathrm{d}x$, ta có:

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(t-1)t^{2019}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\left(t^{2020}-t^{2019}\right)\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{t^{2021}}{2021}-\frac{t^{2020}}{2020}\right]+C=\frac{1}{2}\left[\frac{\left(x^2+1\right)^{2021}}{2021}-\frac{\left(x^2+1\right)^{2020}}{2020}\right]+C.$$

Câu 31. **(THPT Hà Huy Tập - 2018)** Nguyên hàm của $f(x)=\frac{1+\ln x}{x.\ln x}$ là:

A. $\int\frac{1+\ln x}{x.\ln x}\mathrm{d}x=\ln\left|\ln x\right|+C$.

B. $\int\frac{1+\ln x}{x.\ln x}\mathrm{d}x=\ln\left|x^2.\ln x\right|+C$.

C. $\int\frac{1+\ln x}{x.\ln x}\mathrm{d}x=\ln\left|x+\ln x\right|+C$.

D. $\int\frac{1+\ln x}{x.\ln x}\mathrm{d}x=\ln\left|x.\ln x\right|+C$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Ta có $I=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1+\ln x}{x.\ln x}\mathrm{d}x$.

Đặt $x\ln x=t\Rightarrow(\ln x+1)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$. Khi đó ta có $I=\int\frac{1+\ln x}{x.\ln x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln|t|+C=\ln\left|x.\ln x\right|+C$.

Câu 32. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2e^{x^3+1}$

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^{x^3+1}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=3e^{x^3+1}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}e^{x^3+1}+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}e^{x^3+1}+C$.

Lời giải

Đặt $t=x^3+1\Rightarrow \mathrm{d}t=3x^2\mathrm{d}x$

Do đó, ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int x^2e^{x^3+1}\mathrm{d}x=\int e^t.\frac{1}{3}\mathrm{d}t=\frac{1}{3}e^t+C=\frac{1}{3}e^{x^3+1}+C$.

Vậy $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}e^{x^3+1}+C$.

Câu 33. **(Chuyên Lương Văn Chánh Phú Yên 2019)** Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt[3]{3x+1}$ là

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=(3x+1)\sqrt[3]{3x+1}+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\sqrt[3]{3x+1}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\sqrt[3]{3x+1}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}(3x+1)\sqrt[3]{3x+1}+C$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int(3x+1)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}(3x+1)=\frac{1}{4}(3x+1)\sqrt[3]{3x+1}+C$.

Câu 34. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{3x+2}$ là

A. $\frac{2}{3}(3x+2)\sqrt{3x+2}+C$ **B.** $\frac{1}{3}(3x+2)\sqrt{3x+2}+C$

C. $\frac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2}+C$ **D.** $\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{3x+2}}+C$

Lời giải

Chọn C

Do $\int\sqrt{3x+2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int(3x+2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(3x+2)=\frac{1}{3}\frac{(3x+2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2}+C$

Câu 35. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{2x+1}$ là

A. $-\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+C$. **B.** $\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}+C$.

C. $\frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+C$. **D.** $\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+C$.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{2x+1}\Rightarrow\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x\Rightarrow t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\int f(x)\mathrm{d}x=\int\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x=\int t^2\mathrm{d}x=\frac{t^3}{3}+C=\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+C$.

Câu 36. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Cho hàm số $f(x)=2^{\sqrt{x}}.\frac{\ln 2}{\sqrt{x}}$. Hàm số nào dưới đây **không** là nguyên hàm của hàm số $f(x)$?

A. $F(x)=2^{\sqrt{x}}+C$ **B.** $F(x)=2\left(2^{\sqrt{x}}-1\right)+C$

C. $F(x)=2\left(2^{\sqrt{x}}+1\right)+C$ **D.** $F(x)=2^{\sqrt{x}+1}+C$

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int 2^{\sqrt{x}}.\frac{\ln 2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int 2^{\sqrt{x}}.\frac{\ln 2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Đặt $u=\sqrt{x}\Rightarrow\mathrm{d}u=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Vậy $F(x)=2\ln 2.\int 2^u.\mathrm{d}u=2\ln 2.\frac{2^u}{\ln 2}+C=2^{\sqrt{x}+1}+C$.

Phương án B: $F(x)=2^{\sqrt{x}+1}-2+C$ thỏa.

Phương án C: $F(x)=2^{\sqrt{x}+1}+2+C$ thỏa.

Câu 37. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Khi tính nguyên hàm $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$, bằng cách đặt $u=\sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

A. $\int 2\left(u^2-4\right)\mathrm{d}u$. **B.** $\int \left(u^2-4\right)\mathrm{d}u$. **C.** $\int \left(u^2-3\right)\mathrm{d}u$. **D.** $\int 2u\left(u^2-4\right)\mathrm{d}u$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $u=\sqrt{x+1}\Rightarrow x=u^2-1\Rightarrow \mathrm{d}x=2u\,\mathrm{d}u$.

Khi đó $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$ trở thành $\int \frac{u^2-4}{u}.2u\,\mathrm{d}u=\int 2\left(u^2-4\right)\mathrm{d}u$.

Câu 38. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\sqrt{2x+1}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=2\sqrt{2x+1}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}+C$.

Lời giải

Đặt $\sqrt{2x+1}=t\Rightarrow 2x+1=t^2\Rightarrow \mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$.

Khi đó ta có $\int \frac{1}{2}\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{t\mathrm{d}t}{t}==\frac{1}{2}\int \mathrm{d}t=\frac{1}{2}t+C=\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}+C$.

Câu 39. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến - 2018)** Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ là

A. $F(x)=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\sqrt{x^2+1}+C$. **B.** $F(x)=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}+C$.

C. $F(x)=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$. **D.** $F(x)=x^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$.

Lời giải

Đặt $t=x+\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow t=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+1}}=\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow \frac{1}{t}=\sqrt{x^2+1}-x$.

$t-\frac{1}{t}=2x\Rightarrow dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right);\ t+\frac{1}{t}=2\sqrt{x^2+1}$

$\int f(x)dx=\int \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\ln t dt=\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\ln t\,dt=I$.

Đặt $u=\ln t\rightarrow du=\frac{1}{t}\mathrm{d}t$

$\mathrm{d}v=\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t\rightarrow v=t-\frac{1}{t}$;

$I=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\ln t-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}\left(t-\frac{1}{t}\right)dt=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\ln t-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\ln t-\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)+C$

$=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}+C$.

Câu 40. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Biết rằng trên khoảng $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$, hàm số $f(x)=\frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ có một nguyên hàm $F(x)=(ax^2+bx+c)\sqrt{2x-3}$ (a,b,c là các số nguyên). Tổng $S=a+b+c$ bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{2x-3}\Rightarrow t^2=2x-3\Rightarrow \mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$

Khi đó

$$\int\frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}\mathrm{d}x=\int\frac{20\left(\frac{t^2+3}{2}\right)^2-30\left(\frac{t^2+3}{2}\right)+7}{t}t\mathrm{d}t=\int\left(5t^4+15t^2+7\right)\mathrm{d}t=t^5+5t^3+7t+C$$

$$=\sqrt{(2x-3)^5}+5\sqrt{(2x-3)^3}+7\sqrt{2x-3}+C=(2x-3)^2\sqrt{2x-3}+5(2x-3)\sqrt{2x-3}+7\sqrt{2x-3}+C$$

$$=\left(4x^2-2x+1\right)\sqrt{2x-3}+C$$

Vậy $F(x)=\left(4x^2-2x+1\right)\sqrt{2x-3}$. Suy ra $S=a+b+c=3$.

Câu 41. **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\sin x}{1+3\cos x}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\ln|1+3\cos x|+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=3\ln|1+3\cos x|+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+C$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Ta có: $\int\frac{\sin x}{1+3\cos x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\int\frac{1}{1+3\cos x}\mathrm{d}(1+3\cos x)=-\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+C$.

Câu 42. **(Sở Thanh Hóa 2019)** Tìm các hàm số $f(x)$ biết $f'(x)=\frac{\cos x}{(2+\sin x)^2}$.

A. $f(x)=\frac{\sin x}{(2+\sin x)^2}+C$. **B.** $f(x)=\frac{1}{(2+\cos x)}+C$.

C. $f(x)=-\frac{1}{2+\sin x}+C$. **D.** $f(x)=\frac{\sin x}{2+\sin x}+C$.

Lời giải

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\cos x}{(2+\sin x)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(2+\sin x)}{(2+\sin x)^2}=-\frac{1}{2+\sin x}+C$.

Câu 43. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\sin x}{1+3\cos x}$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$. Tính $F(0)$.

A. $F(0)=-\frac{1}{3}\ln 2+2$. **B.** $F(0)=-\frac{2}{3}\ln 2+2$. **C.** $F(0)=-\frac{2}{3}\ln 2-2$. **D.** $F(0=-\frac{1}{3}\ln 2-2$.

Lời giải

Ta có $F(x)=\int\frac{\sin x\mathrm{d}x}{1+3\cos x}=-\int\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{3\cos x+1}=-\frac{1}{3}ln|3cosx+1|+C$.

mà $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{3}ln\left|3cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+1\right|+C=2\Rightarrow C=2$.

Do đó, $F(0)=-\frac{1}{3}ln\left|3cos(0)+1\right|+2=-\frac{1}{3}ln4+2=-\frac{2}{3}ln2+2$.

Vậy $F(0)=-\frac{2}{3}ln2+2$.

Câu 44. (Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019) Biết $\int f(x)\mathrm{d}x=3x\cos(2x-5)+C$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $\int f(3x)\mathrm{d}x=3x\cos(6x-5)+C$ **B.** $\int f(3x)\mathrm{d}x=9x\cos(6x-5)+C$

C. $\int f(3x)\mathrm{d}x=9x\cos(2x-5)+C$ **D.** $\int f(3x)\mathrm{d}x=3x\cos(2x-5)+C$

Lời giải

Cách 2:

Đặt $x=3t\Rightarrow \mathrm{d}x=3\mathrm{d}t$.

Khi đó: $\int f(x)\mathrm{d}x=3x\cos(2x-5)+C$

$\Leftrightarrow 3\int f(3t)\mathrm{d}t=3.(3t)\cos(2.3t-5)+C\Leftrightarrow \int f(3t)\mathrm{d}t=3t\cos(6t-5)+C$

$\Leftrightarrow \int f(3x)\mathrm{d}x=3x\cos(6x-5)+C$.

Câu 45. (Chuyên Hạ Long - 2018) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\tan^5 x$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\tan^4 x+\frac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\cos x|+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\tan^4 x+\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x-\ln|\cos x|+C$.

Lời giải

$I=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\tan^5 x\mathrm{d}x=\int\frac{\sin^5 x}{\cos^5 x}\mathrm{d}x$

$=\int\frac{\sin^2 x.\sin^2.\sin x}{\cos^5 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\left(1-\cos^2 x\right).\left(1-\cos^2 x\right).\sin x}{\cos^5 x}\mathrm{d}x$

Đặt $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$ $I=\int\frac{\left(1-t^2\right).\left(1-t^2\right)}{t^5}(-\mathrm{d}t)=\int\frac{1-2t^2+t^4}{t^5}(-\mathrm{d}t)$

$=\int\left(-\frac{1}{t^5}+\frac{2}{t^3}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\int\left(-t^{-5}+2t^{-3}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}t^{-4}-t^{-2}-\ln|t|+C$

$=\frac{1}{4}\cos x^{-4}-\cos x^{-2}-\ln|\cos x|+C=\frac{1}{4}.\frac{1}{\cos x^4}-\frac{1}{\cos x^2}-\ln|\cos x|+C$

$=\frac{1}{4}.\left(\tan^2 x+1\right)^2-\left(\tan^2 x+1\right)-\ln|\cos x|+C$

$=\frac{1}{4}\left(\tan^4 x+2\tan^2 x+1\right)-\left(\tan^2 x+1\right)-\ln\left|\cos x\right|+C$

$=\frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x-\ln\left|\cos x\right|+\frac{1}{4}+C$

$=\frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x-\ln\left|\cos x\right|+C$.

Câu 46. **(Hồng Bàng - Hải Phòng - 2018) Biết** $F(x)$ **là một nguyên hàm của hàm số** $f(x)=\sin^3 x.\cos x$ **và** $F(0)=\pi$**. Tính** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$**.**

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\pi$. **B.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi$. **C.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{4}+\pi$. **D.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}+\pi$.

Lời giải

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$.

$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int \sin^3 x\cos x\mathrm{d}x=\int t^3\mathrm{d}t=\frac{t^4}{4}+C=\frac{\sin^4 x}{4}+C$.

$F(0)=\pi\Rightarrow\frac{\sin^4\pi}{4}+C=\pi\Leftrightarrow C=\pi\Rightarrow F(x)=\frac{\sin^4 x}{4}+\pi$.

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin^4\frac{\pi}{2}}{4}=\frac{1}{4}+\pi$.

Câu 47. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=2$ và $F(\mathrm{e})=\ln 2$.

Giá trị của biểu thức $F\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)+F\left(\mathrm{e}^2\right)$ bằng

A. $3\ln 2+2$. **B.** $\ln 2+2$. **C.** $\ln 2+1$. **D.** $2\ln 2+1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\ln x}=\ln\left|\ln x\right|+C$, $x>0$, $x\neq 1$.

Nên: $F(x)=\begin{cases}\ln(\ln x)+C_1 & \text{khi } x>1\\ \ln(-\ln x)+C_2 & \text{khi } 0<x<1\end{cases}$.

Mà $F\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=2$ nên $\ln\left(-\ln\frac{1}{\mathrm{e}}\right)+C_2=2\Leftrightarrow C_2=2$; $F(\mathrm{e})=\ln 2$ nên $\ln(\ln\mathrm{e})+C_1=\ln 2\Leftrightarrow C_1=\ln 2$.

Suy ra $F(x)=\begin{cases}\ln(\ln x)+\ln 2 & \text{khi } x>1\\ \ln(-\ln x)+2 & \text{khi } 0<x<1\end{cases}$.

Vậy $F\left(\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)+F\left(\mathrm{e}^2\right)=\ln\left(-\ln\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)+2+\ln(\ln\mathrm{e}^2)+\ln 2=3\ln 2+2$.

Câu 48. **(Chuyên Nguyễn Huệ-HN 2019)** Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$ thỏa mãn $F(2)=0$. Khi đó phương trình $F(x)=x$ có nghiệm là:

A. $x=0$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=1-\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int \frac{x}{\sqrt{8-x^2}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \left(8-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(8-x^2\right) = -\sqrt{8-x^2}+C.$

Mặt khác: $F(2)=0 \Leftrightarrow -\sqrt{8-2^2}+C=0 \Leftrightarrow C=2.$

Nên $F(x)=-\sqrt{8-x^2}+2.$

$F(x)=x \Leftrightarrow -\sqrt{8-x^2}+2=x \Leftrightarrow \sqrt{8-x^2}=2-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x\ge 0 \\ 8-x^2=(2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 2 \\ -2x^2+4x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{3} \\ x=1-\sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1-\sqrt{3}.$$

Câu 49. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{x^2}$. Biết $F(3)=6$, giá trị của $F(8)$ là

A. $\frac{217}{8}$. **B.** 27. **C.** $\frac{215}{24}$. **D.** $\frac{215}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int f(x)dx = \int\left(\frac{2x}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{x^2}\right)dx = \int\left(\frac{2(x+1)-2}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{x^2}\right)dx$

$= 2\int\sqrt{x+1}dx - 2\int\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx - \int\frac{1}{x^2}dx$

$= 2\int(x+1)^{\frac{1}{2}}d(x+1) - 2\int(x+1)^{-\frac{1}{2}}d(x+1) - \int x^{-2}dx$

$= \frac{4(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4\sqrt{x+1} + \frac{1}{x} + C.$

Suy ra $F(x)=\frac{4(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4\sqrt{x+1} + \frac{1}{x} + C.$

Mặt khác: $F(3)=6 \Leftrightarrow 6=\frac{4(3+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4\sqrt{3+1} + \frac{1}{3} + C \Leftrightarrow C=3.$

Vậy $F(8)=\frac{4(8+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4\sqrt{8+1} + \frac{1}{8} + 3 = \frac{217}{8}.$

Câu 50. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ trên khoảng $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$ là

A. $\left(4x^2+2x+1\right)\sqrt{2x-3}+C.$ **B.** $\left(4x^2-2x+1\right)\sqrt{2x-3}.$

C. $\left(3x^2-2x+1\right)\sqrt{2x-3}.$ **D.** $\left(4x^2-2x+1\right)\sqrt{2x-3}+C.$

Lời giải

Chọn D

Xét trên khoảng $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$, ta có:

$\int f(x)\mathrm{d}x = \int\frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}\mathrm{d}x = \int\frac{10x(2x-3)+7}{\sqrt{2x-3}}\mathrm{d}x.$

Đặt $u=\sqrt{2x-3} \Rightarrow u^2=2x-3 \Rightarrow 2u\mathrm{d}u=2\mathrm{d}x \Rightarrow u\mathrm{d}u=\mathrm{d}x.$

Khi đó:

$$\int \frac{10x(2x-3)+7}{\sqrt{2x-3}}\mathrm{d}x = \int \frac{5(u^2+3)u^2+7}{u}u\mathrm{d}u = \int\left[5(u^2+3)u^2+7\right]\mathrm{d}u = \int\left[5u^4+15u^2+7\right]\mathrm{d}u$$

$$= u^5+5u^3+7u+C = (u^4+5u^2+7)u+C = \left[(2x-3)^2+5(2x-3)+7\right]\sqrt{2x-3}+C$$

$$= (4x^2-2x+1)\sqrt{2x-3}+C.$$

Dạng 3. Nguyên hàm của hàm số hữu tỉ

1. Công thức thường áp dụng

- $\int \frac{1}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|ax+b|+C.$ • $\int \frac{1}{(ax+b)^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{ax+b}+C.$
- $\ln a+\ln b = \ln(ab).$ • $\ln a-\ln b = \ln\frac{a}{b}.$
- $\ln a^n = n\ln a.$ • $\ln 1 = 0.$

2. Phương pháp tính nguyên hàm, tích phân của hàm số hữu tỷ $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x.$

- *Nếu bậc của tử số* $P(x) \geq$ *bậc của mẫu số* $Q(x) \xrightarrow{PP}$ *Chia đa thức.*
- *Nếu bậc của tử số* $P(x) <$ *bậc của mẫu số* $Q(x) \xrightarrow{PP}$ *phân tích mẫu* $Q(x)$ *thành tích số, rồi sử dụng phương pháp che để đưa về công thức nguyên hàm số 01.*
- *Nếu mẫu không phân tích được thành tích số* $\xrightarrow{PP}$ *thêm bớt để đổi biến hoặc lượng giác hóa bằng cách đặt* $X = a\tan t$, *nếu mẫu đưa được về dạng* X^2+a^2.

Nguyễn Bảo

Câu 51. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ là

A. $x+3\ln(x-1)+C.$ **B.** $x-3\ln(x-1)+C.$

C. $x-\frac{3}{(x-1)^2}+C.$ **D.** $x+\frac{3}{(x-1)^2}+C.$

Lời giải

Chọn A

Trên khoảng $(1;+\infty)$ thì $x-1>0$ nên

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{x+2}{x-1}\mathrm{d}x = \int\left(1+\frac{3}{x-1}\right)\mathrm{d}x = x+3\ln|x-1|+C = x+3\ln(x-1)+C.$$

Câu 52. **(Mã đề 104 - BGD - 2019)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2}$ trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $3\ln(x-2)+\frac{2}{x-2}+C$ **B.** $3\ln(x-2)-\frac{2}{x-2}+C$

C. $3\ln(x-2)-\frac{4}{x-2}+C$ **D.** $3\ln(x-2)+\frac{4}{x-2}+C.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\dfrac{3x-2}{(x-2)^2}=\dfrac{3(x-2)+4}{(x-2)^2}=\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{4}{(x-2)^2}$. Do đó

$$\int\dfrac{3x-2}{(x-2)^2}dx=\int\left(\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{4}{(x-2)^2}\right)dx=3\ln(x-2)-\dfrac{4}{x-2}+C.$$

Câu 53. **(Mã đề 101 - BGD - 2019)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1;+\infty)$ là

A. $2\ln(x+1)+\dfrac{2}{x+1}+C$.

B. $2\ln(x+1)+\dfrac{3}{x+1}+C$.

C. $2\ln(x+1)-\dfrac{2}{x+1}+C$.

D. $2\ln(x+1)-\dfrac{3}{x+1}+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{2x-1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\dfrac{2(x+1)-3}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\left[\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{3}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x=2\ln(x+1)+\dfrac{3}{x+1}+C.$

Câu35. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+3x+2}$ là

A. $\ln|x+1|+2\ln|x+2|+C$.

B. $2\ln|x+1|+\ln|x+2|+C$.

C. $2\ln|x+1|-\ln|x+2|+C$.

D. $-\ln|x+1|+2\ln|x+2|+C$.

Lời giải

Ta có $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+3x+2}=\dfrac{x+3}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$.

Suy ra họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+3x+2}$ là

Câu 54. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=ax+\dfrac{b}{x^2}(x\neq 0)$, biết rằng $F(-1)=1, F(1)=4, f(1)=0$

A. $F(x)=\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{3}{4x}-\dfrac{7}{4}$.

B. $F(x)=\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{3}{2x}-\dfrac{7}{4}$.

C. $F(x)=\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{3}{2x}+\dfrac{7}{4}$.

D. $F(x)=\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{3}{2x}-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(ax+\dfrac{b}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}ax^2-\dfrac{b}{x}+C$.

Theo bài ra $\begin{cases}F(-1)=1\\F(1)=4\\f(1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}a+b+C=1\\\dfrac{1}{2}a-b+C=4\\a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-\dfrac{3}{2}\\a=\dfrac{3}{2}\\C=\dfrac{7}{4}\end{cases}$.

Vậy $F(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2x}+\frac{7}{4}$.

Câu 55. Cho biết $\int\frac{2x-13}{(x+1)(x-2)}\mathrm{d}x=a\ln|x+1|+b\ln|x-2|+C$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+2b=8$. **B.** $a+b=8$. **C.** $2a-b=8$. **D.** $a-b=8$.

Lời giải

Ta có: $\frac{2x-13}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\frac{(A+B)x+(-2A+B)}{(x+1)(x-2)}$

$\Rightarrow\begin{cases}A+B=2\\-2A+B=-13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=5\\B=-3\end{cases}$.

Khi đó: $\int\frac{2x-13}{(x+1)(x-2)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{5}{x+1}-\frac{3}{x-2}\right)\mathrm{d}x=5\ln|x+1|-3\ln|x-2|+C$.

Suy ra $a=5;\ b=-3$ nên $a-b=8$.

Câu 56. Cho biết $\int\frac{1}{x^3-x}\mathrm{d}x=a\ln|(x-1)(x+1)|+b\ln|x|+C$. Tính giá trị biểu thức: $P=2a+b$.

A. 0. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Ta có:

$\frac{1}{x^3-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{D}{x+1}=\frac{A(x^2-1)+Bx(x+1)+Dx(x-1)}{x^3-x}=\frac{(A+B+D)x^2+(B-D)x-A}{x^3-x}$

$\Rightarrow\begin{cases}A+B+D=0\\B-D=0\\-A=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-1\\B=\frac{1}{2}\\D=\frac{1}{2}\end{cases}$.

Khi đó: $\int\frac{1}{x^3-x}\mathrm{d}x=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|(x-1)(x+1)|-\ln|x|+C$.

Suy ra $a=\frac{1}{2};\ b=-1$ nên $P=2a+b=0$.

Câu 57. Cho biết $\int\frac{4x+11}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x=a\ln|x+2|+b\ln|x+3|+C$. Tính giá trị biểu thức: $P=a^2+ab+b^2$.

A. 12. **B.** 13. **C.** 14. **D.** 15.

Lời giải

Ta có: $\frac{4x+11}{x^2+5x+6}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}=\frac{(A+B)x+(3A+2B)}{(x+2)(x+3)}$

$\Rightarrow\begin{cases}A+B=4\\3A+2B=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=3\\B=1\end{cases}$.

Khi đó: $\int\frac{4x+11}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{3}{x+2}+\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x=3\ln|x+2|+\ln|x+3|+C$.

Suy ra $a=3;\ b=1$ nên $P=a^2+ab+b^2=13$.

Câu 58. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=ax^2+\frac{b}{x^3}$, $f'(1)=3$, $f(1)=2$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{12}$. Khi đó $2a+b$ bằng

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** 5. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có $f'(1)=3\Rightarrow a+b=3\ (1)$.

Hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$, các điểm $x=1$, $x=\frac{1}{2}$ đều thuộc $(0;+\infty)$ nên

$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(ax^2+\frac{b}{x^3}\right)\mathrm{d}x=\frac{ax^3}{3}-\frac{b}{2x^2}+C$.

+ $f(1)=2\Rightarrow\frac{a}{3}-\frac{b}{2}+C=2\ (2)$.

+ $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{12}\Rightarrow\frac{a}{24}-2b+C=-\frac{1}{12}\ (3)$.

Từ (1), (2) và (3) ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}a+b=3\\ \frac{a}{3}-\frac{b}{2}+C=2\\ \frac{a}{24}-2b+C=-\frac{1}{12}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\\ C=\frac{11}{6}\end{cases}\Rightarrow 2a+b=2.2+1=5.$$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 59. **(Mã 102 2019)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{3x-1}{(x-1)^2}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ là

A. $3\ln(x-1)-\frac{1}{x-1}+c$. **B.** $3\ln(x-1)+\frac{2}{x-1}+c$.

C. $3\ln(x-1)-\frac{2}{x-1}+c$. **D.** $3\ln(x-1)+\frac{1}{x-1}+c$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\frac{3x-3+2}{(x-1)^2}=\frac{3(x-1)+2}{(x-1)^2}=\frac{3}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}$

Vậy $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\frac{3}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x=3\int\frac{\mathrm{d}(x-1)}{x-1}+2\int\frac{\mathrm{d}(x-1)}{(x-1)^2}$

$=3\ln|x-1|+2\int(x-1)^{-2}\mathrm{d}(x-1)=3\ln(x-1)-\frac{2}{x-1}+C$ vì $x>1$.

Câu 60. **(Mã 103 - 2019)** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{2x+1}{(x+2)^2}$ trên khoảng $(-2;+\infty)$ là

A. $2\ln(x+2)+\frac{3}{x+2}+C$. **B.** $2\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}+C$.

C. $2\ln(x+2)-\dfrac{1}{x+2}+C$. **D.** $2\ln(x+2)-\dfrac{3}{x+2}+C$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $x+2=t\Rightarrow x=t-1\Rightarrow dx=dt$ với $t>0$

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{2t-1}{t^2}\mathrm{d}t=\int\left(\dfrac{2}{t}-\dfrac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=2\ln t+\dfrac{1}{t}+C$

Hay $\int f(x)\mathrm{d}x=2\ln(x+2)+\dfrac{1}{x+2}+C.$

Câu 61. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $F(1)=\dfrac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S=F(1)+F(2)+F(3)+\ldots+F(2019)$ bằng

A. $\dfrac{2019}{2020}$. **B.** $\dfrac{2019.2021}{2020}$. **C.** $2018\dfrac{1}{2020}$. **D.** $-\dfrac{2019}{2020}$.

Lời giải

Ta có $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}=\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$.

Đặt $t=x(x+1)=x^2+x\Rightarrow \mathrm{d}t=(2x+1)\mathrm{d}x$.

Khi đó $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{t}+C=-\dfrac{1}{x(x+1)}+C$.

Nguyễn Bảo Vương

Mặt khác, $F(1)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow-\dfrac{1}{2}+C=\dfrac{1}{2}\Rightarrow C=1$.

Vậy $F(x)=-\dfrac{1}{x(x+1)}+1$.

Suy ra

$$S=F(1)+F(2)+F(3)+\ldots+F(2019)=-\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{2019.2020}\right)+2019$$

$$=-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}\right)+2019=-\left(1-\frac{1}{2020}\right)+2019$$

$$=2018+\frac{1}{2020}=2018\frac{1}{2020}.$$

Câu 62. Giả sử $\int\dfrac{(2x+3)\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}=-\dfrac{1}{g(x)}+C$ (C là hằng số).

Tính tổng các nghiệm của phương trình $g(x)=0$.

A. -1. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -3.

Lời giải

Ta có $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1=\left[(x^2+3x)+1\right]^2$.

Đặt $t=x^2+3x$, khi đó $\mathrm{d}t=(2x+3)\mathrm{d}x$.

Tích phân ban đầu trở thành $\int\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2}=-\frac{1}{t+1}+C$.

Trở lại biến x, ta có $\int\frac{(2x+3)\mathrm{d}x}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}=-\frac{1}{x^2+3x+1}+C$.

Vậy $g(x)=x^2+3x+1$.

$$g(x)=0\Leftrightarrow x^2+3x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\\x=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình bằng -3.

Câu 63. **(Nam Trực - Nam Định - 2018)** Cho $I=\int\frac{1}{x^3(1+x^2)}dx=\frac{-a}{x^2}-b\ln|x|+2c\ln(1+x^2)+C$. Khi đó $S=a+b+c$ bằng

A. $\frac{-1}{4}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 2.

Lời giải

$$I=\int\frac{x}{x^4(1+x^2)}dx$$

$t=1+x^2\Rightarrow dt=2xdx$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(t-1)^2.t}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{-1}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{1}{t}\right)dt=\frac{1}{2}\left(-\ln|t-1|-\frac{1}{t-1}+\ln|t|\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\ln|x^2|-\frac{1}{x^2}+\ln|1+x^2|\right)+C=-\frac{1}{2x^2}-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a=\frac{1}{2}\\b=1\\c=\frac{1}{4}\end{array}\right.\Rightarrow S=a+b+c=\frac{7}{4}.$$

Câu 64. **(Trường VINSCHOOL - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $R\setminus\{-1;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2-1}$. Biết $f(3)+f(-3)=4$ và $f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{-1}{3}\right)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-5)+f(0)+f(2)$ bằng

A. $5-\frac{1}{2}\ln 2$. **B.** $6-\frac{1}{2}\ln 2$. **C.** $5+\frac{1}{2}\ln 2$. **D.** $6+\frac{1}{2}\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=\frac{1}{x^2-1}\Rightarrow f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{1}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$ với $x\in R\setminus\{-1;1\}$.

Khi đó: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_1 & khi \quad x>1\\ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_2 & khi \quad -1<x<1\\ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_3 & khi \quad x<-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(3)+f(-3)=C_1+C_3=4\\ f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{-1}{3}\right)=2C_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1+C_3=4\\ C_2=1\end{cases}$

Vậy $f(-5)+f(0)+f(2)=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}+C_3+C_2+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}+C_1=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}+5=5-\frac{1}{2}\ln 2$.

Câu 65. **(Quảng Xương - Thanh Hóa - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x^2+x-2}$, $f(-3)-f(3)=0$ và $f(0)=\frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4)+f(-1)-f(4)$ bằng

A. $\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}$. **B.** $\ln 80+1$. **C.** $\frac{1}{3}\ln\frac{4}{5}+\ln 2+1$. **D.** $\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}+1$.

Lời giải

$f(x)=\int\frac{1}{x^2+x-2}dx=\begin{cases}\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C_1,\forall x\in(-\infty;-2)\\ \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C_2,\forall x\in(-2;1)\\ \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C_3,\forall x\in(1;+\infty)\end{cases}$.

Ta có $f(-3)=\frac{1}{3}\ln 4+C_1,\forall x\in(-\infty;2)$, $f(0)=\frac{1}{3}\ln\frac{1}{2}+C_1,\forall x\in(-2;1)$,

$f(3)=\frac{1}{3}\ln\frac{2}{5}+C_3,\forall x\in(1;+\infty)$,

Theo giả thiết ta có $f(0)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow C_2=\frac{1}{3}(1+\ln 2)$.

$\Rightarrow f(-1)=\frac{2}{3}\ln 2+\frac{1}{3}$.

Và $f(-3)-f(3)=0\Leftrightarrow C_1-C_3=\frac{1}{3}\ln\frac{1}{10}$.

Vậy $f(-4)+f(-1)-f(4)=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{2}+C_1+\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}\ln 2-C_2=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{3}$.

Câu 66. **(Chuyên Nguyễn Quang Diêu - Đồng Tháp - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{1}{x-1}$, $f(0)=2017$,, $f(2)=2018$. Tính $S=(f(3)-2018)(f(-1)-2017)$.

A. $S=1$. **B.** $S=1+\ln^2 2$. **C.** $S=2\ln 2$. **D.** $S=\ln^2 2$.

Lời giải

Ta có $f(x)=\int\frac{1}{x-1}dx=\ln|x-1|+C=\begin{cases}\ln(x-1)+C_1 & \text{khi } x>1\\ \ln(1-x)+C_2 & \text{khi } x<1\end{cases}$.

Lại có $f(0)=2017\Rightarrow\ln(1-0)+C_2=2017\Rightarrow C_2=2017$.

$f(2)=2018\ \ln(2-1)+C_1=2018\Rightarrow C_1=2018$.

Do đó $S=\left[\ln(3-1)+2018-2018\right]\left[\ln(1-(-1))+2017-2017\right]=\ln^2 2$.

Câu 67. **(Sở Phú Thọ - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$, $f(-2)+f(2)=0$ và $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$. Tính $f(-3)+f(0)+f(4)$ được kết quả

A. $\ln\dfrac{6}{5}+1$. **B.** $\ln\dfrac{6}{5}-1$. **C.** $\ln\dfrac{4}{5}+1$. **D.** $\ln\dfrac{4}{5}-1$.

Lời giải

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{2}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\begin{cases}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_1 \text{ khi } x<-1\\ \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_2 \text{ khi } -1<x<1\\ \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C_3 \text{ khi } x>1\end{cases}$.

Khi đó $\begin{cases}f(-2)+f(2)=0\\ f\left(-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ln 3+C_1+\ln\dfrac{1}{3}+C_3=0\\ \ln 3+C_2+\ln\dfrac{1}{3}+C_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1+C_3=0\\ C_2=1\end{cases}$

Do đó $f(-3)+f(0)+f(4)=\ln 2+C_1+C_2+\ln\dfrac{3}{5}+C_3=\ln\dfrac{6}{5}+1$.

Dạng 4. Nguyên hàm từng phần

Cho hai hàm số u và v liên tục trên $[a;b]$ và có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$. Khi đó:

$\int udv=uv-\int vdu(*)$

Để tính tích phân $I=\int\limits_a^b f(x)dx$ bằng phương pháp từng phần ta làm như sau:

Bước 1: Chọn u,v sao cho $f(x)dx=udv$ (chú ý: $dv=v'(x)dx$).

Tính $v=\int dv$ và $du=u'.dx$.

Bước 2: Thay vào công thức $(*)$ và tính $\int vdu$.

Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int vdu$ dễ tính hơn $\int udv$. Ta thường gặp các dạng sau

Dạng 1 : $I=\int P(x)\left[\begin{matrix}\sin x\\ \cos x\end{matrix}\right]dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức

Với dạng này, ta đặt $u=P(x)$, $dv=\left[\begin{matrix}\sin x\\ \cos x\end{matrix}\right]dx$.

Dạng 2 : $I=\int(x)e^{ax+b}dx$

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b}dx \end{cases}$, trong đó $P(x)$ là đa thức

Dạng 3 : $I = \int P(x)\ln(mx+n)dx$

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \ln(mx+n) \\ dv = P(x)dx \end{cases}$.

Dạng 4 : $I = \int \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} e^x dx$

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} \\ dv = e^x dx \end{cases}$ để tính $\int vdu$ ta đặt $\begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} \\ dv = e^x dx \end{cases}$.

Câu 68. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1).f'(x)$ là

A. $\dfrac{x^2+2x-2}{2\sqrt{x^2+2}} + C$. **B.** $\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2}} + C$. **C.** $\dfrac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+2}} + C$. **D.** $\dfrac{x+2}{2\sqrt{x^2+2}} + C$.

Lời giải

Chọn B.

Tính $g(x) = \int (x+1)f'(x)\mathrm{d}x = (x+1)f(x) - \int (x+1)'f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{x^2+x}{\sqrt{x^2+2}} - \int f(x)\mathrm{d}x$

$= \dfrac{x^2+x}{\sqrt{x^2+2}} - \int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x = \dfrac{x^2+x}{\sqrt{x^2+2}} - \sqrt{x^2+2} + C = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2}} + C.$

Câu 69. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1)f'(x)$ là

A. $\dfrac{x^2+2x-3}{2\sqrt{x^2+3}} + C$. **B.** $\dfrac{x+3}{2\sqrt{x^2+3}} + C$. **C.** $\dfrac{2x^2+x+3}{\sqrt{x^2+3}} + C$. **D.** $\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+3}} + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int (x+1)f'(x)\mathrm{d}x = (x+1)f(x) - \int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}\mathrm{d}x = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+3}} + C$.

Câu 70. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x+1)f'(x)$

A. $\dfrac{x^2+2x-1}{2\sqrt{x^2+1}} + C$. **B.** $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + C$. **C.** $\dfrac{2x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}} + C$. **D.** $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} + C$.

Lời giải

Chọn D

Xét $\int g(x)dx = \int (x+1)f'(x)dx$. Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$

Vậy $\int g(x)dx=(x+1)f(x)-\int f(x)dx \Rightarrow \int g(x)dx=\frac{(x+1)x}{\sqrt{x^2+1}}-\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$\Rightarrow \int g(x)dx=\frac{(x+1)x}{\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{x^2+1}+C \Rightarrow \int g(x)dx=\frac{x^2+x-x^2-1}{\sqrt{x^2+1}}+C$

$\Rightarrow \int g(x)dx=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}+C.$

Câu 71. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x)=(x+1)f'(x)$ là

A. $\frac{x+4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$. **B.** $\frac{x-4}{\sqrt{x^2+4}}+C$. **C.** $\frac{x^2+2x-4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$. **D.** $\frac{2x^2+x+4}{\sqrt{x^2+4}}+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \Rightarrow f'(x)=\frac{x'.\sqrt{x^2+4}-\left(\sqrt{x^2+4}\right)'.x}{x^2+4}$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+4}-\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}.x}{x^2+4}=\frac{\frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4}=\frac{4}{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^3}$

Suy ra: $g(x)=(x+1)f'(x)=x.f'(x)+f'(x)$

$\int g(x)dx=\int\left[x.f'(x)+f'(x)\right]dx=\int x.f'(x)dx+\int f'(x)dx$

$=\int \frac{4x}{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^3}dx+\int f'(x)dx$

Xét: $I=\int \frac{4x}{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^3}dx$

Đặt $t=x^2+4 \Rightarrow dt=2xdx$

Suy ra: $I=\int \frac{2dt}{\left(\sqrt{t}\right)^3}=\int \frac{2dt}{t^{\frac{3}{2}}}=2\int t^{-\frac{3}{2}}dt=2\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+C_1=\frac{-4}{\sqrt{t}}+C_1=\frac{-4}{\sqrt{x^2+4}}+C_1$

và: $J=\int f'(x)dx=f(x)+C_2$

Vậy: $\int g(x)dx=\frac{-4}{\sqrt{x^2+4}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}+C=\frac{x-4}{\sqrt{x^2+4}}+C$.

Cách 2: $g(x)=(x+1)f'(x)$

$\Rightarrow \int g(x)dx=\int (x+1)f'(x)dx$

Đặt: $\begin{cases}u=x+1\\dv=f'(x)dx\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}du=dx\\v=f(x)\end{cases}$

Suy ra: $\int g(x)dx=(x+1)f(x)-\int f(x)dx=\dfrac{(x+1)x}{\sqrt{x^2+4}}-\int\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$

$=\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x^2+4}}-\int\dfrac{d\left(x^2+4\right)}{2\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x^2+4}}-\sqrt{x^2+4}+C=\dfrac{x-4}{\sqrt{x^2+4}}+C.$

Câu 72. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^x$ là:

A. $-\sin 2x+\cos 2x+C$. **B.** $-2\sin 2x+\cos 2x+C$.

C. $-2\sin 2x-\cos 2x+C$. **D.** $2\sin 2x-\cos 2x+C$.

Lời giải

Chọn C

Do $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)\mathrm{e}^x$

nên $f(x)\mathrm{e}^x=(\cos 2x)'\Leftrightarrow f(x)\mathrm{e}^x=-2\sin 2x$.

Khi đó ta có $\int f(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\cos 2x+C$.

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\mathrm{e}^x\end{cases}$.

Khi đó $\int f(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\cos 2x+C\Leftrightarrow\int f(x)\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)=\cos 2x+C$

$\Leftrightarrow f(x)\mathrm{e}^x-\int f'(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\cos 2x+C\Leftrightarrow\int f'(x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=-2\sin 2x-\cos 2x+C$.

Vậy tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\mathrm{e}^x$ là $-2\sin 2x-\cos 2x+C$.

Câu 73. **(Đề Tham Khảo 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x(1+\ln x)$ là:

A. $2x^2\ln x+3x^2$. **B.** $2x^2\ln x+x^2$.

C. $2x^2\ln x+3x^2+C$. **D.** $2x^2\ln x+x^2+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=4x(1+\ln x)\Rightarrow F(x)=\int\left(4x(1+\ln x)\right)dx$

đặt

$\begin{cases}u=1+\ln x\Rightarrow du=\dfrac{1}{x}\\ dv=4x\Rightarrow v=2x^2\end{cases}\Rightarrow F(x)=2x^2(1+\ln x)-\int 2xdx=2x^2(1+\ln x)-x^2+C=2x^2\ln x+x^2+C$

Câu 74. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\sin x$ là

A. $F(x)=x\cos x+\sin x+C.$ **B.** $F(x)=x\cos x-\sin x+C.$

C. $F(x)=-x\cos x-\sin x+C.$ **D.** $F(x)=-x\cos x+\sin x+C.$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{dv} = \sin x \mathrm{dx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{du} = \mathrm{dx} \\ v = -\cos x \end{cases}$.

Suy ra $\int x \sin x \mathrm{dx} = -x\cos x + \int \cos x \mathrm{dx} = -x\cos x + \sin x + C$.

Câu 75. **(Chuyên Phan Bội Châu 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x.e^{2x}$ là :

A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$ **B.** $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}(x-2) + C$

C. $F(x) = 2e^{2x}(x-2) + C$ **D.** $F(x) = 2e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$

Lờigiải

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$\Rightarrow \int x.e^{2x} dx = \frac{1}{2}x.e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x} dx$

$\Rightarrow \int x.e^{2x} dx = \frac{1}{2}x.e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$

Câu 76. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x-1)e^x$ là

A. $(2x-3)e^x + C$. **B.** $(2x+3)e^x + C$.

C. $(2x+1)e^x + C$. **D.** $(2x-1)e^x + C$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Gọi $I = \int (2x-1)e^x \mathrm{dx}$.

Đặt $\begin{cases} u = 2x-1 \\ \mathrm{dv} = e^x \mathrm{dx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{du} = 2\mathrm{dx} \\ v = e^x \end{cases}$.

$\Rightarrow I = (2x-1)e^x - 2\int e^x \mathrm{dx} = (2x-1)e^x - 2e^x + C = (2x-3)e^x + C$.

Câu 77. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{2x}$?

A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$ **B.** $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}(x-2) + C.$

C. $F(x) = 2e^{2x}(x-2) + C.$ **D.** $F(x) = 2e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$

Lời giải

Ta có $F(x) = \int xe^{2x} dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

Suy ra $F(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$

Câu 78. **(Chuyên Sơn La 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(1+\sin x)$ là

A. $\frac{x^2}{2}-x\sin x+\cos x+C$. **B.** $\frac{x^2}{2}-x\cos x+\sin x+C$.

C. $\frac{x^2}{2}-x\cos x-\sin x+C$. **D.** $\frac{x^2}{2}-x\sin x-\cos x+C$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int x(1+\sin x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x+\int x.\sin x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x-\int x\mathrm{d}(\cos x)$

$=\frac{x^2}{2}-\left(x\cos x-\int\cos x\mathrm{d}x\right)=\frac{x^2}{2}-x\cos x+\sin x+C$.

Câu 79. **(Chuyên Thái Bình - Lần 3 - 2020)** Giả sử $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2e^x$. Tính tích $P=abc$.

A. -4. **B.** 1. **C.** -5. **D.** -3.

Lời giải

Chọn A

Ta đặt: $\begin{cases}u=x^2\\dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2xdx\\v=e^x\end{cases}\Rightarrow\int x^2e^x dx=x^2e^x-2\int xe^x dx.$

Ta đặt: $\begin{cases}u=x\\dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=e^x\end{cases}\Rightarrow\int x^2e^x dx=x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^x dx\right)=(x^2-2x+2)e^x$.

Vậy $a=1,b=-2,c=2\Rightarrow P=abc=-4$.

Câu 80. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x(1+e^x)$ là

A. $(2x-1)e^x+x^2$. **B.** $(2x+1)e^x+x^2$. **C.** $(2x+2)e^x+x^2$. **D.** $(2x-2)e^x+x^2$.

Lời giải

Ta có $\int 2x(1+e^x)dx=2\int xdx+2\int xe^x dx$.

Gọi $I=2\int x\ln x dx$. Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=e^x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=e^x\end{cases}$.

Khi đó $I=2xe^x-2\int e^x dx$.

Vậy $\int 2x(1+e^x)dx=2\int xdx+xe^x-2\int e^x dx=x^2+xe^x-2x+C$

$=(2x-2)e^x+x^2+C$.

Câu 81. Họ nguyên hàm của $f(x)=x\ln x$ là kết quả nào sau đây?

A. $F(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{2}x^2+C$. **B.** $F(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x^2+C$.

C. $F(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$. **D.** $F(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{4}x+C$.

Lời giải

Ta có $F(x)=\int f(x)dx=\int x\ln x dx$. Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dx}{x}\\v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$.

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có:

$F(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$.

Câu 82. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=(3x^2+1).\ln x$.

A. $\int f(x)dx=x(x^2+1)\ln x-\frac{x^3}{3}+C$.

B. $\int f(x)dx=x^3\ln x-\frac{x^3}{3}+C$.

C. $\int f(x)dx=x(x^2+1)\ln x-\frac{x^3}{3}-x+C$.

D. $\int f(x)dx=x^3\ln x-\frac{x^3}{3}-x+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I=\int(3x^2+1)\ln xdx$

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\dv=(3x^2+1)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\v=\int(3x^2+1)dx=x^3+x\end{cases}$.

$\Rightarrow I=(x^3+x)\ln x-\int(x^3+x)\frac{1}{x}dx=x(x^2+1)\ln x-\int(x^2+1)dx=x(x^2+1)\ln x-\frac{x^3}{3}-x+C$.

Câu 83. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$ là

A. $-x\cot x+\ln(\sin x)+C$.

B. $x\cot x-\ln|\sin x|+C$.

C. $x\cot x+\ln|\sin x|+C$.

D. $-x\cot x-\ln(\sin x)+C$.

Lời giải

Chọn A

$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\\mathrm{d}v=\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\v=-\cot x\end{cases}$.

Khi đó: $F(x)=\int\frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-x.\cot x+\int\cot x\mathrm{d}x=-x.\cot x+\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=-x.\cot x+\int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin x}$

$=-x.\cot x+\ln|\sin x|+C$. Với $x\in(0;\pi)\Rightarrow\sin x>0\Rightarrow\ln|\sin x|=\ln(\sin x)$.

Vậy $F(x)=-x\cot x+\ln(\sin x)+C$.

Câu 84. **(Sở Phú Thọ 2019) Họ nguyên hàm của hàm số** $y=3x(x+\cos x)$ **là**

A. $x^3+3(x\sin x+\cos x)+C$

B. $x^3-3(x\sin x+\cos x)+C$

C. $x^3+3(x\sin x-\cos x)+C$

D. $x^3-3(x\sin x-\cos x)+C$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int 3x(x+\cos x)\mathrm{d}x=\int 3x^2\mathrm{d}x+\int 3x\cos x\mathrm{d}x$

• $\int 3x^2\mathrm{d}x = x^3 + C_1$

• $\int 3x\cos x\mathrm{d}x = \int 3x.\mathrm{d}(\sin x) = 3x.\sin x - \int 3\sin x\mathrm{d}x = 3x.\sin x + 3\cos x + C_2$

Vậy $\int 3x(x+\cos x)\mathrm{d}x = x^3 + 3(x\sin x + \cos x) + C$

Câu 85. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + xe^x$ là

A. $\frac{1}{5}x^5 + (x+1)\mathrm{e}^x + C$. **B.** $\frac{1}{5}x^5 + (x-1)\mathrm{e}^x + C$.

C. $\frac{1}{5}x^5 + x\mathrm{e}^x + C$. **D.** $4x^3 + (x+1)\mathrm{e}^x + C$.

Lời giải

Ta có: $\int (x^4 + xe^x)\mathrm{d}x = \int x^4\mathrm{d}x + \int xe^x\mathrm{d}x$.

+) $\int x^4\mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5 + C_1$.

+) Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x \end{cases}$.

Suy ra: $\int xe^x\mathrm{d}x = xe^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = xe^x - \mathrm{e}^x + C_2 = (x-1)\mathrm{e}^x + C_2$.

Vậy $\int (x^4 + xe^x)\mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5 + (x-1)\mathrm{e}^x + C$.

Câu 86. Cho hai hàm số $F(x), G(x)$ xác định và có đạo hàm lần lượt là $f(x), g(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $F(x).G(x) = x^2\ln(x^2+1)$ và $F(x).g(x) = \frac{2x^3}{x^2+1}$. Họ nguyên hàm của $f(x).G(x)$ là

A. $(x^2+1)\ln(x^2+1) + 2x^2 + C$. **B.** $(x^2+1)\ln(x^2+1) - 2x^2 + C$.

C. $(x^2+1)\ln(x^2+1) - x^2 + C$. **D.** $(x^2+1)\ln(x^2+1) + x^2 + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$F(x).G(x) = \int (F(x).G(x))'\mathrm{d}x = \int (F'(x).\mathrm{G}(x) + F(x).\mathrm{G}'(x))\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow \int (F'(x).\mathrm{G}(x))\mathrm{d}x = F(x).G(x) - \int (F(x).\mathrm{G}'(x))\mathrm{d}x$

$= x^2\ln(x^2+1) - \int \left(\frac{2x^3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = x^2\ln(x^2+1) - (x^2+1) + \ln(x^2+1) + C$

$= (x^2+1)\ln(x^2+1) - x^2 + C$.

Câu33. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x.e^{2x}$ là

A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$. **B.** $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}(x-2) + C$.

C. $F(x) = 2e^{2x}(x-2) + C$. **D.** $F(x) = 2e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$.

$$F(x)=x.e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}x.e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C=\frac{1}{2}e^{2x}\left(x-\frac{1}{2}\right)+C.$$

Câu 87. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\int xe^x\mathrm{d}x=e^x+xe^x+C$.

B. $\int xe^x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}e^x+e^x+C$.

C. $\int xe^x\mathrm{d}x=xe^x-e^x+C$.

D. $\int xe^x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}e^x+C$.

Lời giải

Sử dụng công thức: $\int u\mathrm{d}v=u.v-\int v\mathrm{d}u$.

Ta có: $\int xe^x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\left(e^x\right)=xe^x-\int e^x\mathrm{d}x=xe^x-e^x+C$.

Câu 88. **(Sở Bắc Giang 2019)** Cho hai hàm số $F(x)$, $G(x)$ xác đinh và có đạo hàm lần lượt là $f(x)$, $g(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết $F(x).\mathrm{G}(x)=x^2\ln\left(x^2+1\right)$ và $F(x)g(x)=\frac{2x^3}{x^2+1}$. Tìm họ nguyên hàm của $f(x)G(x)$.

A. $\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)+2x^2+C$.

B. $\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)-2x^2+C$.

C. $\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)-x^2+C$.

D. $\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)+x^2+C$.

Lời giải

Ta có:

$\int f(x)G(x)\mathrm{d}x=\int G(x)\mathrm{d}\left(F(x)\right)$

$=G(x).F(x)-\int F(x)\mathrm{d}\left(G(x)\right)=G(x).F(x)-\int F(x)\mathrm{g}(x)\mathrm{d}x$.

$\Leftrightarrow\int f(x)G(x)\mathrm{d}x=x^2\ln\left(x^2+1\right)-\int\frac{2x^3}{x^2+1}\mathrm{d}x=x^2\ln\left(x^2+1\right)-\int\left(2x-\frac{2x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=$

$x^2\ln\left(x^2+1\right)-x^2+\int\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}\left(x^2+1\right)=x^2\ln\left(x^2+1\right)-x^2+\ln\left(x^2+1\right)+C$

$=\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)-x^2+C$.

Câu 89. Cho biết $F(x)=\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $f(x)=\frac{\left(x^2+a\right)^2}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của $g(x)=x\cos ax$.

A. $x\sin x-\cos x+C$

B. $\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$

C. $x\sin x+\cos+C$

D. $\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$

Lời giải

Chọn C

Ta có $F'(x)=x^2+2+\frac{1}{x^2}=\frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^2}$.

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\frac{\left(x^2+a\right)^2}{x^2}$ nên $a=1$.

$\int g(x)\mathrm{d}x=\int x\cos x\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \cos x \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \sin x \end{cases}$

$\int g(x)\mathrm{d}x = \int x\cos x\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C$

Câu 90. Họ nguyên hàm của hàm số $y = \dfrac{\left(2x^2 + x\right)\ln x + 1}{x}$ là

A. $\left(x^2 + x + 1\right)\ln x - \dfrac{x^2}{2} + x + C$.

B. $\left(x^2 + x - 1\right)\ln x + \dfrac{x^2}{2} - x + C$.

C. $\left(x^2 + x + 1\right)\ln x - \dfrac{x^2}{2} - x + C$.

D. $\left(x^2 + x - 1\right)\ln x - \dfrac{x^2}{2} + x + C$.

Lời giải

Ta có: $\int \dfrac{\left(2x^2 + x\right)\ln x + 1}{x}\mathrm{d}x = \int \left(2x + 1\right)\ln x\,\mathrm{d}x + \int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = I_1 + I_2$.

$I_1 = \int \left(2x + 1\right)\ln x\,\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \left(2x + 1\right)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = x^2 + x \end{cases}$.

$I_1 = \left(x^2 + x\right)\ln x - \int \left(x^2 + x\right)\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \left(x^2 + x\right)\ln x - \int \left(x + 1\right)\mathrm{d}x$

$= \left(x^2 + x\right)\ln x - \dfrac{x^2}{2} - x + C_1$.

$I_2 = \int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x + C_2$.

$\int \dfrac{\left(2x^2 + x\right)\ln x + 1}{x}\mathrm{d}x = I_1 + I_2$

$= \left(x^2 + x\right)\ln x - \dfrac{x^2}{2} - x + C_1 + \ln x + C_2 = \left(x^2 + x + 1\right)\ln x - \dfrac{x^2}{2} - x + C$.

Nguyễn Bảo Vương

Dạng 4.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện

Câu 91. **(Mã 104 2017)** Cho $F(x) = \dfrac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\dfrac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

A. $\int f'(x)\ln x\mathrm{d}x = -\left(\dfrac{\ln x}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}\right) + C$

B. $\int f'(x)\ln x\mathrm{d}x = \dfrac{\ln x}{x^2} + \dfrac{1}{2x^2} + C$

C. $\int f'(x)\ln x\mathrm{d}x = -\left(\dfrac{\ln x}{x^2} + \dfrac{1}{2x^2}\right) + C$

D. $\int f'(x)\ln x\mathrm{d}x = \dfrac{\ln x}{x^2} + \dfrac{1}{x^2} + C$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int \dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2x^2}$. Chọn $f(x) = \dfrac{-1}{x^2}$.

Suy ra $\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{2}{x^3}\ln x\,\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \dfrac{2}{x^3}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \\ v = \dfrac{-1}{x^2} \end{cases}$.

Khi đó: $\int f'(x)\ln x\,dx=\int\frac{\ln x}{x^3}dx=-\frac{\ln x}{x^2}+\int\frac{1}{x^3}dx=-\left(\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{2x^2}\right)+C$.

Câu 92. **(Mã 105 2017)** Cho $F(x)=-\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$

A. $\int f'(x)\ln x dx=\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{5x^5}+C$ **B.** $\int f'(x)\ln x dx=\frac{\ln x}{x^3}-\frac{1}{5x^5}+C$

C. $\int f'(x)\ln x dx=-\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{3x^3}+C$ **D.** $\int f'(x)\ln x dx=\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{3x^3}+C$

Lời giải

Chọn C

Ta có $F'(x)=\frac{f(x)}{x}\Rightarrow f(x)=x.F'(x)=x.\left(-\frac{1}{3}.x^{-3}\right)'=\frac{1}{x^3}=x^{-3}$

$\Rightarrow f'(x)=-3x^{-4}\Rightarrow f'(x)\ln x=-3x^{-4}\ln x$

Vậy $\int f'(x)\ln x dx=\int(-3x^{-4}\ln x)dx=-3\int\ln x.x^{-4}dx$

Đặt $u=\ln x; dv=x^{-4}dx\Rightarrow du=\frac{dx}{x}; v=\frac{x^{-3}}{-3}$

Nên $\int f'(x)\ln x dx=-3\int\ln x.x^{-4}dx=-3\left(\frac{\ln x}{-3x^3}+\int\frac{x^{-4}}{3}dx\right)=\frac{\ln x}{x^3}-\int x^{-4}dx=\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{3x^3}+C$

Câu 93. **(Mã 110 2017)** Cho $F(x)=(x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

A. $\int f'(x)e^{2x}dx=(4-2x)e^x+C$ **B.** $\int f'(x)e^{2x}dx=(x-2)e^x+C$

C. $\int f'(x)e^{2x}dx=\frac{2-x}{2}e^x+C$ **D.** $\int f'(x)e^{2x}dx=(2-x)e^x+C$

Lời giải

Chọn D

Theo đề bài ta có $\int f(x).e^{2x}dx=(x-1)e^x+C$, suy ra $f(x).e^{2x}=\left[(x-1)e^x\right]'=e^x+(x-1).e^x$

$\Rightarrow f(x)=e^{-x}+(x-1).e^{-x}=x.e^{-x}\Rightarrow f'(x)=(1-x).e^{-x}$

Suy ra $K=\int f'(x)e^{2x}dx=\int(1-x)e^x dx=\int(1-x)d(e^x)=e^x(1-x)+\int e^x dx=(2-x)e^x+C$.

Câu 94. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=xe^x$ và $f(0)=2$.Tính $f(1)$.

A. $f(1)=3$. **B.** $f(1)=e$. **C.** $f(1)=5-e$. **D.** $f(1)=8-2e$.

Lời giải

Ta có:

$f(x)=\int f'(x)dx=\int x.e^x dx$

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=e^x dx\end{cases}\rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=e^x\end{cases}\rightarrow f(x)=x.e^x-\int e^x dx=x.e^x-e^x+C$

Theo đề: $f(0)=2 \Leftrightarrow 2=-1+C \Leftrightarrow C=3$

$\Rightarrow f(x)=x.e^x-e^x+3$

$\Rightarrow f(1)=3$.

Câu 95. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=\mathrm{e}^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)\mathrm{e}^{2x}$ là

A. $(x-2)\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x+C$ **B.** $(x+2)\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+C$ **C.** $(x-1)\mathrm{e}^x+C$ **D.** $(x+1)\mathrm{e}^x+C$

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)+f'(x)=\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow f(x)\mathrm{e}^x+f'(x)\mathrm{e}^x=1 \Leftrightarrow \left(f(x)\mathrm{e}^x\right)'=1 \Leftrightarrow f(x)\mathrm{e}^x=x+C_1$.

Vì $f(0)=2 \Rightarrow C_1=2 \Rightarrow f(x)\mathrm{e}^{2x}=(x+2)\mathrm{e}^x \Rightarrow \int f(x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\int (x+2)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=x+2 \\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=\mathrm{e}^x \end{cases}$

$\Rightarrow \int f(x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\int (x+2)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=(x+2)\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=(x+2)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C=(x+1)\mathrm{e}^x+C$.

Câu 96. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x, f(0)=0$ và $\int f(x)\mathrm{d}x=(ax+b)\mathrm{e}^x+c$ với a,b,c là các hằng số. Khi đó:

A. $a+b=2$. **B.** $a+b=3$. **C.** $a+b=1$. **D.** $a+b=0$.

Lời giải

Theo đề: $f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$. Nguyên hàm 2 vế ta được

$\int f'(x)\mathrm{d}x=\int (x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x dx$

$\Rightarrow f(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C=x\mathrm{e}^x+C$

Mà $f(0)=0 \Rightarrow 0.\mathrm{e}^0+C=0 \Leftrightarrow C=0 \Rightarrow f(x)=x\mathrm{e}^x$.

$\Rightarrow \int f(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C=(x-1)\mathrm{e}^x+C$.

Suy ra $a=1; b=-1 \Rightarrow a+b=0$.

Câu 97. **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Tĩnh - 2018)** Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}$. Tính $F(x)$ biết $F(0)=1$.

A. $F(x)=-(x+1)\mathrm{e}^{-x}+2$. **B.** $F(x)=(x+1)\mathrm{e}^{-x}+1$.

C. $F(x)=(x+1)\mathrm{e}^{-x}+2$. **D.** $F(x)=-(x+1)\mathrm{e}^{-x}+1$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=-\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$.

Do đó $\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-x\mathrm{e}^{-x}+\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}+C=F(x;C)$.

$F(0)=1 \Leftrightarrow -\mathrm{e}^{-0}+C=1 \Leftrightarrow C=2$. Vậy $F(x)=-(x+1)\mathrm{e}^{-x}+2$.

Câu 98. **(Sở Quảng Nam - 2018)** Biết $\int x\cos 2x\mathrm{d}x = ax\sin 2x + b\cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab?

A. $ab = \frac{1}{8}$. **B.** $ab = \frac{1}{4}$. **C.** $ab = -\frac{1}{8}$. **D.** $ab = -\frac{1}{4}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \cos 2x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

Khi đó $\int x\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$.

Vậy $ab = \frac{1}{8}$.

Câu 99. **(Chuyên Đh Vinh - 2018)** Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x^2}$ sao cho $F(-2) + F(1) = 0$. Giá trị của $F(-1) + F(2)$ bằng

A. $\frac{10}{3}\ln 2 - \frac{5}{6}\ln 5$. **B.** 0. **C.** $\frac{7}{3}\ln 2$. **D.** $\frac{2}{3}\ln 2 + \frac{3}{6}\ln 5$.

Lời giải

Tính $\int \frac{\ln(x+3)}{x^2}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+3) \\ \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x+3} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$

Ta có $\int \frac{\ln(x+3)}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\ln(x+3) + \int \frac{\mathrm{d}x}{x(x+3)} = -\frac{1}{x}\ln(x+3) + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x}{x+3}\right| + C = F(x,C)$.

Lại có $F(-2) + F(1) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\ln 2 + C\right) + \left(-\ln 4 + \frac{1}{3}\ln\frac{1}{4} + C\right) = 0 \Leftrightarrow 2C = \frac{7}{3}\ln 2$.

Suy ra $F(-1) + F(2) = \ln 2 + \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{3}\ln\frac{2}{5} + 2C = \frac{10}{3}\ln 2 - \frac{5}{6}\ln 5$.

Câu 100. **(THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018)** Gọi $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln(x-1)$. Cho biết $g(2) = 1$ và $g(3) = a\ln b$ trong đó a, b là các số nguyên dương phân biệt. Hãy tính giá trị của $T = 3a^2 - b^2$

A. $T = 8$. **B.** $T = -17$. **C.** $T = 2$. **D.** $T = -13$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x-1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x-1} \\ v = x-1 \end{cases}$

$g(x) = \int \ln(x-1)dx = (x-1)\ln(x+1) - \int \frac{x-1}{x-1}dx = (x-1)\ln(x-1) - x + C$

Do $g(2) = 1 \Leftrightarrow 1\ln 1 - 2 + C = 1 \Leftrightarrow C = 3 \Rightarrow g(x) = (x-1)\ln(x-1) - x + 3$

Suy ra: $g(3)=2\ln 2-3+3=2\ln 2=\ln 4 \Rightarrow a=1, b=4 \Rightarrow 3a^2-b^2=-13$

Câu 101. (Sở Quảng Nam - 2018) Biết $\int x\cos 2x\mathrm{d}x=ax\sin 2x+b\cos 2x+C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab?

A. $ab=\frac{1}{8}$. **B.** $ab=\frac{1}{4}$. **C.** $ab=-\frac{1}{8}$. **D.** $ab=-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\cos 2x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{cases}$

Khi đó $\int x\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$

$\Rightarrow a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$.

Vậy $ab=\frac{1}{8}$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 25 NGUYÊN HÀM

TÀI LIỆU DÀNH CHO HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Dạng 1. Nguyên hàm của hàm ẩn hoặc liên quan đến phương trình f(x),f'(x),f''(x)

Dạng 1. Bài toán tích phân liên quan đến đẳng thức $u(x)f'(x)+u'(x)f(x)=h(x)$

Phương pháp:

Dễ dàng thấy rằng $u(x)f'(x)+u'(x)f(x)=[u(x)f(x)]'$

Do đó $u(x)f'(x)+u'(x)f(x)=h(x)\Leftrightarrow[u(x)f(x)]'=h(x)$

Suy ra $u(x)f(x)=\int h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 2. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x)+f(x)=h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với e^x ta duroc $e^x\cdot f'(x)+e^x\cdot f(x)=e^x\cdot h(x)\Leftrightarrow\left[e^x\cdot f(x)\right]'=e^x\cdot h(x)$

Suy ra $e^x\cdot f(x)=\int e^x\cdot h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 3. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thúc $f'(x)-f(x)=h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với e^{-x} ta duroc $e^{-x}\cdot f'(x)-e^{-x}\cdot f(x)=e^{-x}\cdot h(x)\Leftrightarrow\left[e^{-x}\cdot f(x)\right]'=e^{-x}\cdot h(x)$

Suy ra $e^{-x}\cdot f(x)=\int e^{-x}\cdot h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 4. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x)+p(x)\cdot f(x)=h(x)$
(Phương trình vi phân tuyên tinh cấp 1)

Phương pháp:

Nhân hai vế với $e^{\int p(x)dx}$ ta được

$$f'(x)\cdot e^{\int p(x)dx}+p(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\cdot f(x)=h(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\Leftrightarrow\left[f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\right]'=h(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$$

Suy ra $f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}=\int e^{\int p(x)dx}h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 5. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thúc $f'(x)+p(x)\cdot f(x)=0$

Phương pháp:

Chia hai vế với $f(x)$ ta được $\dfrac{f'(x)}{f(x)}+p(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-p(x)$

Suy ra $\int\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=-\int p(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\ln|f(x)|=-\int p(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 6. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x)+p(x)\cdot[f(x)]^n=0$

Phương pháp:

Chia hai vế với $[f(x)]^n$ ta được $\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^n}+p(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^n}=-p(x)$

Suy ra $\int\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^n}\mathrm{d}x=-\int p(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\dfrac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1}=-\int p(x)\mathrm{d}x$

Từ dầy ta dễ dàng tính được $f(x)$

Câu 1. **(Mã 103 2018)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{25}$ và $f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{391}{400}$ **B.** $-\frac{1}{40}$ **C.** $-\frac{41}{400}$ **D.** $-\frac{1}{10}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2\Rightarrow-\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=-4x^3\Rightarrow\left[\frac{1}{f(x)}\right]'=-4x^3\Rightarrow\frac{1}{f(x)}=-x^4+C$

Do $f(2)=-\frac{1}{25}$, nên ta có $C=-9$. Do đó $f(x)=-\frac{1}{x^4+9}\Rightarrow f(1)=-\frac{1}{10}$.

Câu 2. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\left(f'(x)\right)^2=f(x).e^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Khi đó $f(2)$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(12;13)$. **B.** $(9;10)$. **C.** $(11;12)$. **D.** $(13;14)$.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm số $y=f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời $f(0)=2$ nên $f'(x)\geq0$ và $f(x)>0$ với mọi $x\in[0;+\infty)$.

Từ giả thiết $\left(f'(x)\right)^2=f(x).e^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ suy ra $f'(x)=\sqrt{f(x)}.e^{\frac{x}{2}},\ \forall x\in[0;+\infty)$.

Do đó, $\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}},\ \forall x\in[0;+\infty)$.

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được $\sqrt{f(x)}=e^{\frac{x}{2}}+C,\ \forall x\in[0;+\infty)$ với C là hằng số nào đó.

Kết hợp với $f(0)=2$, ta được $C=\sqrt{2}-1$.

Từ đó, tính được $f(2)=\left(e+\sqrt{2}-1\right)^2\approx9{,}81$.

Câu 3. **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{4}{19}$ và $f'(x)=x^3f^2(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** -1. **D.** $-\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=x^3f^2(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=x^3\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int x^3dx\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}=\frac{x^4}{4}+C$.

Mà $f(2)=-\frac{4}{19}\Rightarrow\frac{19}{4}=\frac{16}{4}+C\Rightarrow C=\frac{3}{4}$. Suy ra $f(x)=-\frac{4}{x^4+3}$.

Vậy $f(1)=-1$.

Câu 4. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn điều kiện: $f(1)=-2\ln 2$ và $x.(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$. Biết $f(2)=a+b.\ln 3$ (a, $b\in\mathbb{Q}$). Giá trị $2(a^2+b^2)$ là

A. $\frac{27}{4}$. **B.** 9. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Chia cả hai vế của biểu thức $x.(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$ cho $(x+1)^2$ ta có

$$\frac{x}{x+1}.f'(x)+\frac{1}{(x+1)^2}f(x)=\frac{x}{x+1}\Leftrightarrow\left[\frac{x}{x+1}.f(x)\right]'=\frac{x}{x+1}.$$

Vậy $\frac{x}{x+1}.f(x)=\int\left[\frac{x}{x+1}.f(x)\right]'dx=\int\frac{x}{x+1}dx=\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=x-\ln|x+1|+C$.

Do $f(1)=-2\ln 2$ nên ta có $\frac{1}{2}.f(1)=1-\ln 2+C\Leftrightarrow-\ln 2=1-\ln 2+C\Leftrightarrow C=-1$.

Khi đó $f(x)=\frac{x+1}{x}(x-\ln|x+1|-1)$.

Vậy ta có $f(2)=\frac{3}{2}(2-\ln 3-1)=\frac{3}{2}(1-\ln 3)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\ln 3\Rightarrow a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$.

Suy ra $2(a^2+b^2)=2\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]=9$.

Câu 5. **(Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(x)<0,\forall x>0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)=(2x+1)f^2(x),\forall x>0$ và $f(1)=-\frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(1)+f(2)+...+f(2020)$ bằng

A. $-\frac{2020}{2021}$. **B.** $-\frac{2015}{2019}$. **C.** $-\frac{2019}{2020}$. **D.** $-\frac{2016}{2021}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$f'(x)=(2x+1)f^2(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+1\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int(2x+1)dx\Rightarrow-\frac{1}{f(x)}=x^2+x+C.$$

Mà $f(1)=-\frac{1}{2}\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\frac{-1}{x^2+x}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$.

$$\begin{cases} f(1)=\dfrac{1}{2}-1 \\ f(2)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2} \\ f(3)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3} \\ \vdots \\ f(2020)=\dfrac{1}{2021}-\dfrac{1}{2020} \end{cases} \Rightarrow f(1)+f(2)+....+f(2020)=-1+\frac{1}{2021}=-\frac{2020}{2021}.$$

Câu 6. **(Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn $f(1)=2\ln 2+1$, $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$. Biết $f(2)=a+b\ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ. Tính $T=a^2-b$.

A. $T=\dfrac{-3}{16}$. **B.** $T=\dfrac{21}{16}$. **C.** $T=\dfrac{3}{2}$. **D.** $T=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x(x+1)f'(x)+(x+2)f(x)=x(x+1)$

$$\Leftrightarrow f'(x)+\frac{x+2}{x(x+1)}f(x)=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}f'(x)+\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}f(x)=\frac{x^2}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{x+1}f(x)\right]'=\frac{x^2}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}f(x)=\int\frac{x^2}{x+1}dx \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1}f(x)=\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+c$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{x+1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+c\right).$$

Ta có $f(1)=2\ln 2+1 \Leftrightarrow c=1$.

Từ đó $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}\left(\dfrac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+1\right)$, $f(2)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}\ln 3$. Nên $\begin{cases} a=\dfrac{3}{4} \\ b=\dfrac{3}{4} \end{cases}$.

Vậy $T=a^2-b=-\dfrac{3}{16}$.

Câu 7. **(THPT Nguyễn Trãi - Đà Nẵng - 2018)** Cho hs $y=f(x)$ thỏa mãn $y'=xy^2$ và $f(-1)=1$ thì giá trị $f(2)$ là

A. e^2. **B.** $2e$. **C.** $e+1$. **D.** e^3.

Lời giải

Ta có $y'=xy^2 \Rightarrow \dfrac{y'}{y}=x^2 \Rightarrow \int\dfrac{y'}{y}\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x \Leftrightarrow \ln y=\dfrac{x^3}{3}+C \Leftrightarrow y=\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}+C}$.

Theo giả thiết $f(-1)=1$ nên $\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}+C}=1 \Leftrightarrow C=\dfrac{1}{3}$.

Vậy $y=f(x)=e^{\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}}$. Do đó $f(2)=e^3$.

Câu 8. **(Sở Hà Nội Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}, f(x)\neq 0$ với mọi x và thỏa mãn $f(1)=-\frac{1}{2}, f'(x)=(2x+1)f^2(x)$ .Biết $f(1)+f(2)+...+f(2019)=\frac{a}{b}-1$ với $a,b\in\mathbb{N},(a,b)=1$ .Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $a-b=2019$. **B.** $ab>2019$. **C.** $2a+b=2022$. **D.** $b\leq 2020$.

Lời giải

$f'(x)=(2x+1)f^2(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+1\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int(2x+1)dx$

$\Rightarrow\int\frac{d(f(x))}{f^2(x)}=\int(2x+1)dx$

$\Rightarrow-\frac{1}{f(x)}=x^2+x+C\ \ (1)$ (Với C là hằng số thực).

Thay $x=1$ vào (1) được $2+C=-\frac{1}{-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow C=0$ .Vậy $f(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$.

$T=f(1)+f(2)+...+f(2019)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+...+\left(\frac{1}{2020}-\frac{1}{2019}\right)=-1+\frac{1}{2020}$.

Suy ra: $\begin{cases}a=1\\b=2020\end{cases}\Rightarrow a-b=-2019$ (Chọn đáp số sai).

Câu 9. **(THPT Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=3x^2\sqrt{x}$. Biết $f(1)=\frac{1}{2}$. Tính $f(4)$?

A. 24. **B.** 14. **C.** 4. **D.** 16.

Lời giải

Chọn D

Trên khoảng $(0;+\infty)$ ta có: $2xf'(x)+f(x)=3x^2\sqrt{x}\Leftrightarrow\sqrt{x}f'(x)+\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{2}x^2$.

$\Rightarrow\left(\sqrt{x}.f(x)\right)'=\frac{3}{2}x^2\Rightarrow\int\left(\sqrt{x}.f(x)\right)'dx=\int\frac{3}{2}x^2dx$.

$\Rightarrow\sqrt{x}.f(x)=\frac{1}{2}x^3+C$. $(*)$

Mà $f(1)=\frac{1}{2}$nên từ $(*)$ có: $\sqrt{1}.f(1)=\frac{1}{2}.1^3+C\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+C\Leftrightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\frac{x^2\sqrt{x}}{2}$.

Vậy $f(4)=\frac{4^2\sqrt{4}}{2}=16$.

Câu 10. **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Cho hàm số $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$ và $f(x)=\sqrt{x+1}.f'(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(x)<2$ **B.** $2<f(x)<4$ **C.** $f(x)>6$ **D.** $4<f(x)<6$

Lời giải

Ta có: $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}}\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\ln\left(f(x)\right)=2\sqrt{x+1}+C$

Mà $f(0)=1$ nên $C=-2\Rightarrow f(x)=e^{2\sqrt{x+1}-2}\Rightarrow f(3)=e^2>6$

Câu 11. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2;4]$ và $f'(x)>0,\forall x\in[2;4]$. Biết $4x^3f(x)=\left[f'(x)\right]^3-x^3,\forall x\in[2;4],f(2)=\frac{7}{4}$. Giá trị của $f(4)$ bằng

A. $\frac{40\sqrt{5}-1}{2}$. **B.** $\frac{20\sqrt{5}-1}{4}$. **C.** $\frac{20\sqrt{5}-1}{2}$. **D.** $\frac{40\sqrt{5}-1}{4}$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)>0,\forall x\in[2;4]$ nên hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[2;4]\Rightarrow f(x)\ge f(2)$ mà $f(2)=\frac{7}{4}$. Do đó: $f(x)>0,\forall x\in[2;4]$.

Từ giả thiết ta có: $4x^3f(x)=\left[f'(x)\right]^3-x^3\Leftrightarrow x^3\left[4f(x)+1\right]=\left[f'(x)\right]^3$

$\Leftrightarrow x.\sqrt[3]{4f(x)+1}=f'(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}=x$.

Suy ra: $\int\frac{f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left[4f(x)+1\right]}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}=\frac{x^2}{2}+C\Leftrightarrow\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left[4f(x)+1\right]^2}=\frac{x^2}{2}+C$.

$f(2)=\frac{7}{4}\Leftrightarrow\frac{3}{2}=2+C\Leftrightarrow C=-\frac{1}{2}$.

Vậy: $f(x)=\frac{\sqrt{\left[\frac{4}{3}\left(x^2-1\right)\right]^3}-1}{4}\Rightarrow f(4)=\frac{40\sqrt{5}-1}{4}$.

Câu 12. **(Chuyên Thái Bình 2019)** Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=x,\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=1$. Tính $f(1)$.

A. $\frac{2}{\mathrm{e}}$. **B.** $\frac{1}{\mathrm{e}}$. **C.** e. **D.** $\frac{\mathrm{e}}{2}$.

Lời giải

$f(x)+f'(x)=x\qquad(1)$.

Nhân 2 vế của (1) với e^x ta được $\mathrm{e}^x.f(x)+\mathrm{e}^x.f'(x)=x.\mathrm{e}^x$.

Hay $\left[\mathrm{e}^x.f(x)\right]'=x.\mathrm{e}^x\Rightarrow\mathrm{e}^x.f(x)=\int x.\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Xét $I=\int x.\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x\Rightarrow\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}v\Rightarrow v=\mathrm{e}^x\end{cases}$.

$I=\int x.\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x.\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x.\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C$. Suy ra $\mathrm{e}^xf(x)=x.\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C$.

Theo giả thiết $f(0)=1$ nên $C=2\Rightarrow f(x)=\frac{x.\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+2}{\mathrm{e}^x}\Rightarrow f(1)=\frac{2}{\mathrm{e}}$.

Câu 13. (THPT NGHĨA HƯNG NĐ- GK2 - 2018 - 2019) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[xf'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right]$ với mọi x dương. Biết $f(1)=f'(1)=1$. Giá trị $f^2(2)$ bằng

A. $f^2(2)=\sqrt{2\ln 2+2}$. **B.** $f^2(2)=2\ln 2+2$.

C. $f^2(2)=\ln 2+1$. **D.** $f^2(2)=\sqrt{\ln 2+1}$.

Lời giải

Ta có: $\left[xf'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right]; x>0$

$\Leftrightarrow x^2.\left[f'(x)\right]^2+1=x^2\left[1-f(x).f''(x)\right]$

$\Leftrightarrow\left[f'(x)\right]^2+\frac{1}{x^2}=1-f(x).f''(x)$

$\Leftrightarrow\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=1-\frac{1}{x^2}$

$\Leftrightarrow\left[f(x).f'(x)\right]'=1-\frac{1}{x^2}$

Do đó: $\int\left[f(x).f'(x)\right]'.dx=\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right).dx\Rightarrow f(x).f'(x)=x+\frac{1}{x}+c_1$.

Vì $f(1)=f'(1)=1\Rightarrow 1=2+c_1\Leftrightarrow c_1=-1$.

Nên $\int f(x).f'(x).dx=\int\left(x+\frac{1}{x}-1\right).dx\Leftrightarrow\int f(x).d\left(f(x)\right)=\int\left(x+\frac{1}{x}-1\right).dx$

$\Rightarrow\frac{f^2(x)}{2}=\frac{x^2}{2}+\ln x-x+c_2$. Vì $f(1)=1\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-1+c_2\Leftrightarrow c_2=1$.

Vậy $\frac{f^2(x)}{2}=\frac{x^2}{2}+\ln x-x+1\Rightarrow f^2(2)=2\ln 2+2$.

Câu 14. (Chuyên Bắc Ninh 2019) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2+f(x).f''(x)=x^3-2x,\quad\forall x\in R$ và $f(0)=f'(0)=1$. Tính giá trị của $T=f^2(2)$

A. $\frac{43}{30}$ **B.** $\frac{16}{15}$ **C.** $\frac{43}{15}$ **D.** $\frac{26}{15}$

Lời giải

Có $(f'(x))^2+f(x).f''(x)=x^3-2x\Leftrightarrow(f(x).f'(x))'=x^3-2x$

$\Leftrightarrow f(x).f'(x)=\int(x^3-2x)dx=\frac{1}{4}x^4-x^2+C$

Từ $f(0)=f'(0)=1$. Suy ra $C=1$. Vậy $f(x).f'(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2+1$

Tiếp, có $2f(x).f'(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^2+2\Leftrightarrow(f^2(x))'=\frac{1}{2}x^4-2x^2+2$

$\Leftrightarrow f^2(x)=\int(\frac{1}{2}x^4-2x^2+2)dx=\frac{1}{10}x^5-\frac{2}{3}x^3+2x+C$

Từ $f(0)=1$. Suy ra $C=1$. Vậy $f^2(x)=\frac{1}{10}x^5-\frac{2}{3}x^3+2x+1$.

Do đó $T=\frac{43}{15}$

Câu 15. **(Sở Bình Phước 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, thỏa mãn $f(x)+\tan x.f'(x)=\frac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=a\pi\sqrt{3}+b\ln 3$ trong đó $a,b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của biểu thức $P=a+b$ bằng

A. $\frac{14}{9}$ **B.** $-\frac{2}{9}$ **C.** $\frac{7}{9}$ **D.** $-\frac{4}{9}$

Lời giải

Chọn D

$f(x)+\tan x.f'(x)=\frac{x}{\cos^3 x}\Leftrightarrow\cos x.f(x)+\sin x.f'(x)=\frac{x}{\cos^2 x}$.

$\Leftrightarrow\left[\sin x.f(x)\right]'=\frac{x}{\cos^2 x}$.

Do đó $\int\left[\sin x.f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\Rightarrow\sin x.f(x)=\int\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

Tính $I=\int\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\tan x\end{cases}$. Khi đó

$I=\int\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=x\tan x-\int\tan x\mathrm{d}x=x\tan x+\int\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}\mathrm{d}x=x\tan x+\ln|\cos x|$.

Suy ra $f(x)=\frac{x.\tan x+\ln|\cos x|}{\sin x}=\frac{x}{\cos x}+\frac{\ln|\cos x|}{\sin x}$.

$a\pi\sqrt{3}+b\ln 3=\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{2\ln 2}{\sqrt{3}}\right)-\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{9}+2\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\frac{5\pi\sqrt{3}}{9}-\ln 3$. Suy ra $\begin{cases}a=\frac{5}{9}\\ b=-1\end{cases}$.

Vậy $P=a+b=-\frac{4}{9}$.

Câu 16. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$; $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(3)=\frac{4}{9}$ và $\left[f'(x)\right]^2=(x+1).f(x)$. Tính $f(8)$.

A. $f(8)=49$. **B.** $f(8)=256$. **C.** $f(8)=\frac{1}{16}$. **D.** $f(8)=\frac{49}{64}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có với $\forall x\in(0;+\infty)$ thì $y=f(x)>0$; $x+1>0$.

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên $f'(x)\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)$.

Do đó $\left[f'(x)\right]^2=(x+1)f(x)\Leftrightarrow f'(x)=\sqrt{(x+1)f(x)}\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=\sqrt{(x+1)}$.

Suy ra $\int\dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x=\int\sqrt{(x+1)}\mathrm{d}x\Rightarrow\sqrt{f(x)}=\dfrac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3}+C$.

Vì $f(3)=\dfrac{4}{9}$ nên $C=\dfrac{2}{3}-\dfrac{8}{3}=-2$.

Suy ra $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\right)^2$, suy ra $f(8)=49$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=2$ và $\left(x^2+1\right)^2f'(x)=\left[f(x)\right]^2\left(x^2-1\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. $\dfrac{2}{5}$ **B.** $-\dfrac{2}{5}$ **C.** $-\dfrac{5}{2}$ **D.** $\dfrac{5}{2}$

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết ta có: $f'(x)=\left[f(x)\right]^2.\dfrac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}>0$ với mọi $x\in(1;2]$.

Do đó $f(x)\ge f(1)=1>0$ với mọi $x\in[1;2]$.

Xét với mọi $x\in[1;2]$ ta có:

$$\left(x^2+1\right)f'(x)=\left[f(x)\right]^2\left(x^2-1\right)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{d}x.$$

$$\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}x\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\Rightarrow-\frac{1}{f(x)}=-\frac{1}{x+\frac{1}{x}}+C.$$

Mà $f(1)=1\Rightarrow 1=1+C\Leftrightarrow C=0$. Vậy $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}\Rightarrow f(2)=\dfrac{5}{2}$.

Câu 18. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$, biết $f'(x)+(2x+1)f^2(x)=0$, $f(x)>0,\ \forall x>0$ và $f(2)=\dfrac{1}{6}$. Tính giá trị của $P=f(1)+f(2)+...+f(2019)$.

A. $\dfrac{2021}{2020}$. **B.** $\dfrac{2020}{2019}$. **C.** $\dfrac{2019}{2020}$. **D.** $\dfrac{2018}{2019}$.

Lời giải

TH1: $f(x)=0 \Rightarrow f'(x)=0$ trái giả thiết.

TH2: $f(x)\neq 0 \Rightarrow f'(x)=-(2x+1).f^2(x) \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=-(2x+1).\Rightarrow \int \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}dx=-\int(2x+1)dx$

$\Rightarrow \dfrac{-1}{f(x)}=-(x^2+x+C).$

Ta có: $f(2)=\dfrac{1}{6} \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}.$

$\Rightarrow P=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+.....-\dfrac{1}{2020}=\dfrac{2019}{2020}.$

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2;1]$ thỏa mãn $f(0)=3$ và $(f(x))^2.f'(x)=3x^2+4x+2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ là

A. $2\sqrt[3]{42}$. **B.** $2\sqrt[3]{15}$. **C.** $\sqrt[3]{42}$. **D.** $\sqrt[3]{15}$.

Lời giải

Ta có: $(f(x))^2.f'(x)=3x^2+4x+2$ (*)

Lấy nguyên hàm 2 vế của phương trình trên ta được

$\int (f(x))^2.f'(x)dx=\int(3x^2+4x+2)dx \Leftrightarrow \int (f(x))^2 d(f(x))=x^3+2x^2+2x+C$

$\Leftrightarrow \dfrac{(f(x))^3}{3}=x^3+2x^2+2x+C \Leftrightarrow (f(x))^3=3(x^3+2x^2+2x+C)$ (1)

Theo đề bài $f(0)=3$ nên từ (1) ta có $(f(0))^3=3(0^3+2.0^2+2.0+C) \Leftrightarrow 27=3C \Leftrightarrow C=9$

$\Rightarrow (f(x))^3=3(x^3+2x^2+2x+9) \Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{3(x^3+2x^2+2x+9)}.$

Tiếp theo chúng ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$.

CÁCH 1:

Vì $x^3+2x^2+2x+9=x^2(x+2)+2(x+2)+5>0, \forall x\in[-2;1]$ nên $f(x)$ có đạo hàm trên $[-2;1]$

và $f'(x)=\dfrac{3(3x^2+4x+2)}{3\sqrt[3]{\left[3(x^3+2x^2+2x+9)\right]^2}}=\dfrac{3x^2+4x+2}{\sqrt[3]{\left[3(x^3+2x^2+2x+9)\right]^2}}>0, \ \forall x\in[-2;1].$

$\Rightarrow$ Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[-2;1] \Rightarrow \max\limits_{[-2;1]} f(x)=f(1)=\sqrt[3]{42}.$

Vậy $\max\limits_{[-2;1]} f(x)=f(1)=\sqrt[3]{42}$.

CÁCH 2:

$f(x)=\sqrt[3]{3(x^3+2x^2+2x+9)}=\sqrt[3]{3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^3+2\left(x+\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{223}{9}}.$

Vì các hàm số $y=3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^3$, $y=2\left(x+\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{223}{9}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số

$y=\sqrt[3]{3\left(x+\frac{2}{3}\right)^3+2\left(x+\frac{2}{3}\right)+\frac{223}{9}}$ cũng đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó, hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[-2;1]$.

Vậy $\max\limits_{[-2;1]} f(x)=f(1)=\sqrt[3]{42}$.

Câu 20. **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=4$ và $f(x)=xf'(x)-2x^3-3x^2$ với mọi $x>0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. 5. **B.** 10. **C.** 20. **D.** 15.

Lời giải

$$f(x)-xf'(x)=-2x^3-3x^2 \Leftrightarrow \frac{1.f(x)-x.f'(x)}{x^2}=\frac{-2x^3-3x^2}{x^2} \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x}\right]'=2x+3$$

Suy ra, $\frac{f(x)}{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)=2x+3$.

Ta có $\int(2x+3)dx=x^2+3x+C,\ C\in\mathbb{R}$.

Do đó, $\frac{f(x)}{x}=x^2+3x+C_1$, (1) với $C_1\in\mathbb{R}$ nào đó.

Vì $f(1)=4$ theo giả thiết, nên thay $x=1$ vào hai vế của (1) ta thu được $C_1=0$, từ đó $f(x)=x^3+3x^2$. Vậy $f(2)=20$.

Câu 21. **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R thỏa mãn các điều kiện: $f(0)=2\sqrt{2}$, $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(x).f'(x)=(2x+1)\sqrt{1+f^2(x)},\ \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó giá trị $f(1)$ bằng

A. $\sqrt{26}$. **B.** $\sqrt{24}$. **C.** $\sqrt{15}$. **D.** $\sqrt{23}$.

Lời giải

Ta có $f(x).f'(x)=(2x+1)\sqrt{1+f^2(x)} \Leftrightarrow \frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=(2x+1)$.

Suy ra $\int\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}dx=\int(2x+1)dx \Leftrightarrow \int\frac{d\left(1+f^2(x)\right)}{2\sqrt{1+f^2(x)}}=\int(2x+1)dx \Leftrightarrow \sqrt{1+f^2(x)}=x^2+x+C$.

Theo giả thiết $f(0)=2\sqrt{2}$, suy ra $\sqrt{1+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=C \Leftrightarrow C=3$.

Với $C=3$ thì $\sqrt{1+f^2(x)}=x^2+x+3 \Rightarrow f(x)=\sqrt{\left(x^2+x+3\right)^2-1}$. Vậy $f(1)=\sqrt{24}$.

Câu 22. **(Cần Thơ 2018)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=2x^2-x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=3$. Giá trị của $\left[f(1)\right]^2$ bằng

A. 28. **B.** 22. **C.** $\frac{19}{2}$. **D.** 10.

Lời giải

Ta có $\left[f(x)f'(x)\right]'=\left[f'(x)\right]^2+f(x)f''(x)$.

Do đó theo giả thiết ta được $\left[f(x)f'(x)\right]'=2x^2-x+1$.

Suy ra $f(x)f'(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+x+C$. Hơn nữa $f(0)=f'(0)=3$ suy ra $C=9$.

Tương tự vì $\left[f^2(x)\right]'=2f(x)f'(x)$ nên $\left[f^2(x)\right]'=2\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+x+9\right)$. Suy ra

$f^2(x)=\int 2\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+x+9\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^4-\frac{x^3}{3}+x^2+18x+C$, cũng vì $f(0)=3$ suy ra

$f^2(x)=\frac{1}{3}x^4-\frac{x^3}{3}+x^2+18x+9$. Do đó $\left[f(1)\right]^2=28$.

Câu 23. **(Chuyên Lê Hồng Phong - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(x+2)f(x)+(x+1)f'(x)=\mathrm{e}^x$ và $f(0)=\frac{1}{2}$. Tính $f(2)$.

A. $f(2)=\frac{\mathrm{e}}{3}$. **B.** $f(2)=\frac{\mathrm{e}}{6}$. **C.** $f(2)=\frac{\mathrm{e}^2}{3}$. **D.** $f(2)=\frac{\mathrm{e}^2}{6}$.

Lời giải

Ta có

$(x+2)f(x)+(x+1)f'(x)=\mathrm{e}^x\Leftrightarrow(x+1)f(x)+f(x)+(x+1)f'(x)=\mathrm{e}^x$

$\Leftrightarrow\left[(x+1)f(x)\right]+\left[(x+1)f(x)\right]'=\mathrm{e}^x\Leftrightarrow\mathrm{e}^x\left[(x+1)f(x)\right]+\mathrm{e}^x\left[(x+1)f(x)\right]'=\mathrm{e}^{2x}$

$\Leftrightarrow\left[\mathrm{e}^x(x+1)f(x)\right]'=\mathrm{e}^{2x}\Rightarrow\int\left[\mathrm{e}^x(x+1)f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\mathrm{e}^x(x+1)f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$

Mà $f(0)=\frac{1}{2}\Rightarrow C=0$. Vậy $f(x)=\frac{1}{2}.\frac{\mathrm{e}^x}{x+1}$

Khi đó $f(2)=\frac{\mathrm{e}^2}{6}$.

Câu 24. **(Liên Trường - Nghệ An - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=-2\ln 2$ và $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$. Giá trị $f(2)=a+b\ln 3$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính a^2+b^2.

A. $\frac{25}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{13}{4}$.

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x\Leftrightarrow\frac{x}{x+1}.f'(x)+\frac{1}{(x+1)^2}f(x)=\frac{x}{x+1}$

$\Leftrightarrow\left[\frac{x}{x+1}.f(x)\right]'=\frac{x}{x+1}$, với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$.

Suy ra $\frac{x}{x+1}.f(x)=\int\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$ hay $\frac{x}{x+1}.f(x)=x-\ln|x+1|+C$.

Mặt khác, ta có $f(1)=-2\ln 2$ nên $C=-1$. Do đó $\frac{x}{x+1}.f(x)=x-\ln|x+1|-1$.

Với $x=2$ thì $\frac{2}{3}.f(2)=1-\ln 3\Leftrightarrow f(2)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\ln 3$. Suy ra $a=\frac{3}{2}$ và $b=-\frac{3}{2}$.

Vậy $a^2+b^2=\frac{9}{2}$.

Câu 25. **(THPT Lê Xoay - 2018)** Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $f(x)=f'(x).\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2<f(5)<3$. **B.** $1<f(5)<2$. **C.** $4<f(5)<5$. **D.** $3<f(5)<4$.

Lời giải

Ta có

$$f(x)=f'(x).\sqrt{3x+1}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow\int\frac{\mathrm{d}(f(x))}{f(x)}=\int\frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\ln f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C\Leftrightarrow f(x)=e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}+C}$$

Mà $f(1)=1$ nên $e^{\frac{4}{3}+C}=1\Leftrightarrow C=-\frac{4}{3}$. Suy ra $f(5)=e^{\frac{4}{3}}\approx 3,794$.

Câu 26. **(THPT Quỳnh Lưu - Nghệ An - 2018)** Cho hàm số $f(x)\neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+3)f^2(x)$ và $f(0)=-\frac{1}{2}$. Biết rằng tổng $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)+f(2018)=\frac{a}{b}$ với $(a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{N}^*)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\frac{a}{b}<-1$. **B.** $\frac{a}{b}>1$. **C.** $a+b=1010$. **D.** $b-a=3029$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Ta có $f'(x)=(2x+3)f^2(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+3$

$$\Leftrightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int(2x+3)\mathrm{d}x\Leftrightarrow-\frac{1}{f(x)}=x^2+3x+C.$$

Vì $f(0)=-\frac{1}{2}\Rightarrow C=2$.

Vậy $f(x)=-\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}$.

Do đó $f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2017)+f(2018)=\frac{1}{2020}-\frac{1}{2}=-\frac{1009}{2020}$.

Vậy $a=-1009$; $b=2020$. Do đó $b-a=3029$.

Câu 27. **(THPT Nam Trực - Nam Định - 2018)** Cho hàm số $f(x)\neq 0$, $f'(x)=\frac{3x^4+x^2-1}{x^2}f^2(x)$ và $f(1)=-\frac{1}{3}$. Tính $f(1)+f(2)+...+f(80)$.

A. $-\frac{3240}{6481}$. **B.** $\frac{6480}{6481}$. **C.** $-\frac{6480}{6481}$. **D.** $\frac{3240}{6481}$.

Lời giải

$$f'(x)=\frac{3x^4+x^2-1}{x^2}f^2(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=\frac{3x^4+x^2-1}{x^2}.$$

$$\int\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{3x^4+x^2-1}{x^2}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\frac{\mathrm{d}\left(f(x)\right)}{f^2(x)}=\int\frac{3x^4+x^2-1}{x^2}\mathrm{d}x.$$

$$\Leftrightarrow \int\frac{\mathrm{d}\left(f(x)\right)}{f^2(x)}=\int\left(3x^2+1-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{-1}{f(x)}=x^3+x+\frac{1}{x}+C \Leftrightarrow f(x)=\frac{-1}{x^3+x+\frac{1}{x}}+C.$$

Do $f(1)=-\frac{1}{3}\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\frac{-x}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{1}{x^2-x+1}\right)$.

$f(1)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{1}\right);\ f(2)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{3}\right);\ f(3)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{7}\right);.;f(80)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6481}-\frac{1}{6321}\right)$.

$f(1)+f(2)+...+f(80)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{6481}=-\frac{3240}{6481}$.

Câu 28. **(Sở Hà Tĩnh - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ đồng biến có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $\left[f(x)\right]^2-f(x).f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=0$. Biết $f(0)=1, f(2)=\mathrm{e}^6$. Khi đó $f(1)$ bằng

A. $\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$. **B.** e^3. **C.** $\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$. **D.** e^2.

Lời giải

Theo đề bài, ta có $\left[f(x)\right]^2-f(x).f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=0\Rightarrow\frac{f(x).f''(x)-\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}=1$

$$\Rightarrow\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]'=1\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=x+C\Rightarrow\ln f(x)=\frac{x^2}{2}+C.x+D$$

Mà $\begin{cases}f(0)=1\\f(2)=\mathrm{e}^6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C=2\\D=0\end{cases}$. Suy ra : $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}+2x}\Rightarrow f(1)=\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$.

Câu 29. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)+2x.f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Tính $f(1)$.

A. $f(1)=\mathrm{e}^2$. **B.** $f(1)=-\frac{1}{\mathrm{e}}$. **C.** $f(1)=\frac{1}{\mathrm{e}^2}$. **D.** $f(1)=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$f'(x)+2x.f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\Leftrightarrow\mathrm{e}^{x^2}f'(x)+2x.\mathrm{e}^{x^2}.f(x)=1\Leftrightarrow\left(\mathrm{e}^{x^2}.f(x)\right)'=1.$$

Suy ra $\int\left(\mathrm{e}^{x^2}.f(x)\right)'\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x\Leftrightarrow\mathrm{e}^{x^2}.f(x)=x+C\Rightarrow f(x)=\frac{x+C}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

Vì $f(0)=0\Rightarrow C=0$.

Do đó $f(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^{x^2}}$. Vậy $f(1)=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x).f(x)=x^4+x^2$. Biết $f(0)=2$. Tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2)=\frac{313}{15}$. **B.** $f^2(2)=\frac{332}{15}$. **C.** $f^2(2)=\frac{324}{15}$. **D.** $f^2(2)=\frac{323}{15}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f'(x).f(x)\mathrm{d}x=\int\left(x^4+x^2\right)\mathrm{d}x+C \Rightarrow \frac{f^2(x)}{2}=\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+C$.

Do $f(0)=2$ nên suy ra $C=2$.

Vậy $f^2(2)=2\left(\frac{32}{5}+\frac{8}{3}+2\right)=\frac{332}{15}$.

Câu 31. **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=\mathrm{e}^{-x},\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)\mathrm{e}^{2x}$ là

A. $(x-2)\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x+C$. **B.** $(x+2)\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+C$.

C. $(x-1)\mathrm{e}^x+C$. **D.** $(x+1)\mathrm{e}^x+C$.

Lời giải

Chọn D

$f(x)+f'(x)=\mathrm{e}^{-x}\Leftrightarrow f(x)\mathrm{e}^x+f'(x)\mathrm{e}^x=1\Leftrightarrow\left(f(x)\mathrm{e}^x\right)'=1\Leftrightarrow f(x)\mathrm{e}^x=x+C'$.

Vì $f(0)=2$ nên $C'=2$. Do đó $f(x)\mathrm{e}^{2x}=(x+2)\mathrm{e}^x$. Vậy:

$\int f(x)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\int(x+2)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int(x+2)\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)=(x+2)\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}(x+2)=(x+2)\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=$

$=(x+2)\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C=(x+1)\mathrm{e}^x+C$.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x)+f(x)=2x\ \ \forall x\in(0;+\infty)$, $f(1)=1$. Giá trị của biểu thức $f(4)$ là:

A. $\frac{25}{6}$. **B.** $\frac{25}{3}$. **C.** $\frac{17}{6}$. **D.** $\frac{17}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $2xf'(x)+f(x)=2x\ \ (1)$ trên $(0;+\infty)$: $(1)\Leftrightarrow f'(x)+\frac{1}{2x}\cdot f(x)=1\ \ (2)$.

Đặt $g(x)=\frac{1}{2x}$, ta tìm một nguyên hàm $G(x)$ của $g(x)$.

Ta có $\int g(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln x+C=\ln\sqrt{x}+C$. Ta chọn $G(x)=\ln\sqrt{x}$.

Nhân cả 2 vế của (2) cho $\mathrm{e}^{G(x)}=\sqrt{x}$, ta được: $\sqrt{x}\cdot f'(x)+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot f(x)=\sqrt{x}$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}.f(x)\right)'=\sqrt{x}\ \ (3)$.

Lấy tích phân 2 vế của (3) từ 1 đến 4, ta được: $\int_1^4\left(\sqrt{x}.f(x)\right)'\mathrm{d}x=\int_1^4\sqrt{x}\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\left(\sqrt{x}.f(x)\right)\Big|_1^4=\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big|_1^4\Rightarrow 2f(4)-f(1)=\frac{14}{3}\Rightarrow f(4)=\frac{1}{2}\left(\frac{14}{3}+1\right)=\frac{17}{6}$ (vì $f(1)=1$).

Vậy $f(4)=\frac{17}{6}$.

Câu 33. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $x^6\left[f'(x)\right]^3+27\left[f(x)-1\right]^4=0, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** 7. **D.** -7.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x^6\left[f'(x)\right]^3+27\left[f(x)-1\right]^4=0\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{-3\left(f(x)-1\right)\sqrt[3]{f(x)-1}}=\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow\left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}}\right]'=\frac{1}{x^2}$.

Do đó $\int\left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}}\right]'\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}+C$. Suy ra $\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}}=-\frac{1}{x}+C$.

Có $f(1)=0\Rightarrow C=0$. Do đó $f(x)=1-x^3$.

Khi đó $f(2)=-7$.

Câu 34. **(Bến Tre 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn: $\left(f'(x)\right)^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=f'(0)=1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết, $\forall x\in\mathbb{R}$: $\left(f'(x)\right)^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x$

$\Leftrightarrow f'(x).f'(x)+f(x).f''(x)=15x^4+12x$

$\Leftrightarrow\left[f(x).f'(x)\right]'=15x^4+12x$

$\Leftrightarrow f(x).f'(x)=\int\left(15x^4+12x\right)\mathrm{d}x=3x^5+6x^2+C\ \ (1)$.

Thay $x=0$ vào (1), ta được: $f(0).f'(0)=C\Leftrightarrow C=1$.

Khi đó, (1) trở thành: $f(x).f'(x)=3x^5+6x^2+1$

$\Rightarrow\int_0^1 f(x).f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(3x^5+6x^2+1\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\left[\frac{1}{2}f^2(x)\right]\Big|_0^1=\left(\frac{1}{2}x^6+2x^3+x\right)\Big|_0^1$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left[f^2(1)-f^2(0)\right]=\frac{7}{2}\Leftrightarrow f^2(1)-1=7\Leftrightarrow f^2(1)=8$.

Vậy $f^2(1)=8$.

Câu 35. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(1;+\infty)$ và thỏa mãn $(xf'(x)-2f(x)).\ln x=x^3-f(x)$, $\forall x\in(1;+\infty)$; biết $f(\sqrt[3]{e})=3e$. Giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(12;\frac{25}{2}\right)$. **B.** $\left(13;\frac{27}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{23}{2};12\right)$. **D.** $\left(14;\frac{29}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $(xf'(x)-2f(x)).\ln x=x^3-f(x)$ (1) trên khoảng $(1;+\infty)$:

$(1)\Leftrightarrow x\ln x.f'(x)+(1-2\ln x).f(x)=x^3\Leftrightarrow f'(x)+\frac{1-2\ln x}{x\ln x}\cdot f(x)=\frac{x^2}{\ln x}$ (2).

Đặt $g(x)=\frac{1-2\ln x}{x\ln x}$. Ta tìm một nguyên hàm $G(x)$ của $g(x)$.

Ta có $\int g(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1-2\ln x}{x\ln x}\mathrm{d}x=\int\frac{1-2\ln x}{\ln x}\mathrm{d}(\ln x)=\int\left(\frac{1}{\ln x}-2\right)\mathrm{d}(\ln x)$

$=\ln(\ln x)-2\ln x+C=\ln\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)+C$.

Ta chọn $G(x)=\ln\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)$.

Nhân cả 2 vế của (2) cho $e^{G(x)}=\frac{\ln x}{x^2}$, ta được: $\frac{\ln x}{x^2}\cdot f'(x)+\frac{1-2\ln x}{x^3}\cdot f(x)=1$

$\Leftrightarrow\left(\frac{\ln x}{x^2}\cdot f(x)\right)'=1\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x^2}\cdot f(x)=x+C$ (3).

Theo giả thiết, $f(\sqrt[3]{e})=3e$ nên thay $x=\sqrt[3]{e}$ vào (3), ta được:

$\frac{\ln(\sqrt[3]{e})}{\sqrt[3]{e^2}}.f(\sqrt[3]{e})=\sqrt[3]{e}+C\Leftrightarrow C=\frac{1}{3\sqrt[3]{e^2}}\cdot 3e-\sqrt[3]{e}=0$.

Từ đây, ta tìm được $f(x)=\frac{x^3}{\ln x}\Rightarrow f(2)=\frac{2^3}{\ln 2}$. Vậy $f(2)\in\left(\frac{23}{2};12\right)$.

Câu 36. **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x).e^{f^3(x)-x^2-1}-\frac{2x}{f^2(x)}=0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(0)=1$, tính tích phân $\int_0^{\sqrt{7}}x.f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{11}{2}$. **B.** $\frac{15}{4}$. **C.** $\frac{45}{8}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $3f'(x).e^{f^3(x)-x^2-1}-\frac{2x}{f^2(x)}=0\Leftrightarrow 3f^2(x).f'(x).e^{f^3(x)}=2x.e^{x^2+1}$

$\Rightarrow\int 3f^2(x).f'(x).e^{f^3(x)}\mathrm{d}x=\int 2x.e^{x^2+1}\mathrm{d}x\Rightarrow\int e^{f^3(x)}\mathrm{d}(f^3(x))=\int e^{x^2+1}\mathrm{d}(x^2+1)\Rightarrow e^{f^3(x)}=e^{x^2+1}+C$.

Mặt khác, vì $f(0)=1$ nên $C=0$.

Do đó $e^{f^3(x)}=e^{x^2+1}\Leftrightarrow f^3(x)=x^2+1\Leftrightarrow f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$.

Vậy $\int\limits_0^{\sqrt{7}} x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\sqrt{7}} x.\sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{7}} \sqrt[3]{x^2+1}\,\mathrm{d}\left(x^2+1\right)=\frac{3}{8}\left[\left(x^2+1\right)\sqrt[3]{x^2+1}\right]\Big|_0^{\sqrt{7}}=\frac{45}{8}$.

Câu 37. **(SP Đồng Nai - 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và không âm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x\right).f'\left(x\right)=2x\sqrt{f^2\left(x\right)+1}$ và $f\left(0\right)=0$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[1;3\right]$. Biết rằng giá trị của biểu thức $P=2M-m$ có dạng $a\sqrt{11}-b\sqrt{3}+c,\left(a,b,c\in\mathbb{Z}\right)$. Tính $a+b+c$

A. $a+b+c=7$. **B.** $a+b+c=4$. **C.** $a+b+c=6$. **D.** $a+b+c=5$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f\left(x\right).f'\left(x\right)=2x\sqrt{f^2\left(x\right)+1}\Leftrightarrow\frac{f\left(x\right).f'\left(x\right)}{\sqrt{f^2\left(x\right)+1}}=2x\Rightarrow\int\frac{f\left(x\right).f'\left(x\right)}{\sqrt{f^2\left(x\right)+1}}dx=\int 2xdx$

$\Leftrightarrow\sqrt{f^2\left(x\right)+1}=x^2+C$.

Mà $f\left(0\right)=0\Leftrightarrow C=1\Rightarrow\sqrt{f^2\left(x\right)+1}=x^2+1\Leftrightarrow f^2\left(x\right)=\left(x^2+1\right)^2-1=x^4+2x^2$

$\Leftrightarrow f\left(x\right)=\sqrt{x^4+2x^2}$ (do $f\left(x\right)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$).

Ta có: $f'\left(x\right)=\frac{2x^3+2x}{\sqrt{x^4+2x^2}}>0,\forall x\in\left[1;3\right]\Rightarrow\max\limits_{\left[1;3\right]}f\left(x\right)=f\left(3\right)=3\sqrt{11};\min\limits_{\left[1;3\right]}f\left(x\right)=f\left(1\right)=\sqrt{3}$.

Ta có: $P=2M-m=6\sqrt{11}-\sqrt{3}\Rightarrow a=6;b=1;c=0\Rightarrow a+b+c=7$.

Câu 38. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-1;0\right\}$ thỏa mãn $f\left(1\right)=2\ln 2+1$, $x\left(x+1\right)f'\left(x\right)+\left(x+2\right)f\left(x\right)=x\left(x+1\right),\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1;0\right\}$. Biết $f\left(2\right)=a+b\ln 3$, với a,b là hai số hữu tỉ. Tính $T=a^2-b$.

A. $T=\frac{21}{16}$. **B.** $T=\frac{3}{2}$. **C.** $T=0$. **D.** $T=-\frac{3}{16}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $x\left(x+1\right)f'\left(x\right)+\left(x+2\right)f\left(x\right)=x\left(x+1\right),\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1;0\right\}$.

$\Rightarrow\frac{x^2}{\left(x+1\right)}f'\left(x\right)+\frac{x^2+2x}{\left(x+1\right)^2}f\left(x\right)=\frac{x^2}{x+1},\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1;0\right\}$.

$\Rightarrow\left[\frac{x^2}{x+1}f\left(x\right)\right]'=\frac{x^2}{x+1},\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1;0\right\}$.

$\Rightarrow\int\frac{x^2}{x+1}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{x+1}f\left(x\right)+C',\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1;0\right\}$.

$\Rightarrow\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{x+1}f\left(x\right)+C',\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1;0\right\}$.

$\Rightarrow\frac{x^2}{2}-x+\ln\left|x+1\right|+C''=\frac{x^2}{x+1}f\left(x\right)+C'$.

$\Rightarrow\frac{x^2}{2}-x+\ln\left|x+1\right|+C=\frac{x^2}{x+1}f\left(x\right),\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1;0\right\}$.

Ta có: $f(1)=2\ln 2+1$ và $f(1)=-1+2\ln 2+2C\Rightarrow C=1$.

$\Rightarrow \frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+1=\frac{x^2}{x+1}f(x)$.

$\Rightarrow f(2)=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}.\ln|3|$ và $f(2)=a+b\ln 3\Rightarrow a=\frac{3}{4}, b=\frac{3}{4}\Rightarrow T=a^2-b=\frac{9}{16}-\frac{3}{4}=\frac{-3}{16}$.

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $3x.f(x)-x^2.f'(x)=2f^2(x)$, với $f(x)\neq 0,\forall x\in(0;+\infty)$ và $f(1)=\frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;2]$. Tính $M+m$.

A. $\frac{9}{10}$. **B.** $\frac{21}{10}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3x.f(x)-x^2.f'(x)=2f^2(x)\Rightarrow 3x^2.f(x)-x^3.f'(x)=2x.f^2(x)$

$\Rightarrow \frac{3x^2.f(x)-x^3.f'(x)}{f^2(x)}=2x$ vì $f(x)\neq 0,\forall x\in(0;+\infty)$.

$\Rightarrow \left(\frac{x^3}{f(x)}\right)'=2x\Rightarrow \frac{x^3}{f(x)}=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C$.

Nguyễn Bảo Vương

Mà $f(1)=\frac{1}{3}\Rightarrow C=2\Rightarrow f(x)=\frac{x^3}{x^2+2}$.

Ta có: $f(x)=\frac{x^3}{x^2+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{x^4+6x^2}{(x^2+2)^2}>0,\forall x\in(0;+\infty)$.

Vậy, hàm số $f(x)=\frac{x^3}{x^2+2}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Mà $[1;2]\subset(0;+\infty)$ nên hàm số $f(x)=\frac{x^3}{x^2+2}$ đồng biến trên đoạn $[1;2]$.

Suy ra, $M=f(2)=\frac{4}{3}; m=f(1)=\frac{1}{3}\Rightarrow M+m=\frac{5}{3}$.

Dạng 2. Một số bài toán khác liên quan đến nguyên hàm

Câu 1. **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{x^2}(x^3-4x)$. Hàm số $F(x^2+x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $F'(x)=f(x)$

$\Rightarrow F'\left(x^2+x\right)=f\left(x^2+x\right).\left(x^2+x\right)'=\left(2x+1\right)\left(x^2+x\right)e^{\left(x^2+x\right)^2}\left(\left(x^2+x\right)^2-4\right)$

$=\left(2x+1\right)x\left(x+1\right)e^{\left(x^2+x\right)^2}\left(x^2+x-2\right)\left(x^2+x+2\right)$

$=\left(2x+1\right)x\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x-1\right)\left(x^2+x+2\right)e^{\left(x^2+x\right)^2}=0\Leftrightarrow x\in\left\{-2;-1;\frac{-1}{2};0;1\right\}$

$F'\left(x^2+x\right)=0$ có 5 nghiệm đơn nên $F\left(x^2+x\right)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 2. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho $F\left(x\right)=\int\frac{\left(1+\cos^2 x\right)\left(\sin x+\cot x\right)}{\sin^4 x}dx$ và S là tổng tất cả các nghiệm của phương trình $F\left(x\right)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ trên khoảng $\left(0;4\pi\right)$. Tổng S thuộc khoảng

A. $\left(6\pi;9\pi\right)$. **B.** $\left(2\pi;4\pi\right)$. **C.** $\left(4\pi;6\pi\right)$. **D.** $\left(0;2\pi\right)$.

Lời giải

Chọn

Ta có: $F\left(x\right)=\int\frac{\left(1+\cos^2 x\right)\left(\sin x+\cot x\right)}{\sin^4 x}dx=\int\frac{\left(1+\cos^2 x\right)\sin x}{\sin^4 x}dx+\int\frac{\left(1+\cos^2 x\right)\cot x}{\sin^4 x}dx$

Gọi $A=\int\frac{\left(1+\cos^2 x\right)\cot x}{\sin^4 x}dx$ và $B=\int\frac{\left(1+\cos^2 x\right)\sin x}{\sin^4 x}dx$

Ta có:

$A=\int\frac{\left(1+\cos^2 x\right)\cot x}{\sin^4 x}dx=\int\frac{\left(1+2\cot^2 x\right)\cot x}{\sin^2 x}dx=-\int\left(\cot x+2\cot^3 x\right).d\left(\cot x\right)$

$=-\left(\frac{\cot^2 x}{2}+\frac{\cot^4 x}{2}\right)+C_1.$

$B=\int\frac{\left(1+\cos^2 x\right)\sin x}{\sin^4 x}dx=\int\frac{\left(1+\cos^2 x\right)\sin x}{\left(1-\cos^2 x\right)^2}dx$

Đặt $t=\cos x$, suy ra $dt=-\sin x.dx$. Khi đó:

$B=-\int\frac{1+t^2}{\left(t^2-1\right)^2}dt=-\int\frac{1+t^2}{\left(t-1\right)^2.\left(t+1\right)^2}dt=-\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{\left(t-1\right)^2}+\frac{1}{\left(t+1\right)^2}\right]dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\right)+C_2$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos x-1}+\frac{1}{\cos x+1}\right)+C_2$

Do đó:

$F\left(x\right)=A+B=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos x-1}+\frac{1}{\cos x+1}\right)-\left(\frac{\cot^2 x}{2}+\frac{\cot^4 x}{2}\right)+C$

Suy ra:

$F\left(x\right)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos x-1}+\frac{1}{\cos x+1}\right)-\left(\frac{\cot^2 x}{2}+\frac{\cot^4 x}{2}\right)+C=C$

$\Leftrightarrow\frac{1}{\cos x-1}+\frac{1}{\cos x+1}-\cot^2 x-\cot^4 x=0$

$\Leftrightarrow\frac{2\cos x}{\sin^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+\frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}=0$

Với điều kiện $\sin x\neq 0$,

$$(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ 2+\cos x+\dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ 2\left(1-\cos^2 x\right)+\cos x\left(1-\cos^2 x\right)+\cos^3 x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ -2\cos^2 x+\cos x+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}\end{array}\right.$$

Theo giả thiết $x\in(0;4\pi)$ nên $x=\dfrac{\pi}{2};x=\dfrac{3\pi}{2};x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi;x=\dfrac{3\pi}{2}+2\pi$;

$x=\alpha;x=\alpha+2\pi$;

$x=\beta;x=\beta+2\pi$.

Khi đó tổng các nghiệm này sẽ lớn hơn 9π.

Câu 3. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0;\pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}-4$ **B.** $F\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ **D.** $F\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=3-\sqrt{3}$

Lời giải

Ta có:

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2\cos x-1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=2\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin^2 x}-\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{2}{\sin x}+\cot x+C$$

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$ nên hàm số $F(x)$ có công thức dạng $F(x)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+C$ với mọi $x\in(0;\pi)$.

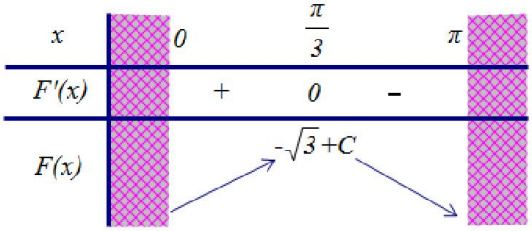
Xét hàm số $F(x)=-\dfrac{2}{\sin x}+\cot x+C$ xác định và liên tục trên $(0;\pi)$.

$F'(x)=f(x)=\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}$

Xét $F'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2\cos x-1}{\sin^2 x}=0\Leftrightarrow\cos x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Trên khoảng $(0;\pi)$, phương trình $F'(x)=0$ có một nghiệm $x=\dfrac{\pi}{3}$

Bảng biến thiên:



$\max\limits_{(0;\pi)} F(x) = F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} + C$

Theo đề bài ta có, $-\sqrt{3} + C = \sqrt{3} \Leftrightarrow C = 2\sqrt{3}$.

Do đó, $F(x) = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + 2\sqrt{3}$.

Câu 4. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y = F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0;4\pi)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $F'(x) = f(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ trên $(0;4\pi)$.

$F'(x) = f(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x\cos x - \sin x = 0$ trên $(0;4\pi)$.

Đặt $g(x) = x\cos x - \sin x$ trên $(0;4\pi)$.

Ta có $g'(x) = -x.\sin x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi \\ x = 2\pi \\ x = 3\pi \end{array}\right.$ trên $(0;4\pi)$.

Nguyễn Bảo Vương

Từ đó có bảng biến thiên của $g(x)$:

x	0		π		x_1		2π		x_2		3π		x_3		4π
g'(x)		-	0	+			0		-		0	+			
g(x)	0	↘		↗	0			↗	0	↘		↗	0		4π
			-π				2π				-3π				

Vì $g(x)$ liên tục và đồng biến trên $[\pi;2\pi]$ và $g(\pi).g(2\pi) < 0$ nên tồn tại duy nhất $x_1 \in (\pi;2\pi)$ sao cho $g(x_1) = 0$.

Tương tự ta có $g(x_2) = 0$, $g(x_3) = 0$ với $x_2 \in (2\pi;3\pi)$, $x_3 \in (3\pi;4\pi)$.

Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta thấy $g(x) < 0$ khi $x \in (0;x_1)$ và $x \in (x_2;x_3)$; $g(x) > 0$ khi $x \in (x_1;x_2)$ và $x \in (x_3;4\pi)$. Dấu của $f(x)$ là dấu của $g(x)$ trên $(0;4\pi)$.

Do đó ta có bảng biến thiên của $F(x)$:

x	0		x_1		x_2		x_3		4π
f(x)		-	0	+	0	-	0	+	
F(x)		↘	CT	↗	CĐ	↘	CT	↗	

Vậy hàm số $y=F(x)$ có ba cực trị.

Câu 5. **(Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019)** Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x-\cos x}{x^2}$. Hỏi đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 2. **C.** vô số điểm. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Vì $\left(F(x)\right)'=f(x)$ nên ta xét sự đổi dấu của hàm số $f(x)$ để tìm cực trị hàm số đã cho.

Ta xét hàm số $g(x)=x-\cos x$, ta có $g'(x)=1+\sin x\geq 0\,\forall x$.

Vì vậy $g(x)$ là hàm số đồng biến trên toàn trục số.

Hơn nữa ta có $\begin{cases} g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}>0 \\ g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}<0 \end{cases}$, do đó $g(x)=0$ có duy nhất nghiệm $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

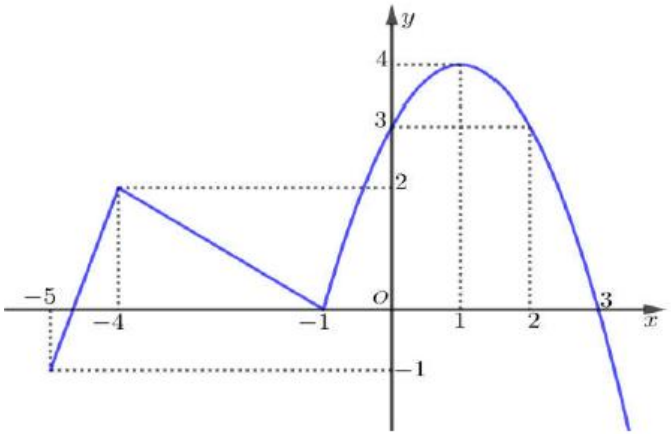
Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		+		+	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$F'(x)=f(x)$		−	0	+	

Kết luận hàm số đã cho có một cực trị.

Câu 6. **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $[-5;3]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y=ax^2+bx+c$).



Biết $f(0)=0$, giá trị của $2f(-5)+3f(2)$ bằng

A. 33. **B.** $\frac{109}{3}$. **C.** $\frac{35}{3}$. **D.** 11.

Lời giải

Chon C

*)Parabol $y=ax^2+bx+c$ qua các điểm $(2;3),(1;4),(0;3),(-1;0),(3;0)$ nên xác định được

$y=-x^2+2x+3, \forall x\geq -1$ suy ra $f(x)=-\frac{x^3}{3}+x^2+3x+C_1$. Mà

$f(0)=0\Rightarrow C_1=0,\ f(x)=-\frac{x^3}{3}+x^2+3x$.

Có $f(-1)=-\frac{5}{3}$; $f(2)=\frac{22}{3}$ (1)

*)Đồ thị $f'(x)$ trên đoạn $[-4;-1]$ qua các điểm $(-4;2),(-1;0)$ nên

$f'(x)=\frac{-2}{3}(x+1)\Rightarrow f(x)=\frac{-2}{3}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)+C_2$.

Mà $f(-1)=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow C_2=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\Rightarrow f(x)=\frac{-2}{3}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)-2$, hay $f(-4)=\frac{-14}{3}$.

*) Đồ thị $f'(x)$ trên đoạn $[-5;-4]$ qua các điểm $(-4;2),(-5;-1)$ nên

$f'(x)=3x+14\Rightarrow f(x)=\frac{3x^2}{2}+14x+C_3$.

Mà $f(-4)=\frac{-14}{3}\Leftrightarrow \frac{3.(-4)^2}{2}+14.(-4)+C_3=\frac{-14}{3}$ suy ra $C_3=\frac{82}{3}$.

Ta có $f(x)=\frac{3x^2}{2}+14x+\frac{82}{3}\Rightarrow f(-5)=-\frac{31}{6}$ (2).

Từ (1) và (2) ta được $2f(-5)+3f(2)=-\frac{31}{3}+22=\frac{35}{3}$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f'(x)+\frac{f(x)}{x}=4x^2+3x$ và $f(1)=2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A. $y=-16x-20$. **B.** $y=16x-20$. **C.** $y=16x+20$. **D.** $y=-16x+20$.

Lời giải

Chọn B

$f'(x)+\frac{f(x)}{x}=4x^2+3x \Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=4x^3+3x^2$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta được: $xf(x)=\int\left(4x^3+3x^2\right)\mathrm{d}x=x^4+x^3+C$.

Với $x=1$ ta có: $f(1)=2+C$.

Theo bài ra $f(1)=2 \Leftrightarrow 2+C=2 \Leftrightarrow C=0$.

Vậy $xf(x)=x^4+x^3 \Leftrightarrow f(x)=x^3+x^2$.

Ta có: $f'(x)=3x^2+2x$; $f'(2)=16$; $f(2)=12$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là:

$y=16(x-2)+12 \Leftrightarrow y=16x-20$.

Nguyễn Bảo Vương

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

Dạng. Sử dụng tính chất, bảng nguyên hàm cơ bản để tính tích phân

1.Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên K; a,b là hai phần tử bất kì thuộc K, $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Hiệu số $F(b)-F(a)$ gọi là tích phân của của $f(x)$ từ a đến b và được kí hiệu: $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$.

2. Các tính chất của tích phân:

+ $\int_a^a f(x)dx=0$	+ $\int_a^b\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$
+ $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$	+ $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$
+ $\int_a^b k.f(x)dx=k.\int_a^b f(x)dx$	+ Nếu $f(x)\ge g(x)\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$.

Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp

$\int x^\alpha.dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$\int(ax+b)^\alpha dx=\frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
$\int\frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$	$\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}.\ln\lvert ax+b\rvert+C$
$\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C$	$\int\frac{1}{(ax+b)^2}dx=-\frac{1}{a}.\frac{1}{ax+b}+C$
$\int\sin x.dx=-\cos x+C$	$\int\sin(ax+b).dx=-\frac{1}{a}.\cos(ax+b)+C$
$\int\cos x.dx=\sin x+C$	$\int\cos(ax+b).dx=\frac{1}{a}.\sin(ax+b)+C$
$\int\frac{1}{\sin^2 x}.dx=-\cot x+C$	$\int\frac{1}{\sin^2(ax+b)}.dx=-\frac{1}{a}.\cot(ax+b)+C$
$\int\frac{1}{\cos^2 x}.dx=\tan x+C$	$\int\frac{1}{\cos^2(ax+b)}.dx=\frac{1}{a}.\tan(ax+b)+C$
$\int e^x.dx=e^x+C$	$\int e^{ax+b}.dx=\frac{1}{a}.e^{ax+b}+C$
$\int a^x.dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$

✍ **Nhận xét**. Khi thay x bằng $(ax+b)$ thì lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm $\frac{1}{a}$.

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Nếu $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=-2$ và $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=1$ thì $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Nếu $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 4$ thì $\int_0^1 2f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 16. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 8.

Câu 3. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Biết $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 3$. Giá trị của $\int_1^3 2f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 9. **C.** 6. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 4. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 [2 + f(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** $\frac{13}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Câu 5. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Biết $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x = 4$. Giá trị của $\int_1^5 3f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 64. **D.** 12.

Câu 6. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 (2 + f(x))\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{23}{4}$. **B.** 7. **C.** 9. **D.** $\frac{15}{4}$.

Câu 7. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Biết $\int_1^2 f(x)\,dx = 2$. Giá trị của $\int_1^3 3f(x)\,dx$ bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 8.

Câu 8. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3 (1 + f(x))\mathrm{d}x$ bằng

A. 20. **B.** 22. **C.** 26. **D.** 28.

Câu 9. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Biết $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = 6$. Giá trị của $\int_2^3 2f(x)\mathrm{d}x$ bằng.

A. 36. **B.** 3. **C.** 12. **D.** 8.

Câu 10. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3 [1 + f(x)]\,dx$ bằng

A. 10. **B.** 8. **C.** $\frac{26}{3}$. **D.** $\frac{32}{3}$.

Câu 11. **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Biết $\int_2^3 f(x)dx = 4$ và $\int_2^3 g(x)dx = 1$. Khi đó: $\int_2^3 [f(x) - g(x)]dx$ bằng:

A. -3. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 12. **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Biết $\int_0^1 [f(x) + 2x]dx = 2$. Khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng :

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 13. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Biết $\int_2^3 f(x)dx = 3$ và $\int_2^3 g(x)dx = 1$. Khi đó $\int_2^3 [f(x) + g(x)]dx$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 3.

Câu 14. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Biết $\int_0^1 [f(x) + 2x]dx = 3$. Khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 15. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Biết $\int_1^2 f(x)dx = 3$ và $\int_1^2 g(x)dx = 2$. Khi đó $\int_1^2 [f(x) - g(x)]dx$ bằng?

A. 6. **B.** 1. **C.** 5. **D.** -1.

Câu 16. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Biết $\int_0^1 [f(x) + 2x]dx = 4$. Khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 17. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Biết $\int_1^2 f(x)dx = 2$ và $\int_1^2 g(x)dx = 3$. Khi đó $\int_1^2 [f(x) + g(x)]dx$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** -1. **D.** 6.

Câu 18. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Biết $\int_0^1 [f(x) + 2x]dx = 5$. Khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 19. **(Mã 103 - 2019)** Biết $\int_1^2 f(x)dx = 2$ và $\int_1^2 g(x)dx = 6$, khi đó $\int_1^2 [f(x) - g(x)]dx$ bằng

A. 8. **B.** -4. **C.** 4. **D.** -8.

Câu 20. **(Mã 102 - 2019)** Biết tích phân $\int_0^1 f(x)dx = 3$ và $\int_0^1 g(x)dx = -4$. Khi đó $\int_0^1 [f(x) + g(x)]dx$ bằng

A. -7. **B.** 7. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 21. **(Mã 104 - 2019)** Biết $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_0^1 g(x)dx = -4$, khi đó $\int_0^1 [f(x) + g(x)]dx$ bằng

A. 6. **B.** -6. **C.** -2. **D.** 2.

Câu 22. **(Mã 101 2019)** Biết $\int_0^1 f(x)dx = -2$ và $\int_0^1 g(x)dx = 3$, khi đó $\int_0^1 [f(x) - g(x)]dx$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** -5. **D.** 5.

Câu 23. **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_0^1 g(x)dx = 5$, khi $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)]dx$ bằng

A. -8 **B.** 1 **C.** -3 **D.** 12

Câu 24. **(THPT Ba Đình 2019)** Khẳng định nào trong các khẳng định sau đúng với mọi hàm f, g liên tục trên K và a, b là các số bất kỳ thuộc K?

A. $\int_a^b [f(x)+2g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + 2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}\mathrm{d}x = \frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$.

C. $\int_a^b [f(x).g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = \left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2$.

Câu 25. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Cho $\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 1$, $\int_{-2}^{4} f(t)\mathrm{d}t = -4$. Tính $\int_{2}^{4} f(y)\mathrm{d}y$.

A. $I=5$. **B.** $I=-3$. **C.** $I=3$. **D.** $I=-5$.

Câu 26. **(THPT Cù Huy Cận -2019)** Cho $\int_0^2 f(x)dx = 3$ và $\int_0^2 g(x)dx = 7$, khi đó $\int_0^2 [f(x)+3g(x)]dx$ bằng

A. 16. **B.** -18. **C.** 24. **D.** 10.

Câu 27. **(THPT - YÊN Định Thanh Hóa2019)** Cho $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$; $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Tính $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$

A. 1. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 28. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Cho $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = -3$ và $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = 4$. Khi đó $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 12. **B.** 7. **C.** 1. **D.** -12.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $[-1;2]$, $f(-1)=8; f(2)=-1$. Tích phân $\int_{-1}^{2} f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 7. **C.** -9. **D.** 9.

Câu 30. **(Sở Thanh Hóa - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 9; \int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=5$. **B.** $I=36$. **C.** $I=\frac{9}{4}$. **D.** $I=13$.

Câu 31. Cho $\int_{-1}^{0} f(x)dx = 3\int_0^3 f(x)dx = 3$. Tích phân $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

A. 6 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 0

Câu 32. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = 10$, $\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x = 4$. Tích phân $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 33. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Nếu $F'(x)=\dfrac{1}{2x-1}$ và $F(1)=1$ thì giá trị của $F(4)$ bằng

A. $\ln 7$. **B.** $1+\dfrac{1}{2}\ln 7$. **C.** $\ln 3$. **D.** $1+\ln 7$.

Câu 34. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương -2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x=9$, $\int_4^{12} f(x)\mathrm{d}x=3$, $\int_4^8 f(x)\mathrm{d}x=5$.

Tính $I=\int_1^{12} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=17$. **B.** $I=1$. **C.** $I=11$. **D.** $I=7$.

Câu 35. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x)dx=7$, $\int_2^6 f(x)dx=3$. Tính $P=\int_0^2 f(x)dx+\int_6^{10} f(x)dx$.

A. $P=10$. **B.** $P=4$. **C.** $P=7$. **D.** $P=-6$.

Câu 36. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho f, g là hai hàm liên tục trên đoạn $[1;3]$ thoả: $\int_1^3 [f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x=10$, $\int_1^3 [2f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=6$. Tính $\int_1^3 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$.

A. 7. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 37. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\int_0^{10} f(x)dx=7$; $\int_2^6 f(x)dx=3$. Tính $P=\int_0^2 f(x)dx+\int_6^{10} f(x)dx$.

A. $P=4$ **B.** $P=10$ **C.** $P=7$ **D.** $P=-4$

Câu 38. Cho f,g là hai hàm số liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3 [f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x=10$ đồng thời $\int_1^3 [2f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=6$. Tính $\int_1^3 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$.

A. 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 39. **(THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thỏa: $\int_1^3 [f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x=10$ và $\int_1^3 [2f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int_1^3 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$.

A. 8. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 6.

Câu 40. **(Mã 104 2017)** Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=5$. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x)+2\sin x]\mathrm{d}x=5$.

A. $I=7$ **B.** $I=5+\dfrac{\pi}{2}$ **C.** $I=3$ **D.** $I=5+\pi$

Câu 41. **(Mã 110 2017)** Cho $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x = -1$. Tính $I = \int_{-1}^{2}\left[x + 2f(x) - 3g(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{17}{2}$ **B.** $I = \frac{5}{2}$ **C.** $I = \frac{7}{2}$ **D.** $I = \frac{11}{2}$

Câu 42. **(THPT Hàm Rồng Thanh Hóa 2019)** Cho hai tích phân $\int_{-2}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 8$ và $\int_{5}^{-2} g(x)\mathrm{d}x = 3$. Tính $I = \int_{-2}^{5}\left[f(x) - 4g(x) - 1\right]\mathrm{d}x$

A. 13. **B.** 27. **C.** -11. **D.** 3.

Câu 43. **(Sở Bình Phước 2019)** Cho $\int_{-1}^{2} f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^{2} g(x)dx = -1$, khi đó $\int_{-1}^{2}\left[x + 2f(x) + 3g(x)\right]dx$ bằng

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{7}{2}$ **C.** $\frac{17}{2}$ **D.** $\frac{11}{2}$

Câu 44. **(Sở Phú Thọ 2019)** Cho $\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 3, \int_{0}^{2} g(x)\mathrm{d}x = -1$ thì $\int_{0}^{2}\left[f(x) - 5g(x) + x\right]\mathrm{d}x$ bằng:

A. 12. **B.** 0. **C.** 8. **D.** 10

Câu 45. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho $\int_{0}^{5} f(x)\mathrm{d}x = -2$. Tích phân $\int_{0}^{5}\left[4f(x) - 3x^2\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. -140. **B.** -130. **C.** -120. **D.** -133.

