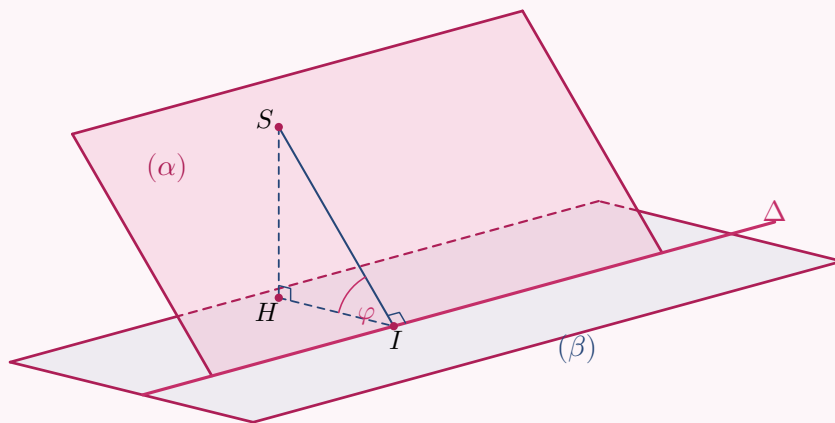


HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

THUẦN TÚY

VẬN DỤNG CAO



$$\sin \varphi = \frac{d(S, (\beta))}{d(S, \Delta)}$$

Mai Thành Luân (Semiconductor Engineer)

SĐT / ZALO: 0854070701

TIKTOK: Bao Đậu Bách Khoa (IC Design)

https://www.tiktok.com/@semiconductor_math_phy

Lời nói đầu

Trong chương trình Toán phổ thông, **hình học không gian** luôn được xem là mảng kiến thức rèn luyện tư duy mạnh nhất. Để giải một bài toán không gian, người học phải dựng được hình trong trí tưởng tượng, nhìn ra các quan hệ song song – vuông góc, xác định đúng hình chiếu, góc và khoảng cách — những thao tác mà không một công thức máy móc nào làm thay được. Cũng chính vì thế, đây thường là phần gây e ngại nhất, đồng thời là nơi phân hóa rõ nhất trong các đề thi.

Tài liệu này chọn hướng đi **hình học thuần túy**: mọi bài toán đều được giải bằng chính công cụ của hình học — quan hệ song song và vuông góc, định lý ba đường vuông góc, các hệ thức về góc, khoảng cách và thể tích — không gắn hệ trục tọa độ. Lợi ích của cách học này không chỉ nằm ở lời giải gọn gàng, mà quan trọng hơn là quá trình đi tìm lời giải: mỗi lần tự dựng được hình, tự tìm ra chân đường vuông góc hay nhìn thấy góc phẳng của nhị diện là một lần trí tưởng tượng không gian được rèn giữa thêm.

Nội dung gồm sáu chuyên đề, đi từ góc giữa hai đường thẳng chéo nhau, các công thức góc – khoảng cách, kỹ năng định vị chân đường cao, các công thức thể tích nâng cao, đến góc nhị diện và các bài toán cực trị. Mỗi chuyên đề theo một mạch thống nhất: trước hết *hiểu rõ bản chất* của công thức (nó sinh ra từ đâu, vì sao đúng); sau đó *nắm chắc cách làm* qua các lời giải mẫu trình bày từng bước; cuối cùng mới bước sang *những dạng khó thường gặp* — chỗ mà chỉ thuộc công thức là không đủ. Cuối mỗi chương còn có hệ thống *bài tập nâng cao* (đánh dấu *), nơi các bất đẳng thức quen thuộc như AM–GM, Bunhiacopxki, Minkowski được đưa vào hình học không gian đúng theo tinh thần của những câu vận dụng cao trong đề thi.

Một điều đáng lưu ý: rất nhiều bài toán trong đề thi chính thức, dù được khoắc lợp vỏ tình huống thực tế hay phát biểu bằng ngôn ngữ tọa độ, **thực chất đều xuất phát từ một bài hình thuần túy**. Bóc lợp vỏ ấy đi, phần lõi còn lại vẫn là những mô hình quen thuộc xuất hiện xuyên suốt cuốn tài liệu này. Nắm chắc phần lõi, đề thi sẽ không còn nhiều bất ngờ.

Cũng cần nói rõ về **phương pháp gắn hệ trục tọa độ**. Đó là một công cụ tốt, và khi hướng giải hình học gặp bế tắc thì việc chọn hệ trục là hoàn toàn chính đáng — nhất là với các bài có sẵn ba đường đôi một vuông góc. Tuy vậy, tọa độ nên được xem là *lối thoát tùy bài*, không phải thói quen mặc định: lạm dụng tọa độ, khả năng nhìn hình sẽ mai một dần, và không ít bài toán vốn chỉ cần vài dòng lập luận hình học lại bị biến thành mấy trang tính toán.

Trong từng trang sách, công thức đều được dựng lại từ đầu, hình vẽ được dựng chính xác và cẩn thận. Hy vọng cuốn tài liệu sẽ là người bạn đồng hành đáng tin cậy trên con đường tự học và chinh phục các bài toán vận dụng cao.

Dù đã được rà soát kỹ lưỡng, tài liệu chắc chắn khó tránh khỏi thiếu sót. Mọi ý kiến đóng góp đều rất đáng quý để tài liệu được hoàn thiện hơn trong những lần chỉnh lý sau.

Mai Thành Luân

Mục lục

CHƯƠNG

1

Sáu cạnh, một góc

trang 3

Hai cạnh đối của tứ diện

- Kiến thức trọng tâm 3
- Chứng minh hai công thức 3
- Ví dụ minh họa 4
- Bài tập vận dụng cao 8

CHƯƠNG

2

Góc qua khoảng cách

trang 12

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, giữa hai mặt phẳng

- Kiến thức trọng tâm 12
- Chứng minh hai công thức 12
- Ví dụ minh họa 13
- Bài tập vận dụng cao 19

CHƯƠNG

3

Tìm chân đường cao

trang 21

Hình chiếu của đỉnh trong ba cấu hình

- Kiến thức trọng tâm 21
- Ba mẫu thường gặp 21
- Ví dụ minh họa 22
- Bài tập vận dụng cao 31

CHƯƠNG

4

Ba con đường tới thể tích

trang 34

Thể tích tứ diện không cần đường cao

- Kiến thức trọng tâm 34
- Ví dụ minh họa 35
- Bài tập vận dụng cao 42

CHƯƠNG

5

Mở góc nhị diện

trang 45

Ba góc ở đỉnh và lăng trụ hoá

- Kiến thức trọng tâm 45
- Kỹ năng quy ước chiều vectơ pháp tuyến 46
- Ví dụ minh họa 47
- Bài tập vận dụng cao 50

CHƯƠNG

6

Đẩy thể tích tới giới hạn

trang 54

Hai nguyên lý cực trị

- Kiến thức trọng tâm 54
- Ví dụ minh họa 55
- Bài tập vận dụng cao 62

1

CHƯƠNG

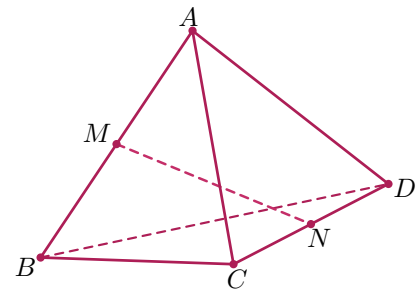
Sáu cạnh, một góc

Hai cạnh đối của tứ diện

Kiến thức trọng tâm

Trong tứ diện $ABCD$, hai cạnh không có đỉnh chung gọi là hai *cạnh đối*; tứ diện có ba cặp cạnh đối: AB và CD , AC và BD , AD và BC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh đối AB và CD . Đoạn MN gọi là **đoạn nối trung điểm hai cạnh đối** (còn gọi là đường trung bình của tứ diện).

Với một cặp cạnh đối có hai đại lượng cần tính: độ dài đoạn MN và góc giữa hai đường thẳng chứa hai cạnh đối. Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của hai đường thẳng a, b thì $\cos(a, b) = |\cos(\vec{u}, \vec{v})|$; góc giữa hai đường thẳng thuộc $[0^\circ; 90^\circ]$, góc giữa hai vectơ thuộc $[0^\circ; 180^\circ]$.



Hai công thức chính

Với M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD của tứ diện $ABCD$:

$$MN^2 = \frac{AC^2 + BD^2 + AD^2 + BC^2}{4} - \frac{AB^2 + CD^2}{4}. \quad (1.1)$$

Góc φ giữa hai đường thẳng AB và CD tính theo bốn cạnh còn lại:

$$\cos \varphi = \frac{|AC^2 + BD^2 - AD^2 - BC^2|}{2AB \cdot CD}. \quad (1.2)$$

Hệ quả:

$$AB \perp CD \iff AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2. \quad (1.3)$$

Chứng minh hai công thức

Tích vô hướng của hai cạnh đối. Với bốn điểm A, B, C, D bất kì, ta có $\vec{CD} = \vec{AD} - \vec{AC}$ nên $2\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}$. Bình phương vô hướng hai đẳng thức $\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB}$ và $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$ được

$$2\vec{AB} \cdot \vec{AD} = AB^2 + AD^2 - BD^2, \quad 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB^2 + AC^2 - BC^2.$$

Trừ vế theo vế:

$$2\vec{AB} \cdot \vec{CD} = AD^2 + BC^2 - AC^2 - BD^2. \quad (*)$$

Góc giữa hai đường thẳng AB, CD có $\cos \varphi = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{CD}|}{AB \cdot CD}$; thay (*) vào được (1.2). Hai đường thẳng AB, CD vuông góc khi và chỉ khi $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$, tức vế phải của (*) bằng 0; đó là (1.3).

Đoạn nối trung điểm. Ta có $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AC} + \vec{CN}$ và $\vec{MN} = \vec{MB} + \vec{BD} + \vec{DN}$. Cộng vế theo vế, với $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$ và $\vec{CN} + \vec{DN} = \vec{0}$, được

$$\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{BD}) = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{BC});$$

đẳng thức thứ hai chứng minh tương tự. Bình phương vô hướng đẳng thức thứ nhất:

$$4MN^2 = AC^2 + BD^2 + 2\vec{AC} \cdot \vec{BD}.$$

Đổi vai B và C trong (*) được $2\vec{AC} \cdot \vec{BD} = AD^2 + BC^2 - AB^2 - CD^2$. Thay vào đẳng thức trên được (1.1).

Chú ý. Ba công thức (1.1), (1.2), (1.3) chỉ chứa độ dài các cạnh. Với cặp cạnh đối khác thì đổi tên đỉnh tương ứng: chẳng hạn góc giữa AC và BD tính theo bốn cạnh AB, CD, AD, BC ; với M, N là trung điểm của AD, BC thì

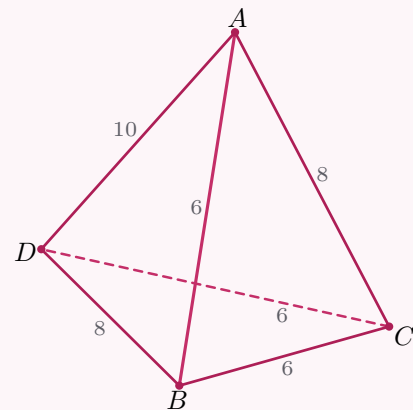
$$\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{DB}) = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC})$$

(cộng hai đẳng thức $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AC} + \vec{CN}$ và $\vec{MN} = \vec{MD} + \vec{DB} + \vec{BN}$, với $\vec{MA} + \vec{MD} = \vec{0}$, $\vec{CN} + \vec{BN} = \vec{0}$; đẳng thức còn lại tương tự).

Ví dụ minh họa

Ví dụ 1.1

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6, CD = 6, AC = 8, BD = 8, AD = 10, BC = 6$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD (làm tròn đến độ).



Lời giải. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AB và CD . Theo (1.2),

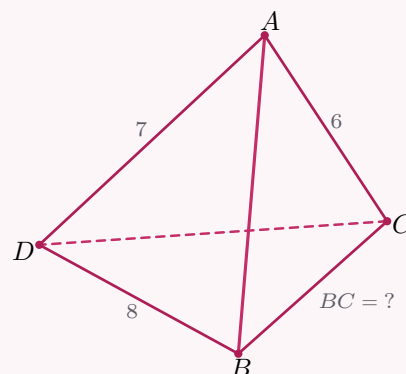
$$\cos \varphi = \frac{|AC^2 + BD^2 - AD^2 - BC^2|}{2AB \cdot CD} = \frac{|64 + 64 - 100 - 36|}{2 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{8}{72} = \frac{1}{9},$$

nên $\varphi = \arccos \frac{1}{9} \approx 83,62^\circ$.

Đáp số: $\varphi \approx 84^\circ$.

Ví dụ 1.2

Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = 6$, $BD = 8$, $AD = 7$. Để hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau thì độ dài cạnh BC bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần mười)?



Lời giải. Theo (1.3),

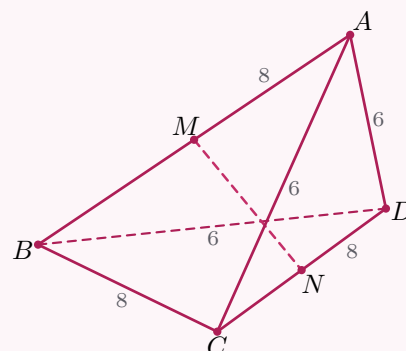
$$AB \perp CD \Leftrightarrow AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow BC^2 = AC^2 + BD^2 - AD^2 = 36 + 64 - 49 = 51,$$

nên $BC = \sqrt{51} \approx 7,14$ (AB , CD không xuất hiện trong (1.3)).

Đáp số: $BC = \sqrt{51} \approx 7,1$.

Ví dụ 1.3

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = BC = CD = 8$, $AC = BD = AD = 6$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tính độ dài đoạn MN (làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải. Theo (1.1), cặp AB , CD (nhận M , N làm trung điểm) mang dấu trừ, bốn cạnh còn lại mang dấu cộng:

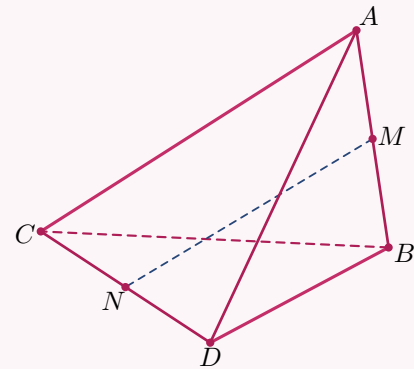
$$MN^2 = \frac{AC^2 + BD^2 + AD^2 + BC^2}{4} - \frac{AB^2 + CD^2}{4} = \frac{36 + 36 + 36 + 64}{4} - \frac{64 + 64}{4} = 43 - 32 = 11,$$

nên $MN = \sqrt{11} \approx 3,32$.

Đáp số: $MN = \sqrt{11} \approx 3,32$.

Ví dụ 1.4

Cho tứ diện $ABCD$ có $AC \perp BD$ và $AC^2 + BD^2 = 144$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tính độ dài đoạn MN .



Lời giải. Theo phần chứng minh công thức (1.1), $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{BD})$ nên

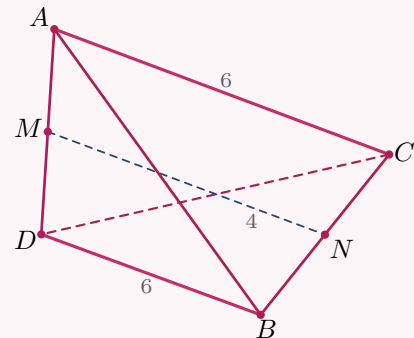
$$4MN^2 = AC^2 + BD^2 + 2\vec{AC} \cdot \vec{BD}.$$

Vì $AC \perp BD$ nên $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$, do đó $4MN^2 = AC^2 + BD^2 = 144$, tức $MN^2 = 36$ và $MN = 6$.

Đáp số: $MN = 6$.

Ví dụ 1.5

Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = BD = 6$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC , biết $MN = 4$. Tính $\cos(AC, BD)$ (làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải. Hai điểm M, N là trung điểm của cặp cạnh đối AD, BC nên $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{DB})$ (xem Chú ý ở mục Chứng minh hai công thức). Bình phương vô hướng:

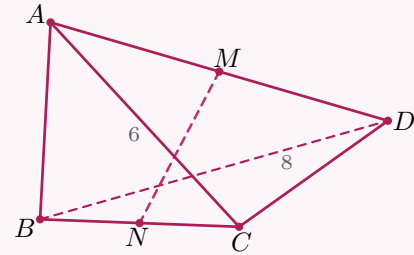
$$4MN^2 = AC^2 + BD^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{BD} \Leftrightarrow 64 = 72 - 2\vec{AC} \cdot \vec{BD} \Leftrightarrow \vec{AC} \cdot \vec{BD} = 4.$$

$$\text{Vậy } \cos(AC, BD) = \frac{|\vec{AC} \cdot \vec{BD}|}{AC \cdot BD} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0,11.$$

Đáp số: $\cos(AC, BD) = \frac{1}{9} \approx 0,11$.

Ví dụ 1.6

Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = 6$, $BD = 8$ và góc giữa hai đường thẳng AC , BD bằng 60° . Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AD và BC , biết $MN < 6$. Tính độ dài MN (làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải. Như Ví dụ 1.5, $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{DB})$. Bình phương vô hướng:

$$4MN^2 = AC^2 + BD^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 100 - 2\vec{AC} \cdot \vec{BD}.$$

Góc giữa hai đường thẳng AC , BD bằng 60° nên góc giữa hai vectơ $\vec{AC}$, $\vec{BD}$ bằng 60° hoặc 120° , tức $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = \pm 6 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = \pm 24$.

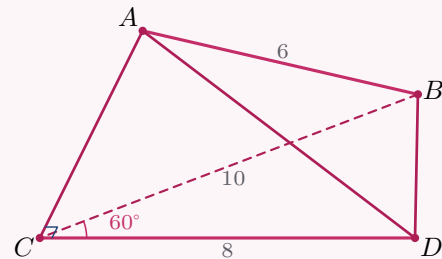
- $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 24$: $4MN^2 = 52$, $MN = \sqrt{13} \approx 3,61$.
- $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = -24$: $4MN^2 = 148$, $MN = \sqrt{37} \approx 6,08 > 6$, loại.

Vậy $MN = \sqrt{13} \approx 3,61$.

Đáp số: $MN = \sqrt{13} \approx 3,61$.

Ví dụ 1.7

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6$, $CD = 8$, $BC = 10$, $AC \perp CD$ và $\widehat{BCD} = 60^\circ$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD (làm tròn đến hàng phần mười của độ).



Lời giải. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AB và CD . Định lí côsin trong tam giác BCD :

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos 60^\circ = 100 + 64 - 80 = 84.$$

Tam giác ACD vuông tại C nên $AD^2 - AC^2 = CD^2 = 64$. Theo (1.2),

$$\cos \varphi = \frac{|(AD^2 - AC^2) + BC^2 - BD^2|}{2AB \cdot CD} = \frac{|64 + 100 - 84|}{2 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{80}{96} = \frac{5}{6}.$$

Giả thiết không cho AC ; tử số chỉ chứa $AD^2 - AC^2 = CD^2$ nên không cần AC . Vậy $\varphi \approx 33,6^\circ$.

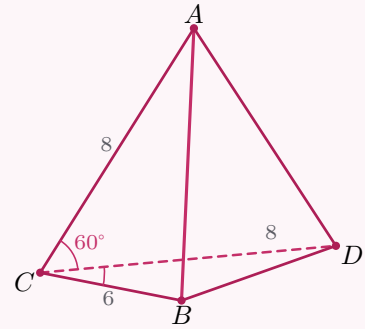
Cách khác. Vì $AC \perp CD$ nên $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = (\vec{CB} - \vec{CA}) \cdot \vec{CD} = \vec{CB} \cdot \vec{CD} = 10 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 40$, suy ra

$$\cos \varphi = \frac{40}{6 \cdot 8} = \frac{5}{6}.$$

Đáp số: $\varphi \approx 33,6^\circ$.

Ví dụ 1.8

Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = 8$, $CD = 8$, $BC = 6$ và $\widehat{ACD} = 60^\circ$. Để hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau thì $\cos \widehat{BCD}$ bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?



Lời giải. Tam giác ACD có $AC = CD = 8$ và $\widehat{ACD} = 60^\circ$ nên là tam giác đều, $AD = 8$. Theo (1.3),

$$AB \perp CD \Leftrightarrow AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow 64 + BD^2 = 64 + 36 \Leftrightarrow BD^2 = 36.$$

Định lí côsin trong tam giác BCD :

$$\cos \widehat{BCD} = \frac{BC^2 + CD^2 - BD^2}{2BC \cdot CD} = \frac{36 + 64 - 36}{2 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{2}{3} \approx 0,67.$$

Cách khác. Vì $\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}$ nên

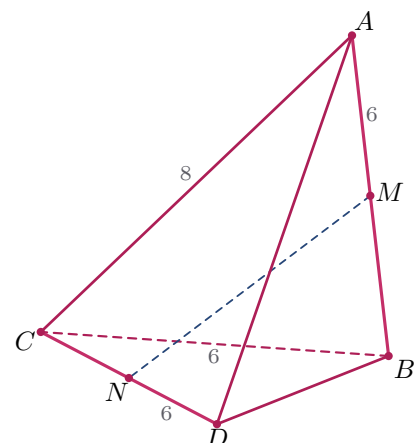
$$AB \perp CD \Leftrightarrow \vec{CA} \cdot \vec{CD} = \vec{CB} \cdot \vec{CD} \Leftrightarrow 8 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 6 \cdot 8 \cdot \cos \widehat{BCD} \Leftrightarrow \cos \widehat{BCD} = \frac{2}{3}.$$

Đáp số: $\cos \widehat{BCD} = \frac{2}{3} \approx 0,67$.

Bài tập vận dụng cao

Câu 1.1

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6$, $CD = 6$, $AC = 8$, $BC = 6$. Hai cạnh AD , BD thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $AD^2 + BD^2 = 116$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB , CD và φ là góc giữa hai đường thẳng AB , CD . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.



- Độ dài MN không đổi và $MN = 6$.
- Khi $AD = 9$ thì $\varphi = 60^\circ$.
- Có vị trí của D để $AB \perp CD$, khi đó $AD = 6\sqrt{2}$.
- Với vị trí của D ở mệnh đề c), gọi P , Q lần lượt là trung điểm của AC , BD thì $PQ = 6$.

Lời giải.

a) Đúng. Theo (1.1),

$$MN^2 = \frac{AC^2 + BC^2 + (AD^2 + BD^2) - AB^2 - CD^2}{4} = \frac{64 + 36 + 116 - 36 - 36}{4} = 36,$$

nên $MN = 6$ với mọi vị trí của D .

b) Sai. Khi $AD = 9$ thì $BD^2 = 116 - 81 = 35$. Gọi K, L lần lượt là hình chiếu của C, D trên AB . Theo định lí cosin,

$$AK = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB} = \frac{16}{3}, \quad AL = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB} = \frac{41}{6},$$

nên $KL = \frac{3}{2}$, $CK^2 = AC^2 - AK^2 = \frac{320}{9}$, $DL^2 = AD^2 - AL^2 = \frac{1235}{36}$. Hai vectơ $\vec{CK}, \vec{LD}$ cùng vuông góc với $\vec{KL}$ nên

$$CD^2 = (\vec{CK} + \vec{KL} + \vec{LD})^2 = KL^2 + CK^2 + DL^2 + 2\vec{CK} \cdot \vec{LD}.$$

Quay tam giác ABD quanh AB thì $\vec{CK} \cdot \vec{LD}$ nhận mọi giá trị từ $-CK \cdot DL$ đến $CK \cdot DL$, nên CD^2 nhận mọi giá trị từ $KL^2 + (CK - DL)^2 \approx 2,26$ đến $KL^2 + (CK + DL)^2 \approx 141,96$. Giá trị 36 nằm trong đoạn này nên có vị trí của D ứng với $CD = 6$. Theo (1.2),

$$\cos \varphi = \frac{|AC^2 + BD^2 - AD^2 - BC^2|}{2AB \cdot CD} = \frac{|64 + 35 - 81 - 36|}{72} = \frac{1}{4},$$

nên $\varphi \approx 75,52^\circ \neq 60^\circ$.

c) Đúng. Theo (1.3), $AB \perp CD \iff AD^2 - BD^2 = AC^2 - BC^2 = 28$. Kết hợp với $AD^2 + BD^2 = 116$ được $AD^2 = 72$, $BD^2 = 44$, tức $AD = 6\sqrt{2}$, $BD = 2\sqrt{11}$.

Vị trí đó tồn tại. Với K là hình chiếu của C trên AB như ở mệnh đề b), mặt phẳng (α) qua C vuông góc với AB cắt AB tại K ; ta có $AK = \frac{16}{3}$, $BK = AB - AK = \frac{2}{3}$, $CK^2 = \frac{320}{9}$. Với $D \in (\alpha)$ thì $AB \perp CD$, $AD^2 = AK^2 + KD^2$, $BD^2 = BK^2 + KD^2$; điều kiện $AD^2 = 72$ (khi đó $BD^2 = 44$) trở thành $KD^2 = 72 - \frac{256}{9} = \frac{392}{9}$. Trong (α) , đường tròn tâm K bán kính $\frac{14\sqrt{2}}{3} \approx 6,60$ và đường tròn tâm C bán kính 6 có $6,60 - 6 < CK \approx 5,96 < 6,60 + 6$ nên cắt nhau tại hai điểm không thuộc đường thẳng CK ; mỗi giao điểm là một vị trí của D .

d) Sai. Hai điểm P, Q là trung điểm của cặp cạnh đối AC, BD . Theo (1.1) với cặp này,

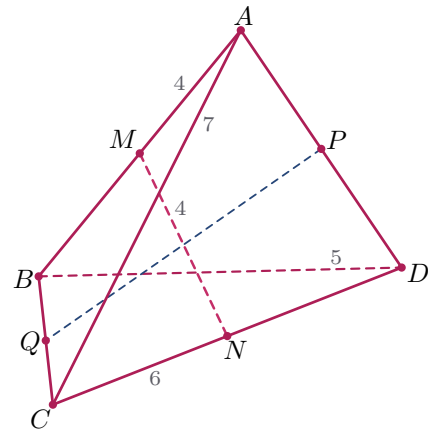
$$PQ^2 = \frac{AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 - AC^2 - BD^2}{4} = \frac{36 + 72 + 36 + 36 - 64 - 44}{4} = 18,$$

nên $PQ = 3\sqrt{2} \neq 6$.

Đáp số: a) Đúng; b) Sai; c) Đúng; d) Sai.

Câu 1.2

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 4$, $CD = 6$, $AC = 7$, $BD = 5$; hai cạnh AD và BC chưa biết. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB , CD , biết $MN = 4$; gọi P , Q lần lượt là trung điểm của AD , BC . Tính độ dài PQ và số đo góc giữa hai đường thẳng AB , CD (làm tròn đến độ).



Lời giải. Hai cạnh AD , BC chưa biết; đặt $t = AD^2 + BC^2$. Theo (1.1),

$$4MN^2 = AC^2 + BD^2 + t - AB^2 - CD^2 \Leftrightarrow 64 = 49 + 25 + t - 16 - 36 \Leftrightarrow t = 42.$$

Theo (1.2),

$$\cos(AB, CD) = \frac{|(AC^2 + BD^2) - t|}{2AB \cdot CD} = \frac{|74 - 42|}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{2}{3},$$

nên góc giữa AB và CD xấp xỉ $48,19^\circ$. Đoạn PQ nối trung điểm của cặp cạnh đối AD , BC ; theo (1.1) với cặp này,

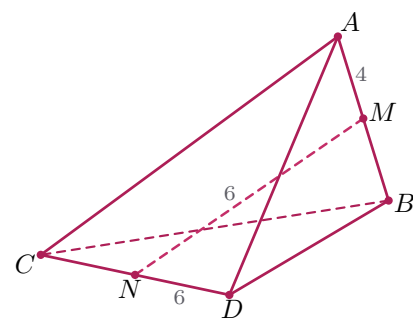
$$4PQ^2 = AB^2 + AC^2 + BD^2 + CD^2 - t = 16 + 49 + 25 + 36 - 42 = 84,$$

nên $PQ = \sqrt{21} \approx 4,58$.

Đáp số: $PQ = \sqrt{21} \approx 4,58$; góc giữa AB và CD xấp xỉ 48° .

Câu 1.3

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 4$, $CD = 6$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB , CD , biết $MN = 6$. Bốn cạnh AC , AD , BC , BD thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất của tổng $T = AC + AD + BC + BD$ và cho biết khi T lớn nhất thì góc giữa hai đường thẳng AB , CD bằng bao nhiêu.



Lời giải. *Tìm đại lượng không đổi.* Theo (1.1),

$$AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 = 4MN^2 + AB^2 + CD^2 = 144 + 16 + 36 = 196.$$

Đánh giá. Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, $T^2 \leq 4(AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2) = 784$, nên $T \leq 28$; dấu bằng khi $AC = AD = BC = BD = 7$.

Kiểm tra dấu bằng. Khi $AC = AD = BC = BD = 7$, $CD = 6$: các tam giác ACD , BCD cân có trung tuyến $AN = BN = \sqrt{49 - 9} = 2\sqrt{10}$, $AN \perp CD$, $BN \perp CD$. Vì $AN = BN$ và $0 < AB = 4 < AN + BN$ nên A không thuộc đường thẳng BN ; mặt phẳng (ABN) vuông góc với CD

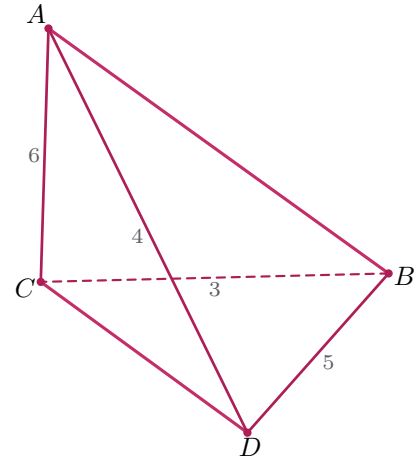
cắt (BCD) theo đường thẳng BN , nên $A \notin (BCD)$ và $ABCD$ là tứ diện. Theo (1.1), $4MN^2 = 4 \cdot 49 - AB^2 - CD^2 = 196 - 16 - 36 = 144$, nên $MN = 6$, thỏa mãn giả thiết.

Vì $AC^2 + BD^2 = 98 = AD^2 + BC^2$ nên theo (1.3), $AB \perp CD$. Vậy $\max T = 28$, khi đó góc giữa AB và CD bằng 90° .

Đáp số: $\max T = 28$, đạt khi $AC = AD = BC = BD = 7$; khi đó góc giữa AB và CD bằng 90° .

Câu 1.4

Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = 6$, $BD = 5$, $AD = 4$, $BC = 3$. Hai cạnh AB và CD thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $AB^2 + CD^2 = 72$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AB và CD . Tìm giá trị lớn nhất của φ và cho biết khi đó AB , CD bằng bao nhiêu.



Lời giải. *Tìm đại lượng không đổi.* Theo (1.2),

$$\cos \varphi = \frac{|AC^2 + BD^2 - AD^2 - BC^2|}{2AB \cdot CD} = \frac{|36 + 25 - 16 - 9|}{2AB \cdot CD} = \frac{18}{AB \cdot CD}.$$

Đánh giá. Theo bất đẳng thức AM – GM, $AB \cdot CD \leq \frac{AB^2 + CD^2}{2} = 36$, nên $\cos \varphi \geq \frac{1}{2}$ và $\varphi \leq 60^\circ$; dấu bằng khi $AB = CD = 6$.

Kiểm tra dấu bằng. Với $CD = 6$: tam giác ACD có $\cos \widehat{ACD} = \frac{7}{9}$, $\sin \widehat{ACD} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$; tam giác BCD có $\cos \widehat{BCD} = \frac{5}{9}$, $\sin \widehat{BCD} = \frac{2\sqrt{14}}{9}$. Quay tam giác BCD quanh CD thì góc $\widehat{ACB}$ nhận mọi giá trị nằm giữa $|\widehat{ACD} - \widehat{BCD}|$ và $\widehat{ACD} + \widehat{BCD}$ (hai giá trị ứng với A, B, C, D đồng phẳng). Điều kiện $AB = 6$ tương đương $\cos \widehat{ACB} = \frac{36 + 9 - 36}{2 \cdot 6 \cdot 3} = \frac{1}{4}$, mà

$$\cos(\widehat{ACD} + \widehat{BCD}) = \frac{35 - 16\sqrt{7}}{81} < \frac{1}{4} < \frac{35 + 16\sqrt{7}}{81} = \cos(\widehat{ACD} - \widehat{BCD}),$$

nên có tứ diện ứng với $AB = CD = 6$. Vậy giá trị lớn nhất của φ là 60° , đạt khi $AB = CD = 6$.

Đáp số: $\max \varphi = 60^\circ$, đạt khi $AB = CD = 6$.

2

CHƯƠNG

Góc qua khoảng cách

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, giữa hai mặt phẳng

Kiến thức trọng tâm

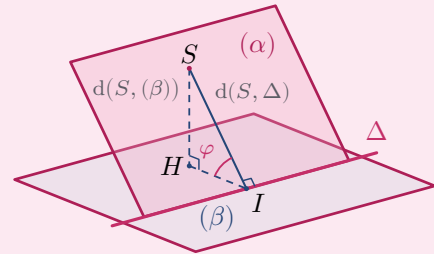
Tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng theo định nghĩa cần dựng hình chiếu của đường thẳng; tính góc giữa hai mặt phẳng cần dựng góc phẳng nhị diện, tức là phải xác định chân đường vuông góc. Hai công thức (2.1), (2.2) của chương này liên hệ góc với khoảng cách, nên chỉ cần tính khoảng cách thay cho phép dựng đó.

Công thức (2.1): góc giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (α) , (β) cắt nhau theo giao tuyến Δ . Lấy điểm S tùy ý thuộc (α) , $S \notin \Delta$. Gọi φ là góc giữa (α) và (β) . Khi đó

$$\sin \varphi = \frac{d(S, (\beta))}{d(S, \Delta)}. \quad (2.1)$$

Công thức chỉ cần khoảng cách từ S đến mặt phẳng kia và đến giao tuyến, không cần dựng chân đường vuông góc H của S trên (β) .

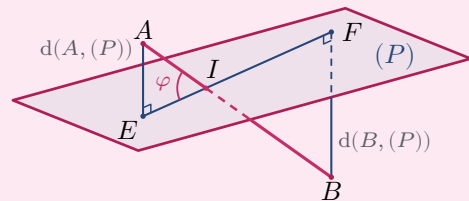


Công thức (2.2): góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng AB cắt mặt phẳng (P) . Gọi φ là góc giữa AB và (P) . Khi đó

$$\sin \varphi = \frac{|d(A, (P)) \pm d(B, (P))|}{AB}, \quad (2.2)$$

lấy dấu trừ khi A, B cùng phía đối với (P) , dấu cộng khi A, B khác phía đối với (P) . Tử số là độ dài hình chiếu của đoạn AB trên một đường thẳng vuông góc với (P) .



Chứng minh hai công thức

Công thức (2.1). Gọi H, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của S trên (β) và trên Δ . Nếu $H \equiv I$ thì $SI \perp (\beta)$, do đó $(\alpha) \perp (\beta)$ và hai vế của (2.1) cùng bằng 1. Nếu $H \neq I$ thì S, H, I không thẳng hàng (đường thẳng $SH \perp (\beta)$ chỉ cắt (β) tại H); đường thẳng Δ vuông góc với SH (vì $SH \perp (\beta)$)

và vuông góc với SI , nên $\Delta \perp (SHI)$, suy ra $HI \perp \Delta$. Hai đường thẳng $IS \subset (\alpha)$ và $IH \subset (\beta)$ cùng vuông góc với Δ tại I , nên $\varphi = \widehat{SIH}$ (góc nhọn vì tam giác SHI vuông tại H). Do đó

$$\sin \varphi = \frac{SH}{SI} = \frac{d(S, (\beta))}{d(S, \Delta)}.$$

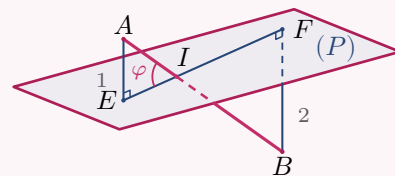
Công thức (2.2). Gọi I là giao điểm của AB và (P) , E là hình chiếu của A trên (P) . Nếu $A \neq I$ và $E \neq I$ thì IE là hình chiếu của AB trên (P) , nên $\varphi = \widehat{AIE}$; tam giác AEI vuông tại E cho $d(A, (P)) = AE = IA \sin \varphi$. Đẳng thức này vẫn đúng khi $E \equiv I$ (khi đó $\varphi = 90^\circ$) hoặc $A \equiv I$. Tương tự, $d(B, (P)) = IB \sin \varphi$. Hai điểm A, B khác phía đối với (P) khi và chỉ khi I nằm giữa A và B ; khi đó $AB = IA + IB$. Nếu A, B cùng phía thì I nằm ngoài đoạn AB và $AB = |IA - IB|$. Cộng hoặc trừ hai đẳng thức trên rồi chia cho AB , ta được (2.2).

Chú ý. Trong (2.1), điểm S được chọn tự do trên (α) (với $S \notin \Delta$): chọn điểm mà hai khoảng cách tính được gọn nhất.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 2.1

Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (P) tại điểm I nằm trong đoạn AB . Biết $AB = 6$, khoảng cách từ A và B đến (P) lần lượt bằng 1 và 2. Tính góc φ giữa AB và (P) (làm tròn đến độ).



Lời giải. Điểm I nằm trong đoạn AB nên A, B khác phía đối với (P) . Theo (2.2) với dấu cộng,

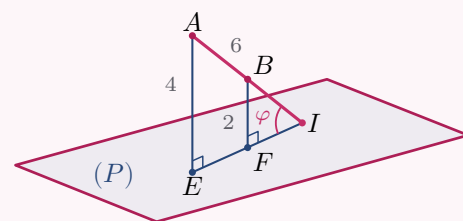
$$\sin \varphi = \frac{d(A, (P)) + d(B, (P))}{AB} = \frac{1 + 2}{6} = \frac{1}{2}.$$

Vậy $\varphi = 30^\circ$.

Đáp số: $\varphi = 30^\circ$.

Ví dụ 2.2

Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (P) tại điểm I nằm ngoài đoạn AB . Biết $AB = 6$, khoảng cách từ A và B đến (P) lần lượt bằng 4 và 2. Gọi φ là góc giữa AB và (P) . Tính $\sin \varphi$ (làm tròn đến hàng phần trăm).



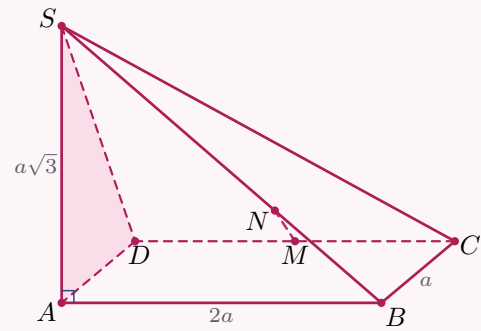
Lời giải. Điểm I nằm ngoài đoạn AB nên A, B cùng phía đối với (P) . Theo (2.2) với dấu trừ,

$$\sin \varphi = \frac{|d(A, (P)) - d(B, (P))|}{AB} = \frac{|4 - 2|}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,33.$$

Đáp số: $\sin \varphi = \frac{1}{3} \approx 0,33$.

Ví dụ 2.3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $AD = a$, cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm CD và N là điểm trên cạnh SB sao cho $SN = 2NB$. Gọi φ là góc giữa MN và mặt phẳng (SAD) . Tính $\sin \varphi$ (làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải. *Tìm đường thẳng vuông góc với (SAD) .* Ta có $AB \perp AD$ (đáy chữ nhật) và $AB \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$), nên $AB \perp (SAD)$. Do $CD \parallel AB$ nên $CD \perp (SAD)$ tại D .

Tính tử số. Điểm M thuộc CD nên $d(M, (SAD)) = MD = a$. Do $AB \perp (SAD)$ tại A nên $d(B, (SAD)) = AB = 2a$. Ta có $S \in (SAD)$ và S, N, B thẳng hàng; hai đường vuông góc hạ từ N, B xuống (SAD) song song với nhau, nên theo định lý Thalès,

$$d(N, (SAD)) = \frac{SN}{SB} d(B, (SAD)) = \frac{2}{3} \cdot 2a = \frac{4a}{3}.$$

Hai điểm M, N cùng phía với B đối với (SAD) : N thuộc đoạn SB , $N \neq S$; M thuộc đoạn DC , $M \neq D$, mà C cùng phía B vì $BC \parallel (SAD)$.

Tính MN . Gọi N_1 là hình chiếu của N trên $(ABCD)$ và M_1 là trung điểm AB . Vì $NN_1 \parallel SA$ nên $N_1 \in AB$ và

$$AN_1 = \frac{2}{3}AB = \frac{4a}{3}, \quad NN_1 = \frac{1}{3}SA = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad M_1N_1 = AN_1 - AM_1 = \frac{a}{3}.$$

Ta có $MM_1 \perp AB$, $MM_1 = a$ và $NN_1 \perp MN_1$, nên

$$MN^2 = MM_1^2 + M_1N_1^2 + NN_1^2 = a^2 + \frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{3} = \frac{13a^2}{9}, \quad MN = \frac{a\sqrt{13}}{3}.$$

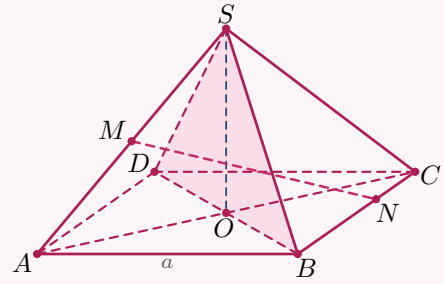
Kết luận. Theo (2.2), với M, N cùng phía:

$$\sin \varphi = \frac{d(N, (SAD)) - d(M, (SAD))}{MN} = \frac{\frac{4a}{3} - a}{\frac{a\sqrt{13}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \approx 0,28.$$

Đáp số: $\sin \varphi = \frac{\sqrt{13}}{13} \approx 0,28$.