Câu 46. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019)** Cho $\int_{1}^{2}\left[4f(x) - 2x\right]dx = 1$. Khi đó $\int_{1}^{2} f(x)dx$ bằng:

A. 1. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -1.

Câu 47. Cho $\int_{0}^{1} f(x)dx = 1$ tích phân $\int_{0}^{1}\left(2f(x) - 3x^2\right)dx$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** -1.

Câu 48. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Tính tích phân $I = \int_{-1}^{0}(2x+1)dx$.

A. $I = 0$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = -\frac{1}{2}$.

Câu 49. Tích phân $\int_{0}^{1}(3x+1)(x+3)\mathrm{d}x$ bằng

A. 12. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 50. **(KTNL GV Thpt Lý Thái Tổ -2019)** Giá trị của $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Câu 51. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Tính tích phân $I=\int_0^2(2x+1)dx$

A. $I=5$. **B.** $I=6$. **C.** $I=2$. **D.** $I=4$.

Câu 52. Với a,b là các tham số thực. Giá trị tích phân $\int_0^b\left(3x^2-2ax-1\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. b^3-b^2a-b. **B.** b^3+b^2a+b. **C.** b^3-ba^2-b. **D.** $3b^2-2ab-1$.

Câu 53. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Giả sử $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 3xdx=a+b\frac{\sqrt{2}}{2}\ \left(a,b\in\mathbb{Q}\right)$. Khi đó giá trị của $a-b$ là

A. $-\frac{1}{6}$ **B.** $-\frac{1}{6}$ **C.** $-\frac{3}{10}$ **D.** $\frac{1}{5}$

Câu 54. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2\left(f\left(x\right)+3x^2\right)\mathrm{d}x=10$. Tính $\int_0^2f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. 2. **B.** -2. **C.** 18. **D.** -18.

Câu 55. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho $\int_0^m\left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x=6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(-1;2\right)$. **B.** $\left(-\infty;0\right)$. **C.** $\left(0;4\right)$. **D.** $\left(-3;1\right)$.

Câu 56. **(Mã 104 2018)** $\int_1^2\frac{dx}{2x+3}$ bằng

A. $\frac{1}{2}\ln 35$ **B.** $\ln\frac{7}{5}$ **C.** $\frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}$ **D.** $2\ln\frac{7}{5}$

Câu 57. **(Mã 103 2018)** $\int_1^2\frac{dx}{3x-2}$ bằng

A. $2\ln 2$ **B.** $\frac{1}{3}\ln 2$ **C.** $\frac{2}{3}\ln 2$ **D.** $\ln 2$

Câu 58. **(Đề Tham Khảo 2018)** Tích phân $\int_0^2\frac{dx}{x+3}$ bằng

A. $\frac{2}{15}$ **B.** $\frac{16}{225}$ **C.** $\log\frac{5}{3}$ **D.** $\ln\frac{5}{3}$

Câu 59. **(Mã 105 2017)** Cho $\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$ với a,b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+2b=0$ **B.** $a+b=2$ **C.** $a-2b=0$ **D.** $a+b=-2$

Câu 60. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Tính tích phân $I=\int_1^e\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$

A. $I=\frac{1}{e}$ **B.** $I=\frac{1}{e}+1$ **C.** $I=1$ **D.** $I=e$

Câu 61. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Tính tích phân $I=\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{x+2}$.

A. $I=-\frac{21}{100}$. **B.** $I=\ln\frac{5}{2}$. **C.** $I=\log\frac{5}{2}$. **D.** $I=\frac{4581}{5000}$.

Câu 62. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương - 2019)** $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{3x-2}$ bằng

A. $2\ln 2$. **B.** $\frac{2}{3}\ln 2$. **C.** $\ln 2$. **D.** $\frac{1}{3}\ln 2$.

Câu 63. Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{x-1}{x}\mathrm{d}x$.

A. $I=1-\ln 2$. **B.** $I=\frac{7}{4}$. **C.** $I=1+\ln 2$. **D.** $I=2\ln 2$.

Câu 64. Biết $\int_1^3 \frac{x+2}{x}dx=a+b\ln c$, với $a,b,c\in\mathbb{Z},c<9$. Tính tổng $S=a+b+c$.

A. $S=7$. **B.** $S=5$. **C.** $S=8$. **D.** $S=6$.

Câu 65. **(Mã 110 2017)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Tính: $I=F(e)-F(1)$?

A. $I=\frac{1}{2}$ **B.** $I=\frac{1}{e}$ **C.** $I=1$ **D.** $I=e$

Câu 66. **(Mã 102 2018)** $\int_0^1 e^{3x+1}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{3}(e^4+e)$ **B.** e^3-e **C.** $\frac{1}{3}(e^4-e)$ **D.** e^4-e

Câu 67. **(Mã 101 2018)** $\int_1^2 \mathrm{e}^{3x-1}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^5+\mathrm{e}^2\right)$ **B.** $\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^2\right)$ **C.** $\frac{1}{3}\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^2$ **D.** $\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^2$

Câu 68. **(Mã 123 2017)** Cho $\int_0^6 f(x)dx=12$. Tính $I=\int_0^2 f(3x)dx$.

A. $I=5$ **B.** $I=36$ **C.** $I=4$ **D.** $I=6$

Câu 69. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Tích phân $I=\int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A. $\ln 2-1$. **B.** $-\ln 2$. **C.** $\ln 2$. **D.** $1-\ln 2$.

Câu 70. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên -2019)** Tính $K=\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

A. $K=\ln 2$. **B.** $K=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$. **C.** $K=2\ln 2$. **D.** $K=\ln\frac{8}{3}$.

Chuyên đề 26 TÍCH PHÂN- PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

Dạng 1. Tích phân cơ bản có điều kiện

1.Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên K; a,b là hai phần tử bất kì thuộc K, $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Hiệu số $F(b)-F(a)$ gọi là tích phân của của $f(x)$ từ a đến b và được kí hiệu: $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$.

2. Các tính chất của tích phân:

+ $\int_a^a f(x)dx=0$
+ $\int_a^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$
+ $\int_a^b k.f(x)dx=k.\int_a^b f(x)dx$
+ $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$
+ $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$
+ Nếu $f(x)\ge g(x)\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$.

Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp

$\int x^\alpha.dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$\int(ax+b)^\alpha dx=\frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
$\int\frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$	$\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}.\ln\lvert ax+b\rvert+C$
$\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C$	$\int\frac{1}{(ax+b)^2}dx=-\frac{1}{a}.\frac{1}{ax+b}+C$
$\int\sin x.dx=-\cos x+C$	$\int\sin(ax+b).dx=-\frac{1}{a}.\cos(ax+b)+C$
$\int\cos x.dx=\sin x+C$	$\int\cos(ax+b).dx=\frac{1}{a}.\sin(ax+b)+C$
$\int\frac{1}{\sin^2 x}.dx=-\cot x+C$	$\int\frac{1}{\sin^2(ax+b)}.dx=-\frac{1}{a}.\cot(ax+b)+C$
$\int\frac{1}{\cos^2 x}.dx=\tan x+C$	$\int\frac{1}{\cos^2(ax+b)}.dx=\frac{1}{a}.\tan(ax+b)+C$
$\int e^x.dx=e^x+C$	$\int e^{ax+b}.dx=\frac{1}{a}.e^{ax+b}+C$
$\int a^x.dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$

✍ **Nhận xét**. Khi thay x bằng $(ax+b)$ thì lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm $\frac{1}{a}$.

Câu 1. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{2}{x+2}$. Biết $F(-1)=0$. Tính $F(2)$ kết quả là.

A. $\ln 8+1$. **B.** $4\ln 2+1$. **C.** $2\ln 3+2$. **D.** $2\ln 4$.

Câu 2. **(Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2 x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\pi^2+16\pi-4}{16}$. **B.** $\dfrac{\pi^2-4}{16}$. **C.** $\dfrac{\pi^2+15\pi}{16}$. **D.** $\dfrac{\pi^2+16\pi-16}{16}$.

Câu 3. **(Mã 104 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2 x+3,\ \forall x\in R$, khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\pi^2-2}{8}$. **B.** $\dfrac{\pi^2+8\pi-8}{8}$. **C.** $\dfrac{\pi^2+8\pi-2}{8}$. **D.** $\dfrac{3\pi^2+2\pi-3}{8}$.

Câu 4. **(Mã 102 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$.Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2 x+3,\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng?

A. $\dfrac{\pi^2+8\pi+8}{8}$. **B.** $\dfrac{\pi^2+8\pi+2}{8}$. **C.** $\dfrac{\pi^2+6\pi+8}{8}$. **D.** $\dfrac{\pi^2+2}{8}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 5. Biết rằng hàm số $f(x)=mx+n$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=3$, $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=8$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $m+n=4$. **B.** $m+n=-4$. **C.** $m+n=2$. **D.** $m+n=-2$.

Câu 6. Biết rằng hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{7}{2}$, $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=-2$ và

A. $-\dfrac{3}{4}$. **B.** $-\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Câu 7. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Có hai giá trị của số thực a là a_1, a_2 $(0<a_1<a_2)$ thỏa mãn $\int\limits_1^a (2x-3)\mathrm{d}x=0$. Hãy tính $T=3^{a_1}+3^{a_2}+\log_2\left(\dfrac{a_2}{a_1}\right)$.

A. $T=26$. **B.** $T=12$. **C.** $T=13$. **D.** $T=28$.

Câu 8. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho $\int\limits_0^m (3x^2-2x+1)\mathrm{d}x=6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(-3;1)$.

Câu 9. **(Thi thử Lômônôxốp - Hà Nội 2019)** Cho $I=\int_0^1\left(4x-2m^2\right)\mathrm{d}x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I+6>0$?

A. 1. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 10. **(Sở GD Kon Tum - 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của a để $\int_0^a(2x-3)\mathrm{d}x\le 4$?

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 11. **(THPT Lương Thế Vinh - HN 2018).**Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi;3\pi)$ sao cho $\int_{\pi}^{b}4\cos 2x\mathrm{d}x=1$?

A. 8. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 12. **(Cần Thơ - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{4}{x^2-4}$, $f(-3)+f(3)=f(-1)+f(1)=2$. Giá trị biểu thức $f(-4)+f(0)+f(4)$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 13. **(Chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai - 2018)** Biết $\int_1^4\sqrt{\dfrac{1}{4x}+\dfrac{\sqrt{x}+\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}\mathrm{e}^{2x}}}\mathrm{d}x=a+\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $T=a+b+c$

A. $T=-3$. **B.** $T=3$. **C.** $T=-4$. **D.** $T=-5$.

Câu 14. **(Sở Bạc Liêu - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$, $f(-2)=\dfrac{3}{2}$ và $f(2)=2\ln 2-\dfrac{3}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(4)$ bằng

A. $\dfrac{6\ln 2-3}{4}$. **B.** $\dfrac{6\ln 2+3}{4}$. **C.** $\dfrac{8\ln 2+3}{4}$. **D.** $\dfrac{8\ln 2-3}{4}$.

Câu 15. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2 x+1,\forall x\in\mathbb{R}$ Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx$ bằng.

A. $\dfrac{\pi^2+16\pi+16}{16}$. **B.** $\dfrac{\pi^2+4}{16}$. **C.** $\dfrac{\pi^2+14\pi}{16}$. **D.** $\dfrac{\pi^2+16\pi+4}{16}$.

Câu 16. **(Sở Hà Tĩnh - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\sin^4 x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\pi^2-6}{18}$. **B.** $\dfrac{\pi^2-3}{32}$. **C.** $\dfrac{3\pi^2-16}{64}$. **D.** $\dfrac{3\pi^2-6}{112}$.

Dạng 2. Tích phân hàm số hữu tỷ

Tính $I=\int_a^b\dfrac{P(x)}{Q(x)}dx$? với $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức không chứa căn.

□ Nếu bậc của tử $P(x)$ ≥ bậc mẫu $Q(x)\xrightarrow{PP}$ chia đa thức.

□ Nếu bậc của tử $P(x)$ < bậc mẫu $Q(x)$ mà mẫu số **phân tích được thành tích** số $\xrightarrow{PP}$ đồng nhất thức để đưa thành tổng của các phân số.

Một số trường hợp đồng nhất thức thường gặp:

+ $\dfrac{1}{(ax+m)(bx+n)}=\dfrac{1}{an-bm}\left(\dfrac{a}{ax+m}-\dfrac{b}{bx+n}\right)$ (1)

+ $\dfrac{mx+n}{(x-a)(x-b)}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}=\dfrac{(A+B)x-(Ab+Ba)}{(x-a)(x-b)}\Rightarrow\begin{cases}A+B=m\\Ab+Ba=-n\end{cases}$.

+ $\dfrac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)}=\dfrac{A}{x-m}+\dfrac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)}$ với $\Delta=b^2-4ac<0$.

+ $\dfrac{1}{(x-a)^2(x-b)^2}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{(x-a)^2}+\dfrac{C}{x-b}+\dfrac{D}{(x-b)^2}$.

□ Nếu bậc tử $P(x)$ < bậc mẫu $Q(x)$ mà **mẫu không phân tích được thành tích số**, ta xét một số trường hợp thường gặp sau:

+ $I_1=\int\dfrac{dx}{(x^2+a^2)^n}$,$(n\in N^*)\xrightarrow{PP}x=a.\tan t$.

+ $I_2=\int\dfrac{dx}{ax^2+bx+c},(\Delta<0)=\int\dfrac{dx}{a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\left(-\dfrac{\Delta}{4a}\right)\right]}$. Ta sẽ đặt $\longrightarrow x+\dfrac{b}{2a}=\sqrt{-\dfrac{\Delta}{4a}}\tan t$.

+ $I_3=\int\dfrac{px+q}{ax^2+bx+c}.dx$ với $\Delta=b^2-4ac<0$. Ta sẽ phân tích:

$I_3=\dfrac{p}{2a}\underbrace{\int\dfrac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}}_{A}+\left(q-\dfrac{b.p}{2a}\right).\underbrace{\int\dfrac{dx}{ax^2+bx+c}}_{I_2}$ và giải A bằng cách đặt $t=$ mẫu số.

Câu 1. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Biết $\int_1^2\dfrac{dx}{(x+1)(2x+1)}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$. Khi đó giá trị $a+b+c$ bằng

A. -3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 2. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Biết $I=\int_{-1}^{0}\dfrac{3x^2+5x-1}{x-2}dx=a\ln\dfrac{2}{3}+b,(a,b\in\mathbb{R})$. Khi đó giá trị của $a+4b$ bằng

A. 50 **B.** 60 **C.** 59 **D.** 40

Câu 3. Biết $\int_0^1\dfrac{x^2-2}{x+1}dx=\dfrac{-1}{m}+n\ln 2$, với m,n là các số nguyên. Tính $m+n$.

A. $S=1$. **B.** $S=4$. **C.** $S=-5$. **D.** $S=-1$.

Câu 4. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Tích phân $I=\int_0^1\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}dx=a-\ln b$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a+b$.

A. 1. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 3.

Câu 5. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Biết $\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1}\mathrm{d}x = a + \ln\frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - 2b$.

A. $S = 2$. **B.** $S = -2$. **C.** $S = 5$. **D.** $S = 10$.

Câu 6. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Cho $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{x}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{10}{b} + \ln\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = a + b$?

A. $P = 1$. **B.** $P = 5$. **C.** $P = 7$. **D.** $P = 2$.

Câu 7. **(Chuyên Sơn La 2019)** Cho $\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2}dx = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 8. **(Sở Phú Thọ 2019)** Cho $\int_3^4 \frac{5x-8}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x = a\ln 3 + b\ln 2 + c\ln 5$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của 2^{a-3b+c} bằng

A. 12 **B.** 6 **C.** 1 **D.** 64

Câu 9. Biết $\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1}\mathrm{d}x = a + \ln\frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - 2b$.

A. $S = 2$. **B.** $S = -2$. **C.** $S = 5$. **D.** $S = 10$.

Câu 10. Biết rằng $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \frac{\pi\sqrt{a}}{b}$ $(a, b \in \mathbb{Z}, a < 10)$. Khi đó $a+b$ có giá trị bằng

A. 14. **B.** 15. **C.** 13. **D.** 12.

Câu 11. **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Biết $\int_0^2 \frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3}\mathrm{d}x = a + b\ln 3 + c\ln 5$, $(a, b, c \in \mathbb{Q})$. Giá trị của abc bằng

A. -8. **B.** -10. **C.** -12. **D.** 16.

Câu 12. **(THPT Nguyễn Trãi - Dà Nẵng - 2018)** Giả sử rằng $\int_{-1}^0 \frac{3x^2+5x-1}{x-2}dx = a\ln\frac{2}{3} + b$. Khi đó, giá trị của $a+2b$ là

A. 30. **B.** 60. **C.** 50. **D.** 40.

Câu 13. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019)** Biết $\int_1^4 \frac{x^3+x^2+7x+3}{x^2-x+3}\mathrm{d}x = \frac{a}{b} + c\ln 5$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P = a - b^2 - c^3$.

A. -5. **B.** -4. **C.** 5. **D.** 0.

Câu 14. Cho $\int_0^1 \frac{4x^2+15x+11}{2x^2+5x+2}\mathrm{d}x = a + b\ln 2 + c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Biểu thức $T = a.c - b$ bằng

A. 4. **B.** 6. **C.** $\frac{-1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 15. **(SGD Bến Tre 2019)** Biết $\int_0^1 \frac{x^2-2}{x+1}\mathrm{d}x = \frac{-1}{m} + n\ln 2$, với m, n là các số nguyên. Tính $S = m+n$.

A. $S=-1$. **B.** $S=-5$. **C.** $S=1$. **D.** $S=4$.

Câu 16. **(THPT Cẩm Bình 2019)** Cho $\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$, với a,b là các số hữu tỷ. Khi đó $a+b$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 17. **(Sở Hà Nam - 2019)** Cho $\int_0^1 \frac{2x^2+3x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x = a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tổng $a+b+c$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 18. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Cho biết $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3}dx = a\ln 5 + b\ln 3$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $T = a^2+b^2$ bằng

A. 13. **B.** 10. **C.** 25. **D.** 5.

Câu 19. **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Biết $\int_0^2 \frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3}\mathrm{d}x = a+b\ln 3+c\ln 5$, $(a,b,c\in\mathbb{Q})$. Giá trị của abc bằng

A. -8. **B.** -10. **C.** -12. **D.** 16.

Câu 20. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Biết $\int_1^4 \frac{x^3+x^2+7x+3}{x^2-x+3}\mathrm{d}x = \frac{a}{b} + c\ln 5$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $P = a-b^2-c^3$.

A. -5. **B.** -3. **C.** 6. **D.** -4.

Câu 21. **(Bình Phước - 2019)** Cho $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b^2-c^3$ bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 22. **(SGD Đà Nẵng 2019)** Cho $\int_3^4 \frac{2x+3}{x^2+3x}\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 7$ với a, b, $c\in\mathbb{Z}$. Giá trị của $2a+3b+7c$ bằng

A. -9. **B.** 6. **C.** 15. **D.** 3.

Câu 23. **(SGD Điện Biên - 2019)** Cho $\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2}dx = a+b.\ln 2+c.\ln 3$, với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị $6a+b+c$ bằng:

A. -2. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -1.

Câu 24. **(SP Đồng Nai - 2019)** Biết $\int_2^3 \frac{5x+12}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 5 + c\ln 6$. Tính $S = 3a+2b+c$.

A. -11. **B.** -14. **C.** -2. **D.** 3.

Dạng 3. Tích phân đổi biến

② **Tích phân đổi biến**: $\int_a^b [f(x)].u'(x).dx = F[u(x)]\Big|_a^b = F[u(b)] - F[u(a)]$.

Có sẵn — Tách từ hàm — Nhân

Các bước tính tích phân đổi biến số

- **Bước 1**. Biến đổi để chọn phép đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x).dx$ (quan trọng)
- **Bước 2**. Đổi cận: $\begin{cases} x = b \\ x = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = u(b) \\ t = u(a) \end{cases}$ (nhớ: **đổi biến phải đổi cận**)
- **Bước 3**. Đưa về dạng $I = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t).dt$ đơn giản hơn và dễ tính toán.

Một số phương pháp đổi biến số thường gặp

Đổi biến dạng 1. $\boxed{I = \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}.dx = \underbrace{\int_a^b h(x).dx}_{I_1} + \underbrace{\int_a^b f(g(x)).\frac{g'(x)}{g(x)}.dx}_{I_2}}$ với

Đổi biến dạng 2.

Nghĩa là nếu gặp tích phân **chứa căn thức** thì có khoảng 80% sẽ đặt $t =$ căn trừ một số trường hợp ngoại lệ sau:

1/ $I_1 = \int f\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right).x^{\text{chẵn}}.dx \longrightarrow$ đặt $x = a.\sin t$ hoặc $x = a.\cos t$.

(xuất phát từ công thức $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \end{bmatrix}$)

2/ $I_2 = \int f\left(\sqrt{x^2 + a^2}\right).x^{\text{chẵn}}.dx \longrightarrow$ đặt $x = a.\tan t$ hoặc $x = a.\cot t$.

(mấu chốt xuất phát từ công thức $\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$)

3/ $I_3 = \int f\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right).x^{\text{chẵn}}.dx \longrightarrow$ đặt $x = \frac{a}{\sin t}$ hoặc $x = \frac{a}{\cos t}$.

4/ $I_4 = \int f\left(\sqrt{\frac{a \pm x}{a \mp x}}\right)dx \longrightarrow$ đặt $x = a.\cos 2t$.

5/ $I_5 = \int \frac{dx}{(a + bx^n)\sqrt[n]{a + bx^n}} \longrightarrow$ đặt $x = \frac{1}{t}$.

6/ $I_6 = \int R\left[\sqrt[s_1]{ax + b}, ..., \sqrt[s_k]{ax + b}\right].dx \longrightarrow$ đặt $t^n = ax + b$.

(trong đó n là bội số chung nhỏ nhất của $\{s_1;s_2;...;s_k\}$)

7/ $I_7=\int\frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(cx+d)}}\longrightarrow$ đặt $t=\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}$.

Đổi biến dạng 3. $\boxed{\int f(\ln x).\frac{1}{x}.dx\longrightarrow t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{1}{x}.dx}$

Đổi biến dạng 4. $\boxed{\int f(\sin x).\cos x.dx\longrightarrow t=\sin x\Rightarrow dt=\cos x.dx}$

Đổi biến dạng 5. $\boxed{\int f(\cos x).\sin x.dx\longrightarrow t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin x.dx}$

Đổi biến dạng 6. $\boxed{\int f(\tan x).\frac{1}{\cos^2 x}dx\longrightarrow t=\tan x\Rightarrow dt=\frac{dx}{\cos^2 x}}$

Đổi biến dạng 7. $\boxed{\int f(\cot x).\frac{1}{\sin^2 x}dx\longrightarrow t=\cot x\Rightarrow dt=-\frac{dx}{\sin^2 x}}$

Đổi biến dạng 8. $\boxed{\begin{bmatrix}\int f(\sin x+\cos x).(\sin x-\cos x)\,dx\\ \int f(\sin x-\cos x).(\sin x+\cos x)\,dx\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}t=\sin x+\cos x\\ t=\sin x-\cos x\end{bmatrix}}$

Đổi biến dạng 9. $\boxed{\begin{bmatrix}\int f(ax^2+b)^n.xdx\longrightarrow t=ax^2+b\Rightarrow dt=2axdx\\ \int f(ax+b)^n.xdx\longrightarrow t=ax+b\Rightarrow dt=adx\end{bmatrix}}$

Câu 1. **(Đề Tham Khảo -2019)** Cho $\int_0^1\frac{xdx}{(x+2)^2}=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

A. 2 **B.** 1 **C.** -2 **D.** -1

Câu 2. Tính $K=\int_2^3\frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x$ bằng

A. $K=\ln 2$. **B.** $K=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$. **C.** $K=2\ln 2$. **D.** $K=\ln\frac{8}{3}$.

Câu 3. **(Chuyên Long An - 2018)** Cho tích phân $I=\int_0^1\frac{x^7}{(1+x^2)^5}\mathrm{d}x$, giả sử đặt $t=1+x^2$. Tìm mệnh đề đúng.

A. $I=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{(t-1)^3}{t^5}\mathrm{d}t$. **B.** $I=\int_1^3\frac{(t-1)^3}{t^5}\mathrm{d}t$.

C. $I=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{(t-1)^3}{t^4}\mathrm{d}t$. **D.** $I=\frac{3}{2}\int_1^4\frac{(t-1)^3}{t^4}\mathrm{d}t$.

Câu 4. **(KTNL Gia Bình Năm 2019)** Có bao nhiêu số thực a để $\int_0^1 \frac{x}{a+x^2}dx=1$.

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3

Câu 5. **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(1)=0$ và $f'(x)=2019.2020.x(x-1)^{2018}, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{2021}$. **B.** $\frac{1}{1011}$. **C.** $-\frac{2}{2021}$. **D.** $-\frac{1}{1011}$.

Câu 6. **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+2)^2}=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

A. -2 **B.** -1 **C.** 2 **D.** 1

Câu 7. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho $\int 2x(3x-2)^6\mathrm{d}x= A(3x-2)^8+B(3x-2)^7+C$ với $A,B,C\in\mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $12A+7B$.

A. $\frac{23}{252}$ **B.** $\frac{241}{252}$ **C.** $\frac{52}{9}$ **D.** $\frac{7}{9}$

Câu 8. **(Chuyên Hà Tĩnh - 2018)** Biết $\int_0^1 \frac{2x^2+3x+3}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x=a-\ln b$ với a,b là các số nguyên dương. Tính $P=a^2+b^2$.

A. 13. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 10.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 9. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019)** Cho $\int_1^2 e^{3x-1}\mathrm{d}x=m\left(e^p-e^q\right)$ với m, p, $q\in\mathbb{Q}$ và là các phân số tối giản. Giá trị $m+p+q$ bằng

A. 10. **B.** 6. **C.** $\frac{22}{3}$. **D.** 8.

Câu 10. Biết rằng $\int_0^1 xe^{x^2+2}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}\left(e^b-e^c\right)$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 11. **(KTNL GV Lý Thái Tổ 2019)** Biết $\int_1^e \frac{x+1}{x^2+x\ln x}dx=\ln(ae+b)$ với a,b là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T=a^2-ab+b^2$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 8.

Câu 12. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Biết $\int_1^2 (x+1)^2 e^{x-\frac{1}{x}}dx=me^{\frac{p}{q}}-n$, trong đó m,n,p,q là các số nguyên dương và $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản. Tính $T=m+n+p+q$.

A. $T=11$. **B.** $T=10$. **C.** $T=7$. **D.** $T=8$.

Câu 13. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)=\int\limits_{2x}^{x^2}\frac{2t\mathrm{d}t}{1+t^2}$ là

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 14. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn $f(0)=f(1)=5$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f'(x)e^{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I=10$ **B.** $I=-5$ **C.** $I=0$ **D.** $I=5$

Câu 15. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(3)=3$ và $f'(x)=\frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}$, $\forall x>0$. Khi đó $\int\limits_3^8 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** $\frac{197}{6}$. **C.** $\frac{29}{2}$. **D.** $\frac{181}{6}$.

Câu 16. **(Mã 102 2018)** Cho $\int\limits_5^{21}\frac{dx}{x\sqrt{x+4}}=a\ln 3+b\ln 5+c\ln 7$, với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a-b=-2c$ **B.** $a+b=-2c$ **C.** $a+b=c$ **D.** $a-b=-c$

Câu 17. **(Mã 101 2018)** Cho $\int\limits_{16}^{55}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+9}}=a\ln 2+b\ln 5+c\ln 11$, với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=3c$ **B.** $a-b=-3c$ **C.** $a-b=-c$ **D.** $a+b=c$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 18. **(Đề Tham Khảo 2017)** Tính tích phân $I=\int\limits_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$ bằng cách đặt $u=x^2-1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=\int\limits_0^3\sqrt{u}du$ **B.** $I=\frac{1}{2}\int\limits_1^2\sqrt{u}du$ **C.** $I=2\int\limits_0^3\sqrt{u}du$ **D.** $I=\int\limits_1^2\sqrt{u}du$

Câu 19. **(Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Giả sử tích phân $I=\int\limits_1^5\frac{1}{1+\sqrt{3x+1}}dx=a+b\ln 3+c\ln 5$. Lúc đó

A. $a+b+c=\frac{5}{3}$. **B.** $a+b+c=\frac{4}{3}$. **C.** $a+b+c=\frac{7}{3}$. **D.** $a+b+c=\frac{8}{3}$.

Câu 20. **(Liên trường Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(2)=0$ và $f'(x)=\frac{x+7}{\sqrt{2x-3}},\forall x\in\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. Biết rằng $\int\limits_4^7 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}$ ($a,b\in\mathbb{Z},b>0,\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó $a+b$ bằng

A. 250. **B.** 251. **C.** 133. **D.** 221.

Câu 21. **(Nam Định - 2018)** Biết tích phân $\int\limits_0^{\ln 6}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\sqrt{\mathrm{e}^x+3}}\mathrm{d}x=a+b\ln 2+c\ln 3$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=-1$. **B.** $T=0$. **C.** $T=2$. **D.** $T=1$.

Câu 22. **(Chuyên Vinh - 2018)** Tích phân $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+1}}$ bằng

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 23. **(Đề Tham Khảo 2018)** Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với a,b,c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$

A. $P=18$ **B.** $P=46$ **C.** $P=24$ **D.** $P=12$

Câu 24. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx=a+b\sqrt{2}$ với a,b là các số hữu tỷ. Tính $S=a+b$.

A. $S=1$. **B.** $S=\frac{1}{2}$. **C.** $S=\frac{3}{4}$. **D.** $S=\frac{2}{3}$.

Câu 25. **(Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Cho tích phân $I=\int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x$ và $x=4\sin t$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $I=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$. **B.** $I=16\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 t\mathrm{d}t$.

C. $I=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2t)\mathrm{d}t$. **D.** $I=-16\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\mathrm{d}t$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 26. Biết $\int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x=a+b\ln 3+c\ln 5$ $(a,b,c\in Q)$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 27. Cho $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\ln\left(\frac{b}{c}+\sqrt{d}\right)$, với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ tối giản. Giá trị của $a+b+c+d$ bằng

A. 12 **B.** 10 **C.** 18 **D.** 15

Câu 28. **(Lê Quý Đôn - Quảng Trị - 2018)** Cho biết $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}}\mathrm{d}x=\frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là một phân số tối giản. Tính $m-7n$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 91.

Câu 29. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Biết rằng $\int_0^1 \frac{dx}{3x+5\sqrt{3x+1}+7}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $-\frac{10}{3}$ **B.** $-\frac{5}{3}$ **C.** $\frac{10}{3}$ **D.** $\frac{5}{3}$

Câu 30. Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx = a+b\sqrt{2}$ với a,b là các số hữu tỷ. Tính $S=a+b$.

A. $S=1$. **B.** $S=\frac{1}{2}$. **C.** $S=\frac{3}{4}$. **D.** $S=\frac{2}{3}$.

Câu 31. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Cho $\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}dx = \frac{a}{3}+b\ln 2+c\ln 3$ với a,b,c là các số nguyên. Giá trị $a+b+c$ bằng:

A. 9 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 7

Câu 32. **(THPT Ba Đình 2019)** Cho $I=\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = \frac{a}{d}+b\ln 2+c\ln d$, với a,b,c,d là các số nguyên và $\frac{a}{d}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a+b+c+d$ bằng

A. 16. **B.** 4. **C.** 28. **D.** -2.

Câu 33. Tính $I=\int_0^a \frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

A. $I=\left(a^2+1\right)\sqrt{a^2+1}-1$. **B.** $I=\frac{1}{3}\left[\left(a^2+1\right)\sqrt{a^2+1}-1\right]$.

C. $I=\frac{1}{3}\left[\left(a^2+1\right)\sqrt{a^2+1}+1\right]$. **D.** $I=\left(a^2+1\right)\sqrt{a^2+1}+1$.

Câu 34. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến - 2018)** Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x$ bằng tích phân nào dưới đây?

A. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin^2 y\mathrm{d}y$. **B.** $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos x}\mathrm{d}x$. **C.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 y}{\cos y}\mathrm{d}y$. **D.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 y\mathrm{d}y$.

Câu 35. **(Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018)** Biết $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{b}{a}\ln 5-c\ln 2$ với a,b,c là các số nguyên và phân số $\frac{a}{b}$ là tối giản. Tính $P=3a+2b+c$.

A. 11. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 13.

Câu 36. **(Bình Giang - Hải Dương - 2018)** Cho tích phân $\int_1^4 \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx = a+b\sqrt{6}+c\ln\left(\frac{5\sqrt{6}+12}{5\sqrt{6}-12}\right)+d\ln 2$ với a,b,c,d là các số hữu tỉ. Tính tổng $a+b+c+d$.

A. $-\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{3}{25}$. **C.** $-\frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{3}{20}$.

Câu 37. **(Sở Hưng Yên - 2018)** Cho tích phân $I=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$ nếu đổi biến số $x=2\sin t, t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thì ta được.

A. $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}t$. **B.** $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}t$. **C.** $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}t\mathrm{d}t$. **D.** $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\mathrm{d}t}{t}$.

Câu 38. **(THPT Phú Lương - Thái Nguyên - 2018)** Biết $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{x^3}{x+\sqrt{1+x^2}}dx=\dfrac{a\sqrt{b}+c}{15}$ với a, b, c là các số nguyên và $b\ge 0$. Tính $P=a+b^2-c$.

A. $P=3$. **B.** $P=7$. **C.** $P=-7$. **D.** $P=5$.

Câu 39. Cho n là số nguyên dương khác 0, hãy tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{1}\left(1-x^2\right)^n x\mathrm{d}x$ theo n.

A. $I=\dfrac{1}{2n+2}$. **B.** $I=\dfrac{1}{2n}$. **C.** $I=\dfrac{1}{2n-1}$. **D.** $I=\dfrac{1}{2n+1}$.

Câu 40. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Giả sử $I=\int\limits_{1}^{64}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=a\ln\dfrac{2}{3}+b$ với a, b là số nguyên. Khi đó giá trị $a-b$ là

A. -17. **B.** 5. **C.** -5. **D.** 17.

Câu 41. **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\sqrt{2}\right)=-2$ và $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{6-x^2}},\forall x\in\left(-\sqrt{6};\sqrt{6}\right)$. Khi đó $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}f(x).\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{3\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{3\pi+6}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi+2}{4}$. **D.** $-\dfrac{3\pi+6}{4}$.

Câu 42. **(Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - 2018)** Biết $\int\limits_{1}^{2}\dfrac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\mathrm{d}x=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{35}$ với a, b, c là các số hữu tỷ, tính $P=a+2b+c-7$.

A. $-\dfrac{1}{9}$. **B.** $\dfrac{86}{27}$. **C.** -2. **D.** $\dfrac{67}{27}$.

Câu 43. **(THPT Phan Chu Trinh - Đắc Lắc - 2018)** Biết $\int\limits_{1}^{2}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=44$. **B.** $P=42$. **C.** $P=46$. **D.** $P=48$.

Câu 44. **(SởPhú Thọ - 2018)** Biết $\int\limits_{0}^{4}\dfrac{\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x}{2x+3\sqrt{2x+1}+3}=a+b\ln 2+c\ln\dfrac{5}{3}\left(a,b,c\in\mathbb{Z}\right)$. Tính $T=2a+b+c$.

A. $T=4$. **B.** $T=2$. **C.** $T=1$. **D.** $T=3$.

Câu 45. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\cos x\cos^2 2x,\forall\in R$. Khi đó $\int\limits_{0}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1042}{225}$. **B.** $\dfrac{208}{225}$. **C.** $\dfrac{242}{225}$. **D.** $\dfrac{149}{225}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 46. **(Sở Bình Phước - 2020)** Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6} \mathrm{d}x = a \ln \frac{4}{b}$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 47. **(Đề Minh Họa 2017)** Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\pi} \cos^3 x.\sin x \mathrm{d}x$.

A. $I = -\frac{1}{4}$ **B.** $I = -\frac{1}{4}\pi^4$ **C.** $I = -\pi^4$ **D.** $I = 0$

Câu 48. **(THPT Kinh Môn - 2018)** Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5\sin x + 6} \mathrm{d}x = a \ln \frac{4}{c} + b$, tính tổng $S = a+b+c$

A. $S = 1$. **B.** $S = 4$. **C.** $S = 3$. **D.** $S = 0$.

Câu 49. **(Bình Dương 2018)** Cho tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2+\cos x}.\sin x \mathrm{d}x$. Nếu đặt $t = 2+\cos x$ thì kết quả nào sau đây đúng?

A. $I = \int\limits_3^2 \sqrt{t} \mathrm{d}t$. **B.** $I = \int\limits_2^3 \sqrt{t} \mathrm{d}t$. **C.** $I = 2\int\limits_3^2 \sqrt{t} \mathrm{d}t$. **D.** $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t} \mathrm{d}t$.

Câu 50. **(Đồng Tháp - 2018)** Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \mathrm{d}x$ bằng cách đặt $u = \tan x$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

Nguyễn Bảo Vương

A. $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} u^2 \mathrm{d}u$. **B.** $I = \int\limits_0^2 \frac{1}{u^2} \mathrm{d}u$. **C.** $I = -\int\limits_0^1 u^2 \mathrm{d}u$. **D.** $I = \int\limits_0^1 u^2 \mathrm{d}u$.

Câu 51. **(THTP Lê Quý Đôn - Hà Nội - 2018)** Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} \mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{5}{2}$. **B.** $I = \frac{3}{2}$. **C.** $I = \frac{\pi}{3} + \frac{9}{20}$. **D.** $I = \frac{9}{4}$.

Câu 52. **(THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - 2018)** Cho tích phân $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 2} \mathrm{d}x = a \ln 5 + b \ln 2$ với $a, b \in \mathbb{Z}$.

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $2a+b=0$. **B.** $a-2b=0$. **C.** $2a-b=0$. **D.** $a+2b=0$.

Câu 53. **(THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019)** Có bao nhiêu số $a \in (0;20\pi)$ sao cho $\int\limits_0^a \sin^5 x \sin 2x \mathrm{d}x = \frac{2}{7}$.

A. 10. **B.** 9. **C.** 20. **D.** 19.

Câu 54. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Biết $F(x)$ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{\sin 2x+\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$ và $F(0)=2$. Tính $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

A. $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}-8}{3}$ **B.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2\sqrt{2}+8}{3}$ **C.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{4\sqrt{2}-8}{3}$ **D.** $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{4\sqrt{2}+8}{3}$

Câu 55. Biết $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}=\dfrac{a\sqrt{3}+b}{c}$, với $a,b\in\mathbb{Z},c\in\mathbb{Z}^+$ và a,b,c là các số nguyên tố cùng nhau. Giá trị của tổng $a+b+c$ bằng

A. 5. **B.** 12. **C.** 7. **D.** -1.

Câu 56. Cho tích phân số $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{\cos x+2}\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 2$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2a+b=0.$ **B.** $a-2b=0.$ **C.** $2a-b=0..$ **D.** $a+2b=0..$

Câu 57. **(THPT Nghen - Hà Tĩnh - 2018)** Cho $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{(\cos x)^2-5\cos x+6}\mathrm{d}x=a\ln\dfrac{4}{c}+b$, với a, b là các số hữu tỉ, $c>0$. Tính tổng $S=a+b+c$.

A. $S=3$. **B.** $S=0$. **C.** $S=1$. **D.** $S=4$.

Câu 58. **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(0)=1$ và $f'(x)=\tan^3 x+\tan x,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx=\dfrac{a+\pi}{b};a,b\in\mathbb{Q}$, khi đó $b-a$ bằng

A. 4. **B.** 12. **C.** 0. **D.** -4.

Câu 59. **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\sin^8 x-\cos^8 x-4\sin^6 x,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\displaystyle\int_0^{\pi}16f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=10\pi^2$. **B.** $I=160\pi$. **C.** $I=16\pi^2$. **D.** $I=-10\pi^2$.

Câu 60. **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho $\displaystyle\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{e^x+1}=a+b\ln\dfrac{1+e}{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S=a^3+b^3$.

A. $S=-2$. **B.** $S=0$. **C.** $S=1$. **D.** $S=2$.

Câu 61. **(Cần Thơ - 2018)** Cho tích phân $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{3\ln x+1}{x}\mathrm{d}x$. Nếu đặt $t=\ln x$ thì

A. $I=\displaystyle\int_0^1\dfrac{3t+1}{\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$. **B.** $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}\dfrac{3t+1}{t}\mathrm{d}t$. **C.** $I=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}(3t+1)\mathrm{d}t$. **D.** $I=\displaystyle\int_0^1(3t+1)\mathrm{d}t$.

Câu 62. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho $I=\displaystyle\int_1^e\dfrac{\ln x}{x(\ln x+2)^2}dx=a\ln 3+b\ln 2+\dfrac{c}{3}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đâu đúng.

A. $a^2+b^2+c^2=1$. **B.** $a^2+b^2+c^2=11$. **C.** $a^2+b^2+c^2=9$. **D.** $a^2+b^2+c^2=3$.

Câu 63. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Biết $I=\int\limits_0^4 x\ln\left(x^2+9\right)\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 3+c$ trong đó a,b,c là các số thực. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ là:

A. $T=11$. **B.** $T=9$. **C.** $T=10$. **D.** $T=8$.

Câu 64. Cho $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\ln x}{x\left(\ln x+2\right)^2}\mathrm{d}x$ có kết quả dạng $I=\ln a+b$ với $a>0$, $b\in\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2ab=-1$. **B.** $2ab=1$. **C.** $-b+\ln\dfrac{3}{2a}=-\dfrac{1}{3}$. **D.** $-b+\ln\dfrac{3}{2a}=\dfrac{1}{3}$.

Câu 65. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Cho $\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{2\ln x+1}{x\left(\ln x+2\right)^2}\mathrm{d}x=\ln\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}$ với a, b, c là các số nguyên dương, biết $\dfrac{a}{b};\dfrac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính giá trị $a+b+c+d$?

A. 18. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

Câu 66. **(Kim Liên - Hà Nội – 2018)** Biết $\int\limits_0^1\dfrac{\pi x^3+2^x+\mathrm{e}x^3.2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{\mathrm{e}\ln n}\ln\left(p+\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+\pi}\right)$ với m, n, p là các số nguyên dương. Tính tổng $S=m+n+p$.

A. $S=6$. **B.** $S=5$. **C.** $S=7$. **D.** $S=8$.

Câu 67. **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Cho $\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\left(3x^3-1\right)\ln x+3x^2-1}{1+x\ln x}\mathrm{d}x=a.\mathrm{e}^3+b+c.\ln\left(\mathrm{e}+1\right)$ với a,b,c là các số nguyên và $\ln\mathrm{e}=1$. Tính $P=a^2+b^2+c^2$.

A. $P=9$. **B.** $P=14$. **C.** $P=10$. **D.** $P=3$.

Câu 68. Biết $I=\int_0^{\ln 2}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+3\mathrm{e}^{-x}+4}=\dfrac{1}{c}\left(\ln a-\ln b+\ln c\right)$ với a, b, c là các số nguyên dương.

Tính $P=2a-b+c$.

A. $P=-3$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=4$. **D.** $P=3$

Câu 69. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Biết $\int\limits_1^2\dfrac{x+1}{x^2+x\ln x}\mathrm{d}x=\ln\left(\ln a+b\right)$ với a, b là các số nguyên dương.

Tính $P=a^2+b^2+ab$.

A. 10. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 6.

Câu 70. **(Chuyên Thái Bình 2018)** Cho $\int\limits_0^1\dfrac{\left(x^2+x\right)\mathrm{e}^x}{x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=a.\mathrm{e}+b\ln\left(\mathrm{e}+c\right)$ với a, b, $c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+2b-c$.

A. $P=1$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=0$. **D.** $P=-2$.

Câu 71. **(Chuyên KHTN - 2020)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ biết $f\left(0\right)=\dfrac{1}{2}$ và $f'\left(x\right)=xe^{x^2}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Khi đó $\int\limits_0^1 xf\left(x\right)dx$ bằng

A. $\dfrac{e+1}{4}$. **B.** $\dfrac{e-1}{4}$. **C.** $\dfrac{e-1}{2}$. **D.** $\dfrac{e+1}{2}$.

Câu 72. **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Biết rằng $\int_1^e \frac{2\ln x+1}{x(\ln x+1)^2}\mathrm{d}x = a\ln 2 - \frac{b}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=3$. **B.** $S=7$. **C.** $S=10$. **D.** $S=5$.

Dạng 4. Tích phân từng phần

Nếu u,v có đạo hàm liên tục trên $(a;b)$ thì $\boxed{I=\int_a^b u.dv = u.v\Big|_a^b - \int_a^b v.du}$.

Chọn $\begin{cases} u=\ldots\ldots\ldots\ldots \xrightarrow{\text{Vi phân}} du=\ldots\ldots\ldots dx \\ dv=\ldots\ldots\ldots dx \xrightarrow{\text{Nguyên hàm}} v=\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$

Nhận dạng: **tích hai hàm khác loại nhân nhau** (ví dụ: mũ nhân lượng giác,…)

Thứ tự ưu tiên **chọn u** là: "**log – đa – lượng – mũ**" và **dv là phần còn lại**.

Nghĩa là nếu có ln hay $\log_a x$ thì chọn $u=\ln$ hay $u=\log_a x=\frac{1}{\ln a}.\ln x$ và $dv=$ còn lại. Nếu không có ln; log thì chọn $u=$ đa thức và $dv=$ còn lại,…

CHÚ Ý:. $\int_a^b$(hàm mũ). (lượng giác). dx ⟶ tích phân từng phần luân hồi.

Nghĩa là sau khi đặt u, dv để tính tích phân từng phần và tiếp tục tính $\int$ udv sẽ xuất hiện lại tích phân ban đầu. Giả sử tích phân được tính ban đầu là I và nếu lập lại, ta sẽ không giải tiếp mà xem đây là phương trình bậc nhất ẩn là I $\overset{\text{giải}}{\Longrightarrow}$ I.

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Xét $\int_0^2 xe^{x^2}\mathrm{d}x$, nếu đặt $u=x^2$ thì $\int_0^2 xe^{x^2}\mathrm{d}x$ bằng

A. $2\int_0^2 e^u\mathrm{d}u$. **B.** $2\int_0^4 e^u\mathrm{d}u$. **C.** $\frac{1}{2}\int_0^2 e^u\mathrm{d}u$. **D.** $\frac{1}{2}\int_0^4 e^u\mathrm{d}u$.

Câu 2. **(Đề Minh Họa 2017)** Tính tích phân $I=\int_1^e x\ln x\mathrm{d}x$:

A. $I=\frac{e^2-1}{4}$ **B.** $I=\frac{1}{2}$ **C.** $I=\frac{e^2-2}{2}$ **D.** $I=\frac{e^2+1}{4}$

Câu 3. **(Mã 103 2018)** Cho $\int_1^e (1+x\ln x)\mathrm{d}x = ae^2+be+c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=c$ **B.** $a+b=-c$ **C.** $a-b=c$ **D.** $a-b=-c$

Câu 4. **(Mã 104 2018)** Cho $\int_1^e (2+x\ln x)\mathrm{d}x = ae^2+be+c$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+b=c$ **B.** $a-b=c$ **C.** $a-b=-c$ **D.** $a+b=-c$

Câu 5. **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Biết $\int_0^1 x\ln(x^2+1)\mathrm{d}x = a\ln 2 - \frac{b}{c}$ (với $a,b,c\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính $P=13a+10b+84c$.

A. 193. **B.** 191. **C.** 190. **D.** 189.

Câu 6. **(Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Cho a là số thực dương. Tính $I=\int_0^a \sin^{2016} x.\cos(2018x)\,dx$ bằng:

A. $I=\dfrac{\cos^{2017} a.\sin 2017a}{2016}$. **B.** $I=\dfrac{\sin^{2017} a.\cos 2017a}{2017}$.

C. $I=\dfrac{\sin^{2017} a.\cos 2017a}{2016}$. **D.** $I=\dfrac{\cos^{2017} a.\cos 2017a}{2017}$.

Câu 7. **(Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=-1$ và $f'(x)=x\left(6+12x+e^{-x}\right),\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $3e$. **B.** $3e^{-1}$. **C.** $4-3e^{-1}$. **D.** $-3e^{-1}$.

Câu 8. **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Biết $I=\int_0^4 x\ln\left(x^2+9\right)\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 3+c$ trong đó a, b, c là các số thực. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c$.

A. $T=9$. **B.** $T=11$. **C.** $T=8$. **D.** $T=10$.

Câu 9. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020)** Xét hàm số $f(x)=e^x+\int_0^1 xf(x)dx$. Giá trị của $f(\ln(5620))$ bằng

A. 5622. **B.** 5620. **C.** 5618. **D.** 5621.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 10. Tích phân $\int_0^1 (x-2)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{-5-3\mathrm{e}^2}{4}$. **B.** $\dfrac{5-3\mathrm{e}^2}{4}$. **C.** $\dfrac{5-3\mathrm{e}^2}{2}$. **D.** $\dfrac{5+3\mathrm{e}^2}{4}$.

Câu 11. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Biết rằng tích phân $\int_0^1 (2x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=a+b.\mathrm{e}$, tích $a.b$ bằng

A. -15. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 20.

Câu 12. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Cho tích phân $I=\int_1^2 \dfrac{\ln x}{x^2}dx=\dfrac{b}{c}+a\ln 2$ với a là số thực, b và c là các số dương, đồng thời $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P=2a+3b+c$.

A. $P=6$. **B.** $P=5$. **C.** $P=-6$. **D.** $P=4$.

Câu 13. **(THPT Lê Xoay Vĩnh Phúc 2019)** Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x-1)\sin 2x\mathrm{d}x$. Tìm đẳng thức đúng?

A. $I=-(x-1)\cos 2x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\mathrm{d}x$. **B.** $I=-\dfrac{1}{2}(x-1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\mathrm{d}x$.

C. $I=-\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx$. **D.** $I=-(x-1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx$.

Câu 14. **(Chuyên KHTN 2019)** Biết rằng tồn tại duy nhất các bộ số nguyên a,b,c sao cho $\int_2^3(4x+2)\ln x\,dx=a+b\ln 2+c\ln 3$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 19. **B.** -19. **C.** 5. **D.** -5.

Câu 15. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho $\int_1^2\frac{\ln(1+x)}{x^2}dx=a\ln 2+b\ln 3$, với a,b là các số hữu tỉ. Tính $P=a+4b$.

A. $P=0$ **B.** $P=1$ **C.** $P=3$ **D.** $P=-3$

Câu 16. Tính tích phân $I=\int_1^{2^{1000}}\frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$, ta được

A. $I=-\frac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}}+1001\ln\frac{2}{1+2^{1000}}$. **B.** $I=-\frac{1000\ln 2}{1+2^{1000}}+\ln\frac{2^{1000}}{1+2^{1000}}$.

C. $I=\frac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}}-1001\ln\frac{2}{1+2^{1000}}$. **D.** $I=\frac{1000\ln 2}{1+2^{1000}}-\ln\frac{2^{1000}}{1+2^{1000}}$.

Câu 17. Biết $\int_0^2 2x\ln(x+1)\mathrm{dx}=\mathrm{a.lnb}$, với $a,b\in\mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $6a+7b$.

A. $6a+7b=33$. **B.** $6a+7b=25$. **C.** $6a+7b=42$. **D.** $6a+7b=39$.

Câu 18. **(Chuyên Hưng Yên 2019)** Biết rằng $\int_1^a\ln x\,dx=1+2a,\ (a>1)$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $a\in(18;21)$. **B.** $a\in(1;4)$. **C.** $a\in(11;14)$. **D.** $a\in(6;9)$.

Câu 19. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Cho tích phân $\int_0^1(x-2)e^x\mathrm{dx}=a+be$, với $a;b\in\mathbb{Z}$. Tổng $a+b$ bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** 5. **D.** -1.

Câu 20. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh -2019)** Tính tích phân $I=\int_1^2 xe^x dx$.

A. $I=e^2$. **B.** $I=-e^2$. **C.** $I=e$. **D.** $I=3e^2-2e$.

Câu 21. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Biết rằng $\int_2^3 x\ln x\,\mathrm{dx}=m\ln 3+n\ln 2+p$ trong đó $m,n,p\in\mathbb{Q}$. Tính $m+n+2p$

A. $\frac{5}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 0. **D.** $-\frac{5}{4}$.

Câu 22. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Biết $\int_0^2 2x\ln(1+x)\mathrm{dx}=a.\ln b$, với $a,b\in\mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $3a+4b$.

A. 42. **B.** 21. **C.** 12. **D.** 32.

Câu 23. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Cho tích phân $I=\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{b}{c}+a\ln 2$ với a là số thực, b và c là các số nguyên dương, đồng thời $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P=2a+3b+c$.

A. $P=6$ **B.** $P=-6$ **C.** $P=5$ **D.** $P=4$

Câu 24. Biết $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{a}\pi-\ln b$. Khi đó, giá trị của a^2+b bằng

A. 11. **B.** 7. **C.** 13. **D.** 9.

Câu 25. Cho $\int \ln\left(x^2-x\right)dx=F\left(x\right), F\left(2\right)=2\ln 2-4$. Khi đó $I=\int_2^3\left[\frac{F\left(x\right)+2x+\ln\left(x-1\right)}{x}\right]dx$ bằng

A. $3\ln 3-3$. **B.** $3\ln 3-2$. **C.** $3\ln 3-1$. **D.** $3\ln 3-4$

Câu 26. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Biết $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{a}\pi-\ln b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T=a^2+b$.

A. $T=9$. **B.** $T=13$. **C.** $T=7$. **D.** $T=11$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 27. **(Thpt Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Cho $\int_1^2 \frac{\ln\left(1+2x\right)}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}\ln 5+b\ln 3+c\ln 2$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+2\left(b+c\right)$ là:

A. 0. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 28. Cho $\int_1^2 \frac{\ln\left(1+x\right)}{x^2}\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $P=ab$.

A. $P=\frac{3}{2}$. **B.** $P=0$. **C.** $P=\frac{-9}{2}$. **D.** $P=-3$.

Câu 29. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Cho tích phân $\int_0^1 (x-2)e^x\mathrm{d}x=a+be$, với $a;b\in\mathbb{Z}$. Tổng $a+b$ bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** 5. **D.** -1.

Câu 30. **(Sở Phú Thọ 2019)** Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln\left(\sin x+2\cos x\right)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=a\ln 3+b\ln 2+c\pi$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của abc bằng

A. $\frac{15}{8}$ **B.** $\frac{5}{8}$ **C.** $\frac{5}{4}$ **D.** $\frac{17}{8}$

Câu 31. **(Chuyên Thái Bình 2019)** Biết $\int\limits_{\frac{1}{12}}^{12}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=\frac{a}{b}e^{\frac{c}{d}}$ trong đó a,b,c,d là các số nguyên dương và các phân số $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ là tối giản. Tính $bc-ad$.

A. 12. **B.** 1. **C.** 24. **D.** 64.

Câu 32. **(THPT Yên Khánh A 2018)** Cho $\int\limits_{0}^{2}\frac{x+\ln(x+1)}{(x+2)^2}\mathrm{d}x=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\ln 3$ (với $a,c\in\mathbb{Z};b,d\in\mathbb{N}^*;\frac{a}{b}\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản). Tính $P=(a+b)(c+d)$.

A. 7. **B.** -7. **C.** 3. **D.** -3.

Câu 33. **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(1)=\frac{1}{2}$ và $f'(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$ với $x>-1$. Biết $\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=a\ln\frac{b}{c}-d$ với a,b,c,d là các số nguyên dương, $b\le 3$ và $\frac{b}{c}$ tối giản. Khi đó $a+b+c+d$ bằng

A. 8. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 10.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 26 TÍCH PHÂN - PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

TÀI LIỆU DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ – GIỎI – XUẤT SẮC MỨC 8-9-10 ĐIỂM

Dạng 1. Tích phân Hàm ẩn

Dạng 1.1 Giải bằng phương pháp đổi biến

Thông thường nếu trong bài toán xuất hiện $\int_a^b f\left[u(x)\right]\mathrm{d}x$ thì ta sẽ đặt $u(x)=t$

Câu 1. **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{-5}^{1} f(x)\mathrm{d}x=9$. Tích phân $\int_0^2\left[f(1-3x)+9\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 15. **B.** 27. **C.** 75. **D.** 21.

Câu 2. **(Chuyên Lam Sơn - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x=7, \int_2^{10} f(x)\mathrm{d}x=1$. Tính $P=\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x$.

A. $P=6$. **B.** $P=-6$. **C.** $P=3$. **D.** $P=12$.

Câu 3. **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Cho $I=\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x=26$. Khi đó $J=\int_0^2 x\left[f\left(x^2+1\right)+1\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 15. **B.** 13. **C.** 54. **D.** 52.

Câu 4. **(Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^9 \frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx=4$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x dx=2$. Tích phân $I=\int_0^3 f(x)dx$ bằng

A. $I=8$. **B.** $I=6$. **C.** $I=4$. **D.** $I=10$.

Câu 5. **(THPT Cẩm Giàng 2019)** Cho biết $\int_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x=15$. Tính giá trị của $P=\int_0^2\left[f(5-3x)+7\right]\mathrm{d}x$.

A. $P=15$. **B.** $P=37$. **C.** $P=27$. **D.** $P=19$.

Câu 6. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=2018$. Tính tích phân $I=\int_0^2\left[f(2x)+f(4-2x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=0$. **B.** $I=2018$. **C.** $I=4036$. **D.** $I=1009$.

Câu 7. Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $[-6;6]$. Biết rằng $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=8$; $\int_1^3 f(-2x)\mathrm{d}x=3$. Giá trị của $I=\int_{-1}^{6} f(x)\mathrm{d}x$ là

A. $I=5$. **B.** $I=2$. **C.** $I=14$. **D.** $I=11$.

Câu 8. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương -2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^{\pi^2} f(x)\mathrm{d}x = 2018$, tính $I = \int_0^{\pi} xf(x^2)\mathrm{d}x$.

A. $I = 1008$. **B.** $I = 2019$. **C.** $I = 2017$. **D.** $I = 1009$.

Câu 9. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$. Khi đó $\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 8.

Câu 10. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho $\int_1^2 f(x^2+1)x\mathrm{d}x = 2$. Khi đó $I = \int_2^5 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** -1.

Câu 11. Cho f, g là hai hàm số liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3 [f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x=10$ đồng thời $\int_1^3 [2f(x)-g(x)]\mathrm{d}x=6$. Tính $\int_1^3 f(4-x)\mathrm{d}x+2\int_1^2 g(2x-1)\mathrm{d}x$

A. 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_0^2 f(3x+1)\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int_0^7 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 16$. **B.** $I = 18$. **C.** $I = 8$. **D.** $I = 20$.

Câu 13. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = f(10-x)$ và $\int_3^7 f(x)\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int_3^7 xf(x)\mathrm{d}x$.

A. 80. **B.** 60. **C.** 40. **D.** 20.

Câu 14. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Cho $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 9$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin 3x)\cos 3x\mathrm{d}x$.

A. $I = 5$. **B.** $I = 9$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = 2$.

Câu 15. **(Chuyên Quốc Học Huế -2019)** Cho tích phân $I = \int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = 32$. Tính tích phân $J = \int_0^2 f(2x)\mathrm{d}x$.

A. $J = 32$ **B.** $J = 64$ **C.** $J = 8$ **D.** $J = 16$

Câu 16. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Biết $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^9 f(x)\mathrm{d}x = 9$. Khi đó giá trị của $\int_1^4 f(3x-3)\mathrm{d}x$ là

A. 0. **B.** 24. **C.** 27. **D.** 3.

Câu 17. **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 f(2x)dx = 2$.Tích phân $\int_0^2 f(x)dx$ bằng

A. 8. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 18. Cho hàm $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{2017} f(x)\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(2017x)\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{1}{2017}$. **B.** $I = 0$. **C.** $I = 2017$. **D.** $I = 1$.

Câu 19. Cho tích phân $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = a$. Hãy tính tích phân $I = \int_0^1 xf(x^2+1)\mathrm{d}x$ theo a.

A. $I = 4a$. **B.** $I = \frac{a}{4}$. **C.** $I = \frac{a}{2}$. **D.** $I = 2a$.

Câu 20. **(Thpt Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f(\cos^2 x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}\mathrm{d}x = 2$. Tính $\int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x}\mathrm{d}x$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 21. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2+3x^2; x \ge 1 \\ 5-x; x < 1 \end{cases}$. Tính $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x + 3\int_0^1 f(3-2x)\mathrm{d}x$.

A. $I = \frac{71}{6}$. **B.** $I = 31$. **C.** $I = 32$. **D.** $I = \frac{32}{3}$.

Câu 22. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình- 2019)** Cho $I = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin xf\left(\sqrt{3\cos x+1}\right)}{\sqrt{3\cos x+1}}\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** $-\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** -2.

Câu 23. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Biết $\int_1^4 f(x)dx = 5$ và $\int_4^5 f(x)dx = 20$. Tính $\int_1^2 f(4x-3)dx - \int_0^{\ln 2} f(e^{2x})e^{2x}dx$.

A. $I = \frac{15}{4}$. **B.** $I = 15$. **C.** $I = \frac{5}{2}$. **D.** $I = 25$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 24. **(Chuyên Thái Bình 2019)** Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(2-x)=x.e^{x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$.

A. $I=\dfrac{e^4-1}{4}$. **B.** $I=\dfrac{2e-1}{2}$. **C.** $I=e^4-2$. **D.** $I=e^4-1$.

Câu 25. **(Chuyên Vĩnh Phúc Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x)=3f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=5$ **B.** $I=6$ **C.** $I=3$ **D.** $I=2$

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan x.f\left(\cos^2 x\right)dx=2$ và $\int_e^{e^2}\dfrac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}dx=2$. Tính $\int_{\frac{1}{4}}^{2}\dfrac{f(2x)}{x}dx$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 27. **(Chuyên KHTN 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x.f(\cos^2 x)dx=\int_1^8\dfrac{f(\sqrt[3]{x})}{x}dx=6$. Tính tích phân $\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}}\dfrac{f(x^2)}{x}dx$

A. 4 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 10

Câu 28. **(Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^{2018} f(x)\mathrm{d}x=2$. Khi đó tích phân $\int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}}\dfrac{x}{x^2+1}f\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 29. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x=3$ và $\int_0^1\dfrac{x^2f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=1$. Tính $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=6$. **C.** $I=3$. **D.** $I=4$.

Câu 30. **(SGD Thanh Hóa - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x.f\left(\sin^2 x\right)\mathrm{d}x=\int_1^{16}\dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $\int_{\frac{1}{8}}^{1}\dfrac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x$.

A. $I=3$. **B.** $I=\dfrac{3}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\dfrac{5}{2}$.

Câu 31. **(SGD - Nam Định - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn $f(x)=\dfrac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}+\dfrac{\ln x}{x}$. Tính tích phân $I=\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=3+2\ln^2 2$. **B.** $I=2\ln^2 2$. **C.** $I=\ln^2 2$. **D.** $I=2\ln 2$.

Câu 32. **(Nam Định - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[1;4]$ và thỏa mãn $f(x)=\dfrac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}+\dfrac{\ln x}{x}$. Tính tích phân $I=\int_3^4 f(x)dx$.

A. $I=3+2\ln^2 2$. **B.** $I=2\ln^2 2$. **C.** $I=\ln^2 2$. **D.** $I=2\ln 2$.

Câu 33. **(Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và là hàm số lẻ trên đoạn $[-2;2]$. Biết rằng $\int_{-1}^{0} f(x)dx=-1, \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(-2x)dx=2$ .Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int_{-2}^{2} f(x)dx=2\int_{0}^{2} f(x)dx$. **B.** $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx=-4$.

C. $\int_{0}^{1} f(x)dx=-1$. **D.** $\int_{0}^{2} f(x)dx=-3$.

Câu 34. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(1)=1$ và $\int_0^1 f(t)\,dt=\dfrac{1}{3}$. Tính

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x.f'(\sin x)\,dx$

A. $I=\dfrac{4}{3}$. **B.** $I=\dfrac{2}{3}$. **C.** $I=-\dfrac{2}{3}$ **D.** $I=\dfrac{1}{3}$.

Câu 35. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^9 \dfrac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=4, \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x dx=2$. Tính tích phân $I=\int_0^3 f(x)dx$.

A. $I=6$. **B.** $I=4$. **C.** $I=10$. **D.** $I=2$.

Câu 36. **(Sở Hưng Yên - 2020)** Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)=f(2020-x)$ và $\int_3^{2017} f(x)dx=4$. Khi đó $\int_3^{2017} xf(x)dx$ bằng

A. 16160. **B.** 4040. **C.** 2020. **D.** 8080.

Câu 37. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1)=2$ và $\int_0^1 x^2 f'(x)dx=\int_1^4 \dfrac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} f(2-\sqrt{x})dx=4$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{5}{7}$. **C.** $\dfrac{3}{7}$. **D.** $\dfrac{1}{7}$.

Câu 38. **(Sở Yên Bái - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $4xf(x^2)+6f(2x)=\dfrac{3}{5}x^3+4$. Giá trị $\int_0^4 f(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{52}{25}$. **B.** 52. **C.** $\dfrac{48}{25}$. **D.** 48.

Câu 39. **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2)=16, \int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=2$. Tích phân $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 30. **B.** 28. **C.** 36. **D.** 16.

Câu 40. **(Kim Liên - Hà Nội - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=5$. Tính $I=\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x$

A. $I=\frac{5}{2}\pi$. **B.** $I=10\pi$. **C.** $I=5$. **D.** $I=5\pi$.

Câu 41. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f(\cos^2 x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{f(\ln x^2)}{x\ln x}\mathrm{d}x=2$. Tính $\int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(2x)}{x}\mathrm{d}x$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 42. **(Hùng Vương Gia Lai 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3};3\right]$ thỏa mãn $f(x)+x.f\left(\frac{1}{x}\right)=x^3-x$. Giá trị tích phân $I=\int_{\frac{1}{3}}^{3} \frac{f(x)}{x^2+x}dx$ bằng:

A. $\frac{8}{9}$. **B.** $\frac{16}{9}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Dạng 1.2 Giải bằng phương pháp từng phần

Thông thường nếu bài toán xuất hiện $\int_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}x$ ta sẽ đặt $\begin{cases} u=g(x) \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases}$

Câu 43. **(Đề tham khảo 2017)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x=10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-12$ **B.** $I=8$ **C.** $I=1$ **D.** $I=-8$

Câu 44. **(Mã 104 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(3)=1$ và $\int_0^1 xf(3x)\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int_0^3 x^2f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{25}{3}$. **B.** 3. **C.** 7. **D.** -9.

Câu 45. **(Mã 101 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(4)=1$ và $\int_0^1 xf(4x)dx=1$, khi đó $\int_0^4 x^2f'(x)dx$ bằng

A. 8. **B.** 14. **C.** $\frac{31}{2}$. **D.** -16.

Câu 46. **(Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(6)=1$ và $\int_0^1 xf(6x)\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int_0^6 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{107}{3}$. **B.** 34. **C.** 24. **D.** -36.

Câu 47. **(Mã 102 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5)=1$ và $\int_0^1 xf(5x)dx=1$, khi đó $\int_0^5 x^2 f'(x)dx$ bằng

A. 15 **B.** 23 **C.** $\frac{123}{5}$ **D.** -25

Câu 48. **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và $f(1)=-\frac{1}{18}$, $\int_0^1 x.f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{36}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{1}{12}$. **B.** $\frac{1}{36}$. **C.** $\frac{1}{12}$. **D.** $-\frac{1}{36}$.

Câu 49. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(1)=e^2$ và $f'(x)=\frac{2x-1}{x^2}e^{2x}$ với mọi x khác 0. Khi đó $\int_1^{\ln 3} xf(x)\mathrm{d}x$ bằng

Nguyễn Bảo Vương

A. $6-e^2$. **B.** $\frac{6-e^2}{2}$. **C.** $9-e^2$. **D.** $\frac{9-e^2}{2}$.

Câu 50. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2)=16, \int_0^2 f(x)dx=4$. Tính $I=\int_0^1 xf'(2x)dx$.

A. $I=20$ **B.** $I=7$ **C.** $I=12$ **D.** $I=13$

Câu 51. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 x^2 f(x)dx=-\frac{1}{21}$, $f(1)=0$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=\frac{1}{7}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{5}{12}$. **B.** $-\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{4}{5}$. **D.** $-\frac{7}{10}$.

Câu 52. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị -2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1, f(1)=\cot 1$. Tính tích phân $I=\int_0^1 [f(x)\tan^2 x+f'(x)\tan x]\mathrm{d}x$.

A. -1. **B.** $1-\ln(\cos 1)$. **C.** 0. **D.** $1-\cot 1$.

Câu 53. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 x^2 f(x)dx=\frac{1}{3}$ Tính $\int_0^1 x^3 f'(x)dx$.

A. -1 **B.** 1 **C.** 3 **D.** -3

Câu 54. Biết m là số thực thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x+2m)dx=2\pi^2+\frac{\pi}{2}-1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m\le 0$. **B.** $0<m\le 3$. **C.** $3<m\le 6$. **D.** $m>6$.

Câu 55. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=7$ và $\int_0^1 x^2 f(x)dx=\frac{1}{3}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)dx$

A. 4 **B.** $\frac{7}{5}$ **C.** 1 **D.** $\frac{7}{4}$

Câu 56. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương -2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết $\int_0^1 f^2(x)dx=\frac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)dx=\frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

A. π. **B.** $\frac{3\pi}{2}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{1}{\pi}$.

Câu 57. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=7$ và $\int_0^1 x^2 f(x)dx=\frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{7}{5}$ **B.** 1 **C.** $\frac{7}{4}$ **D.** 4

Câu 58. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=4$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=36$ và $\int_0^1 x.f(x)dx=\frac{1}{5}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{5}{6}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** 4 **D.** $\frac{2}{3}$

Câu 59. **(Chuyên Vĩnh Phúc Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $f(2)=3$, $\int_0^2 [f'(x)]^2 dx=4$ và $\int_0^2 x^2 f(x)dx=\frac{1}{3}$. Tích phân $\int_0^2 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{2}{115}$ **B.** $\frac{297}{115}$ **C.** $\frac{562}{115}$ **D.** $\frac{266}{115}$

Câu 60. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=4$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=5$ và $\int_0^1 x.f(x)dx=-\frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{15}{19}$ **B.** $\frac{17}{4}$ **C.** $\frac{17}{18}$ **D.** $\frac{15}{4}$

Câu 61. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $f(2)=6$, $\int_0^2 [f'(x)]^2\,dx=7$ và $\int_0^2 x.f(x)\,dx=\frac{17}{2}$. Tích phân $\int_0^2 f(x)\,dx$ bằng

A. 8 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 5

Câu 62. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;3]$ thỏa mãn $f(3)=6$, $\int_0^3 [f'(x)]^2\,dx=2$ và $\int_0^3 x^2.f(x)\,dx=\frac{154}{3}$. Tích phân $\int_0^3 f(x)\,dx$ bằng

A. $\frac{53}{5}$ **B.** $\frac{117}{20}$ **C.** $\frac{153}{5}$ **D.** $\frac{13}{5}$

Câu 63. **(Chuyên Vĩnh Phúc Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=2$, $\int_0^1 [f'(x)]^2\,dx=8$ và $\int_0^1 x^3.f(x)\,dx=10$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\,dx$ bằng

A. $-\frac{2}{285}$ **B.** $\frac{194}{95}$ **C.** $\frac{116}{57}$ **D.** $\frac{584}{285}$

Câu 64. **(Bắc Giang - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và $\int_0^1 [f'(x)]^2\,dx=\int_0^1 (x+1)e^x f(x)\,dx=\frac{e^2-1}{4}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\,dx$.

A. $I=2-e$. **B.** $I=e-2$. **C.** $I=\frac{e}{2}$. **D.** $I=\frac{e-1}{2}$.

Câu 65. **(Nam Định - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\,dx=\frac{\pi}{8}$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\,dx=-\frac{\pi}{4}$. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x)\,dx$

A. $I=1$. **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\frac{1}{4}$.

Câu 66. **(Chuyên Vinh - 2018).** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\,dx=\frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)\,dx$.

A. π. **B.** $\frac{1}{\pi}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{3\pi}{2}$.

Câu 67. **(THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\cos x}\,dx=1$ và $\int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin x.\tan x.f(x)]\,dx=2$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x.f'(x)\,dx$ bằng:

A. 4. **B.** $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$. **D.** 6.

Câu 68. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa $f(1)=0$, $\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{8}$ và $\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** π. **C.** $\frac{1}{\pi}$. **D.** $\frac{2}{\pi}$.

Câu 69. **(Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 9$ và $\int_0^1 x^3 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{6}{5}$.

Câu 70. **(THPT Phan Chu Trinh - Đắc Lắc - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 (x+1)\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$ và $f(1)=0$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. $\frac{\mathrm{e}-1}{2}$. **B.** $\frac{\mathrm{e}^2}{4}$. **C.** $\mathrm{e}-2$. **D.** $\frac{\mathrm{e}}{2}$.

Câu 71. **(Sở Phú Thọ - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\int_1^2 (x-1)^2 f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}$, $f(2)=0$ và $\int_1^2 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 7$. Tính tích phân $I = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{7}{5}$. **B.** $I=-\frac{7}{5}$. **C.** $I=-\frac{7}{20}$. **D.** $I=\frac{7}{20}$.

Câu 72. **(THPT Quảng Yên - Quảng Ninh - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn: $f(1)=0$, $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x = 7$ và $\int_0^1 x^2.f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=1$. **B.** $I=\frac{7}{5}$. **C.** $I=4$. **D.** $I=\frac{7}{4}$.

Câu 73. **(Yên Phong 1 - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=3$, $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx = \frac{4}{11}$ và $\int_0^1 x^4 f(x)dx = \frac{7}{11}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)dx$ là

A. $\frac{35}{11}$. **B.** $\frac{65}{21}$. **C.** $\frac{23}{7}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Câu 74. **(THPT Bình Giang - Hải Dương - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ và thỏa mãn $f(2)=0$, $\int_1^2 \left(f'(x)\right)^2 dx = \frac{5}{12}+\ln\frac{2}{3}$ và $\int_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2}dx = -\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$. Tính tích phân $\int_1^2 f(x)dx$.

A. $\frac{3}{4}+2\ln\frac{2}{3}$. **B.** $\ln\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{3}{4}-2\ln\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{3}{4}+2\ln\frac{3}{2}$.

Câu 75. **(Sở Bạc Liêu - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2\,dx=\frac{4}{3}-\ln 3$ và $\int_0^1 \frac{4f(x)}{(2x+1)^2}dx=2\ln 3-\frac{8}{3}$. Tính tích phân $\int_0^1 \frac{f(x)}{4}dx$ bằng.

A. $\frac{1-3\ln 3}{3}$. **B.** $\frac{4-\ln 3}{3}$. **C.** $\frac{-\ln 3}{16}$. **D.** $-\ln\frac{3}{16}$.

Câu 76. **(Sở Hưng Yên - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$; $\int_0^1 [f'(x)]^2\,dx=\frac{1}{30}$ và $\int_0^1 (2x-1)f(x)\,dx=-\frac{1}{30}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\,dx$ bằng

A. $\frac{11}{30}$. **B.** $\frac{11}{12}$. **C.** $\frac{11}{4}$. **D.** $\frac{1}{30}$.

Câu 77. **(Sở Nam Định - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\,dx=\frac{\pi}{8}$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\,dx=-\frac{\pi}{4}$. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x)\,dx$.

A. $I=1$. **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\frac{1}{4}$.

Câu 78. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(2)=16$ và $\int_0^2 f(x)dx=4$. Tích phân $\int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx$ bằng

Nguyễn Bảo Vương

A. 112. **B.** 12. **C.** 56. **D.** 144.

Câu 79. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16$, $\int_0^2 f(x)\,dx=4$. Tính $I=\int_0^1 x.f'(2x)\,dx$.

A. 7. **B.** 12. **C.** 20. **D.** 13.

Câu 80. **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx=10$, $f(1)=\cot 1$. Tính tích phân $I=\int_0^1 \left[f(x)\tan^2 x+f'(x)\tan x\right]dx$.

A. $1-\ln(\cos 1)$. **B.** -1. **C.** -9. **D.** $1-\cot 1$.

Câu 81. **(Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;3]$ thỏa mãn $f(3)=0$, $\int_0^3 [f'(x)]^2dx=\frac{7}{6}$ và $\int_0^3 \frac{f(x)}{\sqrt{x+1}}dx=-\frac{7}{3}$. Tích phân $\int_0^3 f(x)dx$ bằng:

A. $-\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{-97}{30}$. **C.** $\frac{7}{6}$. **D.** $\frac{-7}{6}$.

Câu 82. **(Chuyên - Vĩnh Phúc - lần 3 - 2019)** Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm liên tục trên **(0; 1)** thỏa mãn f(0) = 0 và $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{9}{2}$; $\int_0^1 f'(x).\cos\frac{\pi x}{2}\,dx=\frac{3\pi}{4}$. Tính $\int_0^1 f(x)\,dx$ bằng:

A. $\frac{2}{\pi}$. **B.** $\frac{1}{\pi}$. **C.** $\frac{6}{\pi}$. **D.** $\frac{4}{\pi}$.

Câu 83. **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa- 2019)** Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ sao cho $f(1)=1$ và $f(x).f(1-x)=e^{x^2-x}$, $\forall x\in[0;1]$. Tính $I=\int_0^1\frac{(2x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}dx$.

A. $I=-\frac{1}{60}$. **B.** $I=\frac{1}{10}$. **C.** $I=-\frac{1}{10}$. **D.** $I=\frac{1}{10}$.

Câu 84. **(Sở Nam Định-2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ và thỏa mãn: $f(2)=0,\int_1^2(f'(x))^2dx=\frac{5}{12}+\ln\frac{2}{3}$ và $\int_1^2\frac{f(x)}{(x+1)^2}dx=-\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$. Tính tích phân $\int_1^2 f(x)dx$.

A. $\frac{3}{4}+2\ln\frac{3}{2}$. **B.** $\ln\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}-2\ln\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}+2\ln\frac{2}{3}$.

Câu 85. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=3,\int_0^1[f'(x)]^2dx=\frac{4}{11}$ và $\int_0^1 x^4f(x)dx=\frac{7}{11}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)dx$ là:

A. $\frac{35}{11}$. **B.** $\frac{65}{21}$. **C.** $\frac{23}{7}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Câu 86. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $\int_1^2(x-2)^2f(x)\,dx=-\frac{1}{21}$, $f(1)=0$, $\int_1^2[f'(x)]^2\,dx=\frac{1}{7}$. Tính $\int_1^2 xf(x)\,dx$.

A. $\frac{-19}{60}$. **B.** $\frac{7}{120}$. **C.** $\frac{-1}{5}$. **D.** $\frac{13}{30}$.

Câu 87. **(Chuyên ĐH Vinh- 2019)** Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1)=f'(1)=1$ và $f(1-x)+x^2.f''(x)=2x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 xf'(x)dx$.

A. $I=1$. **B.** $I=2$. **C.** $I=\frac{1}{3}$. **D.** $I=\frac{2}{3}$.

Dạng 1.3 Biến đổi

Dạng 1. Bài toán tích phân liên quan đến đẳng thức $u(x)f'(x)+u'(x)f(x)=h(x)$

Phương pháp:

Dễ dàng thấy rằng $u(x)f'(x)+u'(x)f(x)=[u(x)f(x)]'$

Do đó $u(x)f'(x)+u'(x)f(x)=h(x)\Leftrightarrow[u(x)f(x)]'=h(x)$

Suy ra $u(x)f(x)=\int h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 2. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x)+f(x)=h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với e^x ta được $e^x\cdot f'(x)+e^x\cdot f(x)=e^x\cdot h(x)\Leftrightarrow\left[e^x\cdot f(x)\right]'=e^x\cdot h(x)$

Suy ra $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dang 3. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thúc $f'(x) - f(x) = h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với e^{-x} ta durọc $e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow \left[e^{-x} \cdot f(x)\right]' = e^{-x} \cdot h(x)$

Suy ra $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 4. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thúrc $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$
(Phương trình vi phân tuyên tinh cấp 1)

Phương pháp:

Nhân hai vế với $e^{\int p(x)dx}$ ta được

$$f'(x) \cdot e^{\int p(x)dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot f(x) = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \Leftrightarrow \left[f(x) \cdot e^{\int p(x)dx}\right]' = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

Suy ra $f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} h(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 5. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thúc $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0$

Phương pháp:

Chia hai vế với $f(x)$ ta được $\frac{f'(x)}{f(x)} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -p(x)$

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = -\int p(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \ln|f(x)| = -\int p(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 6. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + p(x) \cdot [f(x)]^n = 0$

Phương pháp:

Chia hai vế với $[f(x)]^n$ ta được $\frac{f'(x)}{[f(x)]^n} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} = -p(x)$

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n}\mathrm{d}x = -\int p(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1} = -\int p(x)\mathrm{d}x$

Câu 88. **(Mã 102 2018)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{3}$ và $f'(x) = x\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$ **B.** $-\frac{2}{9}$ **C.** $-\frac{7}{6}$ **D.** $-\frac{11}{6}$

Câu 89. **(Mã 104 2018)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{5}$ và $f'(x) = x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{4}{35}$ **B.** $-\frac{71}{20}$ **C.** $-\frac{79}{20}$ **D.** $-\frac{4}{5}$

Câu 90. **(Minh họa 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thảo mãn $xf\left(x^3\right) + f\left(1-x^2\right) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$?

A. $\frac{-17}{20}$. **B.** $\frac{-13}{4}$. **C.** $\frac{17}{4}$. **D.** -1.

Câu 91. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1-x)=6x^2f(x^3)-\frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 6.

Câu 92. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1$, với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ đồng thời thỏa $f(1)=-2$. Tính $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$

A. $-\frac{\ln 2}{2}-1$. **B.** $-\ln 2-\frac{1}{2}$. **C.** $-\ln 2-\frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{\ln 2}{2}-\frac{3}{2}$.

Câu 93. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+(x^2-1)f\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\right)=x^5-4x^3-5x^2+7x+6,\forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 7. **D.** $-\frac{19}{3}$.

Câu 94. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $(f'(x))^2+4(6x^2-1).f(x)=40x^6-44x^4+32x^2-4,\forall x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{23}{15}$. **B.** $\frac{13}{15}$. **C.** $-\frac{17}{15}$. **D.** $-\frac{7}{15}$.

Câu 95. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2,\forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{-4}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{-10}{3}$

Câu 96. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2;4]$ và $f'(x)>0,\forall x\in[2;4]$. Biết $4x^3f(x)=[f'(x)]^3-x^3,\forall x\in[2;4], f(2)=\frac{7}{4}$. Giá trị của $f(4)$ bằng

A. $\frac{40\sqrt{5}-1}{2}$. **B.** $\frac{20\sqrt{5}-1}{4}$. **C.** $\frac{20\sqrt{5}-1}{2}$. **D.** $\frac{40\sqrt{5}-1}{4}$.

Câu 97. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ và thỏa $f(1)=0$, $(f'(x))^2+4f(x)=8x^2-32x+28$ với mọi x thuộc $[0;2]$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $-\frac{2}{3}$. **D.** $-\frac{14}{3}$.

Câu 98. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $f(x)+f(1-x)=\frac{x^2+2x+3}{x+1}$, $\forall x\in[0;1]$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. $\frac{3}{4}+2\ln 2$. **B.** $3+\ln 2$. **C.** $\frac{3}{4}+\ln 2$. **D.** $\frac{3}{2}+2\ln 2$.

Câu 99. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f(x)+f(2-x)=2(x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+4$. Tính tích phân $I=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ ta được kết quả:

A. $I=\mathrm{e}+4$. **B.** $I=8$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\mathrm{e}+2$.

Câu 100. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $xf(x^5)+f(1-x^4)=x^{11}+x^8+x^6-3x^4+x+3, \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{35}{6}$. **B.** $-\frac{15}{4}$. **C.** $-\frac{7}{24}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Câu 101. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{2}{5};1\right]$ và thỏa mãn $2f(x)+5f\left(\frac{2}{5x}\right)=3x, \forall x\in\left[\frac{2}{5};1\right]$. Khi đó $I=\int_{\frac{2}{15}}^{\frac{1}{3}} \ln 3x.f'(3x)dx$ bằng:

A. $\frac{1}{5}\ln\frac{2}{5}+\frac{3}{35}$. **B.** $\frac{1}{5}\ln\frac{5}{2}-\frac{3}{35}$. **C.** $-\frac{1}{5}\ln\frac{5}{2}-\frac{3}{35}$. **D.** $-\frac{1}{5}\ln\frac{2}{5}+\frac{3}{35}$.

Câu 102. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+2xf(x^2)=2x^7+3x^3-x-1$ với $x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x$.

Nguyễn Bảo Vương

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Câu 103. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x^2f(1-x)+2f\left(\frac{2x-2}{x}\right)=\frac{-x^4+x^3+4x-4}{x}, \forall x\neq 0, x\neq 1$. Khi đó $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ có giá trị là

A. 0. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 104. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+(x^2-1)f\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\right)=x^5-4x^3-5x^2+7x+6, \forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 7. **D.** $-\frac{19}{3}$.

Câu 105. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x)=\sqrt{x+2}+xf(3-x^2)$.

Tích phân $I=\int_{-1}^{2} f(x)dx$ bằng

A. $I=\frac{14}{3}$. **B.** $I=\frac{28}{3}$. **C.** $I=\frac{4}{3}$. **D.** $I=2$.

Câu 106. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0;1]$đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0)=-1, f'(x)<0, \left[f'(x)\right]^2 = f''(x), \forall x \in [0;1]$. Giá trị $f(0)-f(1)$ thuộc khoảng

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Câu 107. (Chuyên Bến Tre - 2020) Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2 + f(x).f''(x) = x^3 - 2x, \forall x \in R$ và $f(0)=f'(0)=2$. Tính giá trị của $T=f^2(2)$

A. $\frac{160}{15}$ **B.** $\frac{268}{15}$ **C.** $\frac{4}{15}$ **D.** $\frac{268}{30}$

Câu 108. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên tập xác đinh $\mathbb{R}^+$ và thỏa mãn $f\left(x^2+3x+1\right)=x+2$. Tính $I=\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$

A. $\frac{37}{6}$. **B.** $\frac{527}{3}$. **C.** $\frac{61}{6}$. **D.** $\frac{464}{3}$.

Câu 109. (Chuyên Chu Văn An - 2020) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên R thỏa mãn điều kiện $f(x)+x\left(f'(x)-2\sin x\right)=x^2\cos x, x \in R$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$.Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf''(x)\,dx$

A. 0. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** 1. **D.** π.

Câu 110. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0)=\frac{2}{3}$ và $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)f'(x)=1, \forall x \geq -1$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{a\sqrt{2}+b}{15}$ với $a,b \in \mathbb{Z}$. Tính $T=a+b$.

A. -8. **B.** -24. **C.** 24. **D.** 8.

Câu 111. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $4x.f\left(x^2\right)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$. Tính $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{16}$. **C.** $\frac{\pi}{20}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

Câu 112. (Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$. Biết $f(3)=3$ và $xf'(2x+1)-f(2x+1)=x^3, \forall x \in (0;+\infty)$. Giá trị của $\int_3^5 f(x)\,dx$ bằng

A. $\frac{914}{3}$. **B.** $\frac{59}{3}$. **C.** $\frac{45}{4}$. **D.** 88.

Câu 113. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và đồng biến trên $[1;4]$, thỏa mãn $x+2xf(x)=\left[f'(x)\right]^2$ với mọi $x \in [1;4]$. Biết $f(1)=\frac{3}{2}$, tính $I=\int_1^4 f(x)dx$

A. $\frac{1188}{45}$. **B.** $\frac{1187}{45}$. **C.** $\frac{1186}{45}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Câu 114. (Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thảo mãn: $7f(x)+4f(4-x)=2018x\sqrt{x^2+9}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{2018}{11}$. **B.** $\frac{7063}{3}$. **C.** $\frac{98}{3}$. **D.** $\frac{197764}{33}$.

Câu 115. (THPT Ba Đình 2019) Hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f^2(1-x)=(x^2+3)f(x+1)$. Biết rằng $f(x)\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}$, tính $I=\int_0^2(2x-1)f''(x)dx$.

A. 8. **B.** 0. **C.** –4. **D.** 4.

Câu 116. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x.f(x).f'(x)=f^2(x)-x,\forall x\in\mathbb{R}$ và có $f(2)=1$. Tích phân $\int_0^2 f^2(x)dx$

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** 2 **D.** 4

Câu 117. (THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019) Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=(2x+1)[f(x)]^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=-1$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{1}{6}$. **B.** $-\ln 2$. **C.** $-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$. **D.** $-\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

Câu 118. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0, f'(0)\neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x).f'(x)+18x^2=(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x);\forall\in\mathbb{R}$.

Biết $\int_0^1(x+1)e^{f(x)}dx=ae^2+b,(a,b\in\mathbb{Q})$.Giá trị của $a-b$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 119. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)>0$ và $f(x)-f'(x)=-\frac{2[f(x)]^2}{e^x.x.\sqrt{x-x^2}}$ $\forall x\in(0;1)$. Biết $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f\left(\frac{1}{5}\right)\geq\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{6}\leq f\left(\frac{1}{5}\right)<\frac{1}{5}$ **C.** $\frac{1}{5}\leq f\left(\frac{1}{5}\right)<\frac{1}{4}$ **D.** $f\left(\frac{1}{5}\right)<\frac{1}{6}$

Câu 120. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[0;1]$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\int_0^1[2f(x)+3x]f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1[4f(x)+x]\sqrt{xf(x)}\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{1}{24}$ **B.** $-\frac{1}{8}$ **C.** $-\frac{1}{12}$ **D.** $-\frac{1}{6}$

Câu 121. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương -2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0, f'(0)\neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x).f'(x)+18x^2=(3x^2+x)f'(x)+(6x+1)f(x), \forall x\in\mathbb{R}$.

Biết $\int_0^1 (x+1)e^{f(x)}\mathrm{d}x = a.e^2+b$, với $a;b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của $a-b$ bằng.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 122. (Bắc Ninh 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ thỏa mãn $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f^2(x)-2f(x).(3-x)\right]\mathrm{d}x=-\frac{109}{12}$. Tính $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

A. $\ln\frac{7}{9}$. **B.** $\ln\frac{2}{9}$. **C.** $\ln\frac{5}{9}$. **D.** $\ln\frac{8}{9}$.

Câu 123. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2018) Cho hàm số $f(x)$ xá định trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{2-\pi}{2}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$ bằng

Nguyễn Bảo Vương

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Câu 124. (THPT Hậu Lộc 2 - TH - 2018) Cho số thực $a>0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $f(x).f(a-x)=1$. Tính tích phân $I=\int_0^a\frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x$?

A. $I=\frac{2a}{3}$. **B.** $I=\frac{a}{2}$. **C.** $I=\frac{a}{3}$. **D.** $I=a$.

Câu 125. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2018) Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{2}{15}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 126. (Hà Tĩnh - 2018) Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $[f(x)]^2-f(x).f''(x)+[f'(x)]^2=0$. Biết $f(0)=1$, $f(2)=e^6$. Khi đó $f(1)$ bằng

A. e^2. **B.** $e^{\frac{3}{2}}$. **C.** e^3. **D.** $e^{\frac{5}{2}}$.

Câu 127. (THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa - 2018) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $[0;3]$; $f(3-x).f(x)=1, f(x)\neq -1$ với mọi $x\in[0;3]$ và $f(0)=\frac{1}{2}$. Tính tích phân: $\int_0^3 \frac{x.f'(x)}{[1+f(3-x)]^2.f^2(x)}dx$.

A. 1. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 128. (Sở Bình Phước - 2018) Cho số thực $a>0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $f(x).f(a-x)=1$. Tính tích phân $I=\int_0^a \frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x$?

A. $I=\frac{a}{3}$. **B.** $I=\frac{a}{2}$. **C.** $I=a$. **D.** $I=\frac{2a}{3}$.

Câu 129. (THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018) Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$ và đồng thời thỏa mãn hai điều kiện $f(x+1)=f(x)+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{f(x)}{x^2},\ \forall x\neq 0$. Gọi $I=\int_0^1 \frac{f(x)}{f^2(x)+1}.\mathrm{d}x$. Hãy chọn khẳng định đúng về giá trị của I.

A. $I\in(-1;0)$. **B.** $I\in(1;2)$. **C.** $I\in(0;1)$. **D.** $I\in(-2;-1)$.

Câu 130. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $\int_0^1 f(x)dx=2$ và $\int_0^1 xf(x)dx=\frac{3}{2}$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của $\int_0^1 f^2(x)dx$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{27}{4}$. **B.** $\frac{34}{5}$. **C.** 7. **D.** 8.

Câu 131. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $f(x)>0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $(x+1)f'(x)=\frac{\sqrt{f(x)}}{x+2}$ và $f(0)=\left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2$. Giá trị $f(3)$ bằng

A. $\frac{1}{2}(4\ln 2-\ln 5)^2$. **B.** $4(4\ln 2-\ln 5)^2$. **C.** $\frac{1}{4}(4\ln 2-\ln 5)^2$. **D.** $2(4\ln 2-\ln 5)^2$.

Câu 132. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(x^2+1)+\frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}}=\frac{2x+1}{2x}\ln(x+1)$. Biết $\int_1^{17} f(x)\mathrm{d}x=a\ln 5-2\ln b+c$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$. Giá trị của $a+b+2c$ bằng

A. $\frac{29}{2}$. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 37.

Câu 133. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $6x^2f(x^3)+4f(1-x)=3\sqrt{1-x^2}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Nguyễn Bảo Vương

A. $\frac{\pi}{8}$. **B.** $\frac{\pi}{20}$. **C.** $\frac{\pi}{16}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Câu 134. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(4x)=f(x)+4x^3+2x$ và $f(0)=2$. Tính $I=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{147}{63}$. **B.** $\frac{149}{63}$. **C.** $\frac{148}{63}$. **D.** $\frac{352}{63}$.

Câu 135. (Kìm Thành - Hải Dương - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ thỏa mãn $\int_1^2 (x-1)^2 f(x)dx=-\frac{1}{3}$, $f(2)=0$ và $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx=7$. Tính tích phân $I=\int_1^2 f(x)dx$.

A. $I=\frac{7}{5}$. **B.** $I=-\frac{7}{5}$. **C.** $I=-\frac{7}{20}$. **D.** $I=\frac{7}{20}$.

Câu 136. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thảo mãn $\sin x\, f(\cos x)+\cos x\, f(\sin x)=\sin 2x-\frac{1}{3}\sin^3 2x$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{6}$. **B.** 1. **C.** $\frac{7}{18}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 137. (Chuyên Lam Sơn 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;\pi]$. Biết $f(0)=2\mathrm{e}$ và $f(x)$ thỏa mãn hệ thức $f'(x)+\sin x.f(x)=\cos x.\mathrm{e}^{\cos x}, \forall x\in[0;\pi]$. Tính $I=\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

A. $I\approx 6{,}55$. **B.** $I\approx 17{,}30$. **C.** $I\approx 10{,}31$. **D.** $I\approx 16{,}91$.

Câu 138. (Chuyên Thái Bình - 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;1]$. Biết $f(x).f(1-x)=1$ với $\forall x\in[0;1]$. Tính giá trí $I=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}$

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 139. (THPT Cẩm Bình 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(x)=x.\ln\left(\frac{x^3}{x.f'(x)-f(x)}\right)$ và $f(1)=0$. Tính tích phân $I=\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $12\ln 13-13$. **B.** $13\ln 13-12$. **C.** $12\ln 13+13$. **D.** $13\ln 13+12$.

Câu 140. Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $\left[2f(x)+1-x^2\right]f'(x)=2x\left[1+f(x)\right]$, $\forall x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 141. (Kinh Môn - Hải Dương 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=-2\ln 2$ và $x.(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$ (1). Biết $f(2)=a+b.\ln 3$ $(a,\ b\in\mathbb{Q})$. Giá trị của $2\left(a^2+b^2\right)$ là:

A. $\frac{27}{4}$. **B.** 9. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Câu 142. (Sở Cần Thơ - 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1;3]$; $f(x)\neq 0,\forall x\in[1;3]$; $f'(x)\left[1+f(x)\right]^2=(x-1)^2\left[f(x)\right]^4$ và $f(1)=-1$. Biết rằng $\int_e^3 f(x)\mathrm{d}x=a\ln 3+b(a,b\in\mathbb{Z})$, giá trị của $a+b^2$ bằng

A. 4. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -1.

Câu 143. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0)=1$, $\left(f'(x)\right)^3=e^x\left(f(x)\right)^2,\forall x\in\mathbb{R}$.

Tính $f(3)$

A. $f(3)=1$. **B.** $f(3)=e^2$. **C.** $f(3)=e^3$. **D.** $f(3)=e$.

Câu 144. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f^2(1-x)=\left(x^2+3\right).f(x+1)\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(x)\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}$, tính $I=\int_0^2(2x-1)f''(x).\mathrm{d}x$.

A. 4. **B.** 0. **C.** 8. **D.** -4.

Câu 145. (Sở Nam Định - 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\left(f'(x)\right)^2+4f(x)=8x^2+4,\forall x\in[0;1]$ và $f(1)=2$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{21}{4}$.

Câu 146. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương thỏa mãn $f'(x)=\frac{2f(x)}{x}+2x^3$, $\forall x\in(0;+\infty)$ và $\int_2^3\frac{x^5}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{20}$. Giá trị của biểu thức $f(2)+f(3)$ bằng

A. 110. **B.** 90. **C.** 20. **D.** 25.

Câu 147. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x)+xf'(x)\geq x^{2018}$, $\forall x\in[0;1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1}{2018.2020}$. **B.** $\frac{1}{2019.2020}$. **C.** $\frac{1}{2020.2021}$. **D.** $\frac{1}{2019.2021}$.

Câu 148. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=2\ln 2$ và $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+3x+2$. Giá trị $f(2)=a+b\ln 3$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính a^2+b^2.

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{13}{4}$. **C.** $\frac{25}{4}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Câu 149. (Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định- 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $3f(x)+f(2-x)=2(x-1)e^{x^2-2x+1}+4, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$.

A. $I=e+2$. **B.** $I=2e+4$. **C.** $I=2$. **D.** $I=8$.

Câu 150. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2;4]$ và $f'(x)>0,\ \forall x\in[2;4]$. Biết rằng

$f(2)=\frac{7}{4}$ và $4x^3f(x)=[f'(x)]^3-x^3,\ \forall x\in[2;4]$. Giá trị của $f(4)$ bằng

A. $\frac{20\sqrt{5}-1}{4}$. **B.** $\frac{40\sqrt{5}-1}{2}$. **C.** $\frac{20\sqrt{5}-1}{2}$. **D.** $\frac{40\sqrt{5}-1}{4}$.

Câu 151. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[e;e^2]$. Biết $x^2f'(x)\cdot\ln x-xf(x)+\ln^2 x=0, \forall x\in[e;e^2]$ và $f(e)=\frac{1}{e}$. Tính tích phân $I=\int_e^{e^2} f(x)dx$.

A. $I=2$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=3$. **D.** $I=\ln 2$.

Dạng 2. Tích phân một số hàm đặc biệt

Dạng 2.1 Tích phân của hàm số lẻ và hàm số chẵn

Nhắc lại kiến thức về hàm số lẻ và hàm số chẵn:

Hàm số $y=f(x)$ có miền xác định trên tập đối xứng D và

Nếu $f(-x)=f(x),\ \forall x\in D\Rightarrow y=f(x)$: là hàm số chẵn.

Nếu $f(-x)=-f(x), \forall x\in D\Rightarrow y=f(x)$: là hàm số lẻ.

(thay thế chỗ nào có x bằng $-x$ sẽ tính được $f(-x)$ và so sánh với $f(x)$).

Thường gặp cung góc đối nhau của $\cos(-x)=\cos x,\ \sin(-x)=-\sin x$.

□ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và lẻ trên $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^{a} f(x).dx=0$.

□ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và chẵn trên $[-a;a]$ thì $\begin{cases}\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx\\ \int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{b^x+1}dx=\int_0^a f(x)dx\end{cases}$.

Do những kết quả này không có trong SGK nên về mặt thực hành, ta làm theo các bước sau (sau khi nhận định đó là hàm chẵn hoặc lẻ và **bài toán thường có cận đối nhau** dạng $-a\to a$):

□ Bước 1. Phân tích: $I=\int_{-a}^{a} f(x).dx=\int_{-a}^{0} f(x).dx+\int_0^a f(x).dx=A+B$.

□ Bước 2. Tính $A=\int\limits_{-a}^{0} f(x).dx$? bằng cách đổi biến $t=-x$ và cần nhớ rằng: tích phân không phụ thuộc vào biến, mà chỉ phụ thuộc vào giá trị của hai cận, chẳng hạn luôn có: $\int_{-2014}^{0} \frac{3t^2\cos t}{1+\sin^2 t}dt=\int\limits_{-2014}^{0} \frac{3x^2\cos x}{1+\sin^2 x}dx$.

2. Tích phân của hàm số liên tục

□ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b f(a+b-x)dx$.

□ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thì

+ $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$.

+ $\int\limits_a^{\pi-a} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_a^{\pi-a} f(\sin x)dx$ và $\int\limits_0^{\pi} x.f(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

+ $\int\limits_a^{2\pi-a} xf(\cos x)dx=\pi\int\limits_a^{2\pi-a} f(\cos x)dx$ và $\int\limits_0^{2\pi} x.f(\cos x)dx=\pi\int\limits_0^{2\pi} f(\cos x)dx$

⟶ Về mặt thực hành, sẽ đặt $x=$ cận trên + cận dưới $-t$ $(x=a+b-t)$. Từ đó tạo tích phân xoay vòng (tạo ra I), rồi giải phương trình bậc nhất với ẩn I.

□ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kỳ T thì

$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx=\int\limits_0^{T} f(x)dx$ và $\int\limits_0^{nT} f(x)dx=n\int\limits_0^{T} f(x)dx$.

Lưu ý: Hàm số $f(x)$ có chu kỳ T thì $f(x+T)=f(x)$.

⟶ Về mặt thực hành, ta sẽ làm theo các bước sau:

Bước 1. Tách: $I=\int\limits_a^{a+T} f(x)dx=\underbrace{\int\limits_a^{0} f(x)dx}_{A}+\underbrace{\int\limits_0^{T} f(x)dx}_{B}+\underbrace{\int\limits_T^{a+T} f(x)dx}_{C}$ (i)

Bước 2. Tính $C=\int\limits_T^{a+T} f(x)dx$?

Đặt $x=t+T\Rightarrow dx=dt$. Đổi cận: $\begin{cases}x=a+T\\x=T\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=a\\t=0\end{cases}$. Khi đó:

$C=\int\limits_0^{a} f(t+T)dt=-\int\limits_a^{0} f(t)dt=-\int\limits_a^{0} f(x)dx=-A$ (ii)

Thế (i) vào (ii) ta được: $I=B=\int\limits_0^{T} f(x)dx$.

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$.

A. $I=-6$ **B.** $I=0$ **C.** $I=-2$ **D.** $I=6$

Câu 2. **(THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa - 2018)** Cho $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x=\pi\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{c}$, với $a,b,c\in\mathbb{N}$, $b<15$. Khi đó $a+b+c$ bằng:

A. 10. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 12.

Câu 3. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho $f(x)$ là hàm số chẵn trên đoạn $[-a;a]$ và $k>0$. Giá trị tích phân $\int\limits_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^{kx}}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\int\limits_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$. **C.** $2\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $2\int\limits_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 4. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho $f(x), f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(-x)=\frac{1}{x^2+4}$. Biết $I=\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx=\frac{\pi}{m}$. Khi đó giá trị của m là

A. $m=2$. **B.** $m=20$. **C.** $m=5$. **D.** $m=10$.

Câu 5. **(THPT Hàm Rồng Thanh Hóa -2019)** Cho hàm số $f(x), f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(-x)=\frac{1}{4+x^2}$. Tính $I=\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{\pi}{20}$. **B.** $I=\frac{\pi}{10}$. **C.** $I=\frac{-\pi}{20}$. **D.** $I=\frac{-\pi}{10}$.

Câu 6. **(Hà Nội - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4;4]$ biết $\int\limits_{-2}^{0} f(-x)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_{1}^{2} f(-2x)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int\limits_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-10$. **B.** $I=-6$. **C.** $I=6$. **D.** $I=10$.

Câu 7. **(Hồng Quang - Hải Dương - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2;\ln 2]$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\frac{1}{e^x+1}$. Biết $\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$ $(a;b\in\mathbb{Q})$. Tính $P=a+b$.

A. $P=\frac{1}{2}$. **B.** $P=-2$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

Câu 8. **(Chuyên ĐH Vinh - 2018)** Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=1$. Giá trị của $\int\limits_{-2}^{2}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 9. **(SGD&ĐT BRVT - 2018)** Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 10$. Tính $I = \int_{-2}^{2} \frac{f(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x$.

A. $I = 10$. **B.** $I = \frac{10}{3}$. **C.** $I = 20$. **D.** $I = 5$.

Câu 10. **(Yên Phong 1 - 2018)** Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 6$. Kết quả của $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1+2018^x}dx$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 11. **(Toán Học Và Tuổi Trẻ 2018)** Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $\begin{cases} f(x).f(a-x)=1 \\ f(x)>0, \forall x \in [0;a] \end{cases}$ và $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)} = \frac{ba}{c}$, trong đó b, c là hai số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $b+c$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(11;22)$. **B.** $(0;9)$. **C.** $(7;21)$. **D.** $(2017;2020)$.

Câu 12. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Tích phân $\int_{-2}^{2} \frac{x^{2020}}{e^x+1}.\mathrm{d}x = \frac{2^a}{b}$. Tính tổng $S = a+b$.

A. $S = 0$. **B.** $S = 2021$. **C.** $S = 2020$. **D.** $S = 4042$.

Câu 13. **(Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2;\ln 2]$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x) = \frac{1}{e^x+1}$. Biết $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3, (a,b \in \mathbb{Q})$. Tính $P = a+b$.

A. $P = -2$. **B.** $P = \frac{1}{2}$. **C.** $P = -1$. **D.** $P = 2$.

Câu 14. **(Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa 2019)** Cho $f(x)$ là hàm số chẵn và $\int_0^1 f(x)dx = 2$. Giá trị của tích phân $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{1+2019^x}dx$ là

A. $\frac{2}{2019}$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 0.

Dạng 2.2 Tích phân của hàm chứa dấu trị tuyệt đối

Tính tích phân: $I = \int_a^b |f(x)|.dx$?

Bước 1. Xét dấu $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$. Giả sử trên đoạn $[a;b]$ thì phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x_o \in [a;b]$ và có bảng xét dấu sau:

x		a	x_o	b	
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Bước 2. Dựa vào công thức phân đoạn và dấu của trên $[a;x_o],[x_o;b]$ ta được:

$I=\int\limits_{a}^{b}\left|f\left(x\right)\right|.dx=\int\limits_{a}^{x_o}f\left(x\right)dx+\int\limits_{x_o}^{b}\left[-f\left(x\right)\right]dx=A+B$.

Sử dụng các phương pháp tính tích phân đã học tính $A,B\Rightarrow I$.

Câu 15. Cho a là số thực dương, tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{a}\left|x\right|\mathrm{d}x$ theo a.

A. $I=\dfrac{a^2+1}{2}$. **B.** $I=\dfrac{a^2+2}{2}$. **C.** $I=\dfrac{-2a^2+1}{2}$. **D.** $I=\dfrac{\left|3a^2-1\right|}{2}$.

Câu 16. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho số thực $m>1$ thỏa mãn $\int\limits_{1}^{m}\left|2mx-1\right|dx=1$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $m\in\left(4;6\right)$. **B.** $m\in\left(2;4\right)$. **C.** $m\in\left(3;5\right)$. **D.** $m\in\left(1;3\right)$.

Câu 17. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\int_{-1}^{1}\left|x\right|^3\mathrm{d}x=\left|\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x\right|$. **B.** $\int_{-1}^{2018}\left|x^4-x^2+1\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2018}\left(x^4-x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_{-2}^{3}\left|e^x\left(x+1\right)\mathrm{d}x\right|=\int_{-2}^{3}e^x\left(x+1\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$.

Câu 18. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho tích phân $\int\limits_{1}^{5}\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|dx=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tính P = abc.

A. $P=-36$ **B.** $P=0$ **C.** $P=-18$ **D.** $P=18$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 19. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Có bao nhiêu số tự nhiên m để $\int\limits_{0}^{2}\left|x^2-2m^2\right|\mathrm{d}x=\left|\int\limits_{0}^{2}\left(x^2-2m^2\right)\mathrm{d}x\right|$.

A. Vô số. **B.** 0. **C.** Duy nhất. **D.** 2.

Câu 20. **(Chu Văn An -Thái Nguyên - 2018)** Tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{1}\left|2^x-2^{-x}\right|dx$.

A. $\dfrac{1}{\ln 2}$. **B.** $\ln 2$. **C.** $2\ln 2$. **D.** $\dfrac{2}{\ln 2}$.

Câu 21. **(KTNL Gia Bình 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_{0}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$; $\int\limits_{0}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int\limits_{-1}^{1}f\left(\left|2x-1\right|\right)\mathrm{d}x$

A. $I=8$ **B.** $I=6$ **C.** $I=\dfrac{3}{2}$ **D.** $I=4$

Câu 22. **(Chuyên KHTN 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_{0}^{3}f(x)dx=8$ và $\int\limits_{0}^{5}f(x)dx=4$. Tính $\int\limits_{-1}^{1}f(\left|4x-1\right|)dx$.

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{11}{4}$. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_0^2 f(6x)\mathrm{d}x=14$. Tính $\int_{-2}^2 f(5|x|+2)\mathrm{d}x$.

A. 30. **B.** 32. **C.** 34. **D.** 36.

Câu 24. **(Phong 1 - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;3)$ và $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2;\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=8$. Giá trị của tích phân $\int_{-1}^1 f(|2x-1|)\mathrm{d}x=?$

A. 6 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^3 f(x)dx=8$ và $\int_0^5 f(x)dx=4$. Tính $\int_{-1}^1 f(|4x-1|)dx$

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{11}{4}$. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x)+2f'(-x)=\frac{2|x|}{x^6+x^2+1}$ với mọi số thực x. Giả sử $f(2)=m$, $f(-3)=n$. Tính giá trị của biểu thức $T=f(-2)-f(3)$.

A. $T=m+n$. **B.** $T=n-m$. **C.** $T=m-n$. **D.** $T=-m-n$.

Nguyễn Bảo Vương

Dạng 2.3 Tích phân nhiều hàm

Câu 27. Cho số thực a và hàm số $f(x)=\begin{cases}2x & khi\ x\le 0\\ a(x-x^2) & khi\ x>0\end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-1}^1 f(x)dx$ bằng:

A. $\frac{a}{6}-1$. **B.** $\frac{2a}{3}+1$. **C.** $\frac{a}{6}+1$. **D.** $\frac{2a}{3}-1$.

Câu 28. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}e^x+m & \text{khi } x\ge 0\\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x<0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=ae+b\sqrt{3}+c$, $(a,b,c\in Q)$. Tổng $a+b+3c$ bằng

A. 15. **B.** -10. **C.** -19. **D.** -17.

Câu 29. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Tính tích phân $\int_0^1 \max\{e^x,e^{1-2x}\}dx$

A. $e-1$. **B.** $\frac{3}{2}\left(e-\sqrt[3]{e}\right)$. **C.** $e-\sqrt[3]{e}$. **D.** $\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$.

Câu 30. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}x^2+3 & khi\ x\ge 1\\ 5-x & khi\ x<1\end{cases}$. Tính $I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x dx+3\int_0^1 f(3-2x)dx$

A. $I=\frac{71}{6}$. **B.** $I=31$. **C.** $I=32$. **D.** $I=\frac{32}{3}$.

Chuyên đề 26 TÍCH PHÂN

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

Dạng. Sử dụng tính chất, bảng nguyên hàm cơ bản để tính tích phân

1.Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên K; a,b là hai phần tử bất kì thuộc K, $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Hiệu số $F(b)-F(a)$ gọi là tích phân của của $f(x)$ từ a đến b và được kí hiệu: $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$.

2. Các tính chất của tích phân:

$+\int_a^a f(x)dx=0$	$+\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$
$+\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$	$+\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$
$+\int_a^b k.f(x)dx=k.\int_a^b f(x)dx$	+ Nếu $f(x)\ge g(x)\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$.

Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp

$\int x^\alpha.dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$\int(ax+b)^\alpha dx=\frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
$\int\frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$	$\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}.\ln\lvert ax+b\rvert+C$
$\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C$	$\int\frac{1}{(ax+b)^2}dx=-\frac{1}{a}.\frac{1}{ax+b}+C$
$\int\sin x.dx=-\cos x+C$	$\int\sin(ax+b).dx=-\frac{1}{a}.\cos(ax+b)+C$
$\int\cos x.dx=\sin x+C$	$\int\cos(ax+b).dx=\frac{1}{a}.\sin(ax+b)+C$
$\int\frac{1}{\sin^2 x}.dx=-\cot x+C$	$\int\frac{1}{\sin^2(ax+b)}.dx=-\frac{1}{a}.\cot(ax+b)+C$
$\int\frac{1}{\cos^2 x}.dx=\tan x+C$	$\int\frac{1}{\cos^2(ax+b)}.dx=\frac{1}{a}.\tan(ax+b)+C$
$\int e^x.dx=e^x+C$	$\int e^{ax+b}.dx=\frac{1}{a}.e^{ax+b}+C$
$\int a^x.dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$

✍ **Nhận xét**. Khi thay x bằng $(ax+b)$ thì lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm $\frac{1}{a}$.

Câu 1. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Nếu $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=-2$ và $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x=1$ thì $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. -3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = -2+1 = -1$.

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Nếu $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 4$ thì $\int_0^1 2f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 16. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_0^1 2f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2.4 = 8$.

Câu 3. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Biết $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 3$. Giá trị của $\int_1^3 2f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 9. **C.** 6. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_1^3 2f(x)\mathrm{d}x = 2\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 2.3 = 6$.

Câu 4. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 [2+f(x)]\mathrm{d}x$ bằng

Nguyễn Bảo Vương

A. 5. **B.** 3. **C.** $\frac{13}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_1^2 [2+f(x)]\mathrm{d}x = \left(2x+x^2\right)\Big|_1^2 = 8-3 = 5$

Câu 5. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Biết $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x = 4$. Giá trị của $\int_1^5 3f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** 64. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_1^5 3f(x)\mathrm{d}x = 3\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x = 3.4 = 12$.

Câu 6. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 (2+f(x))\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{23}{4}$. **B.** 7. **C.** 9. **D.** $\frac{15}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_1^2 (2+f(x))\,dx = \int_1^2 2dx + \int_1^2 f(x)dx = 2x\Big|_1^2 + F(x)\Big|_1^2 = 2x\Big|_1^2 + x^3\Big|_1^2 = 9$

Câu 7. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Biết $\int_1^2 f(x)\,dx = 2$. Giá trị của $\int_1^3 3f(x)\,dx$ bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $\int_1^2 3f(x)dx = 3\int_1^2 f(x)dx = 3.2 = 6$.

Câu 8. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3 (1+f(x))dx$ bằng

A. 20. **B.** 22. **C.** 26. **D.** 28.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_1^3 [1+f(x)]dx = [x+F(x)]\Big|_1^3 = [x+x^3)]\Big|_1^3 = 30-2 = 28$.

Câu 9. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Biết $\int_2^3 f(x)\,dx = 6$. Giá trị của $\int_2^3 2f(x)\,dx$ bằng.

A. 36. **B.** 3. **C.** 12. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Ta có : $\int_2^3 2f(x)\,dx = 2\int_2^3 f(x)\,dx = 12..$

Câu 10. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3 [1+f(x)]\,dx$ bằng

A. 10. **B.** 8. **C.** $\frac{26}{3}$. **D.** $\frac{32}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_1^3 [1+f(x)]dx = (x+F(x))\Big|_1^3 = (x+x^2)\Big|_1^3 = 12-2 = 10.$

Câu 11. **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Biết $\int_2^3 f(x)dx = 4$ và $\int_2^3 g(x)dx = 1$. Khi đó: $\int_2^3 [f(x)-g(x)]dx$ bằng:

A. -3. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_2^3 [f(x)-g(x)]dx = \int_2^3 f(x)dx - \int_2^3 g(x)dx = 4-1=3$

Câu 12. **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Biết $\int_0^1 [f(x)+2x]dx=2$. Khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng :

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\int_0^1 [f(x)+2x]dx=2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 2xdx=2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 2-x^2\Big|_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 2-1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 1$$

Câu 13. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Biết $\int_2^3 f(x)dx = 3$ và $\int_2^3 g(x)dx = 1$. Khi đó $\int_2^3 [f(x)+g(x)]dx$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_2^3 [f(x)+g(x)]dx = \int_2^3 f(x)dx + \int_2^3 g(x)dx = 4$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 14. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Biết $\int_0^1 [f(x)+2x]dx = 3$. Khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_0^1 [f(x)+2x]dx = 3 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx + 2\int_0^1 xdx = 3 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx + 2.\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 3$.

Suy ra $\int_0^1 f(x)dx = 3-x^2\Big|_0^1 = 3-(1-0)=2$.

Câu 15. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Biết $\int_1^2 f(x)dx = 3$ và $\int_1^2 g(x)dx = 2$. Khi đó $\int_1^2 [f(x)-g(x)]dx$ bằng?

A. 6. **B.** 1. **C.** 5. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_1^2 [f(x)-g(x)]dx = \int_1^2 f(x)dx - \int_1^2 g(x)dx = 3-2=1$.

Câu 16. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Biết $\int_0^1 [f(x)+2x]dx = 4$. Khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

$\int_0^1 \left[f(x)+2x\right]dx = 4 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 2xdx = 4 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 4-1 = 3$

Câu 17. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Biết $\int_1^2 f(x)dx = 2$ và $\int_1^2 g(x)dx = 3$. Khi đó $\int_1^2 [f(x)+g(x)]dx$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** -1. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_1^2 [f(x)+g(x)]dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_1^2 g(x)dx = 2+3 = 5$.

Câu 18. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Biết $\int_0^1 \left[f(x)+2x\right]dx = 5$. Khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

$\int_0^1 \left[f(x)+2x\right]dx = 5 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 2xdx = 5$

$\int_0^1 f(x)dx + x^2\Big|_0^1 = 5 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx + 1 = 5 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 4$.

Câu 19. **(Mã 103 - 2019)** Biết $\int_1^2 f(x)dx = 2$ và $\int_1^2 g(x)dx = 6$, khi đó $\int_1^2 \left[f(x)-g(x)\right]dx$ bằng

A. 8. **B.** -4. **C.** 4. **D.** -8.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_1^2 \left[f(x)-g(x)\right]dx = \int_1^2 f(x)dx - \int_1^2 g(x)dx = 2-6 = -4$.

Câu 20. **(Mã 102 - 2019)** Biết tích phân $\int_0^1 f(x)dx = 3$ và $\int_0^1 g(x)dx = -4$. Khi đó $\int_0^1 \left[f(x)+g(x)\right]dx$ bằng

A. -7. **B.** 7. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_0^1 \left[f(x)+g(x)\right]dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = 3+(-4) = -1$.

Câu 21. **(Mã 104 - 2019)** Biết $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_0^1 g(x)dx = -4$, khi đó $\int_0^1 \left[f(x)+g(x)\right]dx$ bằng

A. 6. **B.** -6. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

$\int_0^1 \left[f(x)+g(x)\right]dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = 2+(-4) = -2$.

Câu 22. **(Mã 101 2019)** Biết $\int_0^1 f(x)dx = -2$ và $\int_0^1 g(x)dx = 3$, khi đó $\int_0^1 \left[f(x)-g(x)\right]dx$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** -5. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

$\int_0^1 [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = -2-3 = -5$.

Câu 23. **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 5$, khi $\int_0^1 [f(x)-2g(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. -8 **B.** 1 **C.** -3 **D.** 12

Lời giải

Chọn A

Có $\int_0^1 [f(x)-2g(x)]\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - 2\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 2-2.5 = -8$.

Câu 24. **(THPT Ba Đình 2019)** Khẳng định nào trong các khẳng định sau đúng với mọi hàm f, g liên tục trên K và a, b là các số bất kỳ thuộc K?

A. $\int_a^b [f(x)+2g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + 2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}\mathrm{d}x = \frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$.

C. $\int_a^b [f(x).g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = \left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2$.

Lời giải

Theo tính chất tích phân ta có

$\int_a^b [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x; \int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, với $k \in \mathbb{R}$.

Câu 25. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Cho $\int_{-2}^2 f(x)\mathrm{d}x = 1$, $\int_{-2}^4 f(t)\mathrm{d}t = -4$. Tính $\int_2^4 f(y)\mathrm{d}y$.

A. $I = 5$. **B.** $I = -3$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = -5$.

Lời giải

Ta có: $\int_{-2}^4 f(t)\mathrm{d}t = \int_{-2}^4 f(x)\mathrm{d}x$, $\int_2^4 f(y)\mathrm{d}y = \int_2^4 f(x)\mathrm{d}x$.

Khi đó: $\int_{-2}^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^4 f(x)\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow \int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^4 f(x)\mathrm{d}x - \int_{-2}^2 f(x)\mathrm{d}x = -4-1 = -5$.

Vậy $\int_2^4 f(y)\mathrm{d}y = -5$.

Câu 26. **(THPT Cù Huy Cận -2019)** Cho $\int_0^2 f(x)\,dx = 3$ và $\int_0^2 g(x)\,dx = 7$, khi đó $\int_0^2 [f(x)+3g(x)]dx$ bằng

A. 16. **B.** -18. **C.** 24. **D.** 10.

Lời giải

Ta có

$\int_0^2 \left[f(x)+3g(x) \right] dx = \int_0^2 f(x)\,dx + 3\int_0^2 g(x)\,dx = 3+3.7 = 24$.

Câu 27. **(THPT - YÊN Định Thanh Hóa2019)** Cho $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -1;\ \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$. Tính $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$

A. 1. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Ta có $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 5+1 = 6$

Vậy $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 6$

Câu 28. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Cho $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -3$ và $\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$. Khi đó $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 12. **B.** 7. **C.** 1. **D.** -12.

Lời giải

$\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = -3+4 = 1$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $[-1;2], \mathrm{f}(-1)=8; \mathrm{f}(2)=-1$. Tích phân $\int_{-1}^2 \mathrm{f}'(\mathrm{x})\mathrm{dx}$ bằng

Nguyễn Bảo Vương

A. 1. **B.** 7. **C.** -9. **D.** 9.

Lời giải

Ta có $\int_{-1}^2 \mathrm{f}'(\mathrm{x})\mathrm{dx} = \mathrm{f}(\mathrm{x})\big|_{-1}^2 = \mathrm{f}(2) - \mathrm{f}(-1) = -1-8 = -9.$

Câu 30. **(Sở Thanh Hóa - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 9; \int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=5$. **B.** $I=36$. **C.** $I=\frac{9}{4}$. **D.** $I=13$.

Lời giải

Ta có: $I = \int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = 9+4 = 13.$

Câu 31. Cho $\int_{-1}^0 f(x)\,dx = 3\int_0^3 f(x)\,dx = 3$. Tích phân $\int_1^3 f(x)\,dx$ bằng

A. 6 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 0

Lời giải

Có $\int_{-1}^0 f(x)\,dx = 3; \int_0^3 f(x)\,dx = 1; \int_{-1}^3 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 f(x)\,dx + \int_0^3 f(x)\,dx = 3+1 = 4$

Câu 32. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = 10$, $\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x = 4$. Tích phân $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Theo tính chất của tích phân, ta có: $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x + \int_3^4 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra: $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^4 f(x)\mathrm{d}x - \int_3^4 f(x)\mathrm{d}x = 10 - 4 = 6$.

Vậy $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 6$.

Câu 33. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Nếu $F'(x) = \dfrac{1}{2x-1}$ và $F(1) = 1$ thì giá trị của $F(4)$ bằng

A. $\ln 7$. **B.** $1 + \dfrac{1}{2}\ln 7$. **C.** $\ln 3$. **D.** $1 + \ln 7$.

Lời giải

Ta có: $\int_1^4 F'(x)\mathrm{d}x = \int_1^4 \dfrac{1}{2x-1}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\ln|2x-1|\Big|_1^4 = \dfrac{1}{2}\ln 7$.

Lại có: $\int_1^4 F'(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_1^4 = F(4) - F(1)$.

Suy ra $F(4) - F(1) = \dfrac{1}{2}\ln 7$. Do đó $F(4) = F(1) + \dfrac{1}{2}\ln 7 = 1 + \dfrac{1}{2}\ln 7$.

Câu 34. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương -2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $\int_1^8 f(x)\mathrm{d}x = 9$, $\int_4^{12} f(x)\mathrm{d}x = 3$, $\int_4^8 f(x)\mathrm{d}x = 5$.

Tính $I = \int_1^{12} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 17$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = 11$. **D.** $I = 7$.

Lời giải

Ta có: $I = \int_1^{12} f(x)\mathrm{d}x = \int_1^8 f(x)\mathrm{d}x + \int_8^{12} f(x)\mathrm{d}x$. $= \int_1^8 f(x)\mathrm{d}x + \int_4^{12} f(x)\mathrm{d}x - \int_4^8 f(x)\mathrm{d}x = 9 + 3 - 5 = 7$.

Câu 35. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x)dx = 7$, $\int_2^6 f(x)dx = 3$. Tính $P = \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx$.

A. $P = 10$. **B.** $P = 4$. **C.** $P = 7$. **D.** $P = -6$.

Lời giải

Ta có $\int_0^{10} f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^6 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx$

Suy ra $\int_0^2 f(x)dx+\int_6^{10} f(x)dx=\int_0^{10} f(x)dx-\int_2^6 f(x)dx=7-3=4$.

Câu 36. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho f, g là hai hàm liên tục trên đoạn $[1;3]$ thoả: $\int_1^3[f(x)+3g(x)]dx=10$, $\int_1^3[2f(x)-g(x)]dx=6$. Tính $\int_1^3[f(x)+g(x)]dx$.

A. 7. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

$\int_1^3[f(x)+3g(x)]dx=10 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx+3\int_1^3 g(x)dx=10$ (1).

$\int_1^3[2f(x)-g(x)]dx=6 \Leftrightarrow 2\int_1^3 f(x)dx-\int_1^3 g(x)dx=6$ (2).

Đặt $X=\int_1^3 f(x)dx$, $Y=\int_1^3 g(x)dx$.

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}X+3Y=10\\2X-Y=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}X=4\\Y=2\end{cases}$.

Do đó ta được: $\int_1^3 f(x)dx=4$ và $\int_1^3 g(x)dx=2$.

Vậy $\int_1^3[f(x)+g(x)]dx=4+2=6$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 37. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\int_0^{10} f(x)dx=7$; $\int_2^6 f(x)dx=3$. Tính $P=\int_0^2 f(x)dx+\int_6^{10} f(x)dx$.

A. $P=4$ **B.** $P=10$ **C.** $P=7$ **D.** $P=-4$

Lời giải

Ta có: $\int_0^{10} f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^6 f(x)dx+\int_6^{10} f(x)dx$.

$\Rightarrow 7=P+3\Rightarrow P=4$.

Câu 38. Cho f,g là hai hàm số liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3[f(x)+3g(x)]dx=10$ đồng thời $\int_1^3[2f(x)-g(x)]dx=6$. Tính $\int_1^3[f(x)+g(x)]dx$.

A. 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Ta có: $\int_1^3[f(x)+3g(x)]dx=10 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx+3\int_1^3 g(x)dx=10$.

$\int_1^3[2f(x)-g(x)]dx=6 \Leftrightarrow 2\int_1^3 f(x)dx-\int_1^3 g(x)dx=6$.

Đặt $u=\int_1^3 f(x)dx$; $v=\int_1^3 g(x)dx$.

Ta được hệ phương trình: $\begin{cases} u+3v=10 \\ 2u-v=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4 \\ v=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int\limits_1^3 f(x)\mathrm{dx}=4 \\ \int\limits_1^3 g(x)\mathrm{dx}=2 \end{cases}$

Vậy $\int\limits_1^3 \left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{dx}=6$.

Câu 39. **(THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thỏa: $\int\limits_1^3 \left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=10$ và $\int\limits_1^3 \left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int\limits_1^3 \left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. 8. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Đặt $a=\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ và $b=\int\limits_1^3 g(x)\mathrm{d}x$.

Khi đó, $\int\limits_1^3 \left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=a+3b$, $\int\limits_1^3 \left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=2a-b$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases} a+3b=10 \\ 2a-b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$.

Vậy $I=a+b=6$.

Câu 40. **(Mã 104 2017)** Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=5$. Tính $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x)+2\sin x\right]\mathrm{d}x=5$.

A. $I=7$ **B.** $I=5+\dfrac{\pi}{2}$ **C.** $I=3$ **D.** $I=5+\pi$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x)+2\sin x\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x+2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x-2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=5-2(0-1)=7.$$

Câu 41. **(Mã 110 2017)** Cho $\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_{-1}^2 g(x)\mathrm{d}x=-1$. Tính $I=\int\limits_{-1}^2 \left[x+2f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{17}{2}$ **B.** $I=\dfrac{5}{2}$ **C.** $I=\dfrac{7}{2}$ **D.** $I=\dfrac{11}{2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $I=\int\limits_{-1}^2 \left[x+2f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}\Big|_{-1}^2+2\int\limits_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x-3\int\limits_{-1}^2 g(x)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}+2.2-3(-1)=\dfrac{17}{2}$.

Câu 42. **(THPT Hàm Rồng Thanh Hóa 2019)** Cho hai tích phân $\int_{-2}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 8$ và $\int_{5}^{-2} g(x)\mathrm{d}x = 3$. Tính $I = \int_{-2}^{5}\left[f(x) - 4g(x) - 1\right]\mathrm{d}x$

A. 13. **B.** 27. **C.** -11. **D.** 3.

Lời giải

$$I = \int_{-2}^{5}\left[f(x) - 4g(x) - 1\right]\mathrm{d}x = \int_{-2}^{5} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-2}^{5} 4g(x)\mathrm{d}x - \int_{-2}^{5}\mathrm{d}x = \int_{-2}^{5} f(x)\mathrm{d}x - 4\int_{-2}^{5} g(x)\mathrm{d}x - \int_{-2}^{5}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-2}^{5} f(x)\mathrm{d}x + 4\int_{5}^{-2} g(x)\mathrm{d}x - \int_{-2}^{5}\mathrm{d}x = 8 + 4.3 - x\Big|_{-2}^{5} = 8 + 4.3 - 7 = 13.$$

Câu 43. **(Sở Bình Phước 2019)** Cho $\int_{-1}^{2} f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^{2} g(x)dx = -1$, khi đó $\int_{-1}^{2}\left[x + 2f(x) + 3g(x)\right]dx$ bằng

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{7}{2}$ **C.** $\frac{17}{2}$ **D.** $\frac{11}{2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_{-1}^{2}\left[x + 2f(x) + 3\mathrm{g(x)}\right]dx = \int_{-1}^{2} xdx + 2\int_{-1}^{2} f(x)dx + 3\int_{-1}^{2} g(x)dx = \frac{3}{2} + 4 - 3 = \frac{5}{2}$

Câu 44. **(Sở Phú Thọ 2019)** Cho $\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 3, \int_{0}^{2} g(x)\mathrm{d}x = -1$ thì $\int_{0}^{2}\left[f(x) - 5g(x) + x\right]\mathrm{d}x$ bằng:

A. 12. **B.** 0. **C.** 8. **D.** 10

Lời giải

Chọn D

$$\int_{0}^{2}\left[f(x) - 5g(x) + x\right]\mathrm{d}x = \int_{0}^{2} f(x)dx - 5\int_{0}^{2}\mathrm{g}(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} x\mathrm{d}x = 3 + 5 + 2 = 10$$

Câu 45. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho $\int_{0}^{5} f(x)\mathrm{d}x = -2$. Tích phân $\int_{0}^{5}\left[4f(x) - 3x^2\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. -140. **B.** -130. **C.** -120. **D.** -133.

Lời giải

$$\int_{0}^{5}\left[4f(x) - 3x^2\right]\mathrm{d}x = 4\int_{0}^{5} f(x)\mathrm{d}x - \int_{0}^{5} 3x^2\mathrm{d}x = -8 - x^3\Big|_{0}^{5} = -8 - 125 = -133.$$

Câu 46. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019)** Cho $\int_{1}^{2}\left[4f(x) - 2x\right]dx = 1$. Khi đó $\int_{1}^{2} f(x)dx$ bằng:

A. 1. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

$$\int_1^2 \left[4f(x)-2x\right]dx=1 \Leftrightarrow 4\int_1^2 f(x)dx-2\int_1^2 xdx=1 \Leftrightarrow 4\int_1^2 f(x)dx-2.\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=1$$

$$\Leftrightarrow 4\int_1^2 f(x)dx=4 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx=1$$

Câu 47. Cho $\int_0^1 f(x)dx=1$ tích phân $\int_0^1 \left(2f(x)-3x^2\right)dx$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Chọn. **A.**

$$\int_0^1 \left(2f(x)-3x^2\right)dx=2\int_0^1 f(x)dx-3\int_0^1 x^2dx=2-1=1.$$

Câu 48. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Tính tích phân $I=\int_{-1}^0 (2x+1)dx$.

A. $I=0$. **B.** $I=1$. **C.** $I=2$. **D.** $I=-\frac{1}{2}$.

Lời giải

$$I=\int_{-1}^0 (2x+1)dx=\left(x^2+x\right)\Big|_{-1}^0=0-0=0.$$

Câu 49. Tích phân $\int_0^1 (3x+1)(x+3)\mathrm{d}x$ bằng

A. 12. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 6.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Ta có: $\int_0^1 (3x+1)(x+3)\mathrm{d}x=\int_0^1 \left(3x^2+10x+3\right)\mathrm{d}x=\left(x^3+5x^2+3x\right)\Big|_0^1=9$.

Vậy : $\int_0^1 (3x+1)(x+3)\mathrm{d}x=9$.

Câu 50. **(KTNL GV Thpt Lý Thái Tổ -2019)** Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

+ Tính được $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

Câu 51. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Tính tích phân $I=\int_0^2 (2x+1)dx$

A. $I=5$. **B.** $I=6$. **C.** $I=2$. **D.** $I=4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I=\int\limits_0^2(2x+1)dx=\left(x^2+x\right)\Big|_0^2=4+2=6$.

Câu 52. Với a,b là các tham số thực. Giá trị tích phân $\int\limits_0^b\left(3x^2-2ax-1\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. b^3-b^2a-b. **B.** b^3+b^2a+b. **C.** b^3-ba^2-b. **D.** $3b^2-2ab-1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\limits_0^b\left(3x^2-2ax-1\right)\mathrm{d}x=\left(x^3-ax^2-x\right)\Big|_0^b=b^3-ab^2-b$.

Câu 53. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Giả sử $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 3xdx=a+b\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \ (a,b\in\mathbb{Q})$. Khi đó giá trị của $a-b$ là

A. $-\dfrac{1}{6}$ **B.** $-\dfrac{1}{6}$ **C.** $-\dfrac{3}{10}$ **D.** $\dfrac{1}{5}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 3xdx=-\dfrac{1}{3}\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $a=b=\dfrac{1}{3}\Rightarrow a-b=0$.

Câu 54. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^2\left(f(x)+3x^2\right)\mathrm{d}x=10$. Tính $\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. 2. **B.** -2. **C.** 18. **D.** -18.

Lời giải

Ta có:

$$\int\limits_0^2\left(f(x)+3x^2\right)\mathrm{d}x=10\Leftrightarrow\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^2 3x^2\mathrm{d}x=10\Leftrightarrow\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=10-\int\limits_0^2 3x^2\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=10-x^3\Big|_0^2\Leftrightarrow\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=10-8=2.$$

Câu 55. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho $\int\limits_0^m\left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x=6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(-3;1)$.