Ví dụ 2.4

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm SA và N là điểm trên cạnh BC sao cho $NB = 2NC$. Gọi φ là góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) . Tính $\sin \varphi$ (làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải. *Tìm đường thẳng vuông góc với (SBD) .* Gọi O là tâm đáy. Ta có $AC \perp BD$ và $AC \perp SO$ (vì $SO \perp (ABCD)$), nên $AC \perp (SBD)$ tại O . Hai điểm A, C khác phía đối với (SBD) và $d(A, (SBD)) = d(C, (SBD)) = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Dời điểm. Đường thẳng SA cắt (SBD) tại S , $SM = \frac{1}{2}SA$; đường thẳng BC cắt (SBD) tại B , $BN = \frac{2}{3}BC$. Như Ví dụ 2.3,

$$d(M, (SBD)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}, \quad d(N, (SBD)) = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3},$$

với M cùng phía A (M thuộc đoạn SA , $M \neq S$), N cùng phía C (N thuộc đoạn BC , $N \neq B$), tức M, N khác phía đối với (SBD) .

Tính MN . Ta có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Hình chiếu M_1 của M trên đáy là trung điểm AO , $MM_1 = \frac{SO}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$; điểm M_1 thuộc AC và $AM_1 = \frac{1}{4}AC$, mà C cách AB và AD cùng một đoạn a , nên M_1 cách AB và AD cùng một đoạn $\frac{a}{4}$. Gọi F là hình chiếu của M_1 trên BC ; vì $BC \perp AB$ nên $M_1F \parallel AB$, do đó $BF = d(M_1, AB) = \frac{a}{4}$, $M_1F = a - d(M_1, AD) = \frac{3a}{4}$, $FN = BN - BF = \frac{2a}{3} - \frac{a}{4} = \frac{5a}{12}$. Suy ra

$$M_1N^2 = \frac{9a^2}{16} + \frac{25a^2}{144} = \frac{53a^2}{72}, \quad MN^2 = M_1N^2 + MM_1^2 = \frac{53a^2}{72} + \frac{a^2}{8} = \frac{31a^2}{36},$$

$$\text{nên } MN = \frac{a\sqrt{31}}{6}.$$

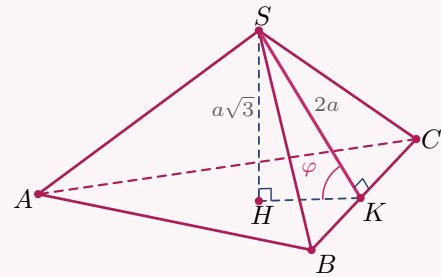
Kết luận. Theo (2.2), với M, N khác phía:

$$\sin \varphi = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4} + \frac{a\sqrt{2}}{3}}{\frac{a\sqrt{31}}{6}} = \frac{7a\sqrt{2}}{12} \cdot \frac{6}{a\sqrt{31}} = \frac{7\sqrt{62}}{62} \approx 0,89.$$

Đáp số: $\sin \varphi = \frac{7\sqrt{62}}{62} \approx 0,89$.

Ví dụ 2.5

Cho hình chóp $S.ABC$ có khoảng cách từ đỉnh S đến mặt phẳng đáy (ABC) bằng $a\sqrt{3}$ và khoảng cách từ S đến cạnh BC bằng $2a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) (làm tròn đến độ).



Lời giải. Giao tuyến của (SBC) và (ABC) là BC . Áp dụng (2.1) với điểm $S \in (SBC)$:

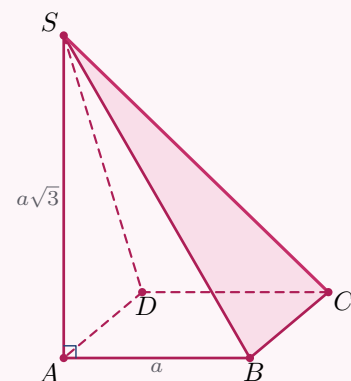
$$\sin \varphi = \frac{d(S, (ABC))}{d(S, BC)} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy góc giữa (SBC) và (ABC) bằng 60° .

Đáp số: $\varphi = 60^\circ$.

Ví dụ 2.6

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính giá trị chính xác của cosin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) .



Lời giải. Giao tuyến của hai mặt phẳng là SC . Áp dụng (2.1) với điểm $B \in (SBC)$.

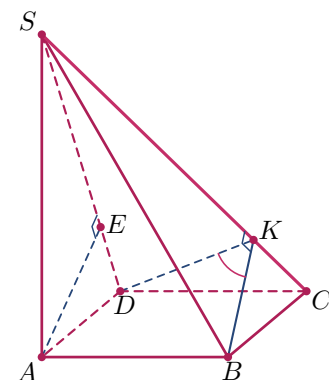
Tử số. Do $AB \parallel (SCD)$ nên $d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AE$, với E là hình chiếu của A trên SD ($CD \perp (SAD)$ nên $AE \perp (SCD)$). Ta có $SD = 2a$ và

$$AE = \frac{SA \cdot AD}{SD} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Mẫu số. Tam giác SBC vuông tại B ($BC \perp (SAB)$), $SB = 2a$, $SC = a\sqrt{5}$. Gọi K là hình chiếu của B trên SC : $BK = \frac{SB \cdot BC}{SC} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Kết luận.

$$\sin \varphi = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2a} = \frac{\sqrt{15}}{4}, \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{15}{16}} = \frac{1}{4}.$$



Cách khác. Hai tam giác SBC , SDC bằng nhau (vuông tại B , D , chung cạnh huyền SC , $SB = SD$), nên $SK = \frac{SB^2}{SC} = \frac{SD^2}{SC}$, tức hình chiếu của D trên SC cũng là K , và $DK = BK = \frac{2a}{\sqrt{5}}$. Góc $\widehat{BKD}$ là góc phẳng của nhị diện cạnh SC ; với $BD = a\sqrt{2}$:

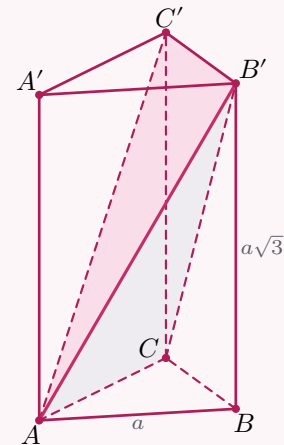
$$\cos \widehat{BKD} = \frac{BK^2 + DK^2 - BD^2}{2BK \cdot DK} = \frac{\frac{8a^2}{5} - 2a^2}{\frac{8a^2}{5}} = -\frac{1}{4}.$$

Góc nhị diện tù, góc giữa hai mặt phẳng là góc bù của nó. Vậy $\cos \varphi = \frac{1}{4}$.

Đáp số: $\cos \varphi = \frac{1}{4} = 0,25$.

Ví dụ 2.7

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(AB'C)$. Tính $\sin \varphi$ (làm tròn đến hàng phần mười).



Lời giải. Giao tuyến của hai mặt phẳng là AB' . Áp dụng (2.1) với điểm $C' \in (AB'C')$:

$$\sin \varphi = \frac{d(C', (AB'C))}{d(C', AB')}.$$

Tính $d(C', AB')$. Ta có $AB' = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$, tương tự $AC' = B'C' = 2a$. Tam giác $AB'C'$ cân tại A , đáy $B'C' = a$, đường cao kẻ từ A bằng $\sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$, nên $S_{AB'C'} = \frac{a^2\sqrt{15}}{4}$ và

$$d(C', AB') = \frac{2S_{AB'C'}}{AB'} = \frac{a\sqrt{15}}{4}.$$

Tính $d(C', (AB'C))$ bằng thể tích. Do $BB' \parallel (ACC'A')$ và $(ACC'A') \perp (ABC)$ theo giao tuyến AC , khoảng cách từ B' đến $(ACC'A')$ bằng khoảng cách từ B đến AC , tức $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tam giác ACC' vuông tại C có diện tích $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Do đó

$$V_{C'.AB'C} = V_{B'.ACC'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4}.$$

Tam giác $AB'C$ có ba cạnh $2a, 2a, a$ như tam giác $AB'C'$ nên $S_{AB'C} = \frac{a^2\sqrt{15}}{4}$, và

$$d(C', (AB'C)) = \frac{3V_{C'.AB'C}}{S_{AB'C}} = \frac{3a^3}{4} \cdot \frac{4}{a^2\sqrt{15}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Kết luận. $\sin \varphi = \frac{a\sqrt{15}}{5} \cdot \frac{4}{a\sqrt{15}} = \frac{4}{5} = 0,8$.

Đáp số: $\sin \varphi = \frac{4}{5} = 0,8$.

Ví dụ 2.8

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 3a, AD = a$, cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Tính $\sin$ của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải. Giao tuyến của hai mặt phẳng là SC . Chọn điểm $B \in (SBC)$: khoảng cách từ B đến SC tính trong tam giác vuông SBC , còn khoảng cách từ B đến (SCD) dời được về A .

Tính $d(B, SC)$. Ta có $BC = AD = a, BC \perp AB, BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$, tam giác SBC vuông tại B , với $SB = \sqrt{4a^2 + 9a^2} = a\sqrt{13}, SC = \sqrt{SB^2 + BC^2} = a\sqrt{14}$. Gọi K là hình chiếu của B trên SC :

$$d(B, SC) = BK = \frac{SB \cdot BC}{SC} = \frac{a\sqrt{13}}{\sqrt{14}}.$$

Dời điểm. Do $AB \parallel CD$ nên $AB \parallel (SCD)$ và $d(B, (SCD)) = d(A, (SCD))$. Ta có $CD \perp AD, CD \perp SA$ nên $CD \perp (SAD)$. Gọi E là hình chiếu của A trên SD ; $AE \perp SD$ và $AE \perp CD$ nên $AE \perp (SCD)$.

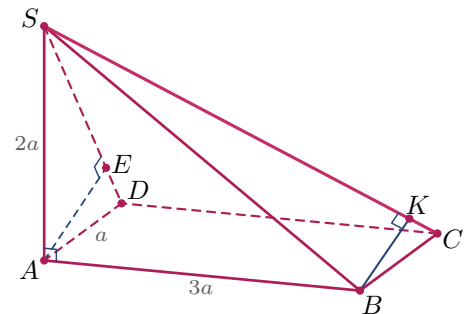
Trong tam giác SAD vuông tại A , $SD = a\sqrt{5}$:

$$d(A, (SCD)) = AE = \frac{SA \cdot AD}{SD} = \frac{2a \cdot a}{a\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Kết luận. Theo (2.1):

$$\sin \varphi = \frac{d(B, (SCD))}{d(B, SC)} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{14}}{a\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{65}} = \frac{2\sqrt{910}}{65} \approx 0,93.$$

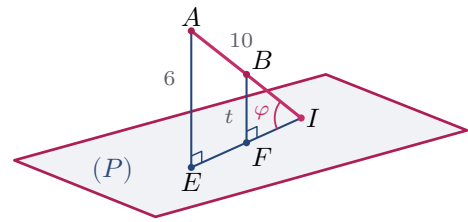
Đáp số: $\sin \varphi = \frac{2\sqrt{910}}{65} \approx 0,93$.



Bài tập vận dụng cao

Câu 2.1

Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (P) tại I . Biết $AB = 10$ và $d(A, (P)) = 6$. Đặt $t = d(B, (P))$ và gọi φ là góc giữa AB và (P) . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.



- a) Nếu A, B khác phía đối với (P) và $t = 2$ thì $\varphi \approx 53^\circ$.
- b) Nếu A, B cùng phía đối với (P) và $t = 2$ thì $\sin \varphi = 0,8$.
- c) Nếu A, B khác phía đối với (P) thì luôn có $t \leq 4$.
- d) Nếu A, B cùng phía đối với (P) thì giá trị lớn nhất của t bằng 4.

Lời giải. Theo (2.2):

$$\text{khác phía: } \sin \varphi = \frac{6+t}{10}; \quad \text{cùng phía: } \sin \varphi = \frac{|6-t|}{10}.$$

a) **Đúng.** $\sin \varphi = \frac{6+2}{10} = 0,8$, suy ra $\varphi \approx 53,13^\circ$.

b) **Sai.** $\sin \varphi = \frac{|6-2|}{10} = 0,4$.

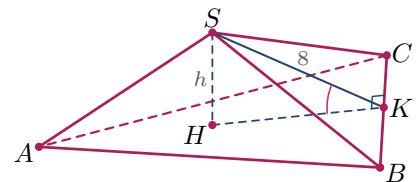
c) **Đúng.** Từ $\sin \varphi \leq 1$ ta có $\frac{6+t}{10} \leq 1$, tức $t \leq 4$.

d) **Sai.** Từ $\frac{|6-t|}{10} \leq 1$ và $t > 0$ ta có $0 < t \leq 16$ (với $t \neq 6$ vì đường thẳng AB cắt (P)). Giá trị $t = 16$ đạt được khi $AB \perp (P)$ và A nằm giữa I, B ($IA = 6, IB = 16$). Vậy giá trị lớn nhất của t bằng 16.

Đáp số: a) Đúng; b) Sai; c) Đúng; d) Sai.

Câu 2.2

Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ lần lượt là góc giữa các mặt bên $(SAB), (SBC), (SCA)$ với mặt đáy (ABC) . Biết $\varphi_2 = 30^\circ, d(S, BC) = 8, \varphi_1 = 45^\circ$ và $d(S, CA) = 5$. Tính $d(S, (ABC)), d(S, AB)$ và số đo góc φ_3 .



Lời giải. Đặt $h = d(S, (ABC))$. Áp dụng (2.1) với điểm S cho ba mặt bên:

$$\sin \varphi_2 = \frac{h}{d(S, BC)} \Rightarrow h = 8 \sin 30^\circ = 4; \quad d(S, AB) = \frac{h}{\sin \varphi_1} = \frac{4}{\sin 45^\circ} = 4\sqrt{2};$$

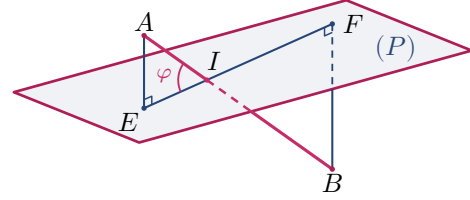
$$\sin \varphi_3 = \frac{h}{d(S, CA)} = \frac{4}{5} \Rightarrow \varphi_3 \approx 53,13^\circ.$$

Vậy $d(S, (ABC)) = 4, d(S, AB) = 4\sqrt{2}, \varphi_3 = \arcsin \frac{4}{5} \approx 53^\circ$.

Đáp số: $d(S, (ABC)) = 4$; $d(S, AB) = 4\sqrt{2}$; $\varphi_3 = \arcsin \frac{4}{5} \approx 53^\circ$.

Câu 2.3

Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (P) tại điểm I nằm trong đoạn AB ; biết $AB = 10$. Hai khoảng cách $d(A, (P))$ và $d(B, (P))$ thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $d(A, (P)) \cdot d(B, (P)) = 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của góc φ giữa AB và (P) .



Lời giải. Đặt $x = d(A, (P))$, $y = d(B, (P))$, ta có $xy = 9$. Điểm I nằm trong đoạn AB nên A, B khác phía đối với (P) ; theo (2.2), $\sin \varphi = \frac{x+y}{10}$.

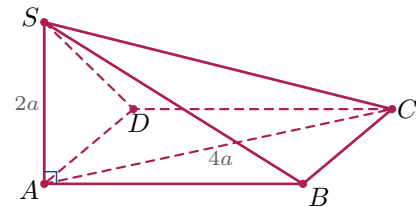
Đánh giá. Theo bất đẳng thức AM – GM, $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 6$, nên $\sin \varphi \geq \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Hàm số sin đồng biến trên $[0^\circ; 90^\circ]$, do đó $\varphi \geq \arcsin \frac{3}{5} \approx 36,87^\circ$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = 3$; khi đó $\sin \varphi = 0,6 < 1$ nên cấu hình tồn tại (I là trung điểm AB). Vậy giá trị nhỏ nhất của φ là $\arcsin \frac{3}{5} \approx 36,87^\circ$.

Đáp số: $\varphi_{\min} = \arcsin \frac{3}{5} \approx 36,87^\circ$ ($\approx 37^\circ$), đạt khi $d(A, (P)) = d(B, (P)) = 3$.

Câu 2.4

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Hai cạnh đáy AB, AD thay đổi nhưng đường chéo luôn bằng $AC = 4a$. Gọi φ_1, φ_2 lần lượt là góc giữa $(SBC), (SCD)$ với mặt đáy. Tìm giá trị lớn nhất của tổng $d(S, BC) + d(S, CD)$ và tính $\sin \varphi_1$ khi tổng đó lớn nhất.



Lời giải. *Đưa về hai cạnh bên.* Đặt $AB = x$, $AD = y$, ta có $x^2 + y^2 = AC^2 = 16a^2$. Do $BC \perp AB$, $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$, suy ra $BC \perp SB$ và $d(S, BC) = SB = \sqrt{4a^2 + x^2}$. Tương tự $CD \perp (SAD)$ và $d(S, CD) = SD = \sqrt{4a^2 + y^2}$. Khi đó

$$SB^2 + SD^2 = 8a^2 + x^2 + y^2 = 24a^2.$$

Đánh giá. Từ $(SB - SD)^2 \geq 0$ ta có $(SB + SD)^2 \leq 2(SB^2 + SD^2) = 48a^2$, nên $SB + SD \leq 4a\sqrt{3}$. Dấu bằng khi $SB = SD$, tức $x = y = 2a\sqrt{2}$ (đáy là hình vuông); khi đó $SB = \sqrt{4a^2 + 8a^2} = 2a\sqrt{3}$.

Tính góc. Áp dụng (2.1) với điểm S , giao tuyến BC :

$$\sin \varphi_1 = \frac{d(S, (ABCD))}{d(S, BC)} = \frac{2a}{2a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Đáp số: Giá trị lớn nhất bằng $4a\sqrt{3}$, đạt khi đáy là hình vuông cạnh $2a\sqrt{2}$; khi đó $\sin \varphi_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3

CHƯƠNG

Tìm chân đường cao

Hình chiếu của đỉnh trong ba cấu hình

Kiến thức trọng tâm

Trong chương này, H là hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng đáy của hình chóp và $h = SH$. Khi xác định được H , góc giữa mặt bên và đáy, khoảng cách từ S đến cạnh đáy và độ dài SH đều tính được trong các tam giác vuông có một đỉnh là H . Công cụ chính là định lý ba đường vuông góc và hệ thức lượng trong tam giác vuông.

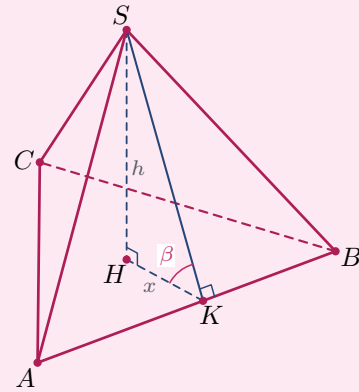
Bài toán gốc

Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của S trên đường thẳng AB và trên mặt phẳng (ABC) , với $H \notin AB$. Đặt $h = SH = d(S, (ABC))$ và $x = HK = d(H, AB)$. Khi đó:

- $HK \perp AB$ (định lý ba đường vuông góc);
- góc β giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng $\widehat{SKH}$.

Trong tam giác SHK vuông tại H :

$$\tan \beta = \frac{h}{x}, \quad SK = \sqrt{h^2 + x^2} = d(S, AB). \quad (3.1)$$



Ba mẫu thường gặp

Mẫu 1. Đỉnh cách đều. Nếu $SA = SB = SC$ thì H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tổng quát, nếu S cách đều một số điểm của mặt đáy thì H cách đều các điểm đó, vì $SM^2 = h^2 + HM^2$ với mọi điểm M thuộc mặt đáy.

Mẫu 2. Biết hình chiếu của đỉnh trên một cạnh đáy. Nếu SM vuông góc với một cạnh đáy tại M thì HM cũng vuông góc với cạnh đó (định lý ba đường vuông góc); H nằm trên đường thẳng qua M , vuông góc với cạnh đó, trong mặt đáy. Hai điều kiện như vậy cho hai đường thẳng chứa H , và H là giao điểm của chúng.

Mẫu 3. Biết góc giữa các mặt bên với đáy. Nếu mặt bên chứa cạnh đáy nằm trên đường thẳng ℓ_i tạo với đáy góc β_i thì theo (3.1)

$$d(H, \ell_i) = \frac{h}{\tan \beta_i} = h \cot \beta_i.$$

Ràng buộc hình học của đáy cho phương trình xác định h hoặc góc còn thiếu: khi H nằm giữa hai

cạnh song song thì tổng khoảng cách từ H đến hai cạnh đó bằng khoảng cách giữa chúng; khi H nằm trong đáy thì tổng diện tích các tam giác có đỉnh H bằng diện tích đáy.

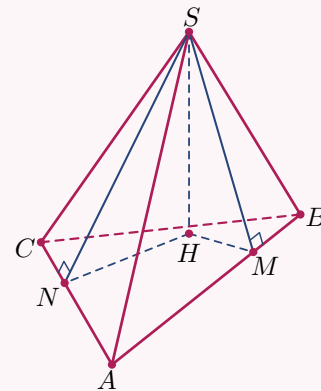
Chú ý. Khi H nằm trong đa giác đáy lồi, các tam giác có đỉnh H và cạnh đối diện là một cạnh đáy chia đa giác đáy thành các phần không chồng nhau, nên tổng diện tích của chúng bằng diện tích đáy. Khi H nằm ngoài đa giác đáy, số hạng ứng với cạnh mà H và đa giác đáy nằm khác phía đối với đường thẳng chứa cạnh đó mang dấu trừ.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 3.1

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 12, có $SM \perp AB$ tại M với $AM = 3MB$, $SN \perp AC$ tại N với $NA = 2NC$. Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC) . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) $HM \perp AB$ và $HN \perp AC$.
- b) Tứ giác $AMHN$ nội tiếp đường tròn đường kính AH .
- c) $AH = 4\sqrt{3}$.
- d) Nếu $SA = 14$ thì $SB = 14,8$.



Lời giải. Xét M thuộc cạnh AB , N thuộc cạnh AC như hình. Ta có $AM = 9$, $MB = 3$, $AN = 8$, $\widehat{MAN} = 60^\circ$.

a) **Đúng.** Từ $SM \perp AB$ và $SH \perp (ABC)$, định lí ba đường vuông góc cho $HM \perp AB$; tương tự $HN \perp AC$.

b) **Đúng.** Ta có $\widehat{AMH} = \widehat{ANH} = 90^\circ$ nên M, N thuộc đường tròn đường kính AH , tức tứ giác $AMHN$ nội tiếp đường tròn đó.

c) **Sai.** Ta có $MN^2 = 81 + 64 - 2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 73$. Tam giác AMN nội tiếp đường tròn đường kính AH , nên theo định lí sin

$$AH = \frac{MN}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{73}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{219}}{3} \approx 9,87 \neq 4\sqrt{3}.$$

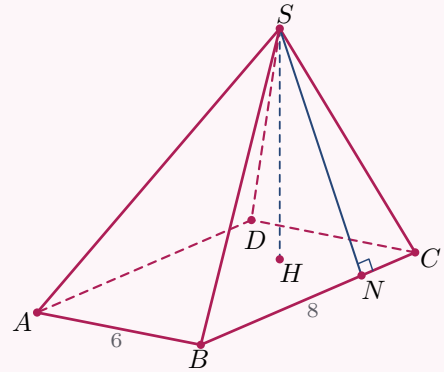
d) **Sai.** Các tam giác SMA, SMB vuông tại M nên $SA^2 = SM^2 + MA^2$ và $SB^2 = SM^2 + MB^2$; trừ vế theo vế được $SA^2 - SB^2 = MA^2 - MB^2$. Do đó $SB^2 = 196 - 81 + 9 = 124$, $SB = 2\sqrt{31} \approx 11,14 \neq 14,8$.

Đáp số: a) Đúng; b) Đúng; c) Sai; d) Sai.

Ví dụ 3.2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 6$, $BC = 8$, $SA = SB = 10$, $SN \perp BC$ tại N với $NB = 3NC$. Gọi H là hình chiếu của S trên $(ABCD)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) $HN \perp BC$.
- b) $BH = 3\sqrt{5}$ và $SH = \sqrt{55}$.
- c) $SC = SD$.
- d) $d(B, (SCD)) = 5,4$.



Lời giải.

a) Đúng. Ta có $BC \perp SH$ (vì $SH \perp (ABCD)$) và $BC \perp SN$, nên $BC \perp (SHN)$, suy ra $HN \perp BC$.

b) Đúng. Trong mặt đáy, $HN \perp BC$ và $AB \perp BC$ nên $HN \parallel AB$; do đó H cách đường thẳng AB một khoảng bằng NB . Nếu N nằm ngoài đoạn BC thì $NB - NC = 8$, $NB = 12$, khi đó $10 = SB > BH \geq 12$, vô lí. Vậy N thuộc đoạn BC ; từ $NB = 3NC$ và $NB + NC = 8$ suy ra $NB = 6$, $NC = 2$. Các tam giác vuông SHA , SHB có chung cạnh SH và $SA = SB$, nên $HA = HB$: điểm H nằm trên đường trung trực của AB , hình chiếu của H trên AB cách B một đoạn 3. Suy ra

$$BH^2 = 3^2 + 6^2 = 45, \quad BH = 3\sqrt{5}, \quad SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{100 - 45} = \sqrt{55}.$$

c) Đúng. Đường trung trực của AB cũng là đường trung trực của CD , nên $HC = HD$ (cụ thể $HC^2 = 3^2 + 2^2 = 13$). Do đó $SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \sqrt{SH^2 + HD^2} = SD$.

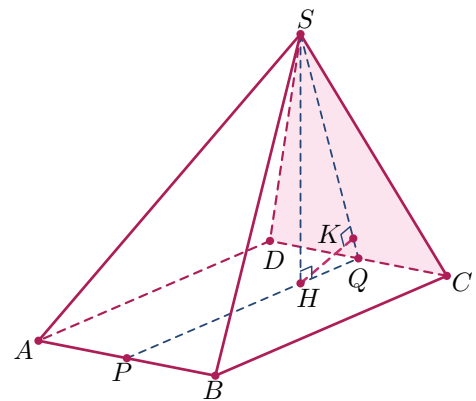
d) Sai.

Đưa về khoảng cách từ H . Gọi P , Q lần lượt là trung điểm AB , CD . Đường thẳng PQ là trung trực của AB nên đi qua H , vuông góc với CD ; $PQ = 8$, $HQ = 8 - 6 = 2$. Vì $AB \parallel CD$ nên $AB \parallel (SCD)$ và $d(B, (SCD)) = d(P, (SCD))$. Đường thẳng PH cắt (SCD) tại Q , nên hai đường vuông góc hạ từ P , H xuống (SCD) cùng với PQ cho hai tam giác vuông đồng dạng, suy ra $d(P, (SCD)) = \frac{QP}{QH} d(H, (SCD)) = 4 d(H, (SCD))$.

Tính khoảng cách từ H . Ta có $CD \perp HQ$, $CD \perp SH$ nên $CD \perp (SHQ)$; kẻ $HK \perp SQ$ tại K thì $HK \perp CD$, suy ra $HK \perp (SCD)$. Tam giác SHQ vuông tại H có đường cao HK :

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HQ^2} = \frac{1}{55} + \frac{1}{4} = \frac{59}{220}.$$

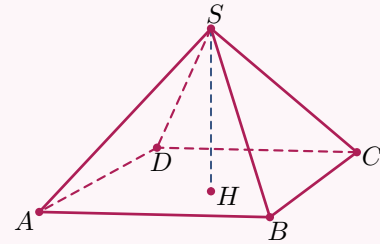
Vậy $d(B, (SCD)) = 4HK = 4\sqrt{\frac{220}{59}} = 8\sqrt{\frac{55}{59}} \approx 7,72$, khác 5,4.



Đáp số: a) Đúng; b) Đúng; c) Đúng; d) Sai.

Ví dụ 3.3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AB \parallel CD$ và $d(AB, CD) = 8$. Biết góc tạo bởi các mặt phẳng (SAB) , (SCD) với đáy $(ABCD)$ lần lượt bằng 60° , 45° và hình chiếu vuông góc H của S trên $(ABCD)$ nằm trong tứ giác $ABCD$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

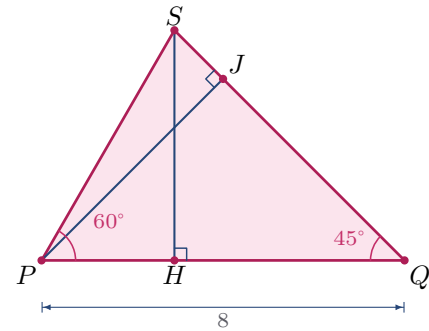


- a) $d(H, AB) = SH \cot 60^\circ$.
- b) $d(H, CD) = SH \cot 30^\circ$.
- c) $SH = 3,46$.
- d) $d(AB, SC) = 6,2$.

Lời giải. Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của H trên AB, CD , đặt $h = SH$. Vì $AB \parallel CD$ nên P, H, Q thẳng hàng, $PQ \perp AB$; H nằm trong tứ giác nên $HP + HQ = PQ = 8$. Theo (3.1), góc giữa (SAB) và đáy là $\widehat{SPH} = 60^\circ$, góc giữa (SCD) và đáy là $\widehat{SQH} = 45^\circ$.

a) **Đúng.** $d(H, AB) = HP = h \cot 60^\circ$.

b) **Sai.** $d(H, CD) = HQ = h \cot 45^\circ = h$, trong khi $h \cot 30^\circ = h\sqrt{3} \neq h$.



c) **Sai.** Từ $HP + HQ = 8$:

$$\frac{h}{\sqrt{3}} + h = 8 \Leftrightarrow h = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} = 12 - 4\sqrt{3} \approx 5,07.$$

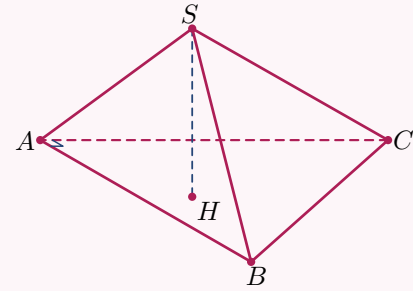
d) **Sai.** Vì $AB \parallel CD$ và $CD \subset (SCD)$ nên $AB \parallel (SCD)$, do đó $d(AB, SC) = d(P, (SCD))$. Ta có $CD \perp PQ$, $CD \perp SH$ nên $CD \perp (SPQ)$; kẻ $PJ \perp SQ$ tại J thì $PJ \perp (SCD)$ và

$$PJ = PQ \sin \widehat{SQP} = 8 \sin 45^\circ = 4\sqrt{2} \approx 5,66.$$

Đáp số: a) Đúng; b) Sai; c) Sai; d) Sai.

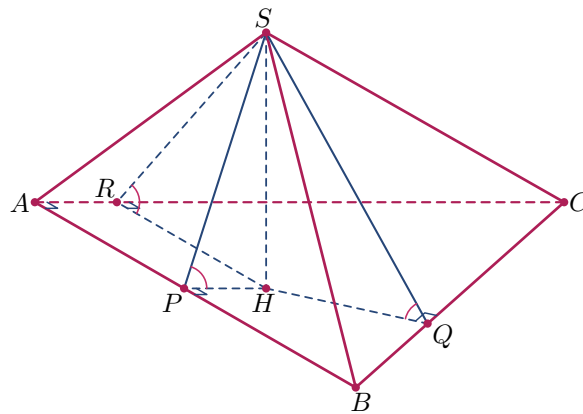
Ví dụ 3.4

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A và $AB = AC = 2$. Biết góc tạo bởi các mặt (SAB) , (SBC) , (SCA) với đáy lần lượt bằng 60° , 45° , 30° ; hình chiếu H của S nằm trong tam giác ABC . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.



- a) Khoảng cách từ H đến AB , BC , CA lần lượt bằng $SH \cot 60^\circ$, $SH \cot 45^\circ$, $SH \cot 30^\circ$.
- b) $S_{ABC} = S_{HAB} + S_{HBC} + S_{HCA}$.
- c) $S_{HBC} = \frac{1}{2}BC \cdot SH \cot 45^\circ$.
- d) $d(S, (ABC)) = 1,41$.

Lời giải. Đặt $h = SH$; gọi P , Q , R lần lượt là hình chiếu của H trên AB , BC , CA .



a) Đúng. Theo định lí ba đường vuông góc, $SP \perp AB$, nên góc giữa (SAB) và đáy là $\widehat{SPH} = 60^\circ$ và $HP = h \cot 60^\circ$ theo (3.1); tương tự với Q , R .

b) Đúng. H nằm trong tam giác ABC nên ba tam giác HAB , HBC , HCA chia tam giác ABC thành ba phần không chồng nhau.

c) Đúng. $S_{HBC} = \frac{1}{2}BC \cdot HQ = \frac{1}{2}BC \cdot h \cot 45^\circ$.

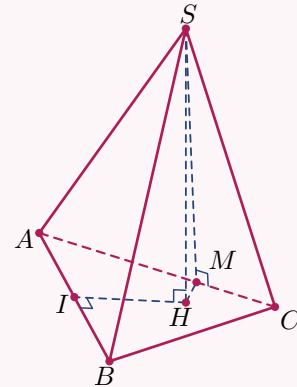
d) Sai. Ta có $BC = 2\sqrt{2}$, $S_{ABC} = 2$. Thay các khoảng cách ở ý a) vào đẳng thức diện tích ở ý b):

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{h}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot h + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot h\sqrt{3} = 2 \Leftrightarrow h \left(\frac{4}{\sqrt{3}} + \sqrt{2} \right) = 2 \Leftrightarrow h = \frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{5} \approx 0,54 \neq 1,41.$$

Đáp số: a) Đúng; b) Đúng; c) Đúng; d) Sai.

Ví dụ 3.5

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 2, $SA = SB = 4$, hình chiếu vuông góc của S trên cạnh AC là điểm M với $MA = 2MC$. Tính chiều cao của hình chóp (làm tròn đến hàng phần mười).



Lời giải. Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC) và I là trung điểm của AB .

Xác định chân đường cao. Vì $SA = SB$ nên $HA = HB$ (Mẫu 1), tức H thuộc đường trung trực của AB , là đường thẳng qua I vuông góc với AB . Vì $SM \perp AC$ nên $HM \perp AC$ (định lý ba đường vuông góc). Vậy H là giao điểm của đường thẳng qua I vuông góc với AB và đường thẳng qua M vuông góc với AC .

Tính AH . Hai góc $\widehat{AIH}$, $\widehat{AMH}$ vuông nên I, M thuộc đường tròn đường kính AH . Tam giác AIM có $\widehat{IAM} = \widehat{BAC} = 60^\circ$ và nội tiếp đường tròn đó, nên theo định lý sin $AH = \frac{IM}{\sin 60^\circ}$. Với $AI = 1$, $AM = \frac{4}{3}$:

$$IM^2 = 1 + \frac{16}{9} - 2 \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{9}, \quad AH^2 = \frac{IM^2}{\sin^2 60^\circ} = \frac{13}{9} \cdot \frac{4}{3} = \frac{52}{27}.$$

Tính chiều cao. Ta có

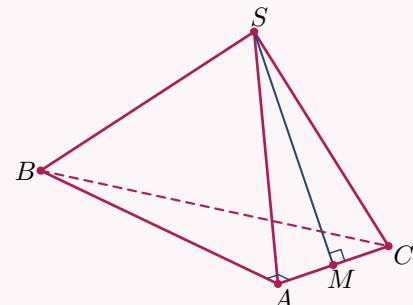
$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{16 - \frac{52}{27}} = \sqrt{\frac{380}{27}} = \frac{2\sqrt{285}}{9} \approx 3,752.$$

Vậy chiều cao của hình chóp xấp xỉ 3,8.

Đáp số: 3,8.

Ví dụ 3.6

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = 3\sqrt{3}$, $AC = 3$; hình chiếu vuông góc của S trên cạnh AC là trung điểm M của AC ; $SA = 3\sqrt{2}$, $SB = 3\sqrt{3}$. Tính chiều cao của hình chóp (làm tròn đến hàng phần mười).



Lời giải. Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC) . Vì $SM \perp AC$ nên $HM \perp AC$ (định lý ba đường vuông góc); do $AB \perp AC$ nên $HM \parallel AB$. Gọi K là hình chiếu của H trên AB thì $AMHK$ là hình chữ nhật; đặt $m = AK = MH$.

Xác định chân đường cao. Ta có $SA^2 = SH^2 + HA^2$, $SB^2 = SH^2 + HB^2$ và $HA^2 = HK^2 + KA^2$, $HB^2 = HK^2 + KB^2$, nên $KB^2 - KA^2 = HB^2 - HA^2 = SB^2 - SA^2 = 27 - 18 = 9$. Nếu K thuộc

tia đối của tia AB thì $KB^2 - KA^2 = (3\sqrt{3} + m)^2 - m^2 \geq 27$, vô lí. Vậy K thuộc tia AB và

$$KB^2 - KA^2 = (3\sqrt{3} - m)^2 - m^2 = 27 - 6\sqrt{3}m = 9, \quad \text{suy ra } m = \sqrt{3}.$$

Tính chiều cao. $AH^2 = AM^2 + MH^2 = \frac{9}{4} + 3 = \frac{21}{4}$, nên

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{18 - \frac{21}{4}} = \frac{\sqrt{51}}{2} \approx 3,57.$$

Vậy chiều cao của hình chóp xấp xỉ 3,6.

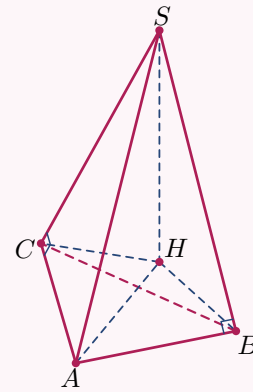
Đáp số: 3,6.

Ví dụ 3.7

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh

2. Biết $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$, $SA = 4$. Tính $d(S, (ABC))$

(làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải. *Xác định chân đường cao.* Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC) . Từ $SB \perp AB$ suy ra $HB \perp AB$, từ $SC \perp AC$ suy ra $HC \perp AC$ (định lí ba đường vuông góc). Hai điểm B, C nhìn AH dưới góc vuông nên A, B, C, H cùng thuộc đường tròn đường kính AH ; đó là đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC , bán kính $R = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Suy ra $AH = 2R = \frac{4}{\sqrt{3}}$ và H nằm ngoài tam giác ABC .

Tính khoảng cách. Ta có

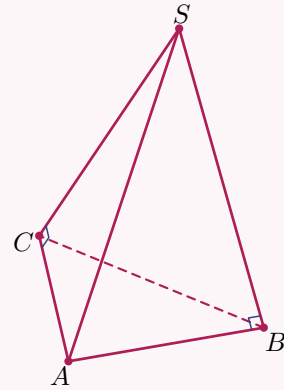
$$d(S, (ABC)) = SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{16 - \frac{16}{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{3} \approx 3,27.$$

Vậy $d(S, (ABC)) \approx 3,27$.

Đáp số: 3,27.

Ví dụ 3.8

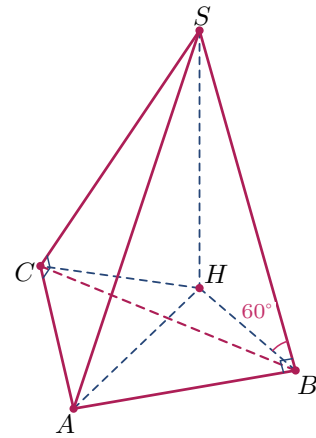
Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$, đáy ABC là tam giác đều cạnh 3. Biết góc giữa (SAB) và (ABC) bằng 60° . Tính $d(S, (ABC))$.



Lời giải. Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC) . Như Ví dụ 3.7, $HB \perp AB$, $HC \perp AC$ và AH là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tam giác đều cạnh 3 có $R = \sqrt{3}$, nên $AH = 2R = 2\sqrt{3}$ và $HB = \sqrt{AH^2 - AB^2} = \sqrt{12 - 9} = \sqrt{3}$.

Ta có $AB \perp HB$, $AB \perp SB$, nên góc giữa (SAB) và (ABC) bằng $\widehat{SBH} = 60^\circ$. Tam giác SHB vuông tại H , do đó

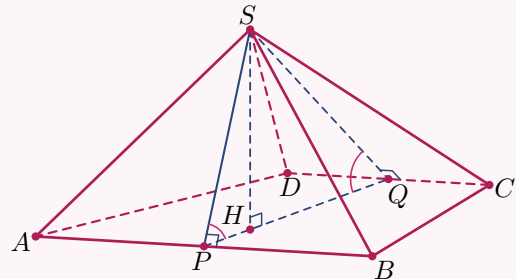
$$d(S, (ABC)) = SH = HB \tan 60^\circ = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3.$$



Đáp số: $d(S, (ABC)) = 3$.

Ví dụ 3.9

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác với $AB \parallel CD$, $d(AB, CD) = 6$, góc giữa (SAB) , (SCD) với đáy lần lượt bằng 60° , 30° . Biết hình chiếu của S nằm trong tứ giác $ABCD$. Tính $d(S, (ABCD))$ (làm tròn đến hàng phần mười).