Lời giải

Ta có: $\int\limits_0^m\left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x=6\Leftrightarrow\left(x^3-x^2+x\right)\Big|_0^m=6\Leftrightarrow m^3-m^2+m-6=0\Leftrightarrow m=2$.

Vậy $m\in(0;4)$.

Câu 56. **(Mã 104 2018)** $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$ bằng

A. $\frac{1}{2}\ln 35$ **B.** $\ln\frac{7}{5}$ **C.** $\frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}$ **D.** $2\ln\frac{7}{5}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2}\ln|2x+3|\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 7 - \ln 5) = \frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}$.

Câu 57. **(Mã 103 2018)** $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$ bằng

A. $2\ln 2$ **B.** $\frac{1}{3}\ln 2$ **C.** $\frac{2}{3}\ln 2$ **D.** $\ln 2$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3}\ln|3x-2|\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(\ln 4 - \ln 1) = \frac{2}{3}\ln 2$.

Câu 58. **(Đề Tham Khảo 2018)** Tích phân $\int_0^2 \frac{dx}{x+3}$ bằng

A. $\frac{2}{15}$ **B.** $\frac{16}{225}$ **C.** $\log\frac{5}{3}$ **D.** $\ln\frac{5}{3}$

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương

Chọn D

$\int_0^2 \frac{dx}{x+3} = \ln|x+3|\Big|_0^2 = \ln\frac{5}{3}$

Câu 59. **(Mã 105 2017)** Cho $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)dx = a\ln 2 + b\ln 3$ với a,b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+2b=0$ **B.** $a+b=2$ **C.** $a-2b=0$ **D.** $a+b=-2$

Lời giải

Chọn A

$\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \left[\ln|x+1| - \ln|x+2|\right]_0^1 = 2\ln 2 - \ln 3$; do đó $a=2; b=-1$

Câu 60. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Tính tích phân $I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$

A. $I = \frac{1}{e}$ **B.** $I = \frac{1}{e} + 1$ **C.** $I = 1$ **D.** $I = e$

Lời giải

Chọn A

$I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \left(\ln|x| + \frac{1}{x}\right)\Big|_1^e = \frac{1}{e}$.

Câu 61. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Tính tích phân $I=\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{x+2}$.

A. $I=-\frac{21}{100}$. **B.** $I=\ln\frac{5}{2}$. **C.** $I=\log\frac{5}{2}$. **D.** $I=\frac{4581}{5000}$.

Lời giải

$I=\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{x+2}=\ln\left(x+2\right)\Big|_0^3=\ln 5-\ln 2=\ln\frac{5}{2}$.

Câu 62. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương - 2019)** $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{3x-2}$ bằng

A. $2\ln 2$. **B.** $\frac{2}{3}\ln 2$. **C.** $\ln 2$. **D.** $\frac{1}{3}\ln 2$.

Lời giải

Ta có: $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{3x-2}=\frac{1}{3}\ln\left|3x-2\right|\Big|_1^2=\frac{2}{3}\ln 2$.

Câu 63. Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{x-1}{x}\mathrm{d}x$.

A. $I=1-\ln 2$. **B.** $I=\frac{7}{4}$. **C.** $I=1+\ln 2$. **D.** $I=2\ln 2$.

Lời giải

Ta có $I=\int_1^2 \frac{x-1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^2\left(1-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\left(x-\ln\left|x\right|\right)\Big|_1^2=\left(2-\ln 2\right)-\left(1-\ln 1\right)=1-\ln 2$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 64. Biết $\int_1^3 \frac{x+2}{x}dx=a+b\ln c$, với $a,b,c\in\mathbb{Z},c<9$. Tính tổng $S=a+b+c$.

A. $S=7$. **B.** $S=5$. **C.** $S=8$. **D.** $S=6$.

Lời giải

Ta có $\int_1^3 \frac{x+2}{x}dx=\int_1^3\left(1+\frac{2}{x}\right)dx=\int_1^3 dx+\int_1^3 \frac{2}{x}dx=2+2\ln\left|x\right|\Big|_1^3=2+2\ln 3$.

Do đó $a=2,b=2,c=3\Rightarrow S=7$.

Câu 65. **(Mã 110 2017)** Cho $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}$. Tính: $I=F\left(e\right)-F\left(1\right)$?

A. $I=\frac{1}{2}$ **B.** $I=\frac{1}{e}$ **C.** $I=1$ **D.** $I=e$

Lời giải

Chọn A

Theo định nghĩa tích phân: $I=F\left(e\right)-F\left(1\right)=\int_1^e f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_1^e \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int_1^e \ln x.d\left(\ln x\right)=\frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^e=\frac{1}{2}$.

Câu 66. **(Mã 102 2018)** $\int_0^1 e^{3x+1}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{3}(e^4+e)$ **B.** e^3-e **C.** $\frac{1}{3}(e^4-e)$ **D.** e^4-e

Lời giải

Chọn C

$\int_0^1 e^{3x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3x+1}\mathrm{d}(3x+1) = \frac{1}{3}e^{3x+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e^4 - e).$

Câu 67. **(Mã 101 2018)** $\int_1^2 \mathrm{e}^{3x-1}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^5 + \mathrm{e}^2\right)$ **B.** $\frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^2\right)$ **C.** $\frac{1}{3}\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^2$ **D.** $\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^2$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_1^2 \mathrm{e}^{3x-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x-1}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^5 - \mathrm{e}^2\right).$

Câu 68. **(Mã 123 2017)** Cho $\int_0^6 f(x)dx = 12$. Tính $I = \int_0^2 f(3x)dx.$

A. $I = 5$ **B.** $I = 36$ **C.** $I = 4$ **D.** $I = 6$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I = \int_0^2 f(3x)dx = \frac{1}{3}\int_0^2 f(3x)d3x = \frac{1}{3}\int_0^6 f(t)dt = \frac{1}{3}.12 = 4.$

Câu 69. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$ có giá trị bằng

A. $\ln 2 - 1$. **B.** $-\ln 2$. **C.** $\ln 2$. **D.** $1 - \ln 2$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Ta có: $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}(x+1)}{x+1} = \ln|x+1|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$. Chọn đáp án **C.**

Câu 70. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên -2019)** Tính $K = \int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

A. $K = \ln 2$. **B.** $K = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$. **C.** $K = 2\ln 2$. **D.** $K = \ln\frac{8}{3}$.

Lời giải

$K = \int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}\left(x^2-1\right) = \frac{1}{2}\ln|x^2-1|\Big|_2^3 = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$

Chuyên đề 26 TÍCH PHÂN- PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

Dạng 1. Tích phân cơ bản có điều kiện

1.Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên K; a,b là hai phần tử bất kì thuộc K, $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Hiệu số $F(b)-F(a)$ gọi là tích phân của của $f(x)$ từ a đến b và được kí hiệu: $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$.

2. Các tính chất của tích phân:

+ $\int_a^a f(x)dx=0$
+ $\int_a^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$
+ $\int_a^b k.f(x)dx=k.\int_a^b f(x)dx$
+ $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$
+ $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$
+ Nếu $f(x)\ge g(x)\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$.

Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp

$\int x^\alpha.dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$\int(ax+b)^\alpha dx=\frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
$\int\frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$	$\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{1}{a}.\ln\lvert ax+b\rvert+C$
$\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C$	$\int\frac{1}{(ax+b)^2}dx=-\frac{1}{a}.\frac{1}{ax+b}+C$
$\int\sin x.dx=-\cos x+C$	$\int\sin(ax+b).dx=-\frac{1}{a}.\cos(ax+b)+C$
$\int\cos x.dx=\sin x+C$	$\int\cos(ax+b).dx=\frac{1}{a}.\sin(ax+b)+C$
$\int\frac{1}{\sin^2 x}.dx=-\cot x+C$	$\int\frac{1}{\sin^2(ax+b)}.dx=-\frac{1}{a}.\cot(ax+b)+C$
$\int\frac{1}{\cos^2 x}.dx=\tan x+C$	$\int\frac{1}{\cos^2(ax+b)}.dx=\frac{1}{a}.\tan(ax+b)+C$
$\int e^x.dx=e^x+C$	$\int e^{ax+b}.dx=\frac{1}{a}.e^{ax+b}+C$
$\int a^x.dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$

✍ **Nhận xét**. Khi thay x bằng $(ax+b)$ thì lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm $\frac{1}{a}$.

Câu 1. **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\dfrac{2}{x+2}$. Biết $F(-1)=0$. Tính $F(2)$ kết quả là.

A. $\ln 8+1$. **B.** $4\ln 2+1$. **C.** $2\ln 3+2$. **D.** $2\ln 4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx = F(2)-F(-1) \Leftrightarrow \int\limits_{-1}^{2} \dfrac{2}{x+2} = 2\ln|x+2|\Big|_{-1}^{2} = 2\ln 4 - 2\ln 1 = 2\ln 4$

$\Leftrightarrow F(2)-F(-1)=2\ln 4 \Leftrightarrow F(2)=2\ln 4$ (do $F(-1)=0$).

Câu 2. **(Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2 x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\pi^2+16\pi-4}{16}$. **B.** $\dfrac{\pi^2-4}{16}$. **C.** $\dfrac{\pi^2+15\pi}{16}$. **D.** $\dfrac{\pi^2+16\pi-16}{16}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)=\int\left(2\sin^2 x+1\right)\mathrm{d}x=\int(2-\cos 2x)\,\mathrm{d}x=2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+C.$

Vì $f(0)=4\Rightarrow C=4$

Hay $f(x)=2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+4.$

Suy ra $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+4\right)\mathrm{d}x$

$=x^2+\dfrac{1}{4}\cos 2x+4x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi^2}{16}+\pi-\dfrac{1}{4}=\dfrac{\pi^2+16\pi-4}{16}.$

Câu 3. **(Mã 104 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2 x+3,\ \forall x\in R$, khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\pi^2-2}{8}$. **B.** $\dfrac{\pi^2+8\pi-8}{8}$. **C.** $\dfrac{\pi^2+8\pi-2}{8}$. **D.** $\dfrac{3\pi^2+2\pi-3}{8}$.

Lời giải

Chọn C

$\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(2\sin^2 x+3\right)\mathrm{d}x=\int(1-\cos 2x+3)\,\mathrm{d}x=\int(4-\cos 2x)\,\mathrm{d}x=4x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+C.$

Ta có $f(0)=4$ nên $4.0-\dfrac{1}{2}\sin 0+C=4\Leftrightarrow C=4$.

Nên $f(x)=4x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+4$.

Nguyễn Bảo Vương

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(4x - \frac{1}{2}\sin 2x + 4\right)\mathrm{d}x = \left(2x^2 + \frac{1}{4}\cos 2x + 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2 + 8\pi - 2}{8}.$$

Câu 4. **(Mã 102 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$.Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2 x+3, \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{\pi^2+8\pi+8}{8}$. **B.** $\frac{\pi^2+8\pi+2}{8}$. **C.** $\frac{\pi^2+6\pi+8}{8}$. **D.** $\frac{\pi^2+2}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int(2\cos^2 x+3)dx=\int(2.\frac{1+\cos 2x}{2}+3)dx$

$=\int(\cos 2x+4)dx=\frac{1}{2}\sin 2x+4x+C$ do $f(0)=4\Rightarrow C=4$.

Vậy $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+4x+4$ nên $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{2}\sin 2x+4x+4)dx$

$=(-\frac{1}{4}\cos 2x+2x^2+4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2+8\pi+2}{8}$.

Câu 5. Biết rằng hàm số $f(x)=mx+n$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=3$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=8$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $m+n=4$. **B.** $m+n=-4$. **C.** $m+n=2$. **D.** $m+n=-2$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(mx+n)\mathrm{d}x=\frac{m}{2}x^2+nx+\mathrm{C}$.

Lại có: $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=3\Rightarrow\left(\frac{m}{2}x^2+nx\right)\Big|_0^1=3\Leftrightarrow\frac{1}{2}m+n=3\ (1)$.

$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=8\Rightarrow\left(\frac{m}{2}x^2+nx\right)\Big|_0^2=8\Leftrightarrow 2m+2n=8\ (2)$.

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{2}m+n=3\\2m+2n=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\\n=2\end{cases}$.

$\Rightarrow m+n=4$.

Câu 6. Biết rằng hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{7}{2}$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=-2$ và

A. $-\frac{3}{4}$. **B.** $-\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(ax^2+bx+c)\mathrm{d}x=\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+\mathrm{C}$.

Lại có: $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{7}{2}\Rightarrow\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right)\Big|_0^1=-\frac{7}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c=-\frac{7}{2}\ (1)$.

$\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=-2\Rightarrow\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right)\Big|_0^2=-2\Leftrightarrow\frac{8}{3}a+2b+2c=-2\ (2)$.

$\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{13}{2}\Rightarrow\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right)\Big|_0^3=\frac{13}{2}\Leftrightarrow 9a+\frac{9}{2}b+3c=\frac{13}{2}\ (3)$.

Từ (1), (2) và (3) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c=-\frac{7}{2}\\ \frac{8}{3}a+2b+2c=-2\\ 9a+\frac{9}{2}b+3c=\frac{13}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=3\\ c=-\frac{16}{3}\end{cases}$.

$\Rightarrow P=a+b+c=1+3+\left(-\frac{16}{3}\right)=-\frac{4}{3}$.

Câu 7. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Có hai giá trị của số thực a là a_1, a_2 $(0<a_1<a_2)$ thỏa mãn $\int\limits_1^a(2x-3)\mathrm{d}x=0$. Hãy tính $T=3^{a_1}+3^{a_2}+\log_2\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$.

A. $T=26$. **B.** $T=12$. **C.** $T=13$. **D.** $T=28$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int\limits_1^a(2x-3)\mathrm{d}x=\left(x^2-3x\right)\Big|_1^a=a^2-3a+2$.

Vì $\int\limits_1^a(2x-3)\mathrm{d}x=0$ nên $a^2-3a+2=0$, suy ra $\left[\begin{array}{l}a=1\\ a=2\end{array}\right.$.

Lại có $0<a_1<a_2$ nên $a_1=1$; $a_2=2$.

Như vậy $T=3^{a_1}+3^{a_2}+\log_2\left(\frac{a_2}{a_1}\right)=3^1+3^2+\log_2\left(\frac{2}{1}\right)=13$.

Câu 8. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho $\int\limits_0^m\left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x=6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(-3;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int\limits_0^m\left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x=\left(x^3-x^2+x\right)\Big|_0^m=m^3-m^2+m$.

$\int\limits_0^m\left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x=6\Leftrightarrow m^3-m^2+m-6=0\Leftrightarrow m=2\in(0;4)$.

Vậy $m=2\in(0;4)$.

Câu 9. **(Thi thử Lômônôxốp - Hà Nội 2019)** Cho $I=\int_0^1\left(4x-2m^2\right)\mathrm{d}x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I+6>0$?

A. 1. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Theo định nghĩa tích phân ta có $I=\int_0^1\left(4x-2m^2\right)\mathrm{d}x=\left(2x^2-2m^2x\right)\Big|_0^1=-2m^2+2$.

Khi đó $I+6>0\Leftrightarrow -2m^2+2+6>0\Leftrightarrow -m^2+4>0\Leftrightarrow -2<m<2$

Mà m là số nguyên nên $m\in\{-1;0;1\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 10. **(Sở GD Kon Tum - 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của a để $\int_0^a\left(2x-3\right)\mathrm{d}x\le 4$?

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_0^a\left(2x-3\right)\mathrm{d}x=\left(x^2-3x\right)\Big|_0^a=a^2-3a$.

Khi đó: $\int_0^a\left(2x-3\right)\mathrm{d}x\le 4\Leftrightarrow a^2-3a\le 4\Leftrightarrow -1\le a\le 4$

Mà $a\in\mathbb{N}^*$ nên $a\in\{1;2;3;4\}$.

Vậy có 4 giá trị của a thỏa đề bài.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 11. **(THPT Lương Thế Vinh - HN 2018).**Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi;3\pi)$ sao cho $\int_\pi^b 4\cos 2x\mathrm{d}x=1$?

A. 8. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Ta có: $\int_\pi^b 4\cos 2x\mathrm{d}x=1\Leftrightarrow 2\sin 2x\Big|_\pi^b=1\Leftrightarrow \sin 2b=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=\frac{\pi}{12}+k\pi\\ b=\frac{5\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.$.

Do đó, có 4 số thực b thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 12. **(Cần Thơ - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{4}{x^2-4}$, $f(-3)+f(3)=f(-1)+f(1)=2$. Giá trị biểu thức $f(-4)+f(0)+f(4)$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có: $\int\frac{4}{x^2-4}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\ln|x-2|-\ln|x+2|+C$.

Do đó: $f(x)=\begin{cases}\ln\dfrac{x-2}{x+2}+C_1 & \text{khi } x<-2\\ \ln\dfrac{2-x}{x+2}+C_2 & \text{khi } -2<x<2\\ \ln\dfrac{x-2}{x+2}+C_3 & \text{khi } x>2\end{cases}$

$f(-3)=\ln 5+C_1;\ f(3)=\ln\dfrac{1}{5}+C_3;\ f(0)=C_2;\ f(-1)=\ln 3+C_2;\ f(1)=\ln\dfrac{1}{3}+C_2;$

$f(-3)+f(3)=f(-1)+f(1)=2\Leftrightarrow C_1+C_3=2C_2=2\Rightarrow\begin{cases}C_1+C_3=2\\ C_2=1\end{cases}.$

Vậy $f(-4)+f(0)+f(4)=\ln 3+C_1+C_2+\ln\dfrac{1}{3}+C_3=C_1+C_2+C_3=3$.

Câu 13. **(Chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai - 2018)** Biết $\int_1^4\sqrt{\dfrac{1}{4x}+\dfrac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}}dx=a+e^b-e^c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $T=a+b+c$

A. $T=-3$. **B.** $T=3$. **C.** $T=-4$. **D.** $T=-5$.

Lời giải

Ta có $\dfrac{1}{4x}+\dfrac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{e^x}\right)^2$ nên

$\int_1^4\sqrt{\dfrac{1}{4x}+\dfrac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}}dx=\int_1^4\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{e^x}\right)dx=\left(\sqrt{x}-e^{-x}\right)\Big|_1^4=1+e^{-1}-e^{-4}$.

Vậy $a=1$, $b=-1$, $c=-4$. Suy ra $T=-4$.

Câu 14. **(Sở Bạc Liêu - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$, $f(-2)=\dfrac{3}{2}$ và $f(2)=2\ln 2-\dfrac{3}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(4)$ bằng

A. $\dfrac{6\ln 2-3}{4}$. **B.** $\dfrac{6\ln 2+3}{4}$. **C.** $\dfrac{8\ln 2+3}{4}$. **D.** $\dfrac{8\ln 2-3}{4}$.

Lời giải

Có $f(x)=\int f'(x)dx=\int\dfrac{x+1}{x^2}dx=\ln x-\dfrac{1}{x}+C$

$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\ln|x|-\dfrac{1}{x}+C_1 & \text{khi } x<0\\ \ln|x|-\dfrac{1}{x}+C_2 & \text{khi } x>0\end{cases}$

Do $f(-2)=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\ln 2+\dfrac{1}{2}+C_1=\dfrac{3}{2}\Rightarrow C_1=1-\ln 2$

Do $f(2)=2\ln 2-\dfrac{3}{2}\Rightarrow\ln 2-\dfrac{1}{2}+C_2=2\ln 2-\dfrac{3}{2}\Rightarrow C_2=\ln 2-1$

Như vậy, $f(x)=\begin{cases}\ln|x|-\dfrac{1}{x}+1-\ln 2 & \text{khi } x<0\\ \ln|x|-\dfrac{1}{x}+\ln 2-1 & \text{khi } x>0\end{cases}$

Vậy $f(-1)+f(4)=(2-\ln 2)+\left(\ln 4-\dfrac{1}{4}+\ln 2-1\right)=\dfrac{8\ln 2+3}{4}$.

Câu 15. **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2 x+1, \forall x\in\mathbb{R}$ Khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng.

A. $\dfrac{\pi^2+16\pi+16}{16}$. **B.** $\dfrac{\pi^2+4}{16}$. **C.** $\dfrac{\pi^2+14\pi}{16}$. **D.** $\dfrac{\pi^2+16\pi+4}{16}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$f(x)=\int(2\cos^2 x+1)\mathrm{d}x=\int\left(2\left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)+1\right)\mathrm{d}x=\int(\cos 2x+2)\mathrm{d}x$

$=\int\cos 2x\mathrm{d}x+\int 2\mathrm{d}x=\dfrac{\sin 2x}{2}+2x+C.$

Lại có $f(0)=4\Leftrightarrow C=4\Rightarrow f(x)=\dfrac{\sin 2x}{2}+2x+4.$

$\Rightarrow\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\sin 2x}{2}+2x+4\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\mathrm{d}(2x)+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}2x\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}4\mathrm{d}x$

$=\dfrac{-\cos 2x}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+(x^2+4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi^2+16\pi+4}{16}.$

Câu 16. **(Sở Hà Tĩnh - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\sin^4 x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\pi^2-6}{18}$. **B.** $\dfrac{\pi^2-3}{32}$. **C.** $\dfrac{3\pi^2-16}{64}$. **D.** $\dfrac{3\pi^2-6}{112}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$\sin^4 x=\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)=\dfrac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\dfrac{1+\cos 4x}{2}\right)$

$=\dfrac{1}{8}(\cos 4x-4\cos 2x+3).$

Suy ra $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{8}\int(\cos 4x-4\cos 2x+3)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{32}\sin 4x-\dfrac{1}{4}\sin 2x+\dfrac{3}{8}x+C$.

Vì $f(0)=0$ nên $C=0$ hay $f(x)=\dfrac{1}{32}\sin 4x-\dfrac{1}{4}\sin 2x+\dfrac{3}{8}x$.

Do đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x\right)dx = \left(-\frac{1}{128}\cos 4x + \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{3}{16}x^2\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \left(-\frac{1}{128} - \frac{1}{8} + \frac{3\pi^2}{64}\right) - \left(-\frac{1}{128} + \frac{1}{8}\right) = \frac{3\pi^2 - 16}{64}$.

Dạng 2. Tích phân hàm số hữu tỷ

Tính $I = \int\limits_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}dx$? với $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức không chứa căn.

□ Nếu bậc của tử $P(x)$ ≥ bậc mẫu $Q(x)$ $\xrightarrow{PP}$ chia đa thức.

□ Nếu bậc của tử $P(x)$ < bậc mẫu $Q(x)$ mà mẫu số **phân tích được thành tích** số $\xrightarrow{PP}$ đồng nhất thức để đưa thành tổng của các phân số.

Một số trường hợp đồng nhất thức thường gặp:

+ $\frac{1}{(ax+m)(bx+n)} = \frac{1}{an-bm}\left(\frac{a}{ax+m} - \frac{b}{bx+n}\right)$ (1)

+ $\frac{mx+n}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{(A+B)x - (Ab+Ba)}{(x-a)(x-b)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=m \\ Ab+Ba=-n \end{cases}$.

+ $\frac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-m} + \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)}$ với $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

+ $\frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{D}{(x-b)^2}$.

□ Nếu bậc tử $P(x)$ < bậc mẫu $Q(x)$ mà **mẫu không phân tích được thành tích số**, ta xét một số trường hợp thường gặp sau:

+ $I_1 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, (n \in N^*) \xrightarrow{PP} x = a.\tan t$.

+ $I_2 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, (\Delta < 0) = \int \frac{dx}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta}{4a}\right)\right]}$. Ta sẽ đặt $\longrightarrow x + \frac{b}{2a} = \sqrt{-\frac{\Delta}{4a}}\tan t$.

+ $I_3 = \int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}.dx$ với $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Ta sẽ phân tích:

$I_3 = \frac{p}{2a}\underbrace{\int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}}_{A} + \left(q - \frac{b.p}{2a}\right).\underbrace{\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}}_{I_2}$ và giải A bằng cách đặt $t =$ mẫu số.

Câu 1. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Biết $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x+1)(2x+1)} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$. Khi đó giá trị $a+b+c$ bằng

A. -3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Ta có:

$\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(2x+1)} = \int_1^2 \left(\frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = 2\int_1^2 \frac{1}{2x+1}dx - \int_1^2 \frac{1}{x+1}dx$

$= 2.\frac{1}{2}\ln|2x+1|\Big|_1^2 - \ln|x+1|\Big|_1^2 = \ln(2x+1)\Big|_1^2 - \ln(x+1)\Big|_1^2 = \ln 5 - \ln 3 - (\ln 3 - \ln 2)$

$= \ln 2 - 2\ln 3 + \ln 5$.

Do đó: $a=1$, $b=-2$, $c=1$. Vậy $a+b+c=1+(-2)+1=0$.

Câu 2. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Biết $I = \int_{-1}^{0} \frac{3x^2+5x-1}{x-2}dx = a\ln\frac{2}{3} + b, (a,b\in\mathbb{R})$. Khi đó giá trị của $a+4b$ bằng

A. 50 **B.** 60 **C.** 59 **D.** 40

Lời giải

Chọn C

Ta có $I = \int_{-1}^{0} \frac{3x^2+5x-1}{x-2}dx = \int_{-1}^{0}\left(3x+11+\frac{21}{x-2}\right)dx = \left(\frac{3}{2}x^2+11x+21.\ln|x-2|\right)\Big|_{-1}^{0}$

$= 21.\ln\frac{2}{3} + \frac{19}{2}$. Suy ra $a=21, b=\frac{19}{2}$. Vậy $a+4b=59$

Câu 3. Biết $\int_0^1 \frac{x^2-2}{x+1}dx = \frac{-1}{m} + n\ln 2$, với m,n là các số nguyên. Tính $m+n$.

A. $S=1$. **B.** $S=4$. **C.** $S=-5$. **D.** $S=-1$.

Lời giải

Chọn A

$\int_0^1 \frac{x^2-2}{x+1}dx = \int_0^1 (x-1)dx - \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \frac{(x-1)^2}{2}\Big|_0^1 - \ln|x+1|\Big|_0^1 = \frac{-1}{2} - \ln 2$

$\Rightarrow m=2, n=-1 \Rightarrow m+n=1$

Câu 4. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Tích phân $I = \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1}dx = a - \ln b$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a+b$.

A. 1. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $I = \int_0^1 \frac{(x-1)^2}{x^2+1}dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2x}{x^2+1}\right)dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}d(x^2+1) = x\Big|_0^1 - \ln(x^2+1)\Big|_0^1 = 1 - \ln 2$

$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow a+b=3$.

Câu 5. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Biết $\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1}dx = a + \ln\frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S=a-2b$.

A. $S=2$. **B.** $S=-2$. **C.** $S=5$. **D.** $S=10$.

Lời giải

$\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1}dx = \int_3^5 \left(x + \frac{1}{x+1}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x+1|\right)\Big|_3^5 = 8 + \ln\frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow S=a-2b=2$.

Câu 6. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Cho $\int_1^2\left(x^2+\frac{x}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{10}{b}+\ln\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $P=a+b$?

A. $P=1$. **B.** $P=5$. **C.** $P=7$. **D.** $P=2$.

Lời giải

Ta có $\int_1^2\left(x^2+\frac{x}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\int_1^2\left(x^2+\frac{x+1-1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\int_1^2\left(x^2+1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$

$=\left(\frac{x^3}{3}+x-\ln|x+1|\right)\Big|_1^2=\frac{10}{3}+\ln 2-\ln 3=\frac{10}{3}+\ln\frac{2}{3}=\frac{10}{b}+\ln\frac{a}{b}$.

Suy ra $a=2;b=3$. Vậy $a+b=5$.

Câu 7. **(Chuyên Sơn La 2019)** Cho $\int_1^3\frac{x+3}{x^2+3x+2}dx=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

$\int_1^3\frac{x+3}{x^2+3x+2}dx=\int_1^3\frac{x+3}{(x+1)(x+2)}dx=\int_1^3\frac{2}{x+1}dx-\int_1^3\frac{1}{x+2}dx$

$=\left(2\ln|x+1|-\ln|x+2|\right)\Big|_1^3=2\ln 2+\ln 3-\ln 5$

Suy ra $a=2$, $b=1$, $c=-1$.

Nên $a+b+c=2+1-1=2$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 8. **(Sở Phú Thọ 2019)** Cho $\int_3^4\frac{5x-8}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x=a\ln 3+b\ln 2+c\ln 5$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của 2^{a-3b+c} bằng

A. 12 **B.** 6 **C.** 1 **D.** 64

Lời giải

Chọn D

Ta có: $I=\int_3^4\frac{5x-8}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x=\int_3^4\frac{5x-8}{(x-1)(x-2)}\mathrm{d}x=\int_3^4\frac{3(x-2)+2(x-1)}{(x-1)(x-2)}\mathrm{d}x=\int_3^4\left(\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x-2}\right)\mathrm{d}x$

$=\left(3\ln|x-1|+2\ln|x-2|\right)\Big|_3^4=3\ln 3+2\ln 2-3\ln 2=3\ln 3-\ln 2+0.\ln 5$

Suy ra $\begin{cases}a=3\\b=-1\\c=0\end{cases}\Rightarrow 2^{a-3b+c}=2^6=64$.

Câu 9. Biết $\int_3^5\frac{x^2+x+1}{x+1}\mathrm{d}x=a+\ln\frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S=a-2b$.

A. $S=2$. **B.** $S=-2$. **C.** $S=5$. **D.** $S=10$.

Lời giải

Chọn A

$$\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1}\mathrm{d}x=\int_3^5\left(x+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}+\ln|x+1|\right)\Big|_3^5=8+\ln\frac{3}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=8\\b=3\end{cases}\Rightarrow S=a-2b=2.$$

Câu 10. Biết rằng $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi\sqrt{a}}{b}$ $(a,b\in\mathbb{Z},a<10)$. Khi đó $a+b$ có giá trị bằng

A. 14. **B.** 15. **C.** 13. **D.** 12.

Lời giải

Xét $I=\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x$.

Đặt $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t$, với $t\in\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó $\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t$.

Với $x=0$, ta có $t=\frac{\pi}{6}$.

Với $x=1$, ta có $t=\frac{\pi}{3}$.

Khi đó $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\tan^2 t\right)}{\frac{3}{4}\left(1+\tan^2 t\right)}\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{3}}t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$. Từ đó suy ra $\begin{cases}a=3\\b=9\end{cases}\Rightarrow a+b=12$.

Câu 11. **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Biết $\int_0^2 \frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3}\mathrm{d}x=a+b\ln 3+c\ln 5$, $(a,b,c\in\mathbb{Q})$. Giá trị của abc bằng

A. -8. **B.** -10. **C.** -12. **D.** 16.

Lời giải

Ta có:

$$\int_0^2 \frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3}\mathrm{d}x=\int_0^2\left(1+\frac{x-1}{(x+1)(x+3)}\right)\mathrm{d}x=\int_0^2\left(1-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}\right)\mathrm{d}x=\left(x-\ln|x+1|+2\ln|x+3|\right)\Big|_0^2$$

$=2-3\ln 3+2\ln 5$.

Vậy $a=2,b=-3,c=2$, do đó $abc=-12$.

Câu 12. **(THPT Nguyễn Trãi - Dà Nẵng - 2018)** Giả sử rằng $\int_{-1}^0 \frac{3x^2+5x-1}{x-2}dx=a\ln\frac{2}{3}+b$. Khi đó, giá trị của $a+2b$ là

A. 30. **B.** 60. **C.** 50. **D.** 40.

Lời giải

Ta có:

$$I=\int_{-1}^0 \frac{3x^2+5x-1}{x-2}dx=\int_{-1}^0\left(3x+11+\frac{21}{x-2}\right)dx$$

$$\Rightarrow I=\left[\frac{3x^2}{2}+11x+21.\ln|x-2|\right]\Big|_{-1}^0=21.\ln 2+\frac{19}{2}-21.\ln 3$$

$\Rightarrow I = 21\ln\frac{2}{3}+\frac{19}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 21 \\ b = \frac{19}{2} \end{cases} \Rightarrow a+2b = 40$.

Câu 13. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019)** Biết $\int_1^4 \frac{x^3+x^2+7x+3}{x^2-x+3}\mathrm{d}x = \frac{a}{b}+c\ln 5$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P = a-b^2-c^3$.

A. -5. **B.** -4. **C.** 5. **D.** 0.

Lời giải

Ta có $\int_1^4 \frac{x^3+x^2+7x+3}{x^2-x+3}\mathrm{d}x = \int_1^4 \left(x+2+\frac{3(2x-1)}{x^2-x+3}\right)\mathrm{d}x$

$= \left(\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_1^4 + 3\int_1^4 \frac{\mathrm{d}\left(x^2-x+3\right)}{x^2-x+3} = \frac{27}{2}+3\ln\left|x^2-x+3\right|\Big|_1^4 = \frac{27}{2}+3\ln 5$.

Mà $\int_1^4 \frac{x^3+x^2+7x+3}{x^2-x+3}\mathrm{d}x = \frac{a}{b}+c\ln 5$, suy ra $a = 27$, $b = 2$, $c = 3$.

Vậy $P = a-b^2-c^3 = -4$.

Câu 14. Cho $\int_0^1 \frac{4x^2+15x+11}{2x^2+5x+2}\mathrm{d}x = a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Biểu thức $T = a.c-b$ bằng

A. 4. **B.** 6. **C.** $\frac{-1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Ta có

$\int_0^1 \frac{4x^2+15x+11}{2x^2+5x+2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(4x^2+10x+4)+(5x+7)}{2x^2+5x+2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(2+\frac{5x+7}{2x^2+5x+2}\right)\mathrm{d}x$

$= \int_0^1 \left(2+\frac{1}{x+2}+\frac{3}{2x+1}\right)\mathrm{d}x = \left(2x+\ln|x+2|+\frac{3}{2}\ln|2x+1|\right)\Big|_0^1 = 2-\ln 2+\frac{5}{2}\ln 3$

Vậy $a = 2$, $b = -1$, $c = \frac{5}{2}$ nên $T = 6$.

Câu 15. **(SGD Bến Tre 2019)** Biết $\int_0^1 \frac{x^2-2}{x+1}\mathrm{d}x = \frac{-1}{m}+n\ln 2$, với m, n là các số nguyên. Tính $S = m+n$.

A. $S = -1$. **B.** $S = -5$. **C.** $S = 1$. **D.** $S = 4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_0^1 \frac{x^2-2}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x-1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}-x-\ln|x+1|\right)\Big|_0^1 = \frac{-1}{2}-\ln 2$.

Suy ra $m = 2$; $n = -1$. Vậy $S = 1$.

Câu 16. **(THPT Cẩm Bình 2019)** Cho $\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$, với a,b là các số hữu tỷ. Khi đó $a+b$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Xét $\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\Big|_0^1 = 2\ln 2 - \ln 3.$

Vậy $a=2,\ b=-1 \Rightarrow a+b=1.$

Câu 17. **(Sở Hà Nam - 2019)** Cho $\int_0^1 \frac{2x^2+3x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x = a + b\ln 2 + c\ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tổng $a+b+c$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_0^1 \frac{2x^2+3x}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(2 - \frac{3x+4}{x^2+3x+2}\right)\mathrm{d}x$

$= \int_0^1 \left(2 - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \left(2x - \ln|x+1| - 2\ln|x+2|\right)\Big|_0^1 = 2 + \ln 2 - 2\ln 3.$

Suy ra $a=2;\ b=1;\ c=-2.$

Vậy $a+b+c=1.$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 18. **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Cho biết $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3}dx = a\ln 5 + b\ln 3$, với $a,b \in \mathbb{Q}$. Tính $T = a^2 + b^2$ bằng

A. 13. **B.** 10. **C.** 25. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\frac{x-1}{x^2+4x+3} = \frac{x-1}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$

$A = \frac{x-1}{x+3}\Big|_{x=-1} = -1, B = \frac{x-1}{x+1}\Big|_{x=-3} = 2$

$\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3}dx = \int_0^2 \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+3}\right)dx = -\ln|x+1|\Big|_0^2 + 2\ln|x+3|\Big|_0^2 = -\ln 3 + 2\ln 5 - 2\ln 3$

$= 2\ln 5 - 3\ln 3 = a\ln 5 + b\ln 3$

$\Rightarrow a=2, b=-3 \Rightarrow T = 13.$

Câu 19. **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Biết $\int_0^2 \frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3}\mathrm{d}x = a + b\ln 3 + c\ln 5$, $(a,b,c \in \mathbb{Q})$. Giá trị của abc bằng

A. -8. **B.** -10. **C.** -12. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\int_0^2 \frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3}\mathrm{d}x = \int_0^2 \left(1+\frac{x-1}{x^2+4x+3}\right)\mathrm{d}x = \int_0^2 \left(1+\frac{-1}{x+1}+\frac{2}{x+3}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left(x-\ln|x+1|+2\ln|x+3|\right)\Big|_0^2 = 2+2\ln 5-3\ln 3 = a+b\ln 3+c\ln 5.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow a.b.c=-12.$$

$$c=2$$

Câu 20. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Biết $\int_1^4 \frac{x^3+x^2+7x+3}{x^2-x+3}\mathrm{d}x = \frac{a}{b}+c\ln 5$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $P=a-b^2-c^3$.

A. -5. **B.** -3. **C.** 6. **D.** -4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_1^4 \frac{x^3+x^2+7x+3}{x^2-x+3}\mathrm{d}x = \int_1^4 \left(x+2+\frac{3(2x-1)}{x^2-x+3}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}+2x+3\ln\left(x^2-x+3\right)\right)\Big|_1^4 = \frac{27}{2}+3\ln 5$.

Vậy $P=a-b^2-c^3=-4$.

Câu 21. **(Bình Phước - 2019)** Cho $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)} = a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b^2-c^3$ bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)} = \int_2^3 \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\Big|_2^3 = \ln\frac{4}{5}-\ln\frac{3}{4} = 4\ln 2-\ln 3-\ln 5$.

Suy ra $a=4, b=-1, c=-1$. Vậy $a+b^2-c^3=6$.

Câu 22. **(SGD Đà Nẵng 2019)** Cho $\int_3^4 \frac{2x+3}{x^2+3x}\mathrm{d}x = a\ln 2+b\ln 3+c\ln 7$ với $a, b, c\in\mathbb{Z}$. Giá trị của $2a+3b+7c$ bằng

A. -9. **B.** 6. **C.** 15. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_3^4 \frac{2x+3}{x^2+3x}\mathrm{d}x = \int_3^4 \frac{x+(x+3)}{x.(x+3)}\mathrm{d}x = \int_3^4 \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x = \left(\ln|x(x+3)|\right)\Big|_3^4 = \ln 28-\ln 18$

$$= \ln\frac{14}{9} = \ln 14-\ln 9 = \ln 2-2\ln 3+\ln 7.$$

$\Rightarrow a=1,\ b=-2,\ c=1$.

Vậy $2a+3b+7c=3$.

Câu 23. **(SGD Điện Biên - 2019)** Cho $\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2}dx = a+b.\ln 2+c.\ln 3$, với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị $6a+b+c$ bằng:

A. -2. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2}dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = \left(\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}\right)\Big|_1^2 = -\frac{1}{6}-\ln 2+\ln 3$.

$\Rightarrow a=-\frac{1}{6}, b=-1, c=1$, nên $6a+b+c=-1$.

Câu 24. **(SP Đồng Nai - 2019)** Biết $\int_2^3 \frac{5x+12}{x^2+5x+6}dx = a\ln 2+b\ln 5+c\ln 6$. Tính $S=3a+2b+c$.

A. -11. **B.** -14. **C.** -2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_2^3 \frac{5x+12}{x^2+5x+6}dx = \int_2^3 \left(\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}\right)dx = \left(2\ln|x+2|+3\ln|x+3|\right)\Big|_2^3$

$=(2\ln 5+3\ln 6)-(2\ln 4+3\ln 5) = -4\ln 2-\ln 5+3\ln 6$.

$\Rightarrow a=-4,\ b=-1,\ c=3$.

Do đó $\Rightarrow S=3a+2b+c=-12-2+3=-11$.

Nguyễn Bảo Vương

Dạng 3. Tích phân đổi biến

② **Tích phân đổi biến**: $\int_a^b [f(x)].u'(x).dx = F[u(x)]\Big|_a^b = F[u(b)]-F[u(a)]$.

Có sẵn — Tách từ hàm — Nhân

Các bước tính tích phân đổi biến số

- **Bước 1**. Biến đổi để chọn phép đặt $t=u(x)\Rightarrow dt=u'(x).dx$ (quan trọng)
- **Bước 2**. Đổi cận: $\begin{cases} x=b \\ x=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=u(b) \\ t=u(a) \end{cases}$ (nhớ: **đổi biến phải đổi cận**)
- **Bước 3**. Đưa về dạng $I=\int_{u(a)}^{u(b)} f(t).dt$ đơn giản hơn và dễ tính toán.

Một số phương pháp đổi biến số thường gặp

Đổi biến dạng 1. $I=\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}.dx = \underbrace{\int_a^b h(x).dx}_{I_1} + \underbrace{\int_a^b f(g(x)).\frac{g'(x)}{g(x)}.dx}_{I_2}$ với

Đổi biến dạng 2.

Nghĩa là nếu gặp tích phân **chứa căn thức** thì có khoảng 80% sẽ đặt $t=$ căn trừ một số trường hợp ngoại lệ sau:

1/ $I_1=\int f\left(\sqrt{a^2-x^2}\right).x^{\text{chẵn}}.dx \longrightarrow$ đặt $x=a.\sin t$ hoặc $x=a.\cos t$.

(xuất phát từ công thức $\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos^2 x=1-\sin^2 x\\ \sin^2 x=1-\cos^2 x\end{array}\right.$)

2/ $I_2=\int f\left(\sqrt{x^2+a^2}\right).x^{\text{chẵn}}.dx \longrightarrow$ đặt $x=a.\tan t$ hoặc $x=a.\cot t$.

(mấu chốt xuất phát từ công thức $\tan^2 x+1=\dfrac{1}{\cos^2 x}$)

3/ $I_3=\int f\left(\sqrt{x^2-a^2}\right).x^{\text{chẵn}}.dx \longrightarrow$ đặt $x=\dfrac{a}{\sin t}$ hoặc $x=\dfrac{a}{\cos t}$.

4/ $I_4=\int f\left(\sqrt{\dfrac{a\pm x}{a\mp x}}\right)dx \longrightarrow$ đặt $x=a.\cos 2t$.

5/ $I_5=\int\dfrac{dx}{\left(a+bx^n\right)\sqrt[n]{a+bx^n}} \longrightarrow$ đặt $x=\dfrac{1}{t}$.

6/ $I_6=\int R\left[\sqrt[s_1]{ax+b},.....,\sqrt[s_k]{ax+b}\right].dx \longrightarrow$ đặt $t^n=ax+b$.

(trong đó n là bội số chung nhỏ nhất của $\{s_1;s_2;...;s_k\}$)

7/ $I_7=\int\dfrac{dx}{\sqrt{(ax+b)(cx+d)}} \longrightarrow$ đặt $t=\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}$.

Đổi biến dạng 3. $\boxed{\int f(\ln x).\frac{1}{x}.dx\longrightarrow t=\ln x\Rightarrow dt=\frac{1}{x}.dx}$

Đổi biến dạng 4. $\boxed{\int f(\sin x).\cos x.dx\longrightarrow t=\sin x\Rightarrow dt=\cos x.dx}$

Đổi biến dạng 5. $\boxed{\int f(\cos x).\sin x.dx\longrightarrow t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin x.dx}$

Đổi biến dạng 6. $\boxed{\int f(\tan x).\frac{1}{\cos^2 x}dx\longrightarrow t=\tan x\Rightarrow dt=\frac{dx}{\cos^2 x}}$

Đổi biến dạng 7. $\boxed{\int f(\cot x).\frac{1}{\sin^2 x}dx\longrightarrow t=\cot x\Rightarrow dt=-\frac{dx}{\sin^2 x}}$

Đổi biến dạng 8. $\left[\begin{array}{l}\int f(\sin x+\cos x).(\sin x-\cos x)\,dx \\ \int f(\sin x-\cos x).(\sin x+\cos x)\,dx\end{array}\right. \longrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\sin x+\cos x \\ t=\sin x-\cos x\end{array}\right.$

Đổi biến dạng 9. $\left[\begin{array}{l}\int f(ax^2+b)^n.xdx \longrightarrow t=ax^2+b \Rightarrow dt=2axdx \\ \int f(ax+b)^n.xdx \longrightarrow t=ax+b \Rightarrow dt=adx\end{array}\right.$

Câu 1. **(Đề Tham Khảo -2019)** Cho $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{(x+2)^2}=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

A. 2 **B.** 1 **C.** -2 **D.** -1

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x+2\Rightarrow dt=dx$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=2$; $x=1\Rightarrow t=3$

$$\int\limits_0^1 \frac{xdx}{(x+2)^2}=\int\limits_2^3 \frac{(t-2)dt}{t^2}=\int\limits_2^3\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}\right)dt=\left(\ln|t|+\frac{2}{t}\right)\Big|_2^3=\ln 3+\frac{2}{3}-(\ln 2+1)=-\frac{1}{3}-\ln 2+\ln 3$$

Suy ra $a=-\frac{1}{3};b=-1;c=1$

$3a+b+c=-1-1+1=-1$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 2. Tính $K=\int\limits_2^3 \frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x$ bằng

A. $K=\ln 2$. **B.** $K=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$. **C.** $K=2\ln 2$. **D.** $K=\ln\frac{8}{3}$.

Lời giải

Đặt $t=x^2-1\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x\Rightarrow x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2}$

Với $x=2\Rightarrow t=3$; $x=3\Rightarrow t=8$

Ta có $K=\frac{1}{2}\int\limits_3^8 \frac{\mathrm{d}t}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|\Big|_3^8=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$.

Câu 3. **(Chuyên Long An - 2018)** Cho tích phân $I=\int\limits_0^1 \frac{x^7}{(1+x^2)^5}\mathrm{d}x$, giả sử đặt $t=1+x^2$. Tìm mệnh đề đúng.

A. $I=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5}\mathrm{d}t$. **B.** $I=\int\limits_1^3 \frac{(t-1)^3}{t^5}\mathrm{d}t$.

C. $I=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^4}\mathrm{d}t$. **D.** $I=\frac{3}{2}\int\limits_1^4 \frac{(t-1)^3}{t^4}\mathrm{d}t$.

Lời giải

Ta có: $t=1+x^2\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$.

$x=1\Rightarrow t=2$.

$\Rightarrow I=\int\limits_0^1 \frac{x^7}{\left(1+x^2\right)^5}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \frac{x.x^6}{\left(1+x^2\right)^5}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5}\mathrm{d}t$.

Câu 4. **(KTNL Gia Bình Năm 2019)** Có bao nhiêu số thực a để $\int\limits_0^1 \frac{x}{a+x^2}dx=1$.

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3

Lời giải

Chọn B

Điều kiện tích phân tồn tại là $a+x^2\neq 0,\forall x\in[0;1]\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a<-1\\a>0\end{array}\right.$

Đặt $t=a+x^2\Rightarrow dt=2\mathrm{x}\mathrm{d}x$. Khi đó

$$\int\limits_0^1 \frac{x}{a+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_a^{1+a}\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+a}{a}\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1+a=e^2a\\1+a=-e^2a\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\frac{1}{e^2-1}\\a=\frac{-1}{e^2+1}\end{array}\right.$$

So sánh điều kiện ta được $a=\frac{1}{e^2-1}$.

Câu 5. **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(1)=0$ và $f'(x)=2019.2020.x(x-1)^{2018},\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{2021}$. **B.** $\frac{1}{1011}$. **C.** $-\frac{2}{2021}$. **D.** $-\frac{1}{1011}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn C

Cần nhớ: $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$ và $\int(ax+b)^\alpha\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq-1)$.

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int 2019.2020.x(x-1)^{2018}\,\mathrm{d}x=2019.2020\int x(x-1)^{2018}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x-1\Rightarrow\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$ và $x=t+1$.

Suy ra $f(x)=2019.2020\int(t+1)t^{2018}\,\mathrm{d}t=2019.2020\int\left(t^{2019}+t^{2018}\right)\mathrm{d}t$

$=2019.2020\left(\frac{t^{2020}}{2020}+\frac{t^{2019}}{2019}\right)+C=2019t^{2020}+2020t^{2019}+C$.

Từ đó $f(x)=2019(x-1)^{2020}+2020(x-1)^{2019}+C$.

Mà $f(1)=0\Leftrightarrow 2019(1-1)^{2020}+2020(1-1)^{2019}+C=0\Leftrightarrow C=0.$

Suy ra $f(x)=2019(x-1)^{2020}+2020(x-1)^{2019}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left[2019(x-1)^{2020}+2020(x-1)^{2019}\right]\mathrm{d}x=\left[2019.\frac{(x-1)^{2021}}{2021}+2020.\frac{(x-1)^{2020}}{2020}\right]\Bigg|_0^1$

$=-\left(-\frac{2019}{2021}+1\right)=-\frac{2}{2021}$.

Câu 6. **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+2)^2} = a + b\ln 2 + c\ln 3$ với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

A. -2 **B.** -1 **C.** 2 **D.** 1

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = x+2 \Rightarrow dt = dx$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=2$; $x=1 \Rightarrow t=3$

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(x+2)^2} = \int_2^3 \frac{(t-2)dt}{t^2} = \int_2^3 \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2}\right)dt = \left(\ln|t| + \frac{2}{t}\right)\Big|_2^3 = \ln 3 + \frac{2}{3} - (\ln 2 + 1) = -\frac{1}{3} - \ln 2 + \ln 3$$

Suy ra $a = -\frac{1}{3}; b = -1; c = 1$

$3a+b+c = -1-1+1 = -1$.

Câu 7. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho $\int 2x(3x-2)^6 \,\mathrm{d}x = A(3x-2)^8 + B(3x-2)^7 + C$ với $A,B,C \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $12A+7B$.

A. $\frac{23}{252}$ **B.** $\frac{241}{252}$ **C.** $\frac{52}{9}$ **D.** $\frac{7}{9}$

Lời giải.

Đặt $t = 3x-2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 3\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{3}$.

Khi đó.

$$\int 2x(3x-2)^6 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \frac{t+2}{3} t^6 \mathrm{d}t = \frac{2}{9}\int (t^7 + 2t^6)\mathrm{d}t = \frac{2}{9}\left(\frac{t^8}{8} + \frac{2t^7}{7}\right) + C.$$

$$= \frac{1}{36}(3x-2)^8 + \frac{4}{63}(3x-2)^7 + C.$$

Từ đó ta có $A = \frac{1}{36}$, $B = \frac{4}{63}$. Suy ra $12A + 7B = \frac{7}{9}$.

Câu 8. **(Chuyên Hà Tĩnh - 2018)** Biết $\int_0^1 \frac{2x^2+3x+3}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x = a - \ln b$ với a,b là các số nguyên dương. Tính $P = a^2 + b^2$.

A. 13. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 10.

Lời giải

Ta có $I = \int_0^1 \frac{2x^2+3x+3}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x$

Đặt $t = x+1 \Rightarrow \begin{cases} dt = dx \\ x = t-1 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x = 0 \leftrightarrow t = 1 \\ x = 1 \leftrightarrow t = 2 \end{cases}$

Khi đó

$$I = \int_1^2 \frac{2(t-1)^2 + 3(t-1) + 3}{t^2}\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{2t^2 - t + 2}{t^2}\mathrm{d}t = \int_1^2 \left(2 - \frac{1}{t} + \frac{2}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \left(2t - \ln t - \frac{2}{t}\right)\Big|_1^2 = 3 - \ln 2.$$

Suy ra $P = 3^2 + 2^2 = 13$.

Câu 9. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019)** Cho $\int_1^2 e^{3x-1}\,\mathrm{d}x = m\left(e^p - e^q\right)$ với m, p, $q \in \mathbb{Q}$ và là các phân số tối giản. Giá trị $m+p+q$ bằng

A. 10. **B.** 6. **C.** $\frac{22}{3}$. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_1^2 e^{3x-1}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 e^{3x-1}\mathrm{d}\left(3x-1\right) = \frac{1}{3}\cdot e^{3x-1}\ \Big|_1^2 = \frac{1}{3}\left(e^5 - e^2\right)$. Suy ra $m=\frac{1}{3}$, $p=5$ và $q=2$.

Vậy $m+p+q = \frac{1}{3}+5+2 = \frac{22}{3}$.

Câu 10. Biết rằng $\int_0^1 xe^{x^2+2}\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\left(e^b - e^c\right)$ với $a,b,c \in \mathbb{Z}$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Ta có: $\int_0^1 xe^{x^2+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2+2}\mathrm{d}\left(x^2+2\right) = \frac{1}{2}e^{x^2+2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^3 - e^2\right)$.

Nên $a=1$, $b=3$, $c=2$.

Vậy $a+b+c=6$.

Câu 11. **(KTNL GV Lý Thái Tổ 2019)** Biết $\int_1^e \frac{x+1}{x^2+x\ln x}dx = \ln\left(ae+b\right)$ với a,b là các số nguyên dương.

Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 - ab + b^2$.

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

$$\int_1^e \frac{x+1}{x^2+x\ln x}dx = \int_1^e \frac{1+\frac{1}{x}}{x+\ln x}dx = \int_1^e \frac{d\left(x+\ln x\right)}{x+\ln x} = \ln\left(x+\ln x\right)\Big|_1^e = \ln\left(e+1\right)$$

Vậy $a=1$, $b=1$ nên $T = a^2 - ab + b^2 = 1$.

Câu 12. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Biết $\int_1^2 \left(x+1\right)^2 e^{x-\frac{1}{x}}dx = me^{\frac{p}{q}} - n$, trong đó m,n,p,q là các số nguyên dương và $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản. Tính $T = m+n+p+q$.

A. $T=11$. **B.** $T=10$. **C.** $T=7$. **D.** $T=8$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $I = \int_1^2 \left(x+1\right)^2 e^{x-\frac{1}{x}}dx = \int_1^2 \left(x^2+2x+1\right)e^{x-\frac{1}{x}}dx = \int_1^2 \left(x^2+1\right)e^{x-\frac{1}{x}}dx + \int_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}}dx$

Xét

$$I_1=\int_1^2\left(x^2+1\right)e^{x-\frac{1}{x}}dx=\int_1^2 x^2.e^{x-\frac{1}{x}}.\frac{x^2+1}{x^2}dx=\int_1^2 x^2.e^{x-\frac{1}{x}}d\left(x-\frac{1}{x}\right)=\int_1^2 x^2d\left(e^{x-\frac{1}{x}}\right)$$

$$=x^2e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2-\int_1^2 e^{x-\frac{1}{x}}d\left(x^2\right)=x^2e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2-\int_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}}dx$$

$$\Rightarrow I_1+\int_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}}dx=x^2e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2 \quad\Rightarrow I=x^2e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2=4e^{\frac{3}{2}}-1$$

Do $\int_1^2\left(x+1\right)^2e^{x-\frac{1}{x}}dx=me^{\frac{p}{q}}-n$, trong đó $m,n,p,q\in\mathbb{Z}^+$ và $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản $\Rightarrow\begin{cases}m=4\\n=1\\p=3\\q=2\end{cases}$

Khi đó, $T=m+n+p+q=4+1+3+2=10$.

Câu 13. Số điểm cực trị của hàm số $f\left(x\right)=\int_{2x}^{x^2}\frac{2tdt}{1+t^2}$ là

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

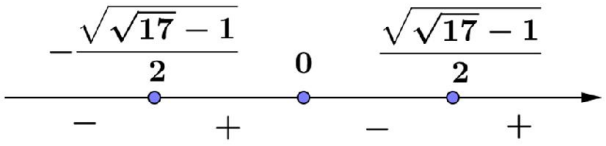
Lời giải

Chọn D

Ta có $f\left(x\right)=\int_{2x}^{x^2}\frac{2tdt}{1+t^2}=\int_{2x}^{x^2}\frac{d\left(1+t^2\right)}{1+t^2}=\ln\left(1+t^2\right)\Big|_{2x}^{x^2}=\ln\left(1+x^4\right)-\ln\left(1+4x^2\right)$.

$$f'\left(x\right)=\frac{4x^3}{1+x^4}-\frac{8x^2}{1+4x^2};\ f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\frac{4x^3}{1+x^4}-\frac{8x}{1+4x^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\frac{\sqrt{\sqrt{17}-1}}{2}\end{array}\right.$$

Trục xét dấu:



Từ đó ta thấy hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 14. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn $f\left(0\right)=f\left(1\right)=5$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f'\left(x\right)e^{f\left(x\right)}\mathrm{d}x$.

A. $I=10$ **B.** $I=-5$ **C.** $I=0$ **D.** $I=5$

Lời giải

Chọn C

$$I=\int_0^1 f'\left(x\right)e^{f\left(x\right)}\mathrm{d}x=\int_0^1 e^{f\left(x\right)}\mathrm{d}\left(f\left(x\right)\right)=e^{f\left(x\right)}\Big|_0^1=e^{f\left(1\right)}-e^{f\left(0\right)}=e^5-e^5=0.$$

Câu 15. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có $f\left(3\right)=3$ và $f'\left(x\right)=\frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}$, $\forall x>0$.

Khi đó $\int_3^8 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** $\frac{197}{6}$. **C.** $\frac{29}{2}$. **D.** $\frac{181}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Xét $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow x+1=t^2\Rightarrow x=t^2-1\Rightarrow \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

Khi đó, $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{t^2-1}{t^2-t}\cdot 2t\mathrm{d}t=\int\frac{(t-1).(t+1)}{t.(t-1)}\cdot 2t\mathrm{d}t=\int(2t+2)\mathrm{d}t$

$=t^2+2t+C=(x+1)+2\sqrt{x+1}+C$.

Mà $f(3)=3\Leftrightarrow(3+1)+2\sqrt{3+1}+C=3\Leftrightarrow C=-5$.

$\Rightarrow f(x)=(x+1)+2\sqrt{x+1}-5=x+2\sqrt{x+1}-4$.

$\Rightarrow\int_3^8 f(x)\mathrm{d}x=\int_3^8\left(x+2\sqrt{x+1}-4\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}\sqrt{(x+1)^3}-4x\right)\Big|_3^8=36-\frac{19}{6}=\frac{197}{6}$.

Câu 16. **(Mã 102 2018)** Cho $\int_5^{21}\frac{dx}{x\sqrt{x+4}}=a\ln 3+b\ln 5+c\ln 7$, với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a-b=-2c$ **B.** $a+b=-2c$ **C.** $a+b=c$ **D.** $a-b=-c$

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{x+4}\Rightarrow 2tdt=dx$.

Với $x=5\Rightarrow t=3$; $x=21\Rightarrow t=5$

Ta có $\int_5^{21}\frac{dx}{x\sqrt{x+4}}=2\int_3^5\frac{dt}{t^2-4}=\frac{1}{2}\left(\ln|t-2|-\ln|t+2|\right)\Big|_3^5=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 5-\frac{1}{2}\ln 7$.

Câu 17. **(Mã 101 2018)** Cho $\int_{16}^{55}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+9}}=a\ln 2+b\ln 5+c\ln 11$, với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=3c$ **B.** $a-b=-3c$ **C.** $a-b=-c$ **D.** $a+b=c$

Lời giải

Chọn. A.

Đặt $t=\sqrt{x+9}\Rightarrow t^2=x+9\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận $x=16\Rightarrow t=5$, $x=55\Rightarrow t=8$.

Do đó $\int_{16}^{55}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+9}}=\int_5^8\frac{2t\mathrm{d}t}{t\left(t^2-9\right)}=2\int_5^8\frac{\mathrm{d}t}{t^2-9}=\frac{1}{3}\int_5^8\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\Big|_5^8$

$=\frac{1}{3}\ln\frac{5}{11}-\frac{1}{3}\ln\frac{1}{4}=\frac{2}{3}\ln 2+\frac{1}{3}\ln 5-\frac{1}{3}\ln 11$.

Vậy $a=\frac{2}{3};b=\frac{1}{3};c=-\frac{1}{3}\Rightarrow a-b=-c$.

Câu 18. **(Đề Tham Khảo 2017)** Tính tích phân $I=\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$ bằng cách đặt $u=x^2-1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=\int_0^3 \sqrt{u}du$ **B.** $I=\frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}du$ **C.** $I=2\int_0^3 \sqrt{u}du$ **D.** $I=\int_1^2 \sqrt{u}du$

Lời giải

Chọn A

$I=\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$

đặt $u=x^2-1\Rightarrow du=2xdx$. Đổi cận $x=1\Rightarrow u=0; x=2\Rightarrow u=3$

Nên $I=\int_0^3 \sqrt{u}du$

Câu 19. **(Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Giả sử tích phân $I=\int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}}dx=a+b\ln 3+c\ln 5$. Lúc đó

A. $a+b+c=\frac{5}{3}$. **B.** $a+b+c=\frac{4}{3}$. **C.** $a+b+c=\frac{7}{3}$. **D.** $a+b+c=\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{3x+1}$. Ta có $t^2=3x+1\Rightarrow dx=\frac{2}{3}tdt$.

Đổi cận

x	1	5
t	2	4

Ta có $I=\int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}}dx=\int_2^4 \frac{1}{1+t}.\frac{2}{3}tdt$

$=\frac{2}{3}\int_2^4 \frac{t}{t+1}dt$

$=\frac{2}{3}\int_2^4\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=\frac{2}{3}\left(t-\ln|1+t|\right)\Big|_2^4$

$=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\ln 3-\frac{2}{3}\ln 5$.

Do đó $a=\frac{4}{3};b=\frac{2}{3};c=-\frac{2}{3}$.

Vậy $a+b+c=\frac{4}{3}$.

Câu 20. **(Liên trường Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(2)=0$ và $f'(x)=\frac{x+7}{\sqrt{2x-3}},\forall x\in\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. Biết rằng $\int_4^7 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=\frac{a}{b}$ $(a,b\in\mathbb{Z},b>0,\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó $a+b$ bằng

A. 250. **B.** 251. **C.** 133. **D.** 221.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=\int f'(x).\mathrm{d}x=\int\frac{x+7}{\sqrt{2x-3}}.\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{1}{2}(2x-3)+\frac{17}{2}}{\sqrt{2x-3}}.\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{2}\sqrt{2x-3}+\frac{17}{2\sqrt{2x-3}}\right).\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\frac{\sqrt{(2x-3)^3}}{\frac{3}{2}}+\frac{17}{2}.\sqrt{2x-3}+C=\frac{1}{6}\sqrt{(2x-3)^3}+\frac{17}{2}.\sqrt{2x-3}+C.$

Mà $f(2)=0\Leftrightarrow=\frac{1}{6}\sqrt{(2.2-3)^3}+\frac{17}{2}.\sqrt{2.2-3}+C=0\Leftrightarrow\frac{1}{6}+\frac{17}{2}+C=0\Leftrightarrow C=-\frac{26}{3}.$

Suy ra $f(x)=\frac{1}{6}\sqrt{(2x-3)^3}+\frac{17}{2}.\sqrt{2x-3}-\frac{26}{3}$

Do đó $\int_4^7 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\int_4^7\left[\frac{1}{6}\sqrt{(x-3)^3}+\frac{17}{2}.\sqrt{x-3}-\frac{26}{3}\right]\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{6}\frac{\sqrt{(x-3)^5}}{\frac{5}{2}}+\frac{17}{2}.\frac{\sqrt{(x-3)^3}}{\frac{3}{2}}-\frac{26}{3}x\right]\Bigg|_4^7$

$=\left[\frac{1}{15}\sqrt{(x-3)^5}+\frac{17}{3}.\sqrt{(x-3)^3}-\frac{26}{3}x\right]\Bigg|_4^7$

$=\left[\frac{1}{15}\sqrt{(7-3)^5}+\frac{17}{3}.\sqrt{(7-3)^3}-\frac{26}{3}.7\right]-\left[\frac{1}{15}\sqrt{(4-3)^5}+\frac{17}{3}.\sqrt{(4-3)^3}-\frac{26}{3}.4\right]$

$=\left[\frac{1}{15}\sqrt{(7-3)^5}+\frac{17}{3}.\sqrt{(7-3)^3}-\frac{26}{3}.7\right]-\left[\frac{1}{15}\sqrt{(4-3)^5}+\frac{17}{3}.\sqrt{(4-3)^3}-\frac{26}{3}.4\right]$

$=\frac{236}{15}.$

Suy ra $a=236, b=15$. Vậy $a+b=251$.

Câu 21. **(Nam Định - 2018)** Biết tích phân $\int_0^{\ln 6}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\sqrt{\mathrm{e}^x+3}}\mathrm{d}x=a+b\ln 2+c\ln 3$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=-1$. **B.** $T=0$. **C.** $T=2$. **D.** $T=1$.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{\mathrm{e}^x+3}\Rightarrow t^2=\mathrm{e}^x+3\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Đổi cận $\begin{cases}x=\ln 6\\x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=3\\t=2\end{cases}.$

Suy ra $\int_0^{\ln 6}\frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+3}}dx=\int_2^3\frac{2tdt}{1+t}=\int_2^3\left(2-\frac{2}{1+t}\right)dt=\left(2t-2\ln|t+1|\right)\Big|_2^3=(6-2\ln 4)-(4-2\ln 3)$

$=2-4\ln 2+2\ln 3\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=-4\\c=2\end{cases}.$

Vậy $T=0$.

Câu 22. **(Chuyên Vinh - 2018)** Tích phân $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$ bằng

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{3x+1}\Rightarrow t^2=3x+1\Rightarrow 2tdt=3dx\Rightarrow\frac{2t}{3}dt=dx$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=2$

Khi đó $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{3x+1}}=\frac{2}{3}\int_0^1\frac{1}{t}.tdt=\frac{2}{3}\int_0^1dt=\frac{2}{3}t\Big|_0^1=\frac{2}{3}$.

Cách khác: Sử dụng công thức $\int\frac{dx}{\sqrt{ax+b}}=\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}+C$ thì $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{3x+1}}=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$.

Câu 23. **(Đề Tham Khảo 2018)** Biết $\int_1^2\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với a,b,c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$

A. $P=18$ **B.** $P=46$ **C.** $P=24$ **D.** $P=12$

Lời giải

Chọn B

Cách 1

$\int_1^2\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx=\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\int_1^2\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2}dx$

Đặt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\Rightarrow dt=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx\Leftrightarrow 2dt=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}}dx$

Khi đó $I=\int_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\frac{2}{t^2}dt=\left(\frac{-2}{t}\right)\Big|_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=-2\sqrt{3}+4\sqrt{2}-2=\sqrt{32}-\sqrt{12}-2$

$\Rightarrow P=a+b+c=32+12+2=46.$

Cách 2

$\int_1^2\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx=\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\int_1^2\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}dx$

$=\int_1^2\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}}dx=\int_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx=\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2=2\sqrt{2}-2-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}=\sqrt{32}-\sqrt{12}-2$

Câu 24. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Biết $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx = a+b\sqrt{2}$ với a,b là các số hữu tỷ. Tính $S=a+b$.

A. $S=1$. **B.** $S=\frac{1}{2}$. **C.** $S=\frac{3}{4}$. **D.** $S=\frac{2}{3}$.

Lời giải

Đặt $\sqrt{1+\ln x}=t \Rightarrow \ln x = t^2-1 \Rightarrow \frac{dx}{x}=2tdt$

Đổi cận $\begin{cases} x=1 \to t=1 \\ x=e \to t=\sqrt{2} \end{cases}$

Vậy $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx = \int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{\left(t^2-1\right)2tdt}{t} = 2\int\limits_1^{\sqrt{2}} \left(t^2-1\right)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{2}$

Suy ra $a=\frac{4}{3}; b=-\frac{2}{3} \Rightarrow S=a+b=\frac{2}{3}$

Câu 25. **(Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Cho tích phân $I=\int\limits_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x$ và $x=4\sin t$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $I=8\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t$. **B.** $I=16\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t\mathrm{d}t$.

C. $I=8\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1-\cos 2t\right)\mathrm{d}t$. **D.** $I=-16\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\mathrm{d}t$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Đặt $x=4\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x=4\cos t\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=2\sqrt{2} \Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$.

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{16-16\sin^2 t}.4\cos t\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 4\left|\cos t\right|.4\cos t\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 4\left|\cos t\right|.4\cos t\mathrm{d}t = 16\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left|\cos t\right|.\cos t\mathrm{d}t$.

Mà vì $t\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ thì $\cos t>0$ nên khi đó $I=16\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\mathrm{d}t = 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t$.

Câu 26. Biết $\int\limits_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x = a+b\ln 3+c\ln 5$ $(a,b,c\in Q)$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{3x+1} \Rightarrow t^2=3x+1 \Rightarrow 2t\mathrm{d}t=3\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{2}{3}t\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x=1 \Rightarrow t=2$; $x=5 \Rightarrow t=4$

$$\int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}}dx = \frac{2}{3}\int_2^4 \frac{t}{1+t}dt = \frac{2}{3}\int_2^4 (1-\frac{1}{1+t})dt = \frac{2}{3}(t-\ln|t+1|)\Big|_2^4 = \frac{4}{3}-\frac{2}{3}\ln 5+\frac{2}{3}\ln 3.$$

$$\Rightarrow a=\frac{4}{3}, b=\frac{2}{3}, c=-\frac{2}{3} \Rightarrow a+b+c=\frac{4}{3}.$$

Câu 27. Cho $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}dx = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{b}{c}+\sqrt{d}\right)$, với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ tối giản. Giá trị của $a+b+c+d$ bằng

A. 12 **B.** 10 **C.** 18 **D.** 15

Lời giải

Chọn B

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{\frac{x}{x^3+1}}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{\frac{x}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x.\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^3}}dx$$

• Đặt $t=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{t} \Rightarrow dx=\frac{-1}{t^2}dt$

Đổi cận: $x=\frac{1}{2} \Rightarrow t=2$; $x=1 \Rightarrow t=1$

Khi đó: $I = \int_2^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^3}}\left(\frac{-1}{t^2}dt\right) = \int_1^2 \frac{t^2dt}{t^3.\sqrt{1+t^3}}$

• Đặt $u=\sqrt{1+t^3} \Rightarrow u^2=1+t^3 \Rightarrow t^3=u^2-1 \Rightarrow 3t^2dt=2u\,du \Rightarrow t^2dt=\frac{2u\,du}{3}$

Đổi cận: $t=1 \Rightarrow u=\sqrt{2}$; $t=2 \Rightarrow u=3$

Ta có: $I = \int_{\sqrt{2}}^{3}\frac{\frac{2u\,du}{3}}{(u^2-1).u} = \frac{2}{3}\int_{\sqrt{2}}^{3}\frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\Big|_{\sqrt{2}}^{3} = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$

Suy ra $a=3$, $b=3$, $c=2$, $d=2$. Vậy $a+b+c+d=10$.

Câu 28. **(Lê Quý Đôn - Quảng Trị - 2018)** Cho biết $\int_0^{\sqrt{7}}\frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}}dx = \frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là một phân số tối giản. Tính $m-7n$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 91.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt[3]{1+x^2} \Rightarrow t^3=1+x^2 \Rightarrow 3t^2dt=2xdx \Rightarrow xdx=\frac{3t^2dt}{2}$.

Đổi cận:

x	0	$\sqrt{7}$
t	1	2

$$\int_0^{\sqrt{7}}\frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}}dx = \int_1^2 \frac{t^3-1}{t}.\frac{3t^2}{2}dt = \frac{3}{2}.\int_1^2 (t^4-t)dt = \frac{3}{2}.\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^2 = \frac{141}{20}.$$

$$\Rightarrow m-7n = 141-7.20 = 1.$$

Câu 29. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Biết rằng $\int_0^1 \frac{dx}{3x+5\sqrt{3x+1}+7} = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. $-\frac{10}{3}$ **B.** $-\frac{5}{3}$ **C.** $\frac{10}{3}$ **D.** $\frac{5}{3}$

Lời giải

Chọn A

$A = \int_0^1 \frac{dx}{3x+5\sqrt{3x+1}+7}$

Đặt $t = \sqrt{3x+1} \Rightarrow t^2 = 3x+1 \Rightarrow 2tdt = 3dx$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = 2$

$$A = \int_1^2 \frac{\frac{2}{3}tdt}{t^2+5t+6} = \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{t}{(t+2)(t+3)}dt = \frac{2}{3}\int_1^2 \left(\frac{-2}{t+2}+\frac{3}{t+3}\right)dt = \frac{2}{3}\left(-2\ln|t+2|+3\ln|t+3|\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{2}{3}(-2\ln 4+3\ln 5+2\ln 3-3\ln 4) = \frac{2}{3}(-10\ln 2+2\ln 3+3\ln 5) = -\frac{20}{3}\ln 2+\frac{4}{3}\ln 3+2\ln 5$$

Vậy: $a+b+c = -\frac{20}{3}+\frac{4}{3}+2 = -\frac{10}{3}$.

Câu 30. Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx = a+b\sqrt{2}$ với a,b là các số hữu tỷ. Tính $S = a+b$.

A. $S = 1$. **B.** $S = \frac{1}{2}$. **C.** $S = \frac{3}{4}$. **D.** $S = \frac{2}{3}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn D

Đặt $\sqrt{1+\ln x} = t \Rightarrow \ln x = t^2-1 \Rightarrow \frac{dx}{x} = 2tdt$

Đổi cận $\begin{cases} x = 1 \to t = 1 \\ x = e \to t = \sqrt{2} \end{cases}$

Vậy $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(t^2-1)2tdt}{t} = 2\int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{4}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{2}$

Suy ra $a = \frac{4}{3}; b = -\frac{2}{3} \Rightarrow S = a+b = \frac{2}{3}$

Câu 31. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Cho $\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}dx = \frac{a}{3}+b\ln 2+c\ln 3$ với a,b,c là các số nguyên. Giá trị $a+b+c$ bằng:

A. 9 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 7

Lời giải

Chọn C

$\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}dx =$

$t = 4+2\sqrt{x+1} \Rightarrow (t-4)^2 = 4(x+1)$

$\Rightarrow 2(t-4)dt = 4dx$

$x = 0 \Rightarrow t = 6$

$x = 3 \Rightarrow t = 8$

$I = \int_6^8 \frac{t^2-8t+16-4}{8t}.(t-4)dt = \int_6^8 \frac{t^3-12t^2+44t-48}{8t}dt = \int_6^8 \frac{t^2}{8}-\frac{3t}{2}+\frac{11}{2}-\frac{6}{t}dt$

$= (\frac{t^3}{24}-\frac{3t^2}{4}+\frac{11}{2}t-6\ln|t|)\Big|_6^8 = \frac{7}{3}-12\ln 2+6\ln 3$

$\Rightarrow a+b+c=1$

Câu 32. **(THPT Ba Đình 2019)** Cho $I = \int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = \frac{a}{d}+b\ln 2+c\ln d$, với a,b,c,d là các số nguyên và $\frac{a}{d}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a+b+c+d$ bằng

A. 16. **B.** 4. **C.** 28. **D.** -2.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2-1$

$\Rightarrow \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x = 0 \to t = 1$; $x = 3 \to t = 2$

$I = \int_1^2 \frac{t^2-1}{4+2t}.2t\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \left(t^2-2t+3-\frac{6}{t+2}\right)\mathrm{d}t = \left(\frac{t^3}{3}-t^2+3t-6\ln|t+2|\right)\Big|_1^2 = \frac{7}{3}-12\ln 2+6\ln 3.$

Nguyễn Bảo Vương

Suy ra $a = 7, b = -12, c = 6, d = 3$. Do đó $a+b+c+d = 4$.

Câu 33. Tính $I = \int_0^a \frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$.

A. $I = \left(a^2+1\right)\sqrt{a^2+1}-1$. **B.** $I = \frac{1}{3}\left[\left(a^2+1\right)\sqrt{a^2+1}-1\right]$.

C. $I = \frac{1}{3}\left[\left(a^2+1\right)\sqrt{a^2+1}+1\right]$. **D.** $I = \left(a^2+1\right)\sqrt{a^2+1}+1$.

Lời giải

Ta có $I = \int_0^a \frac{x^3+x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{x\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x = \int_0^a x\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x$.

Đặt $u = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow u^2 = x^2+1 \Rightarrow u\mathrm{d}u = x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 1$, $x = a \Rightarrow u = \sqrt{a^2+1}$.

Vậy $I = \int_1^{\sqrt{a^2+1}} u^2\mathrm{d}u = \frac{u^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{a^2+1}} = \frac{1}{3}\left[\left(a^2+1\right)\sqrt{a^2+1}-1\right]$.

Câu 34. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến - 2018)** Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x$ bằng tích phân nào dưới đây?

A. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin^2 y\mathrm{d}y$. **B.** $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos x}\mathrm{d}x$. **C.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 y}{\cos y}\mathrm{d}y$. **D.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2 y\mathrm{d}y$.

Lời giải

Đặt $x=\sin^2 y$ ta có $\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\sin^2 y\right)\Leftrightarrow \mathrm{d}x=2\sin y.\cos y\mathrm{d}y$

Khi $x=0\Rightarrow y=0$ và $x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{\pi}{4}$.

Suy ra $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin y}{\cos y}.2\sin y\cos y\mathrm{d}y=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}2\sin^2 y\mathrm{d}y$.

Câu 35. **(Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018)** Biết $\int\limits_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x^2-1}\mathrm{d}x=\frac{b}{a}\ln 5-c\ln 2$ với a,b,c là các số nguyên và phân số $\frac{a}{b}$ là tối giản. Tính $P=3a+2b+c$.

A. 11. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 13.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow xdx=tdt$

Đổi cận: $x=\sqrt{3}\Rightarrow t=2, x=2\sqrt{2}\Rightarrow t=3$.

Khi đó $\int\limits_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x^2-1}dx=\int\limits_2^3\frac{tdt}{t^2+t-2}=\left(\frac{1}{3}\ln|t-1|+\frac{2}{3}\ln|t+2|\right)\Big|_2^3$

$=\left(\frac{1}{3}\ln 2+\frac{2}{3}\ln 5\right)-\left(\frac{2}{3}\ln 4\right)=\frac{2}{3}\ln 5-\ln 2$.

Vậy $a=3,b=2,c=1\Rightarrow 3a+2b+c=14$.

Câu 36. **(Bình Giang - Hải Dương - 2018)** Cho tích phân $\int\limits_1^4\frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx=a+b\sqrt{6}+c\ln\left(\frac{5\sqrt{6}+12}{5\sqrt{6}-12}\right)+d\ln 2$ với a,b,c,d là các số hữu tỉ. Tính tổng $a+b+c+d$.

A. $-\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{3}{25}$. **C.** $-\frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{3}{20}$.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{25-x^2}\Rightarrow t^2=25-x^2\Rightarrow x\,dx=-t\,dt$

Khi đó:

$I=\int\limits_1^4\frac{\sqrt{25-x^2}}{x}dx=\int\limits_3^{2\sqrt{6}}\frac{t^2}{25-t^2}dt=\int\limits_3^{2\sqrt{6}}\left(-1+\frac{25}{25-t^2}\right)dt=\int\limits_3^{2\sqrt{6}}\left(-1+\frac{5}{2(5-t)}+\frac{5}{2(5+t)}\right)dt$

$=\left(-t+\frac{5}{2}\ln\left|\frac{5+t}{5-t}\right|\right)\Big|_3^{2\sqrt{6}}=3-2\sqrt{6}+\frac{5}{2}\ln\left(\frac{5\sqrt{6}+12}{5\sqrt{6}-12}\right)-5\ln 2.$

Vậy $a=3,\ b=-2,\ c=\frac{5}{2},\ d=-5\Rightarrow a+b+c+d=-\frac{3}{2}$.

Câu 37. **(Sở Hưng Yên - 2018)** Cho tích phân $I=\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$ nếu đổi biến số $x=2\sin t, t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thì ta được.

A. $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}t$. **B.** $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}t$. **C.** $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}t\mathrm{d}t$. **D.** $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Lời giải

$x=2\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t$.

Với $x=0\Rightarrow t=0; x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$.

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos t\mathrm{d}t}{2\sqrt{1-\sin^2 t}}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\cos t}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}t$.

Câu 38. **(THPT Phú Lương - Thái Nguyên - 2018)** Biết $\int\limits_0^1\frac{x^3}{x+\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{a\sqrt{b}+c}{15}$ với a, b, c là các số nguyên và $b\geq 0$. Tính $P=a+b^2-c$.

A. $P=3$. **B.** $P=7$. **C.** $P=-7$. **D.** $P=5$.

Lời giải.

$$I=\int\limits_0^1\frac{x^3}{x+\sqrt{1+x^2}}dx=\int\limits_0^1 x^3\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)dx=\int\limits_0^1 x^3\sqrt{1+x^2}dx-\int\limits_0^1 x^4dx=A-\frac{1}{5}$$

+ Tính A: Đặt $t=\sqrt{1+x^2}\Rightarrow tdt=xdx$

$$A=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(t^2-1\right)t^2dt=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(t^4-t^2\right)dt=\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2+2\sqrt{2}}{15}$$

$$I=\frac{-1+2\sqrt{2}}{15}\Rightarrow a=2;\ b=2;\ c=-1$$

$$P=a+b^2-c=7$$

Câu 39. Cho n là số nguyên dương khác 0, hãy tính tích phân $I=\int\limits_0^1\left(1-x^2\right)^n xdx$ theo n.

A. $I=\frac{1}{2n+2}$. **B.** $I=\frac{1}{2n}$. **C.** $I=\frac{1}{2n-1}$. **D.** $I=\frac{1}{2n+1}$.

Lời giải

Với $n\in\mathbb{N}^*$, khi đó:

Đặt $t=1-x^2\Rightarrow \mathrm{d}t=-2x\mathrm{d}x\Rightarrow x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x=0\to t=1; x=1\to t=0$

Khi đó $I=-\frac{1}{2}\int\limits_1^0 t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{2n+2}$

Cách 2: Ta có $\mathrm{d}\left(1-x^2\right)=-2x\mathrm{d}x \to -\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(1-x^2\right)=x\mathrm{d}x$

$$I=\int_0^1\left(1-x^2\right)^n x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-x^2\right)^n\mathrm{d}\left(1-x^2\right)=-\frac{1}{2}.\frac{\left(1-x^2\right)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1=\frac{1}{2n+2}$$

Câu 40. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Giả sử $I=\int_1^{64}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=a\ln\frac{2}{3}+b$ với a, b là số nguyên.

Khi đó giá trị $a-b$ là

A. -17. **B.** 5. **C.** -5. **D.** 17.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt[6]{x}\Rightarrow x=t^6\Rightarrow \mathrm{d}x=6.t^5\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=1$; $x=64\Rightarrow t=2$.

Suy ra $I=\int_1^2\frac{6t^5}{t^3+t^2}\mathrm{d}t=6\int_1^2\frac{t^3}{t+1}\mathrm{d}t=6\int_1^2\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$

$=6\int_1^2\left(t^2-t+1\right)\mathrm{d}t-6\int_1^2\frac{1}{t+1}\mathrm{d}\left(t+1\right)$

$=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t\right)\Big|_1^2-6\ln\left|t+1\right|\Big|_1^2=6\left(\frac{8}{3}-\frac{5}{6}\right)-6\left(\ln 3-\ln 2\right)=11-6\ln\frac{3}{2}=6\ln\frac{2}{3}+11$.

Từ đó suy ra $\begin{cases}a=6\\b=11\end{cases}\Rightarrow a-b=-5$.

Câu 41. **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có $f\left(\sqrt{2}\right)=-2$ và $f'\left(x\right)=\frac{x}{\sqrt{6-x^2}},\forall x\in\left(-\sqrt{6};\sqrt{6}\right)$. Khi đó $\int_0^{\sqrt{3}}f\left(x\right).\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{3\pi}{4}$. **B.** $\frac{3\pi+6}{4}$. **C.** $\frac{\pi+2}{4}$. **D.** $-\frac{3\pi+6}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\forall x\in\left(-\sqrt{6};\sqrt{6}\right)\Rightarrow f\left(x\right)=\int f'\left(x\right).\mathrm{d}x=\int\frac{x}{\sqrt{6-x^2}}.\mathrm{d}x$

$=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{6-x^2}}.\mathrm{d}\left(6-x^2\right)=-\frac{1}{2}.2\sqrt{6-x^2}+C$.

Mà $f\left(\sqrt{2}\right)=-2\Leftrightarrow-\sqrt{6-2}+C=-2\Leftrightarrow C=0$.

Suy ra $f\left(x\right)=-\sqrt{6-x^2}$.

Do đó $I=\int_0^{\sqrt{3}}f\left(x\right).\mathrm{d}x=-\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{6-x^2}.\mathrm{d}x$.

Đặt $x=\sqrt{6}\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=\sqrt{6}\cos t.\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0; x=\sqrt{3}\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$.

Suy ra $I=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{6-6\sin^2 t}.\sqrt{6}.\cos t.\mathrm{d}t=-6\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t.\mathrm{d}t=-3\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2t+1).\mathrm{d}t=-3\left(\frac{1}{2}\sin 2t+t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=-3\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3\pi+6}{4}$.

Câu 42. **(Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - 2018)** Biết $\int_1^2\frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\mathrm{d}x=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{35}$ với a, b, c là các số hữu tỷ, tính $P=a+2b+c-7$.

A. $-\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{86}{27}$. **C.** -2. **D.** $\frac{67}{27}$.

Lời giải

Ta có

$\int_1^2\frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\mathrm{d}x=\int_1^2 x\left(3x+\sqrt{9x^2-1}\right)\mathrm{d}x=\int_1^2\left(3x^2-x\sqrt{9x^2-1}\right)\mathrm{d}x=\int_1^2 3x^2\mathrm{d}x-\int_1^2 x\sqrt{9x^2-1}\mathrm{d}x$

$=x^3\Big|_1^2+\int_1^2 x\sqrt{9x^2-1}\mathrm{d}x=7+\int_1^2 x\sqrt{9x^2-1}\mathrm{d}x$.

Nguyễn Bảo Vương

Tính $\int_1^2 x\sqrt{9x^2-1}\mathrm{d}x$.

Đặt $\sqrt{9x^2-1}=t\Rightarrow 9x^2-1=t^2\Rightarrow x\mathrm{d}x=\frac{t\mathrm{d}t}{9}$.

Khi $x=1$ thì $t=2\sqrt{2}$; khi $x=2$ thì $t=\sqrt{35}$.

Khi đó $\int_1^2 x\sqrt{9x^2-1}\mathrm{d}x=\int_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{35}} t\frac{t\mathrm{d}t}{9}=\frac{t^3}{27}\Big|_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{35}}=\frac{35}{27}\sqrt{35}-\frac{16}{27}\sqrt{2}$.

Vậy $\int_1^2\frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}}\mathrm{d}x=7-\frac{35}{27}\sqrt{35}+\frac{16}{27}\sqrt{2}\Rightarrow a=7, b=\frac{16}{27}, c=-\frac{35}{27}$.

Vậy $P=a+2b+c-7=7+\frac{32}{27}-\frac{35}{27}-7=-\frac{1}{9}$.

Câu 43. **(THPT Phan Chu Trinh - Đắc Lắc - 2018)** Biết $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$.

A. $P=44$. **B.** $P=42$. **C.** $P=46$. **D.** $P=48$.

Lời giải

Đặt $I=\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{x}}=\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}$.

Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x(x+1)}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}}=2\frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Khi $x=1$ thì $t=\sqrt{2}+1$, khi $x=2$ thì $t=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

$I=\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}=2\int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=-2\frac{1}{t}\Big|_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=-2\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)=4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2$

$=\sqrt{32}-\sqrt{12}-\sqrt{4}\Rightarrow a=32,\ b=12,\ c=4$

Vậy $P=a+b+c=48$

Câu 44. **(SởPhú Thọ - 2018)** Biết $\int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x}{2x+3\sqrt{2x+1}+3}=a+b\ln 2+c\ln\frac{5}{3}\left(a,b,c\in\mathbb{Z}\right)$. Tính $T=2a+b+c$.

A. $T=4$. **B.** $T=2$. **C.** $T=1$. **D.** $T=3$.

Lời giải

$I=\int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x}{2x+3\sqrt{2x+1}+3}=\int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)\left(\sqrt{2x+1}+2\right)}=\int_0^4 \frac{2\left(\sqrt{2x+1}+1\right)-\left(\sqrt{2x+1}+2\right)\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)\left(\sqrt{2x+1}+2\right)}$

$=\int_0^4 \frac{2\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{2x+1}+2\right)}-\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}$.

Đặt $u=\sqrt{2x+1}\Rightarrow u\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$. Với $x=0\Rightarrow u=1$, với $x=4\Rightarrow u=3$.

Suy ra $I=\int_1^3 \frac{2u\mathrm{d}u}{u+2}-\int_1^3 \frac{u\mathrm{d}u}{u+1}=\int_1^3\left(2-\frac{4}{u+2}\right)\mathrm{d}u-\int_1^3\left(1-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u$

$=\left(u-4\ln|u+2|+\ln|u+1|\right)\Big|_1^3=2-4\ln\frac{5}{3}+\ln 2$

$\Rightarrow a=2,\ b=1,\ c=1\Rightarrow T=2.1+1-4=1$.

Câu 45. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\cos x\cos^2 2x,\forall\in R$.

Khi đó $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1042}{225}$. **B.** $\frac{208}{225}$. **C.** $\frac{242}{225}$. **D.** $\frac{149}{225}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\cos x\cos^2 2x\mathrm{d}x=\int\cos x\left(1-2\sin^2 x\right)^2\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow f(x)=\int\left(1-2t^2\right)^2\mathrm{d}t=\int\left(1-4t^2+4t^4\right)\mathrm{d}t=t-\frac{4}{3}t^3+\frac{4}{5}t^5+C=\sin x-\frac{4}{3}\sin^3 x+\frac{4}{5}\sin^5 x+C$.

Mà $f(0)=0\Rightarrow C=0$.

Do đó $f(x)=\sin x-\frac{4}{3}\sin^3 x+\frac{4}{5}\sin^5 x=\sin x\left(1-\frac{4}{3}\sin^2 x+\frac{4}{5}\sin^4 x\right)$.

$= \sin x\left[1-\frac{4}{3}\left(1-\cos^2 x\right)+\frac{4}{5}\left(1-\cos^2 x\right)^2\right]$.

Ta có $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin x\left[1-\frac{4}{3}\left(1-\cos^2 x\right)+\frac{4}{5}\left(1-\cos^2 x\right)^2\right]\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \cos x \Rightarrow \mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1;\ x = \pi \Rightarrow t = -1$.

Khi đó, $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left[1-\frac{4}{3}\left(1-t^2\right)+\frac{4}{5}\left(1-t^2\right)^2\right]\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}\left(\frac{7}{15}-\frac{4}{15}t^2+\frac{4}{5}t^4\right)\mathrm{d}t$

$= \left(\frac{7}{15}t-\frac{4}{45}t^3+\frac{4}{5}t^4\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{242}{225}$.

Câu 46. **(Sở Bình Phước - 2020)** Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x-5\sin x+6}\mathrm{d}x = a\ln\frac{4}{b}$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x-5\sin x+6}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin^2 x-5\sin x+6} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{(\sin x-2)(\sin x-3)}$.

Đặt $t = \sin x \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{d}(\sin x)$.

Đổi cận: Khi $x = 0 \Rightarrow t = 0;\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Nguyễn Bảo Vương

Khi đó

$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t-2)(t-3)} = \int_0^1\left(\frac{-1}{t-2}+\frac{1}{t-3}\right)\mathrm{d}t = \left[\ln|t-3|-\ln|t-2|\right]\Big|_0^1 = \ln\left|\frac{t-3}{t-2}\right|\Big|_0^1 = \ln 2-\ln\frac{3}{2} = \ln\frac{4}{3}$.

Ta có $a = 1$, $b = 3$.

Vậy giá trị của $a+b = 1+3 = 4$.

Câu 47. **(Đề Minh Họa 2017)** Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x.\sin x\mathrm{d}x$.

A. $I = -\frac{1}{4}$ **B.** $I = -\frac{1}{4}\pi^4$ **C.** $I = -\pi^4$ **D.** $I = 0$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x.\sin x dx$. Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \Leftrightarrow -dt = \sin x dx$

Đổi cận: Với $x = 0 \Rightarrow t = 1$; với $x = \pi \Rightarrow t = -1$.

Vậy $I = -\int_1^{-1} t^3 dt = \int_{-1}^{1} t^3 dt = \frac{t^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1^4}{4}-\frac{(-1)^4}{4} = 0$.

Cách khác : Bấm máy tính.

Câu 48. **(THPT Kinh Môn - 2018)** Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x-5\sin x+6}\mathrm{d}x = a\ln\frac{4}{c}+b$, tính tổng $S = a+b+c$

A. $S=1$. **B.** $S=4$. **C.** $S=3$. **D.** $S=0$.

Lời giải

Đặt $t=\sin x \Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$. $x=0\Rightarrow t=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x-5\sin x+6}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{t^2-5t+6}\mathrm{d}t=\int_0^1\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t-2}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{t-3}{t-2}\right|\Big|_0^1=\ln 2-\ln\frac{3}{2}=\ln\frac{4}{3}$$

$\Rightarrow a=1,\mathrm{b}=0,c=3\Rightarrow S=a+b+c=4$.

Câu 49. **(Bình Dương 2018)** Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2+\cos x}.\sin x\mathrm{d}x$. Nếu đặt $t=2+\cos x$ thì kết quả nào sau đây đúng?

A. $I=\int_3^2\sqrt{t}\mathrm{d}t$. **B.** $I=\int_2^3\sqrt{t}\mathrm{d}t$. **C.** $I=2\int_3^2\sqrt{t}\mathrm{d}t$. **D.** $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{t}\mathrm{d}t$.

Lời giải

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2+\cos x}.\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2+\cos x}\mathrm{d}(\cos x)$

$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2+\cos x}\mathrm{d}(\cos x+2)=-\int_3^2\sqrt{t}\mathrm{d}t=\int_2^3\sqrt{t}\mathrm{d}t$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 50. **(Đồng Tháp - 2018)** Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x$ bằng cách đặt $u=\tan x$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}u^2\mathrm{d}u$. **B.** $I=\int_0^2\dfrac{1}{u^2}\mathrm{d}u$. **C.** $I=-\int_0^1u^2\mathrm{d}u$. **D.** $I=\int_0^1u^2\mathrm{d}u$.

Lời giải

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x.\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Đặt $u=\tan x\Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow u=1$

Suy ra: $I=\int_0^1u^2\mathrm{d}u$.

Câu 51. **(THTP Lê Quý Đôn - Hà Nội - 2018)** Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{5}{2}$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=\frac{\pi}{3}+\frac{9}{20}$. **D.** $I=\frac{9}{4}$.

Lời giải

Đặt $t=\cos x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1;\ x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$.

Khi đó: $I=\int\limits_{1}^{\frac{1}{2}}\frac{-1}{t^3}\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{t^3}\mathrm{d}t=\frac{-1}{2t^2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$.

Câu 52. **(THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - 2018)** Cho tích phân $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+2}\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 2$ với $a,b\in\mathbb{Z}$.

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $2a+b=0$. **B.** $a-2b=0$. **C.** $2a-b=0$. **D.** $a+2b=0$.

Lời giải

Đặt $t=\cos x+2\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$

Đổi cận $x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{5}{2},\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=2$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+2}\mathrm{d}x=-\int\limits_{\frac{5}{2}}^{2}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int\limits_{2}^{\frac{5}{2}}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln t\Big|_{2}^{\frac{5}{2}}=\ln\frac{5}{2}-\ln 2=\ln 5-2\ln 2$$

Vậy ta được $a=1;b=-2$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 53. **(THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019)** Có bao nhiêu số $a\in(0;20\pi)$ sao cho $\int\limits_{0}^{a}\sin^5 x\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{2}{7}$.

A. 10. **B.** 9. **C.** 20. **D.** 19.

Lời giải

$$I=\int\limits_{0}^{a}\sin^5 x\sin 2x\mathrm{d}x=2\int\limits_{0}^{a}\sin^6 x.\cos x\mathrm{d}x$$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$ và $\begin{cases}\sin a=b;\ \ b\in[-1;1]\\ \sin 0=0\end{cases}$.

$$I=2\int\limits_{0}^{b}t^6\mathrm{d}t=2.\frac{t^7}{7}\Big|_{0}^{b}=\frac{2b^7}{7}.$$

Theo giả thiết: $\int\limits_{0}^{a}\sin^5 x\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{2}{7}\Rightarrow\frac{2b^7}{7}=\frac{2}{7}\Leftrightarrow b=1\Leftrightarrow\sin a=1\Leftrightarrow a=\frac{\pi}{2}+k2\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

$$a\in(0;20\pi)\Leftrightarrow 0<\frac{\pi}{2}+k2\pi<20\pi\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}<k2\pi<\frac{39\pi}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{4}<k<\frac{39}{4}.$$

Mà $k\in\mathbb{Z}$ nên suy ra $k\in\{0;1;2;...;9\}$.

Câu 54. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Biết $F(x)$ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\sin 2x+\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$ và $F(0)=2$.

Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\sqrt{2}-8}{3}$ **B.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\sqrt{2}+8}{3}$ **C.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4\sqrt{2}-8}{3}$ **D.** $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4\sqrt{2}+8}{3}$

Lời giải

Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x+\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx=F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)$$

Đặt $t=\sqrt{1+\sin x}\Rightarrow 2tdt=\cos xdx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x+\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x+1}{\sqrt{1+\sin x}}\cos xdx$$

$$=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{2(t^2-1)+1}{t}2tdt=2\int_1^{\sqrt{2}}\left(2t^2-1\right)dt=2\left(\frac{2t^3}{3}-t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2+2\sqrt{2}}{3}$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2+2\sqrt{2}}{3}+F(0)=\frac{2+2\sqrt{2}}{3}+2=\frac{8+2\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 55. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{1+\sin x}=\frac{a\sqrt{3}+b}{c}$, với $a,b\in\mathbb{Z},c\in\mathbb{Z}^+$ và a,b,c là các số nguyên tố cùng nhau. Giá trị của tổng $a+b+c$ bằng

A. 5. **B.** 12. **C.** 7. **D.** −1.

Lời giải

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{1+\sin x}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}dx.$$

Đặt $t=1+\tan\frac{x}{2}\Rightarrow 2dt=\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1;\ x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=3-\sqrt{3}$.

$$I=\int_1^{3-\sqrt{3}}\frac{2dt}{t^2}=-\frac{2}{t}\Big|_1^{3-\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}+3}{3}.$$

Suy ra $a=-1,b=3,c=3$ nên $a+b+c=5$.

Câu 56. Cho tích phân số $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+2}dx=a\ln 5+b\ln 2$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2a+b=0$. **B.** $a-2b=0$. **C.** $2a-b=0$.. **D.** $a+2b=0$..

Lời giải

+ Xét: $I=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+2}\mathrm{d}x$

+ Đặt $u=\cos x+2\Rightarrow \mathrm{d}u=-\sin x\mathrm{d}x\Rightarrow \sin x\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$

+ Đổi cận: $\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow u=\frac{5}{2}\\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=2\end{cases}$

$\Rightarrow I=\int\limits_{\frac{5}{2}}^{2}\frac{-1}{u}\mathrm{d}u=-\ln|u|\Big|_{\frac{5}{2}}^{2}=-\left(\ln 2-\ln\frac{5}{2}\right)=\ln 5-2\ln 2\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-2\end{cases}.$

Câu 57. **(THPT Nghen - Hà Tĩnh - 2018)** Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{(\cos x)^2-5\cos x+6}\mathrm{d}x=a\ln\frac{4}{c}+b$, với a, b là các số hữu tỉ, $c>0$. Tính tổng $S=a+b+c$.

A. $S=3$. **B.** $S=0$. **C.** $S=1$. **D.** $S=4$.

Lời giải

Đặt $t=\cos x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0$

Ta có:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{(\cos x)^2-5\cos x+6}\mathrm{d}x=-\int\limits_1^0\frac{1}{t^2-5t+6}\mathrm{d}t=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t-2}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{t-3}{t-2}\right|\Big|_0^1=\ln 2-\ln\frac{3}{2}=\ln\frac{4}{3}$$

$$=a\ln\frac{4}{c}+b.$$

Do đó: $\begin{cases}a=1\\ c=3\\ b=0\end{cases}$.

Vậy $S=a+b+c=4$.

Câu 58. **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(0)=1$ và $f'(x)=\tan^3 x+\tan x,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx=\frac{a+\pi}{b};a,b\in\mathbb{Q}$, khi đó $b-a$ bằng

A. 4. **B.** 12. **C.** 0. **D.** –4.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết $f'(x)=\tan^3 x+\tan x,\forall x\in\mathbb{R}$ ta có

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(\tan^3 x+\tan x)dx=\int\tan x(1+\tan^2 x)dx=\int\tan x.d(\tan x)=\frac{1}{2}\tan^2 x+C,$$

Ta có $f(0)=1$ suy ra $C=1$ vậy $f(x)=\frac{1}{2}\tan^2 x+1$.

Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x + 2)dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^2 x + 1 + 1)dx = \frac{1}{2}(\tan x + x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}(1 + \frac{\pi}{4}) = \frac{4+\pi}{8}.$$

Từ đây ta được $\begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow b - a = 4$.

Vậy $b - a = 4$.

Câu 59. **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(0) = 0$ và $f'(x) = \sin^8 x - \cos^8 x - 4\sin^6 x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^{\pi} 16 f(x)\,\mathrm{d}x$.

A. $I = 10\pi^2$. **B.** $I = 160\pi$. **C.** $I = 16\pi^2$. **D.** $I = -10\pi^2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$\sin^8 x - \cos^8 x - 4\sin^6 x = (\sin^4 x - \cos^4 x)(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4\sin^6 x$

$= (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x) - 4\sin^6 x = \cos^4 x \sin^2 x - \sin^4 x \cos^2 x - \cos^6 x - 3\sin^6 x$

$= \cos^4 x \sin^2 x - \sin^4 x \cos^2 x - 2\sin^6 x - (\cos^6 x + \sin^6 x)$

$= \sin^2 x(\cos^4 x - \sin^4 x) - \sin^4 x(\cos^2 x + \sin^2 x) - (1 - 3\cos^2 x.\sin^2 x) = 4\cos^2 x.\sin^2 x - 2\sin^4 x - 1$

$= -\frac{3}{4}\cos 4x + \cos 2x - \frac{5}{4}$.

Suy ra:

$f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int (\sin^8 x - \cos^8 x - 4\sin^6 x)\,\mathrm{d}x = \int \left(-\frac{3}{4}\cos 4x + \cos 2x - \frac{5}{4}\right)\mathrm{d}x$

$= -\frac{3}{16}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{5}{4}x + C$.

Vì $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

Vậy $f(x) = -\frac{3}{16}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{5}{4}x$.

Suy ra:

$I = \int_0^{\pi} 16 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} 16\left(-\frac{3}{16}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{5}{4}x\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} (-3\sin 4x + 8\sin 2x - 20x)\,\mathrm{d}x$

$= \left(\frac{3}{4}\cos 4x - 4\cos 2x - 10x^2\right)\Big|_0^{\pi} = -10\pi^2$.

Câu 60. **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x + 1} = a + b\ln\frac{1+e}{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a^3 + b^3$.

A. $S = -2$. **B.** $S = 0$. **C.** $S = 1$. **D.** $S = 2$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Đặt $t=e^x \Rightarrow \mathrm{d}t=e^x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=e$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}=\int_0^1 \frac{e^x\mathrm{d}x}{e^x\left(e^x+1\right)}=\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}=\int_1^e\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\left(\ln|t|-\ln|t+1|\right)\Big|_1^e=\left(1-\ln\left(1+e\right)\right)-(-\ln 2)$$

$$=1+\ln\frac{2}{1+e}=1-\ln\frac{1+e}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases}\Rightarrow S=a^3+b^3=0.$$

Cách 2. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}=\int_0^1 \frac{\left(e^x+1\right)-e^x}{e^x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{d}x-\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\left(e^x+1\right)}{e^x+1}=x\Big|_0^1-\ln\left|e^x+1\right|\Big|_0^1=1-\ln\frac{1+e}{2}$.

Suy ra $a=1$ và $b=-1$. Vậy $S=a^3+b^3=0$.

Câu 61. **(Cần Thơ - 2018)** Cho tích phân $I=\int_1^{\mathrm{e}} \frac{3\ln x+1}{x}\mathrm{d}x$. Nếu đặt $t=\ln x$ thì

A. $I=\int_0^1 \frac{3t+1}{\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$. **B.** $I=\int_1^{\mathrm{e}} \frac{3t+1}{t}\mathrm{d}t$. **C.** $I=\int_1^{\mathrm{e}}(3t+1)\mathrm{d}t$. **D.** $I=\int_0^1(3t+1)\mathrm{d}t$.

Lời giải

Đặt $t=\ln x \Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=\mathrm{e}\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=0$.

Khi đó $I=\int_1^{\mathrm{e}} \frac{3\ln x+1}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1(3t+1)\mathrm{d}t$.

Câu 62. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho $I=\int_1^e \frac{\ln x}{x\left(\ln x+2\right)^2}dx=a\ln 3+b\ln 2+\frac{c}{3}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đâu đúng.

A. $a^2+b^2+c^2=1$. **B.** $a^2+b^2+c^2=11$. **C.** $a^2+b^2+c^2=9$. **D.** $a^2+b^2+c^2=3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $I=\int_1^e \frac{\ln x}{x\left(\ln x+2\right)^2}dx$, đặt $\ln x+2=t\Rightarrow\frac{dx}{x}=dt$

$$I=\int_2^3 \frac{t-2}{t^2}dt=\int_2^3 \frac{1}{t}dt-2\int_2^3 \frac{1}{t^2}dt=\ln t\Big|_2^3+\frac{2}{t}\Big|_2^3=\ln 3-\ln 2+\frac{2}{3}-\frac{2}{2}=\ln 3-\ln 2-\frac{1}{3}$$

Suy ra $a=1;b=-1;c=-1$, vậy $a^2+b^2+c^2=3$. **Chọn D.**

Câu 63. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Biết $I=\int_0^4 x\ln\left(x^2+9\right)\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 3+c$ trong đó a,b,c là các số thực. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ là:

A. $T=11$. **B.** $T=9$. **C.** $T=10$. **D.** $T=8$.

Lời giải

Đặt $x^2+9=t\Rightarrow 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\Leftrightarrow x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Khi đó $I=\frac{1}{2}.\int_9^{25}\ln t.\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(t.\ln t-t)\Big|_9^{25}=\frac{1}{2}\left[\left(25\ln 25-25\right)-\left(9\ln 9-9\right)\right]=25\ln 5-9\ln 3-8$.

Suy ra $T=a+b+c=25-9-8=8$.

Câu 64. Cho $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{\ln x}{x\left(\ln x+2\right)^2}\mathrm{d}x$ có kết quả dạng $I=\ln a+b$ với $a>0$, $b\in\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2ab=-1$. **B.** $2ab=1$. **C.** $-b+\ln\dfrac{3}{2a}=-\dfrac{1}{3}$. **D.** $-b+\ln\dfrac{3}{2a}=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Đặt $\ln x+2=t\Leftrightarrow\ln x=t-2\Rightarrow\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

Đổi cận: khi $x=1$ thì $t=2$; khi $x=\mathrm{e}$ thì $t=3$.

Khi đó $I=\int\limits_2^3\dfrac{t-2}{t^2}\mathrm{d}t=\int\limits_2^3\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{2}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\left(\ln|t|+\dfrac{2}{t}\right)\Big|_2^3=\ln\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\ b=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$.

Vậy $2ab=-1$.

Câu 65. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Cho $\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{2\ln x+1}{x\left(\ln x+2\right)^2}\mathrm{d}x=\ln\dfrac{a}{b}-\dfrac{c}{d}$ với a, b, c là các số nguyên dương, biết $\dfrac{a}{b};\dfrac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính giá trị $a+b+c+d$?

A. 18. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

Lời giải

Đặt $t=\ln x\Rightarrow\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=0$; $x=\mathrm{e}\Rightarrow t=1$. Khi đó:

$I=\int\limits_1^{\mathrm{e}}\dfrac{2\ln x+1}{x\left(\ln x+2\right)^2}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\dfrac{2t+1}{\left(t+2\right)^2}\mathrm{d}t=\int\limits_0^1\left(\dfrac{-3}{\left(t+2\right)^2}+\dfrac{2}{t+2}\right)\mathrm{d}t=\left(\dfrac{3}{t+2}+2\ln|t+2|\right)\Big|_0^1=\ln\dfrac{9}{4}-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $a+b+c+d=9+4+1+2=16$.

Câu 66. **(Kim Liên - Hà Nội – 2018)** Biết $\int\limits_0^1\dfrac{\pi x^3+2^x+\mathrm{e}x^3.2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{\mathrm{e}\ln n}\ln\left(p+\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+\pi}\right)$ với m, n, p là các số nguyên dương. Tính tổng $S=m+n+p$.

A. $S=6$. **B.** $S=5$. **C.** $S=7$. **D.** $S=8$.

Lời giải

Ta có $\int\limits_0^1\dfrac{\pi x^3+2^x+\mathrm{e}x^3.2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(x^3+\dfrac{2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}+\int\limits_0^1\dfrac{2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}+J$.

Tính $J=\int\limits_0^1\dfrac{2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x$. Đặt $\pi+\mathrm{e}.2^x=t\Rightarrow\mathrm{e}.2^x\ln 2\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\Leftrightarrow 2^x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\mathrm{e}.\ln 2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: Khi $x=0$ thì $t=\pi+\mathrm{e}$; khi $x=1$ thì $t=\pi+2\mathrm{e}$.

$J=\int\limits_0^1\dfrac{2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\mathrm{e}\ln 2}\int\limits_{\pi+\mathrm{e}}^{\pi+2\mathrm{e}}\dfrac{1}{t}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{\mathrm{e}\ln 2}\ln|t|\Big|_{\pi+\mathrm{e}}^{\pi+2\mathrm{e}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}\ln 2}\ln\left(1+\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+\pi}\right)$.

Khi đó $\int\limits_0^1\dfrac{\pi x^3+2^x+\mathrm{e}x^3.2^x}{\pi+\mathrm{e}.2^x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{\mathrm{e}\ln 2}\ln\left(1+\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+\pi}\right)\Rightarrow m=4$, $n=2$, $p=1$. Vậy $S=7$.

Câu 67. **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Cho $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\left(3x^3-1\right)\ln x+3x^2-1}{1+x\ln x}\mathrm{d}x = a.\mathrm{e}^3+b+c.\ln\left(\mathrm{e}+1\right)$ với a,b,c là các số nguyên và $\ln \mathrm{e}=1$. Tính $P=a^2+b^2+c^2$.

A. $P=9$. **B.** $P=14$. **C.** $P=10$. **D.** $P=3$.

Lời giải

Ta có

$$I=\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\left(3x^3-1\right)\ln x+3x^2-1}{1+x\ln x}\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}} \frac{3x^2\left(1+x\ln x\right)-\left(1+\ln x\right)}{1+x\ln x}\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}} 3x^2\mathrm{d}x-\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\left(1+\ln x\right)}{1+x\ln x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^3-1-A$$

Tính $A=\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\left(1+\ln x\right)}{1+x\ln x}\mathrm{d}x$. Đặt $t=1+x\ln x\Rightarrow \mathrm{d}t=\left(1+\ln x\right)\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=1\Rightarrow t=1 \\ x=\mathrm{e}\Rightarrow t=\mathrm{e}+1 \end{cases}$. Khi đó $A=\int_1^{1+\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln t\big|_1^{1+\mathrm{e}}=\ln(\mathrm{e}+1)$.

Vậy $I=\mathrm{e}^3-1-\ln(\mathrm{e}+1) \longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow P=a^2+b^2+c^2=3$.
$c=-1$

Câu 68. Biết $I=\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+3\mathrm{e}^{-x}+4}=\frac{1}{c}\left(\ln a-\ln b+\ln c\right)$ với a, b, c là các số nguyên dương.

Tính $P=2a-b+c$.

A. $P=-3$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=4$. **D.** $P=3$

Lời giải

Ta có $I=\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+3\mathrm{e}^{-x}+4}=\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+4\mathrm{e}^x+3}$.

Đặt: $t=\mathrm{e}^x\Rightarrow \mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$, $x=\ln 2\Rightarrow t=2$.

Khi đó $I=\int_1^2 \frac{1}{t^2+4t+3}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+3}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\frac{t+1}{t+3}\Big|_1^2=\frac{1}{2}\left(\ln 3-\ln 5+\ln 2\right)$.

Suy ra $a=3$, $b=5$, $c=2$. Vậy $P=2a-b+c=3$.

Câu 69. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Biết $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+x\ln x}\mathrm{d}x=\ln\left(\ln a+b\right)$ với a, b là các số nguyên dương.

Tính $P=a^2+b^2+ab$.

A. 10. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 6.

Lời giải

Ta có $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+x\ln x}\mathrm{d}x=\int_1^2 \frac{x+1}{x\left(x+\ln x\right)}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x+\ln x\Rightarrow \mathrm{d}t=\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{x+1}{x}\mathrm{d}x$.

Khi $x=1\Rightarrow t=1$; $x=2\Rightarrow t=2+\ln 2$.

Khi đó $I=\int_1^{2+\ln 2} \frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln|t|\Big|_1^{2+\ln 2}=\ln\left(\ln 2+2\right)$. Suy ra $\begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$.

Vậy $P=8$.

Câu 70. **(Chuyên Thái Bình 2018)** Cho $\int\limits_0^1 \frac{\left(x^2+x\right)\mathrm{e}^x}{x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x = a.\mathrm{e}+b\ln\left(\mathrm{e}+c\right)$ với a, b, $c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a+2b-c$.

A. $P=1$. **B.** $P=-1$. **C.** $P=0$. **D.** $P=-2$.

Lời giải

Ta có: $I=\int\limits_0^1 \frac{\left(x^2+x\right)\mathrm{e}^x}{x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \frac{(x+1)\mathrm{e}^x x\mathrm{e}^x}{x\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x\mathrm{e}^x+1 \Rightarrow \mathrm{d}t=(1+x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=\mathrm{e}+1$.

Khi đó: $I=\int\limits_1^{\mathrm{e}+1}\frac{t-1}{t}\mathrm{d}t=\int\limits_1^{\mathrm{e}+1}\left(1-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\left(t-\ln|t|\right)\Big|_1^{\mathrm{e}+1}=\mathrm{e}-\ln(\mathrm{e}+1)$.

Suy ra: $a=1$, $b=-1$, $c=1$.

Vậy: $P=a+2b-c=-2$.

Câu 71. **(Chuyên KHTN - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ biết $f(0)=\frac{1}{2}$ và $f'(x)=xe^{x^2}$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Khi đó $\int\limits_0^1 xf(x)dx$ bằng

A. $\frac{e+1}{4}$. **B.** $\frac{e-1}{4}$. **C.** $\frac{e-1}{2}$. **D.** $\frac{e+1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=\int f'(x).\mathrm{d}x=\int x.e^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int e^{x^2}.\mathrm{d}\left(x^2\right)=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$.

Mà $f(0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}+C=\frac{1}{2}\Leftrightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}$.

$\Rightarrow\int\limits_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{4}\int\limits_0^1 e^{x^2}d\left(x^2\right)=\frac{1}{4}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{e-1}{4}$.

Câu 72. **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Biết rằng $\int\limits_1^e \frac{2\ln x+1}{x(\ln x+1)^2}\mathrm{d}x=a\ln 2-\frac{b}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=3$. **B.** $S=7$. **C.** $S=10$. **D.** $S=5$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\ln x+1=t$. Ta có: $\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=1$; $x=e\Rightarrow t=2$.

Ta có: $\int\limits_1^e \frac{2\ln x+1}{x(\ln x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\frac{2(t-1)+1}{t^2}\mathrm{d}t=\int\limits_1^2\left(\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\left(2\ln|t|+\frac{1}{t}\right)\Big|_1^2=2\ln 2-\frac{1}{2}$.

Suy ra: $a=2;\ b=1;\ c=2$. Khi đó: $S=a+b+c=5$.

Dạng 4. Tích phân từng phần

Nếu u,v có đạo hàm liên tục trên $(a;b)$ thì $\boxed{I=\int_a^b u.dv=u.v\Big|_a^b-\int_a^b v.du}$.

Chọn $\begin{cases} u=..... & \xrightarrow{\text{Vi phân}} du=.....dx \\ dv=.....dx & \xrightarrow{\text{Nguyên hàm}} v=..... \end{cases}$

Nhận dạng: **tích hai hàm khác loại nhân nhau** (ví dụ: mũ nhân lượng giác,…)

Thứ tự ưu tiên **chọn u** là: "**log – đa – lượng – mũ**" và **dv là phần còn lại**.

Nghĩa là nếu có ln hay $\log_a x$ thì chọn $u=\ln$ hay $u=\log_a x=\frac{1}{\ln a}.\ln x$ và $dv=$ còn lại. Nếu không có ln; log thì chọn $u=$ đa thức và $dv=$ còn lại,…

CHÚ Ý:. $\int_a^b$(hàm mũ). (lượng giác). dx ⟶ tích phân từng phần luân hồi.

Nghĩa là sau khi đặt u, dv để tính tích phân từng phần và tiếp tục tính $\int$ udv sẽ xuất hiện lại tích phân ban đầu. Giả sử tích phân được tính ban đầu là I và nếu lập lại, ta sẽ không giải tiếp mà xem đây là phương trình bậc nhất ẩn là I $\overset{\text{giải}}{\Longrightarrow}$ I.

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Xét $\int_0^2 xe^{x^2}dx$, nếu đặt $u=x^2$ thì $\int_0^2 xe^{x^2}dx$ bằng

A. $2\int_0^2 e^u du$. **B.** $2\int_0^4 e^u du$. **C.** $\frac{1}{2}\int_0^2 e^u du$. **D.** $\frac{1}{2}\int_0^4 e^u du$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $u=x^2\Rightarrow du=2xdx\Leftrightarrow xdx=\frac{du}{2}$.

Khi $x=0\Rightarrow u=0$, khi $x=2\Rightarrow u=4$.

Do đó $\int_0^2 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^4 e^u du$.

Câu 2. **(Đề Minh Họa 2017)** Tính tích phân $I=\int_1^e x\ln xdx$:

A. $I=\frac{e^2-1}{4}$ **B.** $I=\frac{1}{2}$ **C.** $I=\frac{e^2-2}{2}$ **D.** $I=\frac{e^2+1}{4}$

Lời giải

Chọn D

$I=\int_1^e x\ln xdx$. Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=xdx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=\frac{1}{x}dx \\ v=\frac{x^2}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow I=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_0^e-\int_0^e\frac{1}{x}.\frac{x^2}{2}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_0^e xdx=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_0^e=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$.

Câu 3. **(Mã 103 2018)** Cho $\int_1^{\mathrm{e}}(1+x\ln x)\,\mathrm{d}x = a\mathrm{e}^2+b\mathrm{e}+c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=c$ **B.** $a+b=-c$ **C.** $a-b=c$ **D.** $a-b=-c$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_1^{\mathrm{e}}(1+x\ln x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}}1.\mathrm{d}x+\int_1^{\mathrm{e}}x\ln x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}-1+\int_1^{\mathrm{e}}x\ln x\,\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x \Rightarrow \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=x.\mathrm{d}x \Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2}\end{cases}$

Khi đó $\int_1^{\mathrm{e}}x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}}x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{1}{4}x^2\Big|_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{\mathrm{e}^2}{4}+\frac{1}{4} = \frac{\mathrm{e}^2}{4}+\frac{1}{4}$.

Suy ra $\int_1^{\mathrm{e}}(1+x\ln x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}-1+\frac{\mathrm{e}^2}{4}+\frac{1}{4} = \frac{\mathrm{e}^2}{4}+\mathrm{e}-\frac{3}{4}$ nên $a=\frac{1}{4}$, $b=1$, $c=-\frac{3}{4}$.

Vậy $a-b=c$.

Câu 4. **(Mã 104 2018)** Cho $\int_1^{e}(2+x\ln x)\mathrm{d}x = ae^2+be+c$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+b=c$ **B.** $a-b=c$ **C.** $a-b=-c$ **D.** $a+b=-c$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_1^{e}(2+x\ln x)\mathrm{d}x = \int_1^{e}2\mathrm{d}x+\int_1^{e}x\ln x\mathrm{d}x = 2x\Big|_1^{e}+I = 2e-2+I$ với $I=\int_1^{e}x\ln x\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{x^2}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow I = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^{e}-\int_1^{e}\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^{e}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^{e} = \frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}\left(e^2-1\right) = \frac{e^2+1}{4}$

$\Rightarrow \int_1^{e}(2+x\ln x)\mathrm{d}x = 2e-2+\frac{e^2+1}{4} = \frac{1}{4}e^2+2e-\frac{7}{4}$

$\Rightarrow \begin{cases}a=\dfrac{1}{4}\\ b=2\\ c=-\dfrac{7}{4}\end{cases} \Rightarrow a-b=c$

Câu 5. **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Biết $\int_0^1 x\ln\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x = a\ln 2-\frac{b}{c}$ (với $a,b,c\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính $P=13a+10b+84c$.

A. 193. **B.** 191. **C.** 190. **D.** 189.

Lời giải

Chọn B

Đặt: $\begin{cases} u = \ln\left(x^2+1\right) \\ \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Khi đó: $\int\limits_0^1 x\ln\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x = \left(\dfrac{x^2+1}{2}\right)\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x\mathrm{d}x = \ln 2 - \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow a=1, b=1, c=2$. Vậy $P = 13a+10b+84c = 191$.

Câu 6. **(Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Cho a là số thực dương. Tính $I = \int\limits_0^a \sin^{2016} x.\cos\left(2018x\right)dx$ bằng:

A. $I = \dfrac{\cos^{2017} a.\sin 2017a}{2016}$.

B. $I = \dfrac{\sin^{2017} a.\cos 2017a}{2017}$.

C. $I = \dfrac{\sin^{2017} a.\cos 2017a}{2016}$.

D. $I = \dfrac{\cos^{2017} a.\cos 2017a}{2017}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I = \int\limits_0^a \sin^{2016} x.\cos\left(2017x+x\right)dx = \int\limits_0^a \sin^{2016} x.\left[\cos\left(2017x\right).\cos x - \sin\left(2017x\right).\sin x\right]dx$

$= \int\limits_0^a \sin^{2016} x\cos\left(2017x\right).\cos x dx - \int\limits_0^a \sin^{2017} x\sin\left(2017x\right)dx$.

Xét $J = \int\limits_0^a \sin^{2016} x\cos\left(2017x\right).\cos x dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \cos\left(2017x\right) \\ du = \sin^{2016} x.\cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2017\sin\left(2017x\right)dx \\ v = \dfrac{1}{2017}\sin^{2017} x \end{cases}$.

Khi đó $J = \cos\left(2017x\right).\dfrac{1}{2017}\sin^{2017} x\Big|_0^a + \int\limits_0^a \sin^{2017} x.\sin\left(2017x\right)dx$.

Suy ra $I = \cos\left(2017x\right).\dfrac{1}{2017}\sin^{2017} x\Big|_0^a + \int\limits_0^a \sin^{2017} x.\sin\left(2017x\right)dx - \int\limits_0^a \sin^{2017} x.\sin\left(2017x\right)dx$.

$= \cos\left(2017x\right).\dfrac{1}{2017}\sin^{2017} x\Big|_0^a = \dfrac{1}{2017}\sin^{2017} a.\cos\left(2017a\right)$.

Câu 7. **(Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2020)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có $f\left(0\right) = -1$ và $f'\left(x\right) = x\left(6+12x+e^{-x}\right), \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx$ bằng

A. $3e$.

B. $3e^{-1}$.

C. $4-3e^{-1}$.

D. $-3e^{-1}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=x\left(6+12x+e^{-x}\right),\forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là một nguyên hàm của $f'(x)$.

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x=\int x\left(6+12x+e^{-x}\right)\mathrm{d}x=\int\left(6x+12x^2\right)\mathrm{d}x+\int xe^{-x}\mathrm{d}x$$

Mà $\int\left(6x+12x^2\right)\mathrm{d}x=3x^2+4x^3+C$

Xét $\int xe^{-x}\mathrm{d}x$: Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=e^{-x}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=-e^{-x}\end{cases}$

$$\int xe^{-x}\mathrm{d}x=-xe^{-x}+\int e^{-x}\mathrm{d}x=-xe^{-x}-e^{-x}+C=-(x+1)e^{-x}+C$$

Suy ra $f(x)=3x^2+4x^3-(x+1)e^{-x}+C,\forall x\in\mathbb{R}$.

Mà $f(0)=-1\Rightarrow C=0$ nên $f(x)=3x^2+4x^3-(x+1)e^{-x},\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(3x^2+4x^3-(x+1)e^{-x}\right)\mathrm{d}x=\left(x^3+x^4\right)\Big|_0^1-\int_0^1(x+1)e^{-x}\mathrm{d}x=2-\int_0^1(x+1)e^{-x}\mathrm{d}x$$

Xét $\int_0^1(x+1)e^{-x}\mathrm{d}x$: Đặt $\begin{cases}u=x+1\\ \mathrm{d}v=e^{-x}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=-e^{-x}\end{cases}$

$$\int_0^1(x+1)e^{-x}\mathrm{d}x=-(x+1)e^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x=-2e^{-1}+1-e^{-x}\Big|_0^1=-2e^{-1}+1-e^{-1}+1=2-3e^{-1}$$

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=3e^{-1}$.

Câu 8. **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Biết $I=\int_0^4 x\ln\left(x^2+9\right)\mathrm{d}x=a\ln 5+b\ln 3+c$ trong đó a, b, c là các số thực. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b+c$.

A. $T=9$. **B.** $T=11$. **C.** $T=8$. **D.** $T=10$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(x^2+9\right)\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}$, ta có $\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{2x}{x^2+9}\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{x^2+9}{2}\end{cases}$.

Do đó

$$I=\frac{x^2+9}{2}\ln\left(x^2+9\right)\Big|_0^4-\int_0^4\frac{x^2+9}{2}.\frac{2x}{x^2+9}\mathrm{d}x=\frac{x^2+9}{2}\ln\left(x^2+9\right)\Big|_0^4-\int_0^4 x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2+9}{2}\ln\left(x^2+9\right)\Big|_0^4-\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4=\frac{25}{2}\ln 25-\frac{9}{2}\ln 9-8=25\ln 5-9\ln 3-8=a\ln 5+b\ln 3+c.$$

Suy ra $\begin{cases} a=25 \\ b=-9 \\ c=-8 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=8.$

Cách 2

Ta có $I=\int_0^4 x\ln\left(x^2+9\right)\mathrm{d}x$

Đặt $t=x^2+9 \Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x \Rightarrow x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=9$, $x=4 \Rightarrow t=25$

Suy ra $I=\int_0^4 x\ln\left(x^2+9\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_9^{25}\ln t\mathrm{d}t$

Đặt $\begin{cases} u=\ln t \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}t \end{cases}$, ta có $\begin{cases} \mathrm{d}u=\frac{1}{t}\mathrm{d}t \\ v=t \end{cases}$.

$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_9^{25} t\ln t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(t.\ln t\Big|_9^{25}-\int_9^{25} t.\frac{1}{t}\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{2}\left(t.\ln t\Big|_9^{25}-\int_9^{25}\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{2}\left(t.\ln t\Big|_9^{25}-t\Big|_9^{25}\right)$

$=\frac{25}{2}\ln 25-\frac{9}{2}\ln 9-8=25\ln 5-9\ln 3-8=a\ln 5+b\ln 3+c.$

Suy ra $\begin{cases} a=25 \\ b=-9 \\ c=-8 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=8.$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 9. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020)** Xét hàm số $f(x)=e^x+\int_0^1 xf(x)dx$. Giá trị của $f(\ln(5620))$ bằng

A. 5622. **B.** 5620. **C.** 5618. **D.** 5621.

Lời giải

Chọn A

Từ $f(x)=e^x+\int_0^1 xf(x)dx$. (1)

Lấy đạo hàm hai vế, suyra $f'(x)=e^x$.

Khi đó, $f(x)=\int f'(x)dx=\int e^x dx=e^x+C$. (2)

Từ (1) và (2) suyra: $C=\int_0^1 xf(x)dx \Leftrightarrow C=\int_0^1 x(e^x+\mathrm{C})dx \Leftrightarrow C=\int_0^1 xe^x dx+\int_0^1 \mathrm{C}x\,dx$

$\Leftrightarrow C=1+\frac{Cx^2}{2}\Big|_0^1 \Leftrightarrow C=1+\frac{C}{2} \Leftrightarrow C=2.$

Vậy $f(x)=e^x+2 \Rightarrow f(\ln(5620))=e^{\ln(5620)}+2=5620+2=5622.$

Câu 10. Tích phân $\int_0^1 (x-2)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{-5-3\mathrm{e}^2}{4}$. **B.** $\frac{5-3\mathrm{e}^2}{4}$. **C.** $\frac{5-3\mathrm{e}^2}{2}$. **D.** $\frac{5+3\mathrm{e}^2}{4}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = x-2 \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} \end{cases}$.

Suy ra

$$\int_0^1 (x-2)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = (x-2)\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^2 + 1 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^2 + 1 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{5}{4} = \frac{5-3\mathrm{e}^2}{4}.$$

Câu 11. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Biết rằng tích phân $\int_0^1 (2x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = a + b.\mathrm{e}$, tích $a.b$ bằng

A. -15. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 20.

Lời giải

Chọn C.

Điều kiện: a, $b \in \mathbb{Z}$.

Đặt $\begin{cases} u = 2x+1 \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x \\ v = \mathrm{e}^x \end{cases}$.

$$\Rightarrow \int_0^1 (2x+1)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = (2x+1)\mathrm{e}^x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = (2x-1)\mathrm{e}^x\Big|_0^1 = 1 + \mathrm{e} = a + b.\mathrm{e}.$$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$. Vậy tích $a.b = 1$.

Câu 12. **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Cho tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx = \frac{b}{c} + a\ln 2$ với a là số thực, b và c là các số dương, đồng thời $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = 2a + 3b + c$.

A. $P = 6$. **B.** $P = 5$. **C.** $P = -6$. **D.** $P = 4$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{-1}{x} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{-\ln x}{x}\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \left(\frac{-\ln x}{x} + \frac{-1}{x}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}$

$\Rightarrow b = 1, c = 2, a = \frac{-1}{2} \Rightarrow P = 2a + 3b + c = 4$.

Câu 13. **(THPT Lê Xoay Vĩnh Phúc 2019)** Cho tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x-1)\sin 2x\mathrm{d}x$. Tìm đẳng thức đúng?

A. $I=-(x-1)\cos 2x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\mathrm{d}x$.

B. $I=-\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\mathrm{d}x$.

C. $I=-\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\mathrm{d}x$.

D. $I=-(x-1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\mathrm{d}x$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}u=(x-1)\\ \mathrm{d}v=\sin 2x\mathrm{d}x\end{cases}$, ta có $\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{cases}$. Do đó:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x-1)\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}(x-1)\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{2}\int_o^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\mathrm{d}x.$$

Câu 14. **(Chuyên KHTN 2019)** Biết rằng tồn tại duy nhất các bộ số nguyên a,b,c sao cho $\int_2^3(4x+2)\ln x\mathrm{d}x=a+b\ln 2+c\ln 3$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 19. **B.** -19. **C.** 5. **D.** -5.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}\ln x=u\Rightarrow\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}u\\ (4x+2)\mathrm{d}x=\mathrm{d}v\Rightarrow 2x^2+2x=v\end{cases}$

Khi đó

$$\int_2^3(4x+2)\ln x\mathrm{d}x=\ln x.(2x^2+2x)\Big|_2^3-2\int_2^3(x+1)\mathrm{d}x=24\ln 3-12\ln 2-2.\frac{7}{2}=-7-12\ln 2+24\ln 3.$$

Vậy $a=-7;\ b=-12;\ c=24\Rightarrow a+b+c=5$.

Câu 15. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho $\int_1^2\frac{\ln(1+x)}{x^2}dx=a\ln 2+b\ln 3$, với a,b là các số hữu tỉ. Tính $P=a+4b$.

A. $P=0$ **B.** $P=1$ **C.** $P=3$ **D.** $P=-3$

Lời giải

$$\int_1^2\frac{\ln(1+x)}{x^2}\mathrm{d}x=\int_1^2\ln(1+x)\left(\frac{-1}{x}\right)'\mathrm{d}x=\ln(1+x).\frac{-1}{x}\Big|_1^2-\int_1^2\frac{1}{x+1}.\frac{-1}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{-1}{2}\ln 3+\ln 2+\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\int_1^2\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\frac{-1}{2}\ln 3+\ln 2-\ln(1+x)\Big|_1^2+\ln x\Big|_1^2$$

$$=\frac{-1}{2}\ln 3+\ln 2-\ln 3+2\ln 2=\frac{-3}{2}\ln 3+3\ln 2\Rightarrow a=3,b=\frac{-3}{2}.$$

Vậy $a+4b=-3$.

Câu 16. Tính tích phân $I=\int_1^{2^{1000}}\frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$, ta được

A. $I=-\dfrac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}}+1001\ln\dfrac{2}{1+2^{1000}}$. **B.** $I=-\dfrac{1000\ln 2}{1+2^{1000}}+\ln\dfrac{2^{1000}}{1+2^{1000}}$.

C. $I=\dfrac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}}-1001\ln\dfrac{2}{1+2^{1000}}$. **D.** $I=\dfrac{1000\ln 2}{1+2^{1000}}-\ln\dfrac{2^{1000}}{1+2^{1000}}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=\dfrac{dx}{(x+1)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x}\\ v=-\dfrac{1}{x+1}\end{cases}$

$\Rightarrow I=-\dfrac{\ln x}{x+1}\Big|_1^{2^{1000}}+\int\limits_1^{2^{1000}}\dfrac{1}{x+1}.\dfrac{dx}{x}=-\dfrac{\ln 2^{1000}}{2^{1000}+1}+\int\limits_1^{21000}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=-\dfrac{1000\ln 2}{2^{1000}+1}+\ln\left|\dfrac{x}{x=1}\right|\Big|_1^{2^{1000}}$

$=-\dfrac{1000\ln 2}{2^{1000}+1}+\ln\dfrac{2^{1000}}{2^{1000}+1}-\ln\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1000\ln 2}{2^{1000}+1}+\ln\dfrac{2^{1001}}{2^{1000}+1}=-\dfrac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}}+1001\ln\dfrac{2}{1+2^{1000}}$.

Câu 17. Biết $\int\limits_0^2 2x\ln(x+1)\mathrm{dx}=\mathrm{a.lnb}$, với $a,b\in\mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $6a+7b$.

A. $6a+7b=33$. **B.** $6a+7b=25$. **C.** $6a+7b=42$. **D.** $6a+7b=39$.

Lời giải

Xét $I=\int\limits_0^2 2x\ln(x+1)dx$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\ dv=2xdx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}du=\dfrac{1}{x+1}dx\\ v=x^2-1\end{cases}$.

Nguyễn Bảo Vương

Ta có $I=(x^2-1)\ln(x+1)|_0^2-\int\limits_0^2\dfrac{x^2-1}{x+1}dx=3\ln 3-\int\limits_0^2(x-1)dx=3\ln 3-\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)\Big|_0^2=3\ln 3$.

Vậy $a=3,b=3\Rightarrow 6a+7b=39$.

Câu 18. **(Chuyên Hưng Yên 2019)** Biết rằng $\int\limits_1^a\ln x dx=1+2a,\ (a>1)$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $a\in(18;21)$. **B.** $a\in(1;4)$. **C.** $a\in(11;14)$. **D.** $a\in(6;9)$.

Lời giải

Đặt $u=\ln x\Rightarrow du=\dfrac{1}{x}dx$

$dv=dx\Rightarrow v=x$

Ta có $\int\limits_1^a\ln x dx=a.\ln a-\int\limits_1^a dx=a\ln a-a+1=1+2a$

$\Rightarrow a\ln a=3a\Leftrightarrow\ln a=3\Leftrightarrow a=e^3$.

Vậy $a\in(18;21)$.

Câu 19. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Cho tích phân $\int\limits_0^1(x-2)e^x\mathrm{dx}=a+be$, với $a;b\in\mathbb{Z}$. Tổng $a+b$ bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** 5. **D.** -1.

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = x-2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 (x-2)e^x dx = (x-2)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = -e+2-e^x\Big|_0^1 = 3-2e = a+be$

với $a;b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a=3, b=-2 \Rightarrow a+b=1$

Câu 20. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh -2019)** Tính tích phân $I = \int_1^2 xe^x dx$.

A. $I = e^2$. **B.** $I = -e^2$. **C.** $I = e$. **D.** $I = 3e^2 - 2e$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

$I = \int_1^2 xe^x dx = xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - e^x\Big|_1^2 = 2e^2 - e - \left(e^2 - e\right) = e^2$.

Câu 21. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Biết rằng $\int_2^3 x\ln x\,dx = m\ln 3 + n\ln 2 + p$ trong đó $m, n, p \in \mathbb{Q}$. Tính $m+n+2p$

A. $\frac{5}{4}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 0. **D.** $-\frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$.

$\Rightarrow \int_2^3 x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_2^3 - \frac{1}{2}\int_2^3 x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_2^3 - \frac{x^2}{4}\Big|_2^3 = \frac{9}{2}\ln 3 - 2\ln 2 - \frac{5}{4}$.

Suy ra $m+n+2p=0$.

Câu 22. **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Biết $\int_0^2 2x\ln(1+x)dx = a.\ln b$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $3a+4b$.

A. 42. **B.** 21. **C.** 12. **D.** 32.

Lời giải

Xét $I = \int_0^2 2x\ln(1+x)dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln(1+x) \\ dv = 2xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+x}dx \\ v = x^2-1 \end{cases}$.

Ta có: $I = \left(x^2-1\right)\ln(x+1)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2-1}{x+1}dx = 3\ln 3 - \int_0^2 (x-1)dx = 3\ln 3 - \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_0^2 = 3\ln 3$.

Vậy $a=3$, $b=3 \Rightarrow 3a+4b=21$.

Câu 23. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Cho tích phân $I=\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{b}{c}+a\ln 2$ với a là số thực, b và c là các số nguyên dương, đồng thời $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P=2a+3b+c$.

A. $P=6$ **B.** $P=-6$ **C.** $P=5$ **D.** $P=4$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ \mathrm{d}v=\frac{1}{x^2}.\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\frac{1}{x}.\mathrm{d}x \\ v=-\frac{1}{x} \end{cases}$

Ta có $I=\left(\frac{-1}{x}.\ln x\right)\Big|_1^2+\int_1^2\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{-1}{2}\ln 2-\frac{1}{x}\Big|_1^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\Rightarrow b=1,c=2,a=-\frac{1}{2}$. Khi đó

$P=2\left(\frac{-1}{2}\right)+3.1+2=4$.

Câu 24. Biết $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{a}\pi-\ln b$. Khi đó, giá trị của a^2+b bằng

A. 11. **B.** 7. **C.** 13. **D.** 9.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=\tan x \end{cases}$

$I=x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}.\sqrt{3}-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x\mathrm{d}x}{\cos x}=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x}$

$=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}+\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}+\ln\frac{1}{2}-\ln 1=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-\ln 2\Rightarrow a=3;b=2$. Vậy $a^2+b=11$.

Câu 25. Cho $\int\ln\left(x^2-x\right)dx=F(x),F(2)=2\ln 2-4$. Khi đó $I=\int_2^3\left[\frac{F(x)+2x+\ln(x-1)}{x}\right]dx$ bằng

A. $3\ln 3-3$. **B.** $3\ln 3-2$. **C.** $3\ln 3-1$. **D.** $3\ln 3-4$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=\ln\left(x^2-x\right) \\ v'=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'=\frac{2x-1}{x^2-x} \\ v=x \end{cases}$

Suy ra $F(x)=\int\ln\left(x^2-x\right)dx=x\ln\left(x^2-x\right)-\int\frac{2x-1}{x-1}dx=x\ln\left(x^2-x\right)-2x-\ln|x-1|+C$

$F(2)=2\ln 2-4\Rightarrow C=0$ suy ra $F(x)=x\ln\left(x^2-x\right)-2x-\ln|x-1|$

Khi đó: $I=\int_2^3\left[\frac{F(x)+2x+\ln(x-1)}{x}\right]\mathrm{d}x=\int_2^3\ln\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x=F(3)-F(2)=3\ln 3-2$.

Câu 26. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Biết $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{a}\pi-\ln b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T=a^2+b$.

A. $T=9$. **B.** $T=13$. **C.** $T=7$. **D.** $T=11$.

Lời giải

Xét $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}x.\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x..$

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=\tan x\end{cases}.$

$$I=x.\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\tan x\mathrm{d}x=x.\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}(\cos x)=\left[x\tan x+\ln(\cos x)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\ln 2.$$

Suy ra $\begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases}\Rightarrow T=a^2+b=11.$

Câu 27. **(Thpt Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Cho $\int\limits_1^2\frac{\ln(1+2x)}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}\ln 5+b\ln 3+c\ln 2$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+2(b+c)$ là:

A. 0. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Áp dụng phương pháp tích phân từng phần:

Đặt: $\begin{cases}u=\ln(1+2x)\\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{2}{2x+1}\mathrm{d}x\\ \text{chän } v=-\dfrac{1}{x}-2=\dfrac{-(2x+1)}{x}\end{cases}.$

$$\Rightarrow\int\limits_1^2\frac{\ln(1+2x)}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{-(2x+1)}{x}\cdot\ln(1+2x)\Big|_1^2+\int\limits_1^2\frac{2}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\left(-\frac{5}{2}\ln 5+3\ln 3\right)+2\ln|x|\Big|_1^2$$

$$=\frac{-5}{2}\ln 5+3\ln 3+2\ln 2.$$

$\Rightarrow a=-5$, $b=3$, $c=2$.

Vậy $a+2(b+c)=5$.

Câu 28. Cho $\int\limits_1^2\frac{\ln(1+x)}{x^2}\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $P=ab$.

A. $P=\frac{3}{2}$. **B.** $P=0$. **C.** $P=\frac{-9}{2}$. **D.** $P=-3$.

Lời giải

Ta có $I=\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2}\mathrm{d}x = a\ln 2 + b\ln 3$.

Đặt $\begin{cases} u=\ln(1+x) \\ \mathrm{d}v=\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x \\ v=-\frac{1}{x}. \end{cases}$

Khi đó $I=-\frac{1}{x}\ln(1+x)\Big|_1^2+\int_1^2\frac{1}{x(1+x)}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln 3+\ln 2+\int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x$

$=-\frac{1}{2}\ln 3+\ln 2+\left(\ln\frac{x}{x+1}\right)\Big|_1^2=-\frac{1}{2}\ln 3+\ln 2+2\ln 2-\ln 3=3\ln 2-\frac{3}{2}\ln 3.$

Suy ra $a=3$, $b=-\frac{3}{2}$. Vậy $P=ab=\frac{-9}{2}$.

Câu 29. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Cho tích phân $\int_0^1 (x-2)e^x\mathrm{d}x = a+be$, với $a;b\in\mathbb{Z}$. Tổng $a+b$ bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** 5. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $\begin{cases} u=x-2 \\ dv=e^x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\mathrm{d}x \\ v=e^x \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 (x-2)e^x\mathrm{d}x=(x-2)e^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x\mathrm{d}x=-e+2-e^x\Big|_0^1=3-2e=a+be$

với $a;b\in\mathbb{Z}\Rightarrow a=3,b=-2\Rightarrow a+b=1$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 30. **(Sở Phú Thọ 2019)** Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\sin x+2\cos x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = a\ln 3+b\ln 2+c\pi$ với a, b, c là các số hữu tỉ.

Giá trị của abc bằng

A. $\frac{15}{8}$ **B.** $\frac{5}{8}$ **C.** $\frac{5}{4}$ **D.** $\frac{17}{8}$

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u=\ln(\sin x+2\cos x)\Rightarrow \mathrm{d}u=\frac{\cos x-2\sin x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\Rightarrow v=\tan x+2 \end{cases}$

$\Rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\sin x+2\cos x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=(\tan x+2)\ln(\sin x+2\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-2\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x$

$=3\ln\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)-2\ln 2-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-2\tan x)\mathrm{d}x=3\ln 3-\frac{7}{2}\ln 2-\left(x+2\ln|\cos x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=3\ln 3-\frac{7}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}-2\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=3\ln 3-\frac{5}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}\Rightarrow a=3,\ b=-\frac{5}{2},\ c=-\frac{1}{4}.$

Vậy $abc=18$.

Câu 31. **(Chuyên Thái Bình 2019)** Biết $\int\limits_{\frac{1}{12}}^{12}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx=\frac{a}{b}e^{\frac{c}{d}}$ trong đó a,b,c,d là các số nguyên dương và các phân số $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ là tối giản. Tính $bc-ad$.

A. 12. **B.** 1. **C.** 24. **D.** 64.

Lời giải

Ta có: $I=\int\limits_{\frac{1}{12}}^{12}\left[x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+1\right]e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int\limits_{\frac{1}{12}}^{12}x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int\limits_{\frac{1}{12}}^{12}e^{x+\frac{1}{x}}dx$.

Đặt: $\begin{cases}u=x\\dv=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx\end{cases}\to\begin{cases}du=dx\\v=e^{x+\frac{1}{x}}\end{cases}$.

Khi đó: $I=\int\limits_{\frac{1}{12}}^{12}x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int\limits_{\frac{1}{12}}^{12}e^{x+\frac{1}{x}}dx=x.e^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{12}}^{12}-\int\limits_{\frac{1}{12}}^{12}e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int\limits_{\frac{1}{12}}^{12}e^{x+\frac{1}{x}}dx$

$=12e^{12+\frac{1}{12}}-\frac{1}{12}e^{12+\frac{1}{12}}=\frac{143}{12}e^{\frac{145}{12}}$.

Vậy: $a=143;b=12;c=145;d=12$. Dó đó: $bc-ad=12.145-143.12=24$.

Câu 32. **(THPT Yên Khánh A 2018)** Cho $\int\limits_0^2\frac{x+\ln(x+1)}{(x+2)^2}\mathrm{d}x=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\ln 3$ (với $a,c\in\mathbb{Z};b,d\in\mathbb{N}^*;\frac{a}{b}\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản). Tính $P=(a+b)(c+d)$.

A. 7. **B.** -7. **C.** 3. **D.** -3.

Lời giải

Ta có $\int\limits_0^2\frac{x+\ln(x+1)}{(x+2)^2}\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\frac{1}{x+2}\mathrm{d}x-\int\limits_0^2\frac{2}{(x+2)^2}\mathrm{d}x+\int\limits_0^2\frac{\ln(x+1)}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$.

$\int\limits_0^2\frac{1}{x+2}\mathrm{d}x-\int\limits_0^2\frac{2}{(x+2)^2}\mathrm{d}x=\left(\ln|x+2|+\frac{2}{x+2}\right)\Big|_0^2=\ln 2-\frac{1}{2}$.

$I=\int\limits_0^2\frac{\ln(x+1)}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\\mathrm{d}v=\frac{1}{(x+2)^2}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x\\v=\frac{-1}{(x+2)}+1=\frac{x+1}{x+2}\end{cases}$

Suy ra $I=\left(\frac{(x+1)\ln(x+1)}{(x+2)}\right)\Big|_0^2-\int\limits_0^2\frac{1}{(x+2)}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\ln 3-\ln 2$.

Do đó $\int\limits_0^2\frac{x+\ln(x+1)}{(x+2)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\ln 3\Rightarrow P=(-1+2)(3+4)=7$.

Câu 33. **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có $f(1)=\frac{1}{2}$ và $f'(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$ với $x>-1$. Biết $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=a\ln\frac{b}{c}-d$ với a,b,c,d là các số nguyên dương, $b\le 3$ và $\frac{b}{c}$ tối giản. Khi đó $a+b+c+d$ bằng

A. 8. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\frac{x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x=\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}+C$, với C là hằng số tùy ý.

Do $f(1)=\frac{1}{2}\Rightarrow\ln 2+\frac{1}{2}+C=\frac{1}{2}\Leftrightarrow C=-\ln 2$.

Khi đó, ta có

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2\left[\ln(x+1)+\frac{1}{x+1}-\ln 2\right]\mathrm{d}x=\int_1^2\ln(x+1)\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x+1}-\ln 2\int_1^2\mathrm{d}x.$$

Xét $I=\int_1^2\ln(x+1)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=\ln(x+1)\\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x+1}\\ v=x\end{cases}$, khi đó ta có

$$I=x.\ln(x+1)\Big|_1^2-\int_1^2\frac{x\mathrm{d}x}{x+1}=2\ln 3-\ln 2-\int_1^2\frac{x\mathrm{d}x}{x+1}=2\ln 3-\ln 2-\int_1^2\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x+1}=2\ln 3-\ln 2-1+\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x+1}$$

Khi đó,

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2\ln 3-\ln 2-1+2\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x+1}-\ln 2\int_1^2\mathrm{d}x=2\ln 3-\ln 2-1+2\ln 3-2\ln 2-\ln 2=4\ln\frac{3}{2}-1.$$

Suy ra $\begin{cases}a=4\\ b=3\\ c=2\\ d=1\end{cases}\Rightarrow a+b+c+d=10$.

Chuyên đề 26 TÍCH PHÂN - PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

TÀI LIỆU DÀNH CHO HỌC SINH KHÁ – GIỎI – XUẤT SẮC MỨC 8-9-10 ĐIỂM

Dạng 1. Tích phân Hàm ẩn

Dạng 1.1 Giải bằng phương pháp đổi biến

Thông thường nếu trong bài toán xuất hiện $\int_a^b f\left[u(x)\right]\mathrm{d}x$ thì ta sẽ đặt $u(x)=t$

Câu 1. **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_{-5}^{1} f(x)\mathrm{d}x=9$. Tích phân $\int_0^2\left[f(1-3x)+9\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 15. **B.** 27. **C.** 75. **D.** 21.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_0^2\left[f(1-3x)+9\right]\mathrm{d}x=\int_0^2 f(1-3x)\mathrm{d}x+\int_0^2 9\mathrm{d}x=\int_0^2 f(1-3x)\mathrm{d}x+18$.

Xét $\int_0^2 f(1-3x)\mathrm{d}x$, đặt $t=1-3x\Rightarrow \mathrm{d}t=-3\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{3}$.

Đổi cận khi $x=0\Rightarrow t=1$; $x=2\Rightarrow t=-5$. Suy ra $\int_0^2 f(1-3x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\int_1^{-5} f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_{-5}^{1} f(t)\mathrm{d}t$.

Khi đó $\int_0^2\left[f(1-3x)+9\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_{-5}^{1} f(t)\mathrm{d}t+18=\frac{1}{3}\int_{-5}^{1} f(x)\mathrm{d}x+18=21$.

Câu 2. **(Chuyên Lam Sơn - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x=7,\int_2^{10} f(x)\mathrm{d}x=1$. Tính $P=\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x$.

A. $P=6$. **B.** $P=-6$. **C.** $P=3$. **D.** $P=12$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x-\int_2^{10} f(x)\mathrm{d}x=6$.

Xét $P=\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x$. Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận:

x	0	1
t	0	2

Lúc đó: $P=\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=3$.

Câu 3. **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Cho $I=\int\limits_{1}^{5}f\left(x\right)\mathrm{d}x=26$. Khi đó $J=\int\limits_{0}^{2}x\left[f\left(x^2+1\right)+1\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 15. **B.** 13. **C.** 54. **D.** 52.

Lời giải

Chọn A

+ Ta có: $J=\int\limits_{0}^{2}x\left[f\left(x^2+1\right)+1\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2}x\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{2}xf\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

+ Xét $A=\int\limits_{0}^{2}x\mathrm{d}x$.

$A=\int\limits_{0}^{2}x\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2}=2$.

+ Xét $B=\int\limits_{0}^{2}xf\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=x^2+1\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$.

Đổi cận:

Ta có:

x	0	2
t	1	5

$B=\int\limits_{0}^{2}xf\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_{1}^{5}f\left(t\right)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int\limits_{1}^{5}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}.26=13$.

Vậy $J=A+B=15$.

Câu 4. **(Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_{1}^{9}\dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx=4$ và $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sin x\right)\cos xdx=2$. Tích phân $I=\int\limits_{0}^{3}f(x)dx$ bằng

A. $I=8$. **B.** $I=6$. **C.** $I=4$. **D.** $I=10$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\mathrm{t}=\sqrt{\mathrm{x}}\Rightarrow \mathrm{dt}=\dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{x}}}\mathrm{dx}$. Khi đó $x=1\Rightarrow t=1;x=9\Rightarrow t=3$

Suy ra $\int\limits_{1}^{9}\dfrac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx=2\int\limits_{1}^{3}f(t)dt=4\Rightarrow\int\limits_{1}^{3}f(t)dt=2.$

Đặt $t=\sin x;x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dt=\cos dx$. Khi đó. $x=0\Rightarrow t=0;x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$

Suy ra $\int\limits_{0}^{3}f(x)dx=\int\limits_{0}^{1}f(x)dx+\int\limits_{1}^{3}f(x)dx=2+2=4.$

Câu 5. **(THPT Cẩm Giàng 2019)** Cho biết $\int\limits_{-1}^{5}f\left(x\right)\mathrm{d}x=15$. Tính giá trị của $P=\int\limits_{0}^{2}\left[f\left(5-3x\right)+7\right]\mathrm{d}x$.

A. $P=15$. **B.** $P=37$. **C.** $P=27$. **D.** $P=19$.

Lời giải

Đặt $t=5-3x \Rightarrow \mathrm{d}t=-3\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x=0$ thì $t=5$; $x=2$ thì $t=-1$.

Ta có: $P=\int_0^2\left[f\left(5-3x\right)+7\right]\mathrm{d}x=\int_0^2 f\left(5-3x\right)\mathrm{d}x+\int_0^2 7\mathrm{d}x=\int_5^{-1} f\left(t\right)\frac{\mathrm{d}t}{-3}+7x\Big|_0^2=\frac{1}{3}\int_{-1}^5 f\left(t\right)\mathrm{d}t+14$

$=\frac{1}{3}.15+14=19$.

Câu 6. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho $\int_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2018$. Tính tích phân $I=\int_0^2\left[f\left(2x\right)+f\left(4-2x\right)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=0$. **B.** $I=2018$. **C.** $I=4036$. **D.** $I=1009$.

Lời giải

Ta có $I=\int_0^2 f\left(2x\right)\mathrm{d}x+\int_0^2 f\left(4-2x\right)\mathrm{d}x=H+K$

Tính $K=\int_0^2 f\left(2x\right)dx$.

Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$; đổi cận: $x=0\Rightarrow t=2; x=2\Rightarrow t=4$. Nên $K=\frac{1}{2}\int_0^4 f\left(t\right)\mathrm{d}t=1009$

Tính $H=\int_0^2 f\left(4-2x\right)\mathrm{d}x$,

Đặt $t=4-2x\Rightarrow dt=-2dx$; đổi cận: $x=0\Rightarrow t=4; x=2\Rightarrow t=0$. Nên $H=\frac{1}{2}\int_0^4 f\left(t\right)\mathrm{d}t=1009$

Suy ra $I=K+H=2018$.

Câu 7. Cho $y=f\left(x\right)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\left[-6;6\right]$. Biết rằng $\int_{-1}^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=8$; $\int_1^3 f\left(-2x\right)\mathrm{d}x=3$.

Giá trị của $I=\int_{-1}^6 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ là

A. $I=5$. **B.** $I=2$. **C.** $I=14$. **D.** $I=11$.

Lời giải

Ta có $y=f\left(x\right)$ là hàm số chẵn, suy ra $f\left(-2x\right)=f\left(2x\right)$. Khi đó: $\int_1^3 f\left(-2x\right)\mathrm{d}x=\int_1^3 f\left(2x\right)\mathrm{d}x=3$.

Xét tích phân: $I_1=\int_1^3 f\left(2x\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x\Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=2$; $x=3\Rightarrow t=6$.

$\Rightarrow I_1=\int_2^6 f\left(t\right).\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_2^6 f\left(t\right)\mathrm{d}t=3\Rightarrow\int_2^6 f\left(t\right)\mathrm{d}t=6\Rightarrow\int_2^6 f\left(x\right)\mathrm{d}x=6$.

Vậy $I=\int_{-1}^6 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_2^6 f\left(x\right)\mathrm{d}x=8+6=14$.

Câu 8. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương -2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^{\pi^2} f(x)\mathrm{d}x = 2018$, tính $I = \int_0^{\pi} xf(x^2)\mathrm{d}x$.

A. $I = 1008$. **B.** $I = 2019$. **C.** $I = 2017$. **D.** $I = 1009$.

Lời giải

Xét $I = \int_0^{\pi} xf(x^2)\mathrm{d}x$.

Đặt $t = x^2 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x \Rightarrow x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \pi \Rightarrow t = \pi^2$.

Khi đó $I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi^2} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi^2} f(x)\mathrm{d}x = 1009$.

Câu 9. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$. Khi đó $\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 8.

Lời giải

Đặt $\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t$. Khi $x = 1$ thì $t = 1$; $x = 4$ thì $t = 2$.

Suy ra $\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_1^2 f(t).2\mathrm{d}t = 2\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t = 2.2 = 4$.

Vậy $\int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 4$.

Câu 10. **(Sở Hà Nội 2019)** Cho $\int_1^2 f(x^2+1)x\mathrm{d}x = 2$. Khi đó $I = \int_2^5 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** -1.

Lời giải

Đặt $x^2 + 1 = t \Rightarrow 2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \Rightarrow x\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2}$.

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 2; x = 2 \Rightarrow t = 5$.

Suy ra: $2 = \int_1^2 f(x^2+1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^5 f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \int_2^5 f(t)\mathrm{d}t = 4 \Rightarrow I = \int_2^5 f(x)\mathrm{d}x = 4$.

Câu 11. Cho f, g là hai hàm số liên tục trên $[1;3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3 [f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x = 10$ đồng thời $\int_1^3 [2f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = 6$. Tính $\int_1^3 f(4-x)\mathrm{d}x + 2\int_1^2 g(2x-1)\mathrm{d}x$

A. 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Ta có: $\int_1^3 \left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=10 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x+3\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x=10$.

$\int_1^3 \left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6 \Leftrightarrow 2\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x-\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x=6$.

Đặt $u=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$; $v=\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x$.

Ta được hệ phương trình: $\begin{cases}u+3v=10\\2u-v=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=4\\v=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=4\\\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x=2\end{cases}$

+ Tính $\int_1^3 f(4-x)\mathrm{d}x$

Đặt $t=4-x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$; $x=1 \Rightarrow t=3$; $x=3 \Rightarrow t=1$.

$\int_1^3 f(4-x)\mathrm{d}x=\int_3^1 f(t)(-\mathrm{d}t)=\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=4$.

+ Tính $\int_1^2 g(2x-1)\mathrm{d}x$

Đặt $z=2x-1 \Rightarrow \mathrm{d}z=2\mathrm{d}x$; $x=1 \Rightarrow z=1$; $x=2 \Rightarrow z=3$.

$\int_1^2 g(2x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^3 g(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x=1$.

Vậy $\int_1^3 f(4-x)\mathrm{d}x+2\int_1^2 g(2x-1)\mathrm{d}x=6$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_0^2 f(3x+1)\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int_0^7 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=16$. **B.** $I=18$. **C.** $I=8$. **D.** $I=20$.

Lời giải

$A=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$, $B=\int_0^2 f(3x+1)\mathrm{d}x=6$ đặt $t=3x+1 \Rightarrow dt=3dx$.

Đổi cận: $\begin{cases}x=0 \Rightarrow t=1\\x=2 \Rightarrow t=7\end{cases}$

Ta có: $B=\frac{1}{3}\int_1^7 f(t)\mathrm{d}t=6 \Rightarrow \int_1^7 f(t)\mathrm{d}t=18 \Rightarrow \int_1^7 f(x)\mathrm{d}x=18$.

Vậy $I=\int_0^7 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^7 f(x)\mathrm{d}x=20$.

Câu 13. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)=f(10-x)$ và $\int_3^7 f(x)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int_3^7 xf(x)\mathrm{d}x$.

A. 80. **B.** 60. **C.** 40. **D.** 20.

Lời giải

Đặt $t=10-x$. Khi đó $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=3\Rightarrow t=7$.

$x=7\Rightarrow t=3$.

Khi đó $I=-\int_7^3(10-t)f(10-t)\mathrm{d}t=\int_3^7(10-t)f(10-t)\mathrm{d}t=\int_3^7(10-x)f(10-x)\mathrm{d}x$

$=\int_3^7(10-x)f(x)\mathrm{d}x=10\int_3^7f(x)\mathrm{d}x-\int_3^7xf(x)\mathrm{d}x=10\int_3^7f(x)\mathrm{d}x-I$.

Suy ra $2I=10\int_3^7f(x)\mathrm{d}x=10.4=40$. Do đó $I=20$.

Câu 14. (THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019) Cho $\int_0^1f(x)\mathrm{d}x=9$. Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(\sin 3x)\cos 3x\mathrm{d}x$.

A. $I=5$. **B.** $I=9$. **C.** $I=3$. **D.** $I=2$.

Lời giải

Đặt $t=\sin 3x\Rightarrow \mathrm{d}t=3\cos 3x.\mathrm{d}x$

Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow t=1\end{cases}$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(\sin 3x)\cos 3x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}.9=3$

Câu 15. (Chuyên Quốc Học Huế -2019) Cho tích phân $I=\int_0^4f(x)\mathrm{d}x=32.$ Tính tích phân $J=\int_0^2f(2x)\mathrm{d}x.$

A. $J=32$ **B.** $J=64$ **C.** $J=8$ **D.** $J=16$

Lời giải

Đặt $t=2x\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}t}{2}=\mathrm{d}x.$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0;\ x=2\Rightarrow t=4.$

$J=\int_0^2f(2x)\mathrm{d}x=\int_0^4\frac{1}{2}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^4f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}I=16.$

Câu 16. (Việt Đức Hà Nội 2019) Biết $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^9f(x)\mathrm{d}x=9$. Khi đó giá trị của $\int_1^4f(3x-3)\mathrm{d}x$ là

A. 0. **B.** 24. **C.** 27. **D.** 3.

Lời giải

Xét $I=\int_1^4f(3x-3)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=3x-3\Rightarrow \mathrm{d}t=3\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=4 \Rightarrow t=9 \\ x=1 \Rightarrow t=0 \end{cases}$. Vậy $I=\int_0^9 f(t)\frac{1}{3}\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_0^9 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.9=3$.

Câu 17. **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 f(2x)dx=2$.Tích phân $\int_0^2 f(x)dx$ bằng

A. 8. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Đặt $t=2x \Rightarrow dt=2dx \Rightarrow dx=\frac{dt}{2}$,

$x=0 \Rightarrow t=0$

$x=1 \Rightarrow t=2$

Ta có $2=\int_0^1 f(2x)dx=\int_0^2 \frac{f(t)dt}{2}=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt \Rightarrow \int_0^2 f(t)dt=4$

Theo tính chất tích phân $\int_0^2 f(\mathrm{x})dx=\int_0^2 f(\mathrm{t})dt=4$

Vậy $\int_0^2 f(x)dx=4$

Câu 18. Cho hàm $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{2017} f(x)\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(2017x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1}{2017}$. **B.** $I=0$. **C.** $I=2017$. **D.** $I=1$.

Lời giải

Đặt $t=2017x \Rightarrow \mathrm{d}t=2017\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2017}\mathrm{d}t$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=1 \Rightarrow t=2017$

Vậy $I=\int_0^{2017} f(t).\frac{1}{2017}\mathrm{d}t=\frac{1}{2017}\int_0^{2017} f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2017}$.

Câu 19. Cho tích phân $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=a$. Hãy tính tích phân $I=\int_0^1 xf(x^2+1)\mathrm{d}x$ theo a.

A. $I=4a$. **B.** $I=\frac{a}{4}$. **C.** $I=\frac{a}{2}$. **D.** $I=2a$.

Lời giải

Đặt $t=x^2+1 \Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$.

Đổi cận

x	0	1
t	1	2

$I=\int_0^1 xf(x^2+1)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(t).\frac{\mathrm{d}t}{2}=\frac{1}{2}\int_1^2 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{a}{2}$.

Câu 20. (Thpt Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_e^{e^2} \frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}\mathrm{d}x = 2$. Tính $\int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(2x)}{x}\mathrm{d}x$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

* $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f\left(\cos^2 x\right)}{\cos^2 x}.\sin 2x\mathrm{d}x$.

Đặt $\cos^2 x = t \Rightarrow \sin 2x\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$.

Đổi cận

x	0	$\frac{\pi}{4}$
t	1	$\frac{1}{2}$

Khi đó $I_1 = -\frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t \Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = 4$.

* $I_2 = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{f\left(\ln^2 x\right)}{\ln^2 x}.\frac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

Đặt $\ln^2 x = t \Rightarrow \frac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.

Đổi cận

x	e	e^2
t	1	4

Khi đó $I_2 = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t \Rightarrow \int_1^4 \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = 4$.

* Tính $I = \int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(2x)}{x}\mathrm{d}x$. Đặt $2x = t \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{2}dt$.

Đổi cận

x	$\frac{1}{4}$	2
t	$\frac{1}{2}$	4

Khi đó $I = \int_{\frac{1}{2}}^{4} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t + \int_1^4 \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = 4 + 4 = 8$.

Câu 21. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x^2; x \ge 1 \\ 5 - x; x < 1 \end{cases}$. Tính $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x + 3\int_0^1 f(3-2x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{71}{6}$. **B.** $I=31$. **C.** $I=32$. **D.** $I=\dfrac{32}{3}$.

Lời giải

Xét tích phân $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin x\right)\cos x\mathrm{d}x$.Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$

Đổi cận

x	0	$\dfrac{\pi}{2}$
t	0	1

Ta có $I_1=\int\limits_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(5-x\right)\mathrm{d}x=\left(5x-\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=\dfrac{9}{2}$

Xét tích phân $I_2=\int\limits_0^1 f\left(3-2x\right)\mathrm{d}x$.Đặt $t=3-2x\Rightarrow \mathrm{d}t=-2\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{-\mathrm{d}t}{2}$

Đổi cận

x	0	1
t	3	1

Ta có

$I_2=\int\limits_0^1 f\left(3-2x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^3 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^3\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^3}{3}+3x\right)\Big|_1^3=\dfrac{1}{2}\left(18-\dfrac{10}{3}\right)=\dfrac{22}{3}$

Vậy $I=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin x\right)\cos x\mathrm{d}x+3\int\limits_0^1 f\left(3-2x\right)\mathrm{d}x=9+22=31$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 22. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình- 2019)** Cho $I=\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$. Giá trị của $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x f\left(\sqrt{3\cos x+1}\right)}{\sqrt{3\cos x+1}}\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** $-\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** -2.

Lời giải

Đặt $u=\sqrt{3\cos x+1}\Rightarrow u^2=3\cos x+1\Rightarrow -\dfrac{2}{3}u\mathrm{d}u=\sin x\mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow u=1\\ x=0\Rightarrow u=2\end{cases}$.

Do đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x f\left(\sqrt{3\cos x+1}\right)}{\sqrt{3\cos x+1}}\mathrm{d}x=\int\limits_2^1\dfrac{-2uf\left(u\right)}{3u}\mathrm{d}u=\dfrac{2}{3}\int\limits_1^2 f\left(u\right)\mathrm{d}u=\dfrac{2}{3}\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{4}{3}$.

Câu 23. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Biết $\int\limits_1^4 f\left(x\right)dx=5$ và $\int\limits_4^5 f\left(x\right)dx=20$. Tính $\int\limits_1^2 f\left(4x-3\right)dx-\int\limits_0^{\ln 2} f\left(e^{2x}\right)e^{2x}dx$.

A. $I=\frac{15}{4}$. **B.** $I=15$. **C.** $I=\frac{5}{2}$. **D.** $I=25$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=4x-3\Rightarrow dt=4dx$ thì

$$\int_1^2 f(4x-3)\,dx=\frac{1}{4}\int_1^5 f(t)\,dt=\frac{1}{4}\left(\int_1^4 f(t)\,dt+\int_4^5 f(t)\,dt\right)=\frac{1}{4}(5+20)=\frac{25}{4}.$$

Đặt $u=e^{2x}\Rightarrow du=2e^{2x}dx$ thì

$$\int_0^{\ln 2} f\left(e^{2x}\right)e^{2x}dx=\frac{1}{2}\int_1^4 f(u)\,du=\frac{5}{2}.$$

Vậy $I=\frac{25}{4}-\frac{5}{2}=\frac{15}{4}$.

Câu 24. **(Chuyên Thái Bình 2019)** Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(2-x)=x.e^{x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$.

A. $I=\frac{e^4-1}{4}$. **B.** $I=\frac{2e-1}{2}$. **C.** $I=e^4-2$. **D.** $I=e^4-1$.

Lời giải

Đặt $x=2-t\Rightarrow dx=-dt$.

$$\Rightarrow I=\int_2^0 f(2-t)(-dt)=\int_0^2 f(2-t)(dt)=\int_0^2 f(2-x)\,dx.$$

$$\Rightarrow 2I=\int_0^2\left[f(x)+f(2-x)\right]dx=\int_0^2 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2 e^{x^2}d\left(x^2\right)=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^2=\frac{e^4-1}{2}.$$

Vậy $I=\frac{e^4-1}{4}$.

Câu 25. **(Chuyên Vĩnh Phúc Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x)=3f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $I=\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=5$ **B.** $I=6$ **C.** $I=3$ **D.** $I=2$

Lời giải.

Ta có: $3=3.1=3.\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 3f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}(2x),\forall x\in\mathbb{R}$.

Đặt $2x=t\Rightarrow \mathrm{d}(2x)=\mathrm{d}t$, với $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=2$.

$\Leftrightarrow 3=\frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x,\forall x\in\mathbb{R}$ (do hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$).

$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=6,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=6,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow 1+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=6, \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=5, \forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)dx=2$ và $\int_e^{e^2} \frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}dx=2$.

Tính $\int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(2x)}{x}dx$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)dx=2 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x.\cos x}{\cos^2 x}.f\left(\cos^2 x\right)dx=2$.

Đặt $t=\cos^2 x \Rightarrow dt=-2\sin x\cos x dx \Rightarrow -\frac{1}{2}dt=\sin x\cos x dx$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0$ và $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x.\cos x}{\cos^2 x}.f\left(\cos^2 x\right)dx=2 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(t)}{t}=4$.

Nguyễn Bảo Vương

Ta có $\int_e^{e^2} \frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}dx=2 \Leftrightarrow \int_e^{e^2} \frac{\ln x.f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln^2 x}dx=2$.

Tương tự trên ta có $\int_e^{e^2} \frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}dx=2 \Leftrightarrow \int_1^4 \frac{f(t)}{t}=4$.

* Tính $\int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(2x)}{x}dx$.

Đặt $t=2x\Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt$.

Đổi cận: $x=\frac{1}{4}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$ và $x=2\Rightarrow t=4$.

Khi đó $\int_{\frac{1}{4}}^{2} \frac{f(2x)}{x}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{4} \frac{f(t)}{t}=\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{f(t)}{t}dt+\int_1^4 \frac{f(t)}{t}=4+4=8$.

Câu 27. (Chuyên KHTN 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x.f(\cos^2 x)dx = \int_1^8 \frac{f(\sqrt[3]{x})}{x}dx = 6$. Tính tích phân $\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f(x^2)}{x}dx$

A. 4 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 10

Lời giải

+) Đặt $t = \sqrt[3]{x} \Rightarrow t^3 = x \Rightarrow 3t^2 dt = dx$

Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 1$ và $x = 8 \Rightarrow t = 2$.

Khi đó $\int_1^8 \frac{f(\sqrt[3]{x})}{x}dx = \int_1^2 \frac{f(t)}{t^3}3t^2 dt = 3\int_1^2 \frac{f(t)}{t}dt = 6 \Rightarrow \int_1^2 \frac{f(t)}{t}dt = 2$

+) Đặt $t = \cos^2 x \Rightarrow dt = -2\cos x \sin x dx \Rightarrow dt = -2\cos^2 x \tan x dx \Rightarrow \tan x dx = -\frac{1}{2t}dt$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$ và $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{4}$.

Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x.f(\cos^2 x)dx = -\frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{4}} \frac{f(t)}{t}dt = 6 \Rightarrow \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(t)}{t}dt = 12$

+) Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx \Rightarrow dt = 2x^2 \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\frac{dt}{t}$

Đổi cận: $x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{4}$ và $x = \sqrt{2} \Rightarrow t = 2$ Khi đó

$\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \frac{f(x^2)}{x}dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(t)}{t}dt = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{f(t)}{t}dt + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{f(t)}{t}dt = \frac{2+12}{2} = 7$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 28. (Chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng - 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^{2018} f(x)\mathrm{d}x = 2$. Khi đó tích phân $\int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Đặt $I = \int_0^{\sqrt{e^{2018}-1}} \frac{x}{x^2+1} f\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t = \ln\left(x^2+1\right) \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = \sqrt{e^{2018}-1} \Rightarrow t = 2018$.

Vậy $I = \int_0^{2018} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2018} f(x)\mathrm{d}x = 2$.

Câu 29. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = 1$. Tính $I = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 2$. **B.** $I = 6$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = 4$.

Lời giải

Ta có $K = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x = 3$. Đặt $\tan x = t \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{d}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = (t^2+1)\mathrm{d}x$.

Vậy $K = \int\limits_0^1 f(t).\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 f(x).\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = 3$.

Lại có $\int\limits_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[f(x) - \frac{1}{x^2+1}f(x)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 \frac{1}{x^2+1}f(x)\mathrm{d}x$.

Vậy suy ra $I = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 4$.

Câu 30. **(SGD Thanh Hóa - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x.f(\sin^2 x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x}\mathrm{d}x = 1$. Tính tích phân $\int\limits_{\frac{1}{8}}^1 \frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x$.

A. $I = 3$. **B.** $I = \frac{3}{2}$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = \frac{5}{2}$.

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương

Đặt $I_1 = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x.f(\sin^2 x)\mathrm{d}x = 1$, $I_2 == \int\limits_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x}\mathrm{d}x = 1$.

□ Đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\sin x.\cos x\mathrm{d}x = 2\sin^2 x.\cot x\mathrm{d}x = 2t.\cot x\mathrm{d}x$.

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{1}{2}$	1

$$I_1 = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x.f(\sin^2 x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f(t).\frac{1}{2t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{4x}\mathrm{d}(4x) = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\int\limits_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}} \frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x = 2I_1 = 2$

□Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow 2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

x	1	16
t	1	4

$$I_2=\int_1^{16}\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{x}\mathrm{d}x=\int_1^4\frac{f(t)}{t^2}2t\mathrm{d}t=2\int_1^4\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=2\int_{\frac{1}{4}}^1\frac{f(4x)}{4x}\mathrm{d}(4x)=2\int_{\frac{1}{4}}^1\frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\int_{\frac{1}{4}}^1\frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}I_2=\frac{1}{2}$

Khi đó, ta có:

$$\int_{\frac{1}{8}}^1\frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4}}\frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{4}}^1\frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$$

Câu 31. **(SGD - Nam Định - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn $f(x)=\frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{x}$. Tính tích phân $I=\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=3+2\ln^2 2$. **B.** $I=2\ln^2 2$. **C.** $I=\ln^2 2$. **D.** $I=2\ln 2$.

Lời giải

Ta có $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^4\left[\frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{x}\right]\mathrm{d}x=\int_1^4\frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x+\int_1^4\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x.$

Xét $K=\int_1^4\frac{f\left(2\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Đặt $2\sqrt{x}-1=t\Rightarrow\sqrt{x}=\frac{t+1}{2}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\mathrm{d}t$.

$\Rightarrow K=\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Xét $M=\int_1^4\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int_1^4\ln x\mathrm{d}(\ln x)=\left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^4=2\ln^2 2$.

Do đó $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x+2\ln^2 2\Rightarrow\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x=2\ln^2 2$.

Từ $(1)\Rightarrow I=-\frac{4}{7}I+\frac{2018}{7}.\frac{98}{3}\Leftrightarrow\frac{11}{7}I=\frac{2018.98}{7.3}\Leftrightarrow I=\frac{197764}{33}$.

Câu 32. **(Nam Định - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[1;4]$ và thỏa mãn $f(x)=\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{x}$. Tính tích phân $I=\int_3^4 f(x)dx$.

A. $I=3+2\ln^2 2$. **B.** $I=2\ln^2 2$. **C.** $I=\ln^2 2$. **D.** $I=2\ln 2$.

Lời giải

Ta có: $\int_1^4 f(x)dx=\int_1^4\left(\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}+\frac{\ln x}{x}\right)dx=\int_1^4\frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}dx+\int_1^4\frac{\ln x}{x}dx=A+B$.

Xét $B=\int_1^4 \frac{\ln x}{x}dx=\int_1^4 \ln x\, d(\ln x)=\left.\frac{(\ln x)^2}{2}\right|_1^4=\frac{(\ln 4)^2}{2}-\frac{(\ln 1)^2}{2}=2\ln^2 2$.

Xét $A=\int_1^4 \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}dx$.

Đặt $t=2\sqrt{x}-1\Rightarrow dt=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$. Khi đó $A=\int_1^4 \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}dx=\int_1^3 f(t)\,dt=\int_1^3 f(x)\,dx$

Vậy $\int_1^4 f(x)\,dx=\left(\int_1^3 f(x)\,dx\right)+2\ln^2 2\Rightarrow\int_1^4 f(x)\,dx-\int_1^3 f(x)\,dx=2\ln^2 2\Rightarrow I=2\ln^2 2$.

Câu 33. **(Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và là hàm số lẻ trên đoạn $[-2;2]$. Biết rằng $\int_{-1}^0 f(x)dx=-1,\int_{\frac{1}{2}}^1 f(-2x)dx=2$ .Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int_{-2}^2 f(x)dx=2\int_0^2 f(x)dx$.

B. $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx=-4$.

C. $\int_0^1 f(x)dx=-1$.

D. $\int_0^2 f(x)dx=-3$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=-x\Rightarrow\int_{-1}^0 f(x)dx=-\int_1^0 f(-t)dt=\int_0^1 -f(t)dt$ (vì $f(x)$ làhàm lẻ)

$\Rightarrow\int_0^1 f(t)dt=1$.

Đặt $t=2x\Rightarrow\int_{\frac{1}{2}}^1 f(-2x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^1 -f(2x)dx=\frac{-1}{2}\int_1^2 f(t)dt$

$\Rightarrow\frac{-1}{2}\int_1^2 f(t)dt=2\Rightarrow\int_1^2 f(t)dt=-4.$

Vậy $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx=1-4=-3.$

Câu 34. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(1)=1$ và $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}$.

Tính

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x.f'(\sin x)\mathrm{d}x$

A. $I=\frac{4}{3}$.

B. $I=\frac{2}{3}$.

C. $I=-\frac{2}{3}$

D. $I=\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sin x,\ \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x$.

Đổi cận

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x.f'\left(\sin x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 2t.f'\left(t\right)\mathrm{d}t$.

Đặt $\begin{cases}u=2t\\ \mathrm{d}v=f'\left(t\right)\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=2\mathrm{d}t\\ v=f\left(t\right)\end{cases}$

$I=\left(2t.f\left(t\right)\right)\Big|_0^1-2\int\limits_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=2.f\left(1\right)-2.\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.

Câu 35. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_1^9\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=4,\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sin x\right)\cos x\mathrm{d}x=2$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=6$. **B.** $I=4$. **C.** $I=10$. **D.** $I=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int\limits_1^9\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int\limits_1^9 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x}\right)=2\int\limits_1^3 f\left(t\right)\mathrm{d}t$.

Mà $\int\limits_1^9\frac{f\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=4$ nên $2\int\limits_1^3 f\left(t\right)\mathrm{d}t=4\Leftrightarrow\int\limits_1^3 f\left(t\right)\mathrm{d}t=2$

Vì tích phân không phụ thuộc vào biến số nên $\int\limits_1^3 f\left(t\right)\mathrm{d}t=2\Leftrightarrow\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$.

Ta có: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sin x\right)\cos x\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sin x\right)\mathrm{d}\left(\sin x\right)=\int\limits_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t$.

Mà $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f\left(\sin x\right)\cos x\mathrm{d}x=2$ nên $\int\limits_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=2$.

Vì tích phân không phụ thuộc vào biến số nên $\int\limits_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=2\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$.

Khi đó $I=\int\limits_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2+2=4$.

Câu 36. **(Sở Hưng Yên - 2020)** Cho $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x\right)=f\left(2020-x\right)$ và $\int\limits_3^{2017} f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$. Khi đó $\int\limits_3^{2017} xf\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 16160. **B.** 4040. **C.** 2020. **D.** 8080.

Lời giải

Chọn B

Đặt $u=2020-x\Rightarrow x=2020-u$. Ta có $dx=-du$.

Với $x=3$ thì $u=2017$.

Với $x=2017$ thì $u=3$.

Khiđó $\int_3^{2017} xf(x)dx=\int_3^{2017}(2020-u)f(2020-u)du=\int_3^{2017}(2020-x)f(x)dx$

Suy ra $2\int_3^{2017} xf(x)dx=\int_3^{2017}2020f(x)dx=8080$. Do đó $\int_3^{2017} xf(x)dx=4040$.

Câu 37. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(1)=2$ và $\int_0^1 x^2f'(x)\mathrm{d}x=\int_1^4\frac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}f\left(2-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=4$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{5}{7}$. **C.** $\frac{3}{7}$. **D.** $\frac{1}{7}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$4=\int_0^1 x^2f'(x)\mathrm{d}x=\left(x^2f(x)\right)\Big|_0^1-\int_0^1 2xf(x)\mathrm{d}x=2-2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=-1$$

Đặt $t=2-\sqrt{x}\Rightarrow \mathrm{d}t=-\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

Khi đó

$$\int_1^4\frac{1+3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}f\left(2-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=4\Leftrightarrow-\int_1^0\left(1+3(2-t)\right)f(t)\mathrm{d}t=4\Leftrightarrow\int_0^1 7f(t)\mathrm{d}t-3\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t=4$$

Suy ra $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\frac{4+3\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t}{7}=\frac{4+3.(-1)}{7}=\frac{1}{7}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{7}$.

Câu 38. **(Sở Yên Bái - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $4xf(x^2)+6f(2x)=\frac{3}{5}x^3+4$. Giá trị $\int_0^4 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{52}{25}$. **B.** 52. **C.** $\frac{48}{25}$. **D.** 48.

Lời giải

Chọn A

$$4xf(x^2)+6f(2x)=\frac{3}{5}x^3+4\Rightarrow\int_0^2\left[4xf(x^2)+6f(2x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^2\left[\frac{3}{5}x^3+4\right]\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow 2\int_0^2 f(x^2)\mathrm{d}(x^2)+3\int_0^2 f(2x)\mathrm{d}(2x)=\frac{52}{5}\Rightarrow 2\int_0^4 f(t)\mathrm{d}t+3\int_0^4 f(u)\mathrm{d}u=\frac{52}{5}$$

$$\Rightarrow 2\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x+3\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=\frac{52}{5}\Rightarrow 5\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=\frac{52}{5}\Rightarrow\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=\frac{52}{25}$$

Câu 39. (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2)=16, \int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=2$. Tích phân $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 30. **B.** 28. **C.** 36. **D.** 16.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}(2x)=2 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$.

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow \int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\big|_0^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(2)-4=32-4=28$.

Câu 40. (Kim Liên - Hà Nội - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=5$.

Tính $I=\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x$

A. $I=\frac{5}{2}\pi$. **B.** $I=10\pi$. **C.** $I=5$. **D.** $I=5\pi$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn D

Ta có $I=\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x$,

Tính $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x$

Đặt $x=\pi-t$

$\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$

$xf(\sin x)\mathrm{d}x=(\pi-t)f[\sin(\pi-t)](-\mathrm{d}t)=(t-\pi)f(\sin t)\mathrm{d}t$

Đổi cận $x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$

$x=\pi \Rightarrow t=0$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf\left(\sin x\right)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(t-\pi)f\left(\sin t\right)\mathrm{d}t=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin t\right)\mathrm{d}t-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} tf\left(\sin t\right)\mathrm{d}t=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin x\right)\mathrm{d}x-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} xf\left(\sin x\right)\mathrm{d}x$$

Do đó $I=\int_{0}^{\pi} xf\left(\sin x\right)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} xf\left(\sin x\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf\left(\sin x\right)\mathrm{d}x=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin x\right)\mathrm{d}x=5\pi$

Vậy chọn **D.**

Câu 41. (THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019) Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=2$ và $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{f\left(\ln x^2\right)}{x\ln x}\mathrm{d}x=2$. Tính $\int_{\frac{1}{4}}^{2}\frac{f\left(2x\right)}{x}\mathrm{d}x$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

- Đặt $t=\cos^2 x$ suy ra $\mathrm{d}t=-2\sin x.\cos x\,\mathrm{d}x$.

  Suy ra

$$I_1=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{-2\sin x\cos x}{\cos^2 x}.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t$$

  Đặt $t=\ln^2 x$ suy ra $\mathrm{d}t=2\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

  Suy ra $I_2=\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{2\ln x.f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{1}^{4}\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t$.

- Đặt $t=2x$ suy ra $\mathrm{d}t=2\,\mathrm{d}x$.

  Ta có

$$I=\int_{\frac{1}{4}}^{2}\frac{f\left(2x\right)}{x}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{4}}^{2}\frac{f\left(2x\right)}{2x}\mathrm{d}\left(2x\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}\left(t\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t+\int_{1}^{4}\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t=2\left(I_1+I_2\right)=2\left(2+2\right)=8.$$

Câu 42. (Hùng Vương Gia Lai 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3};3\right]$ thỏa mãn $f(x)+x.f\left(\frac{1}{x}\right)=x^3-x$. Giá trị tích phân $I=\int_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f(x)}{x^2+x}dx$ bằng:

A. $\frac{8}{9}$. **B.** $\frac{16}{9}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A

$$f(x)+x.f\left(\frac{1}{x}\right)=x^3-x\Rightarrow\frac{f(x)}{x^2+x}+\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1}=x-1\Rightarrow\int_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f(x)}{x^2+x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{3}}^{3}(\mathrm{x}-1)\mathrm{d}x=\frac{16}{9}.$$

Xét $I'=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1}\mathrm{d}x$.

Đặt $\frac{1}{x}=t\Rightarrow\frac{-1}{x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\Rightarrow\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{-t^2}$.

$$I'=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_{3}^{\frac{1}{3}}\frac{f(t)}{\frac{1}{t}+1}\frac{\mathrm{d}t}{-t^2}=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f(t)}{t^2+t}dt=\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}\frac{f(x)}{x^2+x}\mathrm{d}x=I.$$

Suy ra $2I=\frac{16}{9}\Rightarrow I=\frac{8}{9}$.

Dạng 1.2 Giải bằng phương pháp từng phần

Thông thường nếu bài toán xuất hiện $\int\limits_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}x$ ta sẽ đặt $\begin{cases}u=g(x)\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}$

Câu 43. **(Đề tham khảo 2017)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^1(x+1)f'(x)\mathrm{d}x=10$ và $2f(1)-f(0)=2$.

Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=-12$ **B.** $I=8$ **C.** $I=1$ **D.** $I=-8$

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases}u=x+1\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$. Khi đó $I=(x+1)f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

Suy ra $10=2f(1)-f(0)-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-10+2=-8$

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-8$.

Câu 44. **(Mã 104 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(3)=1$ và $\int\limits_0^1 xf(3x)\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int\limits_0^3 x^2f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{25}{3}$. **B.** 3. **C.** 7. **D.** -9.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=3x\Rightarrow\mathrm{d}t=3\mathrm{d}x\Rightarrow\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}t$.

Suy ra $1=\int\limits_0^1 xf(3x)\mathrm{d}x=\frac{1}{9}\int\limits_0^3 tf(t)\mathrm{d}t\Leftrightarrow\int\limits_0^3 tf(t)dt=9$.

Đặt $\begin{cases} u = f(t) \\ \mathrm{d}v = t\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'(t)\mathrm{d}t \\ v = \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$.

$\Rightarrow \int_0^3 tf(t)\mathrm{d}t = \dfrac{t^2}{2}f(t)\Big|_0^3 - \int_0^3 \dfrac{t^2}{2}f'(t)\mathrm{d}t = \dfrac{9}{2}f(3) - \dfrac{1}{2}\int_0^3 t^2 f'(t)\mathrm{d}t$.

$\Leftrightarrow 9 = \dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{2}\int_0^3 t^2 f'(t)\mathrm{d}t \Leftrightarrow \int_0^3 t^2 f'(t)\mathrm{d}t = -9$.

Vậy $\int_0^3 x^2 f'(x)\mathrm{d}x = -9$.

Câu 45. **(Mã 101 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(4)=1$ và $\int_0^1 xf(4x)dx = 1$, khi đó $\int_0^4 x^2 f'(x)dx$ bằng

A. 8. **B.** 14. **C.** $\dfrac{31}{2}$. **D.** -16.

Lời giải

Chọn D

Xét $\int_0^1 xf(4x)dx = 1$. Đặt:

$t = 4x \Rightarrow \int_0^4 \frac{1}{4}t.f(t).\frac{1}{4}dt = 1 \Rightarrow \int_0^4 t.f(t)dt = 16 \Rightarrow \int_0^4 x.f(x)dx = 16.$

Xét $I = \int_0^4 x^2 f'(x)dx = \int_0^4 x^2 df(x)$

Suy ra: $I = x^2.f(x)\Big|_0^4 - \int_0^4 2x.f(x)dx = 4^2 f(4) - 2.16 = -16.$

Câu 46. **(Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(6)=1$ và $\int_0^1 xf(6x)\mathrm{d}x = 1$, khi đó $\int_0^6 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{107}{3}$. **B.** 34. **C.** 24. **D.** -36.

Lời giải

Chọn D

Theo bài ra: $\int_0^1 xf(6x)\mathrm{d}x = 1$.

Đặt $t = 6x \Rightarrow \mathrm{d}t = 6\mathrm{d}x$.

Đổi cận:

x	0	1
t	0	6

Do đó: $\int_0^1 xf(6x)\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow \int_0^6 \frac{1}{6}t.f(t)\frac{\mathrm{d}t}{6} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{36}\int_0^6 t.f(t)\mathrm{d}t = 1 \Leftrightarrow \int_0^6 t.f(t)\mathrm{d}t = 36$.

Tính $I=\int\limits_0^6 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=x^2 \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow I=x^2 f(x)\Big|_0^6-\int\limits_0^6 2xf(x)\mathrm{d}x=36f(6)-2\int\limits_0^6 xf(x)\mathrm{d}x=36.1-2.36=-36$.

Câu 47. **(Mã 102 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5)=1$ và $\int\limits_0^1 xf(5x)dx=1$, khi đó $\int\limits_0^5 x^2 f'(x)dx$ bằng

A. 15 **B.** 23 **C.** $\frac{123}{5}$ **D.** -25

Lời giải

Chọn D

+) $I=\int\limits_0^5 x^2 f'(x)dx=\int\limits_0^5 x^2 df(x)=x^2.f(x)\Big|_0^5-\int\limits_0^5 f(x)dx^2$

$=25.f(5)-0.f(x)-\int\limits_0^5 f(x).2xdx$

$=25-2\int\limits_0^5 xf(x)dx$

+) Ta có: $\int\limits_0^1 xf(5x)dx=1$

Đặt $5x=t \Rightarrow \int\limits_0^5 \frac{t}{5}f(\mathrm{t})d\frac{t}{5}=1 \Leftrightarrow \int\limits_0^5 tf(\mathrm{t})dt=25$

Vậy $I=25-2\times 25=-25$.

Câu 48. **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và $f(1)=-\frac{1}{18}$, $\int\limits_0^1 x.f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{36}$. Giá trị của $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{1}{12}$. **B.** $\frac{1}{36}$. **C.** $\frac{1}{12}$. **D.** $-\frac{1}{36}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$, khi đó ta có

$\int\limits_0^1 x.f'(x)\mathrm{d}x=x.f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f(1)-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{36} \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f(1)-\frac{1}{36}=-\frac{1}{12}$.

Câu 49. **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(1)=e^2$ và $f'(x)=\frac{2x-1}{x^2}e^{2x}$ với mọi x khác 0.

Khi đó $\int\limits_1^{\ln 3} xf(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $6-e^2$. **B.** $\dfrac{6-e^2}{2}$. **C.** $9-e^2$. **D.** $\dfrac{9-e^2}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Xét tích phân $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{2x-1}{x^2}e^{2x}\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases}u=(2x-1)e^{2x}\\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=4xe^{2x}\mathrm{d}x\\ v=-\dfrac{1}{x}\end{cases}$, khi đó

$$\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2x-1}{x^2}e^{2x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}(2x-1)e^{2x}+4\int e^{2x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}(2x-1)e^{2x}+2e^{2x}+C.$$

Do $f(1)=e^2\Rightarrow C=0$. Vậy $f(x)=-\dfrac{1}{x}(2x-1)e^{2x}+2e^{2x}$.

Khi đó, ta có $\int\limits_1^{\ln 3}xf(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^{\ln 3}\left[(1-2x)e^{2x}+2xe^{2x}\right]\mathrm{d}x=\int\limits_1^{\ln 3}e^{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{e^{2x}}{2}\Big|_1^{\ln 3}=\dfrac{1}{2}(9-e^2)$.

Câu 50. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2)=16,\int\limits_0^2f(x)dx=4$. Tính $I=\int\limits_0^1xf'(2x)dx$.

A. $I=20$ **B.** $I=7$ **C.** $I=12$ **D.** $I=13$

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương

Ta có: $I=\int\limits_0^1xf'(2x)dx=\dfrac{1}{2}xf(2x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1\dfrac{1}{2}f(2x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}f(2)-\dfrac{1}{4}\int\limits_0^1f(2x)\mathrm{d}(2x)$

$I=\dfrac{1}{2}f(2)-\dfrac{1}{4}\int\limits_0^2f(x)dx=\dfrac{1}{2}.16-\dfrac{1}{4}.4=7$.

Câu 51. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1x^2f(x)dx=-\dfrac{1}{21}$, $f(1)=0$ và $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=\dfrac{1}{7}$. Giá trị của $\int_0^1f(x)dx$ bằng

A. $\dfrac{5}{12}$. **B.** $-\dfrac{1}{5}$. **C.** $\dfrac{4}{5}$. **D.** $-\dfrac{7}{10}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ dv=x^2dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\ v=\dfrac{x^3}{3}\end{cases}$.

$\bullet-\dfrac{1}{21}=\int_0^1x^2f(x)dx=\int_0^1udv=uv\Big|_0^1-\int_0^1vdu=\dfrac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\dfrac{x^3}{3}f'(x)dx=-\dfrac{1}{3}\int_0^1x^3f'(x)dx$

$\Rightarrow\int_0^1x^3f'(x)dx=\dfrac{1}{7}$.

$\bullet\int_0^1\left(x^3-f'(x)\right)^2dx=\int_0^1x^6dx-2\int_0^1x^3f'(x)dx+\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=\dfrac{1}{7}-2.\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{7}=0$

$\Rightarrow \left(f'(x)-x^3\right)^2=0, \forall x\in[0;1] \Rightarrow f'(x)=x^3, \forall x\in[0;1]$.

Kết hợp điều kiện $f(1)=0$ ta có $f(x)=\frac{1}{4}\left(x^4-1\right); \forall x\in[0;1]$

Vậy $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \frac{1}{4}\left(x^4-1\right)dx=\frac{1}{4}\int_0^1\left(x^4-1\right)dx=-\frac{1}{5}$.

Câu 52. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị -2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1, f(1)=\cot 1$. Tính tích phân $I=\int_0^1\left[f(x)\tan^2 x+f'(x)\tan x\right]\mathrm{d}x$.

A. -1. **B.** $1-\ln(\cos 1)$. **C.** 0. **D.** $1-\cot 1$.

Lời giải

Ta có $\int_0^1\left[f(x)\tan^2 x+f'(x)\tan x\right]\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\tan^2 x\mathrm{d}x+\int_0^1 f'(x)\tan x\mathrm{d}x$.

Lại có:

$\int_0^1 f(x)\tan^2 x\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{f(x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{f(x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x-1$.

$\int_0^1 f'(x)\tan x\mathrm{d}x=\int_0^1\tan x\mathrm{d}\left(f(x)\right)=f(x).\tan x\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\left(\tan x\right)$

$=f(1).\tan 1-\int_0^1\frac{f(x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\cot 1.\tan 1-\int_0^1\frac{f(x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=1-\int_0^1\frac{f(x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

Vậy $I=0$.

Câu 53. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 x^2 f(x)dx=\frac{1}{3}$ Tính $\int_0^1 x^3 f'(x)dx$.

A. -1 **B.** 1 **C.** 3 **D.** -3

Lời giải

Chọn A

$\begin{cases}u=f(x)\Rightarrow du=f'(x)dx\\ dv=x^2dx\Rightarrow v=\frac{x^3}{3}\end{cases}$

$I=\frac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^3}{3}f'(x)dx=\frac{1^3}{3}f(1)-0.f(0)-\int_0^1\frac{x^3}{3}f'(x)dx\alpha$

$\frac{1}{3}=\frac{-1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)dx\Rightarrow\int_0^1 x^3 f'(x)dx=-1$

Câu 54. Biết m là số thực thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x+2m)\mathrm{d}x=2\pi^2+\frac{\pi}{2}-1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m\le 0$. **B.** $0<m\le 3$. **C.** $3<m\le 6$. **D.** $m>6$.

Lời giải

Ta có: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\cos x+2m\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\mathrm{d}x+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2mx\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\mathrm{d}x+\frac{m\pi^2}{4}$.

Gọi $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=\cos x dx \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=dx \\ v=\sin x \end{cases}$.

$$I=x\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}+\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1.$$

Khi đó: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\cos x+2m\right)\mathrm{d}x=\frac{m\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}-1$.

Suy ra $\frac{m}{4}=2\Leftrightarrow m=8$.

Câu 55. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $f\left(1\right)=0,\ \int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=7$ và $\int\limits_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. 4 **B.** $\frac{7}{5}$ **C.** 1 **D.** $\frac{7}{4}$

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Đặt $u=f\left(x\right)\Rightarrow du=f'\left(x\right)dx,\ dv=x^2dx\Rightarrow v=\frac{x^3}{3}$.

Ta có $\frac{1}{3}=\frac{x^3}{3}f\left(x\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1\frac{x^3}{3}f'\left(x\right)dx\Rightarrow\int\limits_0^1 x^3f'\left(x\right)dx=-1$

Ta có $\int\limits_0^1 49x^6\mathrm{d}x=7,\ \int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=7,\int\limits_0^1 2.7x^3.f'\left(x\right)dx=-14\Rightarrow\int\limits_0^1\left[7x^3+f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow 7x^3+f'(x)=0\Rightarrow f\left(x\right)=-\frac{7x^4}{4}+C$, mà $f\left(1\right)=0\Rightarrow C=\frac{7}{4}$

$\Rightarrow\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(-\frac{7x^4}{4}+\frac{7}{4}\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{5}$.

Cách 2: Nhắc lại bất đẳng thức Holder tích phân như sau:

$$\left(\int\limits_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)dx\right)^2\le\int\limits_a^b f^2\left(x\right)dx.\int\limits_a^b g^2\left(x\right)dx$$

Dấu bằng xảy ra khi $f\left(x\right)=k.g\left(x\right),\left(\forall x\in\left[a;b\right],k\in\mathbb{R}\right)$

Ta có $\frac{1}{9}=\left(\int\limits_0^1\frac{x^3}{3}f'\left(x\right)dx\right)^2\le\int\limits_0^1\frac{x^6}{9}dx.\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2dx=\frac{1}{9}$. Dấu bằng xảy ra khi $f'\left(x\right)=k.\frac{x^3}{3}$.

Mặt khác $\int\limits_0^1\frac{x^3}{3}f'\left(x\right)dx=\frac{-1}{3}\Rightarrow k=21\Rightarrow f'\left(x\right)=-7x^3$ suy ra $f\left(x\right)=-\frac{7x^4}{4}+\frac{7}{4}$.

Từ đó $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(-\frac{7x^4}{4}+\frac{7}{4}\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{5}$.

Câu 56. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương -2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết $\int\limits_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$, $\int\limits_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. π. **B.** $\frac{3\pi}{2}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{1}{\pi}$.

Lời giải

Xét tích phân $I=\int\limits_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$

Đặt $\begin{cases}u=\cos(\pi x)\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\pi\sin(\pi x)dx\\ v=f(x)\end{cases}$, ta có

$$I=f(x)\cos(\pi x)\Big|_0^1+\pi\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx=-f(1)-f(0)+\pi\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx=\pi\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx$$

Mà $I=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\pi\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx=\frac{1}{2}$

Mặt khác: $\int\limits_0^1\sin^2(\pi x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left[1-\cos(2\pi x)\right]dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)\right]\Big|_0^1=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow\int\limits_0^1\left[f^2(x)-2.f(x)\sin(\pi x)+\sin^2(\pi x)\right]dx=\frac{1}{2}-2.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0.$$

Khi đó $\int\limits_0^1\left[f(x)-\sin(\pi x)\right]^2dx=0$

Vì $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $\left[f(x)-\sin(\pi x)\right]^2\geq 0,\forall x\in[0;1]$ nên ta suy ra $f(x)-\sin(\pi x)=0\Leftrightarrow f(x)=\sin(\pi x)$.

Do đó $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\sin(\pi x)dx=-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}$

Câu 57. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=7$ và $\int\limits_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{7}{5}$ **B.** 1 **C.** $\frac{7}{4}$ **D.** 4

Lời giải

Từ giả thiết: $\int\limits_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\Rightarrow\int\limits_0^1 3x^2f(x)\mathrm{d}x=1$.

Tính: $I=\int\limits_0^1 3x^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Đặt: $\begin{cases}u=f\left(x\right)\\ \mathrm{d}v=3x^2\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\\ v=x^3\end{cases}$.

Ta có:

$I=\int\limits_0^1 3x^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=x^3 f\left(x\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 x^3.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=1.f\left(1\right)-0.f\left(0\right)-\int\limits_0^1 x^3.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=-\int\limits_0^1 x^3.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Mà: $\int\limits_0^1 3x^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=1\Rightarrow 1=-\int\limits_0^1 x^3.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int\limits_0^1 x^3.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=-1\Leftrightarrow 7\int\limits_0^1 x^3.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=-7\Leftrightarrow\int\limits_0^1 7x^3.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=-\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x$, (theo giả thiết: $\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=7$).

$\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left(7x^3.f'\left(x\right)+\left[f'\left(x\right)\right]^2\right)\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f'\left(x\right)\left[7x^3+f'\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow 7x^3+f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=-7x^3\Rightarrow f\left(x\right)=-\frac{7}{4}x^4+C$.

Với $f\left(1\right)=0\Rightarrow-\frac{7}{4}.1^4+C=0\Rightarrow C=\frac{7}{4}$.

Khi đó: $f\left(x\right)=-\frac{7}{4}x^4+\frac{7}{4}$.

Vậy: $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(-\frac{7}{4}x^4+\frac{7}{4}\right)\mathrm{d}x=-\frac{7}{4}\left(\frac{x^5}{5}-x\right)\Big|_0^1=\frac{7}{5}$.

Câu 58. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $f\left(1\right)=4$, $\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=36$ và $\int\limits_0^1 x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{5}{6}$ **B.** $\frac{3}{2}$ **C.** 4 **D.** $\frac{2}{3}$

Lời giải

Từ giả thiết: $\int\limits_0^1 x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\Rightarrow\int\limits_0^1 5x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$.

Tính: $I=\int\limits_0^1 5x.f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Đặt: $\begin{cases}u=f\left(x\right)\\ \mathrm{d}v=5x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\\ v=\frac{5}{2}x^2\end{cases}$.

Ta có: $I=\int\limits_0^1 5x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}x^2.f\left(x\right)\Big|_0^1-\frac{5}{2}\int\limits_0^1 x^2.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{5}{2}.f\left(1\right)-\frac{5}{2}\int\limits_0^1 x^2.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=10-\frac{5}{2}\int\limits_0^1 x^2.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$, (vì $f\left(1\right)=4$)

Mà: $I=\int\limits_0^1 5x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=1\Rightarrow 1=10-\frac{5}{2}\int\limits_0^1 x^2.f'\left(x\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow \int\limits_0^1 x^2.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{18}{5}$

$\Leftrightarrow 10\int\limits_0^1 x^2.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=36\Leftrightarrow 10\int\limits_0^1 x^2.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x$, (theo giả thiết: $\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=36$)

$\Leftrightarrow \int\limits_0^1\left[10x^2.f'\left(x\right)-\left[f'\left(x\right)\right]^2\right]\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow \int\limits_0^1 f'\left(x\right)\left[10x^2-f'\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow 10x^2-f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=10x^2\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{10x^3}{3}+C$

Với $f\left(1\right)=4\Rightarrow 4=\frac{10.1}{3}+C\Rightarrow C=\frac{2}{3}$.

Khi đó: $f\left(x\right)=\frac{10x^3}{3}+\frac{2}{3}$.

Vậy: $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(\frac{10x^3}{3}+\frac{2}{3}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{5x^4}{6}+\frac{2}{3}x\right)\Big|_0^1=\frac{3}{2}$.

Câu 59. **(Chuyên Vĩnh Phúc Năm 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;2\right]$ thỏa mãn $f\left(2\right)=3$, $\int\limits_0^2\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=4$ và $\int\limits_0^2 x^2f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$. Tích phân $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{115}$ **B.** $\frac{297}{115}$ **C.** $\frac{562}{115}$ **D.** $\frac{266}{115}$

Lời giải

Từ giả thiết: $\int\limits_0^2 x^2f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\Rightarrow\int\limits_0^2 3x^2f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$.

Tính: $I=\int\limits_0^2 3x^2f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Đặt: $\begin{cases}u=f\left(x\right)\\ \mathrm{d}v=3x^2\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'\left(x\right)\mathrm{d}x\\ v=x^3\end{cases}$.

Ta có: $I=\int\limits_0^2 3x^2f\left(x\right)\mathrm{d}x=x^3.f\left(x\right)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 x^3.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=24-\int\limits_0^2 x^3.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$, (vì $f\left(2\right)=3$)

Mà: $I=\int\limits_0^2 3x^2f\left(x\right)\mathrm{d}x=1\Rightarrow 1=24-\int\limits_0^2 x^3.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^2 x^3.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=23\Leftrightarrow \frac{4}{23}\int\limits_0^2 x^3.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=4$

$\Leftrightarrow \frac{4}{23}\int\limits_0^2 x^3.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x$, (theo giả thiết: $\int\limits_0^1\left[f'\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x=4$)

$\Leftrightarrow \int\limits_0^2\left[\frac{4}{23}x^3.f'\left(x\right)-\left[f'\left(x\right)\right]^2\right]\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow \int\limits_0^2 f'\left(x\right)\left[\frac{4}{23}x^3-f'\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow \frac{4}{23}x^3-f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=\frac{4}{23}x^3\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{1}{23}x^4+C$

Với $f\left(2\right)=3\Rightarrow 3=\frac{16}{23}+C\Rightarrow C=\frac{53}{23}$.

Khi đó: $f(x)=\frac{1}{23}x^4+\frac{53}{23}$.

Vậy $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\left(\frac{1}{23}x^4+\frac{53}{23}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{115}x^5+\frac{53}{23}x\right)\Big|_0^2=\frac{562}{115}$.

Câu 60. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=4$, $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=5$ và $\int_0^1 x.f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{15}{19}$ **B.** $\frac{17}{4}$ **C.** $\frac{17}{18}$ **D.** $\frac{15}{4}$

Lời giải

Tính: $I=\int_0^1 x.f(x)\mathrm{d}x$. Đặt: $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{2}x^2\end{cases}$

Ta có: $I=\frac{1}{2}x^2.f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)\mathrm{d}x=2-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)\mathrm{d}x$, (vì $f(1)=4$).

Mà: $\int_0^1 x.f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{1}{2}=2-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int_0^1 x^2f'(x)\mathrm{d}x=5$, (theo giả thiết: $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=5$) $\Leftrightarrow\int_0^1 x^2f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int_0^1\left(x^2f'(x)-\left[f'(x)\right]^2\right)\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int_0^1 f'(x).\left[x^2-f'(x)\right]\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow x^2-f'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x^2\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}x^3+C$.

Với $f(1)=4\Rightarrow C=\frac{11}{3}$.

Khi đó: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{3}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{3}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{12}x^4+\frac{11}{3}x\right)\Big|_0^1=\frac{15}{4}$.

Câu 61. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $f(2)=6$, $\int_0^2\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=7$ và $\int_0^2 x.f(x)\mathrm{d}x=\frac{17}{2}$. Tích phân $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 8 **B.** 6 **C.** 7 **D.** 5

Lời giải

Tính: $I=\int_0^2 x.f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt: $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{2}x^2\end{cases}$

Ta có: $I=\frac{1}{2}x^2.f(x)\Big|_0^2-\frac{1}{2}\int_0^2 x^2f'(x)\mathrm{d}x=12-\frac{1}{2}\int_0^2 x^2f'(x)\mathrm{d}x$, (vì $f(2)=6$).

Theo giả thiết: $\int_0^2 x.f(x)\mathrm{d}x=\frac{17}{2}\Rightarrow\frac{17}{2}=12-\frac{1}{2}\int_0^2 x^2f'(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int_0^2 x^2f'(x)\mathrm{d}x=7$

$\Leftrightarrow\int_0^2 x^2f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int_0^2\left(x^2f'(x)-\left[f'(x)\right]^2\right)\mathrm{d}x=0$

$\Leftrightarrow\int_0^2 f'(x).\left[x^2-f'(x)\right]\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow x^2-f'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x^2\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}x^3+C$.

Với $f(2)=6\Rightarrow C=\frac{10}{3}$.

Khi đó: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{10}{3}$.

Vậy $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{10}{3}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{12}x^4+\frac{10}{3}x\right)\Big|_0^2=8$.

Câu 62. **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;3]$ thỏa mãn $f(3)=6$, $\int_0^3\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=2$ và $\int_0^3 x^2.f(x)\mathrm{d}x=\frac{154}{3}$. Tích phân $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{53}{5}$ **B.** $\frac{117}{20}$ **C.** $\frac{153}{5}$ **D.** $\frac{13}{5}$

Lời giải

Tính $I=\int_0^3 x^2.f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=x^2\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\frac{1}{3}x^3\end{cases}$.

Ta có $I=\frac{1}{3}x^3.f(x)\Big|_0^3-\frac{1}{3}\int_0^3 x^3f'(x)\mathrm{d}x=54-\frac{1}{3}\int_0^3 x^3f'(x)\mathrm{d}x$, (vì $f(3)=6$).

Theo giả thiết: $\int_0^3 x^2.f(x)\mathrm{d}x=\frac{154}{3}\Rightarrow\frac{154}{3}=54-\frac{1}{3}\int_0^3 x^3f'(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int_0^3 x^3f'(x)\mathrm{d}x=8\Leftrightarrow\int_0^3 x^3f'(x)\mathrm{d}x=4\int_0^3\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^3\left(x^3f'(x)-4\left[f'(x)\right]^2\right)\mathrm{d}x=0$

$\Leftrightarrow\int_0^3 f'(x)\left[x^3-4f'(x)\right]\mathrm{d}x=0$.

$\Rightarrow x^3-4f'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{x^3}{4} \Rightarrow f(x)=\dfrac{x^4}{16}+C$.

Với $f(3)=6 \Rightarrow C=\dfrac{15}{16}$.

Khi đó: $f(x)=\dfrac{x^4}{16}+\dfrac{15}{16}$.

Vậy $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^3\left(\dfrac{1}{16}x^4+\dfrac{15}{16}\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{1}{80}x^5+\dfrac{15}{16}x\right)\Big|_0^3=\dfrac{117}{20}$.

Câu 63. **(Chuyên Vĩnh Phúc Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=2$, $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=8$ và $\int\limits_0^1 x^3.f(x)\mathrm{d}x=10$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{2}{285}$ **B.** $\dfrac{194}{95}$ **C.** $\dfrac{116}{57}$ **D.** $\dfrac{584}{285}$

Lời giải

Tính: $I=\int\limits_0^1 x^3.f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt: $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=x^3\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=\dfrac{1}{4}x^4\end{cases}$.

Ta có: $I=\dfrac{1}{4}x^4.f(x)\Big|_0^1-\dfrac{1}{4}\int\limits_0^1 x^4f'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\int\limits_0^1 x^4f'(x)\mathrm{d}x$, (vì $f(1)=2$).

Theo giả thiết: $\int\limits_0^1 x^3.f(x)\mathrm{d}x=10 \Rightarrow \int\limits_0^1 x^4f'(x)\mathrm{d}x=-38$

$\Leftrightarrow 8.\int\limits_0^1 x^4f'(x)\mathrm{d}x=-38.8 \Leftrightarrow 8.\int\limits_0^1 x^4f'(x)\mathrm{d}x=-38.\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^1\left(8x^4f'(x)+38\left[f'(x)\right]^2\right)\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 f'(x).\left[8x^4+38f'(x)\right]\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow 8x^4+38f'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{4}{19}x^4 \Rightarrow f(x)=-\dfrac{4}{95}x^5+C$.

Với $f(1)=2 \Rightarrow C=\dfrac{194}{95}$.

Khi đó: $f(x)=-\dfrac{4}{95}x^5+\dfrac{194}{95}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(-\dfrac{4}{95}x^5+\dfrac{194}{95}\right)\mathrm{d}x=\left(-\dfrac{2}{285}x^6+\dfrac{194}{95}x\right)\Big|_0^1=\dfrac{116}{57}$.

Câu 64. **(Bắc Giang - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$ và $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(x+1)\mathrm{e}^xf(x)\mathrm{d}x=\dfrac{e^2-1}{4}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=2-\mathrm{e}$. **B.** $I=\mathrm{e}-2$. **C.** $I=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$. **D.** $I=\dfrac{\mathrm{e}-1}{2}$.

Lời giải

Xét $A=\int\limits_0^1(x+1)\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=(x+1)e^x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=x\mathrm{e}^x\end{cases}$

Suy ra $A=x\mathrm{e}^x f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x=-\int\limits_0^1 xe^x f'(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_0^1 xe^x f'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1-e^2}{4}$

Xét $\int\limits_0^1 x^2e^{2x}\mathrm{d}x=e^{2x}\left(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\right)\Big|_0^1=\dfrac{e^2-1}{4}$

Ta có : $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x+2\int\limits_0^1 xe^x f'(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 x^2e^{2x}\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left(f'(x)+xe^x\right)^2\mathrm{d}x=0$

Suy ra $f'(x)+xe^x=0,\forall x\in[0;1]$ (do $\left(f'(x)+xe^x\right)^2\ge 0,\forall x\in[0;1]$)

$\Rightarrow f'(x)=-xe^x\Rightarrow f(x)=(1-x)e^x+C$

Do $f(1)=0$ nên $f(x)=(1-x)e^x$

Vậy $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1(1-x)e^x\mathrm{d}x=(2-x)e^x\Big|_0^1=e-2$.

Câu 65. **(Nam Định - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$.

Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{8}$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x=-\dfrac{\pi}{4}$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x)\mathrm{d}x$

A. $I=1$. **B.** $I=\dfrac{1}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Tính $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x=-\dfrac{\pi}{4}$. Đặt $\begin{cases}\sin 2x=u\\ f'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}v\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\cos 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}u\\ f(x)=v\end{cases}$, khi đó

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x=\sin 2x.f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x=\sin\dfrac{\pi}{2}.f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin 0.f(0)-2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x$

$=-2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x$.

Theo đề bài ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\mathrm{d}x=-\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{8}$.

Mặt khác ta lại có $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$.

Do $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[f(x)-\cos 2x\right]^2 \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[f^2(x)-2f(x).\cos 2x+\cos^2 2x\right]\mathrm{d}x = \left(\frac{\pi}{8}-2\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right)=0$ nên $f(x)=\cos 2x$.

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 4x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{4}$.

Câu 66. **(Chuyên Vinh - 2018).** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0)+f(1)=0$. Biết $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. π. **B.** $\frac{1}{\pi}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{3\pi}{2}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=\cos(\pi x) \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=-\pi\sin(\pi x)\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$. Khi đó:

$$\int_0^1 f'(x)\cos(\pi x)\mathrm{d}x = \cos(\pi x)f(x)\Big|_0^1 + \pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x$$

$$= -\left(f(1)+f(0)\right)+\pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

Cách 1: Ta có $\int_0^1 \left[f(x)-k\sin(\pi x)\right]^2\mathrm{d}x = \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x - 2k\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x + k^2\int_0^1 \sin^2(\pi x)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}-k+\frac{k^2}{2}=0\Leftrightarrow k=1.$$

Do đó $\int_0^1 \left[f(x)-\sin(\pi x)\right]^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow f(x)=\sin(\pi x)$. Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \sin(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$.

Cách 2: Sử dụng BĐT Holder.

$$\boxed{\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow f(x)=kg(x), \forall x\in[a;b]$.

Áp dụng vào bài ta có $\frac{1}{4}=\left[\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x\right]^2 \le \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x.\int_0^1 \sin^2(\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$,

suy ra $f(x)=k\sin(\pi x)$.

Mà $\int_0^1 f(x)\sin(\pi x)\,dx=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k\int_0^1 \sin^2(\pi x)\,dx=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k=1\Rightarrow f(x)=\sin(\pi x)$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx=\frac{2}{\pi}$.

Câu 67. **(THPT Trần Phú - Đà Nẵng - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)}{\cos x}dx=1$ và $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin x.\tan x.f(x)\right]dx=2$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x.f'(x)\,dx$ bằng:

A. 4. **B.** $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$. **D.** 6.

Lời giải

Ta có: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x.f'(x)\,dx$. Đặt $\begin{cases}u=\sin x\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\cos x dx\\ v=f(x)\end{cases}$.

$I=\sin x.f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x.f(x)\,dx=\frac{3\sqrt{2}}{2}-I_1$.

$2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin x.\tan x.f(x)\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\sin^2 x.\frac{f(x)}{\cos x}\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\left(1-\cos^2 x\right).\frac{f(x)}{\cos x}\right]dx$.

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{f(x)}{\cos x}\right]dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x.f(x)\,dx=1-I_1$.

$\Rightarrow I_1=-1\Rightarrow I=\frac{3\sqrt{2}}{2}+1=\frac{3\sqrt{2}+2}{2}$.

Câu 68. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa $f(1)=0$, $\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx=\frac{\pi^2}{8}$ và $\int_0^1\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)f(x)\,dx=\frac{1}{2}$. Tính $\int_0^1 f(x)\,dx$.

A. $\frac{\pi}{2}$. **B.** π. **C.** $\frac{1}{\pi}$. **D.** $\frac{2}{\pi}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ dv=\cos\frac{\pi x}{2}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\ v=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}\end{cases}$

Do đó $\int_0^1\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)f(x)\,dx=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}f(x)\Big|_0^1 - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)f'(x)\,dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)f'(x)\,dx = -\frac{\pi}{4}.$

Lại có: $\int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow I = \int_0^1 \left(-\frac{2}{\pi}.f'(x)\right)^2 dx - 2\left(-\frac{2}{\pi}\right)\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)f'(x)\,dx + \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$

$= \int_0^1 \left(-\frac{2}{\pi}f'(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2 dx = \frac{4}{\pi^2}\frac{\pi^2}{8} - \frac{2}{\pi}.\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = 0$

Vì $\left(-\frac{2}{\pi}f'(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2 \ge 0$ trên đoạn $[0;1]$ nên

$\int_0^1 \left(-\frac{2}{\pi}f'(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2 dx = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{\pi}f'(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$

Suy ra $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + C$ mà $f(1) = 0$ do đó $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right).$

Vậy $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{2}{\pi}.$

Câu 69. **(Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 1$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9$ và $\int_0^1 x^3 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\,dx$ bằng:

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{6}{5}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Ta có: $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9 \quad (1)$

- Tính $\int_0^1 x^3 f(x)\,dx = \frac{1}{2}.$

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^3.dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)\,dx \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \int_0^1 x^3 f(x)\,dx = \left(\frac{x^4}{4}.f(x)\right)\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4.f'(x)\,dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4.f'(x)\,dx$

$\Rightarrow \int_0^1 x^4.f'(x)\,dx = -1 \Rightarrow 18\int_0^1 x^4.f'(x)\,dx = -18 \quad (2)$

- Lại có: $\int_0^1 x^8 dx = \frac{x^9}{9}\Big|_0^1 = \frac{1}{9} \Rightarrow 81\int_0^1 x^8 dx = 9 \quad (3)$

- Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

$\int_0^1 \left[[f'(x)]^2 + 18x^4.f'(x) + 81x^8\right]dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x) + 9x^4\right]dx = 0$

$\Leftrightarrow \pi.\int_0^1 \left[f'(x)+9x^4\right]\mathrm{d}x=0$

Hay thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)+9x^4$, trục hoành Ox, các đường thẳng $x=0$, $x=1$ khi quay quanh Ox bằng 0

$\Rightarrow f'(x)+9x^4=0 \Rightarrow f'(x)=-9x^4 \Rightarrow f(x)=\int f'(x).\mathrm{d}x=-\frac{9}{5}x^4+C$.

Lại do $f(1)=1 \Rightarrow C=\frac{14}{5} \Rightarrow f(x)=-\frac{9}{5}x^5+\frac{14}{5}$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(-\frac{9}{5}x^5+\frac{14}{5}\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{3}{10}x^6+\frac{14}{5}x\right)\Big|_0^1=\frac{5}{2}$.

Câu 70. **(THPT Phan Chu Trinh - Đắc Lắc - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^1(x+1)\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$ và $f(1)=0$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. $\frac{\mathrm{e}-1}{2}$. **B.** $\frac{\mathrm{e}^2}{4}$. **C.** $\mathrm{e}-2$. **D.** $\frac{\mathrm{e}}{2}$.

Lời giải

- Tính : $I=\int_0^1(x+1)\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x=J+K$.

Tính $K=\int_0^1\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases}u=\mathrm{e}^x f(x)\\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\left[\mathrm{e}^x f(x)+\mathrm{e}^x f'(x)\right]\mathrm{d}x\\ v=x\end{cases}$

$\Rightarrow K=\left(x\mathrm{e}^x f(x)\right)\Big|_0^1-\int_0^1\left[x\mathrm{e}^x f(x)+x\mathrm{e}^x f'(x)\right]\mathrm{d}x=-\int_0^1 x\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x\ \ (\text{do } f(1)=0)$

$\Rightarrow K=-J-\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow I=J+K=-\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x$.

- Kết hợp giả thiết ta được :

$\begin{cases}\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}\\ -\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4} & (1)\\ 2\int_0^1 x\mathrm{e}^x f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{e}^2-1}{2} & (2)\end{cases}$

- Mặt khác, ta tính được : $\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$ (3).

- Cộng vế với vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được:

$\int_0^1\left(\left[f'(x)\right]^2+2x\mathrm{e}^x f'(x)+x^2\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \int_o^1\left(f'(x)+x\mathrm{e}^x\right)^2\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \pi\int_o^1\left(f'(x)+x\mathrm{e}^x\right)^2\mathrm{d}x=0$

hay thể tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)+x\mathrm{e}^x$, trục Ox, các đường thẳng $x=0$, $x=1$ khi quay quanh trục Ox bằng 0

$\Rightarrow f'(x)+x\mathrm{e}^x=0 \Leftrightarrow f'(x)=-x\mathrm{e}^x$

$\Rightarrow f(x)=-\int xe^x dx=(1-x)e^x+C$.

- Lại do $f(1)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=(1-x)e^x$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (1-x)e^x dx=\left((1-x)e^x\right)\Big|_0^1+\int_0^1 e^x dx=-1+e^x\Big|_0^1=e-2$

Câu 71. **(Sở Phú Thọ - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\int_1^2 (x-1)^2 f(x)dx=-\frac{1}{3}$, $f(2)=0$ và $\int_1^2 [f'(x)]^2 dx=7$. Tính tích phân $I=\int_1^2 f(x)dx$.

A. $I=\frac{7}{5}$. **B.** $I=-\frac{7}{5}$. **C.** $I=-\frac{7}{20}$. **D.** $I=\frac{7}{20}$.

Lời giải

Đặt $u=f(x)\Rightarrow du=f'(x)dx$, $dv=(x-1)^2 dx\Rightarrow v=\frac{(x-1)^3}{3}$

Ta có $-\frac{1}{3}=\int_1^2 (x-1)^2 f(x)dx=\frac{(x-1)^3}{3}.f(x)\Big|_1^2-\int_1^2 \frac{(x-1)^3}{3}f'(x)dx$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\int_1^2 (x-1)^3 f'(x)dx\Leftrightarrow \int_1^2 (x-1)^3 f'(x)dx=1\Rightarrow -\int_1^2 2.7(x-1)^3 f'(x)dx=-14$

Tính được $\int_1^2 49(x-1)^6 dx=7\Rightarrow \int_1^2 [f'(x)]^2 dx-\int_1^2 2.7(x-1)^3 f'(x)dx+\int_1^2 49(x-1)^6 dx=0$

$\Rightarrow \int_1^2 \left[7(x-1)^3-f'(x)\right]^2 dx=0\Rightarrow f'(x)=7(x-1)^3\Rightarrow f(x)=\frac{7(x-1)^4}{4}+C$.

Do $f(2)=0\Rightarrow f(x)=\frac{7(x-1)^4}{4}-\frac{7}{4}$.

Vậy $I=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\left[\frac{7(x-1)^4}{4}-\frac{7}{4}\right]dx=-\frac{7}{5}$.

Câu 72. **(THPT Quảng Yên - Quảng Ninh - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn: $f(1)=0,\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=7$ và $\int_0^1 x^2.f(x)dx=\frac{1}{3}$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$.

A. $I=1$. **B.** $I=\frac{7}{5}$. **C.** $I=4$. **D.** $I=\frac{7}{4}$.

Lời giải

Xét tích phân $\int_0^1 x^2.f(x)dx$.

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ dv=x^2dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\ v=\frac{x^3}{3}\end{cases}$

$\frac{1}{3}=\int_0^1 x^2.f(x)dx=\frac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)dx=-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)dx\Rightarrow\int_0^1 x^3 f'(x)dx=-1$

$\int_0^1 x^6\,dx=\frac{1}{7}$.

Ta có: $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x+14\int_0^1 x^3f'(x)\mathrm{d}x+49\int_0^1 x^6\,\mathrm{d}x=0\Rightarrow\int_0^1\left(f'(x)+7x^3\right)^2\mathrm{d}x=0$

Mà $\int_0^1\left(f'(x)+7x^3\right)^2\mathrm{d}x\ge 0$. Dấu "=" xảy ra khi $f'(x)+7x^3=0\Rightarrow f'(x)=-7x^3$

$\Rightarrow f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=-\int 7x^3\,\mathrm{d}x=-\frac{7x^4}{4}+C$.

$f(1)=0\Rightarrow C=\frac{7}{4}\Rightarrow f(x)=-\frac{7x^4}{4}+\frac{7}{4}$.

$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(-\frac{7x^4}{4}+\frac{7}{4}\right)\mathrm{d}x=-\frac{7x^5}{20}\Big|_0^1+\frac{7x}{4}\Big|_0^1=-\frac{7}{20}+\frac{7}{4}=\frac{7}{5}$.

Câu 73. **(Yên Phong 1 - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=3,\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=\frac{4}{11}$ và $\int_0^1 x^4f(x)dx=\frac{7}{11}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)dx$ là

A. $\frac{35}{11}$. **B.** $\frac{65}{21}$. **C.** $\frac{23}{7}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Xét $\int_0^1 x^4f(x)dx=\frac{7}{11}$

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\dv=x^4dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\v=\frac{x^5}{5}\end{cases}$

$\Rightarrow\int_0^1 x^4f(x)dx=\frac{1}{5}x^5f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{5}\int_0^1 x^5f'(x)dx=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\int_0^1 x^5f'(x)dx$ (vì $f(1)=3$)

$\Rightarrow\int_0^1 x^5f'(x)dx=5\left(\frac{3}{5}-\frac{7}{11}\right)=-\frac{2}{11}$.

Xét $\begin{cases}\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=\frac{4}{11}\\\int_0^1 x^5f'(x)dx=-\frac{2}{11}\\\int_0^1 x^{10}dx=\frac{1}{11}x^{11}\Big|_0^1=\frac{1}{11}\end{cases}$

$\Rightarrow\int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx+4\int_0^1 x^5f'(x)dx+4\int_0^1 x^{10}dx=0\Rightarrow\int_0^1\left[\left(f'(x)+2x^5\right)\right]^2dx=0$

$\Rightarrow f'(x)=-2x^5\Rightarrow f(x)=\frac{-x^6}{3}+C$. Do $f(1)=3\Rightarrow C=\frac{10}{3}$ nên

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(\frac{-x^6}{3}+\frac{10}{3}\right)dx=\frac{23}{7}$

Câu 74. **(THPT Bình Giang - Hải Dương - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ và thỏa mãn $f(2)=0$, $\int_1^2 (f'(x))^2\,dx=\frac{5}{12}+\ln\frac{2}{3}$ và $\int_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2}dx=-\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$. Tính tích phân $\int_1^2 f(x)dx$.

A. $\frac{3}{4}+2\ln\frac{2}{3}$. **B.** $\ln\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{3}{4}-2\ln\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{3}{4}+2\ln\frac{3}{2}$.

Lời giải

$\int_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2}dx=-\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$.

Đặt $\begin{cases} u=f(x)\Rightarrow du=f'(x)dx \\ dv=\frac{dx}{(x+1)^2}\Rightarrow v=-\frac{1}{x+1}\end{cases}$

$\int_1^2 \frac{f(x)}{(x+1)^2}dx=-\frac{f(x)}{x+1}\Big|_1^2+\int_1^2\frac{f'(x)}{x+1}dx=\frac{f(1)}{2}-\frac{f(2)}{3}+\int_1^2\frac{f'(x)}{x+1}dx=\frac{f(1)}{2}+\int_1^2\frac{f'(x)}{x+1}dx$

$\Rightarrow\int_1^2(f'(x))^2dx+\int_1^2\frac{f'(x)}{2}dx+\int_1^2\frac{f'(x)}{x+1}dx=0$

$\Rightarrow\int_1^2(f'(x))^2dx-\int_1^2\frac{f'(x)}{2}dx+\int_1^2\frac{f'(x)}{x+1}dx=0$

$\Leftrightarrow\int_1^2\left[(f'(x))^2+\frac{f'(x)}{x+1}-\frac{f'(x)}{2}\right]dx=0$

$\Leftrightarrow(f'(x))^2+\frac{f'(x)}{x+1}-\frac{f'(x)}{2}=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'(x)+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=C \\ f(x)=\frac{x}{2}-\ln|x+1|+C\end{array}\right.$

TH1: $f(x)=C, f(2)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=0$ (loại)

TH2: $f(x)=\frac{x}{2}-\ln|x+1|+C, f(2)=0\Leftrightarrow C=\ln 3-1\Rightarrow f(x)=\frac{x}{2}-\ln|x+1|+\ln 3-1$

$\int_1^2 f(x)dx=\frac{3}{4}-2\ln\frac{3}{2}$.

Câu 75. **(Sở Bạc Liêu - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1[f'(x)]^2dx=\frac{4}{3}-\ln 3$ và $\int_0^1\frac{4f(x)}{(2x+1)^2}dx=2\ln 3-\frac{8}{3}$. Tính tích phân $\int_0^1\frac{f(x)}{4}dx$ bằng.

A. $\frac{1-3\ln 3}{3}$. **B.** $\frac{4-\ln 3}{3}$. **C.** $\frac{-\ln 3}{16}$. **D.** $-\ln\frac{3}{16}$.

Lời giải

Ta tính. $\int_0^1 \frac{4f(x)}{(2x+1)^2}dx = 2\ln 3 - \frac{8}{3} \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{f(x)}{(2x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{2}{3}$

Đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \frac{1}{(2x+1)^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = -\frac{1}{2}.\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2} = \frac{x}{2x+1} \end{cases}$

$\frac{1}{2}\ln 3 - \frac{2}{3} = \int_0^1 \frac{f(x)}{(2x+1)^2}dx = -\frac{xf(x)}{2x+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xf'(x)}{2x+1}dx = -\int_0^1 \frac{x}{2x+1}f'(x)\,dx$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{2x+1}f'(x)dx = -\frac{1}{2}\ln 3 + \frac{2}{3} \Leftrightarrow 4\int_0^1 \frac{x}{2x+1}f'(x)dx = -2\ln 3 + \frac{8}{3}$

Tính tích phân: $\int_0^1 \left(\frac{x}{2x+1}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{2x}{2x+1}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2x+1}\right)^2 dx$

$= \frac{1}{4}\int_0^1 \left(1 - \frac{2}{2x+1} + \frac{1}{(2x+1)^2}\right)dx$

$= \frac{1}{4}\left(x - \ln|2x+1| - \frac{1}{2(2x+1)}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\ln 3$

$\Rightarrow 4\int_0^1 \left(\frac{x}{2x+1}\right)^2 dx = \frac{4}{3} - \ln 3$

$\Rightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2 dx - 4\int_0^1 \frac{x}{2x+1}f'(x)dx + 4\int_0^1 \left(\frac{x}{2x+1}\right)^2 dx = 0$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(f'(x) - \frac{2x}{2x+1}\right)^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{2x+1} = 1 - \frac{1}{2x+1}$

$\Rightarrow f(x) = x - \frac{1}{2}\ln(2x+1) + C$ vì $x \in (0;1)$

Vì $f(1) = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2}\ln 3 - 1$

$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{f(x)}{4}dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\ln(2x+1) + \frac{1}{2}\ln 3 - 1\right)dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\ln 3 - 1\right)dx - \frac{1}{8}\int_0^1 \ln(2x+1)dx$

$A = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\ln 3 - 1\right)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\ln 3 - x\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\ln 3$

$B = \int_0^1 \ln(2x+1)dx$ đặt $\begin{cases} u = \ln(2x+1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2}{2x+1}dx \\ x = x \end{cases}$

$\Rightarrow B = x\ln(2x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{2x+1}dx = \ln 3 - \left(x - \frac{1}{2}\ln(2x+1)\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\ln 3 - 1$

$\Rightarrow I = A - \frac{1}{8}B = -\frac{1}{16}\ln 3$

Câu 76. **(Sở Hưng Yên - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$; $\int_0^1 [f'(x)]^2\,dx=\frac{1}{30}$ và $\int_0^1 (2x-1)f(x)\,dx=-\frac{1}{30}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\,dx$ bằng

A. $\frac{11}{30}$. **B.** $\frac{11}{12}$. **C.** $\frac{11}{4}$. **D.** $\frac{1}{30}$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ dv=(2x-1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=f'(x)dx \\ v=x^2-x \end{cases}$.

Suy ra $\int_0^1 (2x-1)f(x)\,dx=(x^2-x)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 (x^2-x)f'(x)\,dx=-\int_0^1 (x^2-x)f'(x)\,dx$

$\Rightarrow \int_0^1 (x^2-x)f'(x)\,dx=\frac{1}{30}$

Ta có: $\int_0^1 (x^2-x)^2\,dx=\int_0^1 (x^4-2x^3+x^2)\,dx=\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{30}$.

Do đó, $\int_0^1 [f'(x)]^2\,dx-2\int_0^1 (x^2-x)f'(x)\,dx+\int_0^1 (x^2-x)^2\,dx=0 \Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x)-(x^2-x)]^2\,dx=0$

$\Rightarrow f'(x)=x^2-x \Rightarrow f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+C$.

Vì $f(0)=1$ nên $C=1 \Rightarrow f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+1$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+1\right)dx=\left(\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{6}+x\right)\Big|_0^1=\frac{11}{12}$.

Câu 77. **(Sở Nam Định - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\,dx=\frac{\pi}{8}$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\,dx=-\frac{\pi}{4}$. Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x)\,dx$.

A. $I=1$. **B.** $I=\frac{1}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\frac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x)\sin 2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,df(x)=[f(x)\sin 2x]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,d\sin 2x$

$=f\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2.\frac{\pi}{4}\right)-f(0)\sin(2.0)-2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x\,dx$

$= f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x dx = -2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x dx$.

Do đó $2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x dx = \frac{\pi}{4}$.

Mặt khác: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 4x)dx = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}$.

Bởi vậy:

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\cos 2x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x dx = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[f^2(x) - 2f(x)\cos 2x + \cos^2 2x\right]dx = 0$

$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[f(x) - \cos 2x\right]^2 dx = 0 \Rightarrow f(x) = \cos 2x$.

Nên:

$I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 4x dx = \frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{4}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 78. Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(2)=16$ và $\int_0^2 f(x)dx = 4$. Tích phân $\int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx$ bằng

A. 112. **B.** 12. **C.** 56. **D.** 144.

Lời giải

Đặt $t = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2t \Rightarrow dx = 2dt$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 4 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$. Do đó $\int_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int_0^2 4tf'(t)dt = \int_0^2 4xf'(x)dx$.

Đặt $\begin{cases} u = 4x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 4dx \\ v = f(x) \end{cases}$.

Suy ra $\int_0^2 4xf'(x)dx = \left[4xf(x)\right]\Big|_0^2 - \int_0^2 4f(x)dx = 8f(2) - 4\int_0^2 f(x)dx = 8.16 - 4.4 = 112.$

Câu 79. **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2)=16, \int_0^2 f(x)dx = 4$. Tính $I = \int_0^1 x.f'(2x)dx$.

A. 7. **B.** 12. **C.** 20. **D.** 13.

Lời giải

Đặt $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx$. Với $x = 0 \Rightarrow t = 0$; Với $x = 1 \Rightarrow t = 2$.

Suy ra: $I=\int_0^2 \frac{t}{2}f'(t)\frac{\mathrm{d}t}{2}=\frac{1}{4}\int_0^2 tf'(t)\mathrm{d}t \ =\frac{1}{4}\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$.

Ta có $I=\frac{1}{4}\left[xf(x)\Big|_0^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{4}\left[2f(2)-0f(0)-4\right]=\frac{1}{4}(2.16-4)=7$.

Câu 80. **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=10$, $f(1)=\cot 1$. Tính tích phân $I=\int_0^1\left[f(x)\tan^2 x+f'(x)\tan x\right]\mathrm{d}x$.

A. $1-\ln(\cos 1)$. **B.** -1. **C.** -9. **D.** $1-\cot 1$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

$+\ I=\int_0^1\left[f(x)\tan^2 x+f'(x)\tan x\right]\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\tan^2 x\mathrm{d}x+\int_0^1 f'(x)\tan x\mathrm{d}x \quad (1)$.

+ Tính $J=\int_0^1 f'(x)\tan x\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\tan x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}$, ta có $\begin{cases}\mathrm{d}u=(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$.

$\Rightarrow J=f(x).\tan x\Big|_0^1-\int_0^1 f(x).(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x$

$=f(1).\tan 1-f(0).\tan 0-\int_0^1 f(x).\tan^2 x\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

$=\cot 1.\tan 1-\int_0^1 f(x).\tan^2 x\mathrm{d}x-10$

$=1-\int_0^1 f(x).\tan^2 x\mathrm{d}x-10=-9-\int_0^1 f(x).\tan^2 x\mathrm{d}x$.

Thay J vào (1) ta được:

$I=\int_0^1 f(x)\tan^2 x\mathrm{d}x+\left(-9-\int_0^1 f(x).\tan^2 x\mathrm{d}x\right)=-9$.

Cách 2:

Ta có: $\left(f(x)\tan x\right)'=f'(x)\tan x+f(x)\left(\tan^2 x+1\right)=f'(x)\tan x+f(x)\tan^2 x+f(x)$

$\Rightarrow f'(x)\tan x+f(x)\tan^2 x=\left[f(x)\tan x\right]'-f(x)$.

$\Rightarrow I=\int_0^1\left[f(x)\tan^2 x+f'(x)\tan x\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\left\{\left[f(x)\tan x\right]'-f(x)\right\}\mathrm{d}x$

Nguyễn Bảo Vương

$= f(x)\tan x\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\,dx = f(1)\tan 1 - 10 = \cot 1.\tan 1 - 10 = -9$.

Câu 81. **(Chuyên Lào Cai - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;3]$ thỏa mãn $f(3)=0$, $\int_0^3 [f'(x)]^2 dx = \frac{7}{6}$ và $\int_0^3 \frac{f(x)}{\sqrt{x+1}}dx = -\frac{7}{3}$. Tích phân $\int_0^3 f(x)dx$ bằng:

A. $-\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{-97}{30}$. **C.** $\frac{7}{6}$. **D.** $\frac{-7}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Xét: $\int_0^3 \frac{f(x)}{\sqrt{x+1}}dx = -\frac{7}{3}$

Đặt: $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = 2\left(\sqrt{x+1}-1\right) \end{cases}$

Khi đó: $\int_0^3 \frac{f(x)}{\sqrt{x+1}}dx = \left[2\left(\sqrt{x+1}-1\right)f(x)\right]\Big|_0^3 - 2\int_0^3 \left(\sqrt{x+1}-1\right)f'(x)dx$

$\Rightarrow \int_0^3 \left(\sqrt{x+1}-1\right).f'(x)dx = \frac{7}{6}$ (1)

Mặt khác: $\int_0^3 \left(\sqrt{x+1}-1\right)^2 dx = \int_0^3 \left(x+2-2\sqrt{x+1}\right)dx = \frac{7}{6}$ (2)

$\int_0^3 [f'(x)]^2 dx = \frac{7}{6}$ (3)

Từ (1) và (2) suy ra: $\left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'(x)=\sqrt{x+1}-1 \end{array}\right.$

+) $f'(x)=0 \Rightarrow$ (3) vô lý

+) $f'(x)=\sqrt{x+1}-1 \Rightarrow f(x)=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-x+C$, mà $f(3)=0 \Rightarrow C=-\frac{7}{3}$

$\Rightarrow f(x)=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-x-\frac{7}{3}$

Vậy: $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 \left[\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-x-\frac{7}{3}\right]dx = -\frac{97}{30}$.

Câu 82. **(Chuyên - Vĩnh Phúc - lần 3 - 2019)** Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm liên tục trên **(0; 1)** thỏa mãn f(0) = 0 và $\int_0^1 f^2(x)\,dx = \frac{9}{2}$; $\int_0^1 f'(x).\cos\frac{\pi x}{2}dx = \frac{3\pi}{4}$. Tính $\int_0^1 f(x)\,dx$ bằng:

A. $\frac{2}{\pi}$. **B.** $\frac{1}{\pi}$. **C.** $\frac{6}{\pi}$. **D.** $\frac{4}{\pi}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_0^1 f'(x).\cos\frac{\pi x}{2}\mathrm{dx}=\frac{3\pi}{4}$.

Đặt $\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2}=u\\ f'(x)\mathrm{dx}=\mathrm{dv}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-\frac{\pi}{2}.\sin\frac{\pi x}{2}\mathrm{dx}\\ v=f(x)\end{cases}$

Suy ra: $\frac{3\pi}{4}=\cos\frac{\pi x}{2}.f(x)\Big|_0^1+\int_0^1\frac{\pi}{2}.f(x).\sin\frac{\pi x}{2}\mathrm{dx}$.

$\Rightarrow\frac{3\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{2}.f(1)-\cos 0.f(0)+\frac{\pi}{2}.\int_0^1 f(x).\sin\frac{\pi x}{2}\mathrm{dx}.$

$\Rightarrow\int_0^1 f(x).\sin\frac{\pi x}{2}\mathrm{dx}=\frac{3}{2}.$

Theo đề: $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{dx}=\frac{9}{2}$.

Mặt khác: $\int_0^1\sin^2\frac{\pi x}{2}\mathrm{dx}=\int_0^1\frac{1-\cos\pi x}{2}\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}$.

Nên ta có $\int_0^1\left[f^2(x)-6f(x).\sin\frac{\pi x}{2}+9\sin^2\frac{\pi x}{2}\right]\mathrm{dx}=\frac{9}{2}-6.\frac{3}{2}+9.\frac{1}{2}=0$.

$\Rightarrow\int_0^1\left(f(\mathrm{x})-3\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2\mathrm{dx}=0$.

Do hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên **(0; 1)** nên $f(\mathrm{x})=3\sin\frac{\pi x}{2}$.

Suy ra $\int_0^1 f(x)\mathrm{dx}=\int_0^1 3\sin\frac{\pi x}{2}\mathrm{dx}=-3.\frac{2}{\pi}.\cos\frac{\pi x}{2}\Big|_0^1=\frac{6}{\pi}$.

Câu 83. **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa- 2019)** Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ sao cho $f(1)=1$ và $f(x).f(1-x)=e^{x^2-x}$, $\forall x\in[0;1]$. Tính $I=\int_0^1\frac{(2x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}dx$.

A. $I=-\frac{1}{60}$. **B.** $I=\frac{1}{10}$. **C.** $I=-\frac{1}{10}$. **D.** $I=\frac{1}{10}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases}u=2x^3-3x^2\\ dv=\frac{f'(x)}{f(x)}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=(6x^2-6x)dx\\ v=\ln f(x)\end{cases}$

Ta có $I=(2x^3-3x^2)\ln f(x)\Big|_0^1-\int_0^1(6x^2-6x)\ln f(x)dx$

$=\ln 1-\int_0^1(6x^2-6x)\ln f(x)dx=-\int_0^1(6x^2-6x)\ln f(x)dx$.

Đặt $t=1-x\Rightarrow dt=-dx.$

Ta có $I=\int_1^0\left[6\left(1-t^2\right)-6(1-t)\right]\ln f(1-t)\,dt=-\int_0^1\left(6t^2-6t\right)\ln f(1-t)\,dt$

$=-\int_0^1\left(6x^2-6x\right)\ln f(1-x)\,dx.$

Suy ra, $2I=-\int_0^1\left(6x^2-6x\right)\ln f(x)\,dx-\int_0^1\left(6x^2-6x\right)\ln f(1-x)\,dx$

$=-\int_0^1\left(6x^2-6x\right)\left[\ln f(x)+\ln f(1-x)\right]dx$

$=-\int_0^1\left(6x^2-6x\right)\ln f(x).f(1-x)\,dx=-\int_0^1\left(6x^2-6x\right)\ln e^{x^2-x}\,dx$

$=-6\int_0^1\left(x^2-x\right)^2dx=-6\int_0^1\left(x^4-2x^3+x^2\right)dx=-\frac{1}{5}.$

Như vậy, $2I=-\frac{1}{5}\Rightarrow I=-\frac{1}{10}$

Câu 84. **(Sở Nam Định-2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ và thỏa mãn: $f(2)=0,\int_1^2\left(f'(x)\right)^2dx=\frac{5}{12}+\ln\frac{2}{3}$ và $\int_1^2\frac{f(x)}{(x+1)^2}dx=-\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$. Tính tích phân $\int_1^2 f(x)dx$.

A. $\frac{3}{4}+2\ln\frac{3}{2}$. **B.** $\ln\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}-2\ln\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}+2\ln\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_1^2\frac{f(x)}{(x+1)^2}dx=-\frac{1}{x+1}f(x)\Big|_1^2+\int_1^2\frac{f'(x)}{x+1}dx=-\frac{1}{3}f(2)+\frac{1}{2}f(1)+\int_1^2\frac{f'(x)}{x+1}dx$

Do $f(2)=0$ nên $\int_1^2\frac{f'(x)}{x+1}dx+\frac{1}{2}f(1)=-\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$

Lại có $\int_1^2 f'(x)dx=f(2)-f(1)\Rightarrow f(1)=-\int_1^2 f'(x)dx$

Suy ra $\int_1^2\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right]f'(x)dx=-\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$

Mặt khác $\int_1^2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right)^2dx=\int_1^2\left(\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{4}\right)dx=\left(-\frac{1}{x+1}-\ln|x+1|+\frac{1}{4}x\right)\Big|_1^2=\frac{5}{12}+\ln\frac{2}{3}$

Vậy:

$\int_1^2\left(f'(x)\right)^2dx+2\int_1^2\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right]f'(x)dx+\int_1^2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right)^2dx$

$=\frac{5}{12}+\ln\frac{2}{3}+2\left(-\frac{5}{12}-\ln\frac{2}{3}\right)+\frac{5}{12}+\ln\frac{2}{3}=0$

$\Leftrightarrow\int_1^2\left(f'(x)+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right)^2dx=0\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}\Rightarrow f(x)=-\ln|x+1|+\frac{1}{2}x+\ln 3-1$

do $f(2)=0 \Rightarrow \int_1^2 f(x)dx=\left[\frac{1}{4}x^2-x+x\ln 3-\left((x+1)\ln(x+1)-(x+1)\right)\right]\Big|_1^2=\frac{3}{4}+2\ln\frac{2}{3}$.

Câu 85. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=3, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx=\frac{4}{11}$ và $\int_0^1 x^4 f(x)dx=\frac{7}{11}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)dx$ là:

A. $\frac{35}{11}$. **B.** $\frac{65}{21}$. **C.** $\frac{23}{7}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn C

- Xét $\int_0^1 x^4 f(x)dx=\frac{7}{11}$

Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ dv=x^4dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=f'(x)dx \\ v=\frac{x^5}{5} \end{cases}$

Khi đó $\int_0^1 x^4 f(x)dx=\left(\frac{x^5}{5}.f(x)\right)\Big|_0^1-\int_0^1 \frac{x^5}{5}.f'(x)dx=\frac{7}{11}$

Suy ra $\int_0^1 \frac{x^5}{5}.f'(x)dx=\frac{f(1)}{5}-\frac{7}{11}=\frac{-2}{55}$

Nguyễn Bảo Vương

- Mặt khác $\int_0^1 \left(\frac{x^5}{5}\right)^2 dx=\frac{1}{275}$
- Ta có:

$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx+2.10.\int_0^1 \frac{x^5}{5}.f'(x)dx+10^2.\int_0^1 \left(\frac{x^5}{5}\right)^2 dx=0$

$\Leftrightarrow \int_0^1 \left[f'(x)+2x^5\right]^2 dx=0$

$\Rightarrow f'(x)=-2x^5$

- Do đó $f(x)=\frac{-x^6}{3}+C$. Mà $f(1)=3$ nên $f(x)=\frac{-x^6}{3}+\frac{10}{3}$
- Khi đó $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{3}\int_0^1(-x^6+10)dx=\frac{23}{7}$

Câu 86. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;2]$ và thỏa mãn $\int_1^2 (x-2)^2 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{21}$, $f(1)=0$, $\int_1^2 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x=\frac{1}{7}$. Tính $\int_1^2 xf(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{-19}{60}$. **B.** $\frac{7}{120}$. **C.** $\frac{-1}{5}$. **D.** $\frac{13}{30}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$\int_1^2 (x-2)^2 f(x)\,dx = -\frac{1}{21}$.

Đặt: $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)\,dx$; $dv = (x-2)^2\,dx \Rightarrow v = \frac{(x-2)^3}{3}$.

$$\int_1^2 (x-2)^2 f(x)\,dx = \left(\frac{(x-2)^3}{3} f(x)\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{(x-2)^3}{3} f'(x)dx$$

$$= -\int_1^2 \frac{(x-2)^3}{3} f'(x)dx.$$

$\Rightarrow \int_1^2 (x-2)^3 f'(x)dx = \frac{1}{7}$.

Do đó, $\int_1^2 (x-2)^3 f'(x)dx = \int_1^2 \left[f'(x)\right]^2 dx = \frac{1}{7}$

Mà $\int_1^2 (x-2)^6 dx = \left(\frac{(x-2)^7}{7}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{7}$.

Vậy, $\int_1^2 \left((x-2)^6 - 2(x-2)^3 f'(x) + \left[f'(x)\right]^2\right)dx = \frac{1}{7} - \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = 0$

$\Rightarrow \int_1^2 \left((x-2)^3 - f'(x)\right)^2 dx = 0 \Rightarrow (x-2)^3 - f'(x) = 0$

$\Rightarrow f(x) = \frac{(x-2)^4}{4} + C$.

Mà $f(1) = 0 \Rightarrow C = \frac{-1}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{(x-2)^4}{4} - \frac{1}{4}$.

$$\int_1^2 xf(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_1^2 \left(x(x-2)^4 - x\right)dx = \frac{1}{4}\int_1^2 \left((x-2)^5 + 2(x-2)^4 - x\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{(x-2)^6}{6} + \frac{2(x-2)^5}{5} - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(-2 - \frac{1}{6} + \frac{2}{5} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{19}{60}.$$

Câu 87. **(Chuyên ĐH Vinh- 2019)** Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = f'(1) = 1$ và $f(1-x) + x^2.f''(x) = 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính tích phân $I = \int_0^1 xf'(x)dx$.

A. $I = 1$. **B.** $I = 2$. **C.** $I = \frac{1}{3}$. **D.** $I = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = f'(x) \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f''(x)dx \\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$.

Suy ra $I = \int_0^1 xf'(x)dx = \dfrac{x^2}{2}f'(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \dfrac{x^2}{2}f''(x)dx = \dfrac{1}{2} - \int_0^1 \dfrac{x^2}{2}f''(x)dx$.

Do $f(1-x) + x^2.f''(x) = 2x \Rightarrow \dfrac{x^2}{2}.f''(x) = x - \dfrac{1}{2}f(1-x)$.

Vậy $I = \dfrac{1}{2} - \int_0^1 \left[x - \dfrac{1}{2}f(1-x)\right]dx = \dfrac{1}{2}\int_0^1 f(1-x)dx$.

Đặt $t = 1-x$ suy ra $I = -\dfrac{1}{2}\int_1^0 f(t)dt = \dfrac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt = \dfrac{1}{2}\int_0^1 f(x)dx$.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = x \end{cases}$

Suy ra $I = \dfrac{1}{2}\left[xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)dx\right] \Leftrightarrow I = \dfrac{1}{2}(1-I) \Leftrightarrow I = \dfrac{1}{3}$.

Dạng 1.3 Biến đổi

Dạng 1. Bài toán tích phân liên quan đến đẳng thức $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$

Phương pháp:

Dễ dàng thấy rằng $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$

Do đó $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$

Suy ra $u(x)f(x) = \int h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dang 2. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + f(x) = h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với e^x ta dược $e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow \left[e^x \cdot f(x)\right]' = e^x \cdot h(x)$

Suy ra $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dang 3. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thúc $f'(x) - f(x) = h(x)$

Phương pháp:

Nhân hai vế với e^{-x} ta dược $e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow \left[e^{-x} \cdot f(x)\right]' = e^{-x} \cdot h(x)$

Suy ra $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 4. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$
(Phương trình vi phân tuyên tinh cấp 1)

Phương pháp:

Nhân hai vế với $e^{\int p(x)dx}$ ta được

$$f'(x) \cdot e^{\int p(x)dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot f(x) = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \Leftrightarrow \left[f(x) \cdot e^{\int p(x)dx}\right]' = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

Suy ra $f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} h(x)dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dang 5. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thúc $f'(x)+p(x)\cdot f(x)=0$

Phương pháp:

Chia hai vế với $f(x)$ ta được $\frac{f'(x)}{f(x)}+p(x)=0\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=-p(x)$

Suy ra $\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=-\int p(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\ln|f(x)|=-\int p(x)\mathrm{d}x$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Dạng 6. Bài toán tích phân liên quan đến biểu thức $f'(x)+p(x)\cdot[f(x)]^n=0$

Phương pháp:

Chia hai vế với $[f(x)]^n$ ta được $\frac{f'(x)}{[f(x)]^n}+p(x)=0\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{[f(x)]^n}=-p(x)$

Suy ra $\int\frac{f'(x)}{[f(x)]^n}\mathrm{d}x=-\int p(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1}=-\int p(x)\mathrm{d}x$

Câu 88. **(Mã 102 2018)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{3}$ và $f'(x)=x\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$ **B.** $-\frac{2}{9}$ **C.** $-\frac{7}{6}$ **D.** $-\frac{11}{6}$

Lời giải

Chọn A

Từ hệ thức đề cho: $f'(x)=x\left[f(x)\right]^2$ **(1),** suy ra $f'(x)\geq 0$ với mọi $x\in[1;2]$. Do đó $f(x)$ là hàm không giảm trên đoạn $[1;2]$, ta có $f(x)\leq f(2)<0$ với mọi $x\in[1;2]$.

Chia 2 vế hệ thức (1) cho $\left[f(x)\right]^2\Rightarrow\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=x,\forall x\in\left[1;2\right].$

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[1;2]$ hệ thức vừa tìm được, ta được:

$$\int_1^2\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}\mathrm{d}x=\int_1^2x\mathrm{d}x\Rightarrow\int_1^2\frac{1}{\left[f(x)\right]^2}\mathrm{d}f(x)=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{-1}{f(x)}\Big|_1^2=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{1}{f(1)}-\frac{1}{f(2)}=\frac{3}{2}$$

Do $f(2)=-\frac{1}{3}$ nên suy ra $f(1)=-\frac{2}{3}$.

Chú ý: có thể tự kiểm tra các phép biến đổi tích phân trên đây là có nghĩa.

Câu 89. **(Mã 104 2018)** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{5}$ và $f'(x)=x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{4}{35}$ **B.** $-\frac{71}{20}$ **C.** $-\frac{79}{20}$ **D.** $-\frac{4}{5}$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)=x^3\left[f(x)\right]^2\Rightarrow\frac{f'(x)}{f^2(x)}=x^3\Rightarrow\int_1^2\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int_1^2x^3\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{f(x)}\right)\Big|_1^2 = \frac{15}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(1)} = \frac{15}{4} \Leftrightarrow f(1) = -\frac{4}{5}.$$

Câu 90. (Minh họa 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thảo mãn $xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$?

A. $\frac{-17}{20}$. **B.** $\frac{-13}{4}$. **C.** $\frac{17}{4}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x \Rightarrow x^2 f(x^3) + xf(1-x^2) = -x^{11} + x^7 - 2x^2$.

Lấy tích phân hai vế cận từ 0 đến 1 ta được:

$$\int_0^1 x^2 f(x^3)\mathrm{d}x + \int_0^1 xf(1-x^2)\mathrm{d}x = \int_0^1 (-x^{11} + x^7 - 2x^2)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_0^1 f(x^3)\mathrm{d}(x^3) - \frac{1}{2}\int_0^1 f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2) = -\frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_1^0 f(t)\mathrm{d}t = -\frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = -\frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{6}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = -\frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = -\frac{3}{4}$$

Suy ra $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -\frac{3}{4}$.

Lấy tích phân hai vế cận từ -1 đến 0 ta được:

$$\int_{-1}^0 x^2 f(x^3)\mathrm{d}x + \int_{-1}^0 xf(1-x^2)\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 (-x^{11} + x^7 - 2x^2)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^0 f(x^3)\mathrm{d}(x^3) - \frac{1}{2}\int_{-1}^0 f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2) = -\frac{17}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^0 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = -\frac{17}{24}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^0 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = -\frac{17}{24}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^0 f(t)\mathrm{d}t = -\frac{17}{24} + \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x = \frac{-17}{24} + \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{-17}{24} - \frac{1}{2}.\frac{3}{4} = -\frac{13}{12}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x = \frac{-13}{4}$$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 91. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1-x)=6x^2f(x^3)-\frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(1-x)=6x^2f(x^3)-\frac{6}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow f(1-x)-6x^2f(x^3)=-\frac{6}{\sqrt{3x+1}}$

$\Leftrightarrow \int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x-\int_0^1 6x^2f(x^3)\mathrm{d}x=-\int_0^1 \frac{6}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$ (*).

Ta có $\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=-\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}(1-x)\overset{u=1-x}{=}-\int_1^0 f(u)\mathrm{d}u=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Và $\int_0^1 6x^2f(x^3)\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(x^3)\mathrm{d}(x^3)\overset{u=x^3}{=}2\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Ta có $(*)\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-6\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=6\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x=4$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=4$.

Câu 92. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $x^2f^2(x)+(2x-1)f(x)=xf'(x)-1$, với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ đồng thời thỏa $f(1)=-2$. Tính $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$

A. $-\frac{\ln 2}{2}-1$. **B.** $-\ln 2-\frac{1}{2}$. **C.** $-\ln 2-\frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{\ln 2}{2}-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x^2f^2(x)+2xf(x)+1=xf'(x)+f(x)\Leftrightarrow (xf(x)+1)^2=(xf(x)+1)'$

Do đó $\frac{(xf(x)+1)'}{(xf(x)+1)^2}=1\Rightarrow\int\frac{(xf(x)+1)'}{(xf(x)+1)^2}dx=\int 1dx\Rightarrow-\frac{1}{xf(x)+1}=x+c\Rightarrow xf(x)+1=-\frac{1}{x+c}$

Mặt khác $f(1)=-2$ nên $-2+1=-\frac{1}{1+c}\Rightarrow c=0\Rightarrow xf(x)+1=-\frac{1}{x}\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$

Vậy $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx=\left(-\ln x+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=-\ln 2-\frac{1}{2}$.

Câu 93. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+(x^2-1)f\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\right)=x^5-4x^3-5x^2+7x+6,\forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 7. **D.** $-\frac{19}{3}$.

Lời giải

Mặt khác : $(*)\Rightarrow\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2\left(x^2-1\right)f\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x=\int_1^2\left(x^5-4x^3-5x^2+7x+6\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\frac{4}{3}\int_1^2 f\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\frac{4}{3}\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{7}.$

Câu 94. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$ và $\left(f'(x)\right)^2+4\left(6x^2-1\right).f(x)=40x^6-44x^4+32x^2-4,\forall x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{23}{15}$. **B.** $\frac{13}{15}$. **C.** $-\frac{17}{15}$. **D.** $-\frac{7}{15}$.

Lời giải

Chọn B

$\left(f'(x)\right)^2+4\left(6x^2-1\right).f(x)=40x^6-44x^4+32x^2-4$

$\Rightarrow\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx+\int_0^1 4\left(6x^2-1\right).f(x)dx=\int_0^1\left(40x^6-44x^4+32x^2-4\right)dx.\quad(1)$

Xét $I=\int_0^1 4\left(6x^2-1\right).f(x)dx=\int_0^1\left(24x^2-4\right)f(x)dx$.

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\dv=\left(24x^2-4\right)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)dx\\v=8x^3-4x\end{cases}$.

$\Rightarrow I=\left(8x^3-4x\right).f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\left(8x^3-4x\right).f'(x)dx=4-2\int_0^1\left(4x^3-2x\right).f'(x)dx.$

Do đó:

$(1)\Rightarrow\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx-2\int_0^1\left(4x^3-2x\right).f'(x)dx+\int_0^1\left(4x^3-2x\right)^2dx=\int_0^1\left(56x^6-60x^4+36x^2-8\right)dx.$

$\Rightarrow\int_0^1\left[f'(x)-\left(4x^3-2x\right)\right]^2dx=0\Rightarrow f'(x)=4x^3-2x\Rightarrow f(x)=x^4-x^2+c.$

Mà $f(1)=1\Rightarrow c=1\Rightarrow f(x)=x^4-x^2+1.$

Do đó $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^4-x^2+1\right)dx=\frac{13}{15}.$

Câu 95. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2,\forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{-4}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{-10}{3}$

Lời giải

Chọn D

Cách 1.

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có: $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_0^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Từ $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2,\forall x\in\mathbb{R}\ (1)$

Thay $x=0$ vào (1) ta được $f(0)+f(2)=2\Rightarrow f(2)=2-f(0)=2-3=-1$.

Xét $I=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$

Đặt $x=2-t\Rightarrow dx=-dt$, đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=2\\x=2\Rightarrow t=0\end{cases}$

Khi đó $I=-\int_2^0 f(2-t)dt=\int_0^2 f(2-t)dt\Rightarrow I=\int_0^2 f(2-x)dx$

Do đó ta có $\int_0^2\left(f(x)+f(2-x)\right)\mathrm{d}x=\int_0^2\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow 2\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

Vậy $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\big|_0^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2.(-1)-\frac{4}{3}=-\frac{10}{3}$.

Cách 2.

Từ $\begin{cases}f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2\ (1)\\f(0)=3\end{cases}$

Thay $x=0;x=1$ vào (1) ta được $f(2)=-1;f(1)=\frac{1}{2}$.

Xét hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ từ giả thiết trên ta có $\begin{cases}c=3\\a+b+c=\frac{1}{2}\\4a+2b+c=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=3\\a=\frac{1}{2}\\b=-3\end{cases}$.

Vậy $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+3\Rightarrow f'(x)=x-3$ suy ra $\int_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 x(x-3)\mathrm{d}x=-\frac{10}{3}$.

Câu 96. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2;4]$ và $f'(x)>0,\forall x\in[2;4]$. Biết $4x^3f(x)=\left[f'(x)\right]^3-x^3,\forall x\in[2;4],f(2)=\frac{7}{4}$. Giá trị của $f(4)$ bằng

A. $\frac{40\sqrt{5}-1}{2}$. **B.** $\frac{20\sqrt{5}-1}{4}$. **C.** $\frac{20\sqrt{5}-1}{2}$. **D.** $\frac{40\sqrt{5}-1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x)>0,\forall x\in[2;4]$ nên hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[2;4]\Rightarrow f(x)\ge f(2)$ mà $f(2)=\frac{7}{4}$. Do đó: $f(x)>0,\forall x\in[2;4]$.

Từ giả thiết ta có: $4x^3f(x)=\left[f'(x)\right]^3-x^3\Leftrightarrow x^3\left[4f(x)+1\right]=\left[f'(x)\right]^3$

$\Leftrightarrow x.\sqrt[3]{4f(x)+1}=f'(x)\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}=x$.

Suy ra: $\int\frac{f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left[4f(x)+1\right]}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}=\frac{x^2}{2}+C\Leftrightarrow\frac{3}{8}\sqrt[3]{\left[4f(x)+1\right]^2}=\frac{x^2}{2}+C$.

$f(2)=\frac{7}{4}\Leftrightarrow\frac{3}{2}=2+C\Leftrightarrow C=-\frac{1}{2}$.

Vậy: $f(x)=\frac{\sqrt{\left[\frac{4}{3}\left(x^2-1\right)\right]^3}-1}{4}\Rightarrow f(4)=\frac{40\sqrt{5}-1}{4}$.

Câu 97. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;2]$ và thỏa $f(1)=0$, $(f'(x))^2+4f(x)=8x^2-32x+28$ với mọi x thuộc $[0;2]$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $-\frac{2}{3}$. **D.** $-\frac{14}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $I=\int_1^2 2f(x)\mathrm{d}x$.

Dùng tích phân từng phần, ta có: $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=2\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=2x-4\end{cases}$.

$I=(2x-4)f(x)\big|_1^2-\int_1^2(2x-4)f'(x)\mathrm{d}x=-\int_1^2(2x-4)f'(x)\mathrm{d}x$.

Ta có $(f'(x))^2+4f(x)=8x^2-32x+28\Rightarrow\int_1^2(f'(x))^2\mathrm{d}x+2\int_1^2 2f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2(8x^2-32x+28)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int_1^2(f'(x))^2\mathrm{d}x-2\int_1^2(2x-4)f'(x)\mathrm{d}x+\int_1^2(2x-4)^2\mathrm{d}x=\int_1^2(8x^2-32x+28)\mathrm{d}x+\int_1^2(2x-4)^2\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int_1^2[f'(x)-(2x-4)]^2\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow f'(x)=2x-4\Rightarrow f(x)=x^2-4x+C$, $C\in\mathbb{R}$.

Mà $f(1)=0\Rightarrow C=3\Rightarrow f(x)=x^2-4x+3\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(x^2-4x+3)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 98. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $f(x)+f(1-x)=\frac{x^2+2x+3}{x+1}$, $\forall x\in[0;1]$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. $\frac{3}{4}+2\ln 2$. **B.** $3+\ln 2$. **C.** $\frac{3}{4}+\ln 2$. **D.** $\frac{3}{2}+2\ln 2$.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết, ta có: $f(x)+f(1-x)=\frac{x^2+2x+3}{x+1}$, $\forall x\in[0;1]$ và $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ nên

$\int_0^1[f(x)+f(1-x)]\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^2+2x+3}{x+1}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{(x+1)^2+2}{x+1}\mathrm{d}x$ (1)

Đặt $1-x=t$ thì $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$, với $x=0\Rightarrow t=1$, với $x=1\Rightarrow t=0$

Do đó: $\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=-\int_1^0 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ (2).

Lại có $\int_0^1\frac{(x+1)^2+2}{x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x+1+\frac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}+x+2\ln|x+1|\right)\Big|_0^1=\frac{3}{2}+2\ln 2$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}+2\ln 2\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{4}+\ln 2$.

Câu 99. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f(x)+f(2-x)=2(x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+4$. Tính tích phân $I=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ ta được kết quả:

A. $I=\mathrm{e}+4$. **B.** $I=8$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\mathrm{e}+2$.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thuyết ta có $\int_0^2\left[3f(x)+f(2-x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^2\left[2(x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+4\right]\mathrm{d}x$ (*).

Ta tính $\int_0^2 f(2-x)\mathrm{d}x=-\int_0^2 f(2-x)\mathrm{d}(2-x)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Vì vậy $\int_0^2\left[3f(x)+f(2-x)\right]\mathrm{d}x=4\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Hơn nữa $\int_0^2 2(x-1)e^{x^2-2x+1}\mathrm{d}x=\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-2x+1}\mathrm{d}(x^2-2x+1)=\mathrm{e}^{x^2-2x+1}\Big|_0^2=0$ và $\int_0^2 4\mathrm{d}x=8$.

Suy ra $4\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=8\Leftrightarrow\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2$.

Câu 100. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $xf(x^5)+f(1-x^4)=x^{11}+x^8+x^6-3x^4+x+3,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{35}{6}$. **B.** $-\frac{15}{4}$. **C.** $-\frac{7}{24}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn D

Với $\forall x\in\mathbb{R}$ ta có: $xf(x^5)+f(1-x^4)=x^{11}+x^8+x^6-3x^4+x+3$

$\Rightarrow x^4f(x^5)+x^3f(1-x^4)=x^{14}+x^{11}+x^9-3x^7+x^4+3x^3$ (*)

$\Rightarrow\int_0^1 x^4f(x^5)\mathrm{d}x+\int_0^1 x^3f(1-x^4)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^{14}+x^{11}+x^9-3x^7+x^4+3x^3\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\frac{1}{5}\int_0^1 f(x^5)\mathrm{d}(x^5)-\frac{1}{4}\int_0^1 f(1-x^4)\mathrm{d}(1-x^4)=\frac{33}{40}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{5}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{33}{40}\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{11}{6}$

Mặt khác: $(*)\Rightarrow\int_{-1}^0 x^4f(x^5)\mathrm{d}x+\int_{-1}^0 x^3f(1-x^4)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0\left(x^{14}+x^{11}+x^9-3x^7+x^4+3x^3\right)\mathrm{d}x$

$(*)\Rightarrow\frac{1}{5}\int_{-1}^0 f(x^5)\mathrm{d}(x^5)-\frac{1}{4}\int_{-1}^0 f(1-x^4)\mathrm{d}(1-x^4)=-\frac{7}{24}$

$\Rightarrow\frac{1}{5}\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{7}{24}\Rightarrow\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x=5\left(-\frac{7}{24}+\frac{1}{4}.\frac{11}{6}\right)=\frac{5}{6}$.

Câu 101. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{2}{5};1\right]$ và thỏa mãn $2f(x)+5f\left(\frac{2}{5x}\right)=3x, \forall x\in\left[\frac{2}{5};1\right]$. Khi đó $I=\int\limits_{\frac{2}{15}}^{\frac{1}{3}}\ln 3x.f'(3x)dx$ bằng:

A. $\frac{1}{5}\ln\frac{2}{5}+\frac{3}{35}$. **B.** $\frac{1}{5}\ln\frac{5}{2}-\frac{3}{35}$. **C.** $-\frac{1}{5}\ln\frac{5}{2}-\frac{3}{35}$. **D.** $-\frac{1}{5}\ln\frac{2}{5}+\frac{3}{35}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Tự Luận

Ta có: $2f(x)+5f\left(\frac{2}{5x}\right)=3x, \forall x\in\left[\frac{2}{5};1\right]$ (1)

$\Leftrightarrow 2\frac{f(x)}{x}+5\frac{f\left(\frac{2}{5x}\right)}{x}=3, \forall x\in\left[\frac{2}{5};1\right]$

$\Leftrightarrow 2\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1}\frac{f(x)}{x}dx+5\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1}\frac{f\left(\frac{2}{5x}\right)}{x}dx=\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1}3dx=\frac{9}{5}$ (2)

Xét $I_1=5\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1}\frac{f\left(\frac{2}{5x}\right)}{x}dx$ đặt $u=\frac{2}{5x}\Rightarrow du=-\frac{2}{5x^2}dx\Rightarrow -\frac{2}{5}\frac{du}{u^2}=dx$.