Lời giải. Gọi H là hình chiếu của S trên $(ABCD)$, $h = SH$. Đường thẳng qua H vuông góc với AB cắt AB , CD lần lượt tại P , Q ; vì $AB \parallel CD$ nên $PQ \perp CD$, và vì H nằm trong tứ giác nên H thuộc đoạn PQ , $PQ = 6$.

Đổi góc thành khoảng cách. Theo (3.1), góc giữa (SAB) và đáy là $\widehat{SPH} = 60^\circ$, góc giữa (SCD) và đáy là $\widehat{SQH} = 30^\circ$, nên $HP = h \cot 60^\circ = \frac{h}{\sqrt{3}}$, $HQ = h \cot 30^\circ = h\sqrt{3}$.

Lập phương trình theo h . Vì H thuộc đoạn PQ nên

$$HP + HQ = 6 \Leftrightarrow h\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right) = 6 \Leftrightarrow \frac{4h}{\sqrt{3}} = 6 \Leftrightarrow h = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,6.$$

Vậy $d(S, (ABCD)) \approx 2,6$.

Đáp số: 2,6.

Ví dụ 3.10

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Biết các mặt (SAB) , (SBC) , (SCD) , (SDA) tạo với đáy các góc lần lượt bằng 60° , 45° , 30° , θ và hình chiếu của S trên mặt đáy nằm trong hình vuông. Tính θ (làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải. Gọi a là cạnh hình vuông, H là hình chiếu của S trên đáy, $h = SH$.

Khoảng cách từ H đến bốn cạnh. Gọi P, Q, R, T là hình chiếu của H trên AB, BC, CD, DA . Theo (3.1):

$$\begin{aligned} HP &= h \cot 60^\circ, & HQ &= h \cot 45^\circ, \\ HR &= h \cot 30^\circ, & HT &= h \cot \theta. \end{aligned}$$

Lập hệ thức. Vì H nằm trong hình vuông, $AB \parallel CD$ và $BC \parallel DA$ nên H thuộc đoạn PR và đoạn QT , với $PR = QT = a$: $HP + HR = a$ và $HQ + HT = a$.

Giải. Từ $h(\cot 60^\circ + \cot 30^\circ) = a$:

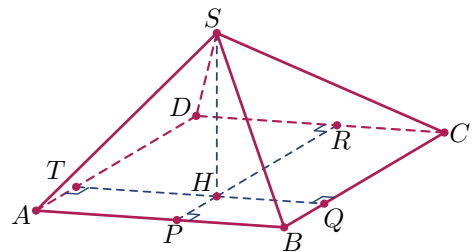
$$h\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right) = a \Leftrightarrow \frac{4h}{\sqrt{3}} = a \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Từ $h(\cot 45^\circ + \cot \theta) = a$:

$$\cot \theta = \frac{a}{h} - 1 = \frac{4}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{4\sqrt{3} - 3}{3} \approx 1,3094.$$

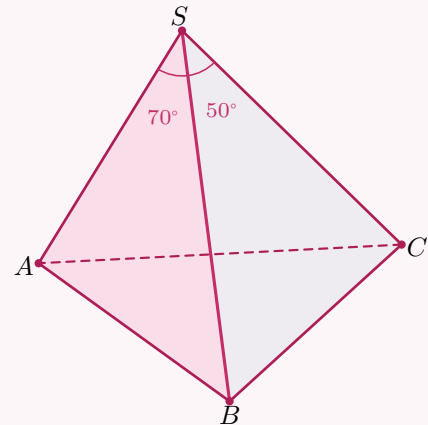
Vậy $\theta \approx 37,4^\circ$.

Đáp số: $\theta \approx 37,4^\circ$.



Ví dụ 3.11

Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = 70^\circ$, $\widehat{BSC} = 50^\circ$, $\widehat{CSA} = 60^\circ$. Xác định số đo góc nhị diện $[A, SB, C]$ (làm tròn đến độ).



Lời giải. Áp dụng công thức (5.1) của Chương 5 cho cạnh SB : góc ở đỉnh đối cạnh SB (không chứa SB) là $\widehat{ASC} = 60^\circ$, hai góc kề cạnh SB là $\widehat{ASB} = 70^\circ$ và $\widehat{BSC} = 50^\circ$. Ta có

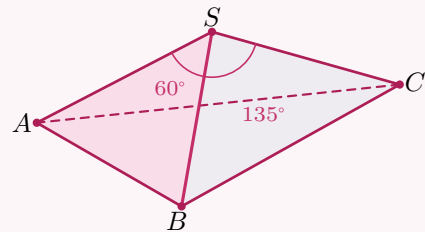
$$\cos[A, SB, C] = \frac{\cos 60^\circ - \cos 70^\circ \cos 50^\circ}{\sin 70^\circ \sin 50^\circ} \approx \frac{0,5 - 0,2198}{0,7198} \approx 0,3892.$$

Suy ra $[A, SB, C] \approx 67,1^\circ$. Vậy số đo góc nhị diện $[A, SB, C]$ xấp xỉ 67° .

Đáp số: $[A, SB, C] \approx 67^\circ$.

Ví dụ 3.12

Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 135^\circ$, $\widehat{CSA} = 120^\circ$. Xác định số đo góc nhị diện $[A, SB, C]$ (làm tròn đến độ).



Lời giải. Áp dụng công thức (5.1) cho cạnh SB : góc đối cạnh SB là $\widehat{ASC} = 120^\circ$, hai góc kề cạnh SB là $\widehat{ASB} = 60^\circ$ và $\widehat{BSC} = 135^\circ$:

$$\cos[A, SB, C] = \frac{\cos 120^\circ - \cos 60^\circ \cos 135^\circ}{\sin 60^\circ \sin 135^\circ} \approx \frac{-0,5 + 0,3536}{0,6124} \approx -0,2391.$$

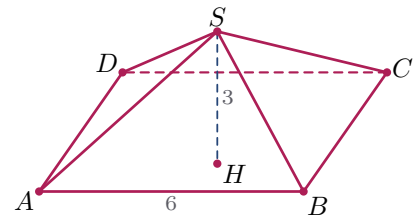
Côsin âm nên góc nhị diện tù, $[A, SB, C] \approx 103,8^\circ$. Vậy số đo góc nhị diện $[A, SB, C]$ xấp xỉ 104° .

Đáp số: $[A, SB, C] \approx 104^\circ$.

Bài tập vận dụng cao

Câu 3.1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 6, hình chiếu vuông góc H của S trên mặt đáy nằm trong hình vuông và $SH = 3$. Gọi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ lần lượt là góc giữa các mặt $(SAB), (SBC), (SCD), (SDA)$ với mặt đáy. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.



- a) Luôn có $\cot \alpha + \cot \gamma = 2$.
- b) Nếu $\alpha = 30^\circ$ thì $\gamma = 60^\circ$.
- c) Có thể xảy ra $\alpha = 20^\circ$.
- d) Giá trị nhỏ nhất của $\tan \alpha + \tan \gamma$ bằng 2.

Lời giải. Gọi P, R là hình chiếu của H trên AB, CD ; đặt $u = HP, v = HR$. Do H nằm trong hình vuông, $u > 0, v > 0, u + v = 6$. Theo (3.1): $\cot \alpha = \frac{u}{3}, \cot \gamma = \frac{v}{3}$.

a) **Đúng.** $\cot \alpha + \cot \gamma = \frac{u+v}{3} = 2$ với mọi vị trí của H .

b) **Sai.** $\cot \gamma = 2 - \cot 30^\circ = 2 - \sqrt{3}$, nên $\tan \gamma = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$, tức $\gamma = 75^\circ$ (câu hình có thật vì $u = 3 \cot 30^\circ = 3\sqrt{3} < 6$).

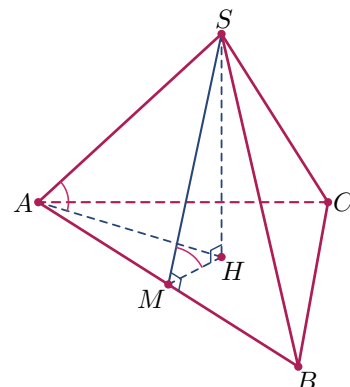
c) **Sai.** Ta có $u < 6$ nên $\cot \alpha < 2$, trong khi $\cot 20^\circ \approx 2,75 > 2$.

d) **Đúng.** $\tan \alpha + \tan \gamma = \frac{3}{u} + \frac{3}{v} = \frac{3(u+v)}{uv} = \frac{18}{uv}$. Theo bất đẳng thức AM – GM, $uv \leq \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 = 9$, nên $\tan \alpha + \tan \gamma \geq 2$; dấu bằng khi $u = v = 3$, tức H nằm trên đường thẳng nối trung điểm AD và BC .

Đáp số: a) Đúng; b) Sai; c) Sai; d) Đúng.

Câu 3.2

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $6\sqrt{3}$ và $SA = SB = SC = 10$. Tính $d(S, (ABC))$, tang của góc giữa một mặt bên với mặt đáy và số đo góc giữa cạnh bên SA với mặt đáy.



Lời giải. Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC) và M là trung điểm của AB . Vì $SA = SB = SC$ nên H là tâm của tam giác đều ABC . Đường cao của tam giác ABC là $CM = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 9$, nên

$HA = \frac{2}{3}CM = 6$ và $HM = \frac{1}{3}CM = 3$. Suy ra

$$d(S, (ABC)) = SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = \sqrt{100 - 36} = 8.$$

Vì $HM \perp AB$ nên theo (3.1), góc giữa (SAB) và (ABC) bằng $\widehat{SMH}$, với $\tan \widehat{SMH} = \frac{SH}{HM} = \frac{8}{3}$.

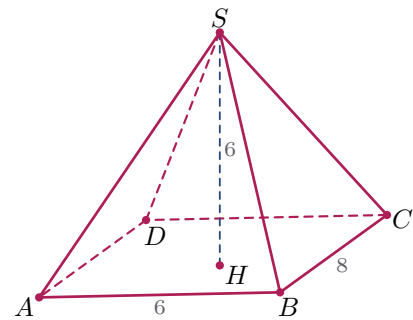
Điểm H cách đều ba cạnh đáy nên ba mặt bên tạo với đáy cùng một góc.

Góc giữa SA và (ABC) bằng $\widehat{SAH}$, với $\cos \widehat{SAH} = \frac{HA}{SA} = \frac{3}{5}$, nên $\widehat{SAH} \approx 53,13^\circ$.

Đáp số: $d(S, (ABC)) = 8$; $\tan \widehat{SMH} = \frac{8}{3}$; $\widehat{SAH} \approx 53,13^\circ$.

Câu 3.3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 6$, $BC = 8$, hình chiếu vuông góc H của S trên mặt đáy nằm trong đáy và $SH = 6$. Gọi β_1, β_3 lần lượt là góc giữa (SAB) , (SCD) với mặt đáy. Tìm giá trị nhỏ nhất của $\tan \beta_1 + \tan \beta_3$ và cho biết khi đó β_1 bằng bao nhiêu.



Lời giải. Gọi P, R là hình chiếu của H trên AB, CD ; đặt $u = HP$, $v = HR$. Do H nằm trong đáy, $u + v = BC = 8$. Theo (3.1):

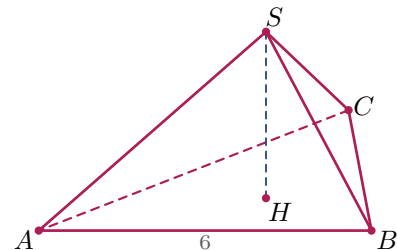
$$\tan \beta_1 + \tan \beta_3 = \frac{6}{u} + \frac{6}{v} = \frac{6(u+v)}{uv} = \frac{48}{uv}.$$

Theo bất đẳng thức AM – GM, $uv \leq \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 = 16$, nên $\tan \beta_1 + \tan \beta_3 \geq 3$; dấu bằng khi $u = v = 4$, tức H cách đều AB và CD . Khi đó $\tan \beta_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, suy ra $\beta_1 \approx 56,31^\circ$.

Đáp số: Giá trị nhỏ nhất bằng 3; khi đó $\beta_1 \approx 56,31^\circ$.

Câu 3.4

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh 6, hình chiếu vuông góc H của S trên mặt đáy nằm trong tam giác ABC và $SH = 3$. Gọi $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ lần lượt là góc giữa ba mặt bên (SAB) , (SBC) , (SCA) với mặt đáy. Tìm giá trị nhỏ nhất của tích $\tan \beta_1 \cdot \tan \beta_2 \cdot \tan \beta_3$.



Lời giải. Đặt x, y, z lần lượt là khoảng cách từ H đến AB, BC, CA . Theo (3.1), $\tan \beta_1 = \frac{3}{x}$, $\tan \beta_2 = \frac{3}{y}$, $\tan \beta_3 = \frac{3}{z}$, nên

$$\tan \beta_1 \tan \beta_2 \tan \beta_3 = \frac{27}{xyz}.$$

Lập ràng buộc. Vì H nằm trong tam giác nên $S_{HAB} + S_{HBC} + S_{HCA} = S_{ABC}$, tức $\frac{6}{2}(x+y+z) = \frac{36\sqrt{3}}{4}$, suy ra $x + y + z = 3\sqrt{3}$.

Đánh giá. Theo bất đẳng thức AM – GM cho ba số dương, $xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = (\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$. Do đó

$$\tan \beta_1 \tan \beta_2 \tan \beta_3 \geq \frac{27}{3\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} \approx 5,20.$$

Dấu bằng khi $x = y = z = \sqrt{3}$, tức H là tâm tam giác đều; khi đó ba mặt bên cùng tạo với đáy góc 60° .

Đáp số: Giá trị nhỏ nhất bằng $3\sqrt{3} \approx 5,20$.

4

CHƯƠNG

Ba con đường tới thể tích

Thể tích tứ diện không cần đường cao

Kiến thức trọng tâm

Ngoài công thức $V = \frac{1}{3}S_{\text{đáy}} \cdot h$, thể tích tứ diện còn tính được theo một cặp cạnh đối, theo tỉ lệ các đoạn lấy trên một cặp cạnh đối, hoặc theo ba cạnh và ba góc ở một đỉnh.

Ba công thức thể tích

1. Thể tích theo cặp cạnh đối. Với tứ diện $ABCD$, gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AB , CD và $d = d(AB, CD)$:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin \varphi. \quad (4.1)$$

2. Tỉ số thể tích khi lấy đoạn trên cặp cạnh đối. Nếu M, N thuộc đường thẳng AB và P, Q thuộc đường thẳng CD ($M \neq N, P \neq Q$) thì

$$\frac{V_{MNPQ}}{V_{ABCD}} = \frac{MN \cdot PQ}{AB \cdot CD}. \quad (4.2)$$

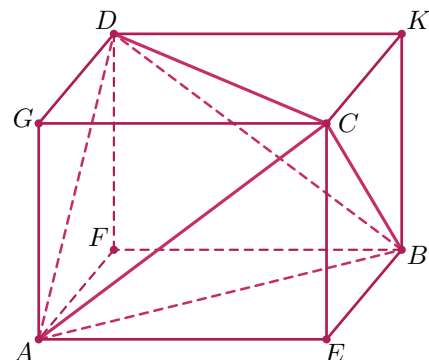
3. Thể tích chóp theo ba cạnh chung đỉnh và ba góc ở đỉnh. Với hình chóp $S.ABC$ có $SA = a, SB = b, SC = c$ và $\alpha = \widehat{BSC}, \beta = \widehat{CSA}, \gamma = \widehat{ASB}$:

$$V = \frac{abc}{6} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}. \quad (4.3)$$

Chứng minh. Công thức (4.1). Qua mỗi cạnh của tứ diện $ABCD$ dựng mặt phẳng song song với cạnh đối diện. Mặt phẳng qua AB song song với CD và mặt phẳng qua CD song song với AB song song với nhau; hai cặp cạnh đối còn lại cũng vậy. Ba cặp mặt phẳng song song đó tạo thành hình hộp $AEBF.GCKD$ (hình bên), mỗi cạnh của tứ diện là đường chéo của một mặt hộp; AB, CD là đường chéo của hai mặt đáy $AEBF, GCKD$.

Hình hộp gồm tứ diện $ABCD$ và bốn tứ diện góc $C.EAB, D.FAB, A.GCD, B.KCD$. Mỗi tứ diện góc có đáy là một nửa mặt đáy của hộp và có chiều cao bằng chiều cao của hộp, nên có thể tích $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} V_{\text{hộp}} = \frac{1}{6} V_{\text{hộp}}$. Do đó $V_{ABCD} = V_{\text{hộp}} - 4 \cdot \frac{1}{6} V_{\text{hộp}} = \frac{1}{3} V_{\text{hộp}}$.

Hình bình hành $AEBF$ có hai đường chéo AB, EF ; tứ giác $ECDF$ là hình bình hành nên $EF \parallel CD$,



$EF = CD$, suy ra góc giữa AB , EF bằng φ và $S_{AEBF} = \frac{1}{2}AB \cdot EF \sin \varphi = \frac{1}{2}AB \cdot CD \sin \varphi$. Hai mặt đáy song song lần lượt chứa AB , CD nên chiều cao của hộp bằng $d(AB, CD) = d$. Vậy

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{AEBF} \cdot d = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}AB \cdot CD \sin \varphi \cdot d = \frac{1}{6}AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin \varphi,$$

đó là (4.1).

Công thức (4.2). Hai tứ diện $MNPQ$ và $ABCD$ có cùng khoảng cách d và cùng góc φ giữa cặp cạnh đối (đường thẳng MN trùng AB , đường thẳng PQ trùng CD). Áp dụng (4.1) cho hai tứ diện rồi chia vế theo vế được (4.2); thể tích V_{MNPQ} chỉ phụ thuộc độ dài MN , PQ , không phụ thuộc vị trí của hai đoạn đó trên hai đường thẳng.

Công thức (4.3). Gọi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ là các vectơ đơn vị cùng hướng với $\vec{SA}, \vec{SB}, \vec{SC}$; khi đó $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \cos \alpha$, $\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = \cos \beta$, $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \cos \gamma$. Lấy A' trên tia SA với $SA' = 1$ và gọi H là hình chiếu của A' trên (SBC) . Vì $H \in (SBC)$ nên $\vec{SH} = x\vec{e}_2 + y\vec{e}_3$, do đó $\vec{HA'} = \vec{e}_1 - x\vec{e}_2 - y\vec{e}_3$. Hai điều kiện $\vec{HA'} \cdot \vec{e}_2 = 0$, $\vec{HA'} \cdot \vec{e}_3 = 0$ cho

$$\begin{cases} x + y \cos \alpha = \cos \gamma \\ x \cos \alpha + y = \cos \beta \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\sin^2 \alpha}, \quad y = \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma}{\sin^2 \alpha}.$$

Vì $\vec{HA'}$ vuông góc với $\vec{e}_2$ và $\vec{e}_3$ nên

$$\begin{aligned} A'H^2 &= \vec{HA'} \cdot \vec{e}_1 = 1 - x \cos \gamma - y \cos \beta \\ &= \frac{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}{\sin^2 \alpha} = \frac{W}{\sin^2 \alpha}, \end{aligned}$$

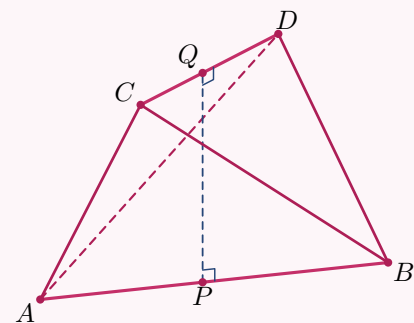
với W là biểu thức dưới căn của (4.3). Ba điểm S, A', A thẳng hàng nên

$$d(A, (SBC)) = \frac{SA}{SA'} \cdot A'H = \frac{a\sqrt{W}}{\sin \alpha}, \quad V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}bc \sin \alpha \cdot \frac{a\sqrt{W}}{\sin \alpha} = \frac{abc}{6}\sqrt{W}.$$

Ví dụ minh họa

Ví dụ 4.1

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \cdot CD = 6$, $d(AB, CD) = 2$, góc giữa AB và CD bằng 60° . Tính thể tích tứ diện (làm tròn đến hàng phần mười).



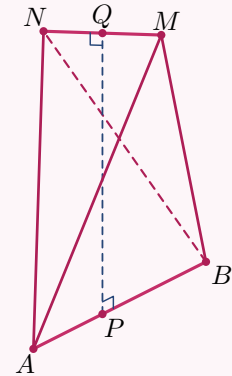
Lời giải. Trên hình, PQ là đoạn vuông góc chung của AB , CD và $PQ = d(AB, CD) = 2$. Theo (4.1),

$$V = \frac{1}{6}AB \cdot CD \cdot d(AB, CD) \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \approx 1,7.$$

Đáp số: $V = \sqrt{3} \approx 1,7$.

Ví dụ 4.2

Trên hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 vuông góc với nhau và chéo nhau, lấy đoạn AB trên Δ_1 và đoạn MN trên Δ_2 sao cho $AB = 2MN = 4$. Biết thể tích tứ diện $ABMN$ bằng 6. Tính khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2 .