Đổi cận: $\begin{cases}x=\frac{2}{5}\Rightarrow u=1\\ x=1\Rightarrow u=\frac{2}{5}\end{cases}$

$\Rightarrow I_1=-5\int\limits_{1}^{\frac{2}{5}}\frac{f(u)}{u}du=5\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1}\frac{f(u)}{u}du=5\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1}\frac{f(x)}{x}dx$

Từ (2) suy ra, $2\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1}\frac{f(x)}{x}dx+5\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1}\frac{f(x)}{x}dx=\frac{9}{5}$

$\Leftrightarrow\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1}\frac{f(x)}{x}dx=\frac{9}{35}$

Tính $I=\int\limits_{\frac{2}{15}}^{\frac{1}{3}}\ln 3x.f'(3x)dx$.

Đặt $t=3x\Rightarrow dt=3dx\Rightarrow\frac{1}{3}dt=dx$. Đổi cận: $\begin{cases}x=\frac{2}{15}\Rightarrow t=\frac{2}{5}\\ x=\frac{1}{3}\Rightarrow t=1\end{cases}$

$\Rightarrow I=\frac{1}{3}\int\limits_{\frac{2}{5}}^{1}\ln t.f'(t)dt$

Nguyễn Bảo Vương

Đặt: $\begin{cases} u = \ln t \\ dv = f'(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{1}{t}dt \\ v = f(t) \end{cases}$

$I = \dfrac{1}{3}(\ln t.f(t))\Big|_{\frac{2}{5}}^{1} - \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_{\frac{2}{5}}^{1} \dfrac{f(t)}{t}dt = -\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{2}{5}.f(\dfrac{2}{5}) - \dfrac{3}{35}$

Tính $2f(x) + 5f\left(\dfrac{2}{5x}\right) = 3x, \forall x \in \left[\dfrac{2}{5};1\right]$

Cho $x = 1; x = \dfrac{2}{5}$ vào (1) ta có hệ phương trình sau:

$\begin{cases} 2f(1) + 5f\left(\dfrac{2}{5}\right) = 3 \\ 2f\left(\dfrac{2}{5}\right) + 5f(1) = \dfrac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f\left(\dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{3}{5} \end{cases}$

Suy ra, $I = -\dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{5}\ln\dfrac{2}{5} - \dfrac{3}{35} = \dfrac{1}{5}\ln\dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{35}$.

Câu 102. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + 2xf(x^2) = 2x^7 + 3x^3 - x - 1$ với $x \in \mathbb{R}$.

Tính tích phân $\displaystyle\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x$.

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{3}{4}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có: $\displaystyle\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \ (*)$

Từ $f(x) + 2xf(x^2) = 2x^7 + 3x^3 - x - 1 \ (1)$

Thay $x = 1$ vào (1) ta được $f(1) + 2f(1) = 3 \Rightarrow f(1) = 1 \ (2)$

Mặt khác từ (1) ta có $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 2xf(x^2)\mathrm{d}x = \int_0^1 (2x^7 + 3x^3 - x - 1)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}(x^2) = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{4} \ (3)$

Thay $(2), (3)$ vào $(*)$ ta được $\displaystyle\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x = 1 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4}$

Câu 103. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$x^2 f(1-x) + 2f\left(\dfrac{2x-2}{x}\right) = \dfrac{-x^4 + x^3 + 4x - 4}{x}, \forall x \neq 0, x \neq 1$. Khi đó $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$ có giá trị là

A. 0. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra $f(1-x) + \dfrac{2}{x^2}f\left(\dfrac{2x-2}{x}\right) = \dfrac{-x^4 + x^3 + 4x - 4}{x^3}$

Ta có: $\int_1^2 f(1-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f\left(\frac{2x-2}{x}\right).\frac{2}{x^2}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{-x^4+x^3+4x-4}{x^3}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow -\int_1^2 f(1-x)\mathrm{d}(1-x)+\int_1^2 f\left(\frac{2x-2}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{2x-2}{x}\right)=\int_1^2\left(-x+1+\frac{4}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow -\int_0^{-1} f(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\left(-\frac{x^2}{2}+x-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\Big|_1^2$

$\Leftrightarrow \int_{-1}^0 f(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=0\Leftrightarrow\int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t=0.$

Vậy $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=0.$

Cách trắc nghiệm

Ta có: $x^2f(1-x)+2f\left(\frac{2x-2}{x}\right)=\frac{-x^4+x^3+4x-4}{x},\forall x\neq 0,x\neq 1$

$\Leftrightarrow x^2f(1-x)+2f\left(\frac{2x-2}{x}\right)=\frac{-x^4+x^3}{x}+\frac{4x-4}{x},\forall x\neq 0,x\neq 1$

$\Leftrightarrow x^2f(1-x)+2f\left(\frac{2x-2}{x}\right)=x^2(1-x)+2\left(\frac{2x-2}{x}\right),\forall x\neq 0,x\neq 1$

Chọn $f(x)=x\Rightarrow\int_{-1}^1 f(x).\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 x.\mathrm{d}x=0.$

Câu 104. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+(x^2-1)f\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\right)=x^5-4x^3-5x^2+7x+6,\forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{7}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 7. **D.** $-\frac{19}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Với $\forall x\in\mathbb{R}$ ta có : $f(x)+(x^2-1)f\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\right)=x^5-4x^3-5x^2+7x+6$ (*)

$\Rightarrow\int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{-2}^{-1}(x^2-1)f\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{-1}\left(x^5-4x^3-5x^2+7x+6\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x+\frac{4}{3}\int_{-2}^{-1} f\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\right)=-\frac{35}{3}$

$\Leftrightarrow\int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x+\frac{4}{3}\int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x=-\frac{35}{3}\Leftrightarrow\int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x=-5$

Mặt khác : $(*)\Rightarrow\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2(x^2-1)f\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}x=\int_1^2\left(x^5-4x^3-5x^2+7x+6\right)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\frac{4}{3}\int_1^2 f\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\frac{4}{3}\int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}.(-5)=7.$

Câu 105. (Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;2]$ và thỏa mãn điều kiện $f(x)=\sqrt{x+2}+xf\left(3-x^2\right)$.

Tích phân $I=\int_{-1}^{2} f(x)dx$ bằng

A. $I=\frac{14}{3}$. **B.** $I=\frac{28}{3}$. **C.** $I=\frac{4}{3}$. **D.** $I=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $I=\int_{-1}^{2}\left[\sqrt{x+2}+xf\left(3-x^2\right)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\sqrt{x+2}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{2}xf\left(3-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{14}{3}+\int_{-1}^{2}xf\left(3-x^2\right)\mathrm{d}x$.

Xét $\int_{-1}^{2}xf\left(3-x^2\right)\mathrm{d}x$ đặt $t=3-x^2\Rightarrow \mathrm{d}t=-2x\mathrm{d}x\Rightarrow x\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{2}$.

Đổi cận khi $x=-1\Rightarrow t=2$; $x=2\Rightarrow t=-1$. Suy ra $\int_{-1}^{2}xf\left(3-x^2\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_{2}^{-1}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}f(t)\mathrm{d}t$.

Khi đó $I=\frac{14}{3}+\int_{-1}^{2}xf\left(3-x^2\right)dx=\frac{14}{3}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}f(t)\mathrm{d}t=\frac{14}{3}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow I=\frac{14}{3}+\frac{I}{2}\Rightarrow I=\frac{28}{3}$.

Câu 106. (Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0;1]$đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0)=-1, f'(x)<0, \left[f'(x)\right]^2=f''(x), \forall x\in[0;1]$. Giá trị $f(0)-f(1)$ thuộc khoảng

A. $(1;2)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn C

$$\left[f'(x)\right]^2=f''(x)\Leftrightarrow\frac{f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}=1\Leftrightarrow\int\frac{f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}dx=\int dx\Leftrightarrow\frac{-1}{f'(x)}=x+C$$

$$f'(0)=-1\Rightarrow\frac{-1}{-1}=0+C\Leftrightarrow C=1\Rightarrow\frac{-1}{f'(x)}=x+1\Leftrightarrow f'(x)=\frac{-1}{x+1}$$

$$f(0)-f(1)=\int_{1}^{0}f'(x)dx=\int_{1}^{0}\frac{-1}{x+1}dx=-\ln|x+1|\Big|_{1}^{0}=\ln 2\in(0;1)$$

Câu 107. (Chuyên Bến Tre - 2020) Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=x^3-2x, \forall x\in R$ và $f(0)=f'(0)=2$. Tính giá trị của $T=f^2(2)$

A. $\frac{160}{15}$ **B.** $\frac{268}{15}$ **C.** $\frac{4}{15}$ **D.** $\frac{268}{30}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left[f'(x)\right]^2+f(x).f''(x)=x^3-2x, \forall x\in R$

$$\Leftrightarrow\left(f'(x).f(x)\right)'=x^3-2x, \forall x\in R$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta có:

$$\int \left(f'(x).f(x) \right)' dx = \int \left(x^3 - 2x \right) dx$$

$$\Leftrightarrow f'(x).f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + C$$

Theo đề ra ta có: $f'(0).f(0) = C = 4$

Suy ra:

$$\int_0^2 f'(x).f(x).dx = \int_0^2 \left(\frac{x^4}{4} - x^2 + 4 \right) dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2}\Big|_0^2 = \frac{104}{15} \Leftrightarrow f^2(2) = \frac{268}{15}.$$

Câu 108. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho $f\left(x\right)$ là hàm số liên tục trên tập xác đinh $\mathbb{R}^+$ và thỏa mãn $f\left(x^2+3x+1\right)=x+2$. Tính $I=\int_1^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

A. $\frac{37}{6}$. **B.** $\frac{527}{3}$. **C.** $\frac{61}{6}$. **D.** $\frac{464}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$f\left(x^2+3x+1\right)=x+2$$
$$\Leftrightarrow \left(2x+3\right)f\left(x^2+3x+1\right)=\left(2x+3\right)\left(x+2\right)$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(2x+3\right)f\left(x^2+3x+1\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 \left(2x+3\right)\left(x+2\right)\mathrm{d}x=\frac{61}{6}$$

Đặt $t=x^2+3x+1\Rightarrow \mathrm{d}t=\left(2x+3\right)\mathrm{d}x$

x	0	1
t	1	5

Suy ra $\int_1^5 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{61}{6}$.

Câu 109. (Chuyên Chu Văn An - 2020) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục, có đạo hàm trên R thỏa mãn điều kiện $f(x)+x\left(f'(x)-2\sin x\right)=x^2\cos x, x\in R$ và $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf''\left(x\right)dx$

A. 0. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** 1. **D.** π.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết $f(x)+x\left(f'(x)-2\sin x\right)=x^2\cos x$

$\Leftrightarrow f(x)+xf'(x)=x^2\cos x+2x\sin x$

$\Leftrightarrow \left(xf(x)\right)' =\left(x^2\sin x\right)'$

$\Leftrightarrow xf(x) =x^2\sin x+C$

Mặt khác: $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=x\sin x.$

Ta có: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} xf''(x)\,dx=xf'(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\,dx=x^2\cos x+2x\sin x-2f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=x^2\cos x+2x\sin x-2x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=x^2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0$

Câu 110. (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0)=\frac{2}{3}$ và $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)f'(x)=1,\forall x\ge -1$. Biết rằng $\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\frac{a\sqrt{2}+b}{15}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $T=a+b$.

A. -8. **B.** -24. **C.** 24. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)f'(x)=1,\forall x\ge -1.$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$\Rightarrow \int f'(x)dx=\int\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}dx$

$\Rightarrow \int f'(x)dx=\int\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)dx$

$\Rightarrow f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C.$

Mặt khác: $f(0)=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+C\Leftrightarrow C=0\Rightarrow f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}.$

Do đó: $\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\int\limits_0^1\left(\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)dx=\left(\frac{2}{3}.\frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5}-\frac{2}{3}.\frac{2}{5}\sqrt{x^5}\right)\Big|_0^1=\frac{16\sqrt{2}-8}{15}.$

$\Rightarrow a=16;b=-8\Rightarrow T=a+b=8.$

Câu 111. (Chuyên Hưng Yên - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $4x.f\left(x^2\right)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$. Tính $I=\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{16}$. **C.** $\frac{\pi}{20}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Lấy tích phân hai vế, ta có $\int\limits_0^1\left[4x.f\left(x^2\right)+3f(1-x)\right]dx=\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx\ (*).$

Xét tích phân $J=\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$. Đặt $x=\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$. Khi đó, ta có

$$J=\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos t\mathrm{d}t=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

Xét tích phân $K=\int\limits_0^1 4x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x$. Đặt $t=x^2\Rightarrow \mathrm{d}t=2x\mathrm{d}x$. Khi đó, ta có

$$K=\int\limits_0^1 4x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x=2\int\limits_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=2\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x.$$

Xét tích phân $L=\int\limits_0^1 3f\left(1-x\right)\mathrm{d}x$. Đặt $t=1-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Khi đó, ta có

$$L=\int\limits_0^1 3f\left(1-x\right)\mathrm{d}x=3\int\limits_1^0 f\left(t\right)(-\mathrm{d}t)=3\int\limits_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=3\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x.$$

Vậy $(*)\Leftrightarrow 5\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{20}$.

Câu 112. (Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020) Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$. Biết $f\left(3\right)=3$ và $xf'\left(2x+1\right)-f\left(2x+1\right)=x^3,\forall x\in\left(0;+\infty\right)$. Giá trị của $\int\limits_3^5 f\left(x\right)dx$ bằng

A. $\frac{914}{3}$. **B.** $\frac{59}{3}$. **C.** $\frac{45}{4}$. **D.** 88.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$xf'\left(2x+1\right)-f\left(2x+1\right)=x^3\Leftrightarrow\frac{2x^2f'\left(2x+1\right)-2xf\left(2x+1\right)}{x^4}=2,\forall x\in\left(0;+\infty\right).$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{f\left(2x+1\right)}{x^2}\right)'=2\Leftrightarrow\frac{f\left(2x+1\right)}{x^2}=2x+C.\left(1\right)$$

Cho $x=1$ từ $\left(1\right)\Rightarrow\frac{f\left(3\right)}{1^2}=2.1+C\Leftrightarrow\frac{3}{1^2}=2.1+C\Rightarrow C=1\Rightarrow f\left(2x+1\right)=x^2\left(2x+1\right)=2x^3+x^2.$

$$\Rightarrow\int\limits_1^2 f\left(2x+1\right)dx=\int\limits_1^2\left(2x^3+x^2\right)dx=\left(2\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2=\frac{59}{6}.$$

$$\Rightarrow\int\limits_3^5 f\left(x\right)dx=2\int\limits_1^2 f\left(2x+1\right)dx=\frac{59}{3}.$$

Câu 113. (Chuyên Thái Bình - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và đồng biến trên $[1;4]$, thỏa mãn $x+2xf(x)=[f'(x)]^2$ với mọi $x\in[1;4]$. Biết $f(1)=\frac{3}{2}$, tính $I=\int_1^4 f(x)dx$

A. $\frac{1188}{45}$. **B.** $\frac{1187}{45}$. **C.** $\frac{1186}{45}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Do $f(x)$ đồng biến trên $[1;4]$ nên $f(x)\ge f(1)=\frac{3}{2}>-\frac{1}{2}$, ngoài ra $f'(x)\ge 0,\forall x\in[1;4]$. Khi đó ta có biến đổi sau:

$$x+2xf(x)=[f'(x)]^2\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{\sqrt{2f(x)+1}}=\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2f(x)+1}\right)'=\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C\right)'\Leftrightarrow\sqrt{2f(x)+1}=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$$

Mà $f(1)=\frac{3}{2}\Rightarrow C=\frac{4}{3}\Rightarrow f(x)=\frac{\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{4}{3}\right)^2-1}{2}=\frac{2}{9}x^3+\frac{8}{9}\sqrt{x^3}+\frac{7}{18}$.

Vậy $I=\int_1^4 f(x)dx=\left(\frac{1}{18}x^4+\frac{16}{45}x^2\sqrt{x}+\frac{7}{18}x\right)\Big|_1^4=\frac{1186}{45}$.

Câu 114. (Chuyên Thăng Long - Đà Lạt - 2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thảo mãn: $7f(x)+4f(4-x)=2018x\sqrt{x^2+9}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{2018}{11}$. **B.** $\frac{7063}{3}$. **C.** $\frac{98}{3}$. **D.** $\frac{197764}{33}$.

Lời giải

Ta có: $7f(x)+4f(4-x)=2018x\sqrt{x^2+9}\Rightarrow f(x)=-\frac{4}{7}f(4-x)+\frac{2018}{7}x\sqrt{x^2+9}$.

Khi đó $I=\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{4}{7}\int_0^4 f(4-x)\mathrm{d}x+\frac{2018}{7}\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\mathrm{d}x$ (1).

Xét: $\int_0^4 f(4-x)\mathrm{d}x$, đặt $t=4-x$, $\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$ nên $\int_0^4 f(4-x)\mathrm{d}x=-\int_4^0 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^4 f(t)\mathrm{d}x=I$

Xét: $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\mathrm{d}x$, đặt $u=\sqrt{x^2+9}\Rightarrow u^2=x^2+9\Rightarrow u\mathrm{d}u=x\mathrm{d}x$.

Nên $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\mathrm{d}x=\int_3^5 u^2\mathrm{d}u=\frac{u^3}{3}\Big|_3^5=\frac{98}{3}$.

Câu 115. (THPT Ba Đình 2019) Hàm số $f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f^2(1-x)=(x^2+3)f(x+1)$. Biết rằng $f(x)\ne 0,\forall x\in\mathbb{R}$, tính $I=\int_0^2(2x-1)f''(x)dx$.

A. 8. **B.** 0. **C.** –4. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} f^2(1-x)=(x^2+3), f(x+1) \Rightarrow f^4(1-x)=(x^2+3)^2.f^2(x+1)\ (1) \\ f^2(1+x)=(x^2+3).f(1-x)\ (2) \end{cases}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow f(1-x)=x^2+3=(1-x-1)^2+3$

$\Rightarrow f(x)=(x-1)^2+3$

$\Rightarrow f''(x)=2$

$\Rightarrow I=\int_0^2 (4x-2)\mathrm{d}x=(2x^2-2x)\Big|_0^2=4.$

Câu 116. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x.f(x).f'(x)=f^2(x)-x, \forall x\in\mathbb{R}$ và có $f(2)=1$. Tích phân $\int_0^2 f^2(x)dx$

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** 2 **D.** 4

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$x.f(x).f'(x)=f^2(x)-x \Leftrightarrow 2x.f(x).f'(x)=2f^2(x)-2x$

$\Leftrightarrow 2x.f(x).f'(x)+f^2(x)=3f^2(x)-2x \Leftrightarrow \int_0^2 \left(x.f^2(x)\right)'dx=3\int_0^2 f^2(x)dx-\int_0^2 2xdx$

$\Leftrightarrow \left(x.f^2(x)\right)\Big|_0^2=3I-4 \Leftrightarrow 2=3I-4 \Leftrightarrow I=2$

Câu 117. (THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019) Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị không âm và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x)=(2x+1)\left[f(x)\right]^2, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=-1$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{1}{6}$. **B.** $-\ln 2$. **C.** $-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$. **D.** $-\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

$f'(x)=(2x+1)\left[f(x)\right]^2, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \frac{-f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=-(2x+1), \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-(2x+1), \forall x\in\mathbb{R}$

Vậy $\frac{1}{f(x)}=-\int(2x+1)\mathrm{d}x=-x^2-x+C \Rightarrow f(x)=\frac{1}{-x^2-x+C}$.

Do $f(0)=-1 \Rightarrow C=-1$. Vậy $f(x)=-\frac{1}{x^2+x+1}$.

$$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=-\int_0^1 \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x.$$

Đặt $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan t,\ t\in\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Suy ra $I=-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\tan^2 t\right)}{\frac{3}{4}\left(1+\tan^2 t\right)}\mathrm{d}t=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}t=-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$

Câu 118. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0, f'(0)\neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x).f'(x)+18x^2=\left(3x^2+x\right)f'(x)+(6x+1)f(x);\forall\in\mathbb{R}$.

Biết $\int_0^1 (x+1)e^{f(x)}dx=ae^2+b,(a,b\in\mathbb{Q})$.Giá trị của $a-b$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $\frac{2}{3}$.

lời giải

Chọn A

Ta có $f(x).f'(x)+18x^2=\left(3x^2+x\right)f'(x)+(6x+1)f(x)$

lấy nguyên hàm 2 vế ta được: $\frac{f^2(x)}{2}+6x^3=\left(3x^2+x\right)f(x)$

$$\Rightarrow f^2(x)-2\left(3x^2+x\right)f(x)+12x^3=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=6x^2\\f(x)=2x\end{array}\right.$$

TH1: $f(x)=6x^2$ không thoả mãn kết quả $\int_0^1 (x+1)e^{f(x)}dx=ae^2+b,(a,b\in\mathbb{Q})$

TH2: $f(x)=2x\Rightarrow\int_0^1 (x+1)e^{f(x)}dx=\int_0^1 (x+1)e^{2x}dx=\frac{3}{4}e^2-\frac{1}{4}$. Suy ra $a=\frac{3}{4};b=-\frac{1}{4}$

Vậy $a-b=1$

Câu 119. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)>0$ và $f(x)-f'(x)=-\frac{2\left[f(x)\right]^2}{e^x.x.\sqrt{x-x^2}}\ \forall x\in(0;1)$. Biết $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f\left(\frac{1}{5}\right)\geq\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{6}\leq f\left(\frac{1}{5}\right)<\frac{1}{5}$ **C.** $\frac{1}{5}\leq f\left(\frac{1}{5}\right)<\frac{1}{4}$ **D.** $f\left(\frac{1}{5}\right)<\frac{1}{6}$

Lời giải

Vì $f(x)>0$ và $\forall x\in(0;1)$ ta có:

$$f(x)-f'(x)=-\frac{2\left[f(x)\right]^2}{e^x.x.\sqrt{x-x^2}}\Leftrightarrow\frac{e^xf(x)-e^xf'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=-\frac{2}{x\sqrt{x-x^2}}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{e^x}{f(x)}\right)'=\frac{-2}{x\sqrt{x-x^2}}\Rightarrow\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}}\frac{-2}{x\sqrt{x-x^2}}dx=\left.\frac{e^x}{f(x)}\right|_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{e}}{f\left(\frac{1}{2}\right)}-\frac{\sqrt[5]{e}}{f\left(\frac{1}{5}\right)}=2\sqrt{e}-\frac{\sqrt[5]{e}}{f\left(\frac{1}{5}\right)}$$

$$\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}}\frac{-2}{x\sqrt{x-x^2}}dx=\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}}\frac{-2}{x^2.\sqrt{\frac{1}{x}-1}}dx=\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}}\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x}-1}}d\left(\frac{1}{x}\right)=4\sqrt{\frac{1}{x}-1}\Big|_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{2}}=-4$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{e}-\frac{\sqrt[5]{e}}{f\left(\frac{1}{5}\right)}=-4\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{2\left(\sqrt{e}+2\right)}{\sqrt[5]{e}}\approx 5,97$$

Câu 120. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[0;1]$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=\int_0^1\left[2f(x)+3x\right]f(x)dx-\int_0^1\left[4f(x)+x\right]\sqrt{xf(x)}dx$ bằng

A. $-\frac{1}{24}$ **B.** $-\frac{1}{8}$ **C.** $-\frac{1}{12}$ **D.** $-\frac{1}{6}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $M=\int_0^1\left[2f^2(x)+3xf(x)-4f(x)\sqrt{xf(x)}-x\sqrt{xf(x)}\right]dx$

$=\int_0^1\left[-\left(\sqrt{x}-\sqrt{f(x)}\right)\sqrt{f(x)}\left[\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{x}\right)^2+f(x)\right]\right]dx$

Đặt $a=\sqrt{x}-\sqrt{f(x)}$, $b=\sqrt{f(x)}$ thì

$$M=\int_0^1\left[-ab\left(a^2+b^2\right)\right]dx\ge\int_0^1\left[-\frac{(a+b)^2}{4}.\frac{(a+b)^2}{2}\right]dx\ge\int_0^1-\frac{x^2}{8}dx=-\frac{1}{24}.$$

Câu 121. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương -2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=0, f'(0)\neq 0$ và thỏa mãn hệ thức $f(x).f'(x)+18x^2=\left(3x^2+x\right)f'(x)+(6x+1)f(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

Biết $\int_0^1(x+1)e^{f(x)}dx=a.e^2+b$, với $a;b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của $a-b$ bằng.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Ta có $f(x).f'(x)+18x^2=\left(3x^2+x\right)f'(x)+(6x+1)f(x)$

$\Rightarrow\int\left[f(x).f'(x)+18x^2\right]dx=\int\left[\left(3x^2+x\right)f'(x)+(6x+1)f(x)\right]dx$

$\Rightarrow\int\left[\frac{1}{2}f^2(x)+6x^3\right]'dx=\int\left[\left(3x^2+x\right)f(x)\right]'dx$

$\Rightarrow\frac{1}{2}f^2(x)+6x^3=\left(3x^2+x\right)f(x)+C$, với C là hằng số.

Mặt khác: theo giả thiết $f(0)=0$ nên $C=0$.

Khi đó $\frac{1}{2}f^2(x)+6x^3=\left(3x^2+x\right)f(x)(1),\forall x\in\mathbb{R}$.

$(1)\Leftrightarrow f^2(x)+12x^3=(6x^2+2x)f(x)\Leftrightarrow [f(x)-2x][f(x)-6x^2]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=2x \\ f(x)=6x^2 \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: Với $f(x)=6x^2, \forall x\in\mathbb{R}$, ta có $f'(0)=0$ (loại).

Trường hợp 2: Với $f(x)=2x, \forall x\in\mathbb{R}$, ta có :

$$\int_0^1 (x+1)e^{f(x)}\mathrm{d}x=\int_0^1 (x+1)e^{2x}\mathrm{d}x=\left[\frac{(x+1)e^{2x}}{2}\right]\Bigg|_0^1-\int_0^1\frac{e^{2x}}{2}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}e^2-\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a=\dfrac{3}{4} \\ b=-\dfrac{1}{4} \end{cases}\Rightarrow a-b=1.$$

Câu 122. (Bắc Ninh 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ thỏa mãn $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f^2(x)-2f(x).(3-x)\right]\mathrm{d}x=-\frac{109}{12}$. Tính $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

A. $\ln\frac{7}{9}$. **B.** $\ln\frac{2}{9}$. **C.** $\ln\frac{5}{9}$. **D.** $\ln\frac{8}{9}$.

Lời giải

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[f^2(x)-2f(x).(3-x)\right]\mathrm{d}x=-\frac{109}{12}.\Leftrightarrow\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left[(f(x)-(3-x))^2-(3-x)^2\right]\mathrm{d}x=-\frac{109}{12}$$

$$\Leftrightarrow\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(f(x)-(3-x))^2\mathrm{d}x-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(3-x)^2\,\mathrm{d}x=-\frac{109}{12}.$$

Mà $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(3-x)^2\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(9-6x+x^2)\mathrm{d}x=\left(9x-3x^2+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{109}{12}$

Suy ra $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(f(x)-(3-x))^2\,\mathrm{d}x=0$.

Vì $[f(x)-(3-x)]^2\ge 0,\ \forall x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ nên $f(x)=3-x,\ \forall x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

Vậy $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{3-x}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1-x+2}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{-1}{x+1}+\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right)\mathrm{d}x$

$$=\left(-\ln|x+1|+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\ln\frac{2}{9}.$$

Câu 123. (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2018) Cho hàm số $f(x)$ xá định trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{2-\pi}{2}$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin 2x)\mathrm{d}x$$

$$=\left(x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi-2}{2}.$$

Do đó:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x=\frac{2-\pi}{2}+\frac{\pi-2}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x=0$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2\mathrm{d}x=0$$

Nguyễn Bảo Vương

Suy ra $f(x)-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$, hay $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Bởi vậy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x=-\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0.$$

Câu 124. (THPT Hậu Lộc 2 - TH - 2018) Cho số thực $a>0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $f(x).f(a-x)=1$. Tính tích phân $I=\int_0^a\frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x$?

A. $I=\frac{2a}{3}$. **B.** $I=\frac{a}{2}$. **C.** $I=\frac{a}{3}$. **D.** $I=a$.

Lời giải

Đặt $t=a-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Thay vào ta được $I=\int_0^a\frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x=\int_0^a\frac{1}{1+f(a-t)}\mathrm{d}t=\int_0^a\frac{1}{1+f(a-x)}\mathrm{d}x$.

Suy ra $0=\int_0^a\left[\frac{f(a-x)-f(x)}{(1+f(x))(1+f(a-x))}\right]\mathrm{d}x$, do hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0;a]$. Suy ra $f(a-x)=f(x)$, trên đoạn $[0;a]$.

Mà $f(x).f(a-x)=1 \Rightarrow f(x)=1$. Vậy $I=\int\limits_0^a \frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}$.

Câu 125. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2018) Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{2}{15}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Ta có: $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}\ \ (1)$

Đặt $t=1-x \Rightarrow x=1-t$, phương trình (1) trở thành $2f(1-t)+3f(t)=\sqrt{t}$

Thay t bởi x ta được phương trình $3f(x)+2f(1-x)=\sqrt{x}\ \ (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases}2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}\\3f(x)+2f(1-x)=\sqrt{x}\end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{5}\left(3\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}\right)$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int\limits_0^1\left(3\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\int\limits_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x-\frac{2}{5}\int\limits_0^1\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$

*Xét $I=\int\limits_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x$

Đặt $u=\sqrt{x} \Rightarrow u^2=x \Rightarrow \mathrm{d}x=2u\mathrm{d}u$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=0\,;x=1\Rightarrow u=1$

$\Rightarrow I=2\int\limits_0^1 u^2\mathrm{d}u=\left.\frac{2u^3}{3}\right|_0^1=\frac{2}{3}$

Nguyễn Bảo Vương

*Xét $J=\int\limits_0^1\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$

Đặt $v=\sqrt{1-x} \Rightarrow v^2=1-x \Rightarrow \mathrm{d}x=-2v\mathrm{d}v$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow v=1\,;x=1\Rightarrow v=0$

$\Rightarrow J=-2\int\limits_1^0 v^2\mathrm{d}v=2\int\limits_0^1 v^2\mathrm{d}v=\left.\frac{2v^3}{3}\right|_0^1=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{3}{5}.\frac{2}{3}-\frac{2}{5}.\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$.

Câu 126. (Hà Tĩnh - 2018) Cho hàm số $f(x)$ đồng biến, có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $\left[f(x)\right]^2-f(x).f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=0$. Biết $f(0)=1$, $f(2)=e^6$. Khi đó $f(1)$ bằng

A. e^2. **B.** $e^{\frac{3}{2}}$. **C.** e^3. **D.** $e^{\frac{5}{2}}$.

Lời giải

Theo bài ra ta có hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;2] \Rightarrow f(x)\ge f(0)=1>0$ do đó $f(x)>0 \quad \forall x\in[0;2]$.

Ta có $\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]' = \frac{f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}$

Theo đề bài $\left[f(x)\right]^2 - f(x).f''(x)+\left[f'(x)\right]^2 = 0$

$\Rightarrow f''(x).f(x)-\left[f'(x)\right]^2 = \left[f(x)\right]^2 \Rightarrow \left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]' = 1$

$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = x + C \Rightarrow \int_0^2 \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int_0^2 (x+C)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_0^2 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}\left(f(x)\right) = \left(\frac{x^2}{2}+Cx\right)\Big|_0^2$

$\Rightarrow \ln\left|f(x)\right|\Big|_0^2 = 2+2C \Rightarrow \ln\left|\mathrm{e}^6\right| - \ln|1| = 2+2C \Rightarrow C = 2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = x+2.$

Do đó $\ln f(x)\Big|_0^1 = \left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_0^1 \Rightarrow \ln f(1) = \frac{5}{2} \Rightarrow f(1) = \mathrm{e}^{\frac{5}{2}}.$

Câu 127. (THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $[0;3]$; $f(3-x).f(x) = 1, f(x) \neq -1$ với mọi $x \in [0;3]$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Tính tích phân: $\int_0^3 \frac{x.f'(x)}{\left[1+f(3-x)\right]^2.f^2(x)}dx$.

A. 1. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

$\left(1+f(3-x)\right)^2.f^2(x) = f^2(x)+2.f(3-x).f^2(x)+f^2(3-x).f^2(x)$

$= f^2(x)+2.f(x)+1 = \left(f(x)+1\right)^2.$

$I = \int_0^3 \frac{x.f'(x)}{\left(1+f(x)\right)^2}\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{f'(x)}{\left(1+f(x)\right)^2}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = -\frac{1}{1+f(x)} \end{cases}$

$I = \frac{-x}{1+f(x)}\Big|_0^3 + \int_0^3 \frac{dx}{1+f(x)} = \frac{-3}{1+f(3)} + I_1$

$f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow f(3) = 2$

Đặt $t = 3-x \Rightarrow dt = -dx$

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 3$

$x = 3 \Rightarrow t = 0$

$I_1 = \int_0^3 \frac{dt}{1+f(3-t)} = \int_0^3 \frac{dx}{1+\frac{1}{f(x)}} = \int_0^3 \frac{f(x).dx}{1+f(x)}$

$2I_1=\int_0^3\frac{1+f(x)}{1+f(x)}dx=3\Rightarrow I_1=\frac{3}{2}$

Vậy $I=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$.

Câu 128. (Sở Bình Phước - 2018) Cho số thực $a>0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $f(x).f(a-x)=1$. Tính tích phân $I=\int_0^a\frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x$?

A. $I=\frac{a}{3}$. **B.** $I=\frac{a}{2}$. **C.** $I=a$. **D.** $I=\frac{2a}{3}$.

Lời giải

- Đặt $t=a-x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$; đổi cận: $x=0\Rightarrow t=a$, $x=a\Rightarrow t=0$.

$\Rightarrow I=\int_0^a\frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x=\int_0^a\frac{1}{1+f(a-t)}\mathrm{d}t=\int_0^a\frac{1}{1+f(a-x)}\mathrm{d}x=\int_0^a\frac{1}{1+\frac{1}{f(x)}}\mathrm{d}x=\int_0^a\frac{f(x)}{1+f(x)}\mathrm{d}x$

$\Rightarrow 2I=\int_0^a\frac{1}{1+f(x)}\mathrm{d}x+\int_0^a\frac{f(x)}{1+f(x)}\mathrm{d}x=\int_0^a\frac{1+f(x)}{1+f(x)}\mathrm{d}x=\int_0^a\mathrm{d}x=x\Big|_0^a=a$

Vậy $I=\frac{a}{2}$.

Câu 129. (THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018) Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$ và đồng thời thỏa mãn hai điều kiện $f(x+1)=f(x)+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{f(x)}{x^2}$, $\forall x\neq 0$.

Gọi $I=\int_0^1\frac{f(x)}{f^2(x)+1}.\mathrm{d}x$. Hãy chọn khẳng định đúng về giá trị của I.

A. $I\in(-1;0)$. **B.** $I\in(1;2)$. **C.** $I\in(0;1)$. **D.** $I\in(-2;-1)$.

Lời giải

- Đặt $y=f(x)$. Khi đó từ giả thiết ta có :

$f(x+1)=y+1$, $f\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{y+1}{(x+1)^2}$, $f\left(-\frac{1}{x+1}\right)=-\frac{y+1}{(x+1)^2}$.

Suy ra $f\left(\frac{x}{x+1}\right)=f\left(-\frac{1}{x+1}+1\right)=f\left(-\frac{1}{x+1}\right)+1=-\frac{y+1}{(x+1)^2}+1=\frac{x^2+2x-y}{(x+1)^2}$ (1)

Và $f\left(\frac{x+1}{x}\right)=f\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+f\left(\frac{1}{x}\right)=1+\frac{y}{x^2}=\frac{x^2+y}{x^2}$,

$f\left(\frac{x}{x+1}\right)=f\left(\frac{1}{\frac{x+1}{x}}\right)=\frac{f\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}=\frac{\frac{x^2+y}{x^2}}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}=\frac{x^2+y}{(x+1)^2}$ (2).

- Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{x^2+2x-y}{(x+1)^2}=\frac{x^2+y}{(x+1)^2}\Rightarrow x^2+2x-y=x^2+y\Rightarrow y=x$ hay $f(x)=x$.

Do đó: $I=\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{f^2(x)+1}.\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 \frac{x}{x^2+1}.\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2\approx 0,35$.

Vậy $I\in(0;1)$.

Câu 130. (ĐHQG Hà Nội - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện $\int\limits_0^1 f(x)dx=2$ và $\int\limits_0^1 xf(x)dx=\frac{3}{2}$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của $\int\limits_0^1 f^2(x)dx$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{27}{4}$. **B.** $\frac{34}{5}$. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Ta tìm hàm $ax+b$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 [f(x)-(ax+b)]^2 dx=0\Rightarrow f(x)=ax+b$

$$\Rightarrow\begin{cases}\int\limits_0^1 f(x)dx=2\\ \int\limits_0^1 xf(x)dx=\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\frac{a}{2}x^2+bx\right)\Big|_0^1=2\\ \left(\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right)\Big|_0^1=\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{a}{2}+b=2\\ \frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow a=6;b=-1.$$

$$+\int\limits_0^1 [f(x)-(6x-1)]^2 dx\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f^2(x)dx\ge 2\int\limits_0^1 f(x)(6x-1)dx-\int\limits_0^1 (6x-1)^2dx=12\int\limits_0^1 xf(x)dx-2\int\limits_0^1 f(x)dx-\int\limits_0^1 (6x-1)^2dx=7$$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 131. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $f(x)>0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $(x+1)f'(x)=\frac{\sqrt{f(x)}}{x+2}$ và $f(0)=\left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2$. Giá trị $f(3)$ bằng

A. $\frac{1}{2}(4\ln 2-\ln 5)^2$. **B.** $4(4\ln 2-\ln 5)^2$. **C.** $\frac{1}{4}(4\ln 2-\ln 5)^2$. **D.** $2(4\ln 2-\ln 5)^2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $(x+1)f'(x)=\frac{\sqrt{f(x)}}{x+2}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}$.

Khi đó

$$\int\limits_0^3 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x=\int\limits_0^3 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_0^3 \frac{d\left(f(x)\right)}{\sqrt{f(x)}}=\int\limits_0^3 \frac{1}{(x+1)(x+2)}\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)}\Big|_0^3=\ln\frac{x+1}{x+2}\Big|_0^3\Leftrightarrow 2\sqrt{f(3)}-2\sqrt{f(0)}=\ln\frac{4}{5}-\ln\frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{f(3)}=\ln\frac{8}{5}+2\sqrt{f(0)} \Leftrightarrow \sqrt{f(3)}=\frac{1}{2}(\ln 8-\ln 5)+\sqrt{f(0)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{f(3)}=\frac{1}{2}(3\ln 2-\ln 5)+\frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \sqrt{f(3)}=\frac{1}{2}(4\ln 2-\ln 5)$.

Vậy $f(3)=\frac{1}{4}(4\ln 2-\ln 5)^2$.

Câu 132. (Sở Phú Thọ - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(x^2+1)+\frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}}=\frac{2x+1}{2x}\ln(x+1)$. Biết $\int_1^{17} f(x)\mathrm{d}x=a\ln 5-2\ln b+c$ với $a,b,c\in\mathbb{R}$. Giá trị của $a+b+2c$ bằng

A. $\frac{29}{2}$. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 37.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x^2+1)+\frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}}=\frac{2x+1}{2x}\ln(x+1) \Leftrightarrow xf(x^2+1)+\frac{f(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}}=\frac{2x+1}{2}\ln(x+1)$.

Suy ra $\int_1^4\left[xf(x^2+1)+\frac{f(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}}\right]\mathrm{d}x=\int_1^4\frac{2x+1}{2}\ln(x+1)\mathrm{d}x$.

Ta có $\int_1^4\left[xf(x^2+1)+\frac{f(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}}\right]\mathrm{d}x=\int_1^4 f(x^2+1)\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{2}+\int_1^4 f(\sqrt{x})\frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{2}$

$=\int_2^{17}\frac{1}{2}f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{1}{2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^{17}f(x)\mathrm{d}x$.

$\int_1^4\frac{2x+1}{2}\ln(x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^4\ln(x+1)\mathrm{d}(x^2+x)=\frac{1}{2}\left[(x^2+x)\ln(x+1)\Big|_1^4-\int_1^4(x^2+x)\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x\right]$

$=\frac{1}{2}\left[20\ln 5-2\ln 2-\frac{x^2}{2}\Big|_1^4\right]=\frac{1}{2}\left[20\ln 5-2\ln 2-\frac{15}{2}\right]$.

Do đó $\int_1^{17}f(x)\mathrm{d}x=20\ln 5-2\ln 2-\frac{15}{2}\Rightarrow a=20,b=2,c=-\frac{15}{2}$.

Vậy $a+b+2c=7$.

Câu 133. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $6x^2f(x^3)+4f(1-x)=3\sqrt{1-x^2}$. Tính $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{\pi}{8}$. **B.** $\frac{\pi}{20}$. **C.** $\frac{\pi}{16}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết $6x^2f(x^3)+4f(1-x)=3\sqrt{1-x^2}$, lấy tích phân từ 0 đến 1 của 2 vế ta được

$$\int_0^1 6x^2 f\left(x^3\right)\mathrm{d}x+\int_0^1 4f\left(1-x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Đặt $I_1=\int_0^1 6x^2 f\left(x^3\right)\mathrm{d}x$, $I_2=\int_0^1 4f\left(1-x\right)\mathrm{d}x$, $I=\int_0^1 3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

+) Đặt $t=x^3$ ta được $I_1=2\int_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=2\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

+) Đặt $v=1-x$ ta được $I_2=4\int_0^1 f\left(v\right)\mathrm{d}v=4\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Từ đó ta được $I=6\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$

+) Đặt $u=\sin x$ ta được $I=\frac{3\pi}{4}$, suy ra $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}$.

Câu 134. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f\left(4x\right)=f\left(x\right)+4x^3+2x$ và $f\left(0\right)=2$. Tính $I=\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{147}{63}$. **B.** $\frac{149}{63}$. **C.** $\frac{148}{63}$. **D.** $\frac{352}{63}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f\left(4x\right)=f\left(x\right)+4x^3+2x\Rightarrow f\left(4x\right)-f\left(x\right)=4x^3+2x\ \left(1\right)$.

Suy ra: $f\left(x\right)$ và $f\left(4x\right)$ là hàm số bậc ba.

Khi đó: $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\left(a\neq 0\right)$ và $f\left(4x\right)=64ax^3+16bx^2+4cx+d$.

Ta có: $f\left(4x\right)-f\left(x\right)=63ax^3+15bx^2+3cx\ \left(2\right)$.

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ ta suy ra: $\begin{cases}a=\frac{4}{63}\\ b=0\\ c=\frac{2}{3}\end{cases}$. Mặt khác: vì $f\left(0\right)=2$ nên $d=2$.

Do đó, $f\left(x\right)=\frac{4}{63}x^3+\frac{2}{3}x+2$.

Vậy $I=\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^2\left(\frac{4}{63}x^3+\frac{2}{3}x+2\right)\mathrm{d}x=\frac{352}{63}$.

* Chứng minh $f\left(x\right)$ là duy nhất.

Ta có: $f\left(x\right)=\frac{4}{63}x^3+\frac{2}{3}x+2$ và $f\left(4x\right)=\frac{256}{63}x^3+\frac{8}{3}x+2$; $f\left(4x\right)-f\left(x\right)=4x^3+2x$.

Suy ra: $f(4x)-\frac{4}{63}(4x)^3-\frac{2}{3}(4x)=f(x)-\frac{4}{63}x^3-\frac{2}{3}x$.

Đặt $g(4x)=f(4x)-\frac{4}{63}(4x)^3-\frac{2}{3}(4x)$ và $g(x)=f(x)-\frac{4}{63}x^3-\frac{2}{3}x$.

Ta có: $g(4x)=g(x)$; $g(0)=f(0)=2$.

Suy ra: $g(x)=g\left(\frac{x}{4}\right)=g\left(\frac{x}{4^2}\right)=...=g\left(\frac{x}{4^n}\right),n\in\mathbb{N}^*$

Khi $n\to+\infty$ suy ra $g(x)=g(0)=2$.

Vậy $f(x)=\frac{4}{63}x^3-\frac{2}{3}x+2,\forall x$.

Câu 135. (Kìm Thành - Hải Dương - 2020) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;2]$ thỏa mãn $\int_1^2(x-1)^2f(x)dx=-\frac{1}{3}$, $f(2)=0$ và $\int_1^2\left[f'(x)\right]^2dx=7$. Tính tích phân $I=\int_1^2f(x)dx$.

A. $I=\frac{7}{5}$. **B.** $I=-\frac{7}{5}$. **C.** $I=-\frac{7}{20}$. **D.** $I=\frac{7}{20}$.

Lời giải

Chọn B

$-\frac{1}{3}=\int_1^2(x-1)^2f(x)dx=\frac{1}{3}\int_1^2f(x)d(x-1)^3=\frac{1}{3}\left[(x-1)^3f(x)\Big|_1^2-\int_1^2(x-1)^3f'(x)dx\right]$

$=-\frac{1}{3}\int_1^2(x-1)^3f'(x)dx\Rightarrow\int_1^2(x-1)^3f'(x)dx=1\ (1)$

Ta có $\int_1^2\left[f'(x)-7(x-1)^3\right]^2dx=\int_1^2\left[f'(x)\right]^2dx-14\int_1^2f'(x)(x-1)^3dx+49\int_1^2(x-1)^6dx=0$

$\Rightarrow f'(x)=7(x-1)^3\Rightarrow f(x)=7\int(x-1)^3dx=\frac{7(x-1)^4}{4}+C$.

Mà $f(2)=0$ nên $C=-\frac{7}{4}$. Suy ra $f(x)=\frac{7(x-1)^4}{4}-\frac{7}{4}$.

Vậy $I=\int_1^2f(x)dx=\int_1^2\left[\frac{7(x-1)^4}{4}-\frac{7}{4}\right]dx=-\frac{7}{5}$.

Câu 136. (Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thảo mãn $\sin x\,f(\cos x)+\cos x\,f(\sin x)=\sin 2x-\frac{1}{3}\sin^3 2x$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính tích phân $I=\int_0^1f(x)dx$ bằng

A. $\frac{1}{6}$. **B.** 1. **C.** $\frac{7}{18}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$\sin x\,f(\cos x)+\cos x\,f(\sin x)=\sin 2x-\frac{1}{3}\sin^3 2x$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, f(\cos x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin 2x - \frac{1}{3}\sin^3 2x\right)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}(\cos x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}(\sin x) = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1-\cos^2 2x}{3}\right)\mathrm{d}(\cos 2x).$$

$$\Rightarrow -\int_1^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\cos 2x + \frac{\cos^3 2x}{9}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{2}{3} + \frac{-1}{9}\right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{9}\right)\right]$$

$$\Rightarrow 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{9} \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{18}$$

Câu 137. (Chuyên Lam Sơn 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;\pi]$. Biết $f(0) = 2\mathrm{e}$ và $f(x)$ thỏa mãn hệ thức $f'(x) + \sin x.f(x) = \cos x.\mathrm{e}^{\cos x}, \forall x \in [0;\pi]$. Tính $I = \int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

A. $I \approx 6,55$. **B.** $I \approx 17,30$. **C.** $I \approx 10,31$. **D.** $I \approx 16,91$.

Lời giải

Chọn C

Giả thiết $f'(x) + \sin x.f(x) = \cos x.\mathrm{e}^{\cos x} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\cos x}.f'(x) + \mathrm{e}^{-\cos x}.\sin x.f(x) = \cos x$

$\Leftrightarrow \left[\mathrm{e}^{-\cos x}.f(x)\right]' = \cos x \Rightarrow \mathrm{e}^{-\cos x}.f(x) = \sin x + C_1$ (1).

Do $f(0) = 2\mathrm{e}$, thế vào (1) ta được $C_1 = 2$ suy ra $f(x) = (2 + \sin x)\mathrm{e}^{\cos x}$.

Dùng máy tính thì $I = \int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} (2 + \sin x).\mathrm{e}^{\cos x}\,\mathrm{d}x \approx 10,30532891$.

Câu 138. (Chuyên Thái Bình - 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0;1]$. Biết $f(x).f(1-x) = 1$ với $\forall x \in [0;1]$. Tính giá trí $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 + f(x)}$

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $f(x).f(1-x) + f(x) = 1 + f(x) \Rightarrow \frac{1}{f(1-x)+1} = \frac{f(x)}{1+f(x)}$

Xét $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 + f(x)}$

Đặt $t = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = 1 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó $I = -\int_1^0 \frac{\mathrm{d}t}{1 + f(1-t)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + f(1-t)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 + f(1-x)} = \int_0^1 \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{1 + f(x)}$

Mặt khác $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}+\int_0^1 \frac{f(x)\mathrm{d}x}{1+f(x)}=\int_0^1 \frac{1+f(x)}{1+f(t)}\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{d}x=1$ hay $2I=1$. Vậy $I=\frac{1}{2}$.

Câu 139. (THPT Cẩm Bình 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(x)=x.\ln\left(\frac{x^3}{x.f'(x)-f(x)}\right)$ và $f(1)=0$. Tính tích phân $I=\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $12\ln 13-13$. **B.** $13\ln 13-12$. **C.** $12\ln 13+13$. **D.** $13\ln 13+12$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết và $f(x)=x.\ln\left(\frac{x^3}{x.f'(x)-f(x)}\right)\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}=\ln\frac{x^3}{x.f'(x)-f(x)}$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}}=\frac{x^3}{x.f'(x)-f(x)}\Leftrightarrow \frac{x.f'(x)-f(x)}{x^2}.\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}}=x\Leftrightarrow\left[\frac{f(x)}{x}\right]'.\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}}=x$ (1)

Lấy nguyên hàm hai vế của (1) suy ra $\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}}=\frac{x^2}{2}+C$.

Do $f(1)=0\Rightarrow C=\frac{1}{2}$, nên $\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{x}}=\frac{x^2+1}{2}\Rightarrow f(x)=x\ln\frac{x^2+1}{2}$ với $x\in(0;+\infty)$.

$I=\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^5 x.\ln\frac{x^2+1}{2}\mathrm{d}x$ (2).

Đặt $u=\ln\frac{x^2+1}{2}\Rightarrow \mathrm{d}u=\frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x$; $\mathrm{d}v=x\mathrm{d}x$, chọn $v=\frac{x^2+1}{2}$.

Theo công thức tích phân từng phần, ta được:

$I=\left(\frac{x^2+1}{2}.\ln\frac{x^2+1}{2}\right)\Big|_1^5-\int_1^5 x\mathrm{d}x=13\ln 13-\frac{x^2}{2}\Big|_1^5=13\ln 13-12$.

Câu 140. Cho hàm số $f(x)$ không âm, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1)=1$, $\left[2f(x)+1-x^2\right]f'(x)=2x\left[1+f(x)\right]$, $\forall x\in[0;1]$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Xét trên đoạn $[0;1]$, theo đề bài: $\left[2f(x)+1-x^2\right]f'(x)=2x\left[1+f(x)\right]$

$\Leftrightarrow 2f(x).f'(x)=2x+(x^2-1).f'(x)+2x.f(x)$

$\Leftrightarrow\left[f^2(x)\right]'=\left[x^2+(x^2-1).f(x)\right]'$

$\Leftrightarrow f^2(x)=x^2+(x^2-1).f(x)+C$ (1).

Thay $x=1$ vào (1) ta được: $f^2(1)=1+C\Leftrightarrow C=0$ (vì $f(1)=1$).

Do đó, (1) trở thành: $f^2(x)=x^2+(x^2-1).f(x)$

$\Leftrightarrow f^2(x)-1=x^2-1+(x^2-1).f(x)$

$\Leftrightarrow [f(x)-1].[f(x)+1]=(x^2-1).[f(x)+1]$

$\Leftrightarrow f(x)-1=x^2-1$ (vì $f(x)\ge 0\Rightarrow f(x)+1>0\ \ \forall x\in[0;1]$)

$\Leftrightarrow f(x)=x^2$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{3}$.

Câu 141. (Kinh Môn - Hải Dương 2019) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=-2\ln 2$ và $x.(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x\ \ (1)$. Biết $f(2)=a+b.\ln 3\ \ (a,\ b\in\mathbb{Q})$. Giá trị của $2(a^2+b^2)$ là:

A. $\frac{27}{4}$. **B.** 9. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét trên đoạn $[1;2]$, chia cả hai vế của phương trình (1) cho $(x+1)^2$, ta được:

$$\frac{x}{x+1}\cdot f'(x)+\frac{1}{(x+1)^2}\cdot f(x)=\frac{x}{x+1}\Rightarrow\left[\frac{x}{x+1}\cdot f(x)\right]'=\frac{x}{x+1}\Rightarrow\int\left[\frac{x}{x+1}\cdot f(x)\right]'\mathrm{d}x=\int\frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\frac{x}{x+1}\cdot f(x)+C_1=\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x\Rightarrow\frac{x}{x+1}\cdot f(x)=x-\ln|x+1|+C\ \ (2).$$

Theo giả thiết, $f(1)=-2\ln 2$ nên thay $x=1$ vào phương trình (2), ta được:

$\frac{1}{2}f(1)=1-\ln 2+C\Leftrightarrow -\ln 2=1-\ln 2+C\Leftrightarrow C=-1$.

Thay $x=2$ vào (2), ta được:

$\frac{2}{3}f(2)=2-\ln 3-1\Leftrightarrow f(2)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\ln 3\Rightarrow a=\frac{3}{2},\ b=-\frac{3}{2}$. Vậy $2(a^2+b^2)=9$.

Câu 142. (Sở Cần Thơ - 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1;3]$; $f(x)\ne 0,\forall x\in[1;3]$; $f'(x)[1+f(x)]^2=(x-1)^2[f(x)]^4$ và $f(1)=-1$. Biết rằng $\int\limits_e^3 f(x)\mathrm{d}x=a\ln 3+b(a,b\in\mathbb{Z})$, giá trị của $a+b^2$ bằng

A. 4. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Từ $f'(x)[1+f(x)]^2=(x-1)^2[f(x)]^4\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f^4(x)}+\frac{2f'(x)}{f^3(x)}+\frac{f'(x)}{f^2(x)}=(x-1)^2$.

Hay

$$\int\left(\frac{f'(x)}{f^4(x)}+\frac{2f'(x)}{f^3(x)}+\frac{f'(x)}{f^2(x)}\right)\mathrm{d}x=\int(x-1)^2\mathrm{d}x\Rightarrow-\left(\frac{1}{3f^3(x)}+\frac{1}{f^2(x)}+\frac{1}{f(x)}\right)=\frac{1}{3}(x-1)^3+C\ (2).$$

Do $f(1)=-1$ nên $C=\frac{1}{3}$. Thay vào (2) ta được $\left(\frac{1}{f(x)}+1\right)^3=-(x-1)^3\Rightarrow f(x)=\frac{-1}{x}$.

Khi đó: $\int_e^3\frac{-1}{x}\mathrm{d}x=-\ln|x|\Big|_e^3=-\ln 3+1\Rightarrow a=-1,b=1$, nên $a+b^2=0$.

Cách khác

Từ $f'(x)[1+f(x)]^2=(x-1)^2[f(x)]^4\Leftrightarrow\left(\frac{1}{f(x)}+1\right)^2.\frac{f'(x)}{f^2(x)}=(x-1)^2$.

$\Leftrightarrow-\left(\frac{1}{f(x)}+1\right)^2.\left(\frac{1}{f(x)}+1\right)'=(x-1)^2$.

Nên $-\int\left(\frac{1}{f(x)}+1\right)^2.\left(\frac{1}{f(x)}+1\right)'\mathrm{d}x=\int(x-1)^2\,\mathrm{d}x\Rightarrow-\int\left(\frac{1}{f(x)}+1\right)^2\mathrm{d}\left(\frac{1}{f(x)}+1\right)=\int(x-1)^2\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{f(x)}+1\right)^3=\frac{1}{3}(x-1)^3+C(2)$.

Do $f(1)=-1$ nên $C=0$. Thay vào (2) ta được $\left(\frac{1}{f(x)}+1\right)^3=-(x-1)^3\Rightarrow f(x)=\frac{-1}{x}$.

Câu 143. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0)=1,\ \left(f'(x)\right)^3=e^x\left(f(x)\right)^2,\forall x\in\mathbb{R}$.

Tính $f(3)$

A. $f(3)=1$. **B.** $f(3)=e^2$. **C.** $f(3)=e^3$. **D.** $f(3)=e$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\left(f'(x)\right)^3=e^x\left(f(x)\right)^2,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f'(x)=\sqrt[3]{e^x}.\sqrt[3]{\left(f(x)\right)^2}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{\sqrt[3]{\left(f(x)\right)^2}}=\sqrt[3]{e^x}$

$\Rightarrow\int_0^3\frac{f'(x)}{\sqrt[3]{\left(f(x)\right)^2}}dx=\int_0^3\sqrt[3]{e^x}dx\Leftrightarrow\int_0^3\frac{1}{\sqrt[3]{\left(f(x)\right)^2}}df(x)=\int_0^3e^{\frac{x}{3}}dx\Leftrightarrow3\sqrt[3]{f(x)}\Big|_0^3=3e^{\frac{x}{3}}\Big|_0^3$

$\sqrt[3]{f(3)}-\sqrt[3]{f(0)}=e-1\Leftrightarrow\sqrt[3]{f(3)}-1=e-1\Leftrightarrow f(3)=e^3$.

Câu 144. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f^2(1-x)=\left(x^2+3\right).f(x+1)\forall x\in\mathbb{R}$. Biết $f(x)\neq0,\forall x\in\mathbb{R}$, tính $I=\int_0^2(2x-1)f''(x).\mathrm{d}x$.

A. 4. **B.** 0. **C.** 8. **D.** -4.

Lời giải

Chọn A

Đặt: $u=2x-1\Rightarrow\mathrm{d}u=2\mathrm{d}x$,

$dv = f''(x)dx \Rightarrow v = f'(x)$.

$I = \int_0^2 (2x-1) f''(x).dx = (2x-1) f'(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 2f'(x)dx$

$= 3f'(2) + f'(0) - 2f(x)\Big|_0^2 = 3f'(2) + f'(0) - 2f(2) + 2f(0)$ (*).

Ta có: $f^2(1-x) = (x^2+3).f(x+1) \forall x \in \mathbb{R}$

Ta lấy:

* $x = 1 \Rightarrow f^2(0) = 4.f(2)$.

* $x = -1 \Rightarrow f^2(2) = 4.f(0) \Rightarrow f^4(2) = 64.f(2)$.

Mà theo đề $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(2) = 4$.

Vậy, ta có: $f(2) = f(0) = 4$ (1).

Ta có: $-2f'(1-x)f(1-x) = 2x.f(x+1) + (x^2+3).f'(x+1)$.

Ta lấy:

$x = 1 \Rightarrow -2f'(0)f(0) = 2f(2) + 4f'(2) \Rightarrow f'(2) + 2f'(0) = -2$.

$x = -1 \Rightarrow -2f'(2)f(2) = -2f(0) + 4f'(0) \Rightarrow 2f'(2) + f'(0) = 2$.

Vậy, ta có: $f'(0) = -2$, $f'(2) = 2$ (2).

Thế (1) và (2) vào (*), suy ra $I = \int_0^2 (2x-1) f''(x).dx = 3f'(2) + f'(0) - 2f(2) + 2f(0)$

$= 3.2 - 2 - 2.4 + 2.4 = 4$.

Câu 145. (Sở Nam Định - 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4, \forall x \in [0;1]$ và $f(1) = 2$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{21}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Có $(f'(x))^2 + 4f(x) = 8x^2 + 4 \Rightarrow \int_0^1 (f'(x))^2 dx + 4\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (8x^2+4)dx = \frac{20}{3}$. (1)

Ta có $\int_0^1 xf'(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = 2 - \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow -4\int_0^1 xf'(x)dx = -8 + 4\int_0^1 f(x)dx$. (2)

$\int_0^1 (2x)^2 dx = \frac{4}{3}$. (3)

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được $\int_0^1 (f'(x) - 2x)^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x^2 + C$.

Có $f(1)=C+1=2\Rightarrow C=1\Rightarrow f(x)=x^2+1$.

Do đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

Câu 146. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương thỏa mãn $f'(x)=\frac{2f(x)}{x}+2x^3$, $\forall x\in(0;+\infty)$ và $\int_2^3\frac{x^5}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{20}$. Giá trị của biểu thức $f(2)+f(3)$ bằng

A. 110. **B.** 90. **C.** 20. **D.** 25.

Lời giải

Chọn A

Với $x\in(0;+\infty)$:

Ta có $f'(x)=\frac{2f(x)}{x}+2x^3\Leftrightarrow\frac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=2x\Leftrightarrow\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'=2x$

$\Rightarrow\frac{f(x)}{x^2}=x^2+C\Leftrightarrow f(x)=x^2\left(x^2+C\right)$.

$\Leftrightarrow f^2(x)=x^4\left(x^2+C\right)^2$.

Khi đó $\int_2^3\frac{x^5}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{20}\Leftrightarrow\int_2^3\frac{x}{\left(x^2+C\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{20}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\int_2^3\frac{\mathrm{d}\left(x^2+C\right)}{\left(x^2+C\right)^2}=\frac{1}{20}\Leftrightarrow\int_2^3\frac{\mathrm{d}\left(x^2+C\right)}{\left(x^2+C\right)^2}=\frac{1}{10}$

$\Leftrightarrow-\frac{1}{x^2+C}\Big|_2^3=\frac{1}{10}\Leftrightarrow\frac{1}{4+C}-\frac{1}{9+C}=\frac{1}{10}\Leftrightarrow C^2+13C-14=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}C=1\\C=-14\end{array}\right.$.

+ Với $C=-14\Rightarrow f(x)=x^2\left(x^2-14\right)$.

Chọn $x=1\in(0;+\infty)$ ta được $f(1)=-13<0$ (vô lý vì $f(x)$ là hàm số dương).

+ Với $C=1\Rightarrow f(x)=x^2\left(x^2+1\right)$ là hàm số dương.

Khi đó $f(2)+f(3)=110$.

Câu 147. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $3f(x)+xf'(x)\ge x^{2018}$, $\forall x\in[0;1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1}{2018.2020}$. **B.** $\frac{1}{2019.2020}$. **C.** $\frac{1}{2020.2021}$. **D.** $\frac{1}{2019.2021}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$3f(x)+xf'(x)\ge x^{2018}$, $\forall x\in[0;1]\Leftrightarrow 3x^2f(x)+x^3.f'(x)\ge x^{2020}\ \forall x\in[0;1]$

$\Leftrightarrow\left(x^3f(x)\right)'\ge x^{2020}$, $\forall x\in[0;1]$

$\Rightarrow x^3f(x)\ge\int x^{2020}\mathrm{d}x$, $\forall x\in[0;1]\Rightarrow x^3f(x)\ge\frac{x^{2021}}{2021}+C$, $\forall x\in[0;1]$.

Cho $x=0\Rightarrow C=0\Rightarrow x^3f(x)\ge\frac{x^{2021}}{2021},\forall x\in[0;1]\Rightarrow f(x)\ge\frac{x^{2018}}{2021},\forall x\in[0;1]$.

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \ge \int_0^1 \frac{x^{2018}}{2021}\mathrm{d}x = \left(\frac{x^{2019}}{2019.2021}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2019.2021}.$$

Câu 148. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$ thỏa mãn điều kiện $f(1)=2\ln 2$ và $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+3x+2$. Giá trị $f(2)=a+b\ln 3$, với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính a^2+b^2.

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{13}{4}$. **C.** $\frac{25}{4}$. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Do hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;-1\}$ nên

$$x(x+1)f'(x)+f(x)=x^2+3x+2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1}f'(x)+\frac{1}{(x+1)^2}f(x)=\frac{x+2}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+1}f(x)\right)'=\frac{x+2}{x+1}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \left(\frac{x}{x+1}f(x)\right)'dx=\int_1^2 \frac{x+2}{x+1}dx$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+1}f(x)\right)\Big|_1^2=1+\ln\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}f(2)-\frac{1}{2}f(1)=1+\ln\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}f(2)-\ln 2=1+\ln\frac{3}{2}\Leftrightarrow f(2)=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\ln 3.$$

$$\Rightarrow a=b=\frac{3}{2}\Rightarrow a^2+b^2=\frac{9}{2}.$$

Câu 149. (Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định- 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn: $3f(x)+f(2-x)=2(x-1)e^{x^2-2x+1}+4,\forall x\in\mathbb{R}$. Tính giá trị của tích phân $I=\int_0^2 f(x)dx$.

A. $I=e+2$. **B.** $I=2e+4$. **C.** $I=2$. **D.** $I=8$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

$$3f(x)+\mathrm{f}(2-x)=2(\mathrm{x}-1)\,\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+4,\forall x\in\mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow 3\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^2 f(2-x)\mathrm{d}x=\int_0^2 (2x-2)e^{x^2-2x+1}\mathrm{d}x+4\int_0^2 \mathrm{d}x\ (1).$$

Đặt $t=2-x\Rightarrow \int_0^2 f(2-x)\mathrm{d}(x)=-\int_2^0 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\ (2).$

Đặt $u=x^2-2x+1\Rightarrow \mathrm{d}u=(2x-2)\mathrm{d}x\Rightarrow \int_0^2 (2x-2)e^{x^2-2x+1}\mathrm{d}x=\int_1^1 e^u\mathrm{d}u=0\ (3).$

Thay (2) và (3) vào (1) $\Rightarrow 4\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 4\int_0^2 \mathrm{d}x \Rightarrow I = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$. Chọn phương án C.

Cách 2: Do $3f(x)+\mathrm{f}(2-x) = 2(\mathrm{x}-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+4, \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

Thay $x = 2-x$ vào (1) ta có: $3f(2-x)+f(x) = -2(\mathrm{x}-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+4, \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 3f(x)+\mathrm{f}(2-x) = 2(\mathrm{x}-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+4, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x)+3f(2-x) = -2(\mathrm{x}-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+4, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9f(x)+3\mathrm{f}(2-x) = 6(\mathrm{x}-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+12 \\ f(x)+3f(2-x) = -2(\mathrm{x}-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2(\mathrm{x}-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+1$

$\Rightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 \left(2(\mathrm{x}-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+1\right)\mathrm{d}x = 2$

Câu 150. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2;4]$ và $f'(x)>0, \forall x\in[2;4]$. Biết rằng

$f(2)=\frac{7}{4}$ và $4x^3 f(x)=\left[f'(x)\right]^3 - x^3, \forall x\in[2;4]$. Giá trị của $f(4)$ bằng

A. $\frac{20\sqrt{5}-1}{4}$. **B.** $\frac{40\sqrt{5}-1}{2}$. **C.** $\frac{20\sqrt{5}-1}{2}$. **D.** $\frac{40\sqrt{5}-1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)>0, \forall x\in[2;4]$ nên hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[2;4]$.

Suy ra $f(x)\geq f(2)=\frac{7}{4}>0, \forall x\in[2;4]$ (1).

Mặt khác, từ giả thiết ta có $x^3\left[4f(x)+1\right]=\left[f'(x)\right]^3, \forall x\in[2;4]$

Kết hợp với (1) ta suy ra: $4x=\frac{4f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}, \forall x\in[2;4]$.

Lấy tích phân 2 vế cận từ 2 đến 4 ta được:

$24=\int_2^4 4x\mathrm{d}x=\int_2^4 \frac{4f'(x)}{\sqrt[3]{4f(x)+1}}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left[4f(x)+1\right]^2}\Big|_2^4$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\left[4f(x)+1\right]^2}\Big|_2^4=16 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\left[4f(4)+1\right]^2}-\sqrt[3]{\left[4.\frac{7}{4}+1\right]^2}=16 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\left[4f(4)+1\right]^2}=20$

$\Rightarrow \left[4f(4)+1\right]^2=8000 \Rightarrow f(4)=\frac{40\sqrt{5}-1}{4}$.

Câu 151. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[e;e^2\right]$. Biết $x^2 f'(x)\cdot\ln x - xf(x)+\ln^2 x=0, \forall x\in\left[e;e^2\right]$ và $f(e)=\frac{1}{e}$. Tính tích phân $I=\int_e^{e^2} f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=2$. **B.** $I=\frac{3}{2}$. **C.** $I=3$. **D.** $I=\ln 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $x^2 f'(x)\cdot \ln x - xf(x) + \ln^2 x = 0, \forall x \in \left[e; e^2\right]$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)\cdot \ln x - \frac{1}{x}.f(x)}{\ln^2 x} = -\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{\ln x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được: $\frac{f(x)}{\ln x} = \frac{1}{x} + C$ theo đề bài ta có $f(e) = \frac{1}{e} \Rightarrow C = 0$

suy ra $f(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow I = \int\limits_e^{e^2} f(x)\mathrm{d}x = I = \int\limits_e^{e^2} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}$.

Dạng 2. Tích phân một số hàm đặc biệt

Dạng 2.1 Tích phân của hàm số lẻ và hàm số chẵn

Nhắc lại kiến thức về hàm số lẻ và hàm số chẵn:

Hàm số $y = f(x)$ có miền xác định trên tập đối xứng D và

Nếu $f(-x) = f(x),\ \forall x \in D \Rightarrow y = f(x)$: là hàm số chẵn.

Nếu $f(-x) = -f(x), \forall x \in D \Rightarrow y = f(x)$: là hàm số lẻ.

(thay thế chỗ nào có x bằng $-x$ sẽ tính được $f(-x)$ và so sánh với $f(x)$).

Thường gặp cung góc đối nhau của $\cos(-x) = \cos x,\ \sin(-x) = -\sin x$.

Nguyễn Bảo Vương

□ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và lẻ trên $[-a; a]$ thì $\int\limits_{-a}^{a} f(x).dx = 0$.

□ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và chẵn trên $[-a; a]$ thì $\begin{cases} \int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx \\ \int\limits_{-a}^{a} \frac{f(x)}{b^x + 1}dx = \int\limits_{0}^{\alpha} f(x)dx \end{cases}$.

Do những kết quả này không có trong SGK nên về mặt thực hành, ta làm theo các bước sau (sau khi nhận định đó là hàm chẵn hoặc lẻ và **bài toán thường có cận đối nhau** dạng $-a \to a$):

□ Bước 1. Phân tích: $I = \int\limits_{-a}^{a} f(x).dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x).dx + \int\limits_{0}^{a} f(x).dx = A + B$.

□ Bước 2. Tính $A = \int\limits_{-a}^{0} f(x).dx$? bằng cách đổi biến $t = -x$ và cần nhớ rằng: tích phân không phụ thuộc vào biến, mà chỉ phụ thuộc vào giá trị của hai cận, chẳng hạn luôn có: $\int_{-2014}^{0} \frac{3t^2\cos t}{1+\sin^2 t}dt = \int\limits_{-2014}^{0} \frac{3x^2\cos x}{1+\sin^2 x}dx$.

2. Tích phân của hàm số liên tục

□ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(a+b-x)dx$.

□ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thì

+ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$.

+ $\int_a^{\pi-a} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_a^{\pi-a} f(\sin x)dx$ và $\int_0^{\pi} x.f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

+ $\int_a^{2\pi-a} xf(\cos x)dx = \pi\int_a^{2\pi-a} f(\cos x)dx$ và $\int_0^{2\pi} x.f(\cos x)dx = \pi\int_0^{2\pi} f(\cos x)dx$

⟶ Về mặt thực hành, sẽ đặt $x=$ cận trên $+$ cận dưới $-t$ $(x=a+b-t)$. Từ đó tạo tích phân xoay vòng (tạo ra I), rồi giải phương trình bậc nhất với ẩn I.

□ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và tuần hoàn với chu kỳ T thì

$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^{T} f(x)dx$ và $\int_0^{nT} f(x)dx = n\int_0^{T} f(x)dx$.

Lưu ý: Hàm số $f(x)$ có chu kỳ T thì $f(x+T)=f(x)$.

⟶ Về mặt thực hành, ta sẽ làm theo các bước sau:

Bước 1. Tách: $I=\int_a^{a+T} f(x)dx = \underbrace{\int_a^{0} f(x)dx}_{A} + \underbrace{\int_0^{T} f(x)dx}_{B} + \underbrace{\int_T^{a+T} f(x)dx}_{C}$ (i)

Bước 2. Tính $C=\int_T^{a+T} f(x)dx$?

Đặt $x=t+T \Rightarrow dx=dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x=a+T \\ x=T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=a \\ t=0 \end{cases}$. Khi đó:

$C=\int_0^{a} f(t+T)dt = -\int_a^{0} f(t)dt = -\int_a^{0} f(x)dx = -A$ (ii)

Thế (i) vào (ii) ta được: $I=B=\int_0^{T} f(x)dx$.

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$.

A. $I=-6$ **B.** $I=0$ **C.** $I=-2$ **D.** $I=6$

Lời giải

Chọn D

Đặt $x=-t$. Khi đó $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)dx = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{0} f(-t)d(-t) = -\int_{\frac{3\pi}{2}}^{0} f(-t)dt = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx$

Ta có: $I=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)d(x) = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)d(x) + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)d(x) = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)d(x) + \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x)d(x)$

Hay $I=\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}\left(f\left(-x\right)+f\left(x\right)\right)d\left(x\right)=\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2+2\cos 2x}d\left(x\right)=\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2(1+\cos 2x)}d\left(x\right)$

$\Leftrightarrow I=\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{4\cos^2 x}d\left(x\right)=2\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}\left|\cos x\right|d\left(x\right)=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xd\left(x\right)-2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}\cos xd\left(x\right)$

Vậy $I=2\sin x\left|{}_0^{\frac{\pi}{2}}\right.-2\sin x\left|{}_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right.=6.$

Câu 2. **(THPT Hàm Rồng - Thanh Hóa - 2018)** Cho $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x=\pi\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{c}$, với $a,b,c\in\mathbb{N}$, $b<15$. Khi đó $a+b+c$ bằng:

A. 10. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 12.

Lời giải

$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}+x}\mathrm{d}x=\underbrace{\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+x^2}\sin x\mathrm{d}x}_{I_1}-\underbrace{\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}x\sin x\mathrm{d}x}_{I_2}$

Ta nhận thấy $\sqrt{1+x^2}\sin x$ là hàm lẻ nên $I_1=0$

$\begin{cases}u=x\Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=\sin x\mathrm{d}x.\ \text{Chon}\ v=-\cos x\end{cases}$

$I_2=-x\cos x\left|{}_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\right.+\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\mathrm{d}x=-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}+\sin x\left|{}_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\right.=-\frac{\pi\sqrt{2}}{4}+\sqrt{2}$

Suy ra $I=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}-\sqrt{2}=\pi\sqrt{\frac{2}{16}}-\sqrt{2}=\pi\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{2}$

Vậy $a+b+c=11$

Câu 3. **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho $f\left(x\right)$ là hàm số chẵn trên đoạn $\left[-a;a\right]$ và $k>0$.

Giá trị tích phân $\int\limits_{-a}^{a}\frac{f\left(x\right)}{1+\mathrm{e}^{kx}}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\int\limits_0^a f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_{-a}^a f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **C.** $2\int\limits_{-a}^a f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **D.** $2\int\limits_0^a f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có $\int\limits_{-a}^{a}\frac{f\left(x\right)}{1+\mathrm{e}^{kx}}\mathrm{d}x=\int\limits_{-a}^{0}\frac{f\left(x\right)}{1+\mathrm{e}^{kx}}\mathrm{d}x+\int\limits_0^a\frac{f\left(x\right)}{1+\mathrm{e}^{kx}}\mathrm{d}x.$

Xét tích phân $\int\limits_{-a}^{0}\frac{f\left(x\right)}{1+\mathrm{e}^{kx}}\mathrm{d}x.$

Đặt $t=-x\Leftrightarrow x=-t$

$\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x\Leftrightarrow -\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$

Đổi cận:

$x=-a\Rightarrow t=a$

$x=0\Rightarrow t=0$

Khi đó,

$$\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx=\int_{a}^{0}\frac{f(-t)}{1+e^{k(-t)}}(-dt)=\int_{0}^{a}\frac{f(t)}{1+e^{-kt}}dt$$

$$=\int_{0}^{a}\frac{e^{kt}.f(t)}{1+e^{kt}}dx=\int_{0}^{a}\frac{e^{kx}.f(x)}{1+e^{kx}}dx$$

Do đó, $\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx=\int_{0}^{a}\frac{e^{kx}.f(x)}{1+e^{kx}}dx+\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{kx}}dx=\int_{0}^{a}\frac{\left(e^{kx}+1\right)f(x)}{1+e^{kx}}dx=\int_{0}^{a}f(x)dx$

Câu 4. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho $f(x),f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(-x)=\frac{1}{x^2+4}$. Biết $I=\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{\pi}{m}$. Khi đó giá trị của m là

A. $m=2$. **B.** $m=20$. **C.** $m=5$. **D.** $m=10$.

Lời giải

Hàm số $f(x),f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(-x)=\frac{1}{x^2+4}$ nên ta có:

$$\int_{-2}^{2}\left(2f(x)+3f(-x)\right)dx=\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+4}\ (1)$$

Đặt $K=\int_{-2}^{2}\left(2f(x)+3f(-x)\right)dx=2\int_{-2}^{2}f(x)dx+3\int_{-2}^{2}f(-x)dx$

Đặt $-x=t\Rightarrow dx=-dt;\ f(-x)=f(t),\ x=-2\Rightarrow t=2;x=2\Rightarrow t=-2$

Do đó $\int_{-2}^{2}f(-x)dx=\int_{2}^{-2}f(t).(-dt)=\int_{-2}^{2}f(t)dt=\int_{-2}^{2}f(x)dx$

$$\Rightarrow K=2\int_{-2}^{2}f(x)dx+3\int_{-2}^{2}f(-x)dx=2\int_{-2}^{2}f(x)dx+3\int_{-2}^{2}f(x)dx=5\int_{-2}^{2}f(x)dx\ (2)$$

Đặt $J=\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+4}$; $x=2\tan\alpha,\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$,

Ta có: $dx=d(2\tan\alpha)=\frac{2d\alpha}{\cos^2\alpha}=2\left(1+\tan^2\alpha\right)d\alpha$.

Với $x=-2\Rightarrow\alpha=-\frac{\pi}{4}$; Với $x=2\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}$.

Do đó $J=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\left(1+\tan^2\alpha\right)}{4\tan^2\alpha+4}d\alpha=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\alpha}{2}=\frac{1}{2}\alpha\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}\ (3)$

Từ (1), (2) và (3), ta có $K=J\Rightarrow5\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{\pi}{20}$

Mà theo giả thiết, $I=\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{\pi}{m}$ nên $\frac{\pi}{m}=\frac{\pi}{20}\Rightarrow m=20$.

Chú ý: *Có thể tính nhanh* $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+4}$ *bằng công thức:* $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

Từ đó:

$\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$

$\Rightarrow \int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left(\arctan 1 - \arctan(-1)\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\pi}{4}$

Câu 5. **(THPT Hàm Rồng Thanh Hóa -2019)** Cho hàm số $f(x), f(-x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x)+3f(-x)=\frac{1}{4+x^2}$. Tính $I=\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

A. $I=\frac{\pi}{20}$. **B.** $I=\frac{\pi}{10}$. **C.** $I=\frac{-\pi}{20}$. **D.** $I=\frac{-\pi}{10}$.

Lời giải

Tính $\int_{-2}^{2} f(-x)\,dx$

Đặt $t=-x \Rightarrow dt=-dx$

Đổi cận

x	-2	2
t	2	-2

$\Rightarrow \int_{-2}^{2} f(-x)\,dx = -\int_{2}^{-2} f(t)\,dt = \int_{-2}^{2} f(t)\,dt = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

$2f(x)+3f(-x)=\frac{1}{4+x^2} \Rightarrow \int_{-2}^{2}\left(2f(x)+3f(-x)\right)dx = \int_{-2}^{2}\frac{1}{4+x^2}dx$

$\Leftrightarrow \int_{-2}^{2} 5f(x)\,dx = \int_{-2}^{2}\frac{1}{4+x^2}dx$

$\Leftrightarrow \int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{5}\int_{-2}^{2}\frac{1}{4+x^2}dx = \frac{1}{5}.\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{10}.\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{20}$

Câu 6. **(Hà Nội - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4;4]$ biết $\int_{-2}^{0} f(-x)\,dx=2$ và $\int_{1}^{2} f(-2x)\,dx=4$. Tính $I=\int_{0}^{4} f(x)\,dx$.

A. $I=-10$. **B.** $I=-6$. **C.** $I=6$. **D.** $I=10$.

Lời giải

Xét tích phân $\int_{-2}^{0} f(-x)\,dx=2$.

Đặt $-x=t \Rightarrow dx=-dt$.

Đổi cận: khi $x=-2$ thì $t=2$; khi $x=0$ thì $t=0$ do đó

$\int_{-2}^{0} f(-x)\,dx = -\int_{2}^{0} f(t)\,dt = \int_{0}^{2} f(t)\,dt \Rightarrow \int_{0}^{2} f(t)\,dt = 2 \Rightarrow \int_{0}^{2} f(x)\,dx = 2$.

Do hàm số $y=f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(-2x)=-f(2x)$.

Do đó $\int_{1}^{2} f(-2x)\,dx = -\int_{1}^{2} f(2x)\,dx \Rightarrow \int_{1}^{2} f(2x)\,dx = -4$.

Xét $\int_{1}^{2} f(2x)\,dx$.

Đặt $2x=t \Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt$.

Đổi cận: khi $x=1$ thì $t=2$; khi $x=2$ thì $t=4$ do đó $\int_1^2 f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_2^4 f(t)\mathrm{d}t=-4$

$\Rightarrow \int_2^4 f(t)\mathrm{d}t=-8 \Rightarrow \int_2^4 f(x)\mathrm{d}x=-8$.

Do $I=\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x=2-8=-6$.

Câu 7. **(Hồng Quang - Hải Dương - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2;\ln 2]$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\frac{1}{e^x+1}$. Biết $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$ $(a;b\in\mathbb{Q})$. Tính $P=a+b$.

A. $P=\frac{1}{2}$. **B.** $P=-2$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

Lời giải

Gọi $I=\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=-x \Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Đổi cận: Với $x=-\ln 2 \Rightarrow t=\ln 2$; Với $x=\ln 2 \Rightarrow t=-\ln 2$.

Ta được $I=-\int_{\ln 2}^{-\ln 2} f(-t)\mathrm{d}t=\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-t)\mathrm{d}t=\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x)\mathrm{d}x$.

Khi đó ta có: $2I=\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(x)\mathrm{d}x+\int_{-\ln 2}^{\ln 2} f(-x)\mathrm{d}x==\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\left[f(x)+f(-x)\right]\mathrm{d}x=\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$.

Xét $\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$. Đặt $u=\mathrm{e}^x \Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

Đổi cận: Với $x=-\ln 2 \Rightarrow u=\frac{1}{2}$; $x=\ln 2 \Rightarrow u=2$.

Ta được $\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x=\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x+1\right)}\mathrm{d}x=\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{1}{u(u+1)}\mathrm{d}u$

$=\int_{-\ln 2}^{\ln 2}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u=\left(\ln|u|-\ln|u+1|\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\ln 2$

Vậy ta có $a=\frac{1}{2}$, $b=0\Rightarrow a+b=\frac{1}{2}$.

Câu 8. **(Chuyên ĐH Vinh - 2018)** Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=1$. Giá trị của $\int_{-2}^{2}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Do $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=1\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$ và $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2$

$\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=3$.

Mặt khác $\int_{-2}^{2}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x$ và $y=f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Xét $I=\int_{-2}^{0}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x$. Đặt $t=-x\Rightarrow dx=-dt$

$\Rightarrow I=\int_{-2}^{0}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=-\int_{2}^{0}\frac{f(-t)}{3^{-t}+1}\mathrm{d}t=\int_{0}^{2}\frac{f(-t)}{\frac{1}{3^t}+1}\mathrm{d}t=\int_{0}^{2}\frac{3^t f(t)}{3^t+1}\mathrm{d}t=\int_{0}^{2}\frac{3^x f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\int_{-2}^{2}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}\frac{3^x f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}\frac{(3^x+1)f(x)}{3^x+1}\mathrm{d}x=$

$\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=3$.

Câu 9. **(SGD&ĐT BRVT - 2018)** Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=10$. Tính $I=\int_{-2}^{2}\frac{f(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x$.

A. $I=10$. **B.** $I=\frac{10}{3}$. **C.** $I=20$. **D.** $I=5$.

Lời giải

Đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$. Đổi cận: $x=-2\Rightarrow t=2$, $x=2\Rightarrow t=-2$.

$I=\int_{-2}^{2}\frac{f(t)}{2^{-t}+1}\mathrm{d}t=\int_{-2}^{2}\frac{2^t}{2^t+1}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-2}^{2}\frac{2^x}{2^x+1}f(x)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow 2I=\int_{-2}^{2}\frac{f(x)}{2^x+1}\mathrm{d}x+\int_{-2}^{2}\frac{2^x}{2^x+1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}f(x)\mathrm{d}x+10$

Mặt khác do $f(x)$ là hàm số chẵn nên $f(-x)=f(x)$.

Xét $J=\int_{-2}^{0}f(x)\mathrm{d}x$, đặt $t=-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$

$\Rightarrow J=\int_{0}^{2}f(-t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{2}f(-x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=10\Rightarrow 2I=20\Rightarrow I=10$.----------

Câu 10. **(Yên Phong 1 - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $\int_{-1}^{1}f(x)dx=6$. Kết quả của $\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+2018^x}dx$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Xét tích phân $\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+2018^x}dx$. Đặt $x=-t$; $dx=-dt$; $x=-1\Rightarrow t=1$; $x=1\Rightarrow t=-1$.

$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+2018^x}dx=-\int_{1}^{-1}\frac{f(-t)}{1+2018^{-t}}dt=\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{1+\frac{1}{2018^t}}dt=\int_{-1}^{1}\frac{2018^t.f(t)}{1+2018^t}dt=\int_{-1}^{1}\frac{2018^x f(x)}{1+2018^x}dx$.

Vậy $\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+2018^x}dx+\int\limits_{-1}^{1}\frac{2018^x f(x)}{1+2018^x}dx=\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx=6$.

Do đó $\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+2018^x}dx=\frac{1}{2}.6=3$.

Câu 11. **(Toán Học Và Tuổi Trẻ 2018)** Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $\begin{cases} f(x).f(a-x)=1 \\ f(x)>0,\forall x\in[0;a] \end{cases}$ và $\int\limits_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}=\frac{ba}{c}$, trong đó b, c là hai số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $b+c$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(11;22)$. **B.** $(0;9)$. **C.** $(7;21)$. **D.** $(2017;2020)$.

Lời giải

Cách 1. Đặt $t=a-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=a;x=a\Rightarrow t=0$.

Lúc đó $I=\int\limits_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}=\int\limits_a^0\frac{-\mathrm{d}t}{1+f(a-t)}=\int\limits_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+f(a-x)}=\int\limits_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+\frac{1}{f(x)}}=\int\limits_0^a\frac{f(x)\mathrm{d}x}{1+f(x)}$

Suy ra $2I=I+I=\int\limits_0^a\frac{\mathrm{d}x}{1+f(x)}+\int\limits_0^a\frac{f(x)\mathrm{d}x}{1+f(x)}=\int\limits_0^a 1\mathrm{d}x=a$

Do đó $I=\frac{1}{2}a\Rightarrow b=1;c=2\Rightarrow b+c=3$.

Câu 12. **(Chuyên Sơn La - 2020)** Tích phân $\int\limits_{-2}^{2}\frac{x^{2020}}{e^x+1}.\mathrm{d}x=\frac{2^a}{b}$. Tính tổng $S=a+b$.

A. $S=0$. **B.** $S=2021$. **C.** $S=2020$. **D.** $S=4042$.

Lời giải

Chọn D

Xét $I=\int\limits_{-2}^{2}\frac{x^{2020}}{e^x+1}.\mathrm{d}x$.

Đặt $x=-t\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Đổi cận $x=-2\Rightarrow t=2;x=2\Rightarrow t=-2$.

Ta được $I=\int\limits_{2}^{-2}\frac{(-t)^{2020}}{e^{-t}+1}.(-\mathrm{d}t)=\int\limits_{-2}^{2}\frac{t^{2020}}{\frac{1}{e^t}+1}.\mathrm{d}t=\int\limits_{-2}^{2}\frac{t^{2020}.e^t}{e^t+1}.\mathrm{d}t=\int\limits_{-2}^{2}\frac{x^{2020}.e^x}{e^x+1}.\mathrm{d}x$.

Suy ra $2I=I+I=\int\limits_{-2}^{2}\frac{x^{2020}}{e^x+1}.\mathrm{d}x+\int\limits_{-2}^{2}\frac{x^{2020}.e^x}{e^x+1}.\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{2}x^{2020}.\mathrm{d}x=\frac{x^{2021}}{2021}\Big|_{-2}^{2}=\frac{2^{2021}-(-2)^{2021}}{2021}=\frac{2^{2022}}{2021}$.

Do đó $I=\frac{2^{2021}}{2021}$. Suy ra $a=b=2021$. Vậy $S=a+b=4042$.

Câu 13. **(Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\ln 2;\ln 2]$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}$. Biết $\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}f(x)\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3,(a,b\in\mathbb{Q})$. Tính $P=a+b$.

A. $P=-2$. **B.** $P=\frac{1}{2}$. **C.** $P=-1$. **D.** $P=2$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết suy ra $\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\left[f(x)+f(-x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$.

Ta có $\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\left[f(x)+f(-x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}f(-x)\mathrm{d}(-x)=2\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}f(x)\mathrm{d}x$.

Mặt khác $\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{1}{\left(\mathrm{e}^x+1\right)\mathrm{e}^x}\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\left[\frac{1}{\mathrm{e}^x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right]\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)$

$=\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{1}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)-\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x+1\right)=x\Big|_{-\ln 2}^{\ln 2}-\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)\Big|_{-\ln 2}^{\ln 2}=\ln 2+\ln 2-\ln 3+\ln\frac{3}{2}=\ln 2$.

Suy ra $\int\limits_{-\ln 2}^{\ln 2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln 2\Rightarrow a=\frac{1}{2},b=0\Rightarrow a+b=\frac{1}{2}$.

Câu 14. **(Đại học Hồng Đức –Thanh Hóa 2019)** Cho $f(x)$ là hàm số chẵn và $\int\limits_0^1 f(x)dx=2$. Giá trị của tích phân $\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+2019^x}dx$ là

A. $\frac{2}{2019}$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

$I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(x)}{1+2019^x}dx$

Đặt $t=-x\to -dt=dx$

Cận

x	-1	1
t	1	-1

$I=-\int\limits_{1}^{-1}\frac{f(-t)}{1+2019^{-t}}dt=\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t)}{\frac{1+2019^t}{2019^t}}dt=\int\limits_{-1}^{1}\frac{2019^t f(t)}{1+2019^t}dt$

$\Rightarrow 2I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{2019^t f(t)}{1+2019^t}dt+\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t)}{1+2019^t}dt=\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t)\left(1+2019^t\right)}{1+2019^t}dt$

$\Rightarrow 2I=\int\limits_{-1}^{1}f(t)dt=2\int\limits_{0}^{1}f(t)dt=2.2\Rightarrow I=2.$

Dạng 2.2 Tích phân của hàm chứa dấu trị tuyệt đối

Tính tích phân: $I=\int\limits_a^b\left|f(x)\right|.dx$?

Bước 1. Xét dấu $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$. Giả sử trên đoạn $[a;b]$ thì phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x_o\in[a;b]$ và có bảng xét dấu sau:

x		a	x_o	b	
$f(x)$		+	0	−	

Bước 2. Dựa vào công thức phân đoạn và dấu của trên $[a;x_o],[x_o;b]$ ta được:

$$I=\int_a^b |f(x)|.dx=\int_a^{x_o} f(x)\,dx+\int_{x_o}^b [-f(x)]dx=A+B.$$

Sử dụng các phương pháp tính tích phân đã học tính $A,B\Rightarrow I$.

Câu 15. Cho a là số thực dương, tính tích phân $I=\int_{-1}^{a}|x|\mathrm{d}x$ theo a.

A. $I=\dfrac{a^2+1}{2}$. **B.** $I=\dfrac{a^2+2}{2}$. **C.** $I=\dfrac{-2a^2+1}{2}$. **D.** $I=\dfrac{|3a^2-1|}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $a>0$ nên $I=-\int_{-1}^{0}x\,dx+\int_{0}^{a}x\,dx=\dfrac{1}{2}+\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{1+a^2}{2}$

Câu 16. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho số thực $m>1$ thỏa mãn $\int_1^m|2mx-1|dx=1$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $m\in(4;6)$. **B.** $m\in(2;4)$. **C.** $m\in(3;5)$. **D.** $m\in(1;3)$.

Lời giải

Do $m>1\Rightarrow 2m>2\Rightarrow\dfrac{1}{2m}<1$. Do đó với $m>1,x\in[1;m]\Rightarrow 2mx-1>0$.

Vậy $\int_1^m|2mx-1|dx=\int_1^m(2mx-1)dx=\left(mx^2-x\right)\Big|_1^m=m^3-m-m+1=m^3-2m+1$.

Từ đó theo bài ra ta có $m^3-2m+1=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$. Do $m>1$ vậy $m=\sqrt{2}$.

Câu 17. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\int_{-1}^{1}|x|^3\,\mathrm{d}x=\left|\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x\right|$. **B.** $\int_{-1}^{2018}|x^4-x^2+1|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2018}(x^4-x^2+1)\mathrm{d}x$.

C. $\int_{-2}^{3}|e^x(x+1)\mathrm{d}x|=\int_{-2}^{3}e^x(x+1)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $x^4-x^2+1=x^4-2.x^2.\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}=\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó: $\int_{-1}^{2018}|x^4-x^2+1|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2018}(x^4-x^2+1)\mathrm{d}x$.

Câu 18. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho tích phân $\int_1^5\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|dx=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tính P = abc.

A. $P=-36$ **B.** $P=0$ **C.** $P=-18$ **D.** $P=18$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\int_1^5 \left|\frac{x-2}{x+1}\right| dx = -\int_1^2 \frac{x-2}{x+1} dx + \int_2^5 \frac{x-2}{x+1} dx$$
$$= -\int_1^2 \left(1-\frac{3}{x+1}\right) dx + \int_2^5 \left(1-\frac{3}{x+1}\right) dx$$
$$= -\left(x-3\ln|x+1|\right)\Big|_1^2 + \left(x-3\ln|x+1|\right)\Big|_2^5$$
$$= -(2-3\ln 3)+1-3\ln 2+5-3\ln 6-2+3\ln 3$$
$$= 2-6\ln 2+3\ln 3$$

Vậy $a=2, b=-6, c=3 \Rightarrow P=abc=-36$.

Câu 19. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Có bao nhiêu số tự nhiên m để $\int_0^2 \left|x^2-2m^2\right| dx = \left|\int_0^2 \left(x^2-2m^2\right) dx\right|$.

A. Vô số. **B.** 0. **C.** Duy nhất. **D.** 2.

Lời giải

$$\int_0^2 \left|x^2-2m^2\right| dx = \left|\int_0^2 \left(x^2-2m^2\right) dx\right| \quad (*)$$

Ta có: $x^2-2m^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-m\sqrt{2} \\ x=m\sqrt{2} \end{array}\right.$.

TH1. Nếu $m=0$ thì $(*)$ luôn đúng.

TH2. Nếu $m\neq 0$ thi $(*)$ đúng $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2m^2>0 \ (1) \\ x^2-2m^2<0 \ (2) \end{array}\right.$ với mọi $x\in[0;2]$.

+) $m>0$.

(1) đúng $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m\sqrt{2}<m\sqrt{2}\leq 0 \\ 2\leq -m\sqrt{2}<m\sqrt{2} \end{array}\right.$ (vô nghiệm).

(2) đúng $\Leftrightarrow \begin{cases} -m\sqrt{2}\leq 0 \\ m\sqrt{2}\geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\geq 0 \\ m\geq \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m\geq\sqrt{2}$.

+) $m<0$.

(1) đúng $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\sqrt{2}<-m\sqrt{2}\leq 0 \\ 2\leq m\sqrt{2}<-m\sqrt{2} \end{array}\right.$ (vô nghiệm).

(2) đúng $\Leftrightarrow \begin{cases} m\sqrt{2}\leq 0 \\ -m\sqrt{2}\geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\leq 0 \\ m\leq -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m\leq -\sqrt{2}$.

Suy ra $m\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)\cup\{0\}$ là giá trị cần tìm.

Câu 20. **(Chu Văn An -Thái Nguyên - 2018)** Tính tích phân $I=\int_{-1}^{1}\left|2^x-2^{-x}\right|dx$.

A. $\frac{1}{\ln 2}$. **B.** $\ln 2$. **C.** $2\ln 2$. **D.** $\frac{2}{\ln 2}$.

Lời giải

$I=\int_{-1}^{1}\left|2^x-2^{-x}\right|dx$ ta có $2^x-2^{-x}=0 \Rightarrow x=0$.

$$\Rightarrow I=\int_{-1}^{1}\left|2^x-2^{-x}\right|dx=\int_{-1}^{0}\left|2^x-2^{-x}\right|dx+\int_{0}^{1}\left|2^x-2^{-x}\right|dx=\left|\int_{-1}^{0}\left(2^x-2^{-x}\right)dx\right|+\left|\int_{0}^{1}\left(2^x-2^{-x}\right)dx\right|$$

$$=\left|\left(\frac{2^x+2^{-x}}{\ln 2}\right)\Big|_{-1}^{0}\right|+\left|\left(\frac{2^x+2^{-x}}{\ln 2}\right)\Big|_{0}^{1}\right|=\frac{1}{\ln 2}.$$

Câu 21. **(KTNL Gia Bình 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$; $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int_{-1}^{1} f\left(|2x-1|\right)\mathrm{d}x$

A. $I=8$ **B.** $I=6$ **C.** $I=\frac{3}{2}$ **D.** $I=4$

Lời giải

Chọn D

$$I=\int_{-1}^{1} f\left(|2x-1|\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f\left(1-2x\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1} f\left(2x-1\right)\mathrm{d}x=I_1+I_2.$$

Xét $I_1=\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f\left(1-2x\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f\left(1-2x\right)\mathrm{d}\left(1-2x\right)=\frac{1}{2}\int_0^3 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3.$

Xét $I_2=\int_{\frac{1}{2}}^{1} f\left(2x-1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1} f\left(2x-1\right)\mathrm{d}\left(2x-1\right)=\frac{1}{2}\int_0^1 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=1$

Vậy $I=I_1+I_2=4$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 22. **(Chuyên KHTN 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^3 f(x)dx=8$ và $\int_0^5 f(x)dx=4$. Tính $\int_{-1}^{1} f(|4x-1|)dx.$

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{11}{4}$. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Ta có $\int_{-1}^{1} f(|4x-1|)dx=\int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(|4x-1|)dx+\int_{\frac{1}{4}}^{1} f(|4x-1|)dx$

$$=\int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)dx+\int_{\frac{1}{4}}^{1} f(4x-1)dx=I+J.$$

+) Xét $I=\int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)dx.$

Đặt $t=1-4x\Rightarrow dt=-4dx;$

Với $x=-1\Rightarrow t=5; x=\frac{1}{4}\Rightarrow t=0.$

$$I=\int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(1-4x)dx=\int_{5}^{0} f(t)(-\frac{1}{4}dt)=\frac{1}{4}\int_{0}^{5} f(t)dt=\frac{1}{4}\int_{0}^{5} f(x)dx=1.$$

+) Xét $J=\int_{\frac{1}{4}}^{1} f(4x-1)dx.$

Đặt $t=4x-1\Rightarrow dt=4dx;$

Với $x=1\Rightarrow t=3; x=\frac{1}{4}\Rightarrow t=0.$

$$J=\int_{\frac{1}{4}}^{1} f(4x-1)dx=\int_{0}^{3} f(t)(\frac{1}{4}dt)=\frac{1}{4}\int_{0}^{3} f(t)dt=\frac{1}{4}\int_{0}^{3} f(x)dx=2.$$

Vậy $\int_{-1}^{1} f(|4x-1|)dx=3.$

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_0^2 f(6x)\mathrm{d}x=14$. Tính $\int_{-2}^{2} f(5|x|+2)\mathrm{d}x$.

A. 30. **B.** 32. **C.** 34. **D.** 36.

Lời giải

Nguyễn Bảo Vương

+ Xét $\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=2$.

Đặt $u=2x\Rightarrow \mathrm{d}u=2\mathrm{d}x$; $x=0\Rightarrow u=0$; $x=1\Rightarrow u=2$.

Nên $2=\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2 f(u)\mathrm{d}u\Rightarrow\int_0^2 f(u)\mathrm{d}u=4$.

+ Xét $\int_0^2 f(6x)\mathrm{d}x=14$.

Đặt $v=6x\Rightarrow \mathrm{d}v=6\mathrm{d}x$; $x=0\Rightarrow v=0$; $x=2\Rightarrow v=12$.

Nên $14=\int_0^2 f(6x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\int_0^{12} f(v)\mathrm{d}v\Rightarrow\int_0^{12} f(v)\mathrm{d}v=84$.

+ Xét $\int_{-2}^{2} f(5|x|+2)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0} f(5|x|+2)\mathrm{d}x+\int_0^2 f(5|x|+2)\mathrm{d}x$.

□ Tính $I_1=\int_{-2}^{0} f(5|x|+2)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=5|x|+2$.

Khi $-2<x<0$, $t=-5x+2\Rightarrow \mathrm{d}t=-5\mathrm{d}x$; $x=-2\Rightarrow t=12$; $x=0\Rightarrow t=2$.

$$I_1=\frac{-1}{5}\int_{12}^{2} f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\left[\int_0^{12} f(t)\mathrm{d}t-\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{5}(84-4)=16.$$

□ Tính $I_1=\int_0^2 f(5|x|+2)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=5|x|+2$.

Khi $0<x<2$, $t=5x+2\Rightarrow \mathrm{d}t=5\mathrm{d}x$; $x=2\Rightarrow t=12$; $x=0\Rightarrow t=2$.

$I_2=\frac{1}{5}\int_2^{12} f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{5}\left[\int_0^{12} f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{2} f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{5}(84-4)=16$.

Vậy $\int_{-2}^{2} f\left(5|x|+2\right)\mathrm{d}x=32$.

Câu 24. **(Phong 1 - 2018)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0;3)$ và $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2;\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=8$. Giá trị của tích phân $\int_{-1}^{1} f\left(|2x-1|\right)\mathrm{d}x=?$

A. 6 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Ta có $\int_{-1}^{1} f\left(|2x-1|\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(2x-1)\mathrm{d}x=I+J$

Tính $I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}} f(1-2x)\mathrm{d}x$

Đặt $t=1-2x\Rightarrow \mathrm{d}t=-2\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=-1\Rightarrow t=3;x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=0$

$\Rightarrow I=-\frac{1}{2}\int_3^0 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^3 f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.8=4$

Tính $J=\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(2x-1)\mathrm{d}x$

Đặt $t=2x-1\Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$. Đổi cận $x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=0;x=1\Rightarrow t=1$

$\Rightarrow J=\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.2=1$

Vậy $\int_{-1}^{1} f\left(|2x-1|\right)\mathrm{d}x=I+J=4+1=5$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^3 f(x)dx=8$ và $\int_0^5 f(x)dx=4$. Tính $\int_{-1}^{1} f(|4x-1|)dx$

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{11}{4}$. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_{-1}^{1} f(|4x-1|)dx=\int_{-1}^{\frac{1}{4}} f(-4x+1)dx+\int_{\frac{1}{4}}^{1} f(4x-1)dx$.

Tính: $A=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{4}} f(-4x+1)dx$. Đặt $t=-4x+1\Rightarrow -\frac{1}{4}dt=dx$

$\Rightarrow A=-\frac{1}{4}\int\limits_{5}^{0} f(t)dt=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{5} f(t)dt=1$

Tính: $B=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} f(4x-1)dx$. Đặt $t=4x-1\Rightarrow \frac{1}{4}dt=dx$

$\Rightarrow B=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{3} f(t)dt=2$.

Vậy $\int\limits_{-1}^{1} f(|4x-1|)dx=A+B=3$.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(x)+2f'(-x)=\frac{2|x|}{x^6+x^2+1}$ với mọi số thực x. Giả sử $f(2)=m$, $f(-3)=n$. Tính giá trị của biểu thức $T=f(-2)-f(3)$.

A. $T=m+n$. **B.** $T=n-m$. **C.** $T=m-n$. **D.** $T=-m-n$.

Lời giải

Chọn B

Với mọi số thực x, thay x bởi $-x$ vào biểu thức $f'(x)+2f'(-x)=\frac{2|x|}{x^6+x^2+1}$ (1), ta được

$f'(-x)+2f'(x)=\frac{2|-x|}{(-x)^6+(-x)^2+1}$ hay $2f'(x)+f'(-x)=\frac{2|x|}{x^6+x^2+1}$ (2).

Nhân hai vế của (2) với 2 sau đó trừ theo vế cho (1), rút gọn suy ra $f'(x)=\frac{2}{3}.\frac{|x|}{x^6+x^2+1}$ với mọi số thực x.

Xét $I=\int\limits_{-3}^{2} f'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{2}\frac{2}{3}.\frac{|x|}{x^6+x^2+1}\mathrm{d}x$. Đặt $u=-x$, khi đó ta được $\mathrm{d}u=-\mathrm{d}x$.

Đổi cận: Khi $x=-3\Rightarrow u=3$ và $x=2\Rightarrow u=-2$.

Ta được

$I=\int\limits_{3}^{-2}\frac{2}{3}.\frac{|-u|}{(-u)^6+(-u)^2+1}(-\mathrm{d}u)=\int\limits_{-2}^{3}\frac{2}{3}.\frac{|u|}{u^6+u^2+1}\mathrm{d}u=\int\limits_{-2}^{3}\frac{2}{3}.\frac{|x|}{x^6+x^2+1}\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{3} f'(x)\mathrm{d}x$.

Mà $I=\int\limits_{-3}^{2} f'(x)\mathrm{d}x=f(2)-f(-3)$ (3) và $I=\int\limits_{-2}^{3} f'(x)\mathrm{d}x=f(3)-f(-2)$ (4).

Từ (3) và (4), ta được $f(2)-f(-3)=f(3)-f(-2)$ suy ra

$f(-2)-f(3)=f(-3)-f(2)=n-m$.

Dạng 2.3 Tích phân nhiều hàm

Câu 27. Cho số thực a và hàm số $f(x)=\begin{cases}2x & khi\ x\le 0\\ a(x-x^2) & khi\ x>0\end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ bằng:

A. $\frac{a}{6}-1$. **B.** $\frac{2a}{3}+1$. **C.** $\frac{a}{6}+1$. **D.** $\frac{2a}{3}-1$.

Lời giải

Chọn A

Ta thấy, $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} 2xdx + \int_{0}^{1} a\left(x - x^2\right)dx$

$= \left(x^2\right)\Big|_{-1}^{0} + a\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1} = -1 + a\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{a}{6} - 1.$

Câu 28. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x + m & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x\sqrt{3+x^2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$\int_{-1}^{1} f(x)dx = ae + b\sqrt{3} + c$, $(a,b,c \in Q)$. Tổng $a+b+3c$ bằng

A. 15. **B.** -10. **C.** -19. **D.** -17.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x + m\right) = m+1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(2x\sqrt{3+x^2}\right) = 0$ và $f(0) = m+1$.

Vì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x = 0$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ hay $m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Khi đó $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} 2x\sqrt{3+x^2}dx + \int_{0}^{1}\left(e^x - 1\right)dx = \int_{-1}^{0} \sqrt{3+x^2}\,d\left(3+x^2\right) + \int_{0}^{1}\left(e^x - 1\right)dx$

$= \frac{2}{3}\left(3+x^2\right)\sqrt{3+x^2}\Big|_{-1}^{0} + \left(e^x - x\right)\Big|_{0}^{1} = e + 2\sqrt{3} - \frac{22}{3}.$

Suy ra $a = 1$, $b = 2$, $c = -\frac{22}{3}$.

Vậy tổng $a+b+3c = -19$.

Câu 29. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Tính tích phân $\int_{0}^{1} \max\left\{e^x, e^{1-2x}\right\}dx$

A. $e-1$. **B.** $\frac{3}{2}\left(e - \sqrt[3]{e}\right)$. **C.** $e - \sqrt[3]{e}$. **D.** $\frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$.

Lời giải

Ta có: $e^x \geq e^{1-2x} \Leftrightarrow x \geq 1-2x \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$. Suy ra: $\max\left\{e^x, e^{1-2x}\right\} = \begin{cases} e^{1-2x} & khi\ 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ e^x & khi\ \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$

Do đó $I = \int_{0}^{1} \max\left\{e^x, e^{1-2x}\right\}dx = \int_{0}^{\frac{1}{3}} e^{1-2x}dx + \int_{\frac{1}{3}}^{1} e^x dx = -\frac{1}{2}e^{1-2x}\Big|_{0}^{\frac{1}{3}} + e^x\Big|_{\frac{1}{3}}^{1}$

$= -\frac{1}{2}e^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}e + e - e^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(e - \sqrt[3]{e}\right).$

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & khi\ x \geq 1 \\ 5 - x & khi\ x < 1 \end{cases}$. Tính $I = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x dx + 3\int_{0}^{1} f(3-2x)dx$

A. $I=\frac{71}{6}$. **B.** $I=31$. **C.** $I=32$. **D.** $I=\frac{32}{3}$.

Lời giải

Chọn B

+ Xét tích phân: $I_1=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin x\right)\cos x dx$.

Đặt: $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos x dx$.

Đổi cận: với $x=0$ thì $t=0$, với $x=\frac{\pi}{2}$ thì $t=1$.

$$I_1=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin x\right)\cos x dx=2\int\limits_0^1 f\left(t\right)dt=2\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=2\int\limits_0^1 \left(5-x\right)dx=\left(10x-x^2\right)\Big|_0^1=9.$$

+ Xét tích phân: $I_2=3\int\limits_0^1 f\left(3-2x\right)dx$.

Đặt: $t=3-2x\Rightarrow dt=-2dx\Rightarrow dx=-\frac{1}{2}dt$

Đổi cận: với $x=0$ thì $t=3$, với $x=1$ thì $t=1$.

$$I_2=3\int\limits_0^1 f\left(3-2x\right)dx=-\frac{3}{2}\int\limits_3^1 f\left(t\right)dt=-\frac{3}{2}\int\limits_3^1 f\left(x\right)dx$$

$$=-\frac{3}{2}\int\limits_3^1 \left(x^2+3\right)dx=\left(-\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x\right)\Big|_3^1=22.$$

Nguyễn Bảo Vương

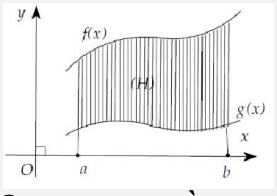
Vậy: $I=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin x\right)\cos x dx+3\int\limits_0^1 f\left(3-2x\right)dx=9+22=31$.

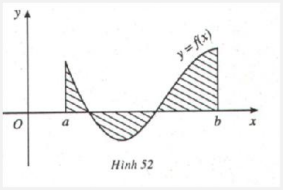
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

Dạng 1. Ứng dụng tích phân để tìm diện tích

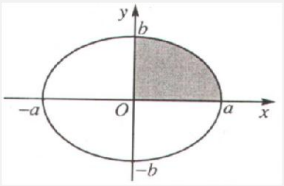
① *Hình phẳng* (H) *giới hạn bởi* $\begin{cases}(C_1): y=f(x)\\(C_2): y=g(x)\\x=a,\ x=b\ (a<b)\end{cases}$ *thì diện tích là* $\boxed{S=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x}$.

Hình phẳng (H) *giới hạn bởi* $\begin{cases}(C_1): y=f(x)\\(C_2): Ox: y=0\\x=a,\ x=b\ (a<b)\end{cases}$ *thì diện tích là* $\boxed{S=\int_a^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x}$.





Hình 52



$\boxed{S_{\text{elip}}=\pi ab.}$

$(E):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

② ***Hình thức đề thường hay cho***

Hình thức 1: Không cho hình vẽ, cho dạng $(H):\{y=f(x),\ y=g(x),\ x=a,\ x=b\ (a<b)\}$

$\xrightarrow{\text{casio}}\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=$ *kết quả, so sánh với bốn đáp án.*

Hình thức 2: Không cho hình vẽ, cho dạng $(H):\{y=f(x),\ y=g(x)\}$

Giải $f(x)=g(x)$ *tìm nghiệm* $x_1,...,x_i$, *với* x_1 *nhỏ nhất,* x_i *lớn nhất* $\xrightarrow{\text{casio}}\int_{x_1}^{x_i}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x.$

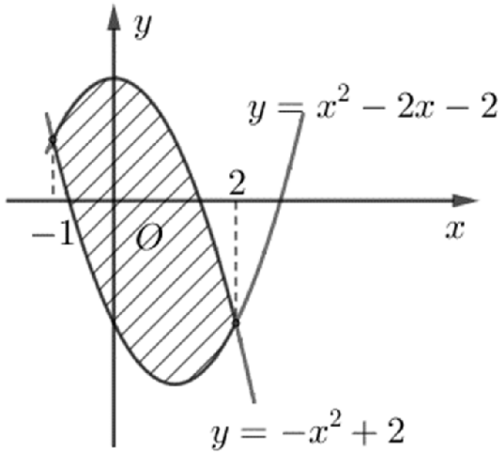
Hình thức 3: Cho hình vẽ, sẽ giải phương trình tìm tọa độ giao điểm (nếu chưa cho trên hình), chia từng diện tích nhỏ, xổ hình từ trên xuống, ghi công thức và bấm máy tính.

Hình thức 4: Cho ba hàm trở lên, chẳng hạn $y=f(x),\ y=g(x),\ y=h(x)$ *ta nên vẽ hình.*

Câu 1. **(THPT Lê Xoay Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,\ x=b$ được tính theo công thức

A. $S=\int_a^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x.$ **B.** $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$ **C.** $S=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$ **D.** $S=\int_b^a \left|f(x)\right|\mathrm{d}x.$

Câu 2. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên bằng



A. $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2-2x+4\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{-1}^{2}\left(2x^2+2x-4\right)\mathrm{d}x$.

Câu 3. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x^2$, $y=-1$, $x=0$ và $x=1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $S=\pi\int_{0}^{1}\left(2x^2+1\right)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_{0}^{1}\left(2x^2-1\right)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{0}^{1}\left(2x^2+1\right)^2\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int_{0}^{1}\left(2x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

Câu 4. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4$ và $y=2x-4$ bằng

A. 36. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** 36π.

Câu 5. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-1$ và $y=x-1$

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{13}{6}$. **C.** $\frac{13\pi}{6}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-3$ và $y=x-3$ bằng

A. $\frac{125\pi}{6}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{125}{6}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 7. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-2$ và $y=3x-2$ bằng

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{9\pi}{2}$. **C.** $\frac{125}{6}$. **D.** $\frac{125\pi}{6}$.

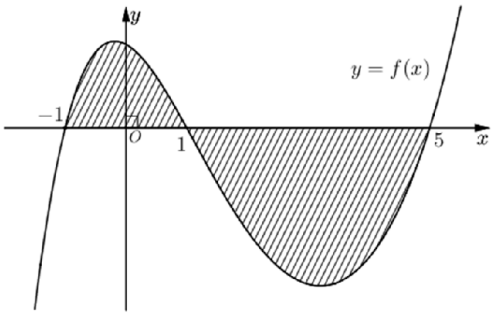
Câu 8. **(Mã 102 2018)** Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\pi\int_{0}^{2}2^x\mathrm{d}x$ **B.** $S=\int_{0}^{2}2^x\mathrm{d}x$ **C.** $S=\pi\int_{0}^{2}2^{2x}\mathrm{d}x$ **D.** $S=\int_{0}^{2}2^{2x}\mathrm{d}x$

Câu 9. **(Mã 101 2018)** Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\int_{0}^{2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ **B.** $S=\pi\int_{0}^{2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ **C.** $S=\pi\int_{0}^{2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ **D.** $S=\pi\int_{0}^{2}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$

Câu 10. **(Mã 102 - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1$ và $x=5$ (như hình vẽ bên).



Mệnh đề nào sau đây đúng?

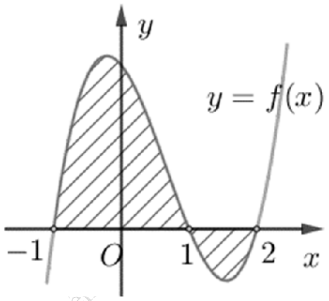
A. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 11. **(Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1, x=2$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

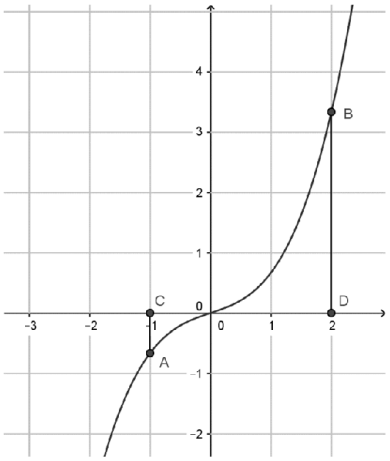
C. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 12. **(Đề Minh Họa 2017)** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đồ thị hàm số $y=x-x^2$.

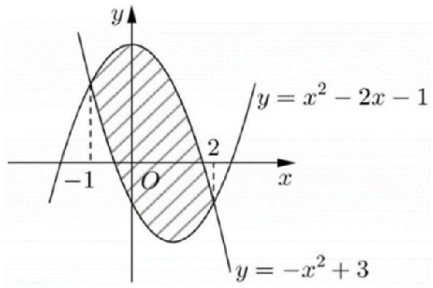
A. $\frac{37}{12}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** $\frac{81}{12}$ **D.** 13

Câu 13. **(Đề Tham Khảo 2017)** Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=2$. Đặt $a=\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x, b=\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x$, mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $S=b-a$ **B.** $S=b+a$ **C.** $S=-b+a$ **D.** $S=-b-a$

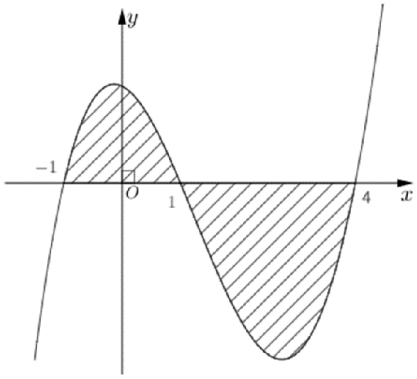
Câu 14. **(Đề Tham Khảo 2019)** Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^{2}(-2x+2)dx$ **B.** $\int_{-1}^{2}(2x-2)dx$

C. $\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx$ **D.** $\int_{-1}^{2}(2x^2-2x-4)dx$

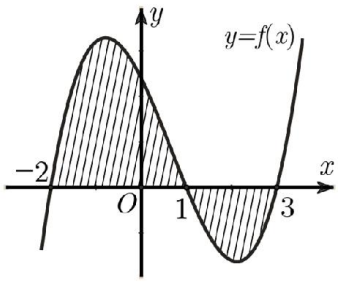
Câu 15. **(Mã 101 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1$ và $x=4$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{4}f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{4}f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{4}f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S=-\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{4}f(x)\mathrm{d}x$.

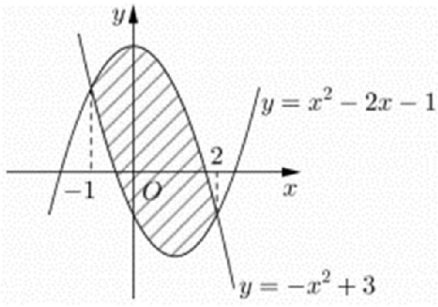
Câu 16. **(Mã 104 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi cá đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=-2$ và $x=3$ (như hình vẽ). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=-\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x.$ **B.** $S=\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x.$

C. $S=-\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x.$ **D.** $S=\int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x.$

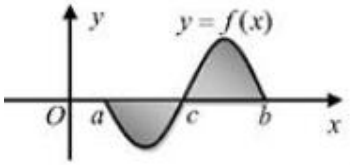
Câu 17. **(Chuyên KHTN 2019)** Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_{-1}^{2}\left(2x^2+2x-4\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2-2x+4\right)\mathrm{d}x$.

Câu 18. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=a, x=b$ (như hình vẽ bên). Hỏi cách tính S nào dưới đây đúng?



A. $S=\int_{a}^{b} f(x)\,dx$. **B.** $S=\left|\int_{a}^{c} f(x)\,dx+\int_{c}^{b} f(x)\,dx\right|$.

C. $S=-\int_{a}^{c} f(x)\,dx+\int_{c}^{b} f(x)\,dx$. **D.** $S=\int_{a}^{c} f(x)\,dx+\int_{c}^{b} f(x)\,dx$.

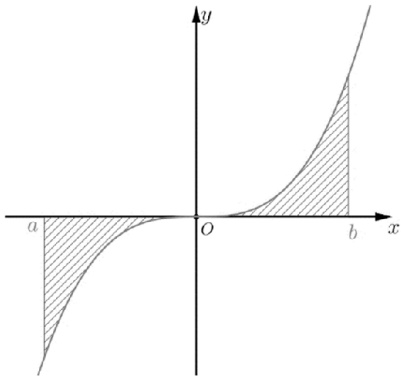
Câu 19. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương 2019)** Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số: $y=x^3-3x$, $y=x$. Tính S.

A. $S=4$. **B.** $S=8$. **C.** $S=2$. **D.** $S=0$.

Câu 20. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3^x$, $y=0, x=0, x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\int\limits_0^2 3^x dx$. **B.** $S=\pi\int\limits_0^2 3^{2x} dx$. **C.** $S=\pi\int\limits_0^2 3^x dx$. **D.** $S=\int\limits_0^2 3^{2x} dx$.

Câu 21. **(THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y=f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ (như hình vẽ dưới đây). Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D. đúng trong các phương án A, B, C, D cho dưới đây?



A. $S_D=\int\limits_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^b f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S_D=-\int\limits_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S_D=\int\limits_a^0 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_0^b f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S_D=-\int\limits_a^0 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_0^b f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 22. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-2)^2-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

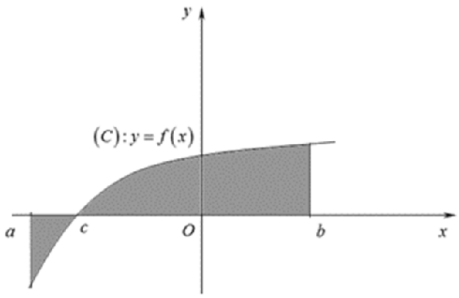
Câu 23. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và các đường thẳng $x=a$, $x=b$ bằng

A. $\left|\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x\right|$. **B.** $\int\limits_a^b |f(x)+g(x)|\mathrm{d}x$. **C.** $\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

Câu 24. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=4x-x^2$ và trục Ox

A. 11. **B.** $\frac{34}{3}$. **C.** $\frac{31}{3}$. **D.** $\frac{32}{3}$.

Câu 25. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b\,(a<b)$ (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức nào dưới đây ?



A. $S=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$.

B. $S=\int_a^b f(x)\,dx$.

C. $S=-\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$.

D. $S=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$.

Câu 26. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+1, x=-1, x=2$ và trục hoành.

A. $S=6$.

B. $S=16$.

C. $S=\frac{13}{6}$.

D. $S=13$.

Câu 27. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+5$, $y=6x$, $x=0$, $x=1$. Tính S.

A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{7}{3}$

C. $\frac{8}{3}$

D. $\frac{5}{3}$

Câu 28. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y=\frac{-3x-1}{x-1}$ và hai trục tọa độ là S. Tính S?

A. $S=1-\ln\frac{4}{3}$

B. $S=4\ln\frac{4}{3}$

C. $S=4\ln\frac{4}{3}-1$

D. $S=\ln\frac{4}{3}-1$

Câu 29. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=x^2; y=0; x=1; x=2$ bằng

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{7}{3}$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. 1.

Câu 30. **(THPT Lê Xoay Vĩnh Phúc 2019)** Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $(H): y=\frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

A. $2\ln 2-1$.

B. $\ln 2+1$.

C. $\ln 2-1$.

D. $2\ln 2+1$.

Câu 31. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{\ln x}{x^2}$, $y=0$, $x=1$, $x=e$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\pi\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$.

B. $S=\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$.

C. $S=\int_1^e \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)^2 dx$.

D. $S=\pi\int_1^e \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)^2 dx$

Câu 32. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=-x^2+2x+1$, $y=2x^2-4x+1$ là

A. 8.

B. 5.

C. 4.

D. 10.

Câu 33. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=x^2+2x$, $y=x+2$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{11}{2}$.

Câu 34. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=3x-2$. Tính diện tích hình phẳng (H)

A. $\frac{2}{3}$ (đvdt) **B.** $\frac{1}{3}$ (đvdt) **C.** 1 (đvdt) **D.** $\frac{1}{6}$ (đvdt)

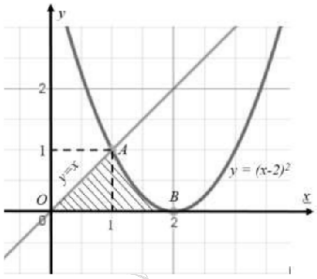
Câu 35. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\ln x$, $y=1$ và đường thẳng $x=1$ bằng**

A. e^2. **B.** $e+2$. **C.** $2e$. **D.** $e-2$.

Câu 36. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=4x-x^2$ và đường thẳng $y=2x$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{16}{3}$

Câu 37. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Tính diện tích phần hình phẳng gạch chéo (tam giác cong OAB) trong hình vẽ bên.

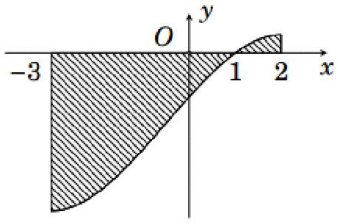


A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{5\pi}{6}$. **C.** $\frac{8}{15}$. **D.** $\frac{8\pi}{15}$.

Câu 38. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x$, $y=0$, $x=-10$, $x=10$.

A. $S=\frac{2000}{3}$. **B.** $S=2008$. **C.** $S=2000$. **D.** $S=\frac{2008}{3}$.

Câu 39. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-3$, $x=2$ (như hình vẽ bên). Đặt $a=\int_{-3}^{1} f(x)\mathrm{d}x$, $b=\int_{1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng.



A. $S=a+b$. **B.** $S=a-b$. **C.** $S=-a-b$. **D.** $S=b-a$.

Câu 40. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$ và đường thẳng $y=2x$ là :

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{5}{3}$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{23}{15}$

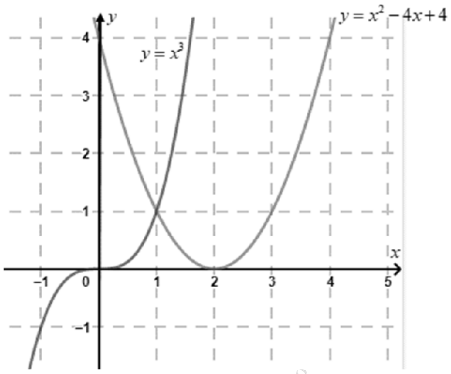
Câu 41. **(Chuyên Phan Bội Châu 2019)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=-x^2+2x+1,\ y=2x^2-4x+1$ là

A. 8 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 10

Câu 42. **(Hsg Bắc Ninh 2019)** Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S là

A. $S=1+\ln 2.$ **B.** $S=2\ln 2-1.$ **C.** $S=2\ln 2+1.$ **D.** $S=\ln 2-1.$

Câu 43. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=x^3,\ y=x^2-4x+4$ và trục Ox (tham khảo hình vẽ) được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_0^2\left|x^3-\left(x^2-4x+4\right)\right|\mathrm{d}x.$ **B.** $-\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2\left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x.$

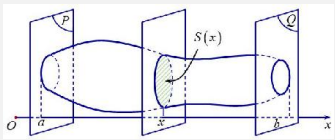
C. $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x-\int_1^2\left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x.$ **D.** $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2\left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x.$

Nguyễn Bảo Vương

Dạng 2. Ứng dụng tích phân để tìm thể tích

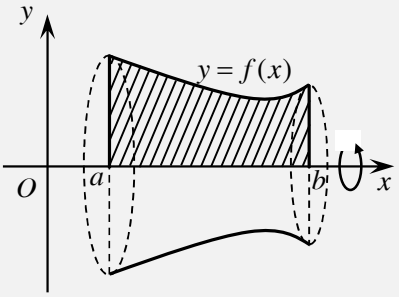
① ***Thể tích vật thể***

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b, $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a\le x\le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $\boxed{V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x}$.



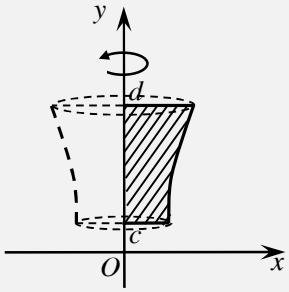
② ***Thể tích khối tròn xoay***

a) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,\ x=b$ quanh trục Ox:*



$\begin{cases}(C): y=f(x)\\(Ox): y=0\\x=a\\x=b\end{cases}$ $\boxed{V_x=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx}$

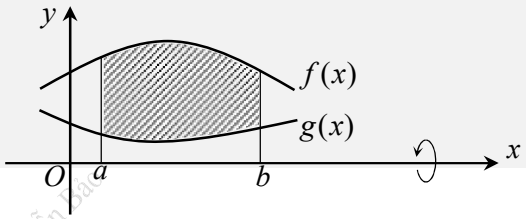
b) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường* $x=g(y)$, *trục hoành và hai đường thẳng* $y=c$, $y=d$ *quanh trục* Oy:



$\begin{cases}(C): x=g(y)\\(Oy): x=0\\y=c\\y=d\end{cases}$ $\boxed{V_y=\pi\int_c^d\left[g(y)\right]^2dy}$

c) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường* $y=f(x)$, $y=g(x)$ *(cùng nằm một phía so với* Ox*) và hai đường thẳng* $x=a$, $x=b$ *quanh trục* Ox:

$\boxed{V=\pi\int_a^b\left|f^2(x)-g^2(x)\right|dx}$.



Câu 1. **(Dề Minh Họa 2017)** Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a, x=b(a<b)$, xung quanh trục Ox.

A. $V=\int_a^b\left|f(x)\right|dx$ **B.** $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ **C.** $V=\int_a^b f^2(x)dx$ **D.** $V=\pi\int_a^b f(x)dx$

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b(a<b)$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức:

A. $V=\pi^2\int_a^b f(x)dx$ **B.** $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ **C.** $V=2\pi\int_a^b f^2(x)dx$ **D.** $V=\pi^2\int_a^b f^2(x)dx$

Câu 3. **(Mã 101 2020 Lần 2)** Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^{3x}$, $y=0$, $x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng:

A. $\pi\int_0^1 e^{3x}dx$. **B.** $\int_0^1 e^{6x}dx$. **C.** $\pi\int_0^1 e^{6x}dx$. **D.** $\int_0^1 e^{3x}dx$.

Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^{4x}, y=0, x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\int_0^1 e^{4x}dx$. **B.** $\pi\int_0^1 e^{8x}dx$. **C.** $\pi\int_0^1 e^{4x}dx$. **D.** $\int_0^1 e^{8x}dx$.

Câu 5. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^{2x}, y=0, x=0$ và $x=1$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành kho quay D quanh Ox bằng

A. $\pi\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$. **B.** $\int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x$. **D.** $\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$.

Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^{x}, y=0, x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\pi\int\limits_0^1 e^{2x}dx$. **B.** $\pi\int\limits_0^1 e^{x}dx$ **C.** $\int\limits_0^1 e^{x}dx$. **D.** $\int\limits_0^1 e^{2x}dx$.

Câu 7. **(Mã 103 2018)** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)dx$ **B.** $V=\pi\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)dx$

C. $V=\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)^2dx$ **D.** $V=\pi\int\limits_0^2\left(x^2+3\right)^2dx$

Câu 8. **(Mã 105 2017)** Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\dfrac{\pi\left(e^2+1\right)}{2}$ **B.** $V=\dfrac{e^2-1}{2}$ **C.** $V=\dfrac{\pi e^2}{3}$ **D.** $V=\dfrac{\pi\left(e^2-1\right)}{2}$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 9. **(Mã 104 2017)** Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y=\sqrt{x^2+1}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=2$ **B.** $V=\dfrac{4\pi}{3}$ **C.** $V=2\pi$ **D.** $V=\dfrac{4}{3}$

Câu 10. **(Mã 123 2017)** Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=\dfrac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=(\pi+1)\pi$ **B.** $V=\pi-1$ **C.** $V=\pi+1$ **D.** $V=(\pi-1)\pi$

Câu 11. **(Mã 110 2017)** Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=2\pi\left(\pi+1\right)$ **B.** $V=2\pi$ **C.** $V=2\left(\pi+1\right)$ **D.** $V=2\pi^2$

Câu 12. **(Mã 104 2018)** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2+2, y=0, x=1, x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int\limits_1^2\left(x^2+2\right)\mathrm{d}x$ **B.** $V=\pi\int\limits_1^2\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$

C. $V=\int_1^2\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$ **D.** $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)\mathrm{d}x$

Câu 13. **(Đề Tham Khảo 2017)** Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2-2}$.

A. $V=\dfrac{124}{3}$ **B.** $V=(32+2\sqrt{15})\pi$ **C.** $V=32+2\sqrt{15}$ **D.** $V=\dfrac{124\pi}{3}$

Câu 14. Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P):y=x^2$ và đường thẳng $d:y=2x$ quay xung quanh trục Ox.

A. $\pi\int_0^2\left(x^2-2x\right)^2dx$. **B.** $\pi\int_0^2 4x^2dx-\pi\int_0^2 x^4dx$. **C.** $\pi\int_0^2 4x^2dx+\pi\int_0^2 x^4dx$. **D.** $\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx$

Câu 15. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương - 2019)** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3,\ y=0,\ x=0,\ x=2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x$. **B.** $V=\int_0^2\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x$.

C. $V=\int_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x$.

Câu 16. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sin x$, trục Ox, trục Oy và đường thẳng $x=\dfrac{\pi}{2}$, xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx$ **B.** $V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$ **C.** $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx$ **D.** $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$

Câu 17. Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-2x$, trục hoành, đường thẳng $x=0$ và $x=1$ quanh trục hoành bằng

A. $\dfrac{16\pi}{15}$. **B.** $\dfrac{2\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{4\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{8\pi}{15}$.

Câu 18. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi $y=\sqrt{x}$, hai đường thẳng $x=1$, $x=2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

A. 3π. **B.** $\dfrac{3\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{2\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 19. **(Sở Phú Thọ 2019)** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=2x-x^2$, $y=0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

A. $\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx$ **B.** $\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2dx$ **C.** $\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2dx$ **D.** $\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx$

Câu 20. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{\tan x}, y=0, x=0, x=\dfrac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra.

A. $\dfrac{\pi \ln 2}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi \ln 3}{4}$

C. $\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $\pi \ln 2$.

Câu 21. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2$, $y=0$, $x=0$ và $x=3$ quanh trục Ox là

A. $\dfrac{81\pi}{35}$. **B.** $\dfrac{81}{35}$. **C.** $\dfrac{71\pi}{35}$. **D.** $\dfrac{71}{35}$.

Câu 22. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parapol (P): $y=x^2$ và đường thẳng d: $y=2x$ quay xung quanh trục Ox bằng:

A. $\pi\int\limits_0^2 (2x-x^2)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\int\limits_0^2 (x^2-2x)^2\,\mathrm{d}x$.

C. $\pi\int\limits_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x+\pi\int\limits_0^2 x^4\,\mathrm{d}x$. **D.** $\pi\int\limits_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x-\pi\int\limits_0^2 x^4\,\mathrm{d}x$.

Câu 23. **(THPT Nghĩa Hưng NĐ- 2019)** Tính thể tích của vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P): y=2x-x^2$ và trục Ox bằng:

A. $V=\dfrac{19\pi}{15}$. **B.** $V=\dfrac{13\pi}{15}$. **C.** $V=\dfrac{17\pi}{15}$. **D.** $V=\dfrac{16\pi}{15}$.

Nguyễn Bảo Vương

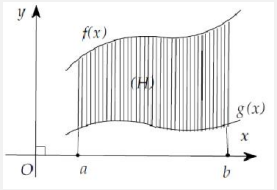
Chuyên đề 27 ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

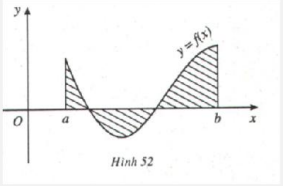
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

Dạng 1. Ứng dụng tích phân để tìm diện tích

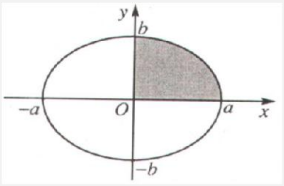
① *Hình phẳng* (H) *giới hạn bởi* $\begin{cases}(C_1): y=f(x)\\(C_2): y=g(x)\\x=a,\ x=b\ (a<b)\end{cases}$ *thì diện tích là* $\boxed{S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx}$.

Hình phẳng (H) *giới hạn bởi* $\begin{cases}(C_1): y=f(x)\\(C_2): Ox: y=0\\x=a,\ x=b\ (a<b)\end{cases}$ *thì diện tích là* $\boxed{S=\int_a^b |f(x)|\,dx}$.





Hình 52



↓

$\boxed{S_{elip}=\pi ab.}$

$(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

② ***Hình thức đề thường hay cho***

Hình thức 1: Không cho hình vẽ, cho dạng $(H):\{y=f(x),\ y=g(x),\ x=a,\ x=b\ (a<b)\}$

$\xrightarrow{\text{casio}}\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx=$ *kết quả, so sánh với bốn đáp án.*

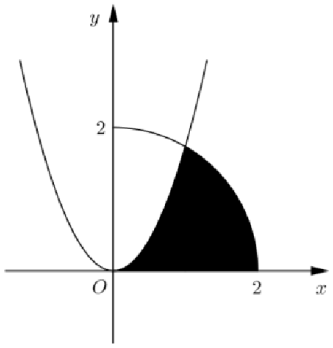
Hình thức 2: Không cho hình vẽ, cho dạng $(H):\{y=f(x),\ y=g(x)\}$

Giải $f(x)=g(x)$ *tìm nghiệm* $x_1,...,x_i$, *với* x_1 *nhỏ nhất,* x_i *lớn nhất* $\xrightarrow{\text{casio}}\int_{x_1}^{x_i} |f(x)-g(x)|\,dx.$

Hình thức 3: Cho hình vẽ, sẽ giải phương trình tìm tọa độ giao điểm (nếu chưa cho trên hình), chia từng diện tích nhỏ, xổ hình từ trên xuống, ghi công thức và bấm máy tính.

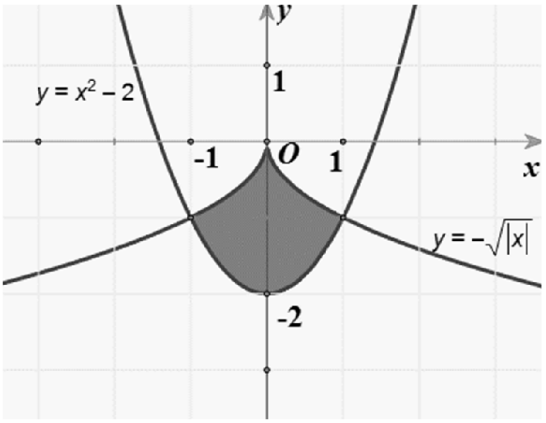
Hình thức 4: Cho ba hàm trở lên, chẳng hạn $y=f(x),\ y=g(x),\ y=h(x)$ *ta nên vẽ hình.*

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0\le x\le 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{4\pi+\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{4\pi+2\sqrt{3}-3}{6}$ **D.** $\frac{5\sqrt{3}-2\pi}{3}$

Câu 2. Diện tích phần hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^{1}\left(x^2-2+\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_{-1}^{1}\left(x^2-2-\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_{-1}^{1}\left(-x^2+2+\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{-1}^{1}\left(-x^2+2-\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x$.

Câu 3. **(Sở Bắc Giang 2019)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x\ln x$, trục hoành và đường thẳng $x=e$ là

A. $\frac{e^2-1}{2}$. **B.** $\frac{e^2+1}{2}$. **C.** $\frac{e^2-1}{4}$. **D.** $\frac{e^2+1}{4}$.

Câu 4. Giá trị dương của tham số m sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=2x+3$ và các đường thẳng $y=0, x=0, x=m$ bằng 10 là

A. $m=\frac{7}{2}$. **B.** $m=5$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

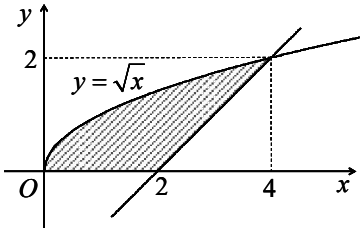
Câu 5. **(Chuyên KHTN 2019)** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}7-4x^3 & khi\ 0\le x\le 1\\ 4-x^2 & khi\ x>1\end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x=0, x=3, y=0$.

A. $\frac{16}{3}$. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** 10. **D.** 9.

Câu 6. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$.

A. $S=\frac{937}{12}$ **B.** $S=\frac{343}{12}$ **C.** $S=\frac{793}{4}$ **D.** $S=\frac{397}{4}$

Câu 7. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$ và trục hoành. Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** $\frac{16}{3}$.

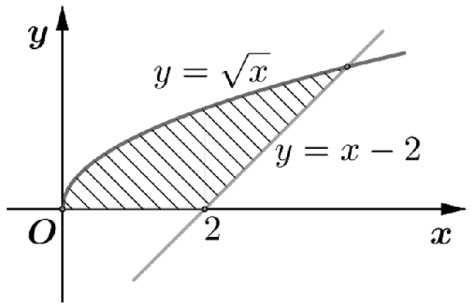
Câu 8. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x^2+x-1$ và $y=x^4+x-1$ là

A. $\frac{8}{15}$. **B.** $\frac{7}{15}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{4}{15}$.

Câu 9. **(THPT Nghĩa Hưng NĐ- 2019)** Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H):y=\frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

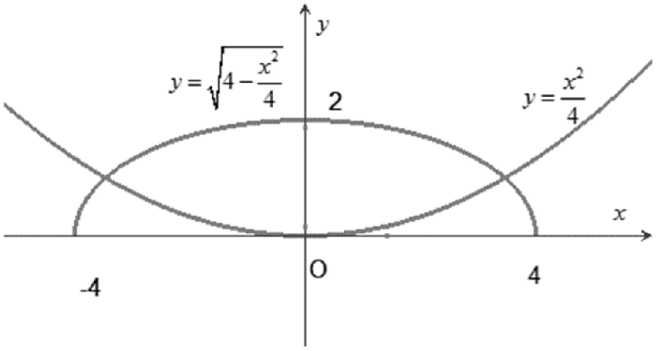
A. $S=\ln 2+1$. **B.** $S=2\ln 2+1$. **C.** $S=\ln 2-1$. **D.** $S=2\ln 2-1$.

Câu 10. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Tính diện tích của phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ sau:



A. $\frac{10}{3}$. **B.** 4. **C.** $\frac{13}{3}$. **D.** $\frac{11}{3}$.

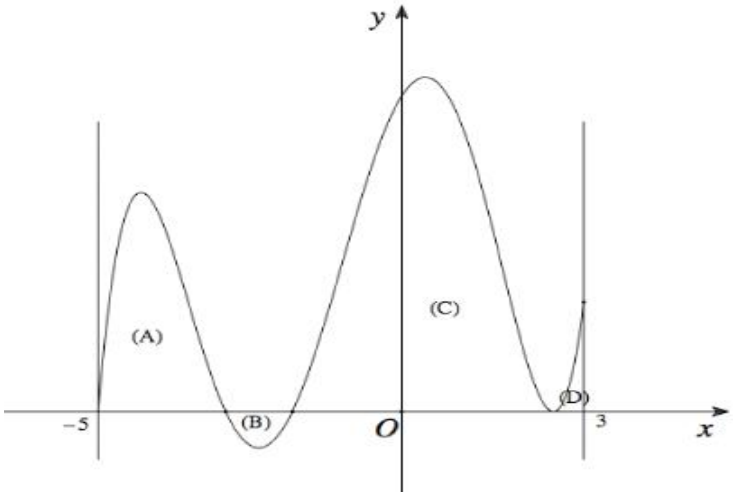
Câu 11. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi parabol $y=\frac{x^2}{12}$ và đường cong có phương trình $y=\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}$ (tham khảo hình vẽ bên)



Diện tích hình phẳng (H) bằng:

A. $\frac{2\left(4\pi+\sqrt{3}\right)}{3}$ **B.** $\frac{4\pi+\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{4\pi+\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{4\sqrt{3}+\pi}{6}$

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết diện tích của hình phẳng $(A),(B),(C),(D)$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành lần lượt là 6; 3; 12; 2 . Tính tích phân $\int_{-3}^{1}\left[2f(2x+1)+1\right]dx$ bằng

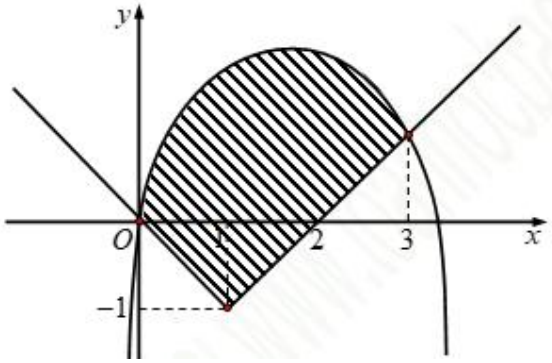


A. 27. **B.** 25. **C.** 17. **D.** 21.

Câu 13. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=|x-1|$ và nửa trên của đường tròn $x^2+y^2=1$ bằng?

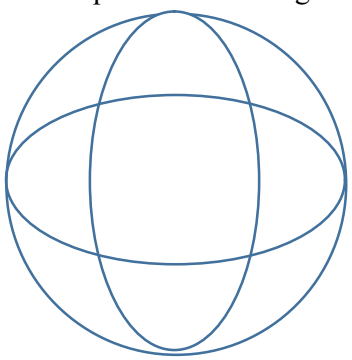
A. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\pi-1}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{2}-1$. **D.** $\frac{\pi}{4}-1$.

Câu 14. [**Kim Liên - Hà Nội - 2018**] Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y=\frac{10}{3}x-x^2$, $y=\begin{cases}-x & \text{khi } x\le 1\\ x-2 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Diện tích của (H) bằng?



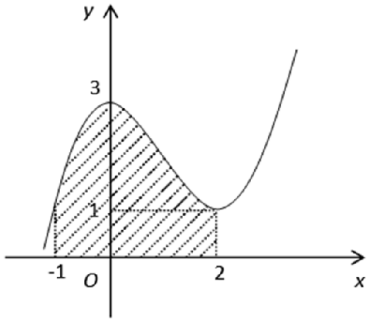
A. $\frac{11}{6}$. **B.** $\frac{13}{2}$. **C.** $\frac{11}{2}$. **D.** $\frac{14}{3}$.

Câu 15. **(THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018)** Cho đường tròn có đường kính bằng 4 và 2 Elip lần lượt nhận 2 đường kính vuông góc nhau của đường tròn làm trục lớn, trục bé của mỗi Elip đều bằng 1. Diện tích S phần hình phẳng ở bên trong đường tròn và bên ngoài 2 Elip (phần gạch carô trên hình vẽ) gần với kết quả nào nhất trong 4 kết quả dưới đây?



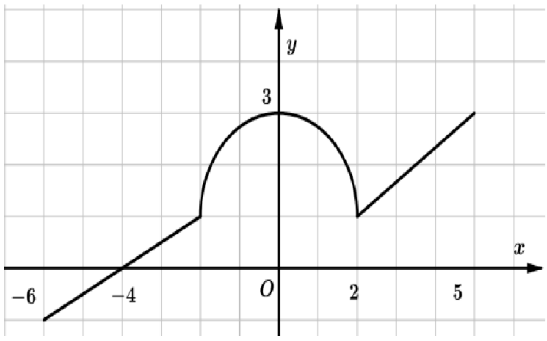
A. $S=4,8$. **B.** $S=3,9$. **C.** $S=3,7$. **D.** $S=3,4$.

Câu 16. **(THPT Trần Quốc Tuấn - 2018)** Tính diện tích S của miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+c$, các đường thẳng $x=1$, $x=2$ và trục hoành (miền gạch chéo) cho trong hình dưới đây.



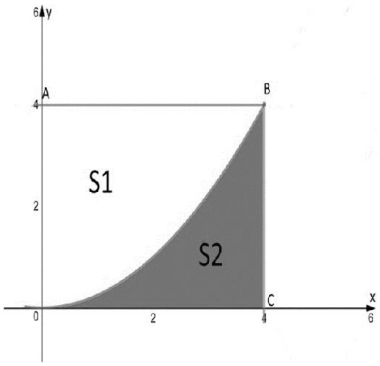
A. $S=\dfrac{51}{8}$. **B.** $S=\dfrac{52}{8}$. **C.** $S=\dfrac{50}{8}$. **D.** $S=\dfrac{53}{8}$.

Câu 17. **(Chuyên Thoại Ngọc Hầu - 2018)** Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[-6;5]$, có đồ thị gồm 2 đoạn thẳng và nửa đường tròn như hình vẽ. Tính giá trị $I=\int\limits_{-6}^{5}[f(x)+2]\mathrm{d}x$.



A. $I=2\pi+35$. **B.** $I=2\pi+34$. **C.** $I=2\pi+33$. **D.** $I=2\pi+32$.

Câu 18. Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y=\dfrac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không bị gạch và bị gạch như hình vẽ bên dưới. Tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ bằng

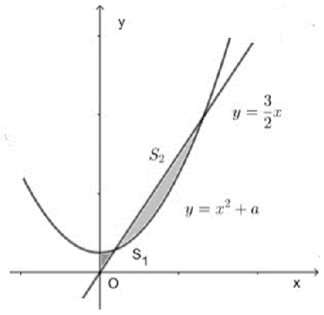


A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 2.

Câu 19. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Kí hiệu $S(t)$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x+1,\ y=0,\ x=1,\ x=t\ (t>1)$. Tìm t để $S(t)=10$.

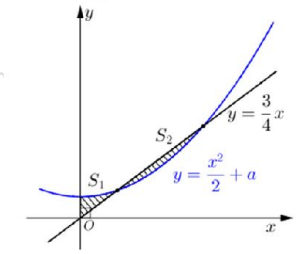
A. $t=3$. **B.** $t=4$. **C.** $t=13$. **D.** $t=14$.

Câu 20. **(Mã 104 - 2019)** Cho đường thẳng $y=\frac{3}{2}x$ và parabol $y=x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 ,S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



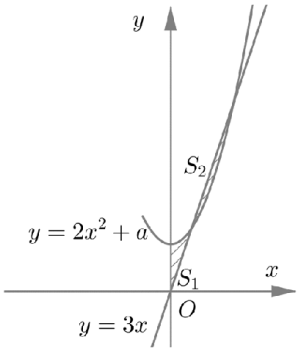
A. $\left(0;\frac{2}{5}\right)$ **B.** $\left(\frac{1}{2};\frac{9}{16}\right)$ **C.** $\left(\frac{2}{5};\frac{9}{20}\right)$ **D.** $\left(\frac{9}{20};\frac{1}{2}\right)$

Câu 21. **(Mã 102 - 2019)** Cho đường thẳng $y=\frac{3}{4}x$ và parabol $y=\frac{1}{2}x^2+a$, (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



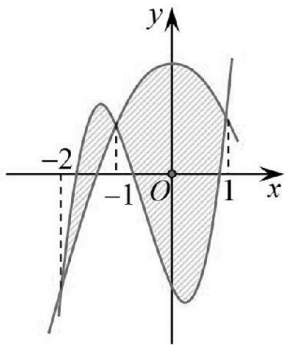
A. $\left(\frac{7}{32};\frac{1}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4};\frac{9}{32}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{16};\frac{7}{32}\right)$. **D.** $\left(0;\frac{3}{16}\right)$.

Câu 22. **(Mã 103 - 2019)** Cho đường thẳng $y=3x$ và parabol $2x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(1;\frac{9}{8}\right)$. **B.** $\left(\frac{9}{10};1\right)$. **C.** $\left(\frac{4}{5};\frac{9}{10}\right)$. **D.** $\left(0;\frac{4}{5}\right)$.

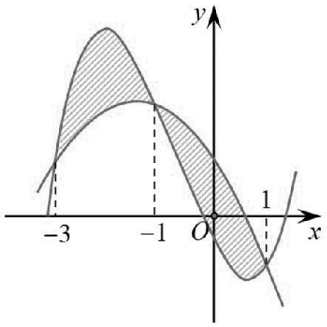
Câu 23. **(Mã 102 2018)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^2+bx^2+cx-2$ và $g(x)=dx^2+ex+2$ (a, b, c, d, $e\in\mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; -1; 1 (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

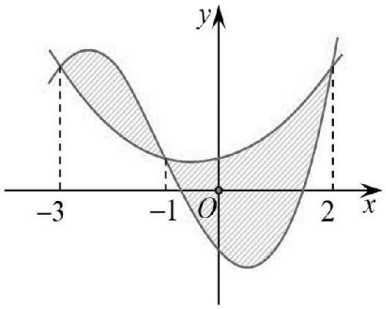
A. $\frac{37}{12}$ **B.** $\frac{37}{6}$ **C.** $\frac{13}{2}$ **D.** $\frac{9}{2}$

Câu 24. **(Mã 101 2018)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 1 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. 5 **B.** $\frac{9}{2}$ **C.** 8 **D.** 4

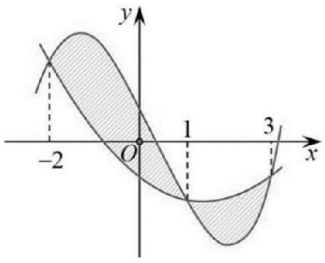
Câu 25. **(Mã 103 2018)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$ và $g(x)=dx^2+ex+\frac{1}{2}$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3;-1;2$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{253}{12}$ **B.** $\frac{125}{12}$ **C.** $\frac{253}{48}$ **D.** $\frac{125}{48}$

Câu 26. **(Mã 104 2018)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}$ và $g(x)=dx^2+ex-\frac{3}{4}$, $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2;\ 1;\ 3$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

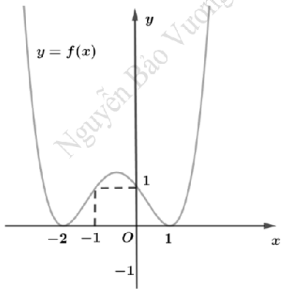


A. $\frac{253}{48}$ **B.** $\frac{125}{24}$ **C.** $\frac{125}{48}$ **D.** $\frac{253}{24}$

Câu 27. Cho parabol $(P_1):y=-x^2+2x+3$ cắt trục hoành tại hai điểm A,B và đường thẳng $d:y=a$ $(0<a<4)$. Xét parabol (P_2) đi qua A,B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y=a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d. Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1=S_2$, tính $T=a^3-8a^2+48a$.

A. $T=99$. **B.** $T=64$. **C.** $T=32$. **D.** $T=72$.

Câu 28. **(Tỉnh Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ.



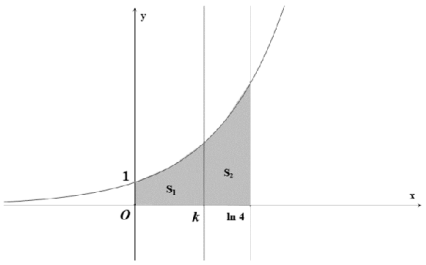
Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x);y=f'(x)$ có diện tích bằng

A. $\frac{127}{40}$. **B.** $\frac{127}{10}$. **C.** $\frac{107}{5}$. **D.** $\frac{13}{5}$.

Câu 29. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my=x^2$, $mx=y^2$ $(m>0)$. Tìm giá trị của m để $S=3$.

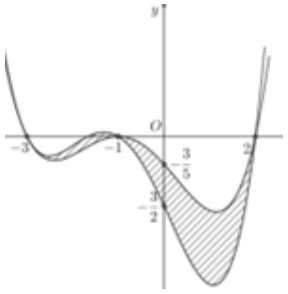
A. $m=1$ **B.** $m=2$ **C.** $m=3$ **D.** $m=4$

Câu 30. **(THPT Cẩm Giàng 2 -2019)** Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<\ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1=2S_2$.



A. $k=\frac{4}{3}\ln 2$. **B.** $k=\ln\frac{8}{3}$. **C.** $k=\ln 2$. **D.** $k=\ln 3$.

Câu 31. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Biết rằng đồ thị cảu hai hàm số này cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-3;-1;2$. Diện tích của hình phẳng (H) (phần gạch sọc trên hình vẽ bên) **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?



A. 3,11 **B.** 2,45 **C.** 3,21 **D.** 2,95

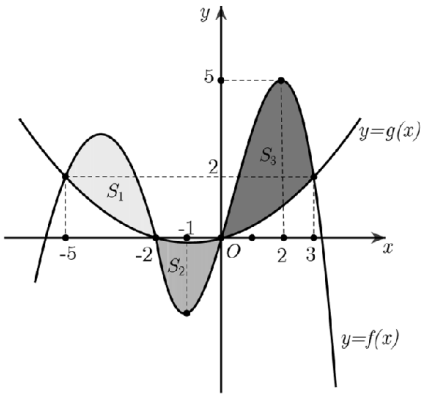
Câu 32. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Cho parabol $(P):y=x^2$ và hai điểm A,B thuộc (P) sao cho $AB=2$. Diện tích lớn nhất của hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB là

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 33. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho Parabol $(P):y=x^2+1$ và đường thẳng $d:y=mx+2$ với m là tham số. Gọi m_0 là giá trị của m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và d là nhỏ nhất. Hỏi m_0 nằm trong khoảng nào?

A. $(-\sqrt{2};-\frac{1}{2})$. **B.** **(0;1)**. **C.** $(-1;\frac{1}{\sqrt{2}})$. **D.** $(\frac{1}{2};3)$.

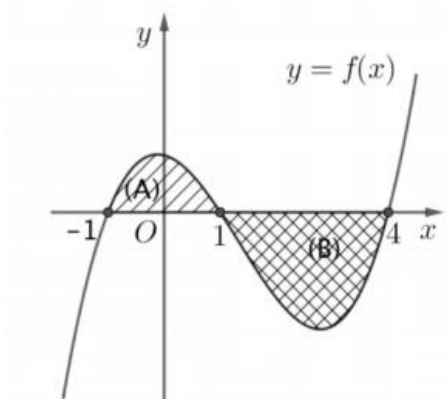
Câu 34. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và đường parabol $y=g(x)=ax^2+bx+c$ lần lượt là m,n,p.



Tích phân $\int_{-5}^{3} f(x)\,dx$ bằng

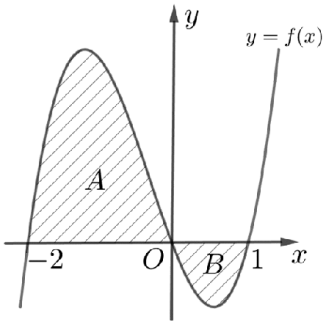
A. $-m+n-p-\frac{208}{45}$. **B.** $m-n+p+\frac{208}{45}$ **C.** $m-n+p-\frac{208}{45}$. **D.** $-m+n-p+\frac{208}{45}$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng diện tích các phần $(A),(B)$ lần lượt bằng 3 và 7. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f(5\sin x-1)\mathrm{d}x$ bằng



A. $-\frac{4}{5}$ **B.** 2 **C.** $\frac{4}{5}$ **D.** -2

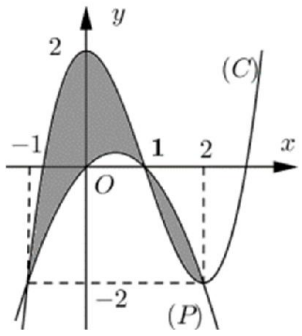
Câu 36. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và diện tích hai phần A,B lần lượt bằng 11 và 2.



Giá trị của $I=\int_{-1}^{0} f(3x+1)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** $\frac{13}{3}$. **C.** 9. **D.** 13.

Câu 37. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** của hình vẽ có diện tích bằng



A. $\frac{37}{12}$. **B.** $\frac{7}{12}$. **C.** $\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

Câu 38. **(Việt Đức Hà Nội -2019)** Parabol $y=\dfrac{x^2}{2}$ chia hình tròn có tâm là gốc tọa độ, bán kính bằng $2\sqrt{2}$ thành hai phần có diện tích S_1 và S_2, trong đó $S_1<S_2$. Tìm tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.

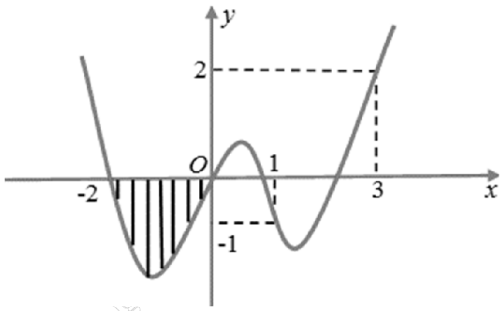
A. $\dfrac{3\pi+2}{12\pi}$. **B.** $\dfrac{9\pi-2}{3\pi+2}$. **C.** $\dfrac{3\pi+2}{9\pi-2}$. **D.** $\dfrac{3\pi+2}{21\pi-2}$.

Câu 39. Tìm số thực a để hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $y=\dfrac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^6}$ và $y=\dfrac{a^2-ax}{1+a^6}$ có diện tích lớn nhất.

A. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\sqrt[3]{3}$.

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Biết diện tích hình phẳng phần sọc kẻ bằng 3. Tính giá trị của biểu thức:

$$T=\int_1^2 f'(x+1)\mathrm{d}x+\int_2^3 f'(x-1)\mathrm{d}x+\int_3^4 f(2x-8)\mathrm{d}x$$

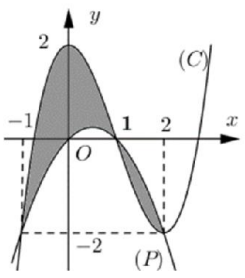


A. $T=\dfrac{9}{2}$. **B.** $T=6$. **C.** $T=0$. **D.** $T=\dfrac{3}{2}$.

Câu 41. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Cho hàm số $y=x^4-6x^2+m$ có đồ thị (C_m). Giả sử (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi (C_m) và trục hoành có phần phía trên trục hoành và phần phía dưới trục hoành có diện tích bằng nhau. Khi đó $m=\dfrac{a}{b}$ (với a, b là các số nguyên, $b>0$, $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của biểu thức $S=a+b$ là:

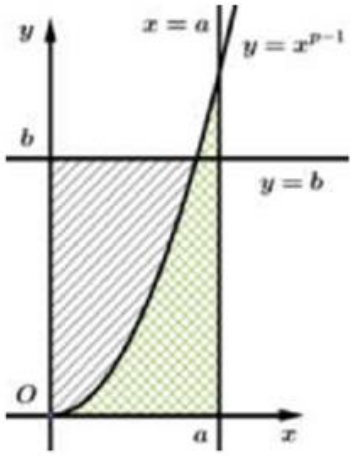
A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 42. Hình phẳng (*H*) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số đa thức bậc ba và parabol (*P*) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** như hình vẽ có diện tích bằng



A. $\dfrac{37}{12}$. **B.** $\dfrac{7}{12}$. **C.** $\dfrac{11}{12}$. **D.** $\dfrac{5}{12}$.

Câu 43. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Cho các số p,q thỏa mãn các điều kiện: $p>1$, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ và các số dương a,b. Xét hàm số: $y=x^{p-1}\left(x>0\right)$ có đồ thị là $\left(C\right)$. Gọi $\left(S_1\right)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\left(C\right)$, trục hoành, đường thẳng $x=a$, Gọi $\left(S_2\right)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\left(C\right)$, trục tung, đường thẳng $y=b$, Gọi $\left(S\right)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và hai đường thẳng $x=a$, $y=b$. Khi so sánh S_1+S_2 và S ta nhận được bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức dưới đây?



A. $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\le ab$ **B.** $\frac{a^{p-1}}{p-1}+\frac{b^{q-1}}{q-1}\ge ab$. **C.** $\frac{a^{p+1}}{p+1}+\frac{b^{q+1}}{q+1}\le ab$. **D.** $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\ge ab$.

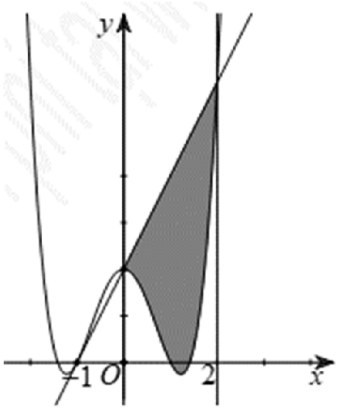
Câu 44. **(Hà Nội - 2018)** Cho khối trụ có hai đáy là hai hình tròn $\left(O;R\right)$ và $\left(O';R\right)$, $OO'=4R$. Trên đường tròn $\left(O;R\right)$ lấy hai điểm A, B sao cho $AB=a\sqrt{3}$. Mặt phẳng $\left(P\right)$ đi qua A, B cắt đoạn OO' và tạo với đáy một góc $60°$, $\left(P\right)$ cắt khối trụ theo thiết diện là một phần của elip. Diện tích thiết diện đó bằng

A. $\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$. **B.** $\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. **C.** $\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. **D.** $\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

Câu 45. **(Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2018)** Cho parabol $\left(P\right):y=x^2$ và một đường thẳng d thay đổi cắt $\left(P\right)$ tại hai điểm A, B sao cho $AB=2018$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $\left(P\right)$ và đường thẳng d. Tìm giá trị lớn nhất S_{max} của S.

A. $S_{max}=\frac{2018^3+1}{6}$. **B.** $S_{max}=\frac{2018^3}{3}$. **C.** $S_{max}=\frac{2018^3-1}{6}$. **D.** $S_{max}=\frac{2018^3}{3}$.

Câu 46. **(Chuyên KHTN - 2018)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị $\left(C\right)$, biết rằng $\left(C\right)$ đi qua điểm $A\left(-1;0\right)$, tiếp tuyến d tại A của $\left(C\right)$ cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d, đồ thị $\left(C\right)$ và hai đường thẳng $x=0$; $x=2$ có diện tích bằng $\frac{28}{5}$ (phần tô màu trong hình vẽ).



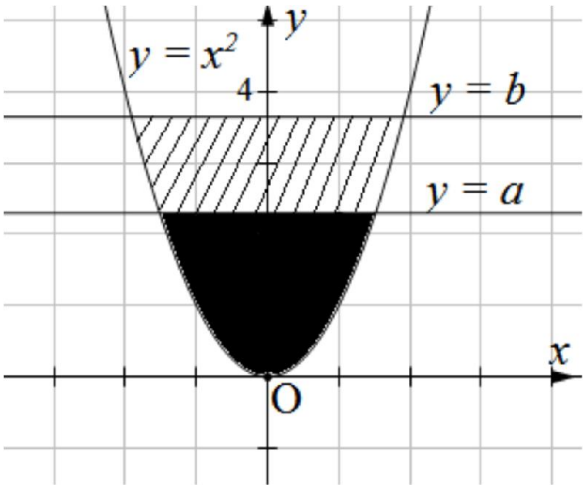
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và hai đường thẳng $x=-1$; $x=0$ có diện tích bằng

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{2}{9}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Câu 47. **(THPT Tứ Kỳ - Hải Dương - 2018)** Đặt S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=4-x^2$, trục hoành và đường thẳng $x=-2$, $x=m$, $(-2<m<2)$. Tìm số giá trị của tham số m để $S=\frac{25}{3}$.

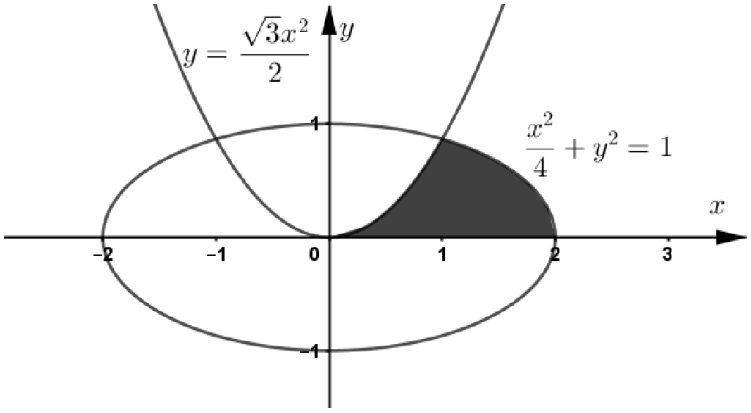
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 48. **(THPT Mộ Đức - Quảng Ngãi - 2018)** Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y=x^2$ và hai đường thẳng $y=a$, $y=b$ $(0<a<b)$ (hình vẽ). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y=a$ (phần tô đen); (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y=b$ (phần gạch chéo). Với điều kiện nào sau đây của a và b thì $S_1=S_2$?



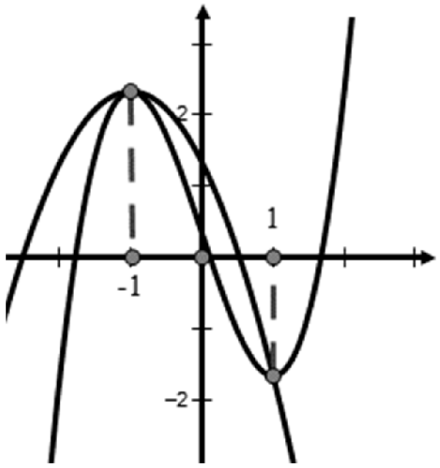
A. $b=\sqrt[3]{4}a$. **B.** $b=\sqrt[3]{2}a$. **C.** $b=\sqrt[3]{3}a$. **D.** $b=\sqrt[3]{6}a$.

Câu 49. **(THPT Yên Khánh A - 2018)** Cho hình phẳng giới hạn bởi Elip $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, parabol $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ) có diện tích $T=\frac{a}{b}\pi+\frac{c}{d}\sqrt{3}$ (với $a,c\in\mathbb{Z}; b,d\in\mathbb{N}^*; \frac{a}{b},\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản). Tính $S=a+b+c+d$.



A. $S = 32$. **B.** $S = 10$. **C.** $S = 15$. **D.** $S = 21$.

Câu 50. Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c\ (a,b,c \in \mathbb{R})$ có đồ thị (C) và $y = mx^2 + nx + p\ (m,n,p \in \mathbb{R})$ có đồ thị (P) như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) có giá trị nằm trong khoảng nào sau đây?

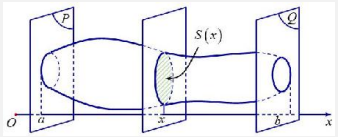


A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Dạng 2. Ứng dụng tích phân để tìm thể tích

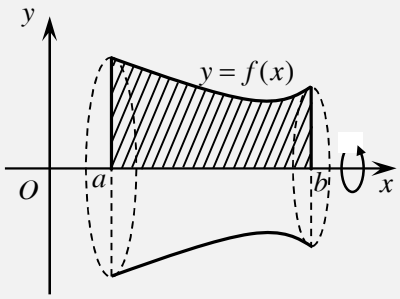
① ***Thể tích vật thể***

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b, $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx}$.



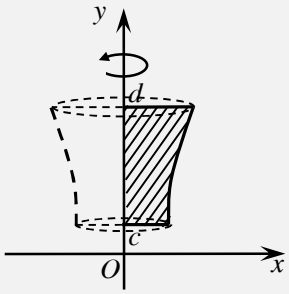
② ***Thể tích khối tròn xoay***

a) Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox:



$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases}$ $\boxed{V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx}$

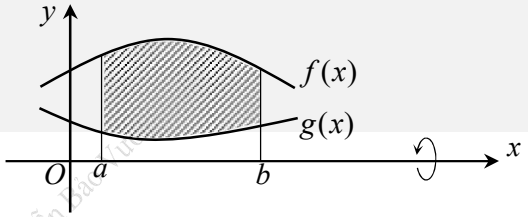
b) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường* $x = g(y)$, *trục hoành và hai đường thẳng* $y = c$, $y = d$ *quanh trục* Oy:



$\begin{cases} (C): x = g(y) \\ (Oy): x = 0 \\ y = c \\ y = d \end{cases}$ $\boxed{V_y = \pi \int_c^d [g(y)]^2 \, dy}$

c) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường* $y = f(x)$, $y = g(x)$ *(cùng nằm một phía so với* Ox*) và hai đường thẳng* $x = a$, $x = b$ *quanh trục* Ox:

$\boxed{V = \pi \int_a^b \left| f^2(x) - g^2(x) \right| \mathrm{d}x}$.



Câu 1. **(Đề Minh Họa 2017)** Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox

A. $V = (e^2 - 5)\pi$ **B.** $V = (4 - 2e)\pi$ **C.** $V = e^2 - 5$ **D.** $V = 4 - 2e$

Câu 2. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. V có giá trị gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 550 **B.** 400 **C.** 670 **D.** 335

Câu 3. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$. Tính thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox.

A. $V = \frac{4\pi}{3}$. **B.** $V = \frac{16\pi}{15}$. **C.** $V = \frac{7\pi}{8}$. **D.** $V = \frac{15\pi}{8}$.

Câu 4. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi hai đường $y = 2(x^2 - 1)$; $y = 1 - x^2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành do (D) quay quanh trục Ox.

A. $\frac{64\pi}{15}$. **B.** $\frac{32}{15}$. **C.** $\frac{32\pi}{15}$. **D.** $\frac{64}{15}$.

Câu 5. **(Chuyên Bắc Giang -2019)** Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\tan x$, $y=0$, $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. 5 **B.** $\pi\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$ **C.** $\dfrac{3\pi}{2}$ **D.** $\pi\left(\dfrac{1}{2}+\pi\right)$

Câu 6. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019)** Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}-2$, $y=0$ và $x=9$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

A. $V=\dfrac{7}{6}$. **B.** $V=\dfrac{5\pi}{6}$. **C.** $V=\dfrac{7\pi}{11}$. **D.** $V=\dfrac{11\pi}{6}$.

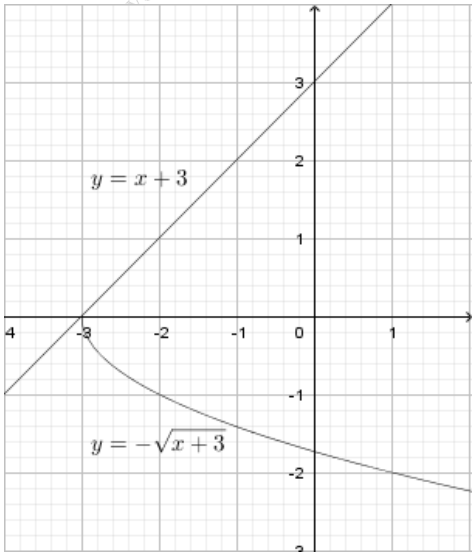
Câu 7. **(Chuyên Lê Quý Dôn Diện Biên 2019)** Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) quanh Ox với (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$ và trục hoành.

A. $\dfrac{31\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{32\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{34\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{35\pi}{3}$.

Câu 8. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $y=2x-x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox.

A. $V=\dfrac{4}{3}\pi$. **B.** $V=\dfrac{16}{15}\pi$. **C.** $V=\dfrac{16}{15}$. **D.** $V=\dfrac{4}{3}$.

Câu 9. Tính thể tích vật tròn xoay tạo bởi miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x+3$, $y=-\sqrt{x+3}$, $x=1$ xoay quanh trục Ox.



A. $\dfrac{41}{2}\pi$. **B.** $\dfrac{43}{2}\pi$. **C.** $\dfrac{41}{3}\pi$. **D.** $\dfrac{40}{3}\pi$.

Câu 10. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Ký hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=\sqrt{x}.e^{x^2}$, trục hoành, đường thẳng $x=1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục hoành.

A. $V=e^2-1$. **B.** $V=\pi\left(e^2-1\right)$. **C.** $V=\dfrac{1}{4}\pi e^2-1$. **D.** $V=\dfrac{1}{4}\pi\left(e^2-1\right)$.

Câu 11. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình 2019)** Cho vật thể (T) giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0;x=2$. Cắt vật thể (T) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x(0\le x\le 2)$ ta thu được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $(x+1)e^x$. Thể tích vật thể (T) bằng

A. $\dfrac{\pi(13e^4-1)}{4}$. **B.** $\dfrac{13e^4-1}{4}$. **C.** $2e^2$. **D.** $2\pi e^2$.

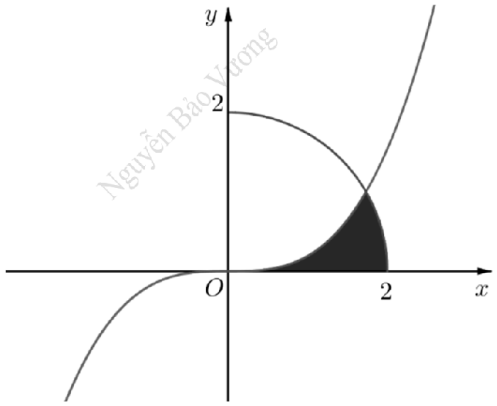
Câu 12. Cho hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$ có cùng bán kính $R=3$ thỏa mãn tính chất tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại. Tính thể tích V phần chung của hai khối cầu tạo bởi $(S_1),(S_2)$.

A. $V=\dfrac{45\pi}{8}$. **B.** $V=\dfrac{45\pi}{4}$. **C.** $V=\dfrac{45}{4}$. **D.** $V=\dfrac{45}{8}$.

Câu 13. **(Toán Học Tuổi Trẻ - 2018)** Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=|x|$ và $y=x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng

A. $\dfrac{\pi}{6}$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{2\pi}{15}$. **D.** $\dfrac{4\pi}{15}$.

Câu 14. **(Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai - Sóc Trăng - 2018)** Cho hình (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3}}{9}x^3$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0\le x\le 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ).



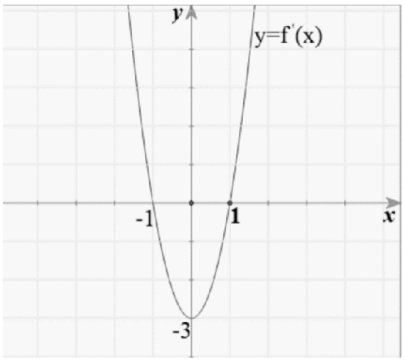
Biết thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành là $V=\left(-\dfrac{a}{b}\sqrt{3}+\dfrac{c}{d}\right)\pi$, trong đó $a,b,c,d\in\mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b},\dfrac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $P=a+b+c+d$.

A. $P=52$. **B.** $P=40$. **C.** $P=46$. **D.** $P=34$.

Câu 15. **(HSG Tỉnh Bắc Ninh 2019)** Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{m^2-x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích V. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V<1000\pi$.

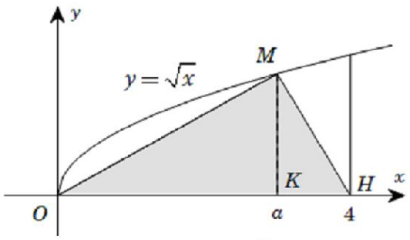
A. 18. **B.** 20. **C.** 19. **D.** 21.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,(a,b,c,d\in\mathbb{R},a\ne 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành khi quay xung quanh trục Ox.



A. $\frac{725}{35}\pi$. **B.** $\frac{1}{35}\pi$. **C.** 6π. **D.** đáp án khác.

Câu 17. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=0$ và $x=4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x=a\,(0<a<4)$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại M (hình vẽ). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết rằng $V=2V_1$. Khi đó



A. $a=2$. **B.** $a=2\sqrt{2}$. **C.** $a=\frac{5}{2}$. **D.** $a=3$.

Câu 18. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho hình phẳng (D) giới hạn bởi các đường $y=x-\pi$, $y=\sin x$ và $x=0$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do (D) quay quanh trục hoành và $V=p\pi^4,\,(p\in\mathbb{Q})$. Giá trị của $24p$ bằng

A. 8. **B.** 4. **C.** 24. **D.** 12.

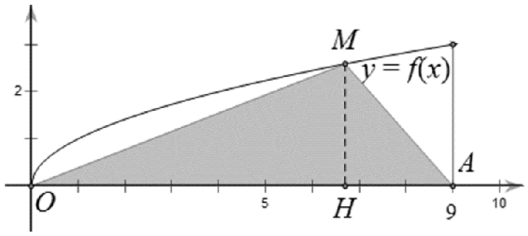
Câu 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, $(H_1):\begin{cases} y=\frac{x^2}{4} \\ y=-\frac{x^2}{4} \\ x=-4, x=4 \end{cases}$, $(H_2):\begin{cases} x^2+y^2\le 16 \\ x^2+(y-2)^2\ge 4 \\ x^2+(y+2)^2\ge 4 \end{cases}$. Cho $(H_1),(H_2)$ xoay quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích lần lượt V_1,V_2. Đẳng thức nào sau đây đúng.

A. $V_1=V_2$. **B.** $V_1=\frac{1}{2}V_2$. **C.** $V_1=2V_2$. **D.** $V_1=\frac{3}{2}V_2$.

Câu 20. **(THPT Chu Văn An -Thái Nguyên - 2018)** Cho hình thang $ABCD$ có AB song song CD và $AB=AD=BC=a, CD=2a$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình thang $ABCD$ quanh trục là đường thẳng AB.

A. $\frac{5}{4}\pi a^3$. **B.** $\frac{5}{2}\pi a^3$. **C.** $\frac{3-2\sqrt{2}}{3}\pi a^3$. **D.** πa^3.

Câu 21. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Tphcm - 2018)** Cho đồ thị $(C): y = f(x) = \sqrt{x}$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), đường thẳng $x = 9$ và trục Ox. Cho điểm M thuộc đồ thị (C) và điểm $A(9;0)$. Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi cho (H) quay quanh trục Ox, V_2 là thể tích khối tròn xoay khi cho tam giác AOM quay quanh trục Ox. Biết rằng $V_1 = 2V_2$. Tính diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng OM.



A. $S = 3$. **B.** $S = \dfrac{27\sqrt{3}}{16}$. **C.** $S = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $S = \dfrac{4}{3}$.

Nguyễn Bảo Vương

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Dạng 1. Ứng dụng tích phân để giải bài toán chuyển động

Câu 1. **(Mã 103 2018)** Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{100}t^2+\frac{13}{30}t\,(\text{m/s})$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng $a\,(\text{m/s}^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $15\,(\text{m/s})$ **B.** $9\,(\text{m/s})$ **C.** $42\,(\text{m/s})$ **D.** $25\,(\text{m/s})$

Câu 2. **(Mã 104 2018)** Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}t\,(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\,(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $21\,(m/s)$ **B.** $25\,(m/s)$ **C.** $36\,(m/s)$ **D.** $30\,(m/s)$

Câu 3. **(Đề Minh Họa 2017)** Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 0,2m **B.** 2m **C.** 10m **D.** 20m

Câu 4. **(Mã 102 2018)** Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{150}t^2+\frac{59}{75}t\,(m/s)$, trong đó t(giây) là khoảng thời gian tính từ lúc a bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\,(m/s^2)$(a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $15\,(m/s)$ **B.** $20\,(m/s)$ **C.** $16\,(m/s)$ **D.** $13\,(m/s)$

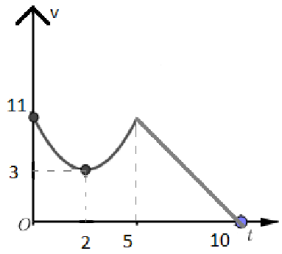
Câu 5. **(Mã 101 2018)** Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{180}t^2+\frac{11}{18}t\,(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng $a\,(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $15(m/s)$ **B.** $10(m/s)$ **C.** $7(m/s)$ **D.** $22(m/s)$

Câu 6. **(Mã 105 2017)** Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật đó bắt đầu chuyển động và $s(\mathrm{m})$ là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $18(\mathrm{m/s})$ **B.** $108(\mathrm{m/s})$ **C.** $64(\mathrm{m/s})$ **D.** $24(\mathrm{m/s})$

Câu 7. **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường Parapol khi $0\le t\le 5(s)$ và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5\le t\le 10(s)$.Cho đỉnh Parapol là $I(2,3)$. Hỏi quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0\le t\le 10(s)$ là bao nhiêu mét?



A. $\frac{181}{2}$. **B.** 90. **C.** 92. **D.** $\frac{545}{6}$.

Câu 8. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Một ô tô đang chạy với tốc độ $20(m/s)$ thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+20(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét (m)?

A. $20\ m$. **B.** $30\ m$. **C.** $10\ m$. **D.** $40\ m$.

Câu 9. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Một ô tô đang chạy với vận tốc là $12\ (m/s)$ thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-6t+12\ (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. $8m$. **B.** $12m$. **C.** $15m$. **D.** $10m$.

Câu 10. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 15m/s thì người lái xe hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-3t+15(\mathrm{m/s})$, trong đó t (giây). Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 38m. **B.** 37,2m. **C.** 37,5m. **D.** 37m.

Câu 11. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-10t+20\,(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. $5\ m$ **B.** $20\ m$ **C.** $40\ m$ **D.** $10\ m$

Câu 12. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

A. $55m$. **B.** $25m$. **C.** $50m$. **D.** $16m$.

Câu 13. **(THPT Thực Hành - TPHCM - 2018)** Một chất điểm bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0, sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t)=-\frac{5}{2}t+a\ (m/s),\ (t\ge 6)$ cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng thì chất điểm đi được quãng đường là 80m. Tìm v_0.

A. $v_0=35m/s$. **B.** $v_0=25m/s$. **C.** $v_0=10m/s$. **D.** $v_0=20m/s$.

Câu 14. **(THPT Lương Thế Vinh - HN - 2018)** Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t)=7t\ (\text{m/s})$. Đi được $5\ (\text{s})$ người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-35\ (\text{m/s}^2)$. Tính quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn?

A. 87.5 mét. **B.** 96.5 mét. **C.** 102.5 mét. **D.** 105 mét.

Câu 15. **(Chuyên Lê Hồng Phong - NĐ - 2018)** Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0=15\ \text{m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+4t\ (\text{m/s}^2)$. Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

A. $70,25\ \text{m}$. **B.** $68,25\ \text{m}$. **C.** $67,25\ \text{m}$. **D.** $69,75\ \text{m}$.

Câu 16. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên - 2018)** Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=10+t+9t^2-t^3$ trong đó s tính bằng mét, t tính bằng giây. Thời gian để vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất (tính từ thời điểm ban đầu) là

A. $t=6(\text{s})$. **B.** $t=3(\text{s})$. **C.** $t=2(\text{s})$. **D.** $t=5(\text{s})$.

Câu 17. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=7t\ (\text{m/s})$. Đi được 5s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-70\ (\text{m/s}^2)$. Tính quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. $S=96,25\ (\text{m})$. **B.** $S=87,5\ (\text{m})$. **C.** $S=94\ (\text{m})$. **D.** $S=95,7\ (\text{m})$.

Câu 18. **(SGD Thanh Hóa - 2018)** Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=2t\ (\text{m/s})$. Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-12(\text{m/s}^2)$. Tính quãng đường $s(\text{m})$ đi được của ôtô từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn?

A. $s=168(\text{m})$. **B.** $s=166(\text{m})$. **C.** $s=144(\text{m})$. **D.** $s=152(\text{m})$.

Câu 19. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t)=16-4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để có 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

A. 33. **B.** 12. **C.** 31. **D.** 32.

Câu 20. **(THPT Phan Đình Phùng - Hà Tĩnh - 2018)** Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t)=t^2+3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

A. 136m. **B.** 126m. **C.** 276m. **D.** 216m.

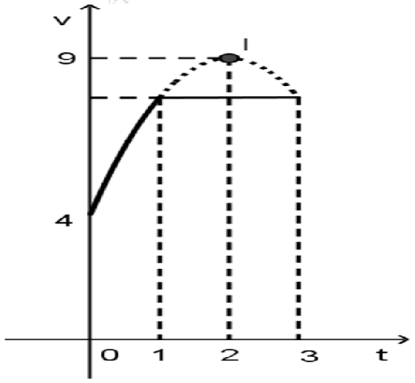
Câu 21. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2018)** Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t)=t^2+10t$ (m/s) với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc $200(m/s)$ thì rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

A. $\frac{2500}{3}(m)$. **B.** $2000(m)$. **C.** $500(m)$. **D.** $\frac{4000}{3}(m)$.

Câu 22. **(Sở Lào Cai - 2018)** Một ôtô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t)=6-2t\ (m/s^2)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ôtô bắt đầu chuyển động. Hỏi quảng đường ôtô đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ôtô đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét?

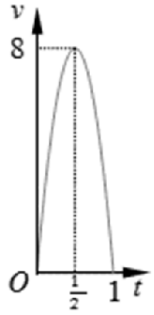
A. $18m$. **B.** $36m$. **C.** $22,5m$. **D.** $6,75m$.

Câu 23. **(Mã 123 2017)** Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



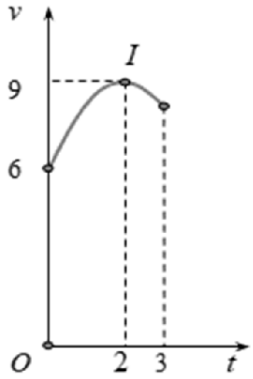
A. $s=21,58(km)$ **B.** $s=23,25(km)$ **C.** $s=13,83(km)$ **D.** $s=15,50(km)$

Câu 24. **(Mã 104 2017)** Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2};\ 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quảng đường s người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy?



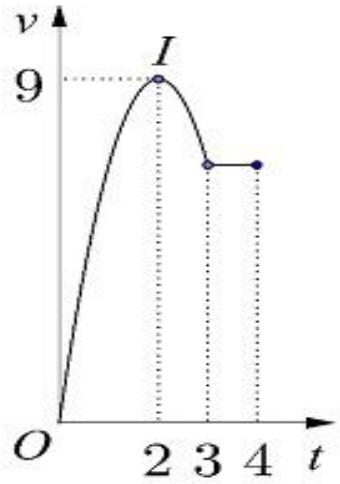
A. $s=2,3$ (km) **B.** $s=4,5$ (km) **C.** $s=5,3$ (km) **D.** $s=4$ (km)

Câu 25. **(Mã 110 2017)** Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



A. $s=25,25(\text{km})$ **B.** $s=24,25(\text{km})$ **C.** $s=24,75(\text{km})$ **D.** $s=26,75(\text{km})$

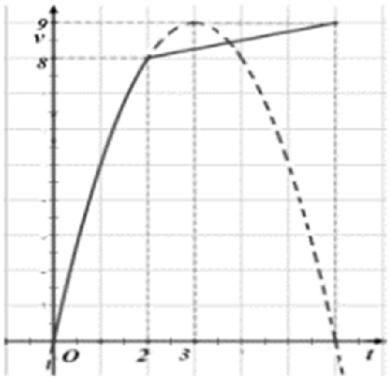
Câu 26. **(Mã 105 2017)** Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.



A. $s=24$ (km) **B.** $s=28,5$ (km) **C.** $s=27$ (km) **D.** $s=26,5$ (km)

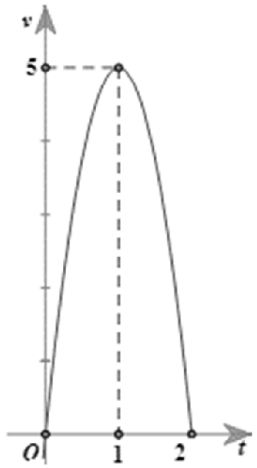
Câu 27. **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Một vật chuyển động trong 6 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị như hình bên dưới. Trong khoảng thời gian 2 giờ

từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần đường Parabol có đỉnh $I(3;9)$ và có trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại, đồ thị vận tốc là một đường thẳng có hệ số góc bằng $\frac{1}{4}$. Tính quảng đường s mà vật di chuyển được trong 6 giờ?



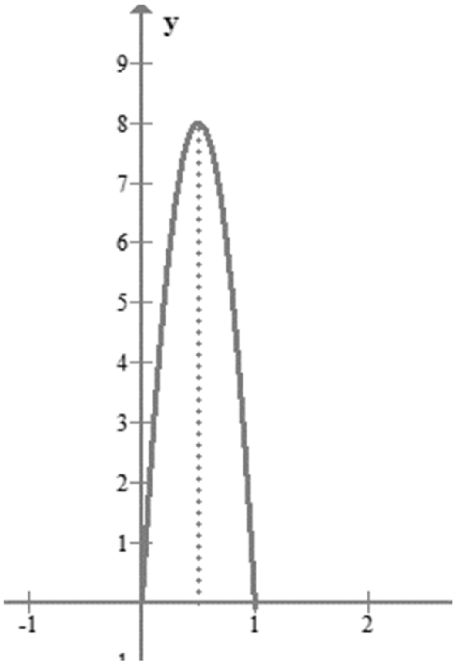
A. $\frac{130}{3}(km)$. **B.** $9(km)$. **C.** $40(km)$. **D.** $\frac{134}{3}(km)$.

Câu 28. **(THPT Thực Hành - TPHCM - 2018)** Một người chạy trong 2 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là 1 phần của đường Parabol với đỉnh $I(1;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung Ov như hình vẽ. Tính quảng đường S người đó chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).



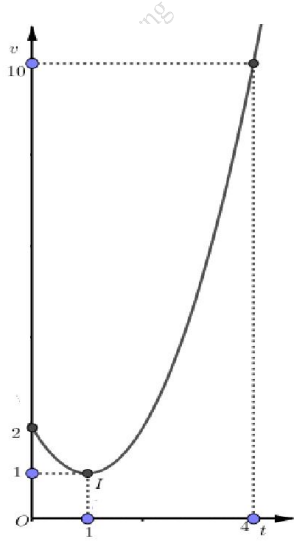
A. $2,11\text{km}$. **B.** $6,67\text{km}$. **C.** $5,63$ km. **D.** $5,63\text{km}$.

Câu 29. **(SGD Đồng Tháp - 2018)** Một người chạy trong thời gian 1 giờ, với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị là một phần của parabol có đỉnh $I\left(\frac{1}{2};8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình vẽ. Tính quãng đường S người đó chạy được trong thời gian 45 phút, kể từ khi bắt đầu chạy.



A. $5,3\ (\text{km})$. **B.** $4,5\ (\text{km})$. **C.** $4\ (\text{km})$. **D.** $2,3\ (\text{km})$.

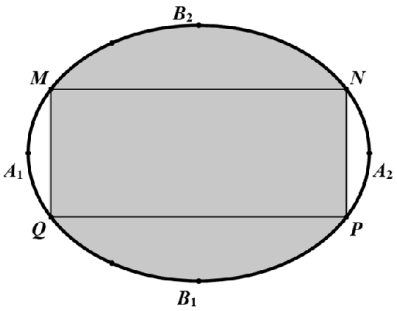
Câu 30. **(Chuyên Hạ Long 2018)** Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/ h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



A. $s=6$ (km). **B.** $s=8$ (km). **C.** $s=\dfrac{40}{3}$ (km). **D.** $s=\dfrac{46}{3}$ (km).

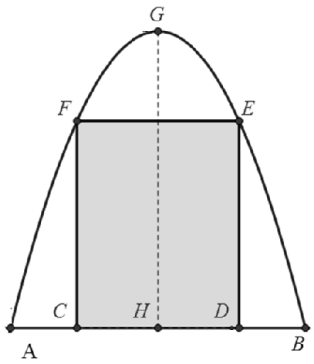
Dạng 2. Ứng dụng tích phân để giải một số bài toán thực tế

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2019)** Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 vnđ$/\text{m}^2$ và phần còn lại 100.000 vnđ$/\text{m}^2$. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2=8\text{m}$, $B_1B_2=6\text{m}$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ=3\text{m}$?



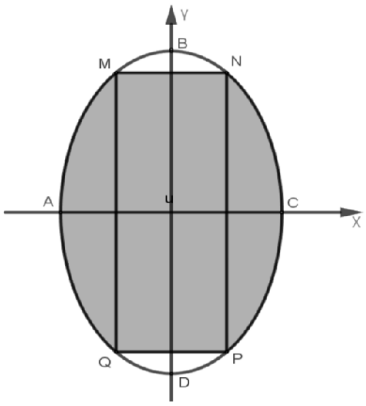
A. 5.526.000 đồng. **B.** 5.782.000 đồng **C.** 7.322.000 đồng. **D.** 7.213.000 đồng.

Câu 2. **(Trần Phú - Quảng Ninh - 2020)** Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau. Chiều cao $GH = 4m$, chiều rộng $AB = 4m$, $AC = BD = 0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng$/m^2$, còn các phần để trắng làm xiên hoa có giá là 900000 đồng$/m^2$. Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?



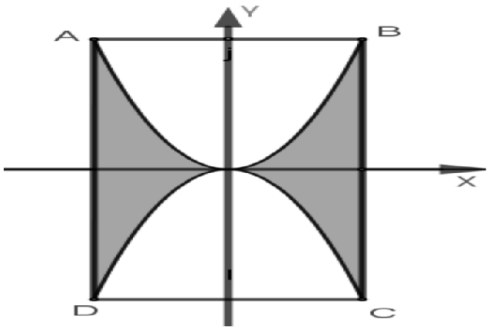
A. 11445000 đồng. **B.** 4077000 đồng. **C.** 7368000 đồng. **D.** 11370000 đồng.

Câu 3. Một biển quảng cáo với 4 đỉnh A, B, C, D như hình vẽ. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000(đ/m^2) sơn phần còn lại là 100.000đ/m^2. Cho $AC = 8m; BD = 10m; MN = 4m$ Hỏi số tiền sơn gần với số tiền nào sau đây:



A. 12204000$đ$. . **B.** 14207000$đ$.. **C.** 11503000$đ$.. **D.** 10894000$đ$.

Câu 4. Một họa tiết hình cánh bướm như hình vẽ bên.



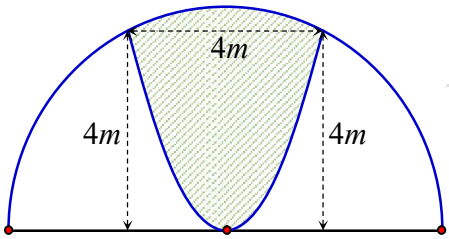
Phần tô đậm được đính đá với giá thành

500.000đ/m^2. Phần còn lại được tô màu với giá thành $250.000đ/m^2$.

Cho $AB = 4dm; BC = 8dm$. Hỏi để trang trí 1000 họa tiết như vậy cần số tiền gần nhất với số nào sau đây.

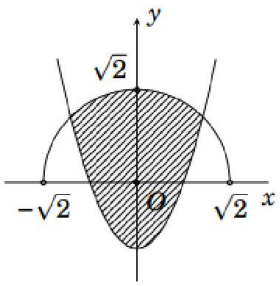
A. $105660667đ$. **B.** $106666667đ$. **C.** $107665667đ$. **D.** $108665667đ$.

Câu 5. **(Thanh Hóa 2019)** Một khuôn viên dạng nửa hình tròn, trên đó người thiết kế phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu) và cách nhau một khoảng bằng $4(m)$. Phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ, chi phí để trồng hoa và cỏ Nhật Bản tương ứng là 150.000 đồng/m^2 và 100.000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản trong khuôn viên đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)



A. 3.738.574 **(đồng).** **B.** 1.948.000 (đồng). **C.** 3.926.990 (đồng). **D.** 4.115.408 (đồng).

Câu 6. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Người ta cần trồng một vườn hoa Cẩm Tú Cầu (phần được gạch chéo trên hình vẽ). Biết rằng phần gạch chéo là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = 2x^2 - 1$ và nửa trên của đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{2}(m)$ Tính số tiền tối thiểu để trồng xong vườn hoa Cẩm Tú Cầu biết rằng để trồng mỗi m^2 hoa cần ít nhất là 250000 đồng.



A. $\frac{3\pi - 2}{6} \times 250000$. **B.** $\frac{3\pi + 10}{6} \times 250000$. **C.** $\frac{3\pi + 10}{3} \times 250000$. **D.** $\frac{3\pi + 2}{6} \times 250000$

Câu 7. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019)** Nhà trường dự định làm một vườn hoa dạng elip được chia ra làm bốn phần bởi hai đường parabol có chung đỉnh, đối xứng với nhau qua trục của elip như hình vẽ bên. Biết độ dài trục lớn, trục nhỏ của elip lần lượt là 8 m và 4 m, F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elip. Phần A, B dùng để trồng hoa, phần C, D dùng để trồng cỏ. Kinh phí để trồng mỗi mét vuông hoa và cỏ lần lượt là 250.000 đ và 150.000 đ. Tính tổng tiền để hoàn thành vườn hoa trên (làm tròn đến hàng nghìn).

A. 5.676.000 đ. **B.** 4.766.000 đ. **C.** 4.656.000 đ. **D.** 5.455.000 đ.

Câu 8. **(Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An -2019)** Người ta xây một sân khấu với mặt sân có dạng hợp của hai hình tròn giao nhau. Bán kính của hai của hai hình tròn là 20 mét và 15 mét. Khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là 30 mét. Chi phí làm mỗi mét vuông phân giao nhau của hai hình tròn là 300 ngàn đồng và chi phí làm mỗi mét vuông phần còn lại là 100 ngàn đồng. Hỏi số tiền làm mặt sân của sân khấu gần với số nào trong các số dưới đây?

A. 202 triệu đồng. **B.** 208 triệu đồng. **C.** 218 triệu đồng. **D.** 200 triệu đồng.

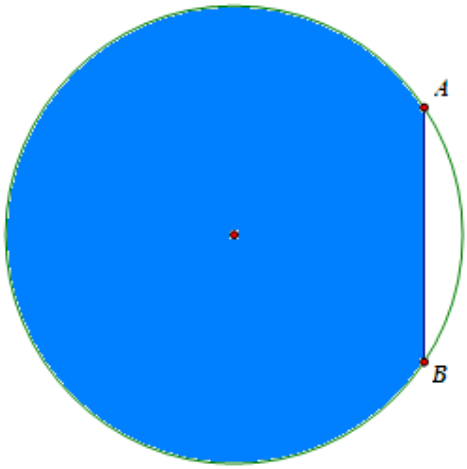
Câu 9. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Người ta xây một sân khấu với sân có dạng của hai hình tròn giao nhau. Bán kính của hai hình tròn là 20 m và 15 m. Khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là 30 m. Chi phí làm mỗi mét vuông phần giao nhau của hai hình tròn là 300 nghìn đồng và chi phí làm mỗi mét vuông phần còn lại là 100 nghìn đồng. Hỏi số tiền làm mặt sân khấu gần với số nào nhất trong các số dưới đây?

A. 218 triệu đồng. **B.** 202 triệu đồng.
C. 200 triệu đồng. **D.** 218 triệu đồng.

Câu 10. Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là $2,25$ mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là:

A. 33750000 đồng. **B.** 3750000 đồng. **C.** 12750000 đồng. **D.** 6750000 đồng.

Câu 11. **(THPT Ngô Quyền - Quảng Ninh - 2018)** Một người có miếng đất hình tròn có bán kính bằng 5 m. Người này tính trồng cây trên mảnh đất đó, biết mỗi mét vuông trồng cây thu hoạch được 100 nghìn. Tuy nhiên cần có 1 khoảng trống để dựng 1 cái chòi và để đồ dùng nên người này bớt lại 1 phần đất nhỏ không trồng cây (phần màu trắng như hình vẽ), trong đó $AB = 6m$. Hỏi khi thu hoạch cây thì người này thu được bao nhiêu tiền ?



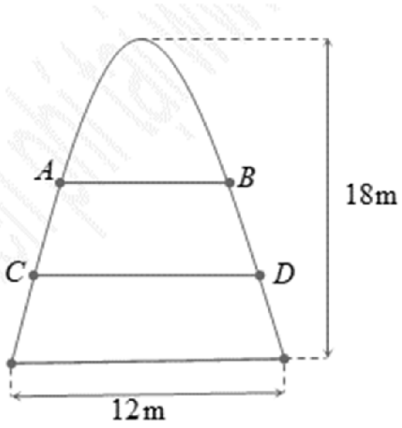
A. 3722 nghìn đồng. **D.** 7445 nghìn đồng. **C.** 7446 nghìn đồng. **B.** 3723 nghìn đồng.

Câu 12. **(THPT Yên Lạc - 2018)** Một mảnh vườn hình elip có trục lớn bằng $100(\text{m})$ và trục nhỏ bằng $80(\text{m})$ được chia làm hai phần bởi một đoạn thẳng nối hai đỉnh liên tiếp của elip. Phần nhỏ hơn trồng cây

con và phần lớn hơn trồng rau. Biết lợi nhuận thu được là 2000 mỗi m^2 trồng cây con và 4000 mỗi m^2 trồng rau. Hỏi thu nhập của cả mảnh vườn là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến phần nghìn).

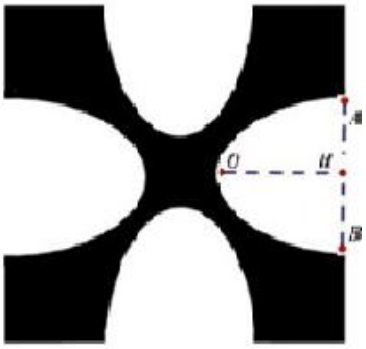
A. 31904000. **B.** 23991000. **C.** 10566000. **D.** 17635000.

Câu 13. **(Chuyên Vinh - 2018)** Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao $18\,\text{m}$, chiều rộng chân đế $12\,\text{m}$. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỉ số $\dfrac{AB}{CD}$ bằng



A. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{4}{5}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **D.** $\dfrac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

Câu 14. **(THPT Kinh Môn - 2018)** Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5\,\text{cm}$, $OH = 4$ cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.



A. $\dfrac{160}{3}\text{cm}^2$. **B.** $\dfrac{140}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\dfrac{14}{3}\text{cm}^2$. **D.** $50\ \text{cm}^2$.

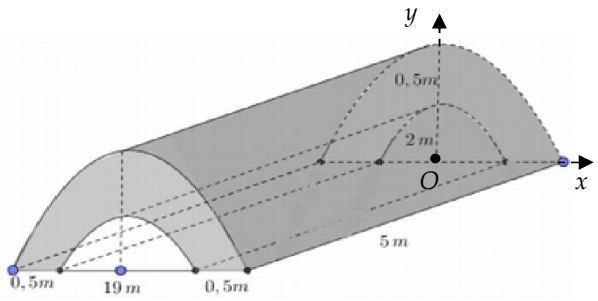
Câu 15. **(Chuyên Vinh - 2018)** Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô màu sẫm như hình vẽ bên).



Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

A. $800\,\text{cm}^2$. **B.** $\frac{800}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\frac{400}{3}\text{cm}^2$. **D.** $250\,\text{cm}^2$.

Câu 16. **(THPT Cẩm Giàng 2 -2019)** Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã Y có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).

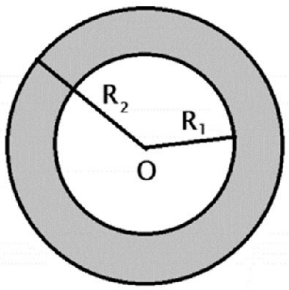


A. $19\,\text{m}^3$. **B.** $21\,\text{m}^3$. **C.** $18\,\text{m}^3$. **D.** $40\,\text{m}^3$.

Câu 17. Để kỷ niệm ngày 26-3. Chi đoàn 12A dự định dựng một lều trại có dạng parabol, với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét, đỉnh của parabol cách mặt đất là 3 mét. Hãy tính thể tích phần không gian phía bên trong trại để lớp 12A cử số lượng người tham dự trại cho phù hợp.

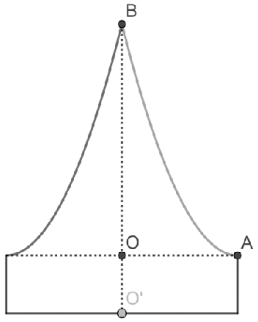
A. $30\,m^3$ **B.** $36\,m^3$ **C.** $40\,m^3$ **D.** $41\,m^3$

Câu 18. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Săm lốp xe ô tô khi bơm căng đặt nằm trên mặt phẳng nằm ngang có hình chiếu bằng như hình vẽ với bán kính đường tròn nhỏ $R_1 = 20cm$, bán kính đường tròn lớn $R_2 = 30cm$ và mặt cắt khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trục, vuông góc mặt phẳng nằm ngang là hai đường tròn. Bỏ qua độ dày vỏ săm. Tính thể tích không khí được chứa bên trong săm.



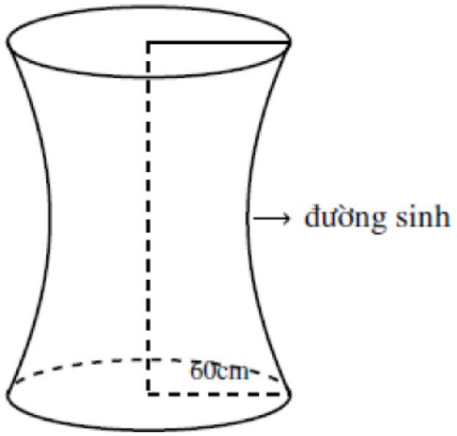
A. $1250\pi^2 cm^3$. **B.** $1400\pi^2 cm^3$. **C.** $2500\pi^2 cm^3$. **D.** $600\pi^2 cm^3$.

Câu 19. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 5$ cm, $OA = 10$ cm, $OB = 20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A. Thể tích của chiếc mũ bằng



A. $\frac{2750\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$ **B.** $\frac{2500\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$ **C.** $\frac{2050\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$ **D.** $\frac{2250\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$

Câu 20. Cho chiếc trống như hình vẽ, có đường sinh là nửa elip được cắt bởi trục lớn với độ dài trục lớn bằng 80 cm, độ dài trục bé bằng 60 cm và đáy trống là hình tròn có bán kính bằng 60 cm. Tính thể tích V của chiếc trống (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

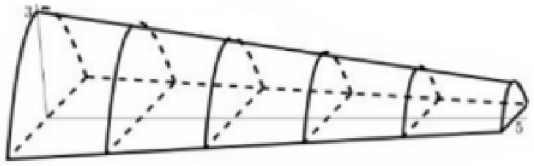


A. $V=344963\,\text{cm}^3$ **B.** $V=344964\,\text{cm}^3$ **C.** $V=208347\,\text{cm}^3$ **D.** $V=208346\,\text{cm}^3$

Câu 21. Cho một vật thể bằng gỗ có dạng hình trụ với chiều cao và bán kính đáy cùng bằng R. Cắt khối gỗ đó bởi một mặt phẳng đi qua đường kính của một mặt đáy của khối gỗ và tạo với mặt phẳng đáy của khối gỗ một góc 30^0 ta thu được hai khối gỗ có thể tích là V_1 và V_2, với $V_1<V_2$. Thể tích V_1 bằng?

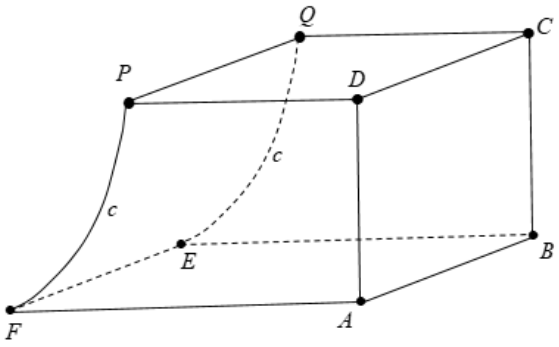
A. $V_1=\frac{2\sqrt{3}R^3}{9}$. **B.** $V_1=\frac{\sqrt{3}\pi R^3}{27}$. **C.** $V_1=\frac{\sqrt{3}\pi R^3}{18}$. **D.** $V_1=\frac{\sqrt{3}R^3}{27}$.

Câu 22. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Cho một mô hình $3-D$ mô phỏng một đường hầm như hình vẽ bên. Biết rằng đường hầm mô hình có chiều dài $5\left(\text{cm}\right)$; khi cắt hình này bởi mặt phẳng vuông góc với đấy của nó, ta được thiết diện là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao parabol. Chiều cao của mỗi thiết diện parobol cho bởi công thức $y=3-\frac{2}{5}x\ \left(\text{cm}\right)$, với $x\left(\text{cm}\right)$ là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) không gian bên trong đường hầm mô hình (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



A. 29. **B.** 27. **C.** 31. **D.** 33.

Câu 23. Một chi tiết máy được thiết kế như hình vẽ bên.



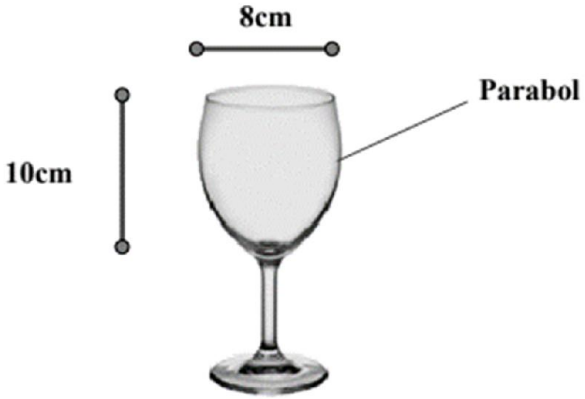
Các tứ giác $ABCD, CDPQ$ là các hình vuông cạnh $2,5cm$. Tứ giác $ABEF$ là hình chữ nhật có $BE = 3,5cm$. Mặt bên $PQEF$ được mài nhẵn theo đường parabol (P) có đỉnh parabol nằm trên cạnh EF. Thể tích của chi tiết máy bằng

A. $\frac{395}{24}cm^3$. **B.** $\frac{50}{3}cm^3$. **C.** $\frac{125}{8}cm^3$. **D.** $\frac{425}{24}cm^3$.

Câu 24. **(THPT Lục Ngạn 2018)** Bổ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn $28\,\text{cm}$, trục nhỏ $25\,\text{cm}$. Biết cứ $1000\,\text{cm}^3$ dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

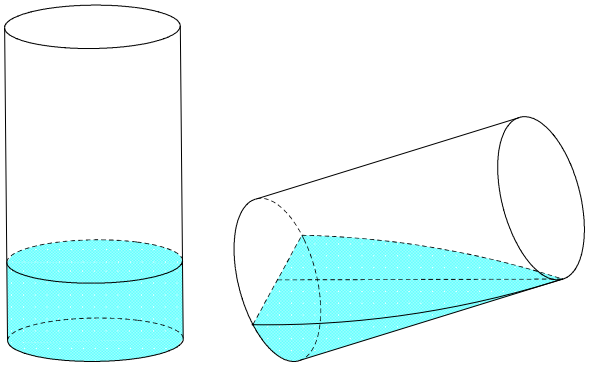
A. 183000 đồng. **B.** 180000 đồng. **C.** 185000 đồng. **D.** 190000 đồng.

Câu 25. **(THPT Thực Hành - TPHCM - 2018)** Một cốc rượu có hình dạng tròn xoay và kích thước như hình vẽ, thiết diện dọc của cốc (bổ dọc cốc thành 2 phần bằng nhau) là một đường Parabol. Tính thể tích tối đa mà cốc có thể chứa được (làm tròn 2 chữ số thập phân)



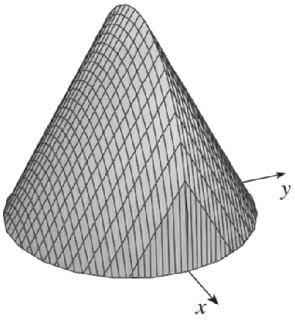
A. $V \approx 320cm^3$. **B.** $V \approx 1005,31cm^3$. **C.** $V \approx 251,33cm^3$. **D.** $V \approx 502,65cm^3$.

Câu 26. **(Chuyên Thoại Ngọc Hầu - 2018)** Có một cốc nước thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là $6\,\text{cm}$, chiều cao lòng cốc là $10\,\text{cm}$ đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



A. $240\,\text{cm}^3$. **B.** $240\pi\,\text{cm}^3$. **C.** $120\,\text{cm}^3$. **D.** $120\pi\,\text{cm}^3$.

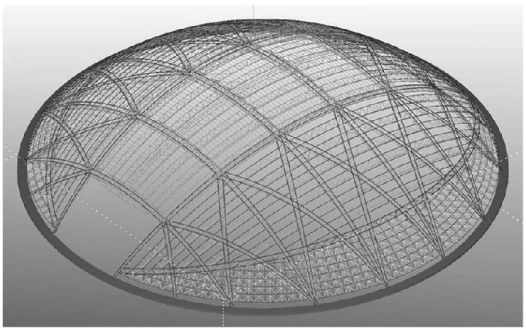
Câu 27. **(Chuyên Thoại Ngọc Hầu -- 2018)** Cho vật thể đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (tham khảo hình vẽ). Khi cắt vật thể bằng mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\left(-1\le x\le 1\right)$ thì được thiết diện là một tam giác đều. Thể tích V của vật thể đó là

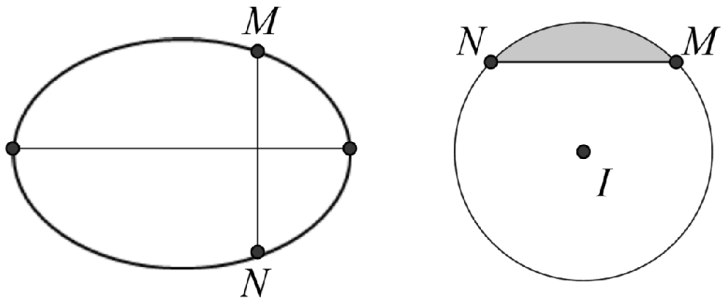


A. $V=\sqrt{3}$. **B.** $V=3\sqrt{3}$. **C.** $V=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\pi$.

Câu 28. **(THPT Bình Giang - Hải Dương - 2018)** Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip $\left(E\right)$ có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$ (hình 3). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của $\left(E\right)$và cắt elip ở M,N (hình 3) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình 4) với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN}=90^0$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Hỏi thể tích xấp xỉ bao nhiêu?







Hình 3

A. $57793m^3$. **B.** $115586m^3$. **C.** $32162m^3$. **D.** $101793m^3$.

Câu 29. **(Trần Phú - Hà Tĩnh - 2018)** Một cái thùng đựng dầu có thiết diện ngang (mặt trong của thùng) là một đường elip có trục lớn bằng 1m, trục bé bằng $0{,}8\text{m}$, chiều dài (mặt trong của thùng) bằng 3m. Đươc đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng (như hình bên). Biết chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là $0{,}6\text{m}$. Tính thể tích V của dầu có trong thùng (Kết quả làm tròn đến phần trăm).



A. $V=1{,}52\text{m}^3$. **B.** $V=1{,}31\text{m}^3$. **C.** $V=1{,}27\text{m}^3$. **D.** $V=1{,}19\text{m}^3$.

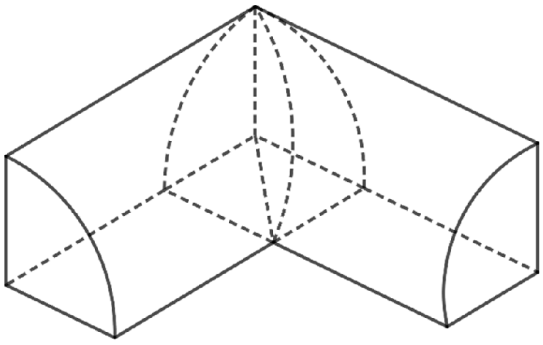
Câu 30. **(Sở Yên Bái - 2018)** Người ta thay nước mới cho một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là $280\,\text{cm}$. Giả sử $h(t)$ là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao mực nước tại giây thứ t là $h'(t)=\dfrac{1}{500}\sqrt[3]{t+3}$ và lúc đầu hồ bơi không có nước. Hỏi sau bao lâu thì bơm được số nước bằng $\dfrac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi (làm tròn đến giây)?

A. 2 giờ 36 giây. **B.** 2 giờ 34 giây. **C.** 2 giờ 35 giây. **D.** 2 giờ 36 giây.

Câu 31. **(THPT Ngô Quyền - Quảng Ninh 2018)** Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=6at^2+2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90m^3$, sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504m^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

A. $1458m^3$. **B.** $600m^3$. **C.** $2200m^3$. **D.** $4200m^3$.

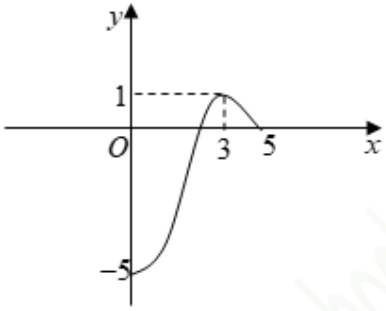
Câu 32. **(Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương - Lần 2 - 2020)** Gọi (H) là phần giao của hai khối $\dfrac{1}{4}$ hình trụ có bán kính a, hai trục hình trụ vuông góc với nhau như hình vẽ sau. Tính thể tích của khối (H).



A. $V_{(H)}=\dfrac{a^3}{2}$. **B.** $V_{(H)}=\dfrac{3a^3}{4}$. **C.** $V_{(H)}=\dfrac{2a^3}{3}$. **D.** $V_{(H)}=\dfrac{\pi a^3}{4}$.

Dạng 3. Ứng dụng tích phân để giải quyết một số bài toán đại số

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;5]$ được cho như hình bên.

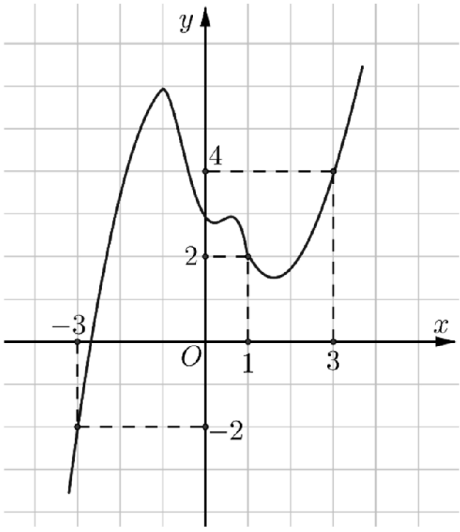


Tìm mệnh đề đúng

A. $f(0)=f(5)<f(3)$. **B.** $f(3)<f(0)=f(5)$.

C. $f(3)<f(0)<f(5)$. **D.** $f(3)<f(5)<f(0)$.

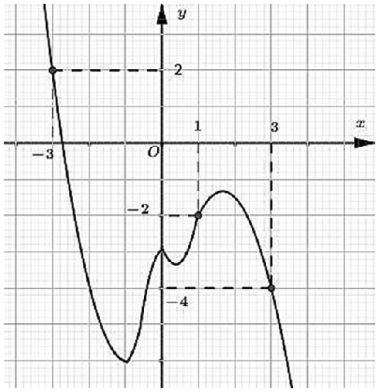
Câu 2. **(Mã 110 B 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(1)>g(-3)>g(3)$ **B.** $g(1)>g(3)>g(-3)$

C. $g(3)>g(-3)>g(1)$ **D.** $g(-3)>g(3)>g(1)$

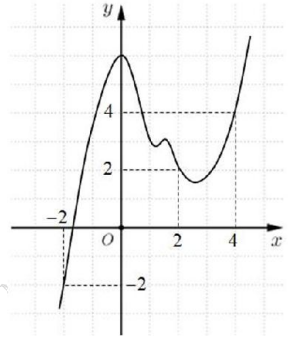
Câu 3. **(Mã 105 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ của hàm số như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)+x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(3)<g(-3)<g(1)$ **B.** $g(1)<g(-3)<g(3)$

C. $g(-3)<g(3)<g(-1)$ **D.** $g(1)<g(3)<g(-3)$

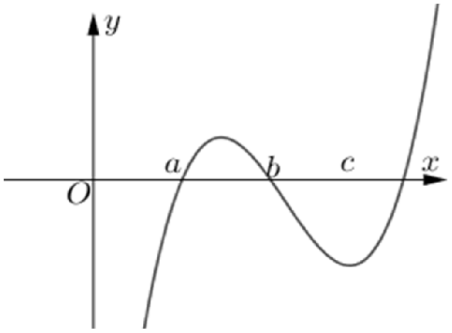
Câu 4. **(Mã123 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $h(x)=2f(x)-x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $h(4)=h(-2)<h(2)$ **B.** $h(2)>h(-2)>h(4)$

C. $h(4)=h(-2)>h(2)$ **D.** $h(2)>h(4)>h(-2)$

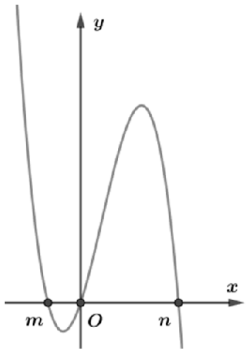
Câu 5. **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $f(b)>f(a)>f(c)$. **B.** $f(a)>f(b)>f(c)$.

C. $f(c)>f(a)>f(b)$. **D.** $f(c)>f(b)>f(a)$.

Câu 6. **(Chuyên Thái Bình - Lần 3 - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn, có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ.

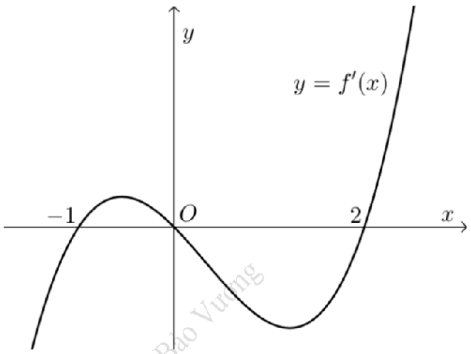


Phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

A. $f(0)<0<f(m)$. **B.** $f(0)>0$.

C. $f(m)<0<f(n)$. **D.** $f(0)<0<f(n)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình bên dưới. Mệnh đề nào sau đây đúng?

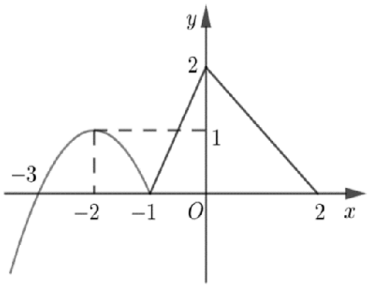


Nguyễn Bảo Vương

A. $f(0)>f(2)>f(-1)$. **B.** $f(0)>f(-1)>f(2)$.

C. $f(2)>f(0)>f(-1)$. **D.** $f(-1)>f(0)>f(2)$.

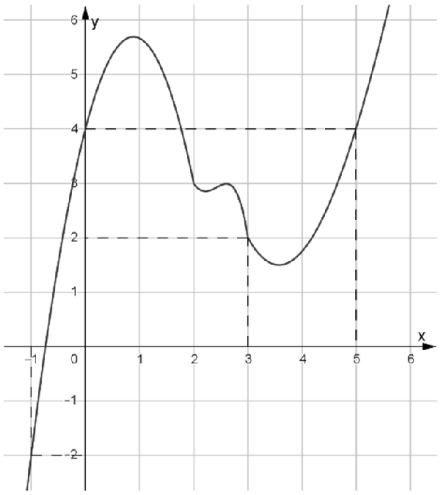
Câu 8. **(Phú Thọ -2019)** Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $[-3;2]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y=ax^2+bx+c$.)



Biết $f(-3)=0$, giá trị của $f(-1)+f(1)$ bằng

A. $\frac{23}{6}$ **B.** $\frac{31}{6}$ **C.** $\frac{35}{3}$ **D.** $\frac{9}{2}$

Câu 9. **(THPT Lương Văn Can - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x)=2f(x)-(x-1)^2$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

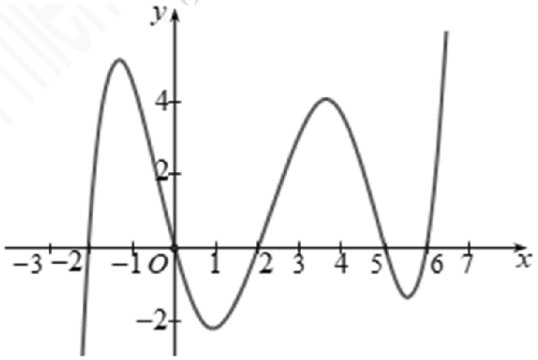
A. $g(-1)<g(3)<g(5)$. **B.** $g(-1)<g(5)<g(3)$.

C. $g(5)<g(-1)<g(3)$. **D.** $g(3)<g(5)<g(-1)$.

Câu 10. **(THPT Hậu Lộc 2 - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có đồ thị là (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính giá trị $H=f(4)-f(2)$?

A. $H=45$. **B.** $H=64$. **C.** $H=51$. **D.** $H=58$.

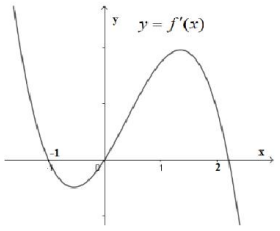
Câu 11. **(Thanh Hóa - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $M=\max\limits_{[-2;6]}f(x)$, $m=\min\limits_{[-2;6]}f(x)$, $T=M+m$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $T=f(0)+f(-2)$. **B.** $T=f(5)+f(-2)$.

C. $T=f(5)+f(6)$. **D.** $T=f(0)+f(2)$.

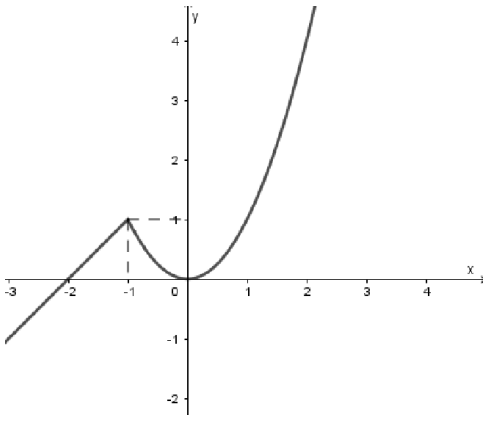
Câu 12. **(THPT Thăng Long 2019)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?



A. $a+c>0$. **B.** $a+b+c+d<0$.

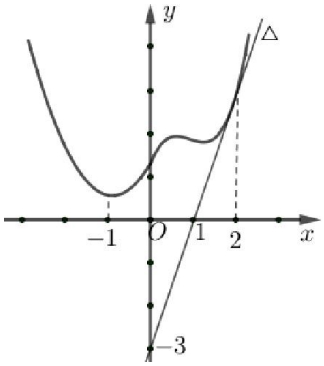
C. $a+c<b+d$. **D.** $b+d-c>0$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị gồm một phần đường thẳng và một phần parabol có đỉnh là gốc tọa độ O như hình vẽ. Giá trị của $\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ bằng



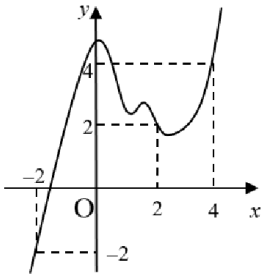
A. $\frac{26}{3}$. **B.** $\frac{38}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{28}{3}$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$, có đồ thị như hình vẽ và đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $x=2$. Tính $\int_{1}^{4} f''(x-2)\mathrm{d}x$



A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

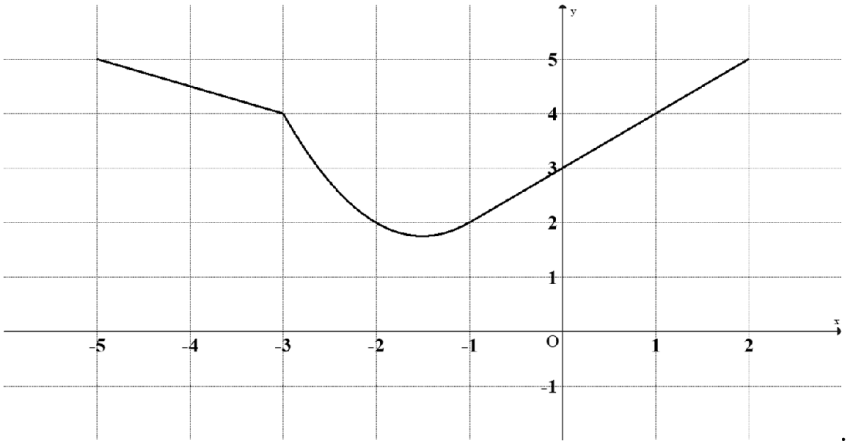
Câu 15. **(SGD Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Giá trị của biểu thức $I=\int_{0}^{4} f'(x-2)\mathrm{d}x+\int_{0}^{2} f'(x+2)\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 10.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục có đồ thị như hình bên dưới.



Biết $F'(x)=f(x), \forall x \in [-5;2]$ và $\int_{-3}^{-1} f(x)\,dx = \frac{14}{3}$. Tính $F(2)-F(-5)$

A. $\frac{-145}{6}$. **B.** $\frac{-89}{6}$. **C.** $\frac{145}{6}$. **D.** $\frac{89}{6}$.

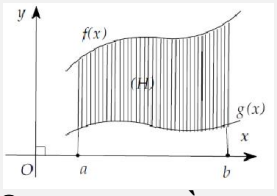
Nguyễn Bảo Vương

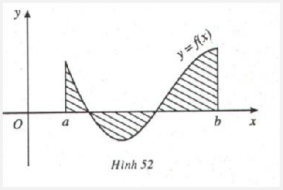
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

Dạng 1. Ứng dụng tích phân để tìm diện tích

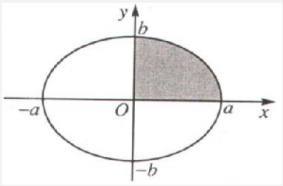
① *Hình phẳng* (H) *giới hạn bởi* $\begin{cases}(C_1): y=f(x)\\(C_2): y=g(x)\\x=a,\ x=b\ (a<b)\end{cases}$ *thì diện tích là* $\boxed{S=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x}$.

Hình phẳng (H) *giới hạn bởi* $\begin{cases}(C_1): y=f(x)\\(C_2): Ox: y=0\\x=a,\ x=b\ (a<b)\end{cases}$ *thì diện tích là* $\boxed{S=\int_a^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x}$.





Hình 52



$\boxed{S_{\text{elip}}=\pi ab.}$

$(E):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

② ***Hình thức đề thường hay cho***

Hình thức 1: *Không cho hình vẽ, cho dạng* $(H):\{y=f(x),\ y=g(x),\ x=a,\ x=b\ (a<b)\}$

$\xrightarrow{\text{casio}}\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=$ *kết quả, so sánh với bốn đáp án.*

Hình thức 2: *Không cho hình vẽ, cho dạng* $(H):\{y=f(x),\ y=g(x)\}$

Giải $f(x)=g(x)$ *tìm nghiệm* $x_1,...,x_i$, *với* x_1 *nhỏ nhất,* x_i *lớn nhất* $\xrightarrow{\text{casio}}\int_{x_1}^{x_i} \left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x.$

Hình thức 3: *Cho hình vẽ, sẽ giải phương trình tìm tọa độ giao điểm (nếu chưa cho trên hình), chia từng diện tích nhỏ, xổ hình từ trên xuống, ghi công thức và bấm máy tính.*

Hình thức 4: *Cho ba hàm trở lên, chẳng hạn* $y=f(x),\ y=g(x),\ y=h(x)$ *ta nên vẽ hình.*

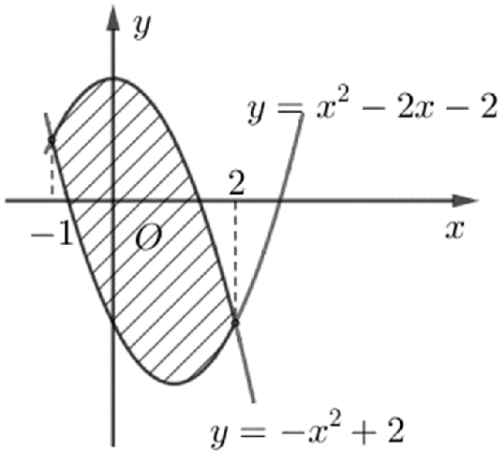
Câu 1. **(THPT Lê Xoay Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,\ x=b$ được tính theo công thức

A. $S=\int_a^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x.$ **B.** $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$ **C.** $S=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$ **D.** $S=\int_b^a \left|f(x)\right|\mathrm{d}x.$

Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,\ x=b$ được tính bởi công thức: $S=\int_a^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x.$

Câu 2. **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên bằng



A. $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2-2x+4\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{-1}^{2}\left(2x^2+2x-4\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Dựa và hình vẽ ta có diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên là:

$\int_{-1}^{2}\left[\left(-x^2+2\right)-\left(x^2-2x-2\right)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x.$

Câu 3. **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x^2$, $y=-1$, $x=0$ và $x=1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $S=\pi\int_{0}^{1}\left(2x^2+1\right)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_{0}^{1}\left(2x^2-1\right)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{0}^{1}\left(2x^2+1\right)^2\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int_{0}^{1}\left(2x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int_{0}^{1}\left|2x^2+1\right|\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\left(2x^2+1\right)\mathrm{d}x$ do $2x^2+1>0\ \ \forall x\in[0;1]$.

Câu 4. **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4$ và $y=2x-4$ bằng

A. 36. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** 36π.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$x^2-4=2x-4\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho là:

$S=\int_{0}^{2}\left|\left(x^2-4\right)-\left(2x-4\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int_{0}^{2}\left(2x-x^2\right)\mathrm{d}x=\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{2}=\frac{4}{3}$.

Câu 5. **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-1$ và $y=x-1$

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{13}{6}$. **C.** $\frac{13\pi}{6}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm hai đường là: $x^2-1=x-1\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường là $\int_0^1\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{6}$.

Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-3$ và $y=x-3$ bằng

A. $\frac{125\pi}{6}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{125}{6}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-3=x-3\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng: $S=\int_0^1\left|\left(x^2-3\right)-\left(x-3\right)\right|dx=\int_0^1\left|x^2-x\right|dx=\frac{1}{6}$.

Câu 7. **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-2$ và $y=3x-2$ bằng

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{9\pi}{2}$. **C.** $\frac{125}{6}$. **D.** $\frac{125\pi}{6}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm, ta có:

$$x^2-2=3x-2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0.\\x=3.\end{array}\right.$$

Như vậy, diện tích hình phẳng được gới hạn bằng $\int_0^3\left|\left(x^2-2\right)-\left(3x-2\right)\right|dx=\frac{9}{2}$.

Câu 8. **(Mã 102 2018)** Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\pi\int_0^2 2^x\mathrm{d}x$ **B.** $S=\int_0^2 2^x\mathrm{d}x$ **C.** $S=\pi\int_0^2 2^{2x}\mathrm{d}x$ **D.** $S=\int_0^2 2^{2x}\mathrm{d}x$

Lời giải

Chọn B

$S=\int_0^2\left|2^x\right|\mathrm{d}x=\int_0^2 2^x\mathrm{d}x$ (do $2^x>0,\forall x\in[0;2]$).

Câu 9. **(Mã 101 2018)** Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

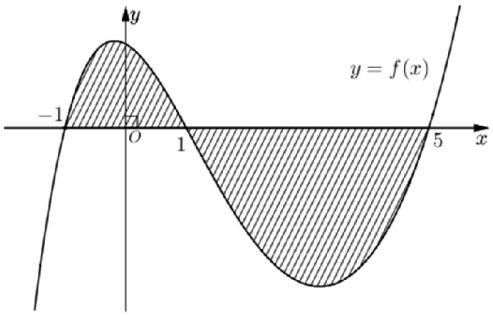
A. $S=\int_0^2 e^x dx$ **B.** $S=\pi\int_0^2 e^x dx$ **C.** $S=\pi\int_0^2 e^x dx$ **D.** $S=\pi\int_0^2 e^{2x} dx$

Lời giải

Chọn A

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ là: $S=\int_0^2 e^x dx$.

Câu 10. **(Mã 102 - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1$ và $x=5$ (như hình vẽ bên).



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)dx-\int_{1}^{5} f(x)dx$. **B.** $S=\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{5} f(x)dx$.

C. $S=\int_{-1}^{1} f(x)dx-\int_{1}^{5} f(x)dx$. **D.** $S=-\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{5} f(x)dx$.

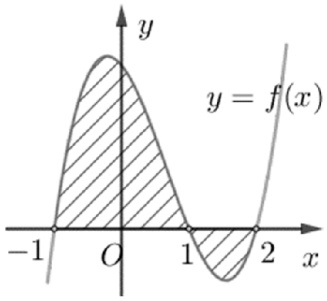
Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn C

Ta có: $S=\int_{-1}^{1}|f(x)|dx+\int_{1}^{5}|f(x)|dx=\int_{-1}^{1} f(x)dx-\int_{1}^{5} f(x)dx$.

Câu 11. **(Mã 103 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1, x=2$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{2} f(x)\,dx$. **B.** $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\,dx-\int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

C. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{2} f(x)\,dx$. **D.** $S=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx-\int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

Lời giải

Chọn D

$S=\int_{-1}^{2}|f(x)|dx=\int_{-1}^{1}|f(x)|dx+\int_{1}^{2}|f(x)|dx$

Nhìn hình ta thấy hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[-1;1]$ nên $\int_{-1}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$; hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị âm trên đoạn $[1;2]$ nên $\int_{1}^{2}|f(x)|\mathrm{d}x=-\int_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$

Vậy $S=\int_{-1}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{2}f(x)\,\mathrm{d}x$

Câu 12. **(Đề Minh Họa 2017)** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đồ thị hàm số $y=x-x^2$.

A. $\frac{37}{12}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** $\frac{81}{12}$ **D.** 13

Lời giải

Chọn A

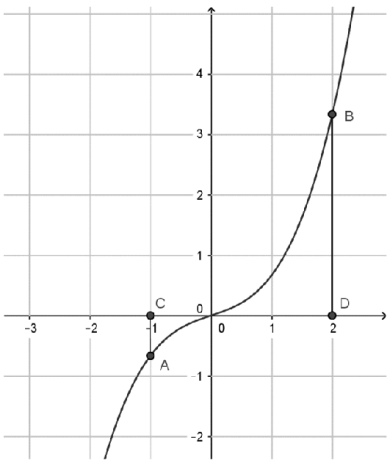
Phương trình hoành độ giao điểm $x^3-x=x-x^2\Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-2\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đồ thị hàm số $y=x-x^2$ là:

$$S=\int_{-2}^{1}\left|x^3-x-\left(x-x^2\right)\right|dx=\left|\int_{-2}^{0}\left(x^3+x^2-2x\right)dx\right|+\left|\int_{0}^{1}\left(x^3+x^2-2x\right)dx\right|$$

$$=\left|\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-2}^{0}\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{0}^{1}\right|=\left|-\left(\frac{16}{4}-\frac{8}{3}-4\right)\right|+\left|\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)\right|=\frac{37}{12}.$$

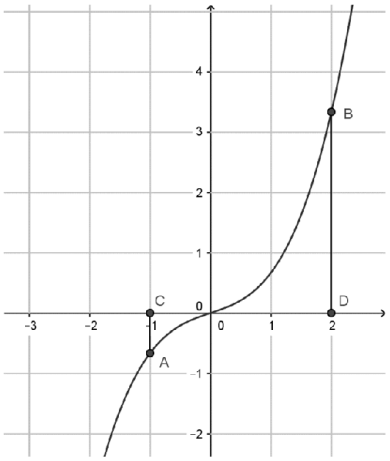
Câu 13. **(Đề Tham Khảo 2017)** Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=2$. Đặt $a=\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x$, $b=\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x$, mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $S=b-a$ **B.** $S=b+a$ **C.** $S=-b+a$ **D.** $S=-b-a$

Lời giải

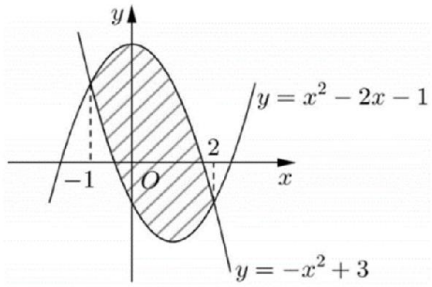
Chọn A



Ta có:

$$S=\int_{-1}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=-a+b.$$

Câu 14. **(Đề Tham Khảo 2019)** Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^{2}(-2x+2)dx$ **B.** $\int_{-1}^{2}(2x-2)dx$

C. $\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx$ **D.** $\int_{-1}^{2}(2x^2-2x-4)dx$

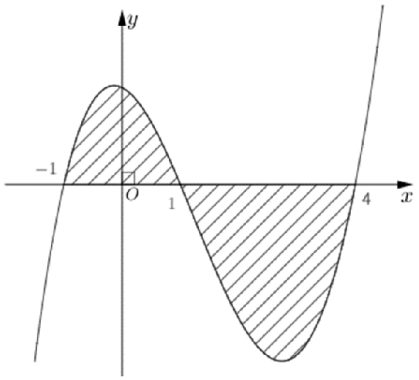
Lời giải

Chọn C

Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là:

$$S=\int_{-1}^{2}\left|\left(-x^2+3\right)-\left(x^2-2x-1\right)\right|dx=\int_{-1}^{2}\left|-2x^2+2x+4\right|dx=\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)dx.$$

Câu 15. **(Mã 101 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1$ và $x=4$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

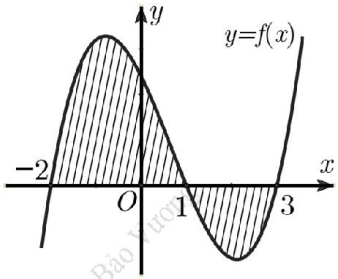
Chọn A

Ta có: hàm số $f(\mathrm{x})\ge 0\,\forall x\in[-1;1]; f(\mathrm{x})\le 0\,\forall x\in[1;4]$, nên:

$S=\int_{-1}^{4}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{1}^{4}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$. Chọn đáp án

B.

Câu 16. **(Mã 104 - 2019)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi cá đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=-2$ và $x=3$ (như hình vẽ). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=-\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

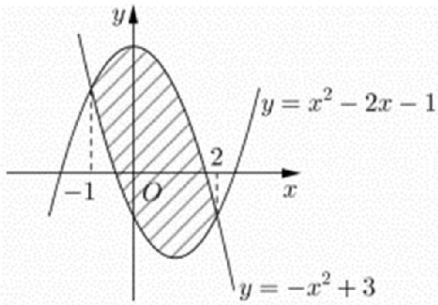
Lời giải

Chọn B

Ta có $S=\int_{-2}^{3}|f(x)|\mathrm{d}x=S=\int_{-2}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}|f(x)|\mathrm{d}x$.

Do $f(x)\ge 0$ với $\forall x\in[-2;1]$ và $f(x)\le 0$ với $\forall x\in[1;3]$ nên $S=\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 17. **(Chuyên KHTN 2019)** Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int\limits_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_{-1}^{2}\left(2x^2+2x-4\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_{-1}^{2}\left(-2x^2-2x+4\right)\mathrm{d}x$.

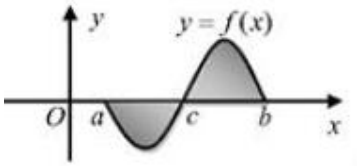
Lời giải

Từ đồ thị ta thấy $-x^2+3\ge x^2-2x-1,\ \forall x\in[-1;2]$.

Vậy diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là

$S=\int\limits_{-1}^{2}\left[\left(-x^2+3\right)-\left(x^2-2x-1\right)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$.

Câu 18. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x=a,x=b$ (như hình vẽ bên). Hỏi cách tính S nào dưới đây đúng?



A. $S=\int\limits_{a}^{b}f(x)dx$. **B.** $S=\left|\int\limits_{a}^{c}f(x)dx+\int\limits_{c}^{b}f(x)dx\right|$.

C. $S=-\int\limits_{a}^{c}f(x)dx+\int\limits_{c}^{b}f(x)dx$. **D.** $S=\int\limits_{a}^{c}f(x)dx+\int\limits_{c}^{b}f(x)dx$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải.

Chọn B.

Câu 19. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương 2019)** Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số: $y=x^3-3x$, $y=x$. Tính S.

A. $S=4$. **B.** $S=8$. **C.** $S=2$. **D.** $S=0$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x^3-3x=x\Leftrightarrow x^3-4x=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Vậy $S=\left|\int\limits_{-2}^{0}\left(x^3-4x\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{0}^{2}\left(x^3-4x\right)\mathrm{d}x\right|=4+4=8$.

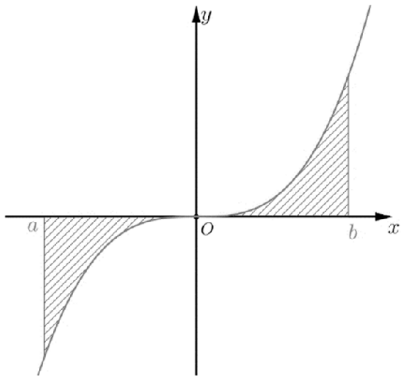
Câu 20. **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3^x$, $y=0,x=0,x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\int\limits_{0}^{2}3^x dx$. **B.** $S=\pi\int\limits_{0}^{2}3^{2x}dx$. **C.** $S=\pi\int\limits_{0}^{2}3^x dx$. **D.** $S=\int\limits_{0}^{2}3^{2x}dx$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng đã cho được tính bởi công thức $S=\int\limits_{0}^{2}3^x dx$

Câu 21. **(THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C):y=f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ (như hình vẽ dưới đây). Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D. đúng trong các phương án A, B, C, D cho dưới đây?



A. $S_D=\int_a^0 f(x)\,dx+\int_0^b f(x)\,dx$.

B. $S_D=-\int_a^0 f(x)\,dx+\int_0^b f(x)\,dx$.

C. $S_D=\int_a^0 f(x)\,dx-\int_0^b f(x)\,dx$.

D. $S_D=-\int_a^0 f(x)\,dx-\int_0^b f(x)\,dx$.

Lời giải

Ta có $S_D=\int_a^b |f(x)|\,dx=\int_a^0 |f(x)|\,dx+\int_0^b |f(x)|\,dx$.

Vì $f(x)\le 0,\forall x\in[a;0], f(x)\ge 0,\forall x\in[0;b]$ nên:

$S_D=\int_a^0 (-f(x))\,dx+\int_0^b f(x)\,dx=-\int_a^0 f(x)\,dx+\int_0^b f(x)\,dx.$

Câu 22. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-2)^2-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$ bằng

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Ta có: $S=\int_1^2 \left|(x-2)^2-1\right|dx=\int_1^2 |x^2-4x+3|\,dx=\left|\int_1^2 (x^2-4x+3)\,dx\right|=\frac{2}{3}$.

Câu 23. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ và các đường thẳng $x=a$, $x=b$ bằng

A. $\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx\right|$.

B. $\int_a^b |f(x)+g(x)|\,dx$.

C. $\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$.

D. $\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$.

Lời giải

Theo lý thuyết thì diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của các đường $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$ được tính theo công thức $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$.

Câu 24. **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=4x-x^2$ và trục Ox

A. 11. **B.** $\frac{34}{3}$. **C.** $\frac{31}{3}$. **D.** $\frac{32}{3}$.

Lời giải

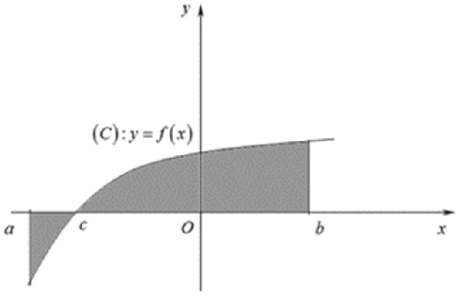
Chọn D

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=4x-x^2$ và trục Ox.

Xét phương trình $4x-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Ta có $S=\int_0^4 \left|4x-x^2\right| dx=\left|\int_0^4 (4x-x^2)dx\right|=\left|(2x^2-\frac{x^3}{3})\right|_0^4=\frac{32}{3}$.

Câu 25. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b\,(a<b)$ (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức nào dưới đây ?



A. $S=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải

Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ là $S=\int_a^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int_a^c \left|f(x)\right|\mathrm{d}x+\int_c^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x=-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 26. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+1, x=-1, x=2$ và trục hoành.

A. $S=6$. **B.** $S=16$. **C.** $S=\frac{13}{6}$. **D.** $S=13$.

Lời giải

Ta có: $S=\int_{-1}^2 \left|x^2+1\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^2 \left(x^2+1\right)\mathrm{d}x=6$.

Câu 27. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+5$, $y=6x$, $x=0$, $x=1$. Tính S.

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{7}{3}$ **C.** $\frac{8}{3}$ **D.** $\frac{5}{3}$

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2+5=6x \Leftrightarrow x=5; x=1$.

Diện tích hình phẳng cần tìm: $S=\int_0^1 \left|x^2-6x+5\right| \mathrm{d}x=\frac{7}{3}$.

Câu 28. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y=\frac{-3x-1}{x-1}$ và hai trục tọa độ là S. Tính S?

A. $S=1-\ln\frac{4}{3}$ **B.** $S=4\ln\frac{4}{3}$ **C.** $S=4\ln\frac{4}{3}-1$ **D.** $S=\ln\frac{4}{3}-1$

Lời giải

Chọn C

Hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành là nghiệm của phương trình $\frac{-3x-1}{x-1}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$.

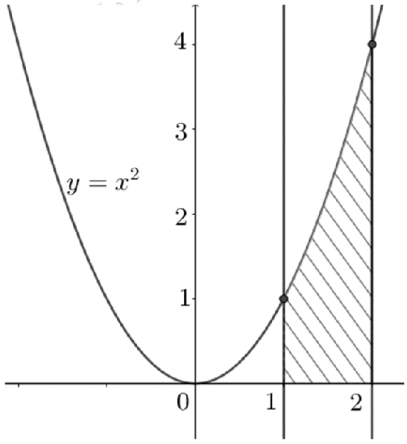
Do đó diện tích hình phẳng là

$$S=\left|\int_{-\frac{1}{3}}^{0}\frac{-3x-1}{x-1}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{-\frac{1}{3}}^{0}\left(3+\frac{4}{x-1}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(3x+4\ln\left|x-1\right|\right)\right|_{-\frac{1}{3}}^{0}=4\ln\frac{4}{3}-1.$$

Câu 29. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=x^2; y=0; x=1; x=2$ bằng

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** 1.

Lời giải



Ta có $S=\int_1^2\left|x^2\right|dx=\int_1^2 x^2dx=\frac{7}{3}$.

Câu 30. **(THPT Lê Xoay Vĩnh Phúc 2019)** Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $(H): y=\frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

A. $2\ln 2-1$. **B.** $\ln 2+1$. **C.** $\ln 2-1$. **D.** $2\ln 2+1$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (H) và trục hoành $\frac{x-1}{x+1}=0 \Leftrightarrow x=1$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (H) và các trục tọa độ là

$$S=\int_0^1\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{-x+1}{x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(-1+\frac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\left(-x+2\ln|x+1|\right)\Big|_0^1=2\ln 2-1.$$

Câu 31. **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{\ln x}{x^2}$, $y=0$, $x=1$, $x=e$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\pi\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$. **C.** $S=\int_1^e\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)^2\mathrm{d}x$. **D.** $S=\pi\int_1^e\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)^2\mathrm{d}x$

Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi miền D gồm các đường $y=\frac{\ln x}{x^2}$, $y=0$, $x=1$, $x=e$ là:

$$S=\int_1^e\left|\frac{\ln x}{x^2}\right|\mathrm{d}x=\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x \text{ vì } \frac{\ln x}{x^2}>0,\ \forall x\in(1;e).$$

Câu 32. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=-x^2+2x+1$, $y=2x^2-4x+1$ là

A. 8. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 10.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là $-x^2+2x+1=2x^2-4x+1\Leftrightarrow 3x^2-6x=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng là $S=\left|\int_0^2\left[\left(2x^2-4x+1\right)-\left(-x^2+2x+1\right)\right]dx\right|$

$$=\left|\int_0^2\left(3x^2-6x\right)dx\right|=\left|\left(x^3-3x^2\right)\Big|_0^2\right|=4.$$

Câu 33. **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=x^2+2x$, $y=x+2$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{11}{2}$.

Lời giải

Xét phương trình: $x^2+2x=x+2\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị là:

$$S=\int_{-2}^1\left|x^2+x-2\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{-2}^1\left(x^2+x-2\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_{-2}^1\right|=\left|-\frac{7}{6}-\frac{10}{3}\right|=\frac{9}{2}.$$

Câu 34. **(Chuyên Hạ Long 2019)** Hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=3x-2$. Tính diện tích hình phẳng (H)

A. $\frac{2}{3}$ (đvdt) **B.** $\frac{1}{3}$ (đvdt) **C.** 1 (đvdt) **D.** $\frac{1}{6}$ (đvdt)

Lời giải

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình:

$$x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường là:

$$S = \int_1^2 \left|x^2 - (3x - 2)\right| dx = \left|\int_1^2 \left(x^2 - 3x + 2\right) dx\right| = \frac{1}{6} \text{ (đvdt).}$$

Câu 35. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \ln x,\ y = 1$ và đường thẳng $x = 1$ bằng**

A. e^2. **B.** $e + 2$. **C.** $2e$. **D.** $e - 2$.

Lời giải

Ta có $\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = e$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \ln x,\ y = 1$ và đường thẳng $x = 1$ là:

$$S = \int_1^e \left|\ln x - 1\right| dx = \left|\int_1^e (\ln x - 1)\, dx\right| = \left|x(\ln x - 1)\Big|_1^e - \int_1^e dx\right| = \left|1 - x\Big|_1^e\right| = \left|1 - (e - 1)\right| = \left|2 - e\right| = e - 2$$

Câu 36. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 4x - x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ bằng

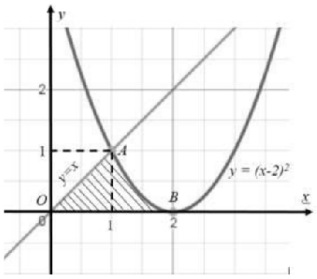
A. 4. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{16}{3}$

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $4x - x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_0^2 \left|x^2 - 2x\right| \mathrm{d}x = \int_0^2 \left(2x - x^2\right) \mathrm{d}x = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$.

Câu 37. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Tính diện tích phần hình phẳng gạch chéo (tam giác cong OAB) trong hình vẽ bên.



A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{5\pi}{6}$. **C.** $\frac{8}{15}$. **D.** $\frac{8\pi}{15}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x = (x - 2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị, khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^1 x\, dx + \int_1^2 (x - 2)^2\, dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Vậy $S=\frac{5}{6}$.

Câu 38. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x$, $y=0$, $x=-10$, $x=10$.

A. $S=\frac{2000}{3}$. **B.** $S=2008$. **C.** $S=2000$. **D.** $S=\frac{2008}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $(C):y=x^2-2x$ và $(d):y=0$ là:

$x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

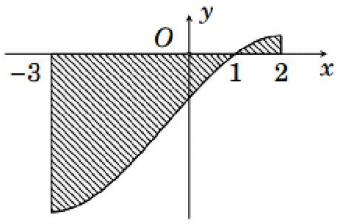
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	

Diện tích cần tìm:

$S=\int\limits_{-10}^{10}\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-10}^{0}\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{2}\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{10}\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x$

$=\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-10}^{0}-\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{0}^{2}+\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{2}^{10}=\frac{1300}{3}+\frac{4}{3}+\frac{704}{3}=\frac{2008}{3}$.

Câu 39. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-3$, $x=2$ (như hình vẽ bên). Đặt $a=\int\limits_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x$, $b=\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng.



A. $S=a+b$. **B.** $S=a-b$. **C.** $S=-a-b$. **D.** $S=b-a$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $S=\int\limits_{-3}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{1}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=-\int\limits_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=-a+b$.

Câu 40. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$ và đường thẳng $y=2x$ là :

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{5}{3}$ **C.** $\frac{3}{2}$ **D.** $\frac{23}{15}$

Lờigiải

Chọn A

Xét phương trình $x^2 = x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ là :

$$S = \int_0^1 \left|x^2 - x\right| dx = \left|\int_0^1 \left(x^2 - x\right) dx\right| = \frac{4}{3}$$

Câu 41. **(Chuyên Phan Bội Châu 2019)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = -x^2 + 2x + 1,\ y = 2x^2 - 4x + 1$ là

A. 8 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 10

Lời giải

Phương trình hoành đồ giao điểm hai đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2x + 1,\ y = 2x^2 - 4x + 1$ là:

$$-x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Diện tích hình phẳng đã cho là $\int_0^2 \left|3x^2 - 6x\right| dx = \int_0^2 \left(6x - 3x^2\right) dx = \left(3x^2 - x^3\right)\Big|_0^2 = 4$.

Câu 42. **(Hsg Bắc Ninh 2019)** Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S là

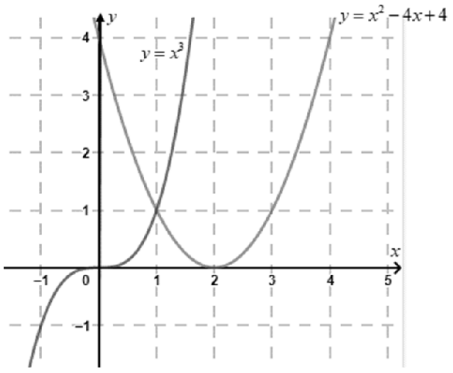
A. $S = 1 + \ln 2$. **B.** $S = 2\ln 2 - 1$. **C.** $S = 2\ln 2 + 1$. **D.** $S = \ln 2 - 1$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và trục hoành: $\frac{x-1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Khi đó $S = \int_0^1 \left|\frac{x-1}{x+1}\right| \mathrm{d}x = \left|\int_0^1 \left(\frac{x-1}{x+1}\right) \mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+1}\right) \mathrm{d}x\right| = \left|\left(x - 2\ln\left|x+1\right|\right)\Big|_0^1\right| = 2\ln 2 - 1.$

Câu 43. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = x^3$, $y = x^2 - 4x + 4$ và trục Ox (tham khảo hình vẽ) được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_0^2 \left|x^3 - \left(x^2 - 4x + 4\right)\right| \mathrm{d}x$. **B.** $-\int_0^1 x^3 \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(x^2 - 4x + 4\right) \mathrm{d}x$.

C. $\int_0^1 x^3 \mathrm{d}x - \int_1^2 \left(x^2 - 4x + 4\right) \mathrm{d}x$. **D.** $\int_0^1 x^3 \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(x^2 - 4x + 4\right) \mathrm{d}x$.

Lời giải

Dựa vào hình vẽ ta thấy hình phẳng cần tính diện tích gồm 2 phần:

Phần 1: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục Ox, $x = 0$, $x = 1$.

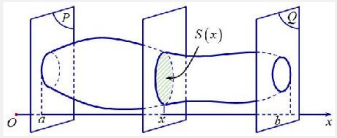
Phần 2: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-4x+4$, trục Ox, $x=1$, $x=2$.

Do đó diện tích cần tính là $S=\int_0^1\left|x^3\right|\mathrm{d}x+\int_1^2\left|x^2-4x+4\right|\mathrm{d}x=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^2\left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x$.

Dạng 2. Ứng dụng tích phân để tìm thể tích

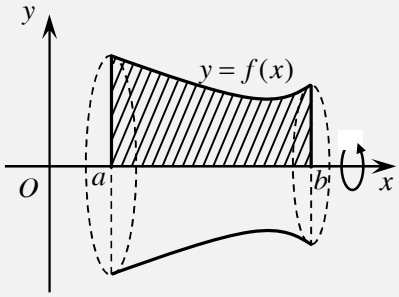
① *Thể tích vật thể*

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b, $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a\le x\le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $\boxed{V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x}$.



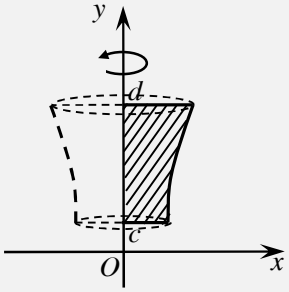
② *Thể tích khối tròn xoay*

a) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ quanh trục Ox:*



$\begin{cases}(C):y=f(x)\\(Ox):y=0\\x=a\\x=b\end{cases}$ $\boxed{V_x=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx}$

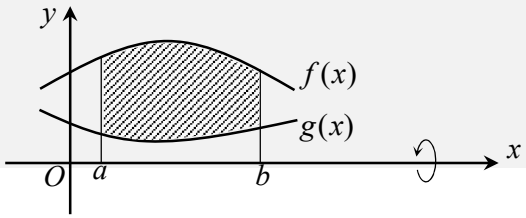
b) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y=c$, $y=d$ quanh trục Oy:*



$\begin{cases}(C):x=g(y)\\(Oy):x=0\\y=c\\y=d\end{cases}$ $\boxed{V_y=\pi\int_c^d\left[g(y)\right]^2dy}$

c) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, $y=g(x)$ (cùng nằm một phía so với Ox) và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ quanh trục Ox:*

$\boxed{V=\pi\int_a^b\left|f^2(x)-g^2(x)\right|\mathrm{d}x}$.



Câu 1. **(Dề Minh Họa 2017)** Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a, x=b(a<b)$, xung quanh trục Ox.

A. $V=\int_a^b |f(x)|dx$ **B.** $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ **C.** $V=\int_a^b f^2(x)dx$ **D.** $V=\pi\int_a^b f(x)dx$

Lời giải

Chọn B

Câu 2. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b(a<b)$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức:

A. $V=\pi^2\int_a^b f(x)dx$ **B.** $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ **C.** $V=2\pi\int_a^b f^2(x)dx$ **D.** $V=\pi^2\int_a^b f^2(x)dx$

Lời giải

Chọn B

Câu 3. **(Mã 101 2020 Lần 2)** Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^{3x}$, $y=0$, $x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng:

A. $\pi\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$. **B.** $\int_0^1 \mathrm{e}^{6x}\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int_0^1 \mathrm{e}^{6x}\mathrm{d}x$. **D.** $\int_0^1 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng:

$\pi\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 \mathrm{e}^{6x}\mathrm{d}x$.

Câu 4. **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^{4x}, y=0, x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\int_0^1 e^{8x}\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$. **D.** $\int_0^1 e^{8x}\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox là:

$V=\pi\int_0^1 \left(e^{4x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 e^{8x}\mathrm{d}x$.

Câu 5. **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^{2x}, y=0, x=0$ và $x=1$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành kho quay D quanh Ox bằng

A. $\pi\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$. **B.** $\int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x$. **C.** $\pi\int_0^1 e^{2x}\mathrm{d}x$. **D.** $\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối tròn xoay tạo thành kho quay D quanh Ox là $V=\pi\int_0^1 \left(e^{2x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 e^{4x}\mathrm{d}x$.

Câu 6. **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^x, y=0, x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\pi\int_0^1 e^{2x}dx$. **B.** $\pi\int_0^1 e^{x}dx$ **C.** $\int_0^1 e^{x}dx$. **D.** $\int_0^1 e^{2x}dx$.

Lời giải

Chọn A

Câu 7. **(Mã 103 2018)** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int_0^2 (x^2+3)dx$ **B.** $V=\pi\int_0^2 (x^2+3)dx$

C. $V=\int_0^2 (x^2+3)^2 dx$ **D.** $V=\pi\int_0^2 (x^2+3)^2 dx$

Lời giải

Chọn D

Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là:

$V=\pi\int_0^2 (x^2+3)^2 dx$.

Câu 8. **(Mã 105 2017)** Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\dfrac{\pi(e^2+1)}{2}$ **B.** $V=\dfrac{e^2-1}{2}$ **C.** $V=\dfrac{\pi e^2}{3}$ **D.** $V=\dfrac{\pi(e^2-1)}{2}$

Lời giải

Chọn D

$V=\pi\int_0^1 e^{2x}dx=\pi\dfrac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1=\dfrac{\pi(e^2-1)}{2}$

Câu 9. **(Mã 104 2017)** Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y=\sqrt{x^2+1}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=2$ **B.** $V=\dfrac{4\pi}{3}$ **C.** $V=2\pi$ **D.** $V=\dfrac{4}{3}$

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối tròn xoay được tính theo công thức:

$V=\pi\int_0^1 \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 dx=\pi\int_0^1 (x^2+1)dx=\pi\left(\dfrac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^1=\dfrac{4\pi}{3}$.

Câu 10. **(Mã 123 2017)** Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=\dfrac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=(\pi+1)\pi$ **B.** $V=\pi-1$ **C.** $V=\pi+1$ **D.** $V=(\pi-1)\pi$

Lời giải

Chọn A

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{2+\cos x}\right)^2 dx=\pi\left(2x+\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi(\pi+1).$$

Câu 11. **(Mã 110 2017)** Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=2\pi\left(\pi+1\right)$ **B.** $V=2\pi$ **C.** $V=2\left(\pi+1\right)$ **D.** $V=2\pi^2$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $V=\pi\int_0^{\pi}\left(\sqrt{2+\sin x}\right)^2 \mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}\left(2+\sin x\right)\mathrm{d}x=\pi\left(2x-\cos x\right)\Big|_0^{\pi}=2\pi\left(\pi+1\right).$

Câu 12. **(Mã 104 2018)** Cho hình phẳng $\left(H\right)$ giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2+2, y=0, x=1, x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay $\left(H\right)$ xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int_1^2\left(x^2+2\right)\mathrm{d}x$ **B.** $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$

C. $V=\int_1^2\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$ **D.** $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)\mathrm{d}x$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$.

Câu 13. **(Đề Tham Khảo 2017)** Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2-2}$.

A. $V=\dfrac{124}{3}$ **B.** $V=(32+2\sqrt{15})\pi$ **C.** $V=32+2\sqrt{15}$ **D.** $V=\dfrac{124\pi}{3}$

Lời giải

Chọn A

Diện tích thiết diện là: $S(x)=3x.\sqrt{3x^2-2}$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể là: $V=\int_1^3 3x.\sqrt{3x^2-2}dx=\dfrac{124}{3}$

Câu 14. Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $\left(P\right): y=x^2$ và đường thẳng $d: y=2x$ quay xung quanh trục Ox.

A. $\pi\int_0^2\left(x^2-2x\right)^2dx$. **B.** $\pi\int_0^2 4x^2dx-\pi\int_0^2 x^4dx$. **C.** $\pi\int_0^2 4x^2dx+\pi\int_0^2 x^4dx$. **D.** $\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

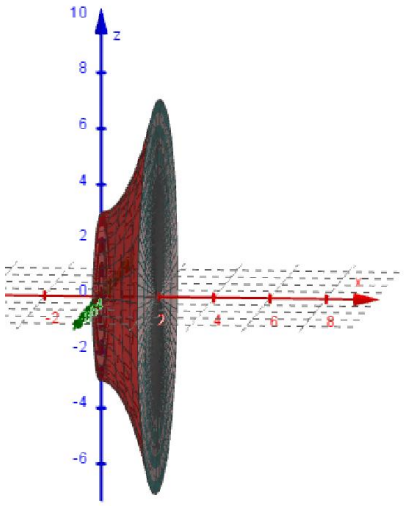
Vậy thể tích khối tròn xoay được tính $V=\pi\int_0^2 4x^2dx-\pi\int_0^2 x^4dx$.

Câu 15. **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương - 2019)** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3,\ y=0,\ x=0,\ x=2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x$. **B.** $V=\int_0^2\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x$.

C. $V=\int_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải



Thể tích của vật thể được tạo nên là $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x$.

Câu 16. **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sin x$, trục Ox, trục Oy và đường thẳng $x=\dfrac{\pi}{2}$, xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx$ **B.** $V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$ **C.** $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx$ **D.** $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$

Lời giải

Công thức tính: $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$

Câu 17. Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-2x$, trục hoành, đường thẳng $x=0$ và $x=1$ quanh trục hoành bằng

A. $\frac{16\pi}{15}$. **B.** $\frac{2\pi}{3}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** $\frac{8\pi}{15}$.

Lời giải

Ta có $V=\pi\int_0^1\left(x^2-2x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\left(x^4-4x^3+4x^2\right)\mathrm{d}x=\pi.\left(\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\pi.\left(\frac{1}{5}-1+\frac{4}{3}\right)=\frac{8\pi}{15}.$

Câu 18. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi $y=\sqrt{x}$, hai đường thẳng $x=1$, $x=2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

A. 3π. **B.** $\frac{3\pi}{2}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$V=\pi\int_1^2 xdx=\frac{\pi x^2}{2}\Big|_1^2=\frac{3\pi}{2}$.