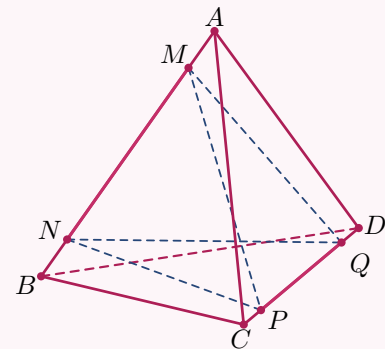
Lời giải. Ta có $AB = 4, MN = 2$ và góc giữa hai đường thẳng AB, MN bằng 90° . Gọi $d = d(\Delta_1, \Delta_2) = d(AB, MN)$. Áp dụng (4.1) cho tứ diện $ABMN$ với cặp cạnh đối AB, MN :

$$6 = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 2 \cdot d \cdot \sin 90^\circ = \frac{4d}{3} \Leftrightarrow d = \frac{18}{4} = 4,5.$$

Đáp số: $d(\Delta_1, \Delta_2) = 4,5$.

Ví dụ 4.3

Cho tứ diện đều $ABCD$ có thể tích bằng $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Trên cạnh AB lấy hai điểm M, N ; trên cạnh CD lấy hai điểm P, Q sao cho $MN \cdot PQ = 2$. Tính thể tích tứ diện $MNPQ$ (làm tròn đến hàng phần mười).



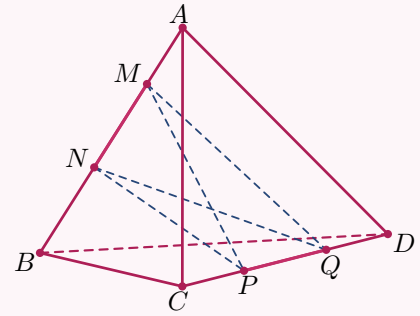
Lời giải. Tứ diện đều cạnh a có thể tích $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. Từ $\frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ suy ra $a^3 = 8, a = 2$, nên $AB \cdot CD = 4$. Các điểm tồn tại vì MN, PQ chỉ cần không vượt quá 2 (chẳng hạn $MN = PQ = \sqrt{2}$). Theo (4.2):

$$V_{MNPQ} = V_{ABCD} \cdot \frac{MN \cdot PQ}{AB \cdot CD} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0,5.$$

Đáp số: $V_{MNPQ} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0,5$.

Ví dụ 4.4

Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 18, trong đó $CD \leq 2AB$ và $AB \leq 3CD$. Trên cạnh AB lấy hai điểm M, N ; trên cạnh CD lấy hai điểm P, Q sao cho $CD = 2MN$, $AB = 3PQ$. Tính thể tích tứ diện $MNPQ$.



Lời giải. Ta có $MN = \frac{CD}{2} \leq AB$ và $PQ = \frac{AB}{3} \leq CD$, nên các điểm M, N, P, Q tồn tại. Theo (4.2):

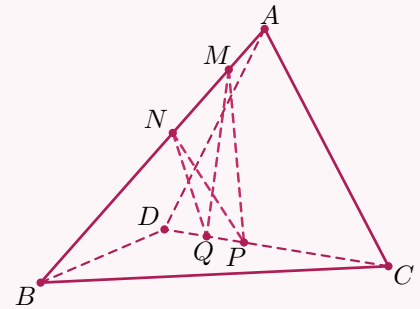
$$\frac{V_{MNPQ}}{V_{ABCD}} = \frac{MN \cdot PQ}{AB \cdot CD} = \frac{\frac{CD}{2} \cdot \frac{AB}{3}}{AB \cdot CD} = \frac{1}{6}.$$

Vậy $V_{MNPQ} = \frac{18}{6} = 3$.

Đáp số: $V_{MNPQ} = 3$.

Ví dụ 4.5

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$ và thể tích bằng 36. Trên cạnh AB lấy hai điểm M, N ; trên cạnh CD lấy hai điểm P, Q sao cho $2 \cdot \frac{MN}{CD} + 3 \cdot \frac{PQ}{AB} = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện $MNPQ$.



Lời giải. Đặt $x = \frac{MN}{CD}$, $y = \frac{PQ}{AB}$ ($x, y > 0$, $2x + 3y = 1$). Theo (4.2) và bất đẳng thức AM – GM,

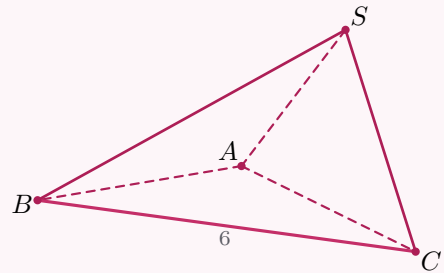
$$V_{MNPQ} = 36 \cdot \frac{MN \cdot PQ}{AB \cdot CD} = 36 \cdot \frac{MN}{CD} \cdot \frac{PQ}{AB} = 36xy = 6 \cdot (2x)(3y) \leq 6 \left(\frac{2x + 3y}{2} \right)^2 = \frac{3}{2}.$$

Dấu bằng khi $2x = 3y = \frac{1}{2}$, tức $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{6}$; khi đó $MN = \frac{CD}{4} = \frac{AB}{4} < AB$ và $PQ = \frac{AB}{6} = \frac{CD}{6} < CD$ (vì $AB = CD$) nên lấy được M, N trên cạnh AB và P, Q trên cạnh CD . Vậy giá trị lớn nhất của thể tích bằng 1,5.

Đáp số: 1,5.

Ví dụ 4.6

Cho hình chóp $S.ABC$ có $BC = 6$, diện tích các tam giác ABC và SBC lần lượt là 6 và 8, số đo góc nhị diện $[S, BC, A]$ bằng 50° . Tính thể tích khối chóp (làm tròn đến hàng phần mười).



Lời giải. Gọi K là chân đường vuông góc hạ từ S xuống BC và H là hình chiếu của S trên (ABC) .

$$\text{Ta có } SK = \frac{2S_{SBC}}{BC} = \frac{2 \cdot 8}{6} = \frac{8}{3}.$$

Tính chiều cao. Từ $BC \perp SK$, $BC \perp SH$ suy ra $BC \perp (SHK)$, nên $HK \perp BC$. Góc nhị diện $[S, BC, A] = 50^\circ$ là góc nhọn nên H thuộc nửa mặt phẳng bờ BC chứa A và $\widehat{SKH} = 50^\circ$. Tam giác SHK vuông tại H cho

$$d(S, (ABC)) = SH = SK \sin 50^\circ = \frac{8}{3} \sin 50^\circ.$$

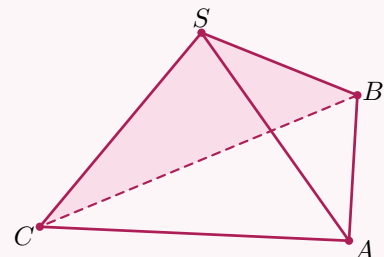
Tính thể tích.

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{8}{3} \sin 50^\circ = \frac{16}{3} \sin 50^\circ \approx 4,1.$$

Đáp số: $V = \frac{16}{3} \sin 50^\circ \approx 4,1.$

Ví dụ 4.7

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều. Biết $S_{SAB} = 1,2 S_{SBC}$ và góc nhị diện $[S, AB, C]$ bằng 50° . Tính cosin của góc giữa (SBC) và đáy (ABC) (làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải. Gọi a là cạnh đáy, $h = d(S, (ABC))$; φ_1, φ_2 lần lượt là góc giữa $(SAB), (SBC)$ với đáy. Góc nhị diện $[S, AB, C] = 50^\circ$ là góc nhọn nên góc giữa (SAB) và (ABC) bằng số đo nhị diện đó: $\varphi_1 = 50^\circ$.

Áp dụng công thức (2.1). Với điểm S : $d(S, AB) = \frac{h}{\sin \varphi_1}$, $d(S, BC) = \frac{h}{\sin \varphi_2}$. Do $AB = BC = a$:

$$\frac{S_{SAB}}{S_{SBC}} = \frac{\frac{1}{2}a \cdot d(S, AB)}{\frac{1}{2}a \cdot d(S, BC)} = \frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_1}.$$

Kết luận. Từ giả thiết, $\sin \varphi_2 = 1,2 \sin 50^\circ \approx 0,9193$. Vì $0^\circ \leq \varphi_2 \leq 90^\circ$ nên

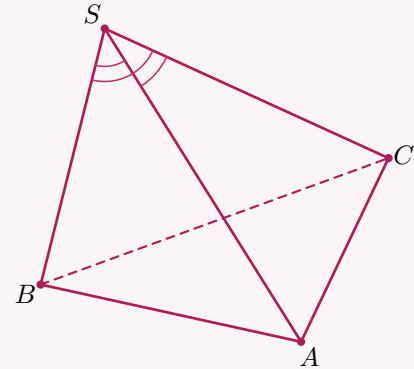
$$\cos \varphi_2 = \sqrt{1 - 1,44 \sin^2 50^\circ} \approx 0,3937.$$

Vậy cosin của góc giữa (SBC) và đáy xấp xỉ 0,39.

Đáp số: 0,39.

Ví dụ 4.8

Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60^\circ$ và $SA \cdot SB \cdot SC = 36$. Tính thể tích khối chóp (làm tròn đến hàng phần mười).



Lời giải. Áp dụng (4.3) với $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Biểu thức dưới căn bằng

$$1 - 3 \cos^2 60^\circ + 2 \cos^3 60^\circ = 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

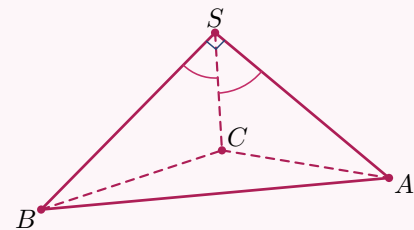
nên

$$V = \frac{SA \cdot SB \cdot SC}{6} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{36}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \approx 4,2.$$

Đáp số: $V = 3\sqrt{2} \approx 4,2$.

Ví dụ 4.9

Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = 90^\circ$, $\widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60^\circ$ và $SA \cdot SB \cdot SC = 12$. Tính thể tích khối chóp (làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải. Áp dụng (4.3) với $\alpha = \widehat{BSC} = 60^\circ$, $\beta = \widehat{CSA} = 60^\circ$, $\gamma = \widehat{ASB} = 90^\circ$. Vì $\cos 90^\circ = 0$ nên biểu thức dưới căn bằng

$$1 - \cos^2 60^\circ - \cos^2 60^\circ - \cos^2 90^\circ + 2 \cos 60^\circ \cos 60^\circ \cos 90^\circ = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Do đó

$$V = \frac{12}{6} \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1,41.$$

Đáp số: $V = \sqrt{2} \approx 1,41$.

Ví dụ 4.10

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = BC = AC = 6$, $AD = CD = DB = 8$. Tính thể tích khối tứ diện (làm tròn đến hàng phần mười).

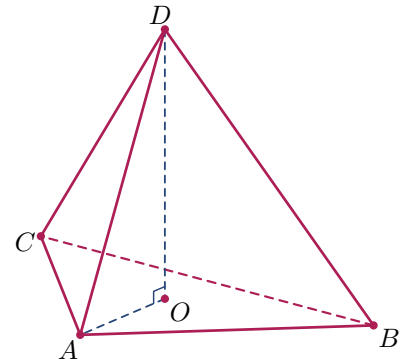
Lời giải. Gọi O là hình chiếu của D trên (ABC) .

Xác định chân đường cao. Vì $DA = DB = DC$ nên theo Mẫu 1 của Chương 3, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC , bán kính $R = OA = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$. Suy ra

$$DO = \sqrt{DA^2 - R^2} = \sqrt{64 - 12} = 2\sqrt{13}.$$

Tính thể tích. Ta có $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2 = 9\sqrt{3}$, nên

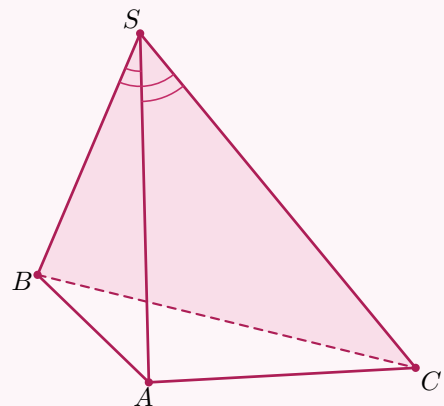
$$V = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{13} = 6\sqrt{39} \approx 37,5.$$



Đáp số: $V = 6\sqrt{39} \approx 37,5$.

Ví dụ 4.11

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 5$, $SB = 6$, $SC = 6$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 45^\circ$. Tính $d(A, (SBC))$ (làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải. **Tính thể tích.** Áp dụng (4.3) với $a = SA = 5$, $b = SB = 6$, $c = SC = 6$, $\alpha = \widehat{BSC} = 60^\circ$, $\beta = \widehat{CSA} = 45^\circ$, $\gamma = \widehat{ASB} = 60^\circ$. Biểu thức dưới căn bằng

$$1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

nên

$$V = \frac{5 \cdot 6 \cdot 6}{6} \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4}} = 30 \cdot \frac{\sqrt[4]{2}}{2} = 15\sqrt[4]{2}.$$

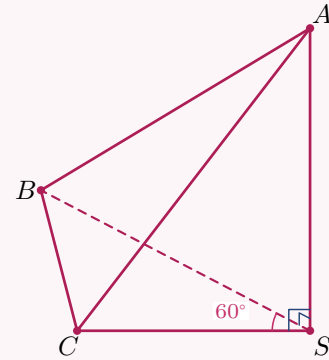
Đổi thể tích thành khoảng cách. Ta có $S_{SBC} = \frac{1}{2}SB \cdot SC \sin \widehat{BSC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \sin 60^\circ = 9\sqrt{3}$, nên

$$d(A, (SBC)) = \frac{3V}{S_{SBC}} = \frac{45\sqrt[4]{2}}{9\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt[4]{2}}{\sqrt{3}} \approx 3,43.$$

Đáp số: $d(A, (SBC)) \approx 3,43$.

Ví dụ 4.12

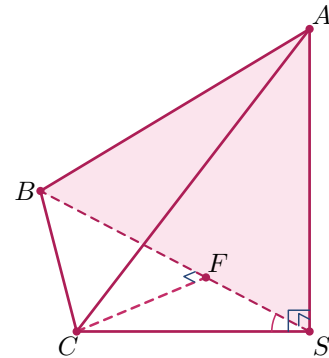
Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = \widehat{CSA} = 90^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$ và $d(C, (SAB)) = 2$. Tính độ dài cạnh SC (làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải. Ta có $SA \perp SB$, $SA \perp SC$ nên $SA \perp (SBC)$, suy ra $(SAB) \perp (SBC)$ theo giao tuyến SB . Kẻ $CF \perp SB$ tại F ; đường thẳng CF nằm trong (SBC) và vuông góc với giao tuyến nên $CF \perp (SAB)$, do đó $CF = d(C, (SAB)) = 2$.

Vì $\widehat{BSC} = 60^\circ$ là góc nhọn nên F thuộc tia SB và $\widehat{CSF} = 60^\circ$. Tam giác SFC vuông tại F nên $CF = SC \sin 60^\circ$, suy ra

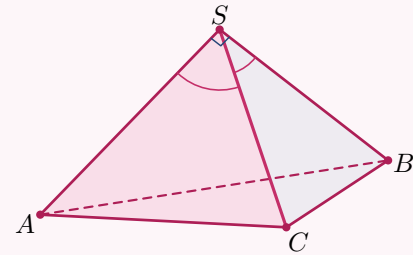
$$SC = \frac{2}{\sin 60^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2,31.$$



Đáp số: $SC = \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2,31$.

Ví dụ 4.13

Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = 90^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 70^\circ$. Tính số đo góc nhị diện $[A, SC, B]$ (làm tròn đến độ).



Lời giải. Áp dụng công thức (5.1) của Chương 5 cho cạnh SC : góc đối cạnh SC là $\widehat{ASB} = 90^\circ$, hai góc kề cạnh SC là $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 70^\circ$:

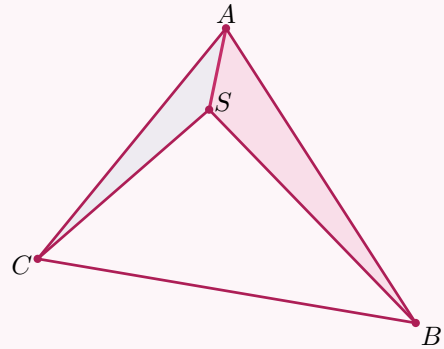
$$\cos[A, SC, B] = \frac{\cos 90^\circ - \cos 60^\circ \cos 70^\circ}{\sin 60^\circ \sin 70^\circ} \approx \frac{-0,1710}{0,8138} \approx -0,2101.$$

Côsin âm nên góc nhị diện tù, $[A, SC, B] \approx 102,1^\circ$. Vậy số đo góc nhị diện $[A, SC, B]$ xấp xỉ 102° .

Đáp số: $[A, SC, B] \approx 102^\circ$.

Ví dụ 4.14

Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = 130^\circ$, $\widehat{BSC} = 70^\circ$, $\widehat{CSA} = 140^\circ$. Tính số đo góc nhị diện $[B, SA, C]$ (làm tròn đến độ).



Lời giải. Áp dụng công thức (5.1) cho cạnh SA : góc đối cạnh SA là $\widehat{BSC} = 70^\circ$, hai góc kề cạnh SA là $\widehat{ASB} = 130^\circ$, $\widehat{CSA} = 140^\circ$:

$$\cos[B, SA, C] = \frac{\cos 70^\circ - \cos 130^\circ \cos 140^\circ}{\sin 130^\circ \sin 140^\circ}.$$

Ta có $\cos 130^\circ \approx -0,6428$, $\cos 140^\circ \approx -0,7660$, nên

$$\cos[B, SA, C] \approx \frac{0,3420 - 0,4924}{0,7660 \cdot 0,6428} \approx \frac{-0,1504}{0,4924} \approx -0,3054.$$

Suy ra $[B, SA, C] \approx 107,8^\circ$. Vậy số đo góc nhị diện $[B, SA, C]$ xấp xỉ 108° .

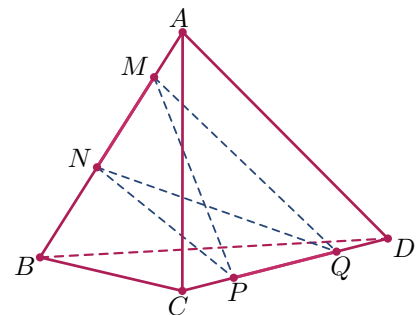
Đáp số: $[B, SA, C] \approx 108^\circ$.

Bài tập vận dụng cao

Câu 4.1

Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 60, $AB = 10$, $CD = 6$. Gọi d là khoảng cách và φ là góc giữa hai đường thẳng AB , CD . Trên cạnh AB lấy hai điểm M , N với $MN = 4$; trên cạnh CD lấy hai điểm P , Q với $PQ = 3$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) $d \sin \varphi = 6$.
- b) $V_{MNPQ} = 12$, không phụ thuộc vị trí của M , N , P , Q .
- c) Có thể xảy ra $d = 5$.
- d) Nếu $\varphi = 30^\circ$ thì $d = 3$.



Lời giải.

a) Đúng. Theo (4.1): $60 = \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 6 \cdot d \sin \varphi = 10 d \sin \varphi$, nên $d \sin \varphi = 6$.

b) Đúng. Theo (4.2): $V_{MNPQ} = 60 \cdot \frac{4 \cdot 3}{10 \cdot 6} = 12$. Công thức chỉ chứa độ dài MN , PQ , nên thể tích không đổi khi các điểm thay đổi trên hai cạnh mà vẫn giữ $MN = 4$, $PQ = 3$.

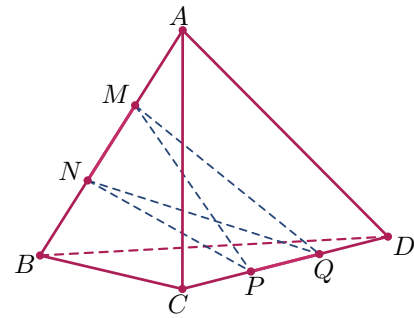
c) Sai. Vì $0 < \sin \varphi \leq 1$ nên $d = \frac{6}{\sin \varphi} \geq 6$; giá trị $d = 5$ không xảy ra.

d) Sai. Với $\varphi = 30^\circ$: $d = \frac{6}{\sin 30^\circ} = 12 \neq 3$.

Đáp số: a) Đúng; b) Đúng; c) Sai; d) Sai.

Câu 4.2

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 8$, $CD = 6$, góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng 30° và thể tích bằng 36. Gọi M, N là hai điểm chia cạnh AB thành ba phần bằng nhau và P, Q là hai điểm chia cạnh CD thành ba phần bằng nhau. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, CD và thể tích khối tứ diện $MNPQ$.