Câu 19. **(Sở Phú Thọ 2019)** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=2x-x^2$, $y=0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

A. $\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx$ **B.** $\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2dx$ **C.** $\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2dx$ **D.** $\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx$

Lời giải

Chọn B

Theo công thức ta chọn $V=\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2dx$

Câu 20. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{\tan x}, y=0, x=0, x=\frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra.

A. $\frac{\pi\ln 2}{2}$. **B.** $\frac{\pi\ln 3}{4}$

C. $\frac{\pi}{4}$. **D.** $\pi\ln 2$.

Lời giải

Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra là $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{\tan x}\right)^2.\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x.\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{cosx}.\mathrm{d}x=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}(cosx)}{cosx}$

$=-\pi\left(\ln|cosx|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\pi\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi\ln 2}{2}$.

Câu 21. **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$, $y=0$, $x=0$ và $x=3$ quanh trục Ox là

A. $\frac{81\pi}{35}$. **B.** $\frac{81}{35}$. **C.** $\frac{71\pi}{35}$. **D.** $\frac{71}{35}$.

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox là :

$$V=\pi\int_0^3\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^3\left(\frac{1}{9}x^6-\frac{2}{3}x^5+x^4\right)\mathrm{d}x=\frac{81\pi}{35}.$$

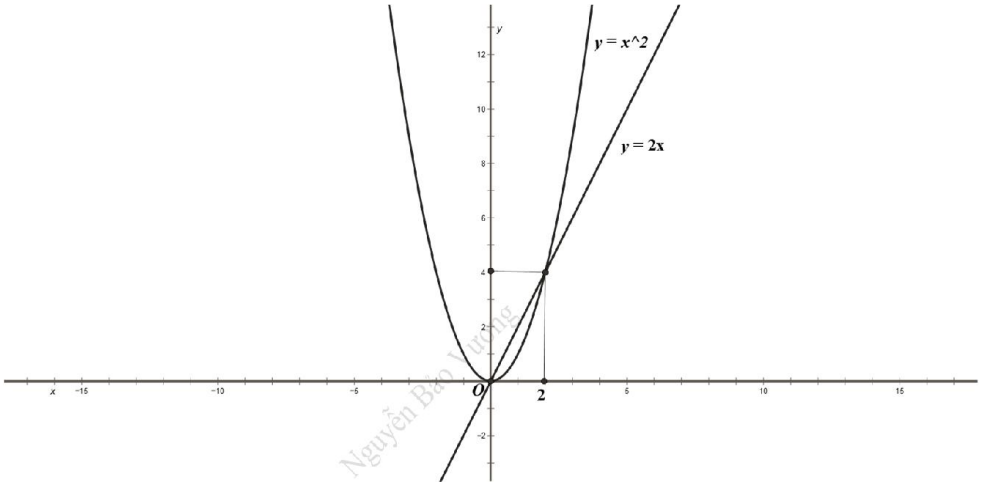
Vậy thể tích khối tròn xoay cần tính là : $V=\frac{81\pi}{35}$.

Câu 22. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parapol (P): $y=x^2$ và đường thẳng d: $y=2x$ quay xung quanh trục Ox bằng:

A. $\pi\int_0^2(2x-x^2)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\pi\int_0^2(x^2-2x)^2\,\mathrm{d}x$.

C. $\pi\int_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x+\pi\int_0^2 x^4\,\mathrm{d}x$. **D.** $\pi\int_0^2 4x^2\,\mathrm{d}x-\pi\int_0^2 x^4\,\mathrm{d}x$.

Lời giải



Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị: $x^2=2x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Ta có: $V_{Ox}=\pi\int_0^2(2x)^2\mathrm{d}x-\pi\int_0^2(x^2)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^2 4x^2\mathrm{d}x-\pi\int_0^2 x^4\mathrm{d}x$

Câu 23. **(THPT Nghĩa Hưng NĐ- 2019)** Tính thể tích của vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P):y=2x-x^2$ và trục Ox bằng:

A. $V=\frac{19\pi}{15}$. **B.** $V=\frac{13\pi}{15}$. **C.** $V=\frac{17\pi}{15}$. **D.** $V=\frac{16\pi}{15}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox :

$$2x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$

Khi đó:

$$V=\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^2\left(4x^2-4x^3+x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{4}{3}x^3-x^4+\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^2=\frac{16}{15}\pi.$$

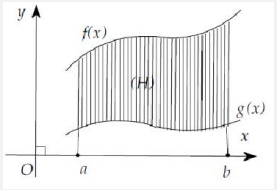
Chuyên đề 27 ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

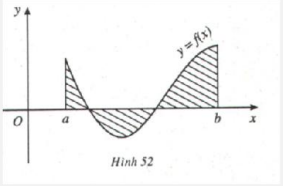
TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

Dạng 1. Ứng dụng tích phân để tìm diện tích

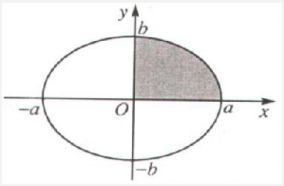
① *Hình phẳng* (H) *giới hạn bởi* $\begin{cases}(C_1): y=f(x)\\(C_2): y=g(x)\\x=a,\ x=b\ (a<b)\end{cases}$ *thì diện tích là* $\boxed{S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx}$.

Hình phẳng (H) *giới hạn bởi* $\begin{cases}(C_1): y=f(x)\\(C_2): Ox: y=0\\x=a,\ x=b\ (a<b)\end{cases}$ *thì diện tích là* $\boxed{S=\int_a^b |f(x)|\,dx}$.





Hình 52



$\boxed{S_{elip}=\pi ab.}$

$(E):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

② ***Hình thức đề thường hay cho***

Hình thức 1: Không cho hình vẽ, cho dạng $(H):\{y=f(x),\ y=g(x),\ x=a,\ x=b\ (a<b)\}$

$\xrightarrow{\text{casio}}\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx=$ *kết quả, so sánh với bốn đáp án.*

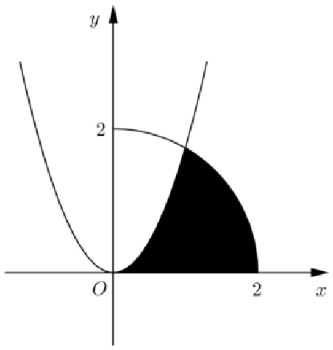
Hình thức 2: Không cho hình vẽ, cho dạng $(H):\{y=f(x),\ y=g(x)\}$

Giải $f(x)=g(x)$ *tìm nghiệm* $x_1,...,x_i$, *với* x_1 *nhỏ nhất,* x_i *lớn nhất* $\xrightarrow{\text{casio}}\int_{x_1}^{x_i} |f(x)-g(x)|\,dx.$

Hình thức 3: Cho hình vẽ, sẽ giải phương trình tìm tọa độ giao điểm (nếu chưa cho trên hình), chia từng diện tích nhỏ, xổ hình từ trên xuống, ghi công thức và bấm máy tính.

Hình thức 4: Cho ba hàm trở lên, chẳng hạn $y=f(x),\ y=g(x),\ y=h(x)$ *ta nên vẽ hình.*

Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2018)** Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0\le x\le 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{4\pi+\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{4\pi+2\sqrt{3}-3}{6}$ **D.** $\frac{5\sqrt{3}-2\pi}{3}$

Lời giải

Chọn B

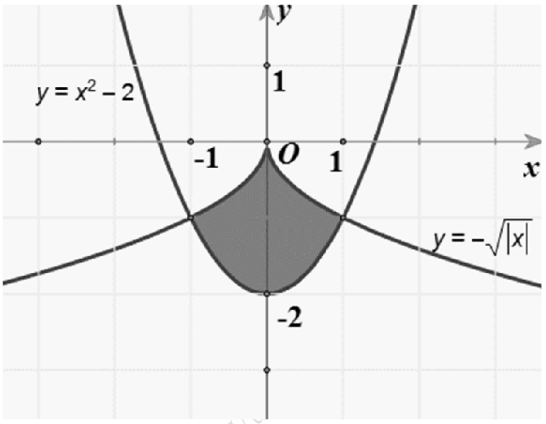
Phương trình hoành độ giao điểm giữa parabol và cung tròn ta được $\sqrt{3}x^2=\sqrt{4-x^2}\Leftrightarrow x=\pm 1$ với $0\le x\le 2$ nên ta có $x=1$

Ta có diện tích $S=\int_0^1\sqrt{3}x^2dx+\int_1^2\sqrt{4-x^2}dx=\frac{\sqrt{3}}{3}x^3\Big|_0^1+\int_1^2\sqrt{4-x^2}dx=\frac{\sqrt{3}}{3}+\int_1^2\sqrt{4-x^2}dx$

Đặt: $x=2\sin t\Rightarrow dx=2\cos tdt; x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}; x=2\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow S=\frac{\sqrt{3}}{3}+2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$

Câu 2. Diện tích phần hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^{1}\left(x^2-2+\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_{-1}^{1}\left(x^2-2-\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_{-1}^{1}\left(-x^2+2+\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{-1}^{1}\left(-x^2+2-\sqrt{|x|}\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên là:

$\int_{-1}^{1}\left|x^2-2-\left(-\sqrt{|x|}\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(-\sqrt{|x|}-x^2+2\right)\mathrm{d}x$ **(vì** $x\in[-1;1]\Rightarrow-\sqrt{|x|}>x^2-2$ **).**

Câu 3. **(Sở Bắc Giang 2019)** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x\ln x$, trục hoành và đường thẳng $x=e$ là

A. $\frac{e^2-1}{2}$. **B.** $\frac{e^2+1}{2}$. **C.** $\frac{e^2-1}{4}$. **D.** $\frac{e^2+1}{4}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ của đường cong $y=x\ln x$ và trục hoành là

$x\ln x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ \ln x=0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \left[\begin{array}{l}x=0\Leftrightarrow x=1.\\ x=1\end{array}\right.\end{cases}$

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x\ln x$, trục hoành và đường thẳng $x=e$ là

$S=\int_1^e|x\ln x|\mathrm{d}x=\int_1^e x\ln x dx$.

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$. Suy ra $S=\dfrac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\dfrac{1}{2}\int_1^e x\mathrm{d}x=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{x^2}{4}\Big|_1^e=\dfrac{e^2+1}{4}$.

Câu 4. Giá trị dương của tham số m sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=2x+3$ và các đường thẳng $y=0, x=0, x=m$ bằng 10 là

A. $m=\dfrac{7}{2}$. **B.** $m=5$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Vì $m>0$ nên $2x+3>0, \forall x\in[0;m]$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2x+3$ và các đường thẳng $y=0, x=0, x=m$ là:

$$S=\int_0^m (2x+3).\mathrm{d}x=\left(x^2+3x\right)\Big|_0^m=m^2+3m.$$

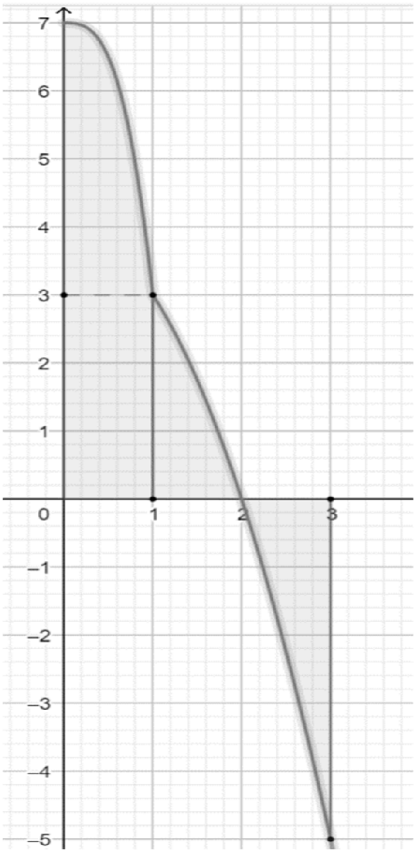
Theo giả thiết ta có:

$$S=10\Leftrightarrow m^2+3m=10\Leftrightarrow m^2+3m-10=0\Leftrightarrow \begin{bmatrix} m=2 \\ m=-5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow m=2 \ (\text{do } m>0).$$

Câu 5. **(Chuyên KHTN 2019)** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} 7-4x^3 \ khi \ 0\le x\le 1 \\ 4-x^2 \ khi \ x>1 \end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x=0, x=3, y=0$.

A. $\dfrac{16}{3}$. **B.** $\dfrac{20}{3}$. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải



$$S=\int_0^1\left(7-4x^3\right)dx+\int_1^2\left(4-x^2\right)dx+\int_2^3\left(x^2-4\right)dx$$

$$=\left(7x-x^4\right)\Big|_0^1+\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2+\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\Big|_2^3=6+4-\frac{7}{3}-3-\frac{8}{3}+8=10.$$

Câu 6. **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$.

A. $S=\frac{937}{12}$ **B.** $S=\frac{343}{12}$ **C.** $S=\frac{793}{4}$ **D.** $S=\frac{397}{4}$

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm 2 đường cong:

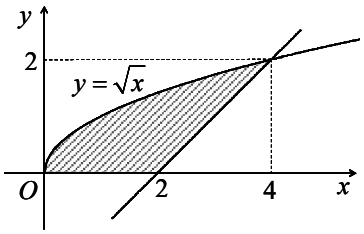
$$-x^3+12x=-x^2\Leftrightarrow x(x^2-x-12)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-3\\x=4\end{array}\right..$$

$\Rightarrow$ Diện tích cần tìm là: $S=\int_{-3}^4\left|x^3-x^2-12x\right|\mathrm{d}x=\int_{-3}^0\left|x^3-x^2-12x\right|\mathrm{d}x+\int_0^4\left|x^3-x^2-12x\right|\mathrm{d}x$

$$=\left|\int_{-3}^0\left(x^3-x^2-12x\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_0^4\left(x^3-x^2-12x\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-6x^2\right)\Big|_{-3}^0\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-6x^2\right)\Big|_0^4\right|$$

$$=\left|\frac{-99}{4}\right|+\left|\frac{-160}{3}\right|=\frac{937}{12}.$$

Câu 7. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$ và trục hoành. Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** $\frac{16}{3}$.

Lời giải

Xét các hình phẳng $(H_1):\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=0 \\ x=0,\ x=4 \end{cases}$ và $(H_2):\begin{cases} y=x-2 \\ y=0 \\ x=2,\ x=4 \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} (H)=(H_1)\setminus(H_2) \\ (H)\cup(H_2)=(H_1) \end{cases}$.

Do đó $S(H)=S(H_1)-S(H_2)=\int_0^4 \sqrt{x}\mathrm{d}x-\int_2^4 (x-2)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^4-\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_2^4=\frac{16}{3}-2=\frac{10}{3}$

Cách khác: Ta có $(H):\begin{cases} x=y^2 \\ x=y+2 \\ y=0,\ y=2 \end{cases}$. Suy ra $S(H)=\int_0^2 \left|y^2-(y+2)\right|\mathrm{d}y=\frac{10}{3}$.

Câu 8. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x^2+x-1$ và $y=x^4+x-1$ là

A. $\frac{8}{15}$. **B.** $\frac{7}{15}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{4}{15}$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=x^2+x-1$ và $y=x^4+x-1$ là

$$x^2+x-1=x^4+x-1 \Leftrightarrow x^2-x^4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int_{-1}^1 \left|x^2-x^4\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 \left|x^2-x^4\right|\mathrm{d}x+\int_0^1 \left|x^2-x^4\right|\mathrm{d}x$

$$=\left|\int_{-1}^0 \left(x^2-x^4\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_0^1 \left(x^2-x^4\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^0\right|+\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1\right|=\frac{2}{15}+\frac{2}{15}=\frac{4}{15}.$$

Câu 9. **(THPT Nghĩa Hưng NĐ- 2019)** Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H):y=\frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

A. $S=\ln 2+1$. **B.** $S=2\ln 2+1$. **C.** $S=\ln 2-1$. **D.** $S=2\ln 2-1$.

Lời giải

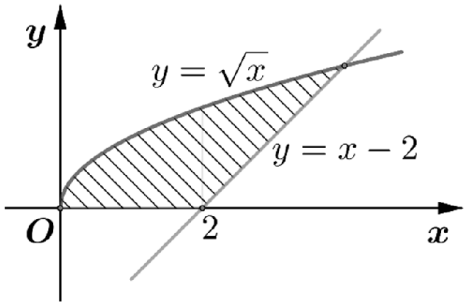
Phương trình trục (Ox) và (Oy) lần lượt là $y=0$ và $x=0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hàm số (H) và trục Ox: $\frac{x-1}{x+1}=0 \Leftrightarrow x=1$.

Ta có: $S=\int_0^1 \left|\frac{x-1}{x+1}\right|\mathrm{d}x$. Vì $\frac{x-1}{x+1}\le 0,\ \forall x\in[0;1]$ nên diện tích cần tìm là:

$$S=-\int_0^1 \frac{x-1}{x+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(-1+\frac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\left(-x+2\ln|x+1|\right)\Big|_0^1=2\ln 2-1.$$

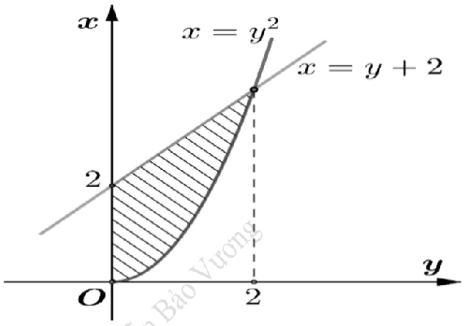
Câu 10. **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Tính diện tích của phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ sau:



A. $\frac{10}{3}$. **B.** 4. **C.** $\frac{13}{3}$. **D.** $\frac{11}{3}$.

Lời giải

Cách 1: Coi x là hàm số theo biến số y.



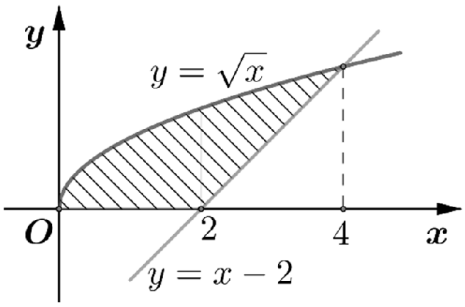
Hình phẳng đã cho giới hạn bởi các đường:

$x=y^2$ (với $y\ge 0$); $x=y+2$; $y=0$.

Ta có: $y^2=y+2\Leftrightarrow y^2-y-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1\ \ (loai)\\ y=2\ \ \ (t/m)\end{array}\right.$

Diện tích của hình phẳng cần tìm là $S=\int_0^2\left|y+2-y^2\right|\mathrm{d}y=\int_0^2\left(y+2-y^2\right)\mathrm{d}y=\frac{10}{3}$ (đvdt)

Cách 2:

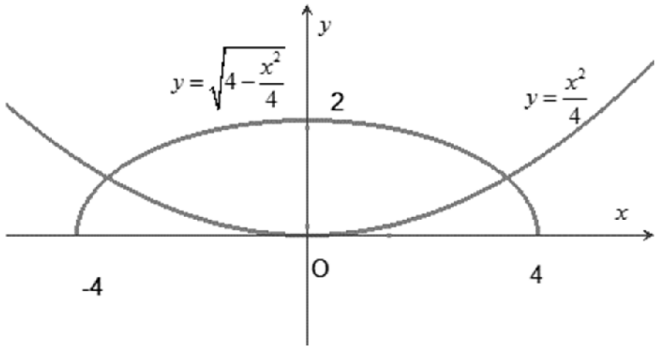


Phương trình hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, $y=x-2$:

$$\sqrt{x}=x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ x=(x-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ x^2-5x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=4.$$

Diện tích của hình phẳng cần tìm là $S=\int_0^4\sqrt{x}\,\mathrm{d}x-\int_2^4(x-2)\mathrm{d}x=\frac{10}{3}$ (đvdt)

Câu 11. **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi parabol $y=\dfrac{x^2}{12}$ và đường cong có phương trình $y=\sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}}$ (tham khảo hình vẽ bên)



Diện tích hình phẳng (H) bằng:

A. $\dfrac{2\left(4\pi+\sqrt{3}\right)}{3}$ **B.** $\dfrac{4\pi+\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\dfrac{4\pi+\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}+\pi}{6}$

Lời giải

Xét phương trình $\dfrac{x^2}{12}=\sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}} \Leftrightarrow \dfrac{x^4}{144}=4-\dfrac{x^2}{4} \Leftrightarrow \dfrac{x^4}{144}+\dfrac{x^2}{4}-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{12} \\ x=-\sqrt{12} \end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng (H) bằng:

$$S=\int_{-\sqrt{12}}^{\sqrt{12}}\left(\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}-\frac{x^2}{12}\right)\mathrm{d}x=2\int_0^{\sqrt{12}}\left(\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}-\frac{x^2}{12}\right)\mathrm{d}x=2\int_0^{\sqrt{12}}\left(\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}\right)\mathrm{d}x-2\int_0^{\sqrt{12}}\frac{x^2}{12}\mathrm{d}x$$

Xét $I_1=\int_0^{\sqrt{12}}\left(\sqrt{4-\dfrac{x^2}{4}}\right)\mathrm{d}x$

Đặt $x=4\sin t \Rightarrow dx=4\cos x\mathrm{d}x$

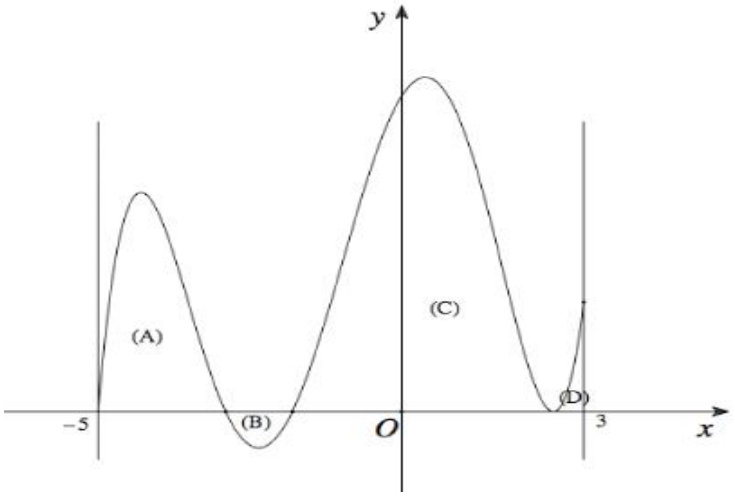
Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0;\ x=\sqrt{12}\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}$

$$I_1=8\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3}$$

Xét $I_2=\int_0^{\sqrt{12}}\dfrac{x^2}{12}\mathrm{d}x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Vậy $S=2I_1-2I_2=\dfrac{2\left(4\pi+\sqrt{3}\right)}{3}$

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết diện tích của hình phẳng $(A),(B),(C),(D)$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành lần lượt là 6; 3; 12; 2 . Tính tích phân $\int_{-3}^{1}\left[2f(2x+1)+1\right]dx$ bằng



A. 27. **B.** 25. **C.** 17. **D.** 21.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int_{-3}^{1}\left[2f\left(2x+1\right)+1\right]dx=2\int_{-3}^{1}f\left(2x+1\right)dx+x\Big|_{-3}^{1}=\int_{-5}^{3}f\left(x\right)dx+4$

Mà $\int_{-5}^{3}f\left(x\right)dx=S_{(A)}-S_{(B)}+S_{(C)}+S_{(D)}=6-3+12+2=17$

Vậy $\int_{-3}^{1}\left[2f\left(2x+1\right)+1\right]dx=21$

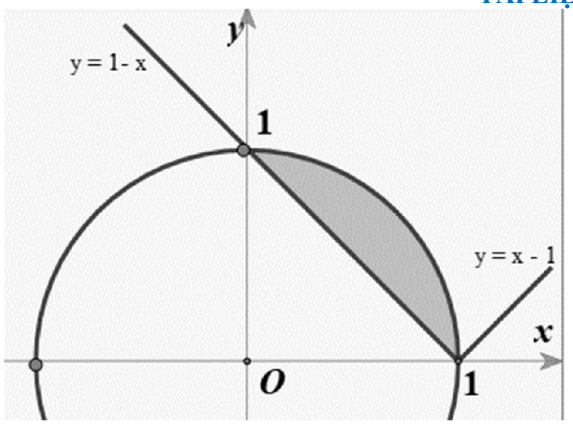
Câu 13. (Το⟨ν Η⊆χ Τυ∏ι Τρ ≈ − 2018) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\left|x-1\right|$ và nửa trên của đường tròn $x^2+y^2=1$ bằng?

A. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\pi-1}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{2}-1$. **D.** $\frac{\pi}{4}-1$.

Lời giải

$y=\left|x-1\right|=\begin{cases}x-1 & \text{khi } x\geq 1\\ 1-x & \text{khi } x<1\end{cases}$.

$x^2+y^2=1\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{1-x^2}$ do chỉ tính nửa trên của đường tròn nên ta lấy $y=\sqrt{1-x^2}$.



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=|x-1|$ và nửa trên của đường tròn $x^2+y^2=1$ là phần tô màu vàng như hình vẽ.

Diện tích hình phẳng trên là:

$$S=\int_0^1\left[\sqrt{1-x^2}-(1-x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x+\int_0^1(x-1)\mathrm{d}x=I_1+\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_0^1=I_1-\frac{1}{2}.$$

Tính $I_1=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

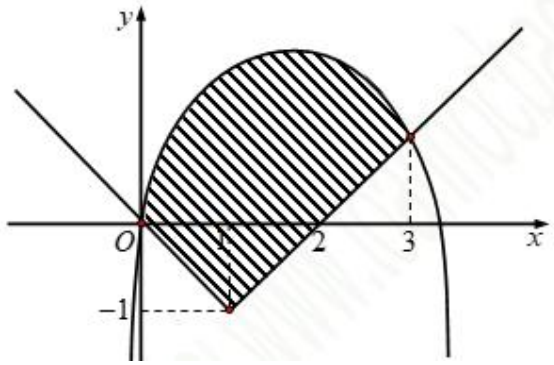
Đặt $x=\sin t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $\mathrm{d}x=\cos t.\mathrm{d}t$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$.

$$I_1=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\,.\cos t.\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\cos t.\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t.\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.\text{Vậy } S=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

Câu 14. [**Kim Liên - Hà Nội - 2018**] Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y=\frac{10}{3}x-x^2$, $y=\begin{cases}-x & \text{khi } x\le 1\\ x-2 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Diện tích của (H) bằng?



A. $\frac{11}{6}$. **B.** $\frac{13}{2}$. **C.** $\frac{11}{2}$. **D.** $\frac{14}{3}$.

Lời giải

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=-x$ và $y=x-2$ là: $-x=x-2\Leftrightarrow x=1$.

Diện tích hình phẳng cần tính là:

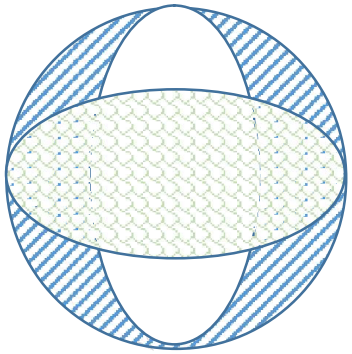
$$S=\int_0^1\left(\frac{10}{3}x-x^2+x\right)\mathrm{d}x+\int_1^3\left(\frac{10}{3}x-x^2-x+2\right)\mathrm{d}x.$$

$$\Leftrightarrow S=\int_0^1\left(\frac{13}{3}x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_1^3\left(\frac{7}{3}x-x^2+2\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow S=\int_0^1\left(\frac{13}{3}x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_1^3\left(\frac{7}{3}x-x^2+2\right)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow S=\left(\frac{13}{6}x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1+\left(\frac{7}{6}x^2-\frac{x^3}{3}+2x\right)\Big|_1^3=\frac{13}{2}.$$

Câu 15. **(THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018)** Cho đường tròn có đường kính bằng 4 và 2 Elip lần lượt nhận 2 đường kính vuông góc nhau của đường tròn làm trục lớn, trục bé của mỗi Elip đều bằng 1. Diện tích S phần hình phẳng ở bên trong đường tròn và bên ngoài 2 Elip (phần gạch carô trên hình vẽ) gần với kết quả nào nhất trong 4 kết quả dưới đây?



A. $S=4,8$. **B.** $S=3,9$. **C.** $S=3,7$. **D.** $S=3,4$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

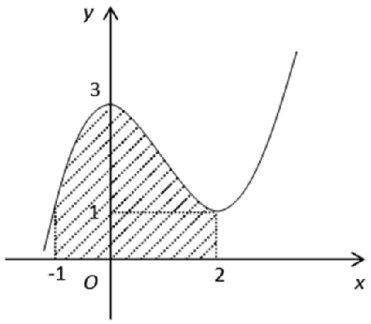
Hai Elip lần lượt có phương trình: $(E_1):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ và $(E_2):\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{4}=1$

Tọa độ giao điểm của hai Elip trong góc phần tư thứ nhất là nghiệm phương trình:

$$x^2+\frac{1-\frac{x^2}{4}}{4}=1\Leftrightarrow x^2=\frac{4}{5}\Rightarrow x=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Diện tích hình phẳng cần tìm: $S=\pi.2^2-\pi.2.1-4\int_0^{\frac{2\sqrt{5}}{5}}\left(2\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)dx=3,71$

Câu 16. **(THPT Trần Quốc Tuấn - 2018)** Tính diện tích S của miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+c$, các đường thẳng $x=1$, $x=2$ và trục hoành (miền gạch chéo) cho trong hình dưới đây.



A. $S=\dfrac{51}{8}$. **B.** $S=\dfrac{52}{8}$. **C.** $S=\dfrac{50}{8}$. **D.** $S=\dfrac{53}{8}$.

Lời giải

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+c$, các đường thẳng $x=-1$, $x=2$ và trục hoành được chia thành hai phần:

□ Miền D_1 là hình chữ nhật có hai kích thước lần lượt là 1 và $3 \Rightarrow S_1=3$.

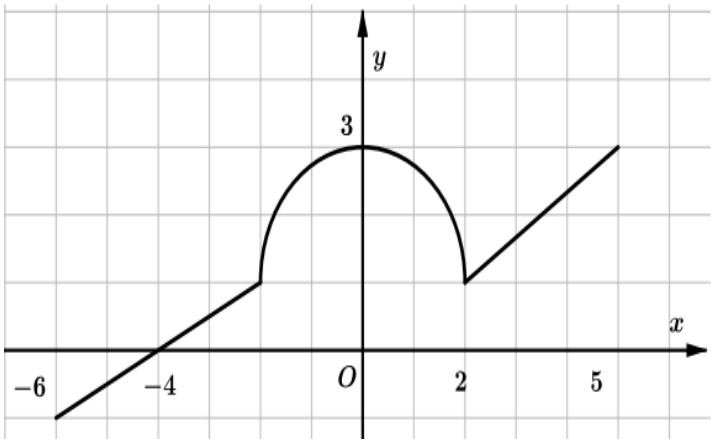
□ Miền D_2 gồm: $\begin{cases} f(x)=ax^3+bx^2+c \\ y=1 \\ x=-1; x=2 \end{cases}$.

Dễ thấy (C) đi qua 3 điểm $A(-1;1)$, $B(0;3)$, $C(2;1)$ nên đồ thị (C) có phương trình $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+3$.

$\Rightarrow S_2=\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+3-1\right)\mathrm{d}x=\frac{27}{8}$.

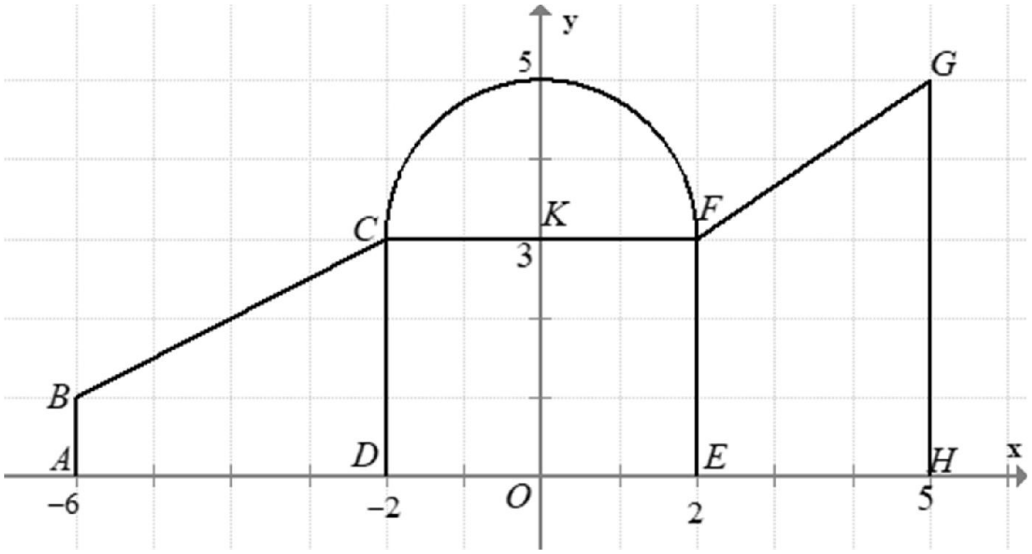
Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $S=S_1+S_2=\dfrac{51}{8}$.

Câu 17. **(Chuyên Thoại Ngọc Hầu - 2018)** Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[-6;5]$, có đồ thị gồm 2 đoạn thẳng và nửa đường tròn như hình vẽ. Tính giá trị $I=\displaystyle\int_{-6}^{5}[f(x)+2]\mathrm{d}x$.



A. $I=2\pi+35$. **B.** $I=2\pi+34$. **C.** $I=2\pi+33$. **D.** $I=2\pi+32$.

Lời giải



$I=\int\limits_{-6}^{5}\left[f\left(x\right)+2\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-6}^{5}g\left(x\right)\mathrm{d}x$ với $g\left(x\right)=f\left(x\right)+2$ có đồ thị như hình vẽ.

Có $I=S_1+S_2+S_3+S_4$ trong đó:

S_1 là diện tích hình thang vuông $ABCD\Rightarrow S_1=\dfrac{\left(AB+CD\right).AD}{2}=\dfrac{\left(1+3\right).4}{2}=8$,

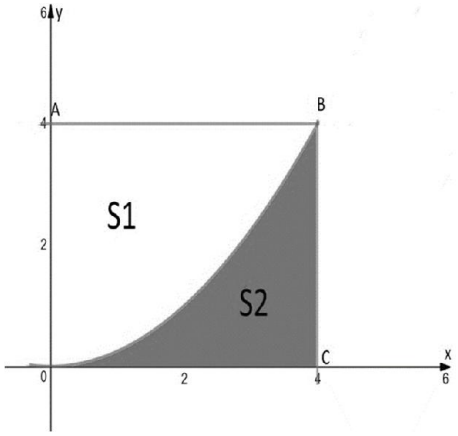
S_2 là diện tích hình chữ nhật $CDEF\Rightarrow S_2=3.4=12$,

S_3 là diện tích hình tròn tâm I, bán kính $R=2\Rightarrow S_3=\dfrac{\pi.2^2}{2}=2\pi$,

S_4 là diện tích hình thang vuông $EFGH\Rightarrow S_4=\dfrac{\left(EF+GH\right).EH}{2}=\dfrac{\left(5+3\right).3}{2}=12$.

Suy ra $I=8+12+2\pi+12=2\pi+32$.

Câu 18. Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong $\left(C\right)$ có phương trình $y=\dfrac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không bị gạch và bị gạch như hình vẽ bên dưới. Tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ bằng



A. $\frac{3}{2}$. **B.** 3. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Ta có diện tích hình vuông $OABC$ là 16 và bằng S_1+S_2.

$$S_2=\int_0^4\frac{1}{4}x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{12}\right|_0^4=\frac{16}{3}\Rightarrow\frac{S_1}{S_2}=\frac{16-S_2}{S_2}=\frac{16-\frac{16}{3}}{\frac{16}{3}}=2$$

Câu 19. **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Kí hiệu $S(t)$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x+1$, $y=0$, $x=1$, $x=t\ (t>1)$. Tìm t để $S(t)=10$.

A. $t=3$. **B.** $t=4$. **C.** $t=13$. **D.** $t=14$.

Lời giải

Cách 1. Ta có: $S(t)=\int_1^t|2x+1|\,\mathrm{d}x=\int_1^t(2x+1)\,\mathrm{d}x$.

Suy ra $S(t)=\left(x^2+x\right)\Big|_1^t=t^2+t-2$.

Do đó $S(t)=10\Leftrightarrow t^2+t-2=10\Leftrightarrow t^2+t-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=-4\ (L)\end{array}\right.$.

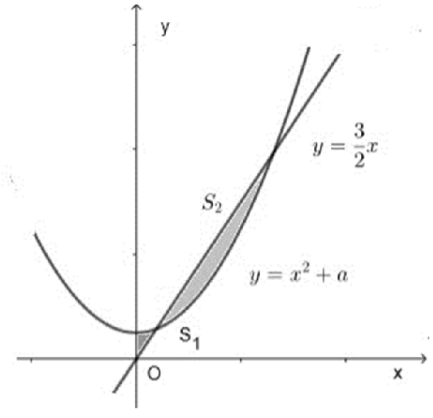
Vậy $t=3$.

Cách 2. Hình phẳng đã cho là hình thang có đáy nhỏ bằng $y(1)=3$, đáy lớn bằng $y(t)=2t+1$ và chiều cao bằng $t-1$.

Ta có $\frac{(3+2t+1)(t-1)}{2}=10\Leftrightarrow 2t^2+2t-24=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=-4\end{array}\right.$. Vì $t>1$ nên $t=3$

Do đó chọn đáp án **A.**

Câu 20. **(Mã 104 - 2019)** Cho đường thẳng $y=\frac{3}{2}x$ và parabol $y=x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 ,S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(0;\frac{2}{5}\right)$ **B.** $\left(\frac{1}{2};\frac{9}{16}\right)$ **C.** $\left(\frac{2}{5};\frac{9}{20}\right)$ **D.** $\left(\frac{9}{20};\frac{1}{2}\right)$

Lời giải

Chọn C

Giải toán:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2+a=\frac{3}{2}x \Leftrightarrow 2x^2-3x+2a=0$

Để phương trình có 2 nghiệm dương thì $\begin{cases} a>0 \\ \Delta>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ a<\frac{9}{16} \end{cases}$.

Gọi hai nghiệm đó là $0<x_1<x_2$ thì $x_2=\frac{3+\sqrt{9-16a}}{4}$.

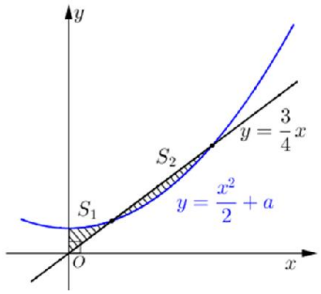
Để $S_1=S_2$ khi và chỉ khi $\int_0^{x_2}\left(x^2+a-\frac{3}{2}x\right)dx=0$

Ta có: $\int_0^{x_2}\left(x^2+a-\frac{3}{2}x\right)\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \frac{x_2^3}{3}+ax_2-\frac{3}{4}x_2^2=0$

$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{3+\sqrt{9-16a}}{4}\right)^3}{3}+a\cdot\frac{3+\sqrt{9-16a}}{4}-\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3+\sqrt{9-16a}}{4}\right)^2=0$

Giải nhanh bằng máy tính cho kết quả $x=0,421875$ thuộc khoảng $\left(\frac{2}{5};\frac{9}{20}\right)$.

Câu 21. **(Mã 102 - 2019)** Cho đường thẳng $y=\frac{3}{4}x$ và parabol $y=\frac{1}{2}x^2+a$, (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{7}{32};\frac{1}{4}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4};\frac{9}{32}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{16};\frac{7}{32}\right)$. **D.** $\left(0;\frac{3}{16}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+a=0 \Leftrightarrow 2x^2-3x+4a=0$.

Theo đề bài phương trình có hai nghiệm $0<x_1<x_2$ thỏa mãn $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{3}{2} & (*) \\ x_1x_2=2a & (**) \end{cases}$.

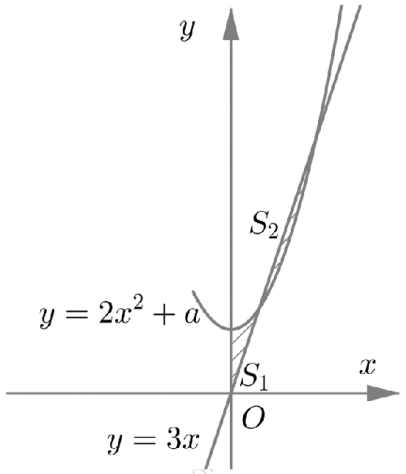
$S_1-S_2=0 \Leftrightarrow \int_0^{x_1}\left|\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+a\right|\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}\left|\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+a\right|\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \int_0^{x_2}\left|\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+a\right|\mathrm{d}x=0$

$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{8}x^2+ax\right|\Big|_0^{x_2}=0 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{6}x_2^3-\frac{3}{8}x_2^2+ax_2\right|=0 \Rightarrow a=-\frac{x_2^2}{6}+\frac{3x_2}{8}\ (***)$.

Từ $(*)\Rightarrow x_1=\frac{3}{2}-x_2$, thay vào $(**)\Rightarrow\left(\frac{3}{2}-x_2\right)x_2=-\frac{x_2^2}{3}+\frac{3x_2}{4} \Leftrightarrow \frac{2x_2^2}{3}-\frac{3x_2}{4}=0 \Rightarrow x_2=\frac{9}{8}$

$\xrightarrow{(***)} a=\frac{27}{128}$. Vậy $a\in\left(\frac{3}{16};\frac{7}{32}\right)$.

Câu 22. **(Mã 103 - 2019)** Cho đường thẳng $y=3x$ và parabol $2x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(1;\frac{9}{8}\right)$. **B.** $\left(\frac{9}{10};1\right)$. **C.** $\left(\frac{4}{5};\frac{9}{10}\right)$. **D.** $\left(0;\frac{4}{5}\right)$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm $2x^2+a=3x \Leftrightarrow 2x^2-3x+a=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=9-8a>0\\ \frac{a}{2}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a<\frac{9}{8}\\ a>0\end{cases} \Leftrightarrow 0<a<\frac{9}{8}$.

Ta được nghiệm của phương trình là $x=\frac{3\pm\sqrt{9-8a}}{4}$.

Ta có $S_1=S_2 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{3-\sqrt{9-8a}}{4}}\left(2x^2+a-3x\right)\mathrm{d}x=-\int_{\frac{3-\sqrt{9-8a}}{4}}^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}}\left(2x^2+a-3x\right)\mathrm{d}x$.

$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{3-\sqrt{9-8a}}{4}}\left(2x^2+a-3x\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{3-\sqrt{9-8a}}{4}}^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}}\left(2x^2+a-3x\right)\mathrm{d}x=0$

$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}}\left(2x^2-3x+a\right)\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+ax\right)\Big|_0^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}}=0$

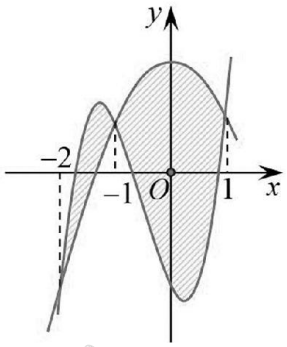
$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)^3-\frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)^2+a\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)\left[\frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)^2-\frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)+a\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{3+\sqrt{9-8a}}{4}=0\ \ (vn)\\ \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)^2-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)+a=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)^2-\frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)+a=0 \xrightarrow[\text{Shift Solve}]{\text{CASIO}} a=\frac{27}{32}$$

Câu 23. **(Mã 102 2018)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^2+bx^2+cx-2$ và $g(x)=dx^2+ex+2$ (a, b, c, d, $e\in\mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; -1; 1 (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{37}{12}$ **B.** $\frac{37}{6}$ **C.** $\frac{13}{2}$ **D.** $\frac{9}{2}$

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f(x)$ và $g(x)$ là

$ax^3+bx^2+cx-2=dx^2+3x+2\Leftrightarrow a^3+(b-d)x^2+(c-e)x-4=0.\qquad (*)$

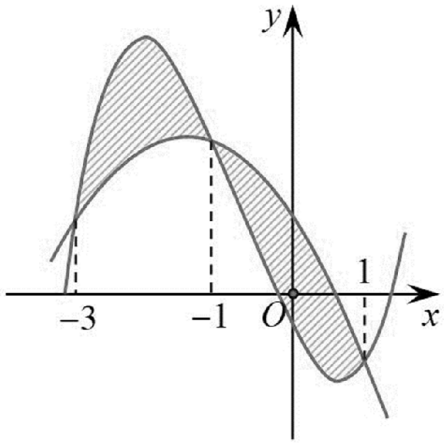
Do đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại ba điểm suy ra phương trình $(*)$ có ba nghiệm $x=-2$; $x=-1$; $x=1$. Ta được

$ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-4=k(x+2)(x+1)(x-1).$

Khi đó $-4=-2k\Rightarrow k=2$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $\int_{-2}^{1}\left|2(x+2)(x+1)(x-1)\right|\mathrm{d}x=\frac{37}{6}$.

Câu 24. **(Mã 101 2018)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 1 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. 5 **B.** $\frac{9}{2}$ **C.** 8 **D.** 4

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Xét phương trình $ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}=dx^2+ex+1$ Û $ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}=0$ có 3 nghiệm lần lượt là $-3;\ -1;\ 1$ nên suy ra $\begin{cases}-27a+9(b-d)-3(c-e)-\frac{3}{2}=0\\-a+(b-d)-(c-e)-\frac{3}{2}=0\\a+(b-d)+(c-e)-\frac{3}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b-d=\frac{3}{2}\\a=\frac{1}{2}\\c-e=\frac{-1}{2}\end{cases}$

Vậy $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$.

Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng

$S=\int_{-3}^{-1}\left(f(x)-g(x)\right)dx+\int_{-1}^{1}\left(g(x)-f(x)\right)dx$

$\Leftrightarrow S=\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)dx-\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)dx=2+2=4$.

Cách 2:

Ta có: $f(x)-g(x)=a(x+3)(x+1)(x-1)$.

Suy ra $a(x+3)(x+1)(x-1)=ax^3+(b-d)x^2+(c-d)x-\frac{3}{2}$

Xét hệ số tự do suy ra: $-3a=-\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

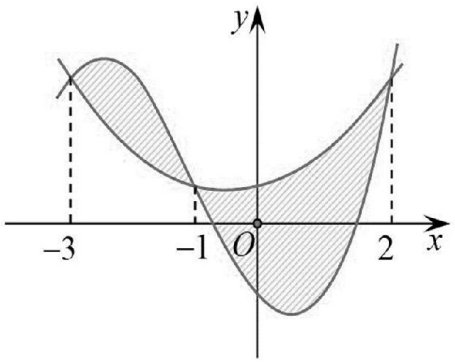
Do đó: $f(x)-g(x)=\frac{1}{2}(x+3)(x+1)(x-1)$.

Diện tích bằng:

$S=\int_{-3}^{-1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow S=\frac{1}{2}\int_{-3}^{-1}(x+3)(x+1)(x-1)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x+3)(x+1)(x-1)\mathrm{d}x=4$.

Câu 25. **(Mã 103 2018)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$ và $g(x)=dx^2+ex+\frac{1}{2}$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3;-1;2$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{253}{12}$ **B.** $\frac{125}{12}$ **C.** $\frac{253}{48}$ **D.** $\frac{125}{48}$

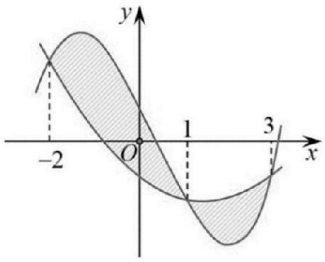
Lời giải

Chọn C

Vì phương trình $f(x)-g(x)=0$ có 3 nghiệm $-3;-1;2$ nên $f(x)-g(x)=a(x+3)(x-2)(x+1)$.

So sánh hệ số tự do ta được $-6a=-\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{4}$. Do đó $S=\int_{-3}^{2}\left|\frac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-2)\right|\mathrm{d}x=\frac{253}{48}$.

Câu 26. **(Mã 104 2018)** Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}$ và $g(x)=dx^2+ex-\frac{3}{4}$, $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; 1; 3 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\frac{253}{48}$ **B.** $\frac{125}{24}$ **C.** $\frac{125}{48}$ **D.** $\frac{253}{24}$

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là:

$ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}=dx^2+ex-\frac{3}{4}\Leftrightarrow ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\frac{3}{2}=0$.

Đặt $h(x)=ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\frac{3}{2}$

Dựa vào đồ thị ta có $h(x)=ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\frac{3}{2}$ có ba nghiệm là $x=-2$; $x=1;x=3$.

Với $x=-2$ ta có $-8a+4(b-d)-2(c-e)=-\frac{3}{2}$, (1).

Với $x=1$ ta có $a+(b-d)+(c-e)=-\frac{3}{2}$, (2).

Với $x=3$ ta có $27a+9(b-d)+3(c-e)=-\frac{3}{2}$, (3).

Từ $(1),(2)$ và (3) ta có $\begin{cases}-8a+4(b-d)-2(c-e)=-\frac{3}{2}\\ a+(b-d)+(c-e)=-\frac{3}{2}\\ 27a+9(b-d)+3(c-e)=-\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\ b-d=-\frac{1}{2}\\ c-e=-\frac{5}{4}\end{cases}$.

Hay ta có

$$S=\int_{-2}^{3}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}\left|\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right|\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}\left|\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right|\mathrm{d}x=\frac{63}{16}+\frac{4}{3}=\frac{253}{48}.$$

Câu 27. Cho parabol $(P_1):y=-x^2+2x+3$ cắt trục hoành tại hai điểm A,B và đường thẳng $d:y=a$ $(0<a<4)$. Xét parabol (P_2) đi qua A,B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y=a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d.Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành. Biết $S_1=S_2$, tính $T=a^3-8a^2+48a$.

A. $T=99$. **B.** $T=64$. **C.** $T=32$. **D.** $T=72$.

Lời giải

Để việc tính toán trở nên đơn giản, ta tịnh tiến hai parabol sang trái một đơn vị.

Khi đó, phương trình các parabol mới là $(P_1):y=-x^2+4$, $(P_2):y=-\frac{a}{4}x^2+a$.

Gọi A,B là các giao điểm của (P_1) và trục $Ox\Rightarrow A(-2;0),B(2;0)\Rightarrow AB=4$.

Gọi A,B là giao điểm của (P_1) và đường thẳng $d\Rightarrow M\left(-\sqrt{4-a};a\right),N\left(\sqrt{4-a};a\right)$.

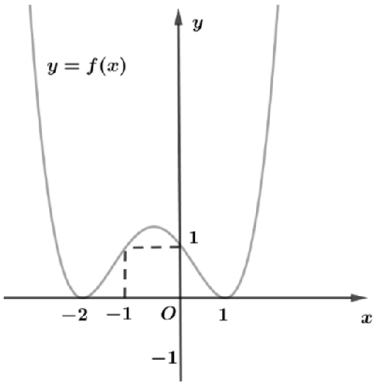
Ta có $S_1=2\int_a^4\sqrt{4-y}.dy=-\frac{4}{3}\left((4-y)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_a^4=\frac{4}{3}(4-a)\sqrt{4-a}$

$S_2=2\int_a^2\left(-\frac{a}{4}x^2+a\right).dx=2\left(-\frac{ax^3}{12}+ax\right)\Big|_0^2=\frac{8a}{3}$.

Theo giả thiết $S_1=S_2\Rightarrow\frac{4}{3}(4-a)\sqrt{4-a}=\frac{8a}{3}\Leftrightarrow(4-a)^3=4a^2\Leftrightarrow a^3-8a^2+48a=64$

Vậy $T=64$.

Câu 28. **(Tỉnh Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ.



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x);y=f'(x)$ có diện tích bằng

A. $\frac{127}{40}$. **B.** $\frac{127}{10}$. **C.** $\frac{107}{5}$. **D.** $\frac{13}{5}$.

Lời giải

Hàm số đã cho có dạng $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\Rightarrow f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$.

Từ giả thiết đồ thị hàm số đã cho ta thấy đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-2;0)$, $(-1;1)$, $(0;1)$, $(1;0)$ và có hai điểm cực tiểu là $(1;0),(-2;0)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} f(0)=1 \\ f(-2)=0 \\ f(1)=0 \\ f'(-2)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} e=1 \\ a+b+c+d=-1 \\ 16a-8b+4c-2d=-1 \\ -32a+12b-4c+d=0 \\ 4a+3b+2c+d=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} e=1 \\ a=\frac{1}{4} \\ b=\frac{1}{2} \\ c=\frac{-3}{4} \\ d=-1 \end{cases}.$$

Do đó $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2-x+1\Rightarrow f'(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $f(x)=f'(x)$.

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2=0\Leftrightarrow\begin{cases} x=-2 \\ x=-1 \\ x=1 \\ x=4 \end{cases}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=f(x);y=f'(x)$ là $S=\int_{-2}^{4}\left|f(x)-f'(x)\right|dx$

Vì biểu thức $f(x)-f'(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2$ không đổi dấu trên các khoảng $(-2;-1),(-1;1),(1;4)$ nên ta có

$$S=\left|\int_{-2}^{-1}\left[f(x)-f'(x)\right]dx\right|+\left|\int_{-1}^{1}\left[f(x)-f'(x)\right]dx\right|+\left|\int_{1}^{4}\left[f(x)-f'(x)\right]dx\right|=\frac{107}{5}(dvdt).$$

Câu 29. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my=x^2$, $mx=y^2\,(m>0)$. Tìm giá trị của m để $S=3$.

A. $m=1$ **B.** $m=2$ **C.** $m=3$ **D.** $m=4$

Lời giải

Chọn C

Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} my = x^2 \quad (1) \\ mx = y^2 \quad (2) \end{cases}$

Thế (1) vào (2) ta được: $mx = \left(\frac{x^2}{m}\right)^2 \Leftrightarrow m^3 x - x^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = m > 0 \end{array}\right.$

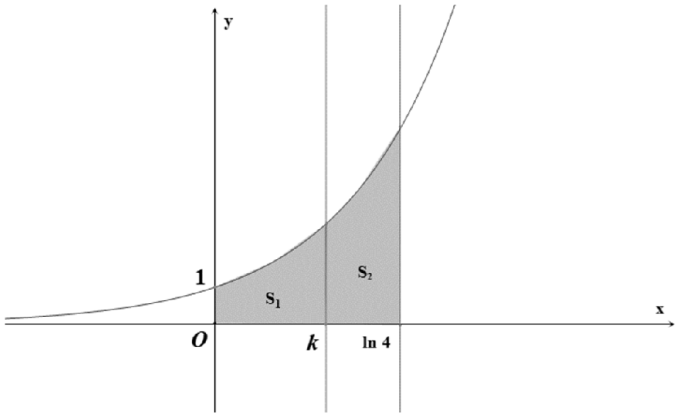
Vì $y = \frac{x^2}{m} > 0$ nên $mx = y^2 \xleftrightarrow{y>0} y = \sqrt{mx}$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là: $S = \int_0^m \left|\sqrt{mx} - \frac{x^2}{m}\right| dx = \left|\int_0^m \left(\sqrt{mx} - \frac{x^2}{m}\right) dx\right|$

$= \left|\left(\frac{2\sqrt{m}}{3}.x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3m}\right)\Big|_0^m\right| = \left|\frac{1}{3}m^2\right| = \frac{1}{3}m^2$

Yêu cầu bài toán $S = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}m^2 = 3 \Leftrightarrow m^2 = 9 \xleftrightarrow{m>0} m = 3$

Câu 30. **(THPT Cẩm Giàng 2 -2019)** Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ $(0 < k < \ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



A. $k = \frac{4}{3}\ln 2$. **B.** $k = \ln\frac{8}{3}$. **C.** $k = \ln 2$. **D.** $k = \ln 3$.

Lời giải

Diện tích hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$ là

$S = \int_0^{\ln 4} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\Big|_0^{\ln 4} = \mathrm{e}^{\ln 4} - \mathrm{e}^0 = 4 - 1 = 3$ (đvdt).

Ta có $S = S_1 + S_2 = S_1 + \frac{1}{2}S_1 = \frac{3}{2}S_1$. Suy ra $S_1 = \frac{2S}{3} = \frac{2.3}{3} = 2$ (đvdt).

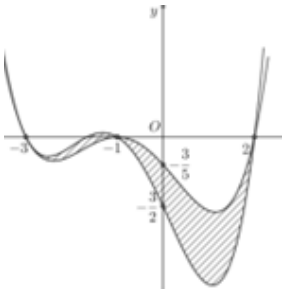
Vì S_1 là phần diện tích được giới hạn bởi các đường $y = \mathrm{e}^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = k$ nên

$2 = S_1 = \int_0^k \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\Big|_0^k = \mathrm{e}^k - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^k - 1$.

Do đó $\mathrm{e}^k = 3 \Leftrightarrow k = \ln 3$.

Câu 31. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Biết rằng đồ thị cảu hai hàm số này cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là

$-3;-1;2$. Diện tích của hình phẳng (H) (phần gạch sọc trên hình vẽ bên) **gần nhất** với kết quả nào dưới đây?



A. 3,11 **B.** 2,45 **C.** 3,21 **D.** 2,95

Lời giải

Chọn A

$f(x)-g(x)=a(x+3)(x+1)(x-2)=(ax+3a)(x^2-x-2)=ax^3-ax^2-2ax+3ax^2-3ax-6a$

$=ax^3+2ax^2-5ax-6a$

$f(0)-g(0)=-6a$, quan sát hình vẽ ta có $f(0)-g(0)=-\frac{3}{5}+\frac{3}{2}=\frac{9}{10}$

Nên $-6a=\frac{9}{10}\Rightarrow a=\frac{-3}{20}$ $S=\int_{-3}^{2}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_{-3}^{2}\left|\frac{-3}{20}(x+3)(x+1)(x-2)\right|dx=\frac{253}{80}=3.1625$

Câu 32. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Cho parabol $(P):y=x^2$ và hai điểm A,B thuộc (P) sao cho $AB=2$. Diện tích lớn nhất của hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB là

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Gọi phương trình đường thẳng AB là: $y=ax+b$ $(a,b\in\mathbb{R})$

Phương trình giao điểm của AB và (P) là: $x^2-ax-b=0$

Để có 2 điểm A,B thì $a^2+4b>0$. khi đó: $\begin{cases}A(x_1;ax_1+b)\\B(x_2;ax_2+b)\\x_1+x_2=a\\x_1x_2=-b\end{cases}$

Nên $AB=2\Leftrightarrow\sqrt{(a^2+1)}\left|x_2-x_1\right|=2$

Giả sử $x_2>x_1$ ta có $\left|x_2-x_1\right|=\frac{2}{\sqrt{(a^2+1)}}\le 2$

Mặt khác: $\left|x_2-x_1\right|=\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_1x_2}=\sqrt{a^2+4b}$

Khi đó $S=\int_{x_1}^{x_2}ax+b-x^2\mathrm{d}x=\frac{a}{2}(x_2^2-x_1^2)+b(x_2-x_1)-\frac{1}{3}(x_2^3-x_1^3)$

$=(x_2-x_1)\left[\frac{a}{2}(x_2+x_1)+b-\frac{1}{3}(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)\right]$

$=(x_2-x_1)\left[\frac{a}{2}.a+b-\frac{1}{3}(a^2+b)\right]=(x_2-x_1)\left[\frac{a^2}{b}+\frac{2b}{3}\right]=\frac{a^2+4b}{6}(x_2-x_1)=\frac{(x_2-x_1)^3}{6}\le\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$.

Suy ra: $S_{max}=\frac{4}{3}$ khi $\begin{cases}a=0\\x_2-x_1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_1=x_2=1\end{cases}$ (thỏa mãn vì (P) có tính đối xứng)

$\Rightarrow\begin{cases}A(1;1)\\B(-1;1)\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}A(-1;1)\\B(1;1)\end{cases}$.

Câu 33. **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho Parabol $(P):y=x^2+1$ và đường thẳng $d:y=mx+2$ với m là tham số. Gọi m_0 là giá trị của m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và d là nhỏ nhất. Hỏi m_0 nằm trong khoảng nào?

A. $(-\sqrt{2};-\frac{1}{2})$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;\frac{1}{\sqrt{2}})$. **D.** $(\frac{1}{2};3)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ của (P) và d là $x^2-mx-1=0\ (1)$.

Dễ thấy (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt. Gọi $a, b\ (a<b)$ là các nghiệm của (1) thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và d là

$$S=\int_a^b\left|x^2-mx-1\right|dx=\left|\int_a^b\left(x^2-mx-1\right)dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{mx^2}{2}-x\right)\right|_a^b\left|\right.$$

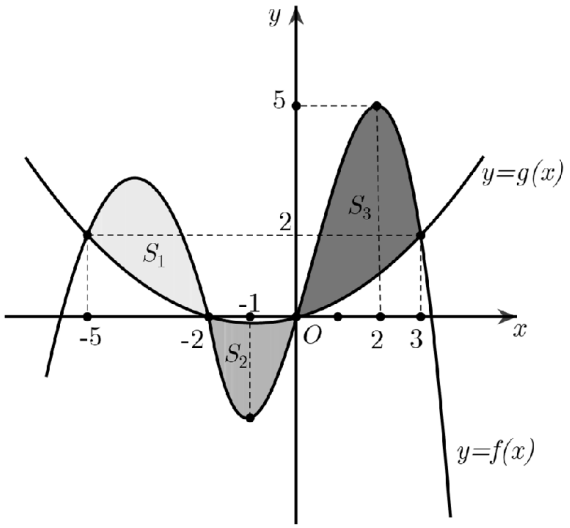
$$=\left|\frac{b^3-a^3}{3}-\frac{m(b^2-a^2)}{2}-(b-a)\right|=|b-a|.\left|\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{m(b+a)}{2}-1\right|$$

$$=\sqrt{(b+a)^2-4ab}.\left|\frac{(b+a)^2-ab}{3}-\frac{m(b+a)}{2}-1\right|$$

Mà $a+b=m,\ ab=-1$ nên $S=\sqrt{m^2+4}.\left(\frac{m^2}{6}+\frac{2}{3}\right)\geq\frac{4}{3}$.

Do đó $\min S=\frac{4}{3}$ khi $m=0$.

Câu 34. **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5;3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và đường parabol $y=g(x)=ax^2+bx+c$ lần lượt là m,n,p.



Tích phân $\int_{-5}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-m+n-p-\frac{208}{45}$. **B.** $m-n+p+\frac{208}{45}$ **C.** $m-n+p-\frac{208}{45}$. **D.** $-m+n-p+\frac{208}{45}$.

Lời giải

Chọn B

$S_1=\int_{-5}^{-2}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_{-5}^{-2}f(x)\mathrm{d}x-\int_{-5}^{-2}g(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_{-5}^{-2}f(x)\mathrm{d}x=S_1+\int_{-5}^{-2}g(x)\mathrm{d}x$.

$S_2=\int_{-2}^{0}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}g(x)\mathrm{d}x-\int_{-2}^{0}f(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_{-2}^{0}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}g(x)\mathrm{d}x-S_2$.

$S_3=\int_{-5}^{-2}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_{0}^{3}f(x)\mathrm{d}x-\int_{0}^{3}g(x)\mathrm{d}x\Rightarrow\int_{0}^{3}f(x)\mathrm{d}x=S_1+\int_{0}^{3}g(x)\mathrm{d}x$.

Do vậy: $\int_{-5}^{3}f(x)dx=S_1-S_2+S_3+\int_{-5}^{3}g(x)dx$.

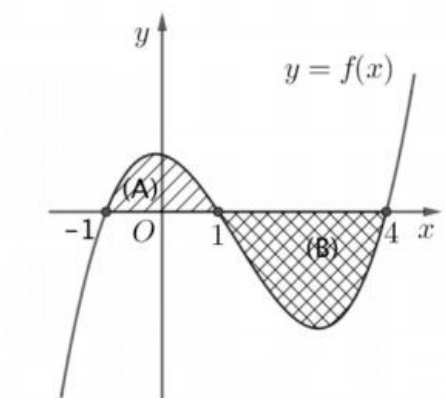
Từ đồ thị ta thấy $\int_{-5}^{3}g(x)dx$ là số dương. Mà 4 đáp án chỉ có B là phù hợp, nên ta chọn **B.**

Chú ý: Có thể tính $\int_{-5}^{3}g(x)dx$ như sau:

Từ đồ thị hàm số $y=g(x)$ ta thấy nó đi qua các điểm $(-5;2),(-2;0),(0;0)$ nên ta có:

$\begin{cases}25a-5b+c=2\\4a-2b+c=0\\c=0\end{cases}\Rightarrow a=\frac{2}{15},\ b=\frac{4}{15},\ c=0$. Do đó: $\int_{-5}^{3}g(x)\mathrm{d}x=\int_{-5}^{3}\left(\frac{2}{15}x^2+\frac{4}{15}x\right)\mathrm{d}x=\frac{208}{45}$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng diện tích các phần $(A),(B)$ lần lượt bằng 3 và 7. Tích phân $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f(5\sin x-1)\mathrm{d}x$ bằng



A. $-\frac{4}{5}$ **B.** 2 **C.** $\frac{4}{5}$ **D.** -2

Lời giải

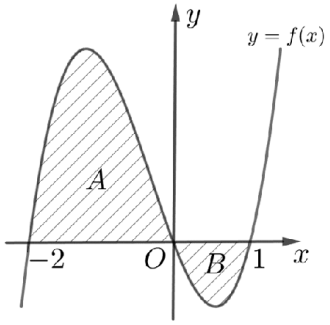
Chọn A

Theo giả thiết ta có $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ và $\int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = -7$ suy ra $\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = -4$.

Đặt $t = 5\sin x - 1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 5\cos x\,\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x . f(5\sin x - 1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int_{-1}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{4}{5}$.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và diện tích hai phần A, B lần lượt bằng 11 và 2.



Giá trị của $I = \int_{-1}^{0} f(3x+1)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** $\frac{13}{3}$. **C.** 9. **D.** 13.

Lời giải

Chọn A

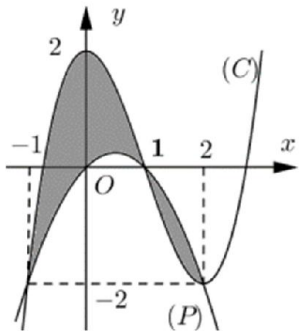
+) Xét $I = \int_{-1}^{0} f(3x+1)\,\mathrm{d}x$, đặt $(3x+1) = t \Rightarrow dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$

+) Đổi cận $\begin{cases} x = -1 \Rightarrow t = -2 \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow I = \frac{1}{3}\int_{-2}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left[\int_{-2}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t\right] = \frac{1}{3}(S_A - S_B) = \frac{1}{3}(11-2) = 3$

Câu 37. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol

(P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** của hình vẽ có diện tích bằng



A. $\frac{37}{12}$. **B.** $\frac{7}{12}$. **C.** $\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

Lời giải

Cách 1:

Gọi hàm số bậc ba là $y=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow y'=3ax^2+2bx+c$.

Đồ thị (C) đi qua các điểm $(1;0),(2;-2)$ và đạt cực trị tại $x=0;x=2$ nên ta có hệ sau :

$$\begin{cases}0=a+b+c+d\\-2=8a+4b+2c+d\\0=c\\0=12a+4b+c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-3\\c=0\\d=2\end{cases}.$$

Suy ra hàm số bậc ba là $y=x^3-3x^2+2$.

Gọi hàm bậc hai là $y=mx^2+nx+p$. Đồ thị (P) đi qua các điểm $(1;0),(2;-2),(-1;-2)$ nên ta có hệ sau :

$$\begin{cases}0=m+n+p\\-2=4m+2n+p\\-2=m-n+p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-1\\n=1\\p=0\end{cases}.$$

Suy ra hàm số bậc hai là $y=-x^2+x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và

(P) là : $x^3-3x^2+2=-x^2+x\Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Vậy diện tích phần tô đậm là :

$$S=\int_{-1}^{2}\left|\left(x^3-2x^2-x+2\right)\right|dx\ .\ S=\left|\int_{-1}^{1}\left(x^3-2x^2-x+2\right)dx\right|+\left|\int_{1}^{2}\left(x^3-2x^2-x+2\right)dx\right|=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}.$$

Cách 2:

Vì đồ thị hàm bậc ba và đồ thị hàm bậc hai cắt trục tung tại các điểm có tung độ lần lượt là $y=2,y=0$ nên ta xét hai hàm số là $y=ax^3+bx^2+cx+2$, $y=mx^2+nx$.

* Vì đồ thị hai hàm số cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là $x=-1;x=1;x=2$ nên ta có phương trình hoành độ giao điểm:

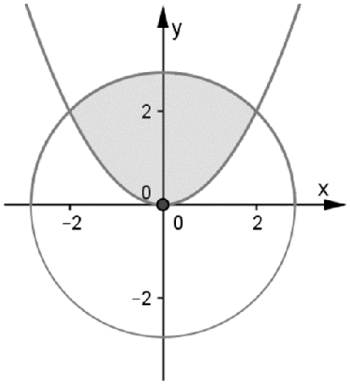
$ax^3+bx^2+cx+2=mx^2+nx\Leftrightarrow a(x+1)(x-1)(x-2)=0$. Với $x=0$ ta được $2a=2\rightarrow a=1$.

*Vậy diện tích phần tô đậm là: $S=\int_{-1}^{2}\left|(x+1)(x-1)(x-2)\right|dx=\frac{37}{12}$.

Câu 38. **(Việt Đức Hà Nội -2019)** Parabol $y=\dfrac{x^2}{2}$ chia hình tròn có tâm là gốc tọa độ, bán kính bằng $2\sqrt{2}$ thành hai phần có diện tích S_1 và S_2, trong đó $S_1<S_2$. Tìm tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$.

A. $\dfrac{3\pi+2}{12\pi}$. **B.** $\dfrac{9\pi-2}{3\pi+2}$. **C.** $\dfrac{3\pi+2}{9\pi-2}$. **D.** $\dfrac{3\pi+2}{21\pi-2}$.

Lời giải



Diện tích hình tròn là $S=\pi R^2=8\pi$.

Phương trình đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính $R=2\sqrt{2}$ là $x^2+y^2=8$.

Hoành độ giao điểm của Parabol và đường tròn là nghiệm của phương trình

$$x^2+\frac{x^4}{4}=8\Leftrightarrow x^4+4x^2-32=0\Leftrightarrow\left(x^2+8\right)\left(x^2-4\right)=0\Leftrightarrow x^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$$

Phương trình nửa phía trên trục Ox của đường tròn là: $y=\sqrt{8-x^2}$.

Diện tích miền giới hạn bởi Parabol và nửa phía trên trục Ox của đường tròn là:

$$\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=\int_{-2}^{2}\sqrt{8-x^2}dx-\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}x^2dx$$

Ta có $\displaystyle\int_{-2}^{2}x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}=\frac{16}{3}$.

$$I=\int_{-2}^{2}\sqrt{8-x^2}dx$$

Đặt $x=2\sqrt{2}\sin t\ \left(t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\right)\Rightarrow dx=2\sqrt{2}\cos tdt$

+) $x=-2\Rightarrow t=-\dfrac{\pi}{4}$

+) $x=2\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$.

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{8-8\sin^2t}.2\sqrt{2}\cos tdt=8\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2tdt=4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\cos 2t\right)dt=4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\cos 2t\right)dt$$

$$=4\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=2\pi+4.$$

Vậy $\int\limits_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=2\pi+\frac{4}{3}$.

Diện tích phần còn lại là $8\pi-\left(2\pi+\frac{4}{3}\right)=6\pi-\frac{4}{3}$.

Vậy $S_1=2\pi+\frac{4}{3};\ S_2=6\pi-\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$

Câu 39. Tìm số thực a để hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $y=\frac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^6}$ và $y=\frac{a^2-ax}{1+a^6}$ có diện tích lớn nhất.

A. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\sqrt[3]{3}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là:

$$\frac{x^2+2ax+3a^2}{1+a^6}=\frac{a^2-ax}{1+a^6}\Leftrightarrow x^2+3ax+2a^2=0\Leftrightarrow(x+a)(x+2a)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-a\\x=-2a\end{array}\right.$$

□□Nếu $a=0$ thì diện tích hình phẳng $S=0$.

+ Nếu $a>0$ thì $S=\int\limits_{-2a}^{-a}\left|\frac{x^2+3ax+2a^2}{1+a^6}\right|\mathrm{d}x=-\int\limits_{-2a}^{-a}\frac{x^2+3ax+2a^2}{1+a^6}\mathrm{d}x=\frac{1}{6}.\frac{a^3}{1+a^6}$.

+ Nếu $a<0$ thì $S=\int\limits_{-a}^{-2a}\left|\frac{x^2+3ax+2a^2}{1+a^6}\right|\mathrm{d}x=-\int\limits_{-a}^{-2a}\frac{x^2+3ax+2a^2}{1+a^6}\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}.\frac{a^3}{1+a^6}$.

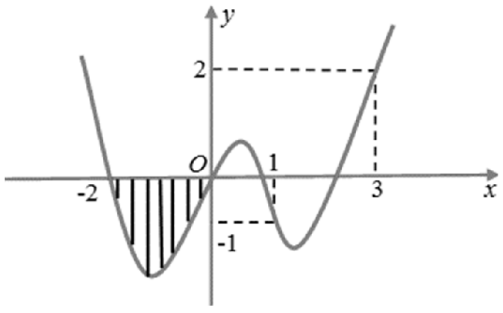
Do đó, với $a\neq0$ thì $S=\frac{1}{6}.\frac{|a|^3}{1+|a|^6}\le\frac{1}{6}.\frac{|a|^3}{2|a|^3}=\frac{1}{12}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $|a|^3=1\Leftrightarrow a=\pm1$.

Vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai hàm đã cho có diện tích lớn nhất khi $a=1$.

Câu 40. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Biết diện tích hình phẳng phần sọc kẻ bằng 3. Tính giá trị của biểu thức:

$$T=\int\limits_{1}^{2}f'(x+1)\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{3}f'(x-1)\mathrm{d}x+\int\limits_{3}^{4}f(2x-8)\mathrm{d}x$$



A. $T=\frac{9}{2}$. **B.** $T=6$. **C.** $T=0$. **D.** $T=\frac{3}{2}$.

Lời giải

Diện tích phần kẻ sọc là: $S=\int\limits_{-2}^{0}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{dx}\ =3$.

Vì $f\left(x\right)\le 0\ \ \forall x\in\left[-2;0\right]\Rightarrow 3=\int\limits_{-2}^{0}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{dx}=\int\limits_{-2}^{0}\left[-f\left(x\right)\right]\mathrm{dx}\Leftrightarrow\int\limits_{-2}^{0}f\left(x\right)\mathrm{dx}=-3$.

Tính $I=\int\limits_{3}^{4}f\left(2x-8\right)\mathrm{dx}$.

Đặt $t=2x-8\ \Rightarrow\mathrm{dt}=2\mathrm{dx}$; $x=3\Rightarrow t=-2$; $x=4\Rightarrow t=0$.

Suy ra: $I=\int\limits_{-2}^{0}f\left(t\right).\frac{1}{2}\mathrm{dt}=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0}f\left(x\right)\mathrm{dx}\ =-\frac{3}{2}$.

Vậy $T=\int\limits_{1}^{2}f'\left(x+1\right)\mathrm{dx}+\int\limits_{2}^{3}f'\left(x-1\right)\mathrm{dx}+\int\limits_{3}^{4}f\left(2x-8\right)\mathrm{dx}$

$=f\left(x+1\right)\Big|_{1}^{2}+f\left(x-1\right)\Big|_{2}^{3}+I=f\left(3\right)-f\left(2\right)+f\left(2\right)-f\left(1\right)-\frac{3}{2}\ =2-\left(-1\right)-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$.

Câu 41. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Cho hàm số $y=x^4-6x^2+m$ có đồ thị $\left(C_m\right)$. Giả sử $\left(C_m\right)$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi $\left(C_m\right)$ và trục hoành có phần phía trên trục hoành và phần phía dưới trục hoành có diện tích bằng nhau. Khi đó $m=\frac{a}{b}$ (với a, b là các số nguyên, $b>0$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của biểu thức $S=a+b$ là:

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^4-6x^2+m=0\ \left(1\right)$.

Đặt $t=x^2\ \left(t\ge 0\right)\left(1\right)$ trở thành $t^2-6t+m=0\ \ \left(2\right)$.

$\left(C_m\right)$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt thì phương trình $\left(1\right)$ có 4 nghiệm phân biệt hay phương trình $\left(2\right)$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=\left(-3\right)^2-m>0\\ P=m>0\\ S=6>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<9\ \left(*\right)$.

Gọi t_1, $t_2\ \left(0<t_1<t_2\right)$ là hai nghiệm của phương trình $\left(2\right)$. Lúc đó phương trình $\left(1\right)$ có bốn nghiệm phân biệt theo thứ tự tăng dần là: $x_1=-\sqrt{t_2}$; $x_2=-\sqrt{t_1}$; $x_3=\sqrt{t_1}$; $x_4=\sqrt{t_2}$.

Do tính đối xứng của đồ thị $\left(C_m\right)$ nên có $\int\limits_{0}^{x_3}\left(x^4-6x^2+m\right)\mathrm{dx}$

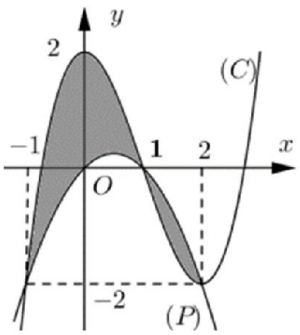
$=\int\limits_{x_3}^{x_4}\left(-x^4+6x^2-m\right)\mathrm{dx}\Rightarrow\frac{x_4^5}{5}-2x_4^3+mx_4=0\Leftrightarrow x_4^5-10x_4^3+5mx_4=0$.

Từ đó có x_4 là nghiệm của hệ phương trình: $\Leftrightarrow \begin{cases} x_4^4 - 6x_4^2 + m = 0 \quad (3) \\ x_4^4 - 10x_4^2 + 5m = 0 \, (4) \end{cases}$

Lấy $(3)-(4) \Rightarrow x_4^2 = m$, thay $x_4^2 = m$ vào (3) có: $m^2 - 5m = 0 \Rightarrow m = 0 \vee m = 5$.

Đối chiếu điều kiện $(*)$ ta có $m = 5 \Rightarrow a = 5$ và $b = 1$. Vậy $S = 6$.

Câu 42. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** như hình vẽ có diện tích bằng



A. $\frac{37}{12}$. **B.** $\frac{7}{12}$. **C.** $\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

Lời giải

Chọn A

+) Gọi $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$

Do (C) cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng 2 nên $d = 2$

(C) đi qua 3 điểm $A(-1;-2)$, $B(1;0)$ và $C(2;-2)$ nên ta được hệ phương trình

$\begin{cases} -a+b-c=-4 \\ a+b+c=-2 \\ 4a+2b+c=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=0 \end{cases}$. Do đó $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$

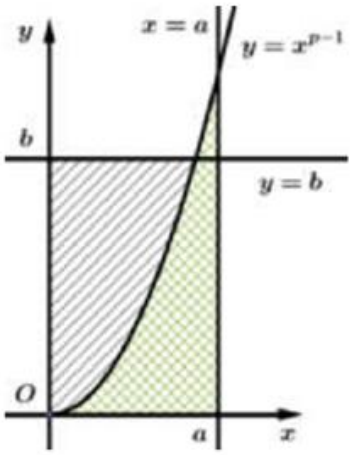
+) Gọi $(P): y = mx^2 + nx + r (m \neq 0)$

Do (P) đi qua 3 điểm $a(-1;-2)$, $O(0;0)$ và $C(2;-2)$ nên ta được

$\begin{cases} m-n+r=-2 \\ r=0 \\ 4m+2n+r=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ r=0 \\ n=1 \end{cases}$. Do đó $(P): y = -x^2 + x$

Vậy $S_{(H)} = \int_{-1}^{2} \left| x^3 - 2x^2 - x + 2 \right| dx \overset{MTCT}{=} \frac{37}{12}$

Câu 43. **(Chuyên Hạ Long - 2018)** Cho các số p, q thỏa mãn các điều kiện: $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ và các số dương a, b. Xét hàm số: $y = x^{p-1} (x > 0)$ có đồ thị là (C). Gọi (S_1) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành, đường thẳng $x = a$, Gọi (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C), trục tung, đường thẳng $y = b$, Gọi (S) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và hai đường thẳng $x = a$, $y = b$. Khi so sánh $S_1 + S_2$ và S ta nhận được bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức dưới đây?



A. $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\le ab$ **B.** $\frac{a^{p-1}}{p-1}+\frac{b^{q-1}}{q-1}\ge ab$. **C.** $\frac{a^{p+1}}{p+1}+\frac{b^{q+1}}{q+1}\le ab$. **D.** $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\ge ab$.

Lời giải

Ta có: $S\le S_1+S_2$.

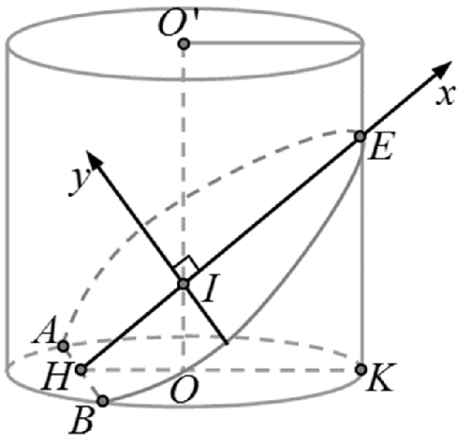
$$S_1=\int_0^a\left(x^{p-1}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^p}{p}\right)\Big|_0^a=\frac{a^p}{p};\ S_2=\int_0^b\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right)\mathrm{d}y=\left(\frac{y^{\frac{1}{p-1}+1}}{\frac{1}{p-1}+1}\right)\Big|_0^b=\left(\frac{y^q}{q}\right)\Big|_0^b=\frac{b^q}{q}.$$

Vì: $\frac{1}{p-1}+1=\frac{p}{p-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=\frac{1}{\frac{1}{q}}=q$. Vậy $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\ge ab$.

Câu 44. **(Hà Nội - 2018)** Cho khối trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$, $OO'=4R$. Trên đường tròn $(O;R)$ lấy hai điểm A, B sao cho $AB=a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B cắt đoạn OO' và tạo với đáy một góc $60°$, (P) cắt khối trụ theo thiết diện là một phần của elip. Diện tích thiết diện đó bằng

A. $\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$. **B.** $\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. **C.** $\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$. **D.** $\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

Lời giải



Cách 1: Gọi I, H, K, E là các điểm như hình vẽ.

* Ta có: $\widehat{IHO}=60°$

$OH^2 = OB^2 - BH^2 = R^2 - \dfrac{3R^2}{4} = \dfrac{R^2}{4} \Rightarrow OH = \dfrac{R}{2} \Rightarrow OI = OH.\tan 60° = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$, $IH = \dfrac{OH}{\cos 60°} = R$,

$\Delta IOH \sim \Delta EKH$ nên ta có: $\dfrac{IE}{IH} = \dfrac{OK}{OH} = 2 \Rightarrow IE = 2R$.

* Chọn hệ trục tọa độ Ixy như hình vẽ ta có elip (E) có bán trục lớn là $a = IE = 2R$ và (E) đi qua $A\left(-R; \dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)$ nên (E) có phương trình là $(E): \dfrac{x^2}{4R^2} + \dfrac{y^2}{R^2} = 1$.

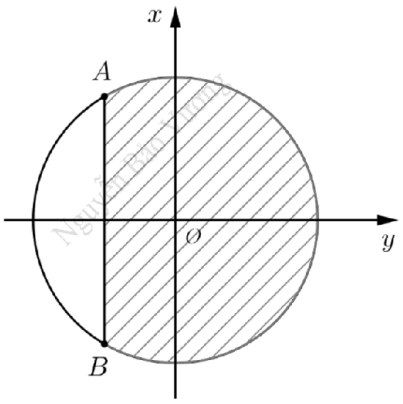
* Diện tích của thiết diện là $S = 2\int\limits_{-R}^{2R} R\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4R^2}}\mathrm{d}x = 2R\int\limits_{-R}^{2R}\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4R^2}}\mathrm{d}x$

* Xét tích phân: $I = \int\limits_{-R}^{2R}\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4R^2}}\mathrm{d}x$, đặt $x = 2R.\sin t;\ t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ ta được

$I = \dfrac{R}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{R}{2}\left(t + \dfrac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{8}\right)R \Rightarrow S = \left(\dfrac{4\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$.

Cách 2: $\cos\widehat{AOB} = \dfrac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2.OA.OB} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AOB} = 120° \Rightarrow OH = \dfrac{R}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ



$\Rightarrow$ Phương trình đường tròn đáy là $x^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$.

Hình chiếu của phần elip xuống đáy là miền sọc xanh như hình vẽ.

Ta có $S = 2\int\limits_{-\frac{R}{2}}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$. Đặt $x = R.\sin t \Rightarrow S = \left(\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$.

Gọi diện tích phần elip cần tính là S'.

Theo công thức hình chiếu, ta có $S' = \dfrac{S}{\cos 60°} = 2S = \left(\dfrac{4\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

Câu 45. **(Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2018)** Cho parabol $(P): y = x^2$ và một đường thẳng d thay đổi cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2018$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng d. Tìm giá trị lớn nhất S_{max} của S.

A. $S_{max} = \dfrac{2018^3 + 1}{6}$. **B.** $S_{max} = \dfrac{2018^3}{3}$. **C.** $S_{max} = \dfrac{2018^3 - 1}{6}$. **D.** $S_{max} = \dfrac{2018^3}{3}$.

Lời giải

Giả sử $A(a; a^2)$; $B(b; b^2)(b > a)$ sao cho $AB = 2018$.

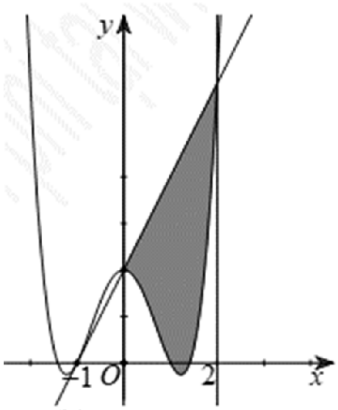
Phương trình đường thẳng d là: $y=(a+b)x-ab$. Khi đó

$S=\int\limits_a^b\left|(a+b)x-ab-x^2\right|\mathrm{d}x=\int\limits_a^b\left((a+b)x-ab-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}(b-a)^3$.

Vì $AB=2018\Leftrightarrow(b-a)^2+\left(b^2-a^2\right)^2=2018^2\Leftrightarrow(b-a)^2\left(1+(b+a)^2\right)=2018^2$.

$\Rightarrow(b-a)^2\le 2018^2\Rightarrow|b-a|=b-a\le 2018\Rightarrow S\le\frac{2018^3}{6}$. Vậy $S_{\max}=\frac{2018^3}{6}$ khi $a=-1009$ và $b=1009$.

Câu 46. **(Chuyên KHTN - 2018)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị (C), biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1;0)$, tiếp tuyến d tại A của (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d, đồ thị (C) và hai đường thẳng $x=0$; $x=2$ có diện tích bằng $\frac{28}{5}$ (phần tô màu trong hình vẽ).



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và hai đường thẳng $x=-1$; $x=0$ có diện tích bằng

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{2}{9}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Ta có $y'=4ax^3+2bx\Rightarrow d:y=(-4a-2b)(x+1)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $(-4a-2b)(x+1)=ax^4+bx^2+c\,(1)$.

Phương trình (1) phải cho 2 nghiệm là $x=0$, $x=2$.

$\Rightarrow\begin{cases}-4a-2b=c\\-12a-6b=16a+4b+c\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-4a-2b-c=0\,(2)\\28a+10b+c=0\,(3)\end{cases}$.

Mặt khác, diện tích phần tô màu là $\frac{28}{5}=\int\limits_0^2\left[(-4a-2b)(x+1)-ax^4-bx^2-c\right]\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow\frac{28}{5}=4(-4a-2b)-\frac{32}{5}a-\frac{8}{3}b-2c\Leftrightarrow\frac{112}{5}a+\frac{32}{3}b+2c=-\frac{28}{5}\,(4)$.

Giải hệ 3 phương trình (2), (3) và (4) ta được $a=1$, $b=-3$, $c=2$.

Khi đó, $(C):y=x^4-3x^2+2$, $d:y=2(x+1)$.

Diện tích cần tìm là $S=\int\limits_{-1}^{0}\left[x^4-3x^2+2-2\left(x+1\right)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}\left(x^4-3x^2-2x\right)dx=\frac{1}{5}$.

Câu 47. **(THPT Tứ Kỳ - Hải Dương - 2018)** Đặt S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=4-x^2$, trục hoành và đường thẳng $x=-2$, $x=m$, $\left(-2<m<2\right)$. Tìm số giá trị của tham số m để $S=\frac{25}{3}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $S=\int\limits_{-2}^{m}\left|4-x^2\right|\mathrm{d}x=\frac{25}{3}$.

Phương trình $4-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm2$.

Bài ra $-2<m<2$ nên trên $\left(-2;m\right)$ thì $4-x^2=0$ vô nghiệm.

$$\int\limits_{-2}^{m}\left|4-x^2\right|\mathrm{d}x=\frac{25}{3}\Leftrightarrow\left|\int\limits_{-2}^{m}\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x\right|=\frac{25}{3}\Leftrightarrow\left|\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{-2}^{m}\Bigg|=\frac{25}{3}$$

$$\Leftrightarrow\left|\left(4m-\frac{m^3}{3}\right)-\left(-8+\frac{8}{3}\right)\right|=\frac{25}{3}\Leftrightarrow\left|4m-\frac{m^3}{3}+\frac{16}{3}\right|=\frac{25}{3}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4m-\frac{m^3}{3}+\frac{16}{3}=\frac{25}{3}\\4m-\frac{m^3}{3}+\frac{16}{3}=-\frac{25}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{1}{3}m^3-4m+3=0\\\frac{1}{3}m^3-4m-\frac{41}{3}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^3-12m+9=0\\m^3-12m-41=0\end{array}\right.\quad(1)$$

Nguyễn Bảo Vương

Xét hàm số $f\left(m\right)=m^3-12m$, với $m\in\left(-2;2\right)$ có

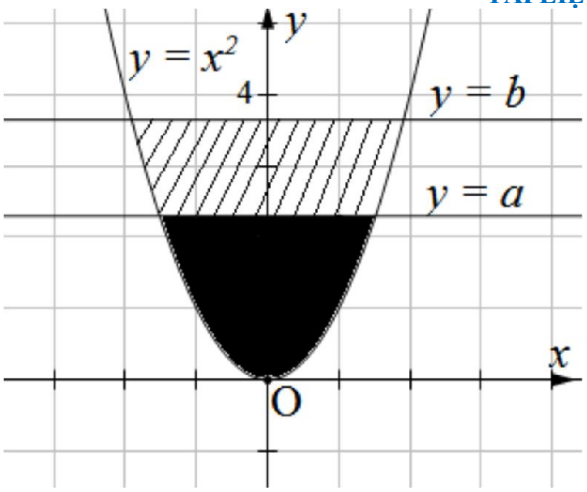
$$f'\left(m\right)=3m^2-12=3\left(m^2-4\right)<0,\ \forall m\in\left(-2;2\right).$$

Do đó $f\left(m\right)$ nghịch biến trên $\left(-2;2\right)\Rightarrow f\left(m\right)<f\left(-2\right)=16\Rightarrow m^3-12m-41<0$.

Khi đó $\left(1\right)\Leftrightarrow m^3-12m+9=0\Leftrightarrow\left(m-3\right)\left(m^2+3m-3\right)=0\Rightarrow m=\frac{\sqrt{21}-3}{2}$ thỏa mãn.

Vậy chỉ có $m=\frac{\sqrt{21}-3}{2}$ thỏa mãn bài toán.

Câu 48. **(THPT Mộ Đức - Quảng Ngãi - 2018)** Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho parabol $\left(P\right):y=x^2$ và hai đường thẳng $y=a$, $y=b$ $\left(0<a<b\right)$ (hình vẽ). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $\left(P\right)$ và đường thẳng $y=a$ (phần tô đen); $\left(S_2\right)$ là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $\left(P\right)$ và đường thẳng $y=b$ (phần gạch chéo). Với điều kiện nào sau đây của a và b thì $S_1=S_2$?



A. $b=\sqrt[3]{4}a$. **B.** $b=\sqrt[3]{2}a$. **C.** $b=\sqrt[3]{3}a$. **D.** $b=\sqrt[3]{6}a$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): y=x^2$ với đường thẳng $y=b$ là

$x^2=b \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{b}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): y=x^2$ với đường thẳng $y=a$ là

$x^2=a \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{a}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $y=b$ là

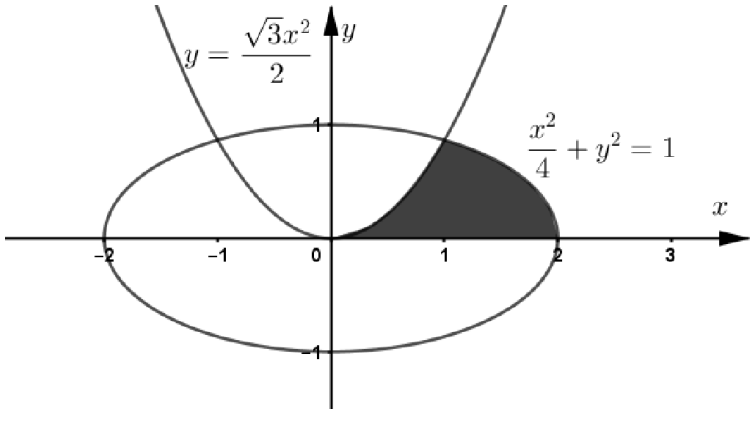
$$S=2\int_0^{\sqrt{b}}\left(b-x^2\right)\mathrm{d}x=2\left(bx-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{\sqrt{b}}=2\left(b\sqrt{b}-\frac{b\sqrt{b}}{3}\right)=\frac{4b\sqrt{b}}{3}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $y=a$ (phần tô màu đen) là

$$S_1=2\int_0^{\sqrt{a}}\left(a-x^2\right)\mathrm{d}x=2\left(ax-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{\sqrt{a}}=2\left(a\sqrt{a}-\frac{a\sqrt{a}}{3}\right)=\frac{4a\sqrt{a}}{3}.$$

Do đó $S=2S_1 \Leftrightarrow \frac{4b\sqrt{b}}{3}=2.\frac{4a\sqrt{a}}{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{b}\right)^3=2\left(\sqrt{a}\right)^3 \Leftrightarrow \sqrt{b}=\sqrt[3]{2}\sqrt{a} \Leftrightarrow b=\sqrt[3]{4}a$.

Câu 49. **(THPT Yên Khánh A - 2018)** Cho hình phẳng giới hạn bởi Elip $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, parabol $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ) có diện tích $T=\frac{a}{b}\pi+\frac{c}{d}\sqrt{3}$ (với $a,c\in\mathbb{Z}; b,d\in\mathbb{N}^*; \frac{a}{b},\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản). Tính $S=a+b+c+d$.



A. $S=32$. **B.** $S=10$. **C.** $S=15$. **D.** $S=21$.

Lời giải

Ta có: $\frac{x^2}{4}+y^2=1\Rightarrow y=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$

Hoành độ giao điểm (E') $y=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ và parabol $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ là

$\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2\Rightarrow 3x^4+x^2-4=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=1$ (theo hình vẽ thì $x>0$)

Vậy $T=\int_0^1\frac{\sqrt{3}}{2}x^2dx+\int_1^2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx$

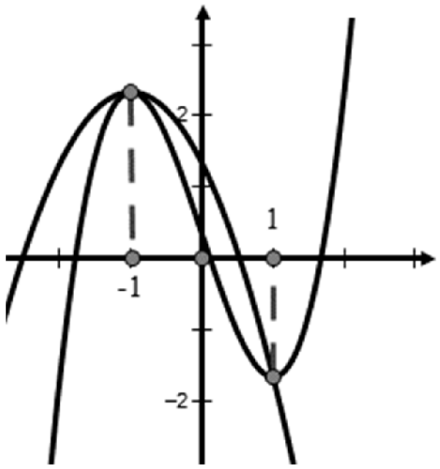
Mà $\int_0^1\frac{\sqrt{3}}{2}x^2dx=\left.\frac{\sqrt{3}x^3}{6}\right|_0^1=\frac{\sqrt{3}}{6}$

Ta có: $I=\int_1^2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx=\frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{4-x^2}dx$. Đặt $x=2\cos t$ ta có:

$\int_1^2\sqrt{4-x^2}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^0\sqrt{4\sin^2 t}.(-2\sin t)dt=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 tdt=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2t)dt=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Do đó $T=\frac{1}{3}.\pi+\frac{-1}{12}.\sqrt{3}$ nên $S=15$

Câu 50. Cho hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c\ (a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị (C) và $y=mx^2+nx+p\ (m,n,p\in\mathbb{R})$ có đồ thị (P) như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) có giá trị nằm trong khoảng nào sau đây?



A. $(0;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Căn cứ đồ thị ta thấy

+ Hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ đạt cực trị tại $x=\pm1$ nên ta có

$$\begin{cases}y'(1)=0\\y'(-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b+3=0\\-2a+b+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=-3\end{cases}.$$

+ Hàm số $y=mx^2+nx+p$ đạt cực đại tại $x=-1$ và (P) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ $x=\pm 1$ nên ta có

$$\begin{cases}-2m+n=0\\1+a+b+c=m+n+p\\-1+a-b+c=m-n+p\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n=-2\\m=-1\\p-c=1\end{cases}$$

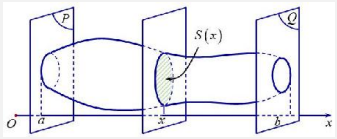
Suy ra $S=\int_{-1}^{1}\left(mx^2+nx+p-x^3-ax^2-bx-x\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(-x^3-x^2+x+1\right)dx=\frac{4}{3}\in(1;2)$

Nguyễn Bảo Vương

Dạng 2. Ứng dụng tích phân để tìm thể tích

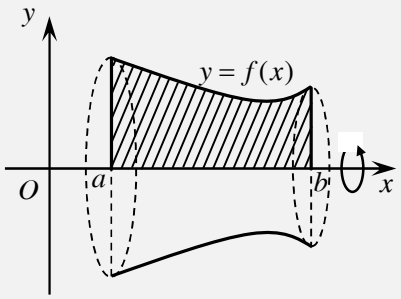
① *Thể tích vật thể*

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b, $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $\boxed{V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x}$.



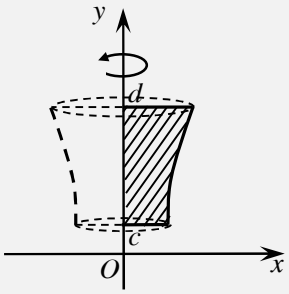
② *Thể tích khối tròn xoay*

a) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox:*



$$\begin{cases}(C): y = f(x)\\ (Ox): y = 0\\ x = a\\ x = b\end{cases} \qquad \boxed{V_x = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx}$$

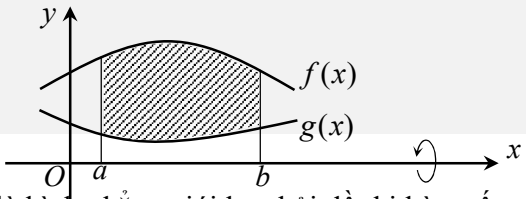
b) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy:*



$$\begin{cases}(C): x = g(y)\\ (Oy): x = 0\\ y = c\\ y = d\end{cases} \qquad \boxed{V_y = \pi\int_c^d \left[g(y)\right]^2 dy}$$

c) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ (cùng nằm một phía so với Ox) và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox:*

$$\boxed{V = \pi\int_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right|\mathrm{d}x}.$$



Câu 1. **(Đề Minh Họa 2017)** Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox

A. $V = \left(e^2 - 5\right)\pi$ **B.** $V = \left(4 - 2e\right)\pi$ **C.** $V = e^2 - 5$ **D.** $V = 4 - 2e$

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm $2(x-1)e^x=0\Leftrightarrow x=1$

Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox là:

$V=\pi\int_0^1\left[2(x-1)e^x\right]^2dx=4\pi\int_0^1(x-1)^2e^{2x}dx$. Đặt $\begin{cases}u=(x-1)^2\\dv=e^{2x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2(x-1)dx\\v=\dfrac{e^{2x}}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow V=4\pi(x-1)^2\dfrac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1-4\pi\int_0^1 2(x-1)\dfrac{e^{2x}}{2}dx=4\pi(x-1)^2\dfrac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1-4\pi\int_0^1(x-1)e^{2x}dx$

Gọi $I_1=\int_0^1(x-1)e^{2x}dx$. Đặt $\begin{cases}u=x-1\Rightarrow du=dx\\dv=e^{2x}dx\Rightarrow v=\dfrac{e^{2x}}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow I_1=4\pi(x-1)\dfrac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1-4\pi\int_0^1\dfrac{e^{2x}}{2}dx=2\pi-\pi e^{2x}\Big|_0^1=2\pi-\pi e^2+\pi=3\pi-\pi e^2$

Vậy $V=4\pi(x-1)^2\dfrac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1-I_1=-2\pi-(3\pi-\pi e^2)=\pi(e^2-5)$.

Câu 2. **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$. V có giá trị gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 550 **B.** 400 **C.** 670 **D.** 335

Lời giải

Chọn D

Quay elip đã cho xung quanh trục hoành chính là quay hình phẳng:

$H=\left\{y=4\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}},y=0,x=-5,x=5\right\}$.

Vậy thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi H khi quay xung quanh trục hoành là:

$V=\pi\int_{-5}^{5}\left(16-\dfrac{16x^2}{25}\right)dx=\pi\left(16x-\dfrac{16x^3}{75}\right)\Big|_{-5}^{5}=\dfrac{320\pi}{3}\simeq 335{,}1$

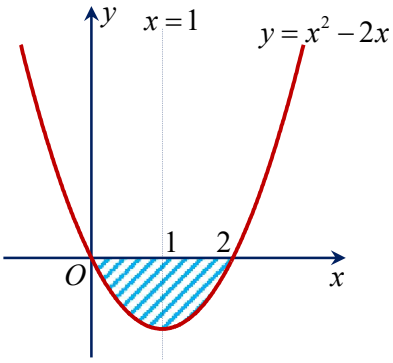
Câu 3. **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x$, trục hoành và đường thẳng $x=1$. Tính thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox.

A. $V=\dfrac{4\pi}{3}$. **B.** $V=\dfrac{16\pi}{15}$. **C.** $V=\dfrac{7\pi}{8}$. **D.** $V=\dfrac{15\pi}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Theo đề, ta có hình vẽ sau:



Nhận xét: Khi nhìn vào hình vẽ. Đường thẳng $x=1$ chia hình phẳng giới hạn bởi đường $y=x^2-2x$ và trục hoành làm 2 phần. Dễ thấy lúc này hình phẳng (H) không thể xác định vì phần hình giới hạn bởi $x=0$ đến $x=1$ và $x=1$ đến $x=2$ chưa rõ ràng.

Nếu xét phần tròn xoay khi xoay hình phẳng quanh trục Ox khi $x=0$ đến $x=2$ thì không có đáp án trong bài, đồng thời đề cho thêm đường thẳng $x=1$ là không cần thiết.

Do đó để bài toán có đáp án và rõ ràng hơn ta điều chỉnh đề như sau:

Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đường $y=x^2-2x$, trục hoành. Tính thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox.

Hình phẳng (H) giới hạn bởi $\begin{cases} y=x^2-2x \\ y=0 \end{cases}$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của $y=x^2-2x$ và $y=0$ (trục hoành) là:

$$x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

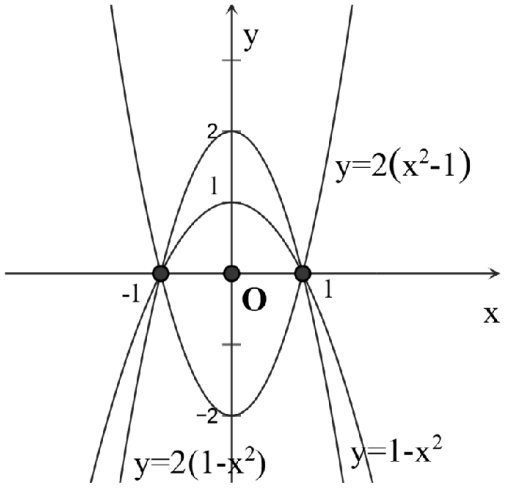
Khi đó thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox là:

$$V_{Ox}=\pi\int_0^2\left(x^2-2x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{16\pi}{15}.$$

Câu 4. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi hai đường $y=2\left(x^2-1\right)$; $y=1-x^2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành do (D) quay quanh trục Ox.

A. $\frac{64\pi}{15}$. **B.** $\frac{32}{15}$. **C.** $\frac{32\pi}{15}$. **D.** $\frac{64}{15}$.

Lời giải



Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y=2\left(x^2-1\right)$ và $y=1-x^2$ là

$2\left(x^2-1\right)=1-x^2 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y=2\left(x^2-1\right)$ qua trục Ox ta được đồ thị hàm số $y=2\left(1-x^2\right)$.

Ta có $2\left(1-x^2\right)\geq 1-x^2, \forall x\in[-1;1]$. Suy ra thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left[2\left(x^2-1\right)\right]^2 dx=\frac{64\pi}{15}.$$

Câu 5. **(Chuyên Bắc Giang -2019)** Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\tan x$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. 5 **B.** $\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ **C.** $\frac{3\pi}{2}$ **D.** $\pi\left(\frac{1}{2}+\pi\right)$

Lời giải

Chọn B

$$V=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x dx=\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x \mathrm{d}(\tan x)=\pi\int_{0}^{1}\frac{t^2}{t^2+1}dt=\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

Câu 6. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019)** Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}-2$, $y=0$ và $x=9$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

A. $V=\frac{7}{6}$. **B.** $V=\frac{5\pi}{6}$. **C.** $V=\frac{7\pi}{11}$. **D.** $V=\frac{11\pi}{6}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}-2$ và trục hoành:

$\sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4$.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành là:

$$V=\pi\int_{4}^{9}\left(\sqrt{x}-2\right)^2 \mathrm{d}x=\pi\int_{4}^{9}\left(x-4\sqrt{x}+4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{8x\sqrt{x}}{3}+4x\right)\Bigg|_4^9$$

$$=\pi\left(\frac{81}{2}-72+36\right)-\pi\left(\frac{16}{2}-\frac{64}{3}+16\right)=\frac{11\pi}{6}.$$

Câu 7. **(Chuyên Lê Quý Đôn Diện Biên 2019)** Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) quanh Ox với (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$ và trục hoành.

A. $\frac{31\pi}{3}$. **B.** $\frac{32\pi}{3}$. **C.** $\frac{34\pi}{3}$. **D.** $\frac{35\pi}{3}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $4x-x^2\geq 0 \Leftrightarrow 0\leq x\leq 4$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$ và trục hoành

$$\sqrt{4x-x^2}=0 \Leftrightarrow 4x-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$$

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh Ox là :

$V=\pi\int\limits_0^4\left(\sqrt{4x-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^4\left(4x-x^2\right)\mathrm{d}x=\dfrac{32}{3}\pi$.

Vậy thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh Ox là $\dfrac{32}{3}\pi$.

Câu 8. **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $y=2x-x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox.

A. $V=\dfrac{4}{3}\pi$. **B.** $V=\dfrac{16}{15}\pi$. **C.** $V=\dfrac{16}{15}$. **D.** $V=\dfrac{4}{3}$.

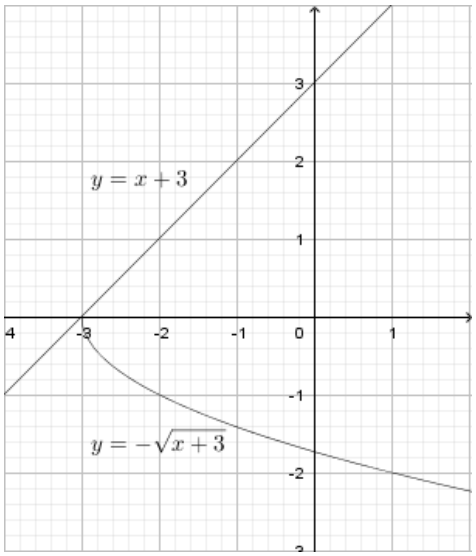
Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (H) với trục hoành: $2x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=2\\x_2=0\end{array}\right.$.

Vậy thể tích khối tròn xoay sinh ra do (H) quay quanh Ox là:

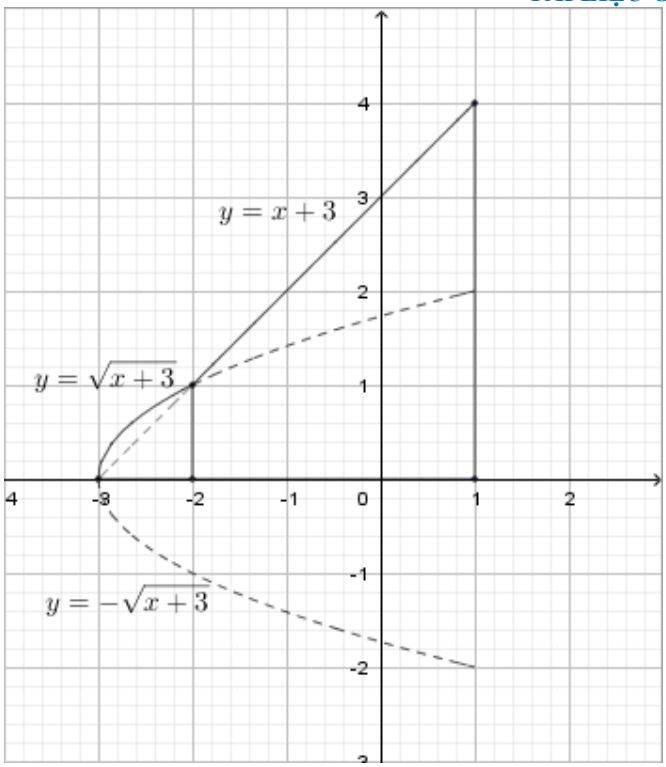
$V=\pi\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)^2.\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^2\left(4x^2-4x^3+x^4\right).\mathrm{d}x=\pi.\left(\dfrac{4}{3}x^3-x^4+\dfrac{x^5}{5}\Big|_0^2\right)=\dfrac{16}{15}\pi$.

Câu 9. Tính thể tích vật tròn xoay tạo bởi miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x+3$, $y=-\sqrt{x+3}$, $x=1$ xoay quanh trục Ox.



A. $\dfrac{41}{2}\pi$. **B.** $\dfrac{43}{2}\pi$. **C.** $\dfrac{41}{3}\pi$. **D.** $\dfrac{40}{3}\pi$.

Lời giải



Xét phương trình $x+3=-\sqrt{x+3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+3}=0\\ \sqrt{x+3}=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow x=-3$.

Xét hình (H) giới bởi đồ thị các hàm số $y=\sqrt{x+3}\ (-3\le x\le -2)$, $y=x+3\ (-2\le x\le 1)$, $y=0$ và $x=1$.

Thể tích vật thể tròn xoay cần tìm chính bằng thể tích của vật thể tròn xoay thu được khi quay quanh hình (H) quanh trục Ox. Do đó

$$V=\pi\int_{-3}^{-2}\left[\sqrt{x+3}^2\right]\mathrm{d}x+\pi\int_{-2}^{1}(x+3)^2\,\mathrm{d}x=\frac{43\pi}{2}.$$

Câu 10. **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Ký hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=\sqrt{x}.e^{x^2}$, trục hoành, đường thẳng $x=1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục hoành.

A. $V=e^2-1$. **B.** $V=\pi\left(e^2-1\right)$. **C.** $V=\frac{1}{4}\pi e^2-1$. **D.** $V=\frac{1}{4}\pi\left(e^2-1\right)$.

Lời giải

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành là nghiệm của phương trình $\sqrt{x}.e^{x^2}=0\Leftrightarrow x=0.$

Khi đó thể tích của khối tròn xoay được tạo thành là:

$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}.e^{x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 xe^{2x^2}\mathrm{d}x=\pi\frac{1}{4}\int_0^1 e^{2x^2}\mathrm{d}(2x^2)=\pi\frac{1}{4}e^{2x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{4}\pi(e^2-1).$$

Câu 11. **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình 2019)** Cho vật thể (T) giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0;x=2$. Cắt vật thể (T) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x\left(0\le x\le 2\right)$ ta thu được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $(x+1)e^x$. Thể tích vật thể (T) bằng

A. $\frac{\pi\left(13e^4-1\right)}{4}$. **B.** $\frac{13e^4-1}{4}$. **C.** $2e^2$. **D.** $2\pi e^2$.

Lời giải

Diện tích thiết diện là $S(x)=(x+1)^2 e^{2x}$.

Thể tích của vật thể (T) là $V=\int_0^2 S(x)dx=\int_0^2 (x+1)^2 e^{2x}dx$.

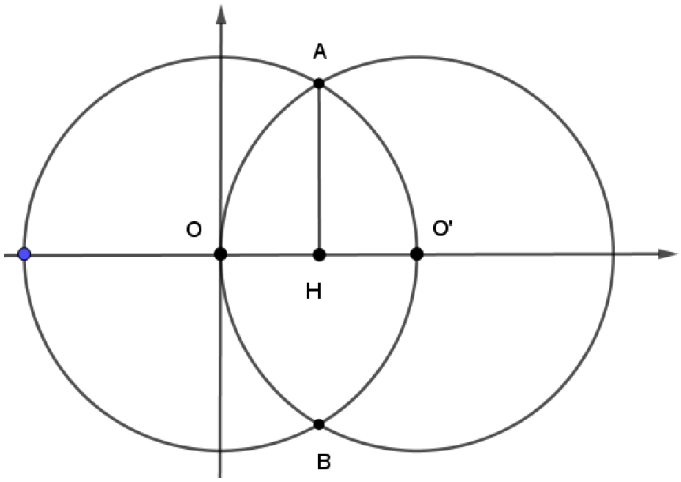
$$V=\frac{1}{2}(x+1)^2 e^{2x}\Big|_0^2-\int_0^2 (x+1)e^{2x}dx=\frac{9e^4-1}{2}-\left(\frac{x+1}{2}e^{2x}\Big|_0^2-\frac{1}{2}\int_0^2 e^{2x}dx\right)$$

$$=\frac{9e^4-1}{2}-\frac{3e^4-1}{2}+\frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^2=3e^4+\frac{1}{4}e^4-\frac{1}{4}=\frac{13e^4-1}{4}.$$

Câu 12. Cho hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$ có cùng bán kính $R=3$ thỏa mãn tính chất tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại. Tính thể tích V phần chung của hai khối cầu tạo bởi $(S_1),(S_2)$.

A. $V=\frac{45\pi}{8}$. **B.** $V=\frac{45\pi}{4}$. **C.** $V=\frac{45}{4}$. **D.** $V=\frac{45}{8}$.

Lời giải



Phần chung của hai khối cầu tạo bởi $(S_1),(S_2)$ là một khối tròn xoay, tương đương phần hình phẳng OAO' quay quanh trục OO' hay bằng hai lần phần mặt phẳng tạo bởi AHO' quay quanh trục OO'.

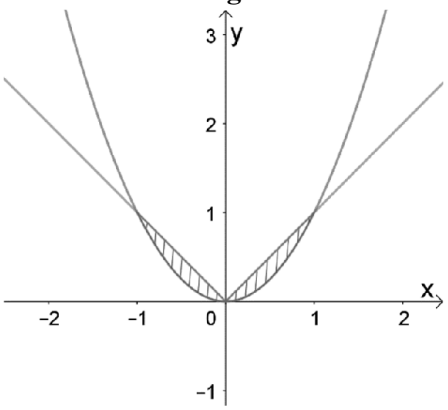
Đặt hệ trục như hình khi đó phương trình đường tròn (O) là $x^2+y^2=9\Rightarrow y=\sqrt{9-x^2}$, điểm H có hoành độ bằng $\frac{3}{2}$; O' có hoành độ là 3 nên thể tích :

$$V=\pi\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2 dx==\pi\int_{\frac{3}{2}}^{3}(9-x^2)dx=\frac{45}{8}\pi.$$

Câu 13. **(Toán Học Tuổi Trẻ - 2018)** Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=|x|$ và $y=x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{\pi}{3}$. **C.** $\frac{2\pi}{15}$. **D.** $\frac{4\pi}{15}$.

Lời giải



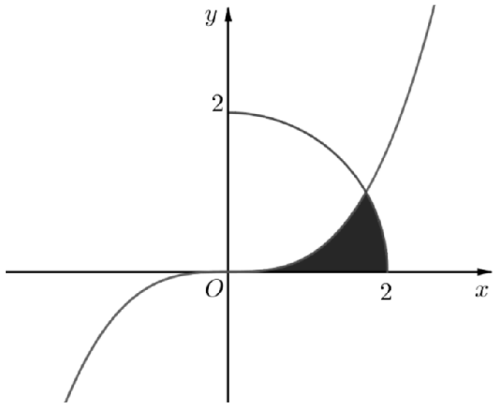
Phương trình hoành độ giao điểm $|x|=x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=\pm 1 \Rightarrow y=1 \end{array}\right.$.

Ta có đồ thị hai hàm số $y=|x|$ và $y=x^2$ đều đối xứng qua Oy nên hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=|x|$ và $y=x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $x=y$ và $x=\sqrt{y}$ quay xung quanh trục Oy.

Thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là:

$$V=\pi\int_0^1\left|y-y^2\right|\mathrm{d}y=\pi\int_0^1\left(y-y^2\right)\mathrm{d}y=\pi.\left(\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}.$$

Câu 14. **(Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai - Sóc Trăng - 2018)** Cho hình (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{3}}{9}x^3$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0\le x\le 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ).



Biết thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành là $V=\left(-\frac{a}{b}\sqrt{3}+\frac{c}{d}\right)\pi$, trong đó $a,b,c,d\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $P=a+b+c+d$.

A. $P=52$. **B.** $P=40$. **C.** $P=46$. **D.** $P=34$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{\sqrt{3}}{9}x^3=\sqrt{4-x^2}\Leftrightarrow x=\sqrt{3}$

$$V=\pi\left[\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{9}x^3\right)^2\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{3}}^{2}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2\mathrm{d}x\right]$$

$$=\pi\left[\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{27}x^6\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{3}}^{2}\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\pi\left[\frac{1}{27}.\frac{x^7}{7}\Big|_0^{\sqrt{3}}+\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{\sqrt{3}}^{2}\right]$$

$$=\left(-\frac{20\sqrt{3}}{7}+\frac{16}{3}\right)\pi.$$

$\Rightarrow a=20,b=7,c=16,d=3$

$\Rightarrow P=a+b+c+d=46$.

Câu 15. **(HSG Tỉnh Bắc Ninh 2019)** Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{m^2-x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích V. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V<1000\pi$.

A. 18. **B.** 20. **C.** 19. **D.** 21.

Lời giải

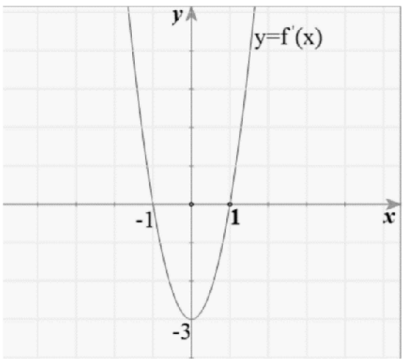
Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong và trục hoành là: $\sqrt{m^2-x^2}=0\Leftrightarrow x=\pm m$

Thể tích vật thể tròn xoay cần tính là: $V=\pi\int_{-|m|}^{|m|}(m^2-x^2)dx=\pi(m^2x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-|m|}^{|m|}=\frac{4\pi m^2|m|}{3}$

Ta có: $V<1000\pi\Leftrightarrow\frac{4\pi m^2|m|}{3}<1000\pi\Leftrightarrow|m|^3<750\Leftrightarrow-\sqrt[3]{750}<m<\sqrt[3]{750}$.

Ta có $\sqrt[3]{750}\simeq 9,08$ và $m\neq 0$. Vậy có 18 giá trị nguyên của m.

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,(a,b,c,d\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành khi quay xung quanh trục Ox.



A. $\frac{725}{35}\pi$. **B.** $\frac{1}{35}\pi$. **C.** 6π. **D.** đáp án khác.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)\Rightarrow f'(x)=3(x^2-1)$.

Khi đó $f(x)=\int f'(x)dx=x^3-3x+C$.

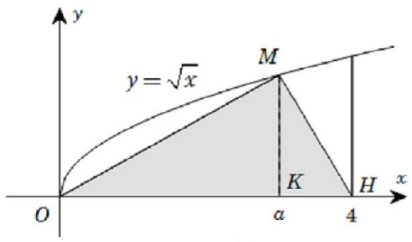
Điều kiện đồ thị hàm số $f(x)$ tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ là:

$\begin{cases}f(x)=4\\f'(x)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-3x+C=4\\3(x^2-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\C=2\end{cases}$ suy ra $f(x)=x^3-3x^2+2(C)$.

$+(C)\cap Ox\Rightarrow$ hoành độ giao điểm là $x=-2;x=1$.

+Khi đó $V=\pi\int\limits_{-2}^{1}\left(x^3-3x^2+2\right)^2dx=\dfrac{729}{35}\pi$.

Câu 17. **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=0$ và $x=4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x=a\,(0<a<4)$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại M (hình vẽ). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết rằng $V=2V_1$. Khi đó



A. $a=2$. **B.** $a=2\sqrt{2}$. **C.** $a=\dfrac{5}{2}$. **D.** $a=3$.

Lời giải

Ta có: $V=\pi\int\limits_0^4 xdx=\pi\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^4=8\pi$. Mà $V=2V_1\Rightarrow V_1=4\pi$.

Gọi K là hình chiếu của M trên $Ox\Rightarrow OK=a, KH=4-a, MK=\sqrt{a}$.

Khi xoay tam giác OMH quanh Ox ta được khối tròn xoay là sự lắp ghép của hai khối nón sinh bởi các tam giác OMK, MHK, hai khối nón đó có cùng mặt đáy và có tổng chiều cao là $OH=4$ nên thể tích của khối tròn xoay đó là $V_1=\dfrac{1}{3}.\pi.4.\left(\sqrt{a}\right)^2=\dfrac{4\pi a}{3}$, từ đó suy ra $a=3$.

Câu 18. **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Cho hình phẳng (D) giới hạn bởi các đường $y=x-\pi$, $y=\sin x$ và $x=0$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do (D) quay quanh trục hoành và $V=p\pi^4,\,(p\in\mathbb{Q})$. Giá trị của $24p$ bằng

A. 8. **B.** 4. **C.** 24. **D.** 12.

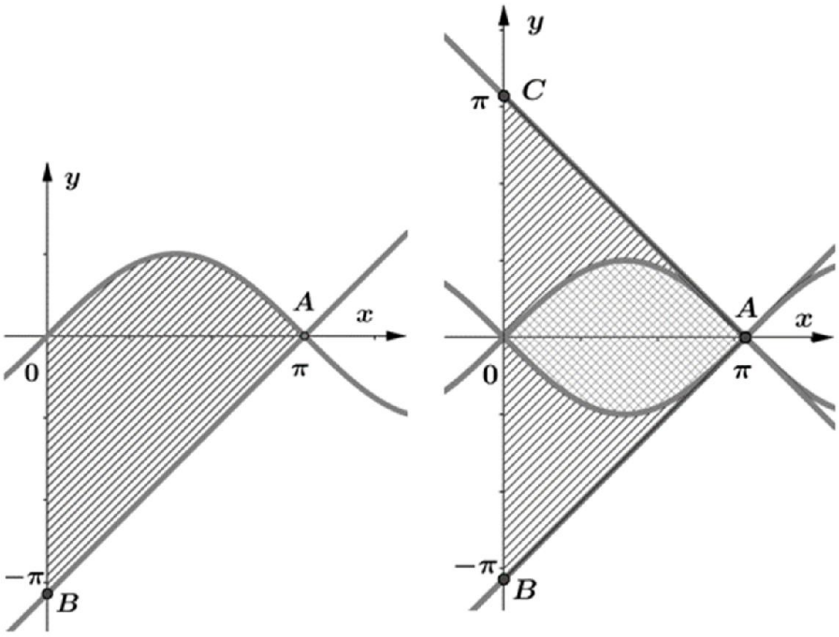
Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x-\pi$ và $y=\sin x$:

$x-\pi=\sin x\Leftrightarrow x-\pi-\sin x=0\,(1)$. Ta thấy $x=\pi$ là một nghiệm của phương trình (1).

Xét hàm số $f(x)=x-\pi-\sin x\Rightarrow f'(x)=1-\cos x\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $x=\pi$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=0$.



Cách 1:

Xét hàm số $g(x)=\pi-x-\sin x,\ x\in(0;\pi)$.

$g'(x)=-1-\cos x<0,\ \forall x\in(0;\pi)$, suy ra hàm số $g(x)=\pi-x-\sin x$ nghịch biến trên $(0;\pi)$.

$\forall x\in(0;\pi): g(x)>g(\pi)\Rightarrow \pi-x-\sin x>\pi-\pi-\sin\pi=0\Rightarrow \pi-x>\sin x\ (2)$.

Do đó thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành là thể tích của khối nón khi quay tam giác vuông OAB quanh trục hoành.

$V=\frac{1}{3}.\pi.OB^2.OA=\frac{1}{3}\pi.\pi^2.\pi=\frac{1}{3}\pi^4\ \Rightarrow p=\frac{1}{3}$. Vậy $24p=24.\frac{1}{3}=8$.

Cách 2: Từ (2) ta có $V=\pi\int_0^{\pi}(x-\pi)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}(x-\pi)^2\mathrm{d}(x-\pi)$

$=\pi.\left.\frac{(x-\pi)^3}{3}\right|_0^{\pi}=\frac{\pi^4}{3}\ \Rightarrow p=\frac{1}{3}$.

Vậy $24p=24.\frac{1}{3}=8$.

Câu 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, $(H_1):\begin{cases}y=\frac{x^2}{4}\\ y=-\frac{x^2}{4}\\ x=-4,x=4\end{cases}$, $(H_2):\begin{cases}x^2+y^2\le 16\\ x^2+(y-2)^2\ge 4\\ x^2+(y+2)^2\ge 4\end{cases}$. Cho $(H_1),(H_2)$ xoay quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích lần lượt V_1,V_2. Đẳng thức nào sau đây đúng.

A. $V_1=V_2$. **B.** $V_1=\frac{1}{2}V_2$. **C.** $V_1=2V_2$. **D.** $V_1=\frac{3}{2}V_2$.

Lời giải

Ta có $V_1 = 8.\left(\pi.4^2\right) - 2\left(\pi\int_0^4 \left(\sqrt{4y}\right)^2 dy\right) = 96\pi$

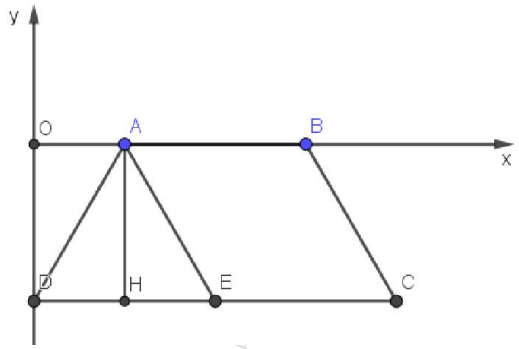
$V_2 = \frac{4\pi.4^3}{3} - 2\frac{4\pi.2^3}{3} = 64\pi$

Suy ra $V_1 = \frac{3}{2}V_2$

Câu 20. **(THPT Chu Văn An -Thái Nguyên - 2018)** Cho hình thang $ABCD$ có AB song song CD và $AB = AD = BC = a, CD = 2a$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình thang $ABCD$ quanh trục là đường thẳng AB.

A. $\frac{5}{4}\pi a^3$. **B.** $\frac{5}{2}\pi a^3$. **C.** $\frac{3-2\sqrt{2}}{3}\pi a^3$. **D.** πa^3.

Lời giải



Dễ thấy $ABCE$ là hình bình hành nên $AE = BC = a$. Vậy ADE là tam giác đều.

Có $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Có phương trình $CD: y = -\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $x_D = 0, x_C = 2a$; $A\left(\frac{a}{2};0\right)$.

Phương trình $AD: y = \sqrt{3}x - \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V = \pi\int_0^{2a}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\pi\int_0^{\frac{a}{2}}\left(\sqrt{3}x - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3\pi a^2}{4}.2a - 2\pi\int_0^{\frac{a}{2}}\left(3x^2 - 3ax + \frac{3a^2}{4}\right)$

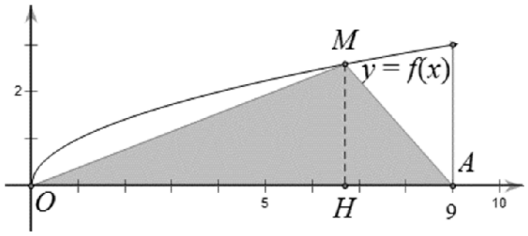
$\frac{3\pi a^3}{2} - 2\pi\left(x^3 - \frac{3a}{2}x^2 + \frac{3a^2}{4}x\right)\Big|_0^{\frac{a}{2}} = \frac{3\pi a^3}{2} - 2\pi.\frac{a^3}{8} = \frac{5}{4}\pi a^3$.

Cách 2: Thể tích khối tròn xoay được tạo ra theo đề bài là thể tích khối trụ có chiều cao $2a$ bán kính đáy bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ trừ đi thể tích hai khối nón cùng có chiều cao $\frac{a}{2}$ bán kính đáy $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy

$V = \pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 2a - 2.\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2.\frac{a}{2} = \frac{5}{4}\pi a^3$

Câu 21. **(Chuyên Lê Hồng Phong - Tphcm - 2018)** Cho đồ thị $(C): y = f(x) = \sqrt{x}$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), đường thẳng $x = 9$ và trục Ox. Cho điểm M thuộc đồ thị (C) và điểm $A(9;0)$. Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi cho (H) quay quanh trục Ox, V_2 là thể tích

khối tròn xoay khi cho tam giác AOM quay quanh trục Ox. Biết rằng $V_1 = 2V_2$. Tính diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng OM.



A. $S = 3$. **B.** $S = \dfrac{27\sqrt{3}}{16}$. **C.** $S = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $S = \dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Ta có $V_1 = \pi\displaystyle\int_0^9 \left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \dfrac{81\pi}{2}$.

Gọi H là hình chiếu của M lên trục Ox, đặt $OH = m$ (với $0 < m \le 9$), ta có $M\left(m;\sqrt{m}\right)$, $MH = \sqrt{m}$ và $AH = 9 - m$.

Suy ra $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi.MH^2.OH + \dfrac{1}{3}\pi.MH^2.AH = \dfrac{1}{3}\pi.MH^2.OA = 3m\pi$.

Theo giả thiết, ta có $V_1 = 2V_2$ nên $\dfrac{81\pi}{2} = 6m\pi \Leftrightarrow m = \dfrac{27}{4}$. Do đó $M\left(\dfrac{27}{4};\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

Từ đó ta có phương trình đường thẳng OM là $y = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}x$.

Diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng OM là

$$S = \int_0^{\frac{27}{4}} \left(\sqrt{x} - \frac{2\sqrt{3}}{9}x\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{\sqrt{3}}{9}x^2\right)\Bigg|_0^{\frac{27}{4}} = \frac{27\sqrt{3}}{16}.$$

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

Dạng 1. Ứng dụng tích phân để giải bài toán chuyển động

Câu 1. **(Mã 103 2018)** Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{100}t^2+\frac{13}{30}t\,(\text{m/s})$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng $a\,(\text{m/s}^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $15\,(\text{m/s})$ **B.** $9\,(\text{m/s})$ **C.** $42\,(\text{m/s})$ **D.** $25\,(\text{m/s})$

Lời giải

Chọn D

Ta có $v_B(t)=\int a.\text{dt}=at+C$, $v_B(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow v_B(t)=at$.

Quãng đường chất điểm A đi được trong 25 giây là

$$S_A=\int_0^{25}\left(\frac{1}{100}t^2+\frac{13}{30}t\right)\text{dt}=\left(\frac{1}{300}t^3+\frac{13}{60}t^2\right)\Big|_0^{25}=\frac{375}{2}.$$

Quãng đường chất điểm B đi được trong 15 giây là

$$S_B=\int_0^{15}at.\text{dt}=\frac{at^2}{2}\Big|_0^{15}=\frac{225a}{2}.$$

Ta có $\frac{375}{2}=\frac{225a}{2}\Leftrightarrow a=\frac{5}{3}$.

Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A là $v_B(15)=\frac{5}{3}.15=25\,(\text{m/s})$.

Câu 2. **(Mã 104 2018)** Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}t\,(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\,(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $21\,(m/s)$ **B.** $25\,(m/s)$ **C.** $36\,(m/s)$ **D.** $30\,(m/s)$

Lời giải

Chọn D

Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t)=\int a\text{d}t=at+C$ mà $v_B(0)=0$ nên $v_B(t)=at$.

Do từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi chất điểm B đuổi kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được bằng nhau. Do đó

$$\int_0^{18}\left(\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}\right)\text{d}t=\int_0^{15}at\text{d}t\Leftrightarrow 225=a.\frac{225}{2}\Leftrightarrow a=2$$

Vậy, vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(t)=2.15=30(m/s)$.

Câu 3. **(Đề Minh Họa 2017)** Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 0,2m **B.** 2m **C.** 10m **D.** 20m

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $-5t+10=0\Leftrightarrow t=2$. Do vậy, kể từ lúc người lái đạp phanh thì sau 2s ô tô dừng hẳn.

Quãng đường ô tô đi được kể từ lúc người lái đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn là

$$s=\int_0^2(-5t+10)dt=\left(-\frac{5}{2}t^2+10t\right)\Big|_0^2=10m.$$

Câu 4. **(Mã 102 2018)** Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{150}t^2+\frac{59}{75}t(m/s)$, trong đó t(giây) là khoảng thời gian tính từ lúc a bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $15(m/s)$ **B.** $20(m/s)$ **C.** $16(m/s)$ **D.** $13(m/s)$

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn C

Quãng đường chất điểm A đi từ đầu đến khi B đuổi kịp là $S=\int_0^{15}\left(\frac{1}{150}t^2+\frac{59}{75}t\right)dt=96(m)$.

Vận tốc của chất điểm B là $v_B(t)=\int adt=at+C$.

Tại thời điểm $t=3$ vật B bắt đầu từ trạng thái nghỉ nên $v_B(3)=0\Leftrightarrow C=-3a$.

Lại có quãng đường chất điểm B đi được đến khi gặp A là $S_2=\int_3^{15}(at-3a)dt=\left(\frac{at^2}{2}-3at\right)\Big|_3^{15}=72a(m)$.

Vậy $72a=96\Leftrightarrow a=\frac{4}{3}(m/s^2)$.

Tại thời điểm đuổi kịp A thì vận tốc của B là $v_B(15)=16(m/s)$.

Câu 5. **(Mã 101 2018)** Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{180}t^2+\frac{11}{18}t(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng $a(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $15(m/s)$ **B.** $10(m/s)$ **C.** $7(m/s)$ **D.** $22(m/s)$

Lời giải

Chọn A

Thời gian tính từ khi A xuất phát đến khi bị B đuổi kịp là 15 giây, suy ra quãng đường đi được tới lúc đó là $\int_0^{15} v(t)\mathrm{d}t = \int_0^{15}\left(\frac{1}{180}t^2+\frac{11}{18}t\right)\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{540}t^3+\frac{11}{36}t^2\right)\Big|_0^{15} = 75(m)$.