Lời giải. *Tính khoảng cách.* Áp dụng (4.1) cho cặp cạnh đối AB, CD với $d = d(AB, CD)$:

$$36 = \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot 6 \cdot d \cdot \sin 30^\circ = 4d \Rightarrow d = 9.$$

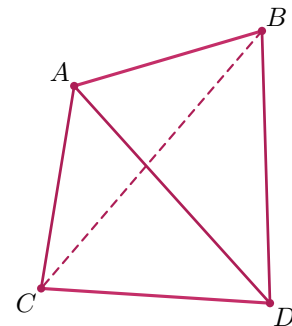
Tính thể tích. Ta có $MN = \frac{AB}{3} = \frac{8}{3}$, $PQ = \frac{CD}{3} = 2$. Theo (4.2):

$$V_{MNPQ} = V_{ABCD} \cdot \frac{MN \cdot PQ}{AB \cdot CD} = 36 \cdot \frac{\frac{8}{3} \cdot 2}{8 \cdot 6} = 36 \cdot \frac{1}{9} = 4.$$

Đáp số: $d(AB, CD) = 9$; $V_{MNPQ} = 4$.

Câu 4.3

Cho tứ diện $ABCD$ có hai đường thẳng AB, CD vuông góc với nhau, khoảng cách giữa chúng bằng 6 và $AB + CD = 12$. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ABCD$.



Lời giải. Theo (4.1) với $\sin 90^\circ = 1$ và bất đẳng thức AM – GM:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot 6 = AB \cdot CD \leq \left(\frac{AB + CD}{2} \right)^2 = 36.$$

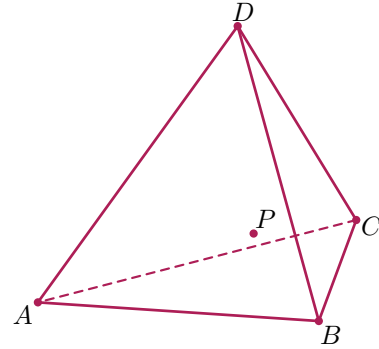
Dấu bằng khi $AB = CD = 6$; tứ diện như vậy tồn tại: lấy hai đoạn AB, CD dài 6 trên hai đường thẳng vuông góc, đoạn vuông góc chung dài 6 nối hai trung điểm. Vậy giá trị lớn nhất của thể tích bằng 36.

Đáp số: 36.

Câu 4.4

Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh 6. Điểm P thay đổi bên trong tứ diện; gọi h_1, h_2, h_3, h_4 lần lượt là khoảng cách từ P tới bốn mặt của tứ diện. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$T = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}.$$



Lời giải. *Tổng khoảng cách không đổi.* Bốn mặt có cùng diện tích $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 36 = 9\sqrt{3}$; thể tích tứ diện đều cạnh 6 là $V = \frac{6^3\sqrt{2}}{12} = 18\sqrt{2}$. Chia tứ diện thành bốn khối chóp đỉnh P có đáy là bốn mặt: $V = \frac{1}{3}S(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$, nên

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{3V}{S} = \frac{54\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}.$$

Đánh giá. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho bốn số dương: $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 \geq 4\sqrt[4]{h_1h_2h_3h_4}$ và $T \geq \frac{4}{\sqrt[4]{h_1h_2h_3h_4}}$, nhân vế theo vế được $(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)T \geq 16$, nên $T \geq \frac{16}{2\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{3} \approx 3,27$.

Điểm rơi. Dấu bằng khi $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = \frac{\sqrt{6}}{2}$, tức P là tâm của tứ diện đều (cách đều bốn mặt, nằm bên trong tứ diện). Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng $\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

Đáp số: $\frac{4\sqrt{6}}{3} \approx 3,27$.

5

CHƯƠNG

Mở góc nhị diện

Ba góc ở đỉnh và lăng trụ hoá

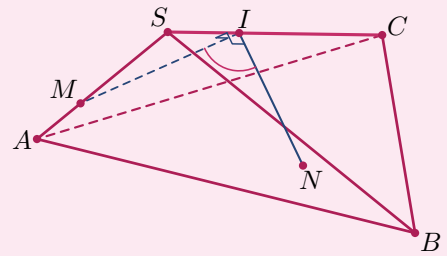
Kiến thức trọng tâm

Chương này gồm công thức (5.1) tính góc nhị diện (có thể tù) theo ba góc ở đỉnh hình chóp, phương pháp lăng trụ hoá (5.2) và cách quy nhị diện về một góc phẳng nhờ cặp đường cùng vuông góc với cạnh nhị diện (Ví dụ 5.2, Ví dụ 5.5).

Nhị diện theo ba góc ở đỉnh

Cho hình chóp $S.ABC$ với $\widehat{BSC} = \alpha$, $\widehat{CSA} = \beta$, $\widehat{ASB} = \gamma$. Khi đó

$$\cos[A, SC, B] = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}. \quad (5.1)$$



Góc $\gamma = \widehat{ASB}$ ở tử số là góc *đối diện* cạnh nhị diện SC ; hai góc $\alpha = \widehat{BSC}$, $\beta = \widehat{CSA}$ là hai góc *kề* cạnh SC .

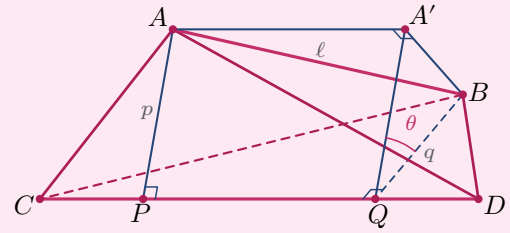
Chứng minh. Gọi $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là các vectơ đơn vị cùng hướng với $\vec{SA}$, $\vec{SB}$, $\vec{SC}$; ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \gamma$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = \cos \alpha$, $\vec{c} \cdot \vec{a} = \cos \beta$. Đặt $\vec{u} = \vec{a} - \cos \beta \vec{c}$ và $\vec{v} = \vec{b} - \cos \alpha \vec{c}$. Lấy các điểm I , M với $\vec{SI} = \cos \beta \vec{c}$, $\vec{SM} = \vec{a}$; khi đó I thuộc đường thẳng SC , M thuộc tia SA và $\vec{IM} = \vec{u}$. Vì $\vec{u} \cdot \vec{c} = \cos \beta - \cos \beta = 0$ nên tia IM vuông góc với SC và nằm trong nửa mặt phẳng (SC, A) . Tương tự, lấy N với $\vec{IN} = \vec{v}$; ta có $\vec{v} \cdot \vec{c} = 0$ và $\vec{SN} = \vec{b} + (\cos \beta - \cos \alpha) \vec{c}$, nên tia IN vuông góc với SC và nằm trong nửa mặt phẳng (SC, B) . Do đó $[A, SC, B] = \widehat{MIN}$, bằng góc giữa hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$. Ta có

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{a} \cdot \vec{b} - \cos \alpha (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \cos \beta (\vec{c} \cdot \vec{b}) + \cos \alpha \cos \beta & |\vec{u}|^2 &= 1 - 2 \cos^2 \beta + \cos^2 \beta = \sin^2 \beta, \\ &= \cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta, & |\vec{v}|^2 &= \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Chia $\vec{u} \cdot \vec{v}$ cho $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = \sin \alpha \sin \beta$ ta được (5.1).

Lăng trụ hoá nhị diện

Cho tứ diện $ABCD$; P, Q lần lượt là hình chiếu của A, B lên đường thẳng CD . Đặt $p = AP = d(A, CD)$, $q = BQ = d(B, CD)$, $\ell = AB$ và φ là góc giữa hai đường thẳng AB, CD . Khi đó



$$\cos[A, CD, B] = \frac{p^2 + q^2 - \ell^2 \sin^2 \varphi}{2pq}. \quad (5.2)$$

Chứng minh. Đặt $\theta = [A, CD, B]$. Dựng điểm A' sao cho $\vec{AA'} = \vec{PQ}$ ($A' \equiv A$ khi $P \equiv Q$). Tứ giác $APQA'$ là hình chữ nhật nên $QA' \parallel PA$, $QA' = p$ và $QA' \perp CD$; $AA' \parallel CD$ nên A' thuộc nửa mặt phẳng (CD, A) . Hai tia QA', QB cùng vuông góc với CD tại Q , do đó $\widehat{A'QB} = \theta$ và theo định lí cosin trong tam giác $A'QB$,

$$A'B^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos \theta.$$

Mặt khác $CD \perp QA', CD \perp QB$ nên $CD \perp (A'QB)$; vì $AA' \parallel CD$ nên $AA' \perp A'B$. Tam giác $AA'B$ vuông tại A' có $AA' = PQ$ và $\widehat{BAA'} = \varphi$ (do $AA' \parallel CD$), nên

$$A'B = \ell \sin \varphi, \quad AB^2 = PQ^2 + \ell^2 \sin^2 \varphi.$$

Thay $A'B^2 = \ell^2 \sin^2 \varphi$ vào đẳng thức trước ta được (5.2). Khi $P \equiv Q$ thì $AB = A'B$, $AB \perp CD$, $\varphi = 90^\circ$ và công thức vẫn đúng.

Tam giác $A'QB$ là thiết diện vuông góc với cạnh bên của lăng trụ có ba cạnh bên nằm trên ba đường thẳng: CD và hai đường thẳng qua A, B song song với CD ; vì vậy cách làm được gọi là lăng trụ hoá.

Hệ quả. Ta có $AB^2 = PQ^2 + \ell^2 \sin^2 \varphi$, tức $PQ = \ell \cos \varphi$.

Kĩ năng quy ước chiều vectơ pháp tuyến

Khi tính nhị diện $\theta = [A, SC, B]$ bằng vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1$ của mặt phẳng (SCA) và $\vec{n}_2$ của mặt phẳng (SCB) , góc giữa hai vectơ này bằng θ hoặc $180^\circ - \theta$ tùy theo chiều đã chọn. Quy ước: chọn $\vec{n}_1$ hướng vào nửa không gian bờ (SCA) chứa B (tức $\vec{n}_1 \cdot \vec{SB} > 0$) và chọn $\vec{n}_2$ hướng ra khỏi nửa không gian bờ (SCB) chứa A (tức $\vec{n}_2 \cdot \vec{SA} < 0$). Khi đó

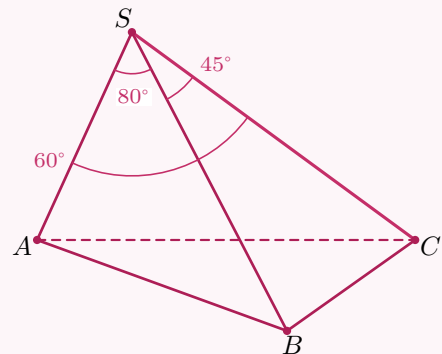
$$\cos \theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|},$$

giữ nguyên dấu nên phân biệt được nhị diện nhọn hay tù (trong mặt phẳng vuông góc với SC , hai vectơ này nhận được từ hai tia của góc phẳng nhị diện bằng cách quay cùng một góc 90° theo cùng một chiều). Nếu chọn $\vec{n}_2$ hướng vào nửa không gian bờ (SCB) chứa A (hoặc cả hai vectơ cùng hướng ra) thì góc giữa hai vectơ bằng $180^\circ - \theta$, dễ bị nhầm sang góc bù.

Ví dụ minh họa

Ví dụ 5.1

Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = 80^\circ$, $\widehat{BSC} = 45^\circ$, $\widehat{CSA} = 60^\circ$. Xác định số đo góc nhị diện $[A, SC, B]$.



Lời giải. Cạnh nhị diện là SC : góc đối diện là $\gamma = \widehat{ASB} = 80^\circ$, hai góc kề là $\alpha = \widehat{BSC} = 45^\circ$, $\beta = \widehat{CSA} = 60^\circ$. Theo (5.1),

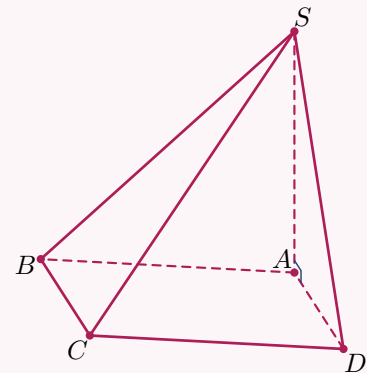
$$\cos[A, SC, B] = \frac{\cos 80^\circ - \cos 45^\circ \cos 60^\circ}{\sin 45^\circ \sin 60^\circ} \approx \frac{0,1736 - 0,3536}{0,6124} \approx -0,294.$$

Vậy $[A, SC, B] \approx 107,1^\circ$, nhị diện tù.

Đáp số: $[A, SC, B] \approx 107,1^\circ$.

Ví dụ 5.2

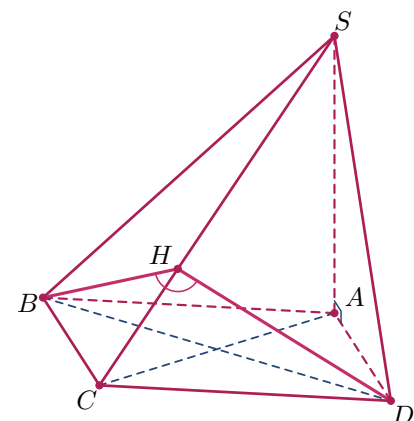
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = AB$. Xác định số đo góc nhị diện $[B, SC, D]$.



Lời giải. Đặt $SA = AB = a$.

Dựng góc phẳng nhị diện. Ta có $BC \perp AB$, $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$, tam giác SBC vuông tại B . Kẻ $BH \perp SC$ tại H . Vì $BD \perp AC$, $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAC)$, suy ra $BD \perp SC$. Do đó $SC \perp (BDH)$, $DH \perp SC$ và $[B, SC, D] = \widehat{BHD}$.

Tính toán. Ta có $SB = a\sqrt{2}$, $SC = a\sqrt{3}$, $BH = \frac{SB \cdot BC}{SC} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$; tương tự, $CD \perp (SAD)$ nên tam giác SDC vuông tại D có $SD = SB$, $DC = BC$ nên $DH = \frac{SD \cdot DC}{SC} = BH$; $BD = a\sqrt{2}$.



Theo định lí cosin trong tam giác BHD ,

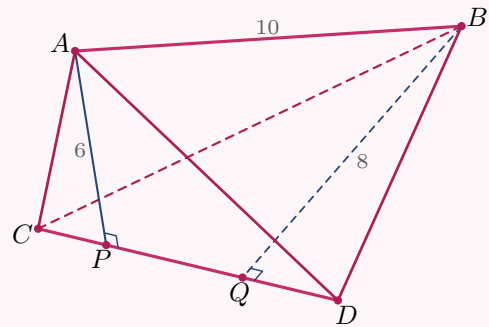
$$\cos \widehat{BHD} = \frac{BH^2 + DH^2 - BD^2}{2 BH \cdot DH} = \frac{\frac{2a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} - 2a^2}{2 \cdot \frac{2a^2}{3}} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $[B, SC, D] = 120^\circ$.

Đáp số: $[B, SC, D] = 120^\circ$.

Ví dụ 5.3

Cho tứ diện $ABCD$ biết $d(A, CD) = 6$, $d(B, CD) = 8$, $AB = 10$ và góc giữa hai đường thẳng AB , CD bằng 60° . Xác định số đo góc nhị diện $[A, CD, B]$.



Lời giải. Ta có $p = 6$, $q = 8$, $\ell^2 \sin^2 \varphi = 100 \cdot \frac{3}{4} = 75$. Theo (5.2),

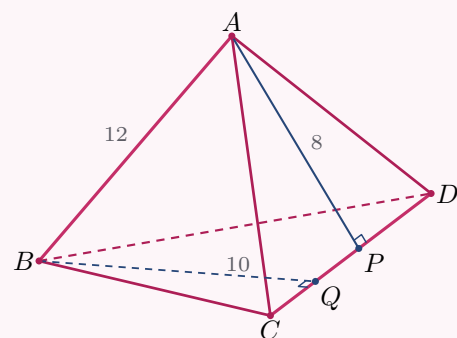
$$\cos[A, CD, B] = \frac{p^2 + q^2 - \ell^2 \sin^2 \varphi}{2pq} = \frac{36 + 64 - 75}{2 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{25}{96}.$$

Vậy $[A, CD, B] \approx 74,9^\circ$.

Đáp số: $[A, CD, B] \approx 74,9^\circ$.

Ví dụ 5.4

Cho tứ diện $ABCD$ biết $d(A, CD) = 8$, $d(B, CD) = 10$, $AB = 12$ và góc giữa AB , CD bằng 60° . Xác định số đo góc nhị diện $[A, CD, B]$ và tính $d(AB, CD)$ (làm tròn đến hàng phần mười).



Lời giải. *Lăng trụ hoá.* Gọi (R) là mặt phẳng vuông góc với CD tại một điểm O của CD . Các đường thẳng qua A , B song song với CD cắt (R) tại A_0 , B_0 . Ba đường thẳng AA_0 , BB_0 , CD là ba cạnh bên của một lăng trụ, có thiết diện vuông góc với cạnh bên là tam giác OA_0B_0 .

- Vì $AA_0 \parallel CD$ nên $d(A, CD) = d(A_0, CD)$; $OA_0 \subset (R)$ nên $OA_0 \perp CD$, do đó $OA_0 = d(A, CD) = 8$. Tương tự $OB_0 = 10$.
- Đoạn A_0B_0 là hình chiếu vuông góc của AB trên (R) . Vì $CD \perp (R)$ nên góc giữa AB và (R) bằng $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, suy ra $A_0B_0 = AB \cos 30^\circ = 6\sqrt{3}$.

- Vì $AA_0 \parallel CD$ nên A_0 thuộc nửa mặt phẳng bờ CD chứa A ; tương tự B_0 thuộc nửa mặt phẳng bờ CD chứa B . Hai tia OA_0, OB_0 cùng vuông góc với CD , do đó $\widehat{A_0OB_0}$ là góc phẳng của nhị diện $[A, CD, B]$.

Tính góc nhị diện. Theo định lí côsin trong tam giác OA_0B_0 (đây chính là công thức (5.2)),

$$\cos \widehat{A_0OB_0} = \frac{OA_0^2 + OB_0^2 - A_0B_0^2}{2OA_0 \cdot OB_0} = \frac{64 + 100 - 108}{160} = \frac{7}{20},$$

nên $[A, CD, B] \approx 69,5^\circ$.

Tính khoảng cách. Mặt phẳng (ABB_0A_0) chứa AB và $AA_0 \parallel CD$ nên $(ABB_0A_0) \parallel CD$, suy ra $d(AB, CD) = d(O, (ABB_0A_0))$. Lại có $AA_0 \perp (R)$ nên $(ABB_0A_0) \perp (R)$ theo giao tuyến A_0B_0 ; kẻ $OT \perp A_0B_0$ ($T \in A_0B_0$) thì $OT \perp (ABB_0A_0)$, do đó $d(AB, CD) = OT$. Ta có $\sin \widehat{A_0OB_0} = \sqrt{1 - \frac{49}{400}} = \frac{3\sqrt{39}}{20}$, $S_{OA_0B_0} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \frac{3\sqrt{39}}{20} = 6\sqrt{39}$, nên

$$OT = \frac{2S_{OA_0B_0}}{A_0B_0} = \frac{12\sqrt{39}}{6\sqrt{3}} = 2\sqrt{13} \approx 7,2.$$

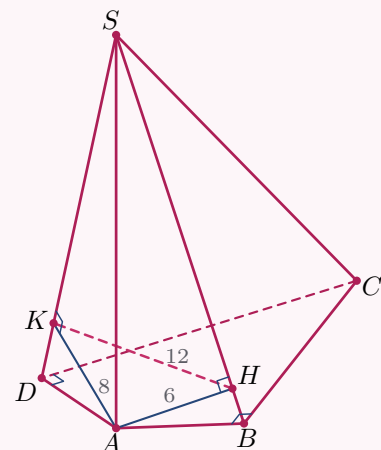
Cách khác. Đặt $\theta = [A, CD, B]$. Hạ $AP \perp CD$ tại P và gọi A_1 là hình chiếu của A trên (BCD) ; tam giác APA_1 vuông tại A_1 và $CD \perp (APA_1)$ nên $\widehat{APA_1}$ bằng θ hoặc $180^\circ - \theta$, suy ra $d(A, (BCD)) = AP \sin \theta = d(A, CD) \sin \theta$. Do đó $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} CD \cdot 10 \cdot 8 \sin \theta$. Theo công thức thể tích theo cặp cạnh đối (4.1), $V_{ABCD} = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot h \sin 60^\circ$ với $h = d(AB, CD)$. So sánh hai biểu thức:

$$h = \frac{80 \sin \theta}{12 \sin 60^\circ} = \frac{12\sqrt{39}}{6\sqrt{3}} = 2\sqrt{13}.$$

Đáp số: $[A, CD, B] \approx 69,5^\circ$; $d(AB, CD) = 2\sqrt{13} \approx 7,2$.

Ví dụ 5.5

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ với $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$, cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA > 14$. Hạ $AH \perp SB$ tại H , $AK \perp SD$ tại K ; biết $AH = 6$, $AK = 8$, $HK = 12$. Xác định số đo góc nhị diện $[B, SC, D]$ (làm tròn đến hàng phần mười).