Vận tốc của chất điểm B là $y(t)=\int a.\mathrm{d}t = a.t+C$ (C là hằng số); do B xuất phát từ trạng thái nghỉ nên có $y(0)=0 \Leftrightarrow C=0$;

Quãng đường của B từ khi xuất phát đến khi đuổi kịp A là

$$\int_0^{10} y(t)\mathrm{d}t = 75 \Leftrightarrow \int_0^{10} a.t\mathrm{d}t = 75 \Leftrightarrow \frac{a.t^2}{2}\Big|_0^{10} = 75 \Leftrightarrow 50a = 75 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$$

Vậy có $y(t)=\frac{3t}{2}$; suy ra vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $y(10)=15(m/s)$.

Câu 6. **(Mã 105 2017)** Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật đó bắt đầu chuyển động và $s(\mathrm{m})$ là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bào nhiêu?

A. $18(\mathrm{m/s})$ **B.** $108(\mathrm{m/s})$ **C.** $64(\mathrm{m/s})$ **D.** $24(\mathrm{m/s})$

Lời giải

Chọn B

Vận tốc của vật chuyển động là $v=s'=-\frac{3}{2}t^2+12t=f(t)$

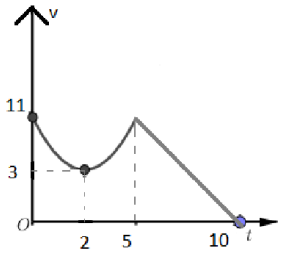
Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[0;6]$

Ta có $f'(t)=-3t+12 \Rightarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow t=4\in[0;6]$

$f(0)=0; f(4)=24; f(6)=18$

Vậy vận tốc lớn nhất là $24(\mathrm{m/s})$.

Câu 7. **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Chất điểm chuyển động theo quy luật vận tốc $v(t)(m/s)$ có dạng đường Parapol khi $0\le t\le 5(s)$ và $v(t)$ có dạng đường thẳng khi $5\le t\le 10(s)$.Cho đỉnh Parapol là $I(2,3)$. Hỏi quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0\le t\le 10(s)$ là bao nhiêu mét?



A. $\frac{181}{2}$. **B.** 90. **C.** 92. **D.** $\frac{545}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi Parapol $(P): y = ax^2 + bx + c$ khi $0 \le t \le 5(s)$

Do $(P): y = ax^2 + bx + c$ đi qua $I(3;2); A(0;11)$ nên

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 3 \\ c = 11 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -8. \\ c = 11 \end{cases}$$

Khi đó quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $0 \le t \le 5(s)$ là

$$S = \int_0^5 \left(2x^2 - 8x + 11\right) dx = \frac{115}{3}(m)$$

Ta có $f(5) = 21$

Gọi $d: y = ax + b$ khi $5 \le t \le 10(s)$ do d đi qua điểm $B(5;21)$ và $C(10;0)$ nên:

$$\begin{cases} 5a + b = 11 \\ 10a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{21}{5}. \\ b = 42 \end{cases}$$

Khi đó quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian từ $5 \le t \le 10(s)$ là

$$S = \int_5^{10} \left(-\frac{26}{5}x + 52\right) dx = \frac{105}{2}(m)$$

Quãng đường đi được chất điểm trong thời gian $0 \le t \le 10(s)$ là $S = \frac{115}{3} + \frac{105}{2} = \frac{545}{6}$.

Câu 8. **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Một ô tô đang chạy với tốc độ $20(m/s)$ thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét (m)?

A. 20 m. **B.** 30 m. **C.** 10 m. **D.** 40 m.

Lời giải

Khi ô tô dừng hẳn thì: $v(t) = 0 \Leftrightarrow -5t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 4(s)$.

Vậy từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được: $s = \int_0^4 (-5t + 20)\,dt = 40(m)$.

Câu 9. **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Một ô tô đang chạy với vận tốc là 12 (m/s) thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -6t + 12$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. $8m$. **B.** $12m$. **C.** $15m$. **D.** $10m$.

Lời giải

Lấy mốc thời gian $(t = 0)$ là lúc đạp phanh.

Khi ô tô dừng hẳn thì vận tốc $v(t) = 0$, tức là $v(t) = -6t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Vậy từ lúc đạp phanh đến lúc ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được quãng đường là

$$\int_0^2 (-6t + 12)\mathrm{d}t = \left(-3t^2 + 12t\right)\Big|_0^2 = 12\,(m).$$

Câu 10. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 15m/s thì người lái xe hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-3t+15(\text{m/s})$, trong đó t (giây). Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 38m. **B.** 37,2m. **C.** 37,5m. **D.** 37m.

Lời giải

Chọn C

Khi xe dừng hẳn thì $v(t)=0\Rightarrow t=5$.

Khi đó quảng đường xe đi được tính từ lúc bắt đầu hãm phanh đến khi dừng hẳn là:

$$S=\int_0^5(-3t+15)\,\mathrm{d}t=\left(-\frac{3t^2}{2}+15t\right)\Big|_0^5=37,5\,\text{m}$$

Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 11. **(Chuyên Bắc Giang 2019)** động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-10t+20\,(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 5 m **B.** 20 m **C.** 40 m **D.** 10 m

Lời giải

Chọn B

Lúc bắt đầu đạp phanh, ô tô có vận tốc $20\,m/s\Rightarrow v(t_0)=-10t_0+20=20\Leftrightarrow t_0=0$

Ô tô dừng hẳn khi đó vận tốc $v(t_1)=0\Leftrightarrow 20-10t_1=0\Leftrightarrow t_1=2$.

Do đó ô tô di chuyển được thêm là: $\int_0^2(20-10t)\,dt=\left(20t-5t^2\right)\Big|_0^2=20(m)$

Câu 12. **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Một ô tô đang chạy với vận tốc $10m/s$ thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Tính quãng đường ô tô di chuyển được trong 8 giây cuối cùng.

A. $55m$. **B.** $25m$. **C.** $50m$. **D.** $16m$.

Lời giải

Ta có $-2t+10=0\Leftrightarrow t=5\Rightarrow$ Thời gian tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây. Vậy trong 8 giây cuối cùng thì có 3 giây ô tô chuyển động với vận tốc $10m/s$ và 5 giây chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-2t+10(m/s)$.

Khi đó quãng đường ô tô di chuyển là $S=3.10+\int_0^5(-2t+10)dt=30+25=55m$.

Câu 13. **(THPT Thực Hành - TPHCM - 2018)** Một chất điểm bắt đầu chuyển động thẳng đều với vận tốc v_0, sau 6 giây chuyển động thì gặp chướng ngại vật nên bắt đầu giảm tốc độ với vận tốc chuyển động $v(t)=-\frac{5}{2}t+a\ (m/s),(t\ge 6)$ cho đến khi dừng hẳn. Biết rằng kể từ lúc chuyển động đến lúc dừng thì chất điểm đi được quãng đường là 80m. Tìm v_0.

A. $v_0=35m/s$. **B.** $v_0=25m/s$. **C.** $v_0=10m/s$. **D.** $v_0=20m/s$.

Lời giải

- Tại thời điểm $t=6$ vật đang chuyển động với vận tốc v_0 nên có

$v(6)=v_0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}.6+a=v_0 \Leftrightarrow a=v_0+15$, suy ra $v(t)=-\frac{5}{2}t+v_0+15$.

- Gọi k là thời điểm vật dừng hẳn, vậy ta có $v(k)=0 \Leftrightarrow k=\frac{2}{5}.(v_0+15) \Leftrightarrow k=\frac{2v_0}{5}+6$.

- Tổng quãng đường vật đi được là $80=6.v_0+\int_6^k\left(-\frac{5}{2}t+v_0+15\right)dt$

$\Leftrightarrow 80=6.v_0+\left(-\frac{5}{4}t^2+v_0.t+15t\right)\Big|_6^k$

$\Leftrightarrow 80=6.v_0-\frac{5}{4}(k^2-6^2)+v_0.(k-6)+15(k-6)$

$\Leftrightarrow 80=6.v_0-\frac{5}{4}\left(\frac{4(v_0)^2}{25}+\frac{24v_0}{5}\right)+v_0.\frac{2v_0}{5}+15.\frac{2v_0}{5}$

$\Leftrightarrow (v_0)^2+36.v_0-400=0$

$\Leftrightarrow v_0=10$

Câu 14. **(THPT Lương Thế Vinh - HN - 2018)** Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t)=7t$ (m/s). Đi được 5 (s) người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-35$ (m/s^2). Tính quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn?

A. 87.5 mét. **B.** 96.5 mét. **C.** 102.5 mét. **D.** 105 mét.

Lời giải

Quãng đường ô tô đi được trong 5 (s) đầu là $s_1=\int_0^5 7t\text{d}t=7\frac{t^2}{2}\Big|_0^5=87,5$ (mét).

Phương trình vận tốc của ô tô khi người lái xe phát hiện chướng ngại vật là $v_{(2)}(t)=35-35t$ (m/s). Khi xe dừng lại hẳn thì $v_{(2)}(t)=0 \Leftrightarrow 35-35t=0 \Leftrightarrow t=1$.

Quãng đường ô tô đi được từ khi phanh gấp đến khi dừng lại hẳn là

$s_2=\int_0^1(35-35t)\text{d}t=\left(35t-35\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1=17.5$ (mét).

Vậy quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn là

$s=s_1+s_2=87.5+17.5=105$ (mét).

Câu 15. **(Chuyên Lê Hồng Phong - NĐ - 2018)** Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0=15$ m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=t^2+4t$ (m/s^2). Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

A. $70,25$ m. **B.** $68,25$ m. **C.** $67,25$ m. **D.** $69,75$ m.

Lời giải

$a(t)=t^2+4t \Rightarrow v(t)=\int a(t)\text{d}t=\frac{t^3}{3}+2t^2+C$ $(C\in\mathbb{R})$.

Mà $v(0)=C=15 \Rightarrow v(t)=\frac{t^3}{3}+2t^2+15$.

Vậy $S=\int_0^3\left(\frac{t^3}{3}+2t^2+15\right)\mathrm{d}t=69,75$ m.

Câu 16. **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên - 2018)** Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t)=10+t+9t^2-t^3$ trong đó s tính bằng mét, t tính bằng giây. Thời gian để vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất (tính từ thời điểm ban đầu) là

A. $t=6(\mathrm{s})$. **B.** $t=3(\mathrm{s})$. **C.** $t=2(\mathrm{s})$. **D.** $t=5(\mathrm{s})$.

Lời giải

$v(t)=s'(t)=-3t^2+18t+1$.

Dễ thấy hàm số $v(t)$ là hàm bậc hai có đồ thị dạng parabol với hệ số $a=-3<0$.

Do đó $v_{\max}$ đạt tại đỉnh $I(3;28)$ của parabol.

Vậy Thời gian để vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất $t=3(\mathrm{s})$.

Câu 17. **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=7t\ (\mathrm{m/s})$. Đi được 5s, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-70\ (\mathrm{m/s^2})$. Tính quãng đường S đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. $S=96,25\ (\mathrm{m})$. **B.** $S=87,5\ (\mathrm{m})$. **C.** $S=94\ (\mathrm{m})$. **D.** $S=95,7\ (\mathrm{m})$.

Lời giải

Chọn gốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu đi. Sau 5s ô tô đạt vận tốc là $v(5)=35(\mathrm{m/s})$.

Sau khi phanh vận tốc ô tô là $v(t)=35-70(t-5)$.

Ô tô dừng tại thời điểm $t=5,5\mathrm{s}$.

Quãng đường ô tô đi được là $S=\int_0^5 7t\mathrm{d}t+\int_5^{5,5}\left[35-70(t-5)\right]\mathrm{d}t=96,25(\mathrm{m})$.

Câu 18. **(SGD Thanh Hóa - 2018)** Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=2t\ (\mathrm{m/s})$. Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a=-12(\mathrm{m/s^2})$. Tính quãng đường $s(\mathrm{m})$ đi được của ôtô từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn?

A. $s=168(\mathrm{m})$. **B.** $s=166(\mathrm{m})$. **C.** $s=144(\mathrm{m})$. **D.** $s=152(\mathrm{m})$.

Lời giải

Giai đoạn 1: Xe bắt đầu chuyển động đến khi gặp chướng ngại vật.

Quãng đường xe đi được là:

$S_1=\int_0^{12}v_1(t)\mathrm{d}t=\int_0^{12}2t\mathrm{d}t=t^2\big|_0^{12}=144(\mathrm{m})$.

Giai đoạn 2: Xe gặp chướng ngại vật đến khi dừng hẳn.

Ôtô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v_2(t)=\int a\mathrm{d}t=-12t+c$.

Vận tốc của xe khi gặp chướng ngại vật là: $v_2(0)=v_1(12)=2.12=24(\mathrm{m/s})$.

$\Rightarrow -12.0+c=24 \Rightarrow c=24 \Rightarrow v_2(t)=-12t+24$.

Thời gian khi xe gặp chướng ngại vật đến khi xe dừng hẳn là nghiệm phương trình:
$-12t+24=0 \Leftrightarrow t=2$.

Khi đó, quãng đường xe đi được là:

$$S_2=\int_0^2 v_2(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^2(-12t+24)\,\mathrm{d}t=\left(-6t^2+24t\right)\Big|_0^2=24(\mathrm{m}).$$

Vậy tổng quãng đường xe đi được là: $S=S_1+S_2=168(\mathrm{m})$.

Câu 19. **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu $1\,\mathrm{m}$. Một ô tô A đang chạy với vận tốc $16\,\mathrm{m/s}$ bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t)=16-4t$ (đơn vị tính bằng $\mathrm{m/s}$), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để có 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

A. 33. **B.** 12. **C.** 31. **D.** 32.

Lời giải

Ta có: $v_A(0)=16\,\mathrm{m/s}$.

Khi xe A dừng hẳn: $v_A(t)=0 \Leftrightarrow t=4\,\mathrm{s}$.

Quãng đường từ lúc xe A hãm phanh đến lúc dừng hẳn là $s=\int_0^4(16-4t)\,\mathrm{d}t=32\,\mathrm{m}$.

Do các xe phải cách nhau tối thiểu $1\,\mathrm{m}$ để đảm bảo an toàn nên khi dừng lại ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là $33\,\mathrm{m}$.

Câu 20. **(THPT Phan Đình Phùng - Hà Tĩnh - 2018)** Một vật chuyển động với vận tốc $10\,\mathrm{m/s}$ thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t)=t^2+3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

A. $136\mathrm{m}$. **B.** $126\mathrm{m}$. **C.** $276\mathrm{m}$. **D.** $216\mathrm{m}$.

Lời giải

Ta có $v(0)=10\,\mathrm{m/s}$ và $v(t)=\int_0^t a(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^t\left(t^2+3t\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}\right)\Big|_0^t=\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2$.

Quãng đường vật đi được là $S=\int_0^6 v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^6\left(\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{1}{12}t^4+\frac{1}{2}t^3\right)\Big|_0^6=216\,\mathrm{m}$.

Câu 21. **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2018)** Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t)=t^2+10t\ (m/s)$ với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc $200(m/s)$ thì rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

A. $\frac{2500}{3}(m)$. **B.** $2000(m)$. **C.** $500(m)$. **D.** $\frac{4000}{3}(m)$.

Lời giải

Thời điểm máy bay đạt vận tốc $200(m/s)$ là $v(t)=200 \Leftrightarrow t^2+10t=200 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=10 \\ t=-20 \end{array}\right. \Leftrightarrow t=10$

Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

$s=\int_0^{10}\left(t^2+10t\right)\mathrm{d}t=\left(\frac{t^3}{3}+5t\right)\Big|_0^{10}=\frac{2500}{3}(m)$.

Câu 22. **(Sở Lào Cai - 2018)** Một ôtô đang dừng và bắt đầu chuyển động theo một đường thẳng với gia tốc $a(t)=6-2t\ (m/s^2)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc ôtô bắt đầu chuyển động. Hỏi quảng đường ôtô đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi vận tốc của ôtô đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu mét?

A. $18m$. **B.** $36m$. **C.** $22,5m$. **D.** $6,75m$.

Lời giải

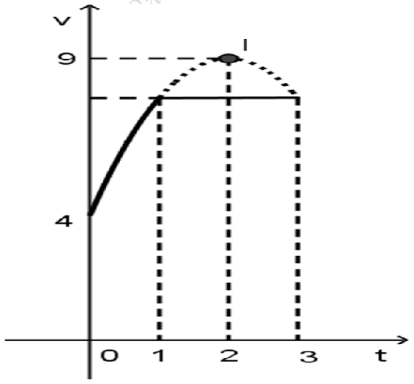
$a(t)=6-2t\ (m/s^2)\Rightarrow v(t)=\int(6-2t)dt=6t-t^2+C$

Xe dừng và bắt đầu chuyển động nên khi $t=0$ thì $v=0\Rightarrow C=0\Rightarrow v(t)=6t-t^2$.

$v(t)=6t-t^2$ là hàm số bậc 2 nên đạt GTLN khi $t=-\frac{b}{2a}=3\ (s)$

Quảng đường xe đi trong 3 giây đầu là: $S=\int_0^3\left(6t-t^2\right)dt=18m$.

Câu 23. **(Mã 123 2017)** Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. $s=21,58(km)$ **B.** $s=23,25(km)$ **C.** $s=13,83(km)$ **D.** $s=15,50(km)$

Lời giải

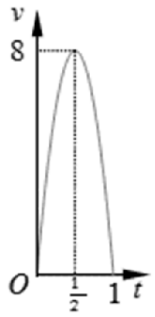
Chọn A

Gọi phương trình của parabol $v=at^2+bt+c$ ta có hệ như sau: $\begin{cases}c=4\\4a+2b+c=9\\-\frac{b}{2a}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=5\\c=4\\a=-\frac{5}{4}\end{cases}$

Với $t=1$ ta có $v=\frac{31}{4}$.

Vậy quãng đường vật chuyển động được là $s=\int_0^1\left(-\frac{5}{4}t^2+5t+4\right)dt+\int_1^3\frac{31}{4}dt=\frac{259}{12}\approx 21,583$

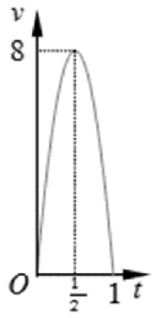
Câu 24. **(Mã 104 2017)** Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2};\ 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quảng đường s người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy?



A. $s=2,3$ (km) **B.** $s=4,5$ (km) **C.** $s=5,3$ (km) **D.** $s=4$ (km)

Lời giải

Chọn B



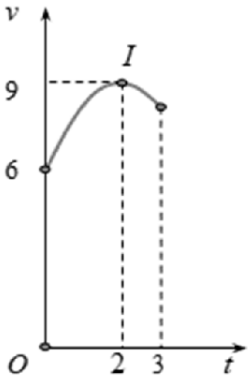
Gọi parabol là $(P): y=ax^2+bx+c$. Từ hình vẽ ta có (P) đi qua $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$ và điểm $I\left(\frac{1}{2};\ 8\right)$.

Ta có hệ: $\begin{cases} c=0 \\ a+b+c=0 \\ \frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-32 \\ b=32 \\ c=0 \end{cases}$.

Suy ra $(P): y=-32x^2+32x$.

Vậy quảng đường người đó đi được là $s=\int_0^{\frac{3}{4}}\left(-32x^2+32x\right)\mathrm{d}x=4,5$ (km).

Câu 25. **(Mã 110 2017)** Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t\ (\text{h})$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



A. $s=25,25(\text{km})$ **B.** $s=24,25(\text{km})$ **C.** $s=24,75(\text{km})$ **D.** $s=26,75(\text{km})$

Lời giải

Chọn C

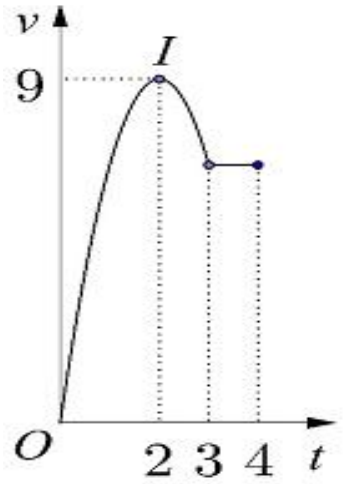
Gọi $v(t)=a.t^2+bt+c$.

Đồ thị $v(t)$ là một phần parabol có đỉnh $I(2;9)$ và đi qua điểm $A(0;6)$ nên

$\begin{cases}\dfrac{-b}{2a}=2\\ a.2^2+b.2+c=9\\ a.0^2+b.0+c=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{-3}{4}\\ b=3\\ c=6\end{cases}$. Tìm được $v(t)=-\dfrac{3}{4}t^2+3t+6$

Vậy $S=\int_0^3\left(-\dfrac{3}{4}t^2+3t+6\right)dt=$ 24,75 (km)

Câu 26. **(Mã 105 2017)** Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.



A. $s=24$ (km) **B.** $s=28,5$ (km) **C.** $s=27$ (km) **D.** $s=26,5$ (km)

Lời giải

Chọn B

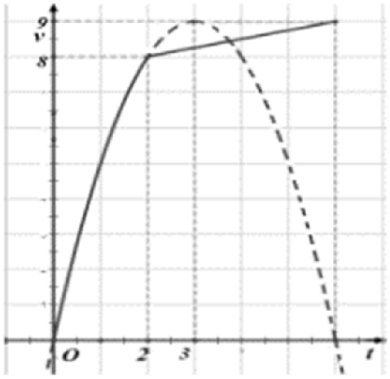
Gọi $(P):y=ax^2+bx+c$.

Vì (P) qua $O(0;0)$ và có đỉnh $I(2;9)$ nên dễ tìm được phương trình là $y=\frac{-9}{4}x^2+9x$.

Ngoài ra tại $x=3$ ta có $y=\frac{27}{4}$

Vậy quãng đường cần tìm là: $S=\int_0^3\left(\frac{-9}{4}x^2+9x\right)dx+\int_3^4\frac{27}{4}dx=27\ (km)$.

Câu 27. **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Một vật chuyển động trong 6 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị như hình bên dưới. Trong khoảng thời gian 2 giờ từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần đường Parabol có đỉnh $I(3;9)$ và có trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại, đồ thị vận tốc là một đường thẳng có hệ số góc bằng $\frac{1}{4}$. Tính quảng đường s mà vật di chuyển được trong 6 giờ?



Nguyễn Bảo

A. $\frac{130}{3}(km)$. **B.** $9(km)$. **C.** $40(km)$. **D.** $\frac{134}{3}(km)$.

Lời giải

Chọn A

+ Vì Parabol đi qua O(0; 0) và có tọa độ đỉnh $I(3;9)$ nên thiết lập được phương trình Parabol là $(P): y=v(t)=-t^2+6t; \forall t\in[0;2]$

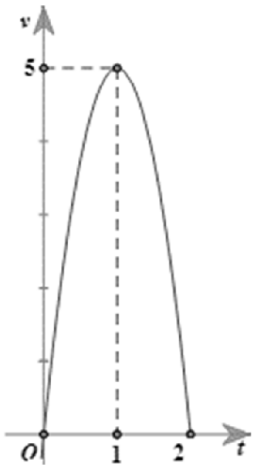
+ Sau 2 giờ đầu thì hàm vận tốc có dạng là hàm bậc nhất $y=\frac{1}{4}t+m$, dựa trên đồ thị ta thấy đi qua điểm có tọa độ $(6;9)$ nên thế vào hàm số và tìm được $m=\frac{15}{2}$.

Nên hàm vận tốc từ giờ thứ 2 đến giờ thứ 6 là $y=\frac{1}{4}t+\frac{15}{2}; \forall t\in[2;6]$

+ Quảng đường vật đi được bằng tổng đoạn đường 2 giờ đầu và đoạn đường 4 giờ sau.

$S=S_1+S_2=\int_0^2\left(-t^2+6t\right)dt+\int_2^6\left(\frac{1}{4}t+\frac{15}{2}\right)dt=\frac{130}{3}(km)$

Câu 28. **(THPT Thực Hành - TPHCM - 2018)** Một người chạy trong 2 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là 1 phần của đường Parabol với đỉnh $I(1;5)$ và trục đối xứng song song với trục tung Ov như hình vẽ. Tính quảng đường S người đó chạy được trong 1 giờ 30 phút kể từ lúc bắt đầu chạy (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).



A. $2,11\text{km}$. **B.** $6,67\text{km}$. **C.** $5,63$ km. **D.** $5,63\text{km}$.

Lời giải

Ta có 1 giờ 30 phút = 1,5 giờ $\Rightarrow S=\int_0^{1,5} v(t)\mathrm{d}t$.

Đồ thị $v=v(t)$ đi qua gốc tọa độ nên $v(t)$ có dạng $v(t)=at^2+bt$.

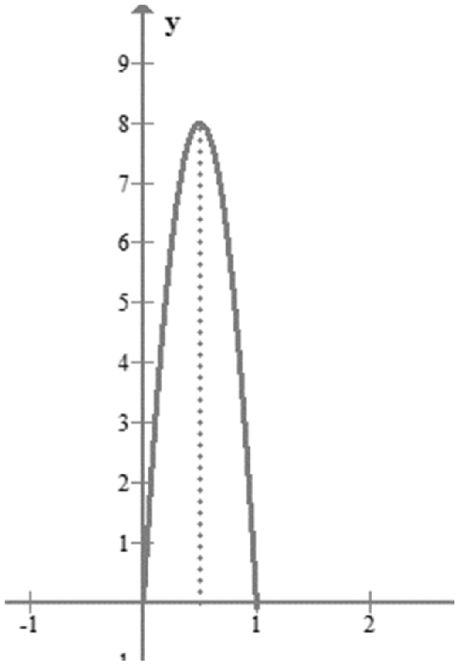
Đồ thị $v=v(t)$ có đỉnh là $I(1;5)$ nên

$$\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=1\\ a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2a\\ a+b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-5\\ b=10\end{cases}\Rightarrow v(t)=-5t^2+10t$$

$$S=\int_0^{1,5}\left(-5t^2+10t\right)\mathrm{d}t=\frac{45}{8}\approx 5,63.$$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 29. **(SGD Đồng Tháp - 2018)** Một người chạy trong thời gian 1 giờ, với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị là một phần của parabol có đỉnh $I\left(\frac{1}{2};8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình vẽ. Tính quãng đường S người đó chạy được trong thời gian 45 phút, kể từ khi bắt đầu chạy.



A. $5,3\ (\text{km})$. **B.** $4,5\ (\text{km})$. **C.** $4\ (\text{km})$. **D.** $2,3\ (\text{km})$.

Lời giải

Trước hết ta tìm công thức biểu thị vận tốc theo thời gian, giả sử $v(t)=at^2+bt+c$.

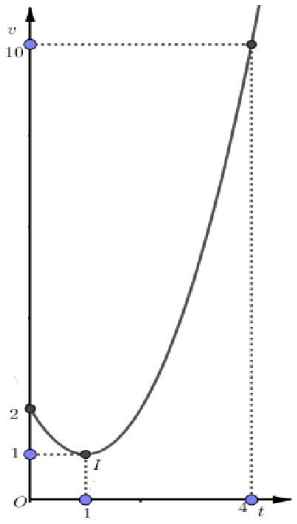
Khi đó dựa vào hình vẽ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} c=0 \\ a\left(\frac{1}{2}\right)^2+b\left(\frac{1}{2}\right)+c=8 \\ a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-32 \\ b=32 \\ c=0 \end{cases}.$$

Nguyễn Bảo Vương

Do đó quãng đường người đó đi được sau 45 phút là $S=\int_0^{\frac{45}{60}}\left(32t-32t^2\right)dt=4,5\ (\text{km})$.

Câu 30. **(Chuyên Hạ Long 2018)** Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/ h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



A. $s=6$ (km). **B.** $s=8$ (km). **C.** $s=\dfrac{40}{3}$ (km). **D.** $s=\dfrac{46}{3}$ (km).

Lời giải

Hàm biểu diễn vận tốc có dạng $v(t)=at^2+bt+c$. Dựa vào đồ thị ta có:

$$\begin{cases} c=2 \\ \dfrac{-b}{2a}=1 \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow v(t)=t^2-2t+2.$$

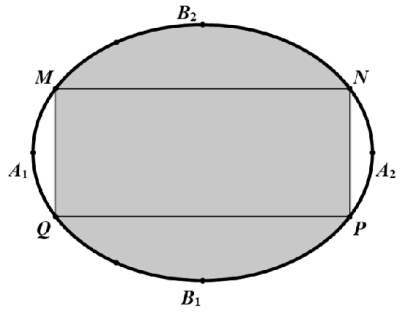
Với $t=4 \Rightarrow v(4)=10$ (thỏa mãn).

Từ đó $s=\int_0^4 \left(t^2-2t+2\right)dt=\dfrac{40}{3}(km)$.

Nguyễn Bảo Vương

Dạng 2. Ứng dụng tích phân để giải một số bài toán thực tế

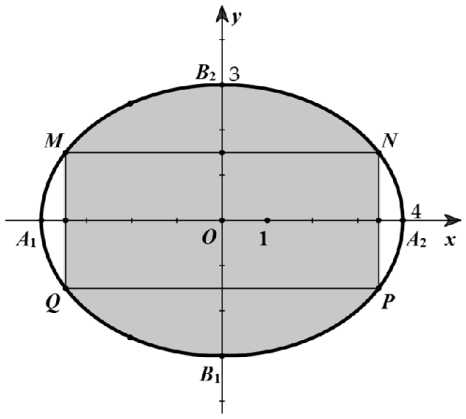
Câu 1. **(Đề Tham Khảo 2019)** Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200.000 vnđ$/\text{m}^2$ và phần còn lại 100.000 vnđ$/\text{m}^2$. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2=8\text{m}$, $B_1B_2=6\text{m}$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ=3\text{m}$?



A. 5.526.000 đồng. **B.** 5.782.000 đồng **C.** 7.322.000 đồng. **D.** 7.213.000 đồng.

Lời giải

Chọn C



Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Với $\begin{cases}A_1A_2=8=2a\\B_1B_2=6=2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=3\end{cases}\rightarrow(E):\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1\Leftrightarrow y=\pm\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.

Suy ra diên tích của hình elip là $S_{(E)}=\pi a.b=12\pi\ (\text{m}^2)$.

Vì $MNPQ$ là hình chữ nhật và $MQ=3\rightarrow M\left(x;\frac{3}{2}\right)\in(E)$

$\Rightarrow\frac{x^2}{16}+\frac{1}{4}=1\Rightarrow x^2=12\rightarrow M\left(-2\sqrt{3};\frac{3}{2}\right);N\left(2\sqrt{3};\frac{3}{2}\right)$

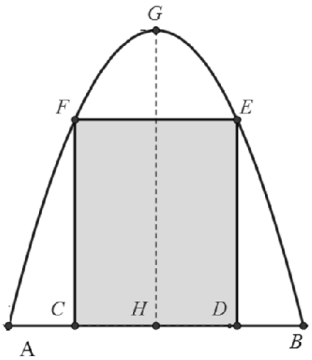
Gọi $S_1;S_2$ lần lượt là diện tích phần bị tô màu và không bị tô màu

Ta có: $S_2=4.\frac{3}{4}\int\limits_{2\sqrt{3}}^{4}\sqrt{16-x^2}\,\text{d}x=3\int\limits_{2\sqrt{3}}^{4}\sqrt{16-x^2}\,\text{d}x\xrightarrow{x=4\sin t}S_2=4\pi-6\sqrt{3}\,(\text{m}^2)$

Suy ra: $S_1=S_{(E)}-S_2=8\pi+6\sqrt{3}$. Gọi T là tổng chi phí. Khi đó ta có

$T=\left(4\pi-6\sqrt{3}\right).100+\left(8\pi+6\sqrt{3}\right).200\simeq 7.322.000$ (đồng).

Câu 2. **(Trần Phú - Quảng Ninh - 2020)** Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau. Chiều cao $GH=4m$, chiều rộng $AB=4m$, $AC=BD=0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng$/m^2$, còn các phần để trắng làm xiên hoa có giá là 900000 đồng$/m^2$. Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

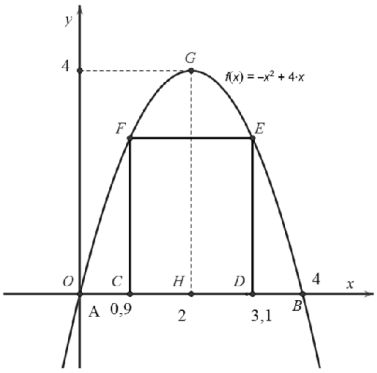


A. 11445000 đồng. **B.** 4077000 đồng. **C.** 7368000 đồng. **D.** 11370000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho AB trùng Ox, A trùng O khi đó parabol có đỉnh $G(2;4)$ và đi qua gốc tọa độ.



Giả sử phương trình của parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$.

Vì parabol có đỉnh là $G(2;4)$ và đi qua điểm $O(0;0)$ nên ta có $\begin{cases} c = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ a.2^2 + b.2 + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases}$.

Suy ra phương trình parabol là $y = f(x) = -x^2 + 4x$.

Diện tích của cả cổng là $S = \int_0^4 \left(-x^2 + 4x\right) \mathrm{d}x = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right)\Big|_0^4 = \frac{32}{3} \left(\mathrm{m}^2\right)$.

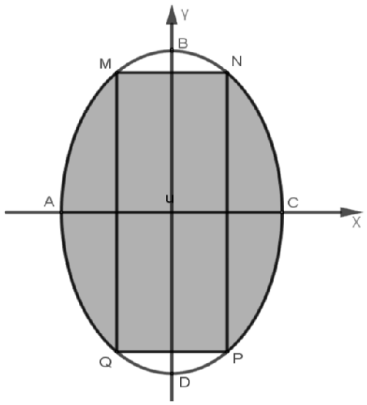
Mặt khác chiều cao $CF = DE = f(0,9) = 2,79(\mathrm{m})$; $CD = 4 - 2.0,9 = 2,2 \ (\mathrm{m})$.

Diện tích hai cánh cổng là $S_{CDEF} = CD.CF = 6,138 \left(\mathrm{m}^2\right)$.

Diện tích phần xiên hoa là $S_{xh} = S - S_{CDEF} = \frac{32}{3} - 6,14 = \frac{6793}{1500} \left(\mathrm{m}^2\right)$.

Vậy tổng số tiền để làm cổng là $6,138.1200000 + \frac{6793}{1500}.900000 = 11441400$ đồng.

Câu 3. Một biển quảng cáo với 4 đỉnh A, B, C, D như hình vẽ. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là $200.000(\text{đ}/\mathrm{m}^2)$ sơn phần còn lại là $100.000\text{đ}/\mathrm{m}^2$. Cho $AC = 8m; BD = 10m; MN = 4m$ Hỏi số tiền sơn gần với số tiền nào sau đây:



A. 12204000đ. . **B.** 14207000đ.. **C.** 11503000đ.. **D.** 10894000đ.

Lời giải

elip có phương trình là: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$. Vì $MN=4\Rightarrow x_N=2\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_N=\frac{5\sqrt{3}}{2} \\ y_N=\frac{-5\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$

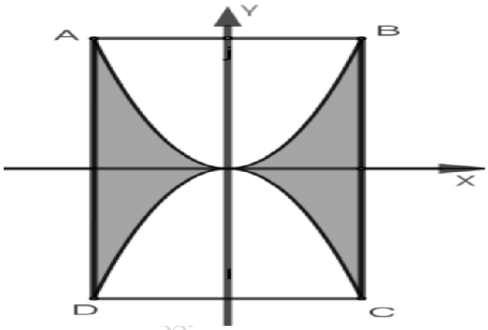
Diện tích phần tô đậm là $S_1=2\int\limits_{\frac{-5\sqrt{3}}{2}}^{\frac{5\sqrt{3}}{2}}\frac{4}{5}\sqrt{25-y^2}dy\approx 59,21\ \ (m^2)$

Diện tích elip là $S=\pi.4.5=20\pi\ \ (m^2)$

Diện tích phần trắng là $S_2=S-S_1\approx 3,622\ \ (m^2)$

Tổng chi phí trang chí là: $T=59,21.200000+3,622.100000=12204200đ$.

Câu 4. Một họa tiết hình cánh bướm như hình vẽ bên.



Phần tô đậm được đính đá với giá thành

$500.000đ/m^2$. Phần còn lại được tô màu với giá thành $250.000đ/m^2$.

Cho $AB=4dm;BC=8dm.$ Hỏi để trang trí 1000 họa tiết như vậy cần số tiền gần nhất với số nào sau đây.

A. $105660667đ$. **B.** $106666667đ$. **C.** $107665667đ$. **D.** $108665667đ$.

Lời giải

Vì $AB=4dm;BC=8dm.\Rightarrow A(-2;4),\ B(2;4),C(2;-4),D(-2;-4)$.

parabol là: $y=x^2$ hoặc $y=-x^2$

Diện tích phần tô đậm là $S_1=4\int\limits_0^2 x^2dx=\frac{32}{3}\ \ (dm^2)$

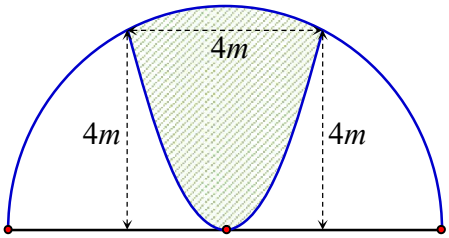
Diện tích hình chữ nhật là $S=4.8=32\ \ (m^2)$

Diện tích phần trắng là $S_2=S-S_1=32-\frac{32}{3}=\frac{64}{3}\ \ (dm^2)$

Tổng chi phí trang chí là: $T=\left(\frac{32}{3}.5000+\frac{64}{3}.2500\right).1000\approx 106666667đ$

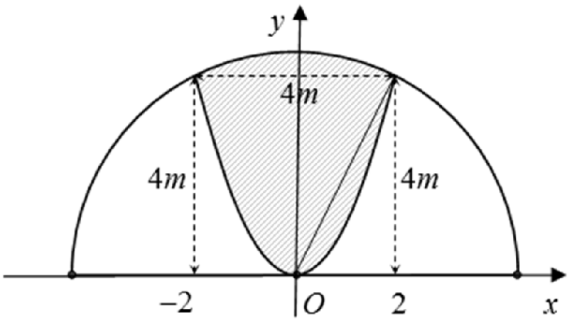
Câu 5. **(Thanh Hóa 2019)** Một khuôn viên dạng nửa hình tròn, trên đó người thiết kế phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với

đường kính của nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô màu) và cách nhau một khoảng bằng $4(m)$. Phần còn lại của khuôn viên (phần không tô màu) dành để trồng cỏ Nhật Bản. Biết các kích thước cho như hình vẽ, chi phí để trồng hoa và cỏ Nhật Bản tương ứng là 150.000 đồng/m^2 và 100.000 đồng/m^2. Hỏi cần bao nhiêu tiền để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản trong khuôn viên đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng đơn vị)



A. 3.738.574 **(đồng).** **B.** 1.948.000 (đồng). **C.** 3.926.990 (đồng). **D.** 4.115.408 (đồng).

Lời giải



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ, ta có bán kính của đường tròn là $R=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

Phương trình của nửa đường tròn (C) là: $x^2+y^2=20, y\ge 0\Rightarrow y=\sqrt{20-x^2}$.

Parabol (P) có đỉnh $O(0;0)$ và đi qua điểm $(2;4)$ nên có phương trình: $y=x^2$.

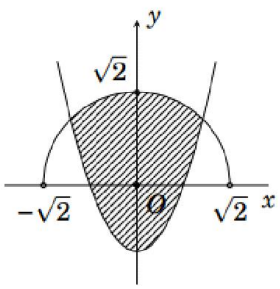
Diện tích phần tô màu là: $S_1=\int_{-2}^{2}\left[\sqrt{20-x^2}-x^2\right]\mathrm{d}x\approx 11{,}94\ (m^2)$.

Diện tích phần không tô màu là: $S_2=\frac{1}{2}.\pi.\left(2\sqrt{5}\right)^2-S_1\approx 10\pi-11{,}94\ (m^2)$.

Số tiền để trồng hoa và trồng cỏ Nhật Bản trong khuôn viên đó là:

$150000.11{,}94+100000.(10\pi-11{,}94)\approx 3.738.593$.

Câu 6. **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Người ta cần trồng một vườn hoa Cẩm Tú Cầu (phần được gạch chéo trên hình vẽ). Biết rằng phần gạch chéo là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=2x^2-1$ và nửa trên của đường tròn có tâm là gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{2}(m)$ Tính số tiền tối thiểu để trồng xong vườn hoa Cẩm Tú Cầu biết rằng để trồng mỗi m^2 hoa cần ít nhất là 250000 đồng.



A. $\dfrac{3\pi-2}{6}\times 250000$. **B.** $\dfrac{3\pi+10}{6}\times 250000$. **C.** $\dfrac{3\pi+10}{3}\times 250000$. **D.** $\dfrac{3\pi+2}{6}\times 250000$

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình đường tròn tâm gốc tọa độ và bán kính bằng $\sqrt{2}(m)$ $x^2+y^2=2$.

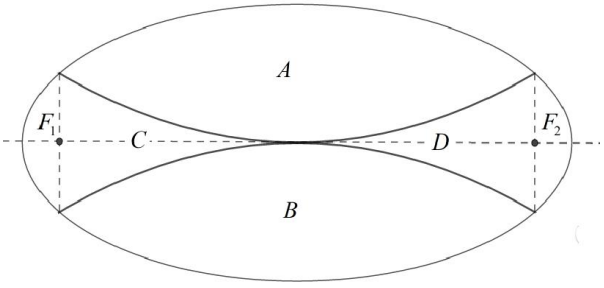
Tọa độ giao điểm của Parabol và đường tròn là nghiệm hệ $\begin{cases} y=\sqrt{2-x^2} \\ y=2x^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, y=1 \\ x=1, y=1 \end{array}\right.$

Diện tích vườn hoa là $S=\int\limits_{-1}^{1}\left(\sqrt{2-x^2}-2x^2+1\right)\mathrm{d}x=\dfrac{3\pi+10}{6}$.

số tiền tối thiểu để trồng xong vườn hoa Cẩm Tú Cầu là $\dfrac{3\pi+10}{6}\times 250000$.

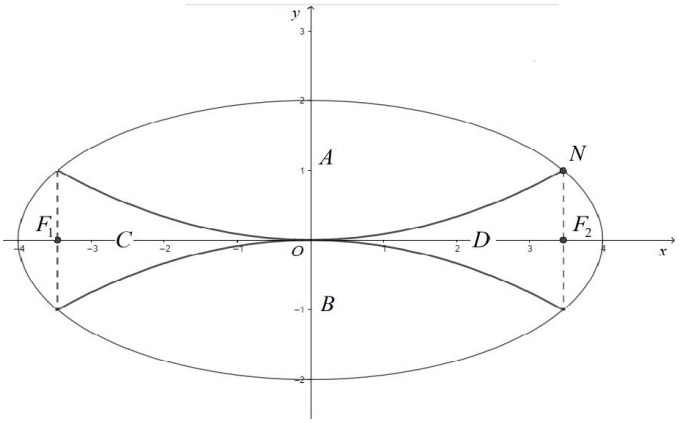
Câu 7. **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019)** Nhà trường dự định làm một vườn hoa dạng elip được chia ra làm bốn phần bởi hai đường parabol có chung đỉnh, đối xứng với nhau qua trục của elip như hình vẽ bên. Biết độ dài trục lớn, trục nhỏ của elip lần lượt là 8 m và 4 m, F_1, F_2 là hai tiêu điểm của elip. Phần A, B dùng để trồng hoa, phần C, D dùng để trồng cỏ. Kinh phí để trồng mỗi mét vuông hoa và cỏ lần lượt là 250.000 đ và 150.000 đ. Tính tổng tiền để hoàn thành vườn hoa trên (làm tròn đến hàng nghìn).

A. 5.676.000 đ. **B.** 4.766.000 đ. **C.** 4.656.000 đ. **D.** 5.455.000 đ.



Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Do elip có độ dài trục lớn $2a=8\Leftrightarrow a=4$, độ dài trục nhỏ $2b=4\Leftrightarrow b=2$.

Diện tích của (E) là: $S_{(E)}=\pi ab=8\pi$.

Phương trình chính tắc (E) là: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Suy ra $y=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{16-x^2}$.

Ta có $c=\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{3}\Rightarrow F_2\left(2\sqrt{3};\ 0\right)$.

Do N và F_2 có cùng hoành độ $\Rightarrow N\left(2\sqrt{3};\ 1\right)$.

Gọi $(P): y = kx^2$ là parabol nằm ở phía trên trục Ox.

Do $N \in (P)$ ta có $1 = k\left(2\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow k = \frac{1}{12}$. Suy ra $(P): y = \frac{1}{12}x^2$.

Diện tích phần A là $S_A = \int\limits_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2} - \frac{1}{12}x^2\right)\mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2} - \frac{1}{12}x^2\right)\mathrm{d}x$

$= \int\limits_{0}^{2\sqrt{3}} \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int\limits_{0}^{2\sqrt{3}} x^2\,\mathrm{d}x$.

* Xét $I_1 = \int\limits_{0}^{2\sqrt{3}} \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$. Đặt $x = 4\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = 4\cos t\,\mathrm{d}t$.

Đổi cận:

x	0	$2\sqrt{3}$
t	0	$\frac{\pi}{3}$

Khi đó $I_1 = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{16-16\sin^2 t}.4\cos t\,\mathrm{d}t = 16\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 8\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = 8\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= 8\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

* Ta có $I_2 = \frac{1}{6}\int\limits_{0}^{2\sqrt{3}} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{18}x^3\Big|_0^{2\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra: $S_A = I_1 - I_2 = \frac{8\pi + 2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_A + S_B = 2S_A = \frac{16\pi + 4\sqrt{3}}{3}$.

Tổng diện tích phần C, D là: $S_C + S_D = S_{(E)} - (S_A + S_B) = \frac{8\pi - 4\sqrt{3}}{3}$.

Khi đó tổng số tiền để hoàn thành vườn hoa trên là:

$\frac{16\pi + 4\sqrt{3}}{3}.250000 + \frac{8\pi - 4\sqrt{3}}{3}.150000 \approx 5676000$ đ.

Câu 8. **(Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An -2019)** Người ta xây một sân khấu với mặt sân có dạng hợp của hai hình tròn giao nhau. Bán kính của hai của hai hình tròn là 20 mét và 15 mét. Khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là 30 mét. Chi phí làm mỗi mét vuông phân giao nhau của hai hình tròn là 300 ngàn đồng và chi phí làm mỗi mét vuông phần còn lại là 100 ngàn đồng. Hỏi số tiền làm mặt sân của sân khấu gần với số nào trong các số dưới đây?

A. 202 triệu đồng. **B.** 208 triệu đồng. **C.** 218 triệu đồng. **D.** 200 triệu đồng.

Lời giải.

Gọi O, I lần lượt là tâm của các đường tròn bán kính bằng 20 mét và bán kính bằng 15 mét. Gắn hệ trục Oxy như hình vẽ, vì $OI = 30$ mét nên $I(0; 30)$. Phương trình hai đường tròn lần lượt là $x^2 + y^2 = 20^2$ và $x^2 + (y-30)^2 = 15^2$. Gọi A, B là các giao điểm của hai đường tròn đó.

Tọa độ A, B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20^2 \\ x^2 + (y-30)^2 = 15^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{5\sqrt{455}}{12} \\ y = \frac{215}{12} \end{cases}$.

Tổng diện tích hai đường tròn là $\pi\left(20^2+15^2\right)=625\pi$ (mét vuông).

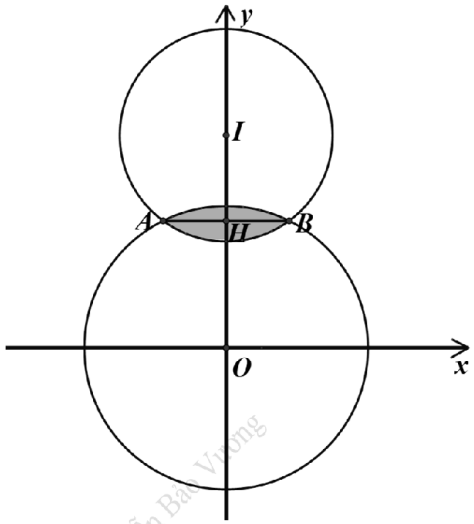
Phần giao của hai hình tròn chính là phần hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=30-\sqrt{15^2-x^2}$ và $y=\sqrt{20^2-x^2}$. Do đó diện tích phần giao giữa hai hình tròn là

$$S=\int_{-\frac{5\sqrt{455}}{12}}^{\frac{5\sqrt{455}}{12}}\left(\sqrt{20^2-x^2}+\sqrt{15^2-x^2}-30\right)\mathrm{d}x\approx 60,2546 \text{ (mét vuông).}$$

Số tiền để làm phần giao giữa hai hình tròn là $300.000\,\mathrm{x}\,60,2546\approx 18.076.386$ (đồng).

Số tiền để làm phần còn lại là $100.000\,\mathrm{x}\,\left(625\pi-2\,\mathrm{x}\,60,2546\right)=184.299.220$ (đồng).

Vậy tổng số tiền làm sân khấu là $184.299.220+18.076.386\approx 202.375.606$ (đồng).

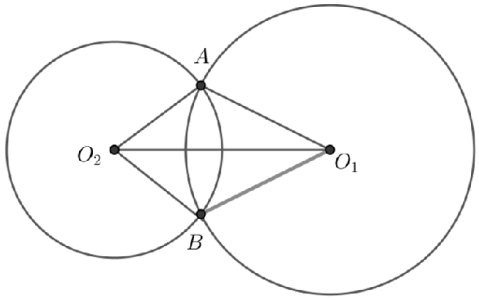


Câu 9. **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Người ta xây một sân khấu với sân có dạng của hai hình tròn giao nhau. Bán kính của hai hình tròn là 20 m và 15 m. Khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là 30 m. Chi phí làm mỗi mét vuông phần giao nhau của hai hình tròn là 300 nghìn đồng và chi phí làm mỗi mét vuông phần còn lại là 100 nghìn đồng. Hỏi số tiền làm mặt sân khấu gần với số nào nhất trong các số dưới đây?

A. 218 triệu đồng. **B.** 202 triệu đồng.

C. 200 triệu đồng. **D.** 218 triệu đồng.

Lời giải



Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của hai đường tròn bán kính 20 m và 15 m. A, B là hai giao điểm của hai đường tròn.

Ta có $O_1A=O_1B=20$ m; $O_2A=O_2B=15$ m; $O_1O_2=30$ m.

$$\cos\widehat{BO_1O_2}=\frac{O_1B^2+{O_1O_2}^2-O_2B^2}{2O_1B.O_1O_2}=\frac{43}{48}\Rightarrow\widehat{BO_1O_2}\approx 26°23'.$$

Theo tính chất hai đường tròn cắt nhau ta có O_1O_2 là tia phân giác $\widehat{AO_1B}$

$\Rightarrow \widehat{AO_1B} = 2\widehat{O_2O_1B} = 52,77°$.

Suy ra diện tích hình quạt tròn O_1AB là $S_{O_1AB} = \pi.20^2.\dfrac{52,77}{360} \approx 184,2\left(\text{m}^2\right)$.

$S_{\Delta O_1AB} = \dfrac{1}{2}O_1A.O_1B.\sin\widehat{AO_1B} \approx 159,2\left(\text{m}^2\right)$.

Gọi S_1 là diện tích hình giới hạn bởi dây AB và cung $\widehat{AmB}$ trong đường tròn $\left(O_1\right)$.

$\Rightarrow S_1 = S_{O_1AB} - S_{\Delta O_1AB} = 25\left(\text{m}^2\right)$.

Chứng minh tương tự ta được diện tích hình giới hạn bởi dây AB và cung $\widehat{AmB}$ trong đường tròn $\left(O_2\right)$ là $S_2 \approx 35\left(\text{m}^2\right)$.

Suy ra diện tích phần giao nhau là $S = S_1 + S_2 = 60\left(\text{m}^2\right)$.

$\Rightarrow$ Chi phí làm sân khấu phần giao nhau $60.300\,000 = 18\,000\,000$ (nghìn đồng).

Tổng diện tích của hai hình tròn là $S' = \pi 20^2 + \pi 15^2 \approx 1963\left(\text{m}^2\right)$.

Diện tích phần không giao nhau là $S' - S = 1903\left(\text{m}^2\right)$.

$\Rightarrow$ Chi phí làm sân khấu phần không giao nhau $1903.100\,000 = 190\,300\,000$ (nghìn đồng).

Số tiền làm mặt sân là $18\,000\,000 + 190\,000\,000 = 208\,300\,000$ (nghìn đồng)

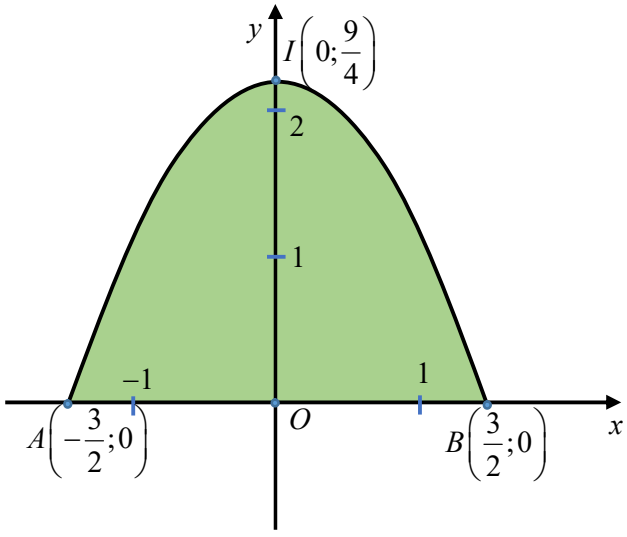
$= 208,3$ (triệu đồng).

Câu 10. Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là $2,25$ mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là:

A. 33750000 đồng. **B.** 3750000 đồng. **C.** 12750000 đồng. **D.** 6750000 đồng.

Lời giải

Gọi phương trình parabol $\left(P\right): y = ax^2 + bx + c$. Do tính đối xứng của parabol nên ta có thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $\left(P\right)$ có đỉnh $I \in Oy$ (như hình vẽ).



Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{9}{4}=c,\left(I\in\left(P\right)\right) \\ \frac{9}{4}a-\frac{3}{2}b+c=0\left(A\in\left(P\right)\right) \\ \frac{9}{4}a+\frac{3}{2}b+c=0\left(B\in\left(P\right)\right) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} c=\frac{9}{4} \\ a=-1 \\ b=0 \end{cases}$.

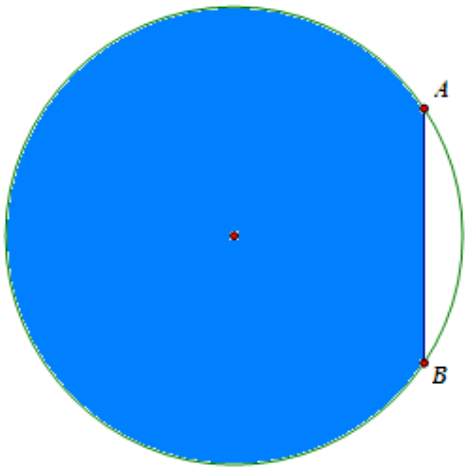
Vậy $\left(P\right):y=-x^2+\frac{9}{4}$.

Dựa vào đồ thị, diện tích cửa parabol là:

$$S=\int_{\frac{-3}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(-x^2+\frac{9}{4}\right)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{3}{2}}\left(-x^2+\frac{9}{4}\right)\mathrm{d}x=2\left(\frac{-x^3}{3}+\frac{9}{4}x\right)\Big|_0^{\frac{9}{4}}=\frac{9}{2}\mathrm{m}^2.$$

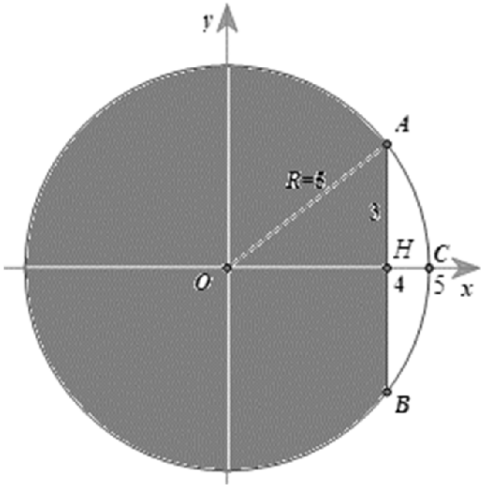
Số tiền phải trả là: $\frac{9}{2}.1500000=6750000$ đồng.

Câu 11. **(THPT Ngô Quyền - Quảng Ninh - 2018)** Một người có miếng đất hình tròn có bán kính bằng 5 m. Người này tính trồng cây trên mảnh đất đó, biết mỗi mét vuông trồng cây thu hoạch được 100 nghìn. Tuy nhiên cần có 1 khoảng trống để dựng 1 cái chòi và để đồ dùng nên người này bớt lại 1 phần đất nhỏ không trồng cây (phần màu trắng như hình vẽ), trong đó $AB=6m$. Hỏi khi thu hoạch cây thì người này thu được bao nhiêu tiền ?



A. 3722 nghìn đồng. **D.** 7445 nghìn đồng. **C.** 7446 nghìn đồng. **B.** 3723 nghìn đồng.

Lời giải



Diện tích miếng đất là $S_1=\pi R^2=25\pi$ (m^2).

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Ta có phương trình của đường tròn biên là $x^2+y^2=25$.

$R=5, AH=3 \Rightarrow OH=4$.

$\Rightarrow$ Phương trình của cung tròn nhỏ $\overset{\frown}{AC}$ là $y=\sqrt{25-x^2}$, với $4\le x\le 5$.

$\Rightarrow$ Diện tích phần đất trống là $S_2=2\int\limits_4^5\sqrt{25-x^2}dx$ (m^2).

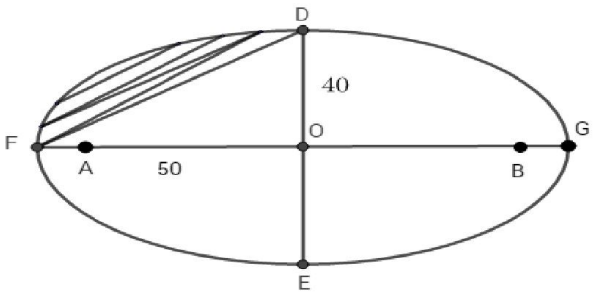
$\Rightarrow$ Diện tích phần đất trồng cây là $S=S_1-S_2=25\pi-2\int\limits_4^5\sqrt{25-x^2}dx$.

$\Rightarrow$ Số tiền thu được là $T=100S=100(25\pi-2\int\limits_4^5\sqrt{25-x^2}dx)\approx 7445$ (nghìn đồng).

Câu 12. **(THPT Yên Lạc - 2018)** Một mảnh vườn hình elip có trục lớn bằng $100(\text{m})$ và trục nhỏ bằng $80(\text{m})$ được chia làm hai phần bởi một đoạn thẳng nối hai đỉnh liên tiếp của elip. Phần nhỏ hơn trồng cây con và phần lớn hơn trồng rau. Biết lợi nhuận thu được là 2000 mỗi m^2 trồng cây con và 4000 mỗi m^2 trồng rau. Hỏi thu nhập của cả mảnh vườn là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến phần nghìn).

A. 31904000. **B.** 23991000. **C.** 10566000. **D.** 17635000.

Lời giải



Gọi phương trình của elip là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

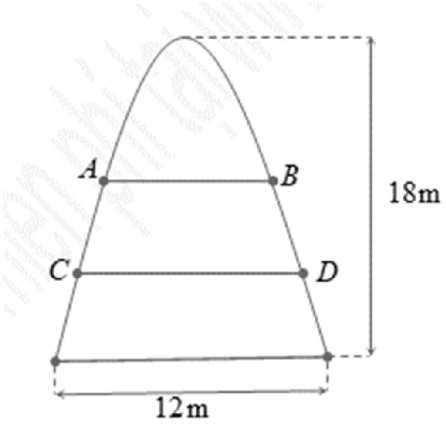
Theo giả thiết, ta có $2a=100\Rightarrow a=50$; $2b=80\Rightarrow b=40$.

Diện tích phần trồng cây con (phần gạch sọc) bằng $\frac{1}{4}$ diện tích của elip trừ đi diện tích tam giác DOF. Do đó diện tích phần trồng cây con là $S_1=\frac{\pi ab}{4}-\frac{ab}{2}\ (\text{m}^2)$.

Diện tích phần trồng rau (phần không gạch sọc) bằng $\frac{3}{4}$ diện tích elip cộng với diện tích tam giác DOF. Do đó diện tích phần trồng rau là $S_2=\frac{3\pi ab}{4}+\frac{ab}{2}\ (\text{m}^2)$.

Thu nhập của cả mảnh vườn là $\left(\frac{\pi ab}{4}-\frac{ab}{2}\right)\cdot 2000+\left(\frac{3\pi ab}{4}+\frac{ab}{2}\right)\cdot 4000\approx 23991000$.

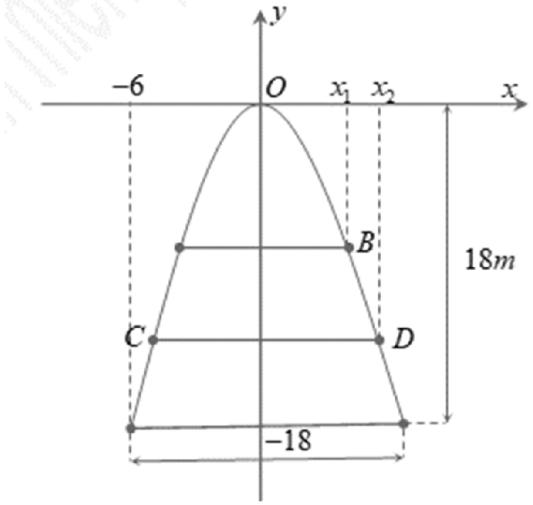
Câu 13. **(Chuyên Vinh - 2018)** Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB, CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỉ số $\frac{AB}{CD}$ bằng



A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **D.** $\frac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Phương trình Parabol có dạng $y=a.x^2$ (P).

(P) đi qua điểm có tọa độ $(-6;-18)$ suy ra: $-18=a.(-6)^2 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{2} \Rightarrow (P): y=-\frac{1}{2}x^2$.

Từ hình vẽ ta có: $\frac{AB}{CD}=\frac{x_1}{x_2}$.

Diện tích hình phẳng giới bạn bởi Parabol và đường thẳng $AB: y=-\frac{1}{2}x_1^2$ là

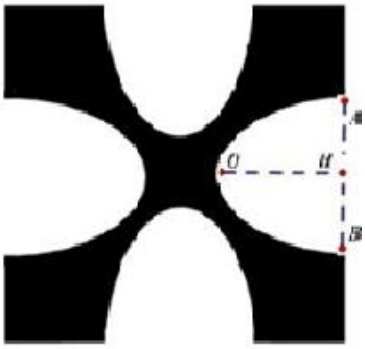
$$S_1=2\int_0^{x_1}\left[-\frac{1}{2}x^2-\left(-\frac{1}{2}x_1^2\right)\right]dx=2\left(-\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}x_1^2x\right)\Big|_0^{x_1}=\frac{2}{3}x_1^3.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng CD $y=-\frac{1}{2}x_2^2$ là

$$S_2=2\int_0^{x_2}\left[-\frac{1}{2}x^2-\left(-\frac{1}{2}x_2^2\right)\right]dx=2\left(-\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}x_2^2x\right)\Big|_0^{x_2}=\frac{2}{3}x_2^3$$

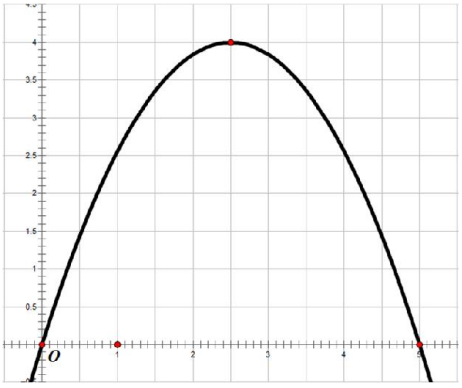
Từ giả thiết suy ra $S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow x_2^3 = 2x_1^3 \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Vậy $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 14. **(THPT Kinh Môn - 2018)** Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5$ cm, $OH = 4$ cm. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.



A. $\dfrac{160}{3}\text{cm}^2$. **B.** $\dfrac{140}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\dfrac{14}{3}\text{cm}^2$. **D.** $50\ \text{cm}^2$.

Lời giải



Đưa parabol vào hệ trục Oxy ta tìm được phương trình là: $(P): y = -\dfrac{16}{25}x^2 + \dfrac{16}{5}x$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = -\dfrac{16}{25}x^2 + \dfrac{16}{5}x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 5$ là: $S = \displaystyle\int_0^5 \left(-\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x\right)\text{d}x = \frac{40}{3}$.

Tổng diện tích phần bị khoét đi: $S_1 = 4S = \dfrac{160}{3}\ \text{cm}^2$.

Diện tích của hình vuông là: $S_{hv} = 100\ \text{cm}^2$.

Vậy diện tích bề mặt hoa văn là: $S_2 = S_{hv} - S_1 = 100 - \dfrac{160}{3} = \dfrac{140}{3}\ \text{cm}^2$.

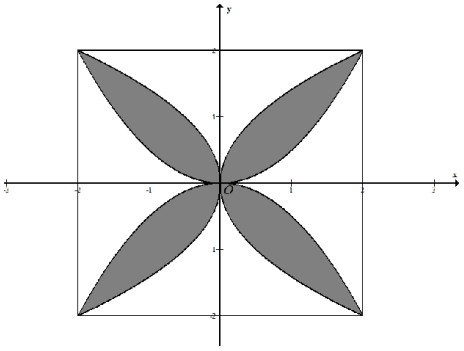
Câu 15. **(Chuyên Vinh - 2018)** Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô mầu sẫm như hình vẽ bên).



Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

A. $800\,\text{cm}^2$. **B.** $\frac{800}{3}\,\text{cm}^2$. **C.** $\frac{400}{3}\,\text{cm}^2$. **D.** $250\,\text{cm}^2$.

Lời giải



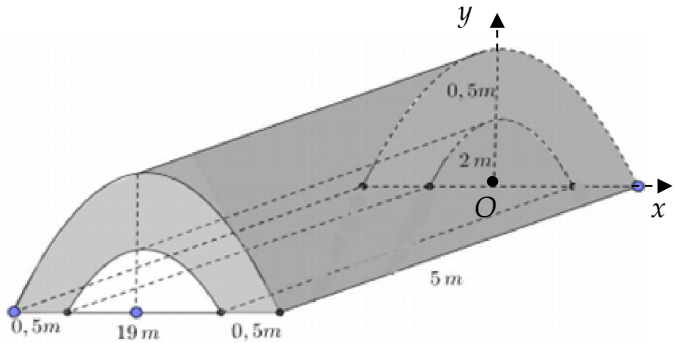
Chọn hệ tọa độ như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng $10cm = 1dm$), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có phương trình $y = \frac{x^2}{2}$, $y = -\frac{x^2}{2}, x = -\frac{y^2}{2}, x = \frac{y^2}{2}$.

Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phần tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{2}, y = \sqrt{2x}$ và hai đường thẳng $x = 0; x = 2$.

Do đó diện tích một cánh hoa bằng

$$\int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{(2x)^3} - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}\left(\text{dm}^2\right) = \frac{400}{3}\left(\text{cm}^2\right) = \frac{4}{3}\left(\text{dm}^2\right) = \frac{400}{3}\left(\text{cm}^2\right).$$

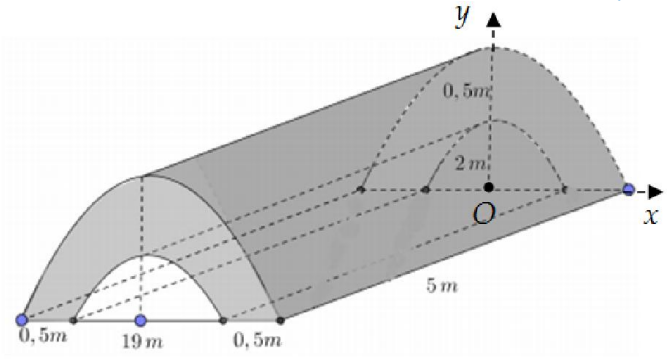
Câu 16. **(THPT Cẩm Giàng 2 -2019)** Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã Y có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol).



A. $19\,\text{m}^3$. **B.** $21\,\text{m}^3$. **C.** $18\,\text{m}^3$. **D.** $40\,\text{m}^3$.

Lời giải

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Gọi $(P_1): y = a_1x^2 + b_1$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2};0\right), B(0;2)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.\left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{8}{361} \\ b_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$.

Gọi $(P_2): y = a_2x^2 + b_2$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10;0), D\left(0;\frac{5}{2}\right)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a_2.(10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -\frac{1}{40} \\ b_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$.

Ta có thể tích của bê tông là: $V = 5.2\left[\int_0^{10}\left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right)dx - \int_0^{\frac{19}{2}}\left(-\frac{8}{361}x^2 + 2\right)dx\right] = 40\,\text{m}^3$.

Câu 17. Để kỷ niệm ngày 26-3. Chi đoàn 12A dự định dựng một lều trại có dạng parabol, với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét, đỉnh của parabol cách mặt đất là 3 mét. Hãy tính thể tích phần không gian phía bên trong trại để lớp 12A cử số lượng người tham dự trại cho phù hợp.

A. $30\,m^3$ **B.** $36\,m^3$ **C.** $40\,m^3$ **D.** $41\,m^3$

Lời giải

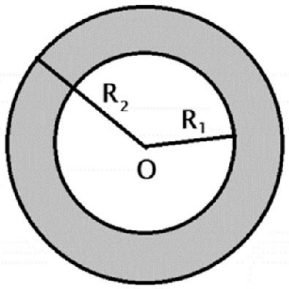
Chọn B

Giả sử nền trại là hình chữ nhật ABCD có AB = 3 mét, BC = 6 mét, đỉnh của parabol là I. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho: O là trung điểm của cạnh AB, A, B và I, phương trình của parabol có dạng $y = ax^2 + b, a \neq 0$. Do I, A, B thuộc nên ta có $y = -\frac{4}{3}x^2 + 3$

Vậy thể tích phần không gian phía trong trại là

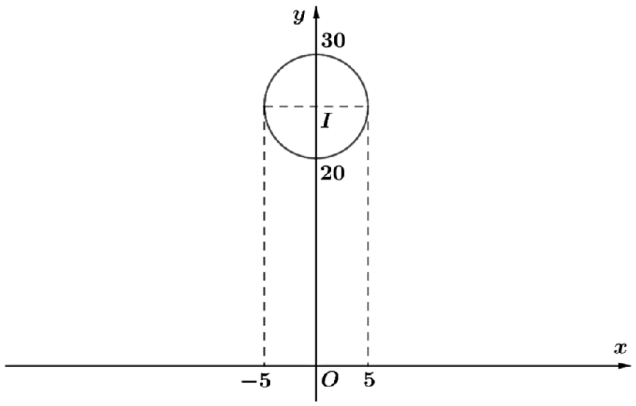
$V = 6.2\int_0^{\frac{3}{2}}(-\frac{4}{3}x^2 + 3)dx = 36$

Câu 18. **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Săm lốp xe ô tô khi bơm căng đặt nằm trên mặt phẳng nằm ngang có hình chiếu bằng như hình vẽ với bán kính đường tròn nhỏ $R_1 = 20cm$, bán kính đường tròn lớn $R_2 = 30cm$ và mặt cắt khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trục, vuông góc mặt phẳng nằm ngang là hai đường tròn. Bỏ qua độ dày vỏ săm. Tính thể tích không khí được chứa bên trong săm.



A. $1250\pi^2 cm^3$. **B.** $1400\pi^2 cm^3$. **C.** $2500\pi^2 cm^3$. **D.** $600\pi^2 cm^3$.

Lời giải



Thể tích săm xe bằng thể tích của khối tròn xoay sinh bởi hình tròn tâm $I(0;25)$ bán kính bằng 5 quay quanh trục Ox.

Ta có phương trình đường tròn là $x^2+(y-25)^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=25+\sqrt{25-x^2} \\ y=25-\sqrt{25-x^2} \end{array}\right., x\in[-5;5]$.

Vậy $V=\pi.\left[\int\limits_{-5}^{5}\left(25+\sqrt{25-x^2}\right)^2 dx-\int\limits_{-5}^{5}\left(25-\sqrt{25-x^2}\right)^2 dx\right]=100\pi.\int\limits_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}dx$.

Ta có $\int\limits_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}dx$ là diện tích nửa hình tròn tâm $O(0;0)$, bán kính bằng 5

$\Rightarrow \int\limits_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}dx=\frac{1}{2}.\pi.5^2=\frac{25\pi}{2}$.

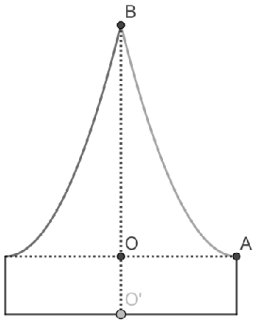
Suy ra $V=100\pi.\int\limits_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}dx=100\pi.\frac{25\pi}{2}=1250\pi^2 cm^3$

Chú ý: Có thể bấm máy tích phân, ta

được $V=\pi\left[\int\limits_{-5}^{5}\left(25+\sqrt{25-x^2}\right)^2 dx-\int\limits_{-5}^{5}\left(25-\sqrt{25-x^2}\right)^2 dx\right]\approx 3927\pi cm^3$.

Kiểm tra các đáp án ta chọn đáp án **A.**

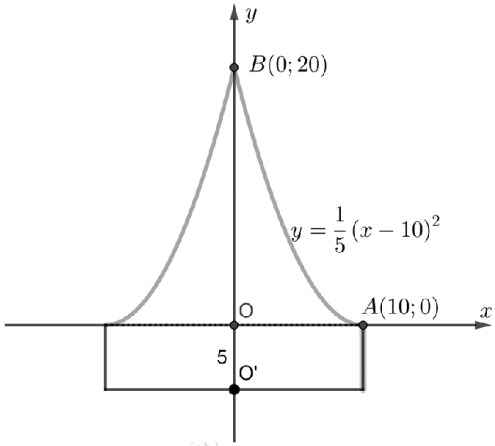
Câu 19. **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn An đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO'=5$ cm, $OA=10$ cm, $OB=20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A. Thể tích của chiếc mũ bằng



A. $\frac{2750\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$ **B.** $\frac{2500\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$ **C.** $\frac{2050\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$ **D.** $\frac{2250\pi}{3}\left(\text{cm}^3\right)$

Lời giải

Chọn B



Ta gọi thể tích của chiếc mũ là V.

Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA=10$ cm và đường cao $OO'=5$ cm là V_1.

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Oy là V_2.

Ta có $V=V_1+V_2$

$V_1=5.10^2\pi=500\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Do parabol có đỉnh A nên nó có phương trình dạng $(P): y=a(x-10)^2$.

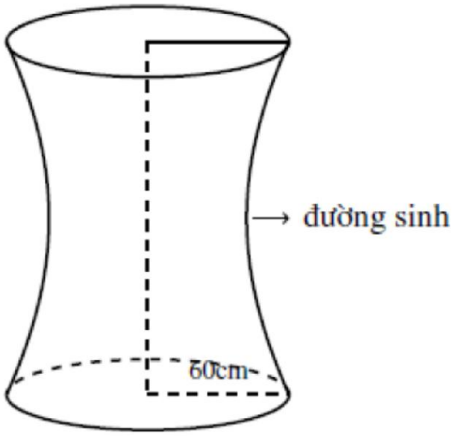
Vì (P) qua điểm $B(0;20)$ nên $a=\frac{1}{5}$.

Do đó, $(P): y=\frac{1}{5}(x-10)^2$. Từ đó suy ra $x=10-\sqrt{5y}$ (do $x<10$).

Suy ra $V_2=\pi\int_0^{20}\left(10-\sqrt{5y}\right)^2\text{dy}=\pi\left(3000-\frac{8000}{3}\right)=\frac{1000}{3}\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$.

Do đó $V=V_1+V_2=\frac{1000}{3}\pi+500\pi=\frac{2500}{3}\pi\ \left(\text{cm}^3\right)$.

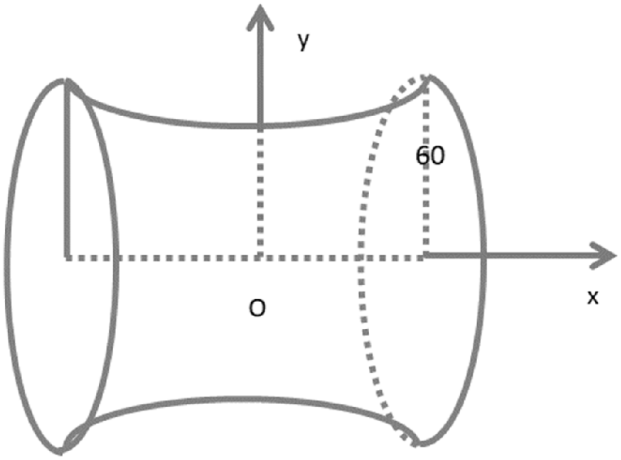
Câu 20. Cho chiếc trống như hình vẽ, có đường sinh là nửa elip được cắt bởi trục lớn với độ dài trục lớn bằng 80 cm, độ dài trục bé bằng 60 cm và đáy trống là hình tròn có bán kính bằng 60 cm. Tính thể tích V của chiếc trống (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



A. $V=344963\,\text{cm}^3$ **B.** $V=344964\,\text{cm}^3$ **C.** $V=208347\,\text{cm}^3$ **D.** $V=208346\,\text{cm}^3$

Lời giải

Đặt hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ (trục hoành là trục của chiếc trống, gốc tọa độ là trung điểm của đường cao chiếc trống, đơn vị: dm).



Gọi (E) là elip có phương trình $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ thì ảnh của (E) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(0;6)$ là elip (E') có phương trình $\frac{x^2}{16}+\frac{(y-6)^2}{9}=1$.

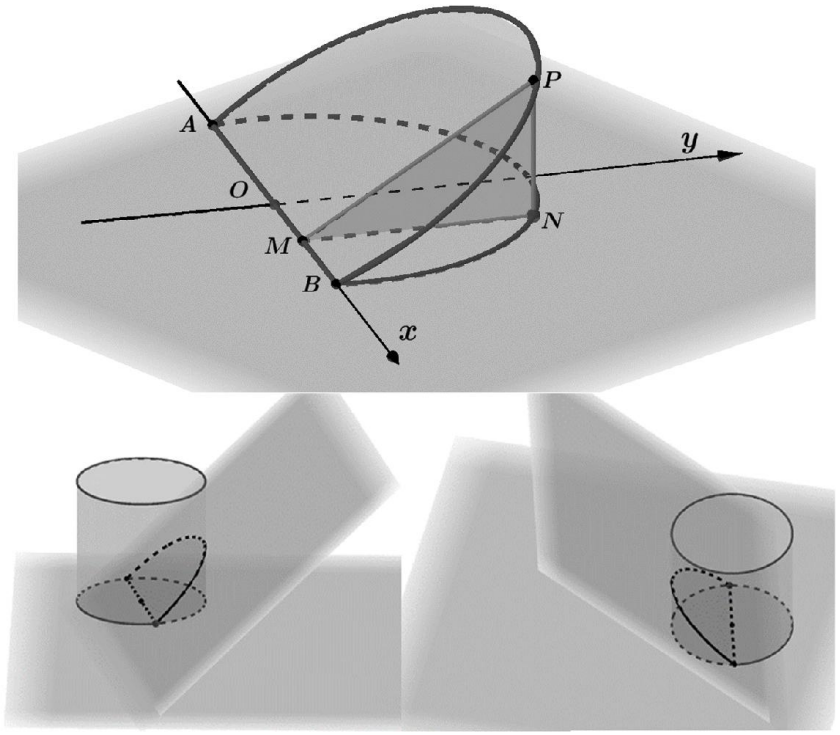
Suy ra, phương trình của đường sinh là: $y=6-\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.

Do đó, thể tích của chiếc trống là: $V=\pi\int_{-4}^{4}\left(6-\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\right)^2 dx\approx 344,964\ (\text{dm}^3)$.

Câu 21. Cho một vật thể bằng gỗ có dạng hình trụ với chiều cao và bán kính đáy cùng bằng R. Cắt khối gỗ đó bởi một mặt phẳng đi qua đường kính của một mặt đáy của khối gỗ và tạo với mặt phẳng đáy của khối gỗ một góc 30^0 ta thu được hai khối gỗ có thể tích là V_1 và V_2, với $V_1<V_2$. Thể tích V_1 bằng?

A. $V_1=\frac{2\sqrt{3}R^3}{9}$. **B.** $V_1=\frac{\sqrt{3}\pi R^3}{27}$. **C.** $V_1=\frac{\sqrt{3}\pi R^3}{18}$. **D.** $V_1=\frac{\sqrt{3}R^3}{27}$.

Lời giải



Khi cắt khối gỗ hình trụ ta được một hình nêm có thể tích V_1 như hình vẽ.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Nửa đường tròn đường kính AB có phương trình là $y=\sqrt{R^2-x^2}$, $x\in[-R;R]$.

Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm M có hoành độ x, cắt hình nêm theo thiết diện là ΔMNP vuông tại N và có $\widehat{PMN}=30^0$.

Ta có $NM=y=\sqrt{R^2-x^2}\Rightarrow NP=MN.\tan 30^0=\dfrac{\sqrt{R^2-x^2}}{\sqrt{3}}$.

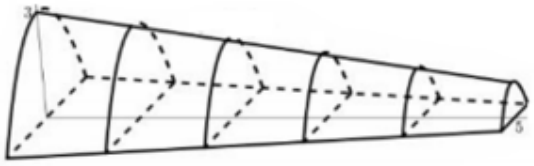
ΔMNP có diện tích $S(x)=\dfrac{1}{2}NM.NP=\dfrac{1}{2}.\dfrac{R^2-x^2}{\sqrt{3}}$.

Thể tích hình nêm là $V_1=\displaystyle\int_{-R}^{R}S(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-R}^{R}\frac{R^2-x^2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-R}^{R}=\frac{2\sqrt{3}R^3}{9}$.

* **Chú ý**: Có thể ghi nhớ công thức tính thể tích hình nêm:

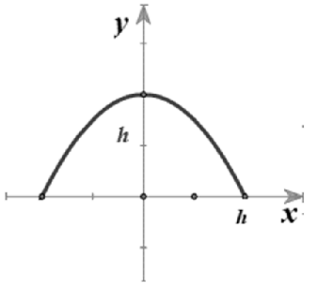
$V_1=\dfrac{2}{3}R^2h=\dfrac{2}{3}R^3\tan\alpha$, trong đó $R=\dfrac{AB}{2}$, $\alpha=\widehat{PMN}$.

Câu 22. **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Cho một mô hình $3-D$ mô phỏng một đường hầm như hình vẽ bên. Biết rằng đường hầm mô hình có chiều dài $5(\text{cm})$; khi cắt hình này bởi mặt phẳng vuông góc với đấy của nó, ta được thiết diện là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao parabol. Chiều cao của mỗi thiết diện parobol cho bởi công thức $y=3-\dfrac{2}{5}x\ (\text{cm})$, với $x\ (\text{cm})$ là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) không gian bên trong đường hầm mô hình (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



A. 29. **B.** 27. **C.** 31. **D.** 33.

Lời giải



Xét một thiết diện parabol có chiều cao là h và độ dài đáy $2h$ và chọn hệ trục Oxy như hình vẽ trên.

Parabol (P) có phương trình $(P): y = ax^2 + h, (a < 0)$

Có $B(h;0) \in (P) \Leftrightarrow 0 = ah^2 + h \Leftrightarrow a = -\frac{1}{h} (do\ h > 0)$

Diện tích S của thiết diện: $S = \int_{-h}^{h} \left(-\frac{1}{h}x^2 + h \right) \mathrm{dx} = \frac{4h^2}{3}$, $h = 3 - \frac{2}{5}x$

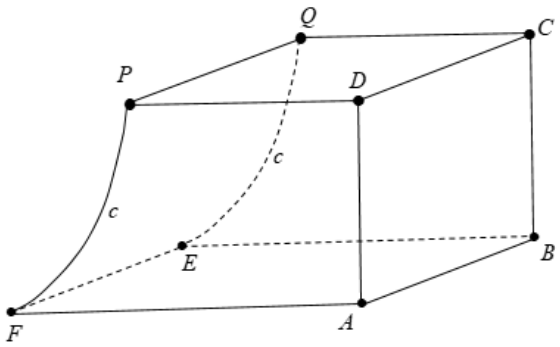
$\Rightarrow S(x) = \frac{4}{3}\left(3 - \frac{2}{5}x\right)^2$

Suy ra thể tích không gian bên trong của đường hầm mô hình:

$\Rightarrow V = \int_0^5 S(x)\mathrm{dx} = \int_0^5 \frac{4}{3}\left(3 - \frac{2}{5}x\right)^2 \mathrm{dx} \approx 28,888$

$\Rightarrow V \approx 29\ (\mathrm{cm}^3)$

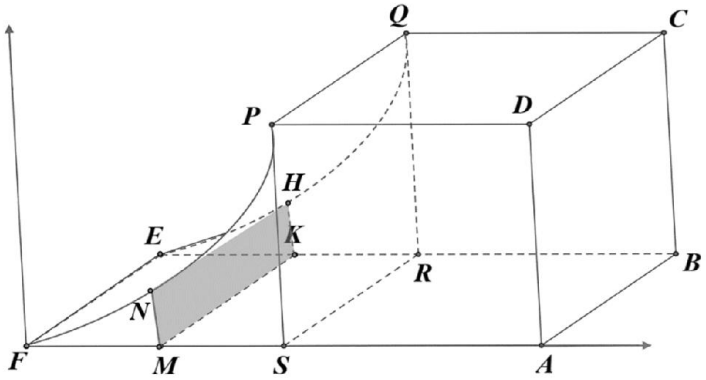
Câu 23. Một chi tiết máy được thiết kế như hình vẽ bên.



Các tứ giác $ABCD, CDPQ$ là các hình vuông cạnh $2,5\,cm$. Tứ giác $ABEF$ là hình chữ nhật có $BE = 3,5\,cm$. Mặt bên $PQEF$ được mài nhẵn theo đường parabol (P) có đỉnh parabol nằm trên cạnh EF. Thể tích của chi tiết máy bằng

A. $\frac{395}{24} cm^3$. **B.** $\frac{50}{3} cm^3$. **C.** $\frac{125}{8} cm^3$. **D.** $\frac{425}{24} cm^3$.

Lời giải



Gọi hình chiếu của P,Q trên AF và BE là R và S. Vật thể được chia thành hình lập phương $ABCD.PQRS$ có cạnh $2,5\,cm$, thể tích $V_1=\dfrac{125}{8}cm^3$ và phần còn lại có thể tích V_2. Khi đó thể tích vật thể $V=V_1+V_2=\dfrac{125}{8}+V_2$.

Đặt hệ trục $Oxyz$ sao cho O trùng với F, Ox trùng với FA, Oy trùng với tia Fy song song với AD. Khi đó Parabol (P) có phương trình dạng $y=ax^2$, đi qua điểm $P\left(1;\dfrac{5}{2}\right)$ do đó $a=\dfrac{5}{2}\Rightarrow y=\dfrac{5}{2}x^2$.

Cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với Ox và đi qua điểm $M(x;0;0),0\le x\le 1$ ta được thiết diện là hình chữ nhật $MNHK$ có cạnh là $MN=\dfrac{5}{2}x^2$ và $MK=\dfrac{5}{2}$ do đó diện tích $S(x)=\dfrac{25}{4}x^2$

Áp dụng công thức thể tích vật thể ta có $V_2=\int\limits_0^1\dfrac{25}{4}x^2dx=\dfrac{25}{12}$

Từ đó $V=\dfrac{125}{8}+\dfrac{25}{12}=\dfrac{425}{24}cm^3$

Câu 24. **(THPT Lục Ngạn 2018)** Bổ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn $28\,\text{cm}$, trục nhỏ $25\,\text{cm}$. Biết cứ $1000\,\text{cm}^3$ dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

A. 183000 đồng. **B.** 180000 đồng. **C.** 185000 đồng. **D.** 190000 đồng.

Lời giải

Đường elip có trục lớn $28\,\text{cm}$, trục nhỏ $25\,\text{cm}$ có phương trình

$$+\frac{y^2}{\left(\frac{25}{2}\right)^2}=1\Leftrightarrow y^2=\left(\frac{25}{2}\right)^2\left(1-\frac{x^2}{14^2}\right)\Leftrightarrow y=\pm\frac{25}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{14^2}}.$$

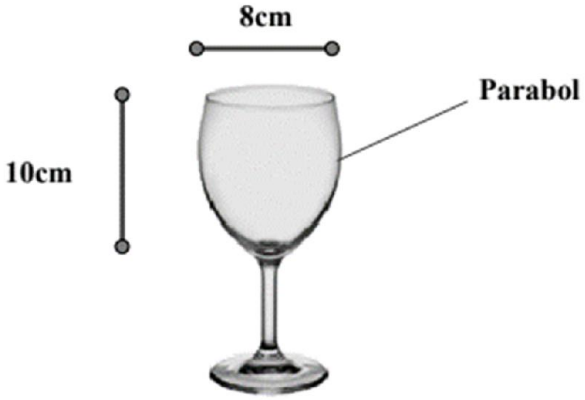
Do đó thể tích quả dưa là

$$V=\pi\int_{-14}^{14}\left(\frac{25}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{14^2}}\right)^2dx=\pi\left(\frac{25}{2}\right)^2\int_{-14}^{14}\left(1-\frac{x^2}{14^2}\right)^2dx=\pi\left(\frac{25}{2}\right)^2.\left(x-\frac{x^3}{3.14^2}\right)\Bigg|_{-14}^{14}=\pi\left(\frac{25}{2}\right)^2.\frac{56}{3}$$

$$=\frac{8750\pi}{3}\text{cm}^3.$$

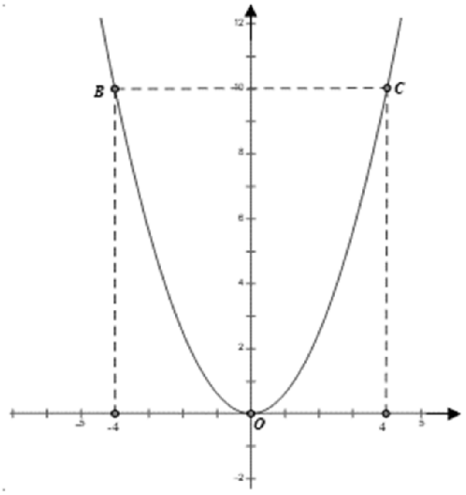
Do đó tiền bán nước thu được là $\frac{8750\pi.20000}{3.1000} \approx 183259$ đồng.

Câu 25. **(THPT Thực Hành - TPHCM - 2018)** Một cốc rượu có hình dạng tròn xoay và kích thước như hình vẽ, thiết diện dọc của cốc (bổ dọc cốc thành 2 phần bằng nhau) là một đường Parabol. Tính thể tích tối đa mà cốc có thể chứa được (làm tròn 2 chữ số thập phân)



A. $V \approx 320cm^3$. **B.** $V \approx 1005,31cm^3$. **C.** $V \approx 251,33cm^3$. **D.** $V \approx 502,65cm^3$.

Lời giải

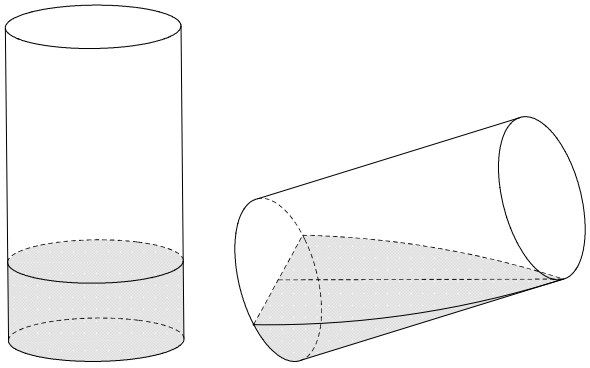


Parabol có phương trình $y = \frac{5}{8}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{5}y$

Thể tích tối đa cốc:

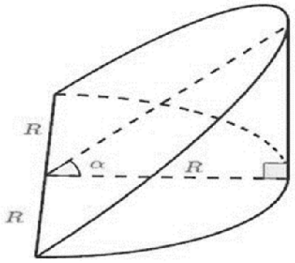
$V = \pi \int_0^{10} \left(\frac{8}{5}y \right) .dy \approx 251,33$.

Câu 26. **(Chuyên Thoại Ngọc Hầu - 2018)** Có một cốc nước thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 6cm, chiều cao lòng cốc là 10cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



A. $240\,\text{cm}^3$. **B.** $240\pi\,\text{cm}^3$. **C.** $120\,\text{cm}^3$. **D.** $120\pi\,\text{cm}^3$.

Lời giải



Cách 1. Xét thiết diện cắt cốc thủy tinh vuông góc với đường kính tại vị trí bất kỳ có:

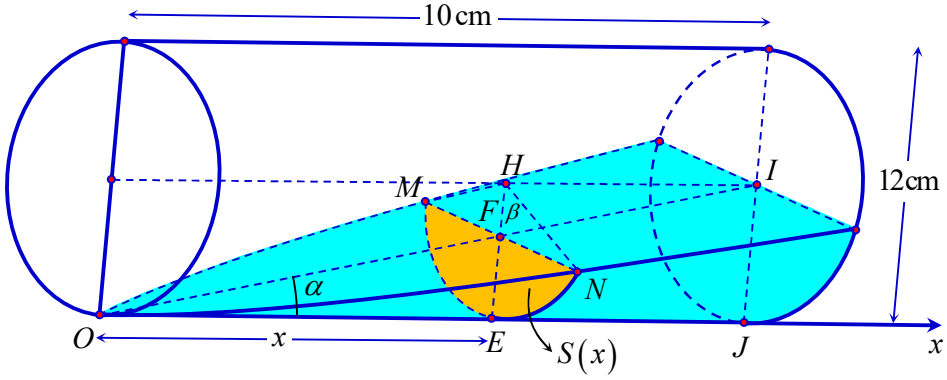
$S(x)=\frac{1}{2}\sqrt{R^2-x^2}.\sqrt{R^2-x^2}.\tan\alpha \Rightarrow S(x)=\frac{1}{2}\left(R^2-x^2\right)\tan\alpha$.

Thể tích hình cái nêm là: $V=\frac{1}{2}\tan\alpha\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$.

Thể tích khối nước tạo thành khi nguyên cốc có hình dạng cái nêm nên $V_{kn}=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$.

$\Rightarrow V_{kn}=\frac{2}{3}R^3.\frac{h}{R}=240\,\text{cm}^3$.

Cách 2. Dựng hệ trục tọa độ $Oxyz$



Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện do mặt phẳng có phương vuông góc với trục Ox với khối nước, mặt phẳng này cắt trục Ox tại điểm có hoành độ $h\ge x\ge 0$.

Gọi $\widehat{IOJ}=\alpha,\widehat{FHN}=\beta,OE=x$

$\tan\alpha=\frac{IJ}{OJ}=\frac{6}{10}=\frac{EF}{OE}\Rightarrow EF=\frac{6x}{10}\Rightarrow HF=6-\frac{6x}{10}$.

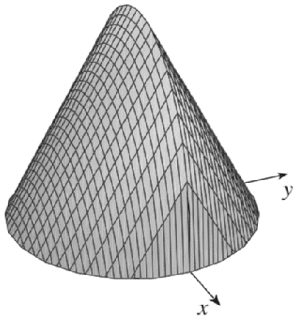
$$\cos\beta=\frac{HF}{HN}=\frac{6-\frac{6x}{10}}{6}=1-\frac{x}{10};\ \beta=\arccos\left(1-\frac{x}{10}\right)$$

$$S(x)=S_{(hinh\,quat)}-S_{HMN}=\frac{1}{2}HN^2.2\beta-\frac{1}{2}HM.HN.\sin 2\beta$$

$$\Rightarrow S(x)=6^2\arccos\left(1-\frac{x}{10}\right)-\frac{1}{2}.6.6.2\left(1-\frac{x}{10}\right)\sqrt{1-\left(1-\frac{x}{10}\right)^2}$$

$$\Rightarrow V=\int_0^{10}S(x)\mathrm{d}x=\int_0^{10}\left(36\arccos\left(1-\frac{x}{10}\right)-36\left(1-\frac{x}{10}\right)\sqrt{1-\left(1-\frac{x}{10}\right)^2}\right)\mathrm{d}x=240.$$

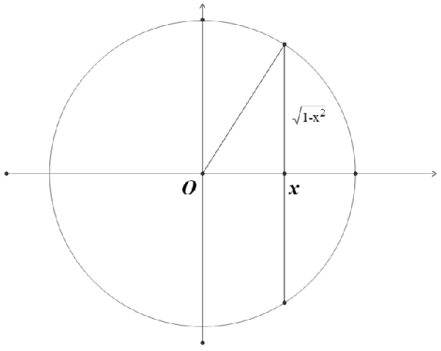
Câu 27. **(Chuyên Thoại Ngọc Hầu -- 2018)** Cho vật thể đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (tham khảo hình vẽ). Khi cắt vật thể bằng mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\left(-1\le x\le 1\right)$ thì được thiết diện là một tam giác đều. Thể tích V của vật thể đó là



A. $V=\sqrt{3}$. **B.** $V=3\sqrt{3}$. **C.** $V=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\pi$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải



Do vật thể có đáy là đường tròn và khi cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox được thiết diện là tam giác đều do đó vật thể đối xứng qua mặt phẳng vuông góc với trục Oy tại điểm O.

Cạnh của tam giác đều thiết diện là: $a=2\sqrt{1-x^2}$.

Diện tích tam giác thiết diện là: $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\left(1-x^2\right)\sqrt{3}$.

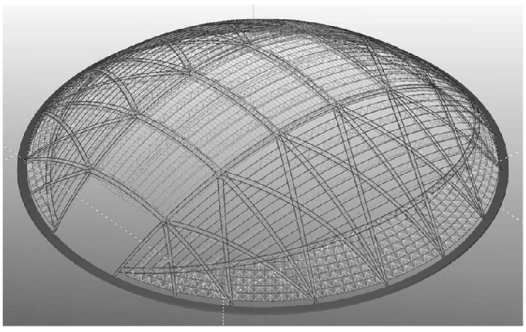
Thể tích khối cần tìm là:

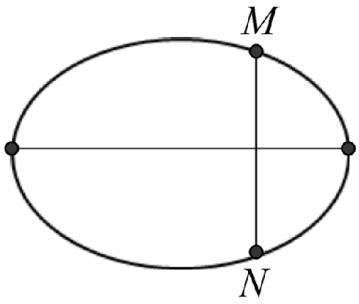
$$V=2\int_0^1 S\mathrm{d}x=2\int_0^1\sqrt{3}\left(1-x^2\right)=2\sqrt{3}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

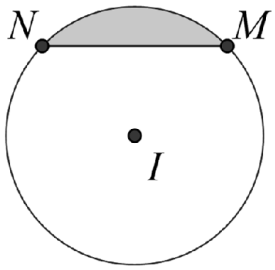
Câu 28. **(THPT Bình Giang - Hải Dương - 2018)** Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$ (hình 3). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt elip ở M,N (hình 3) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình 4) với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN}=90^0$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư

cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Hỏi thể tích xấp xỉ bao nhiêu?





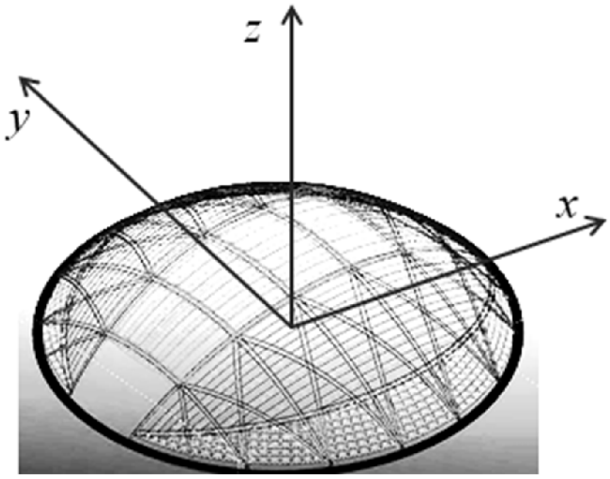


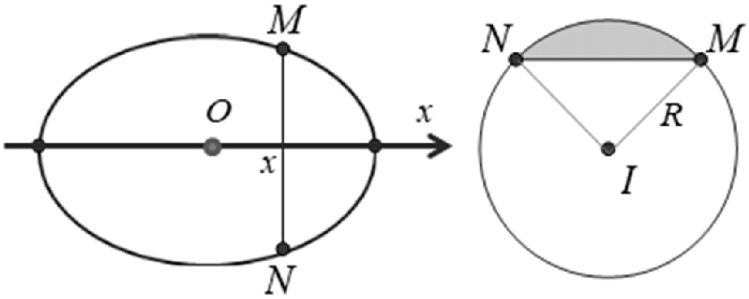


Hình 3

A. $57793m^3$. **B.** $115586m^3$. **C.** $32162m^3$. **D.** $101793m^3$.

Lời giải





Chọn hệ trục như hình vẽ

Ta cần tìm diện tích của $S(x)$ thiết diện.

Gọi $d\left(O,MN\right)=x$

$\left(E\right):\dfrac{x^2}{75^2}+\dfrac{y^2}{45^2}=1.$

Lúc đó $MN=2y=2\sqrt{45^2\left(1-\dfrac{x^2}{75^2}\right)}=90\sqrt{1-\dfrac{x^2}{75^2}}$

$\Rightarrow R=\dfrac{MN}{\sqrt{2}}=\dfrac{90}{\sqrt{2}}.\sqrt{1-\dfrac{x^2}{75^2}}\Rightarrow R^2=\dfrac{90^2}{2}.\left(1-\dfrac{x^2}{75^2}\right)$

$S\left(x\right)=\dfrac{1}{4}\pi R^2-\dfrac{1}{2}R^2=\left(\dfrac{1}{4}\pi-\dfrac{1}{2}\right)R^2=\left(\pi-2\right)\dfrac{2025}{2}.\left(1-\dfrac{x^2}{75^2}\right).$

Thể tích khoảng không cần tìm là

$V=\displaystyle\int_{-75}^{75}\left(\pi-2\right)\dfrac{2025}{2}.\left(1-\dfrac{x^2}{75^2}\right)\approx 115586m^3.$

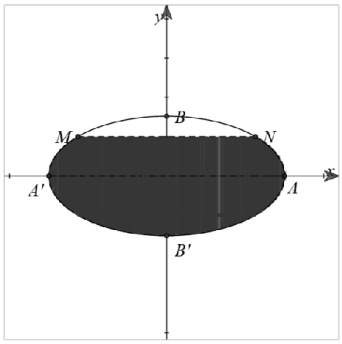
Câu 29. **(Trần Phú - Hà Tĩnh - 2018)** Một cái thùng đựng dầu có thiết diện ngang (mặt trong của thùng) là một đường elip có trục lớn bằng 1m, trục bé bằng $0{,}8\text{m}$, chiều dài (mặt trong của thùng) bằng 3m. Đươc đặt sao cho trục bé nằm theo phương thẳng đứng (như hình bên). Biết chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là $0{,}6\text{m}$. Tính thể tích V của dầu có trong thùng (Kết quả làm tròn đến phần trăm).



A. $V=1{,}52\text{m}^3$. **B.** $V=1{,}31\text{m}^3$. **C.** $V=1{,}27\text{m}^3$. **D.** $V=1{,}19\text{m}^3$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Theo đề bài ta có phương trình của Elip là $\dfrac{x^2}{\dfrac{1}{4}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{4}{25}}=1.$

Gọi M, N lần lượt là giao điểm của dầu với elip.

Gọi S_1 là diện tích của Elip ta có $S_1=\pi ab=\pi\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{5}=\dfrac{\pi}{5}.$

Gọi S_2 là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi Elip và đường thẳng MN.

Theo đề bài chiều cao của dầu hiện có trong thùng (tính từ đáy thùng đến mặt dầu) là 0,6m nên ta có phương trình của đường thẳng MN là $y=\frac{1}{5}$.

Mặt khác từ phương trình $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{4}{25}}=1$ ta có $y=\frac{4}{5}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}$.

Do đường thẳng $y=\frac{1}{5}$ cắt Elip tại hai điểm M, N có hoành độ lần lượt là $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ và $\frac{\sqrt{3}}{4}$ nên

$$S_2=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\left(\frac{4}{5}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}-\frac{1}{5}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{5}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,\mathrm{d}x-\frac{\sqrt{3}}{10}.$$

Tính $I=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Đặt $x=\frac{1}{2}\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cos t\mathrm{d}t$.

Đổi cận: Khi $x=\frac{-\sqrt{3}}{4}$ thì $t=-\frac{\pi}{3}$; Khi $x=\frac{\sqrt{3}}{4}$ thì $t=\frac{\pi}{3}$.

$$I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{8}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Vậy $S_2=\frac{4}{5}\frac{1}{8}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{10}=\frac{\pi}{15}-\frac{\sqrt{3}}{20}$.

Thể tích của dầu trong thùng là $V=\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{15}+\frac{\sqrt{3}}{20}\right).3=1,52$.

Câu 30. **(Sở Yên Bái - 2018)** Người ta thay nước mới cho một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là 280 cm. Giả sử $h(t)$ là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao mực nước tại giây thứ t là $h'(t)=\frac{1}{500}\sqrt[3]{t+3}$ và lúc đầu hồ bơi không có nước. Hỏi sau bao lâu thì bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi (làm tròn đến giây)?

A. 2 giờ 36 giây. **B.** 2 giờ 34 giây. **C.** 2 giờ 35 giây. **D.** 2 giờ 36 giây.

Lời giải

Gọi x là thời điểm bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của bể (x tính bằng giây).

Ta có: $\int_0^x\frac{1}{500}\sqrt[3]{t+3}\mathrm{d}t=210\Rightarrow\frac{3}{4}(t+3)^{\frac{4}{3}}\Big|_0^x=105000\Rightarrow(x+3)\sqrt[3]{x+3}-3\sqrt[3]{3}=140000$

$\Rightarrow\sqrt[3]{(x+3)^4}=3\sqrt[3]{3}+140000\Rightarrow x+3=\sqrt[4]{\left(3\sqrt[3]{3}+140000\right)^3}\Rightarrow x=\sqrt[4]{\left(3\sqrt[3]{3}+140000\right)^3}-3$

$\Rightarrow x\approx 7234,8256$.

Câu 31. **(THPT Ngô Quyền - Quảng Ninh 2018)** Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t)=6at^2+2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90m^3$, sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504m^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

A. $1458m^3$. **B.** $600m^3$. **C.** $2200m^3$. **D.** $4200m^3$.

Lời giải

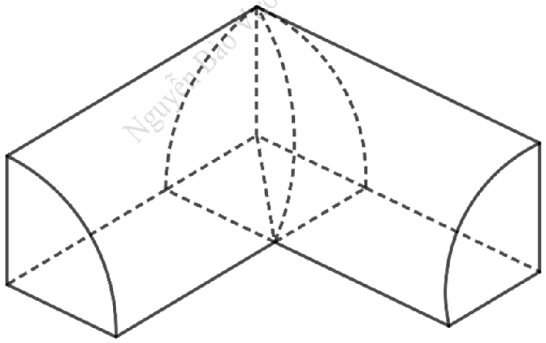
$\int_0^3 (6at^2+2bt)\,dt=90 \Leftrightarrow (2at^3+bt^2)\Big|_0^3=90 \Leftrightarrow 54a+9b=90$ (1)

$\int_0^6 (6at^2+2bt)\,dt=504 \Leftrightarrow (2at^3+bt^2)\Big|_0^6=504 \Leftrightarrow 432a+36b=504$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2}{3} \\ b=6 \end{cases}$. Sau khi bơm 9 giây thì thể tích nước trong bể là:

$V=\int_0^9 (4t^2+12t)\,dt=\left(\frac{4}{3}t^3+6t^2\right)\Big|_0^9=1458(m^3)$.

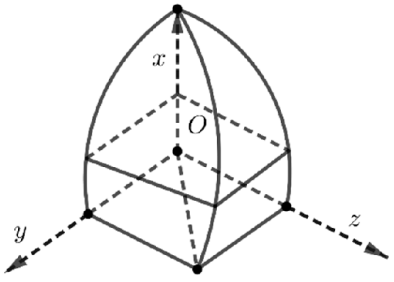
Câu 32. **(Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương - Lần 2 - 2020)** Gọi (H) là phần giao của hai khối $\frac{1}{4}$ hình trụ có bán kính a, hai trục hình trụ vuông góc với nhau như hình vẽ sau. Tính thể tích của khối (H).



A. $V_{(H)}=\dfrac{a^3}{2}$. **B.** $V_{(H)}=\dfrac{3a^3}{4}$. **C.** $V_{(H)}=\dfrac{2a^3}{3}$. **D.** $V_{(H)}=\dfrac{\pi a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn C



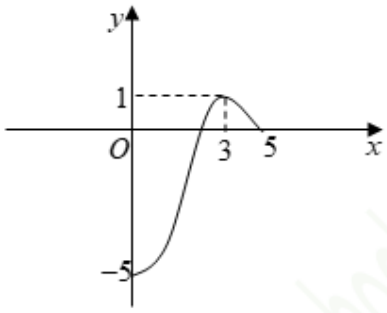
• Đặt hệ toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ, xét mặt cắt song song với mp (Oyz) cắt trục Ox tại x: thiết diện mặt cắt luôn là hình vuông có cạnh $\sqrt{a^2-x^2}$ $(0\le x\le a)$.

• Do đó thiết diện mặt cắt có diện tích: $S(x)=a^2-x^2$.

• Vậy $V_{(H)}=\int_0^a S(x)\mathrm{d}x=\int_0^a\left(a^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{2a^3}{3}$.

Dạng 3. Ứng dụng tích phân để giải quyết một số bài toán đại số

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ trên đoạn $[0;5]$ được cho như hình bên.



Tìm mệnh đề đúng

A. $f(0)=f(5)<f(3)$. **B.** $f(3)<f(0)=f(5)$.

C. $f(3)<f(0)<f(5)$. **D.** $f(3)<f(5)<f(0)$.

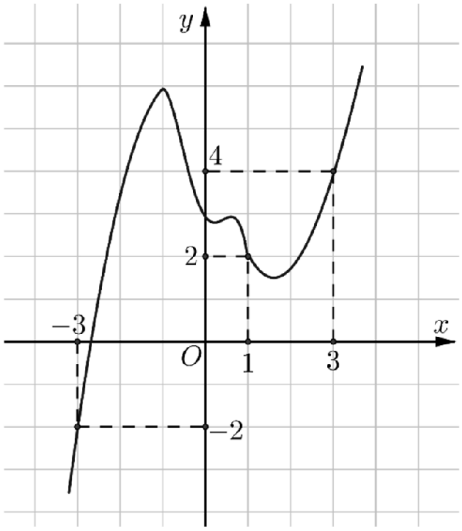
Lời giải

Ta có $\int_3^5 f'(x)\mathrm{d}x=f(5)-f(3)>0$, do đó $f(5)>f(3)$.

$\int_0^3 f'(x)\mathrm{d}x=f(3)-f(0)<0$, do đó $f(3)<f(0)$

$\int_0^5 f'(x)\mathrm{d}x=f(5)-f(0)<0$, do đó $f(5)<f(0)$

Câu 2. **(Mã 110 B 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(1)>g(-3)>g(3)$ **B.** $g(1)>g(3)>g(-3)$

C. $g(3)>g(-3)>g(1)$ **D.** $g(-3)>g(3)>g(1)$

Lời giải

Chọn B

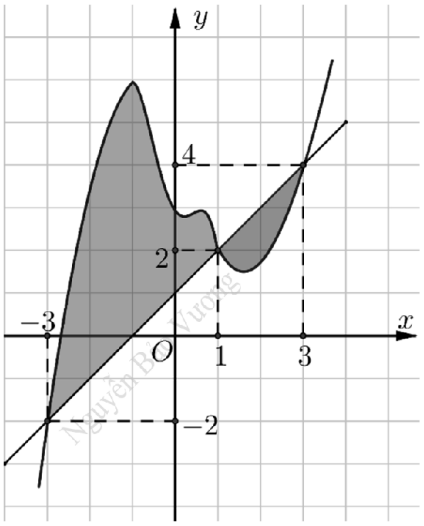
Ta có $g'(x)=2f'(x)-2(x+1)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\pm 3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(-3)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $g(-3)<g(1)$ và $g(3)<g(1)$. (1)



Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=f'(x),\ y=x+1,\ x=-3,\ x=1$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=x+1,\ y=f'(x),\ x=1,\ x=3$

Dựa vào hình vẽ, ta thấy: $S_1>S_2>0$.

Suy ra: $S_1-S_2>0$

$\Rightarrow \int\limits_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{3}\left[(x+1)-f'(x)\right]\mathrm{d}x>0$

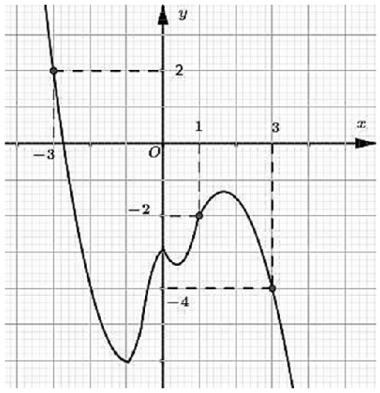
$\Rightarrow \int\limits_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x>0$

$\Rightarrow \int\limits_{-3}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x>0$.

Khi đó: $g(3)-g(-3)=\int\limits_{-3}^{3}g'(x)\mathrm{d}x=2\int\limits_{-3}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x>0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $g(1)>g(3)>g(-3)$.

Câu 3. **(Mã 105 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ của hàm số như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)+x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(3)<g(-3)<g(1)$ **B.** $g(1)<g(-3)<g(3)$

C. $g(-3)<g(3)<g(-1)$ **D.** $g(1)<g(3)<g(-3)$

Lời giải

Chọn D

Ta có $g'(x)=2f'(x)+2x \Rightarrow g'(x)=0 \Rightarrow x\in\{-3;1;3\}$.

Từ đồ thị của $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm $g(x)$.

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$g(-3)$	↘	$g(1)$	↗	$g(3)$	↘	$-\infty$

Suy ra $g(3)>g(1)$.

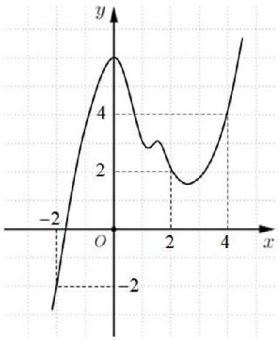
Kết hợp với BBT ta có:

$$\int_{-3}^{1}\left(-g'(x)\right)\mathrm{d}x>\int_{1}^{3}g'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_{1}^{-3}g'(x)\mathrm{d}x>\int_{1}^{3}g'(x)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow g(-3)-g(1)>g(3)-g(1) \Leftrightarrow g(-3)>g(3)$$

Vậy ta có $g(-3)>g(3)>g(1)$.

Câu 4. **(Mã123 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $h(x)=2f(x)-x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $h(4)=h(-2)<h(2)$ **B.** $h(2)>h(-2)>h(4)$

C. $h(4)=h(-2)>h(2)$ **D.** $h(2)>h(4)>h(-2)$

Lời giải

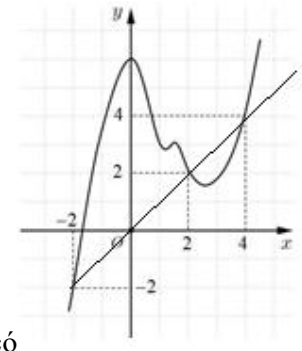
Chọn D

Ta có $h'(x)=2\left[f'(x)-x\right]; h'(x)=0\Rightarrow x\in\{-2;2;4\}$.

Bảng biến thiên

x	-2		2		4	
$h'(x)$	- 0	+	0	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$ $h(-2)$	$\nearrow$	$h(2)$	$\searrow$	$h(4)$	$\nearrow$

Suy ra $h(2)>h(4)$.

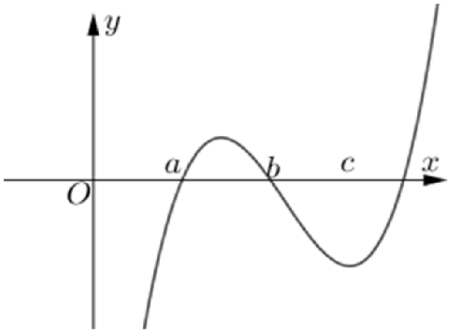


Kết hợp với đồ thị hàm số y=x ta có

$\int_{-2}^{4}h'(x)\mathrm{d}x>0\Leftrightarrow h(4)-h(-2)>0\Leftrightarrow h(4)>h(-2)$.

Vậy ta có $h(2)>h(4)>h(-2)$.

Câu 5. **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a<b<c$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $f(b)>f(a)>f(c)$. **B.** $f(a)>f(b)>f(c)$.

C. $f(c)>f(a)>f(b)$. **D.** $f(c)>f(b)>f(a)$.

Lời giải

Chọn A

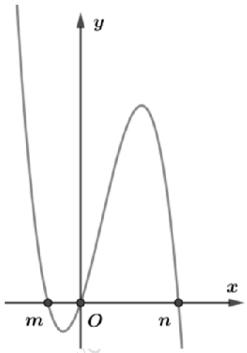
Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(a)$	↗	$f(b)$	↘	$f(c)$	↗	

Ta có $S_1=\int\limits_a^b\left|f'(x)\right|dx=\int\limits_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)$, $S_2=\int\limits_b^c\left|f'(x)\right|dx=-\int\limits_b^c f'(x)dx=f(b)-f(c)$.

Vì $\begin{cases}S_1<S_2\Leftrightarrow f(b)-f(a)<f(b)-f(c)\Leftrightarrow f(c)<f(a)\\ \int\limits_a^b f'(x)dx>0\Leftrightarrow f(b)>f(a)\end{cases}$ $\Rightarrow f(c)<f(a)<f(b)$

Câu 6. **(Chuyên Thái Bình - Lần 3 - 2020)** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc bốn, có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

A. $f(0)<0<f(m)$. **B.** $f(0)>0$.

C. $f(m)<0<f(n)$. **D.** $f(0)<0<f(n)$.

Lời giải

Chọn A

Xét $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=m\\x=n\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		m		0		n		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(m)$	↘	$f(0)$	↗	$f(n)$	↘	$-\infty$

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y=f'(x)$; $Ox;x=m;Oy$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị $y=f'(x);Oy;x=n$

Từ hình vẽ ta thấy $S_2>S_1$

$\Leftrightarrow \int_0^n |f'(x)|dx > \int_m^0 |f'(x)|dx$

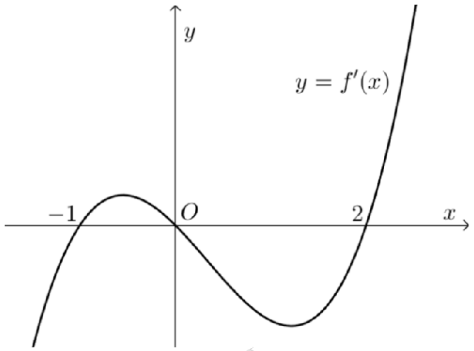
$\Leftrightarrow \int_0^n f'(x)dx > \int_m^0 -f'(x)dx$

$\Leftrightarrow f(n)-f(0) > -[f(0)-f(m)]$

$\Leftrightarrow f(n) > f(m)$.

Từ bảng biến thiên kết hợp với điều kiện $f(n) > f(m)$ ta thấy để phương trình $f(x)=0$ có 4 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow f(0) < 0 < f(m)$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình bên dưới. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $f(0) > f(2) > f(-1)$.

B. $f(0) > f(-1) > f(2)$.

C. $f(2) > f(0) > f(-1)$.

D. $f(-1) > f(0) > f(2)$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Theo đồ thị, ta có:

$f(0)-f(-1)=\int_{-1}^{0} f'(x)\,dx > 0$

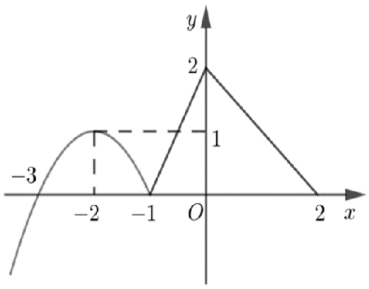
$\Rightarrow f(0) > f(-1)$ (1),

$f(2)-f(-1)=\int_{-1}^{2} f'(x)\,dx=\int_{-1}^{0} f'(x)\,dx+\int_{0}^{2} f'(x)\,dx < 0$

$\Rightarrow f(-1) > f(2)$ (2).

Từ (1) và $(2) \Rightarrow f(0) > f(-1) > f(2)$.

Câu 8. **(Phú Thọ -2019)** Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $[-3;2]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y=ax^2+bx+c$.)



Biết $f(-3)=0$, giá trị của $f(-1)+f(1)$ bằng

A. $\frac{23}{6}$ **B.** $\frac{31}{6}$ **C.** $\frac{35}{3}$ **D.** $\frac{9}{2}$

Lời giải

Chọn B

Parabol $y=ax^2+bx+c$ có đỉnh $I(-2;1)$ và đi qua điểm $(-3;0)$ nên ta có

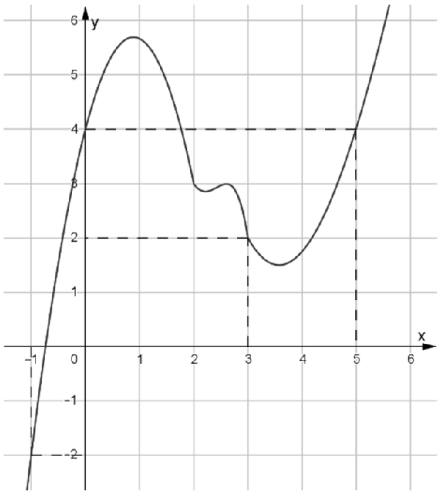
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a}=-2 \\ 4a-2b+c=1 \\ 9a-3b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-4 \\ c=-3 \end{cases} \Rightarrow y=-x^2-4x-3.$$

Do $f(-3)=0$ nên $f(-1)+f(1)=\left[f(1)-f(0)\right]+\left[f(0)-f(-1)\right]+2\left[f(-1)-f(-3)\right]$

$$=\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^0 f'(x)\mathrm{d}x+2\int_{-3}^{-1}\left(-x^2-4x-3\right)\mathrm{d}x=S_1+S_2+2\int_{-3}^{-1}\left(-x^2-4x-3\right)\mathrm{d}x=1+\frac{3}{2}+\frac{8}{3}=\frac{31}{6}.$$

Với S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=-1, x=0$ và $x=0, x=1$. Dễ thấy $S_1=1; S_2=\frac{3}{2}$.

Câu 9. **(THPT Lương Văn Can - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x)=2f(x)-(x-1)^2$.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $g(-1)<g(3)<g(5)$. **B.** $g(-1)<g(5)<g(3)$.

C. $g(5)<g(-1)<g(3)$. **D.** $g(3)<g(5)<g(-1)$.

Lời giải

Ta có $g'(x)=2\left[f'(x)-(x-1)\right]$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x-1$.

Dựa vào đồ thị ta có các nghiệm sau: $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \\ x=5 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		5		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(3)$	$\searrow$	$g(5)$	$\nearrow$	

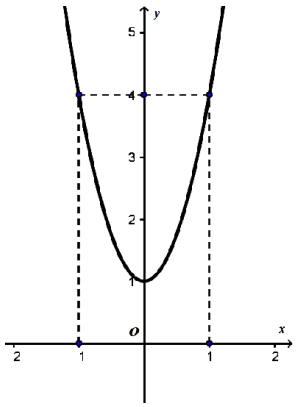
Ngoài ra dựa vào đồ thị ta có $\frac{1}{2}\int_{-1}^{3} g'(x)\,\mathrm{d}x > -\frac{1}{2}\int_{3}^{5} g'(x)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow g(x)\big|_{-1}^{3} > -g(x)\big|_{3}^{5}$

$\Leftrightarrow g(3)-g(-1)>g(3)-g(5) \Leftrightarrow g(5)>g(-1)$.

Vậy $g(3)>g(5)>g(-1)$.

Câu 10. **(THPT Hậu Lộc 2 - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có đồ thị là (C). Biết rằng đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ bên. Tính giá trị $H=f(4)-f(2)$?

A. $H=45$. **B.** $H=64$. **C.** $H=51$. **D.** $H=58$.



Lời giải

Theo bài ra $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R},a\neq 0)$ do đó $y=f'(x)$ là hàm bậc hai có dạng $y=f'(x)=a'x^2+b'x+c'$.

Dựa vào đồ thị ta có: $\begin{cases} c'=1 \\ a'-b'+c'=4 \\ a'+b'+c'=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a'=3 \\ b'=0 \\ c'=1 \end{cases} \Rightarrow y=f'(x)=3x^2+1$.

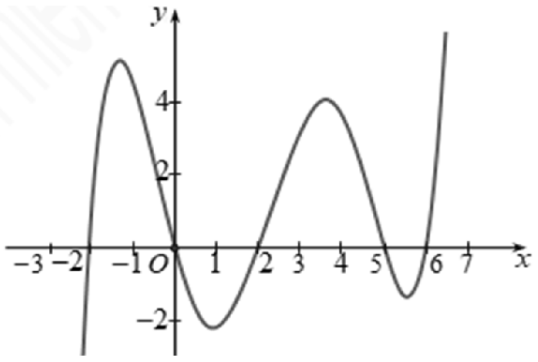
Gọi S là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$, trục Ox, $x=4$, $x=2$.

Ta có $S=\int_{2}^{4}\left(3x^2+1\right)\mathrm{d}x=58$.

Lại có: $S=\int_{2}^{4}f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\Big|_{2}^{4}=f(4)-f(2)$.

Do đó: $H=f(4)-f(2)=58$.

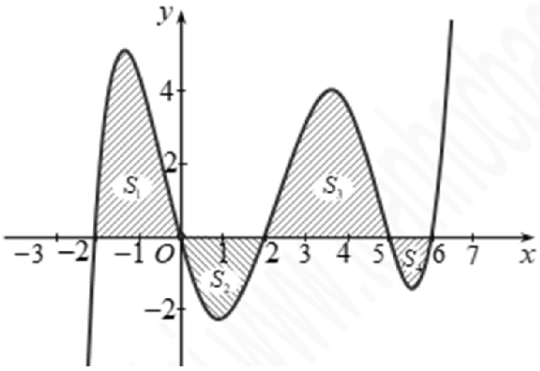
Câu 11. **(Thanh Hóa - 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $M=\max\limits_{[-2;6]}f(x)$, $m=\min\limits_{[-2;6]}f(x)$, $T=M+m$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $T=f(0)+f(-2)$. **B.** $T=f(5)+f(-2)$.

C. $T=f(5)+f(6)$. **D.** $T=f(0)+f(2)$.

Lời giải



Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$ với và trục hoành.

Quan sát hình vẽ, ta có

◈ $\int_{-2}^{0}f'(x)\mathrm{d}x>\int_{0}^{2}-f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)\Big|_{-2}^{0}>f(x)\Big|_{2}^{0}$

$\Leftrightarrow f(0)-f(-2)>f(0)-f(2) \Leftrightarrow f(-2)<f(2)$

◈ $\int_{0}^{2}-f'(x)\mathrm{d}x<\int_{2}^{5}f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)\Big|_{2}^{0}<f(x)\Big|_{2}^{5}$

$\Leftrightarrow f(0)-f(2)<f(5)-f(2) \Leftrightarrow f(0)<f(5)$

◈ $\int_{2}^{5}f'(x)\mathrm{d}x>\int_{5}^{6}-f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(x)\Big|_{2}^{5}>f(x)\Big|_{6}^{5}$

$\Leftrightarrow f(5)-f(2)>f(5)-f(6) \Leftrightarrow f(2)<f(6)$

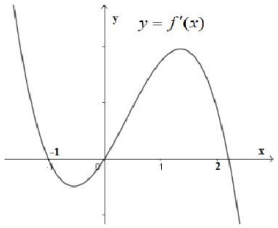
Ta có bảng biến thiên

x	-2		0		2		5		6
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$f(-2)$	↗	$f(0)$	↘	$f(2)$	↗	$f(5)$	↘	$f(6)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $M=\max\limits_{[-2;6]} f(x)=f(5)$ và $m=\min\limits_{[-2;6]} f(x)=f(-2)$

Khi đó $T=f(5)+f(-2)$.

Câu 12. **(THPT Thăng Long 2019)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?



A. $a+c>0$. **B.** $a+b+c+d<0$.
C. $a+c<b+d$. **D.** $b+d-c>0$.

Lời giải

Chọn A

Theo đồ thị ta có $f'(0)=0\Leftrightarrow d=0$ và hệ số $a<0$.

Xét $\int\limits_{-1}^{0} f'(x)dx=f(x)\Big|_{-1}^{0}=-a+b-c+d$, mà $\int\limits_{-1}^{0} f'(x)dx<0$ nên ta có $-a+b-c+d<0\,(1)$

Hay $a+c>b+d$. Do đó ta loại **C.**

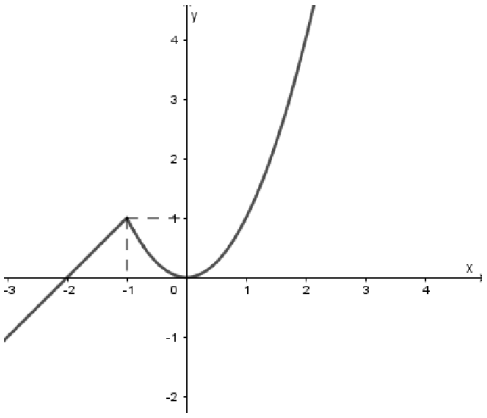
Thay $d=0$ ta có $a>b-c$, vì $a<0$ nên $b-c<0$. Loại **D.**

Xét $\int\limits_{0}^{1} f'(x)dx=f(x)\Big|_{0}^{1}=a+b+c+d$, mà $\int\limits_{0}^{1} f'(x)dx>0$ nên ta có $a+b+c+d>0\,(2)$.

Do đó ta loại **B.**

Từ (2) ta có $-a-b-c-d<0$ cộng từng vế với (1) ta có $a+c>0$

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị gồm một phần đường thẳng và một phần parabol có đỉnh là gốc tọa độ O như hình vẽ. Giá trị của $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$ bằng



A. $\frac{26}{3}$. **B.** $\frac{38}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{28}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có, phương trình đường thẳng có dạng $y=ax+b$.

Từ hình vẽ, ta thấy đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2;0), B(-1;1)$.

Suy ra, ta có hệ phương trình $\begin{cases}-2a+b=0\\-a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}\Rightarrow y=x+2$.

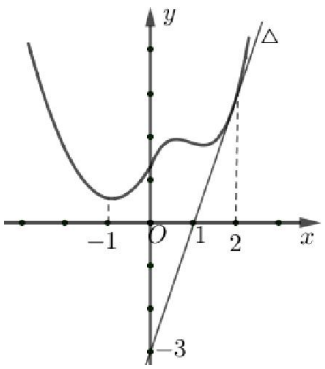
Ta có, phương trình parabol có dạng $y=ax^2,\ a\neq 0$.

Từ hình vẽ, ta thấy parabol đi qua điểm $B(-1;1)\Rightarrow y=x^2$.

Do đó, hàm số $y=f(x)=\begin{cases}x+2, x\le -1\\x^2\quad, x\ge -1\end{cases}$.

Vậy, $\int_{-3}^{3}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{-1}(x+2)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{3}x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{(x+2)^2}{2}\right|_{-3}^{-1}+\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+9+\frac{1}{3}=\frac{28}{3}$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đến cấp 2 trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$, có đồ thị như hình vẽ và đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $x=2$. Tính $\int_{1}^{4}f''(x-2)\mathrm{d}x$



A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

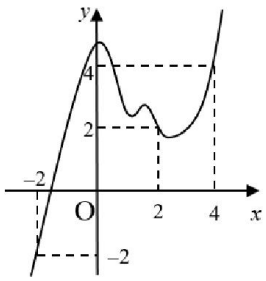
Chọn C

Dễ thấy đường thẳng Δ đi qua các điểm $(0;-3)$ và $(1;0)$ nên $\Delta: y=3x-3$ suy ra hệ số góc của Δ là $k=3\Rightarrow f'(2)=3$.

Hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$ suy ra $f'(-1)=0$.

Vậy $\int_1^4 f''(x-2)\mathrm{d}x=f'(x-2)\big|_1^4=f'(2)-f'(-1)=3-0=3$.

Câu 15. **(SGD Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Giá trị của biểu thức $I=\int_0^4 f'(x-2)\mathrm{d}x+\int_0^2 f'(x+2)\mathrm{d}x$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 10.

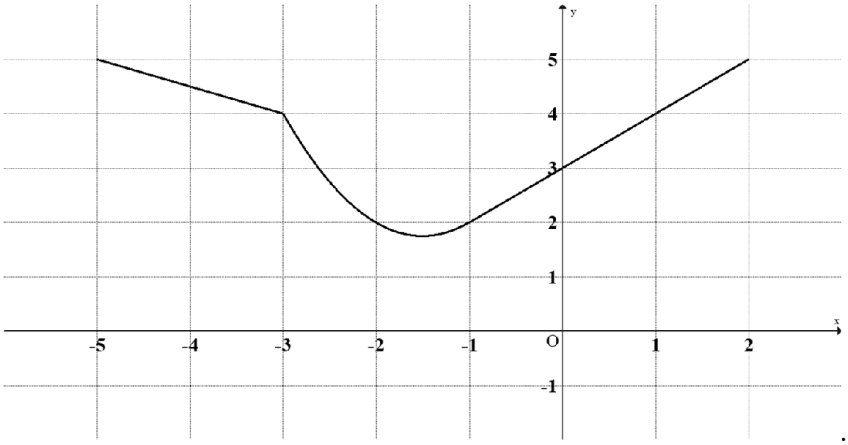
Lời giải

Chọn C

Xét $I=\int_0^4 f'(x-2)\mathrm{d}x+\int_0^2 f'(x+2)\mathrm{d}x=\int_0^4 f'(x-2)\mathrm{d}(x-2)+\int_0^2 f'(x+2)\mathrm{d}(x+2)$

$=f(x-2)\big|_0^4+f(x+2)\big|_0^2=[f(2)-f(-2)]+[f(4)-f(2)]=f(4)-f(-2)=4-(-2)=6.$

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục có đồ thị như hình bên dưới.



Biết $F'(x)=f(x),\forall x\in[-5;2]$ và $\int_{-3}^{-1} f(x)\mathrm{d}x=\frac{14}{3}$. Tính $F(2)-F(-5)$

A. $\frac{-145}{6}$. **B.** $\frac{-89}{6}$. **C.** $\frac{145}{6}$. **D.** $\frac{89}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta nhận thấy, đồ thị hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên đoạn $[-5;2]$ được xây dựng bởi ba hàm số $f(x)=\begin{cases} f_1(x) \text{khi} -5 \le x < -3 \\ f_2(x) \text{khi} -3 \le x \le -1 \\ f_3(x) \text{khi} -1 < x \le 2 \end{cases}$. Trong đó:.

$f_1(x)$ là đường thẳng qua hai điểm $(-5;5)$ và $(-3;4)$ có phương trình: $f_1(x)=\frac{-x+5}{2}$.

$f_2(x)$ có đồ thị là một đường cong nối từ điểm $(-3;4)$ đến điểm $(-1;2)$.

$f_3(x)$ là đường thẳng qua hai điểm $(-1;2)$ và $(0;3)$ có phương trình $f_3(x)=x+3$.

Vậy: $F(2)-F(-5)=\int_{-5}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-5}^{-3} f_1(x)\mathrm{d}x+\int_{-3}^{-1} f_2(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{2} f_3(x)\mathrm{d}x$.

$=\int_{-5}^{-3}\frac{-x+5}{2}\mathrm{d}x+\int_{-3}^{-1} f_2(x)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{2}(x+3)\mathrm{d}x==9+\frac{14}{3}+\frac{21}{2}=\frac{145}{6}$.

Nguyễn Bảo Vương