Lời giải. Hai đường vuông góc với hai mặt. Vì $BC \perp AB$, $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$, suy ra $BC \perp AH$; kết hợp $AH \perp SB$ được $AH \perp (SBC)$. Tương tự, $AK \perp (SCD)$.

Dựng góc phẳng nhị diện. Khi đó $SC \perp AH$, $SC \perp AK$ nên $SC \perp (AHK)$; gọi I là giao điểm của SC với (AHK) . Hai tia IH , IK cùng vuông góc với SC ; H thuộc đoạn SB , K thuộc đoạn SD nên IH nằm trong nửa mặt phẳng (SC, B) , IK nằm trong nửa mặt phẳng (SC, D) . Do đó $[B, SC, D] = \widehat{HIK}$.

Liên hệ với góc HAK . Vì $AH \perp (SBC)$ nên $\widehat{AHI} = 90^\circ$; tương tự $\widehat{AKI} = 90^\circ$. Vì $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$ nên B, D thuộc đường tròn đường kính AC ; vì $ABCD$ là tứ giác nên B, D khác phía đối với AC , suy ra $ABCD$ lồi và khối chóp $S.ABCD$ lồi. Khối chóp lồi nằm trong nhị diện tạo bởi hai mặt (SBC) , (SCD) kề cạnh SC , nên A nằm trong nhị diện $[B, SC, D]$. Do đó trong mặt phẳng (AHK) , tia IA nằm giữa hai tia IH , IK , tức H, K khác phía đối với AI .

Hai điểm H, K thuộc đường tròn đường kính AI và khác phía đối với AI , nên $AHIK$ là tứ giác nội tiếp, suy ra

$$[B, SC, D] = \widehat{HIK} = 180^\circ - \widehat{HAK}.$$

Đẳng thức này khớp với mục Kỹ năng quy ước chiều vectơ pháp tuyến: $\vec{AH}$, $\vec{AK}$ là vectơ pháp tuyến của (SBC) , (SCD) ; vì A cùng phía với D đối với (SBC) và cùng phía với B đối với (SCD) nên cả hai vectơ cùng hướng ra, góc giữa chúng bằng $180^\circ - [B, SC, D]$. **Tính toán.** Trong tam giác AHK ,

$$\cos \widehat{HAK} = \frac{AH^2 + AK^2 - HK^2}{2AH \cdot AK} = \frac{36 + 64 - 144}{2 \cdot 6 \cdot 8} = -\frac{11}{24},$$

nên $\widehat{HAK} \approx 117,3^\circ$. Vậy $[B, SC, D] \approx 180^\circ - 117,3^\circ = 62,7^\circ$.

Đáp số: $[B, SC, D] \approx 62,7^\circ$.

Chú ý. Tứ giác $AHIK$ nội tiếp đường tròn đường kính AI nên $AI = \frac{HK}{\sin \widehat{HAK}} = \frac{288}{\sqrt{455}} \approx 13,5$; AI là đường cao của tam giác SAC vuông tại A nên cần $SA > AI$. Ngược lại, với $SA > AI$, đặt B, D khác phía trên đường tròn đường kính AC với $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{36} - \frac{1}{SA^2}$, $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{64} - \frac{1}{SA^2}$, $\frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AI^2} - \frac{1}{SA^2}$ (khi đó $AB < AC$, $AD < AC$) thì $AH = 6$, $AK = 8$, $\cos \widehat{HAI} = \frac{6}{AI}$, $\cos \widehat{IAK} = \frac{8}{AI}$ và

$$HK = AI \sin(\widehat{HAI} + \widehat{IAK}) = \frac{8\sqrt{AI^2 - 36} + 6\sqrt{AI^2 - 64}}{AI} = \frac{8 \cdot 258 + 6 \cdot 232}{288} = 12.$$

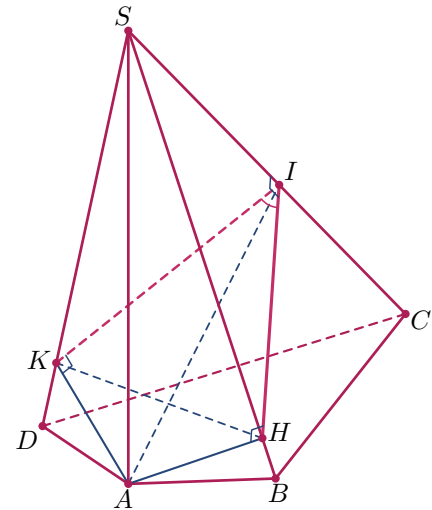
Vậy điều kiện $SA > 14$ bảo đảm hình chóp tồn tại; đáp số không phụ thuộc SA .

Bài tập vận dụng cao

Câu 5.1

Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 60^\circ$. Đặt $\gamma = \widehat{ASB}$ và $\theta = [A, SC, B]$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau.

- $\cos \theta = \frac{4 \cos \gamma - 1}{3}$.
- Nếu $\gamma = 60^\circ$ thì $\theta = 60^\circ$.
- Nếu $\gamma = 90^\circ$ thì $\theta \approx 109,5^\circ$.

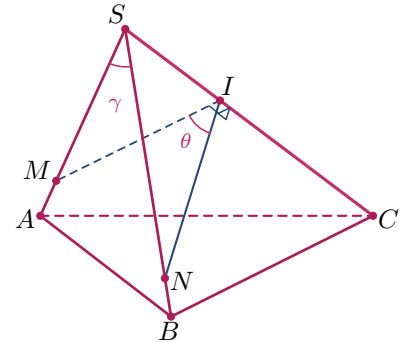


d) γ có thể nhận giá trị 130° .

Lời giải.

a) **Đúng.** Với cạnh nhị diện SC , góc đối diện là γ , hai góc kề bằng 60° . Theo (5.1),

$$\cos \theta = \frac{\cos \gamma - \cos^2 60^\circ}{\sin^2 60^\circ} = \frac{\cos \gamma - \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{4 \cos \gamma - 1}{3}.$$



b) **Sai.** Với $\gamma = 60^\circ$: $\cos \theta = \frac{1}{3}$, $\theta \approx 70,5^\circ$. Ba góc ở đỉnh đều bằng 60° nhưng nhị diện không bằng 60° .

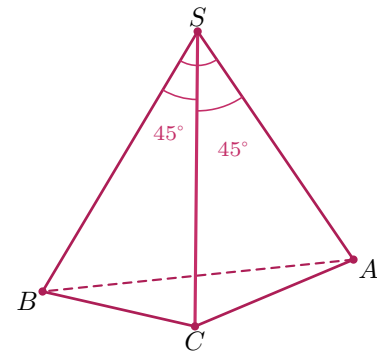
c) **Đúng.** Với $\gamma = 90^\circ$: $\cos \theta = -\frac{1}{3}$, $\theta \approx 109,5^\circ$.

d) **Sai.** Vì $0^\circ < \theta < 180^\circ$ nên $\cos \theta > -1$, tức $4 \cos \gamma - 1 > -3$, $\cos \gamma > -\frac{1}{2}$, hay $\gamma < 120^\circ$. Vậy γ không thể bằng 130° .

Đáp số: a) Đúng; b) Sai; c) Đúng; d) Sai.

Câu 5.2

Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 45^\circ$ và góc nhị diện $[A, SC, B] = 90^\circ$. Biết thêm $SA = SB = SC = 4$. Tính $\widehat{ASB}$, độ dài AB và thể tích khối chóp $S.ABC$.



Lời giải. *Tính góc ở đỉnh.* Áp dụng (5.1) cho cạnh nhị diện SC : góc đối diện là $\gamma = \widehat{ASB}$, hai góc kề là $\widehat{BSC} = \widehat{CSA} = 45^\circ$. Ta có

$$\cos 90^\circ = \frac{\cos \gamma - \cos 45^\circ \cos 45^\circ}{\sin 45^\circ \sin 45^\circ} \Leftrightarrow 0 = \cos \gamma - \frac{1}{2},$$

nên $\cos \gamma = \frac{1}{2}$, $\widehat{ASB} = 60^\circ$.

Tính cạnh. Tam giác SAB cân tại S có $\widehat{ASB} = 60^\circ$ nên là tam giác đều, $AB = SA = 4$.

Tính thể tích. Theo công thức (4.3) với ba cạnh $SA = SB = SC = 4$ và ba góc ở đỉnh $45^\circ, 45^\circ, 60^\circ$, biểu thức dưới dấu căn bằng

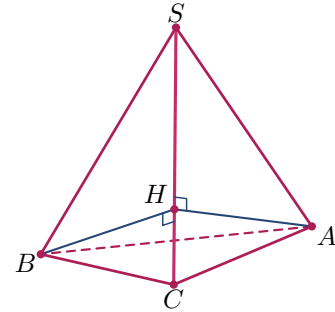
$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$\text{nên } V = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{16}{3}.$$

Cách khác. Gọi H là hình chiếu của A trên SC . Hai mặt phẳng (SAC) , (SBC) vuông góc với nhau theo giao tuyến SC , và $AH \subset (SAC)$, $AH \perp SC$, nên $AH \perp (SBC)$.

Vì $\widehat{ASC}$ nhọn nên H thuộc tia SC . Tam giác SHA vuông tại H , $\widehat{ASH} = 45^\circ$, nên $SH = SA \cos 45^\circ = 2\sqrt{2}$ và $AH = SA \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}$.

Hình chiếu của B trên đường thẳng SC nằm trên tia SC (vì $\widehat{BSC}$ nhọn) và cách S một đoạn $SB \cos 45^\circ = 2\sqrt{2} = SH$, nên trùng H . Suy ra $BH \perp SC$, $BH = 2\sqrt{2}$.

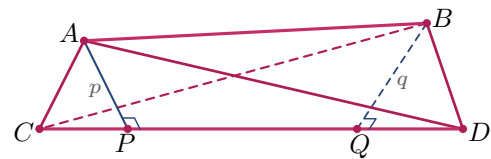


Từ $AH \perp (SBC)$ có $AH \perp BH$, nên $AB^2 = AH^2 + BH^2 = 16$, $AB = 4$, cùng kết quả. Ta có $S_{SBC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 45^\circ = 4\sqrt{2}$, nên $V = \frac{1}{3} S_{SBC} \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{16}{3}$.

Đáp số: $\widehat{ASB} = 60^\circ$; $AB = 4$; $V = \frac{16}{3}$.

Câu 5.3

Cho tứ diện $ABCD$ có góc nhị diện $[A, CD, B] = 120^\circ$ và góc giữa hai đường thẳng AB , CD bằng 30° . Hai khoảng cách $p = d(A, CD)$, $q = d(B, CD)$ thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $pq = 36$. Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài AB .



Lời giải. Áp dụng công thức (5.2). Viết (5.2) dưới dạng

$$AB^2 \sin^2 30^\circ = p^2 + q^2 - 2pq \cos 120^\circ = p^2 + q^2 + pq.$$

Đánh giá. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, $p^2 + q^2 \geq 2pq = 72$, nên $\frac{AB^2}{4} \geq 72 + 36 = 108$, $AB \geq 12\sqrt{3}$. Dấu bằng xảy ra khi $p = q = 6$.

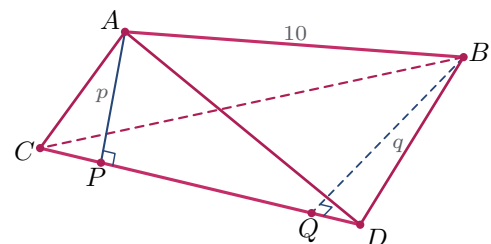
Với $p = q = 6$, tứ diện tồn tại: dựng tam giác $A'QB$ trong mặt phẳng vuông góc với CD tại Q có $QA' = QB = 6$, $\widehat{A'QB} = 120^\circ$ (khi đó $A'B = 6\sqrt{3}$), rồi lấy A với $\vec{A'A}$ song song với CD và $AA' = A'B \cot 30^\circ = 18$; ta được $AB = 12\sqrt{3}$ và góc giữa AB , CD bằng 30° .

Vậy giá trị nhỏ nhất của AB bằng $12\sqrt{3}$.

Đáp số: $AB_{\min} = 12\sqrt{3} \approx 20,78$, đạt được khi $d(A, CD) = d(B, CD) = 6$.

Câu 5.4

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 10$ và góc giữa hai đường thẳng AB , CD bằng 30° . Hai khoảng cách $p = d(A, CD)$, $q = d(B, CD)$ thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $p^2 + q^2 = 50$. Tìm giá trị lớn nhất của tổng $p + q$ và tính góc nhị diện $[A, CD, B]$ khi tổng đó lớn nhất.



Lời giải. Đánh giá. Ta có $(p+q)^2 \leq 2(p^2+q^2) = 100$ (tương đương $(p-q)^2 \geq 0$), nên $p+q \leq 10$, dấu bằng khi $p=q=5$.

Áp dụng công thức (5.2). Ta có $AB^2 \sin^2 30^\circ = 25$, nên $\cos[A, CD, B] = \frac{p^2+q^2-25}{2pq}$. Với $p=q=5$:
 $\cos[A, CD, B] = \frac{50-25}{50} = \frac{1}{2}$, $[A, CD, B] = 60^\circ$.

Với $p=q=5$, tứ diện tồn tại: dựng như Câu 5.3 với $QA' = QB = 5$, $\widehat{A'QB} = 60^\circ$ (khi đó $A'B = 5$) và $AA' = A'B \cot 30^\circ = 5\sqrt{3}$; ta được $AB = \sqrt{75+25} = 10$ và góc giữa AB, CD bằng 30° .

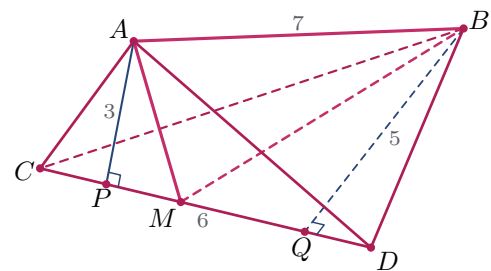
Vậy giá trị lớn nhất của $p+q$ bằng 10 và khi đó $[A, CD, B] = 60^\circ$.

Đáp số: $(p+q)_{\max} = 10$, đạt khi $p=q=5$; khi đó $[A, CD, B] = 60^\circ$.

Câu 5.5

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P, Q lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ A, B xuống đường thẳng CD . Biết $AP = 3, BQ = 5, PQ = 6$ và $AB = 7$.

- Tính cosin của góc nhị diện $[A, CD, B]$.
- Điểm M chạy trên đường thẳng CD . Tìm giá trị nhỏ nhất của $AM + MB$.



Lời giải.

a) Gọi φ là góc giữa AB và CD . Theo hệ quả của công thức (5.2), $AB^2 = PQ^2 + AB^2 \sin^2 \varphi$, nên $AB^2 \sin^2 \varphi = 49 - 36 = 13$. Theo (5.2),

$$\cos[A, CD, B] = \frac{AP^2 + BQ^2 - AB^2 \sin^2 \varphi}{2AP \cdot BQ} = \frac{9 + 25 - 13}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{21}{30} = 0,7.$$

b) *Đưa về hai căn bậc hai.* Với M thuộc đường thẳng CD , đặt $x = PM, y = QM$. Tam giác APM vuông tại P , tam giác BQM vuông tại Q (hoặc suy biến khi $M \equiv P, M \equiv Q$), nên

$$AM = \sqrt{3^2 + x^2}, \quad MB = \sqrt{5^2 + y^2}, \quad x + y \geq PQ = 6.$$

Đánh giá. Áp dụng bất đẳng thức Minkowski $\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$ (đây là bất đẳng thức $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$ với $\vec{u} = (a_1; b_1), \vec{v} = (a_2; b_2)$) cho hai cặp $(3; x), (5; y)$:

$$AM + MB \geq \sqrt{(3+5)^2 + (x+y)^2} \geq \sqrt{64 + 36} = 10.$$

Dấu bằng. Đạt khi $x+y=6$ (M thuộc đoạn PQ) và hai vectơ $(3; x), (5; y)$ cùng hướng, tức $\frac{x}{3} = \frac{y}{5}$; suy ra $x = \frac{9}{4}, y = \frac{15}{4}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $AM + MB$ bằng 10.

Đáp số: a) $\cos[A, CD, B] = 0,7$ (tức $[A, CD, B] \approx 45,6^\circ$); b) $\min(AM + MB) = 10$.

6

CHƯƠNG

Đẩy thể tích tới giới hạn

Hai nguyên lý cực trị

Kiến thức trọng tâm

Bài toán cực trị thể tích thường quy về hai ý: biểu diễn thể tích qua một biến (góc, độ dài) rồi đánh giá; hoặc nhận ra vị trí đặc biệt cho cực trị, thường là khi một mặt bên *vuông góc* với đáy.

Nguyên lý 1. Chiều cao lớn nhất khi mặt bên vuông góc với đáy

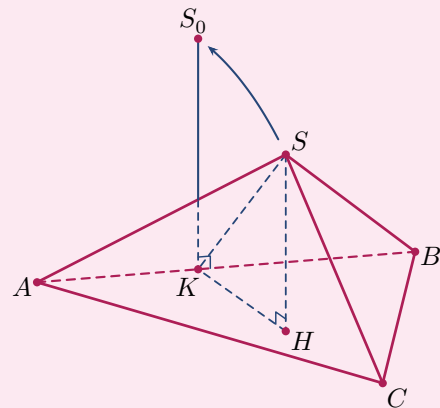
Cho tam giác SAB và mặt phẳng (P) chứa AB , $S \notin (P)$. Gọi K là chân đường vuông góc hạ từ S xuống AB , H là hình chiếu của S trên (P) . Khi đó

$$d(S, (P)) = SH \leq SK = d(S, AB),$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(SAB) \perp (P)$.

Do đó, nếu đáy ABC cố định và mặt bên SAB có hình dạng cố định, chỉ được gập quanh bản lề AB , thì $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SH \leq \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SK$; thể tích lớn nhất khi $(SAB) \perp (ABC)$, ứng với vị trí S_0 trên hình.

Chứng minh. Nếu $H \neq K$: ta có $SH \perp AB$, $SK \perp AB$ nên $AB \perp (SHK)$, suy ra $HK \perp AB$ và $\widehat{SKH}$ là góc phẳng của nhị diện cạnh AB (hoặc góc bù của nó). Tam giác SHK vuông tại H nên $SH = SK \sin \widehat{SKH} < SK$. Nếu $H \equiv K$ thì $SH = SK$. Vậy $SH \leq SK$, dấu bằng khi và chỉ khi $H \equiv K$, tức $SK \perp (P)$. Mặt phẳng (SAB) chứa SK nên $SK \perp (P)$ kéo theo $(SAB) \perp (P)$; ngược lại, nếu $(SAB) \perp (P)$ thì SK nằm trong (SAB) và vuông góc với giao tuyến AB nên $SK \perp (P)$.



Nguyên lý 2. Đưa về một biến rồi đánh giá

Với các bài có điểm chạy trên cạnh, đặt biến là góc hoặc độ dài, viết thể tích thành hàm số một biến rồi dùng đạo hàm hoặc bất đẳng thức AM – GM. Một dạng thường gặp: với $k > 0$, $0^\circ < \varphi_0 < 90^\circ$ và α chạy trên đoạn $[\alpha_1; \alpha_2] \subset [0^\circ; \varphi_0]$, xét

$$S(\alpha) = \frac{k}{\cos \alpha \cos(\varphi_0 - \alpha)}, \quad \alpha \in [\alpha_1; \alpha_2]. \quad (6.1)$$

- Nếu $\frac{\varphi_0}{2} \in [\alpha_1; \alpha_2]$ thì $S(\alpha)$ nhỏ nhất tại $\alpha = \frac{\varphi_0}{2}$.
- Nếu $\frac{\varphi_0}{2} \notin [\alpha_1; \alpha_2]$ thì $S(\alpha)$ nhỏ nhất tại đầu mút của đoạn gần $\frac{\varphi_0}{2}$ hơn.

- $S(\alpha)$ lớn nhất tại đầu mút của đoạn xa $\frac{\varphi_0}{2}$ hơn.

Chứng minh. Theo công thức biến đổi tích thành tổng,

$$\cos \alpha \cos(\varphi_0 - \alpha) = \frac{1}{2} [\cos \varphi_0 + \cos(2\alpha - \varphi_0)].$$

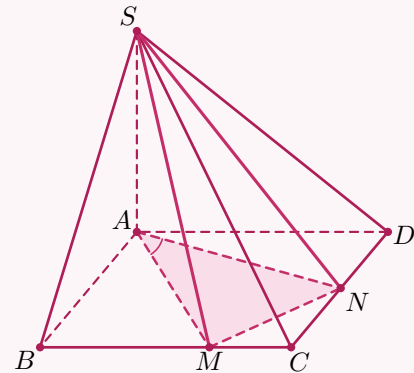
Vì $\cos(2\alpha - \varphi_0) = \cos |2\alpha - \varphi_0|$ và hàm số cosin nghịch biến trên $[0^\circ; 180^\circ]$ nên tích $\cos \alpha \cos(\varphi_0 - \alpha)$ (đương trên đoạn đang xét) lớn nhất khi $|2\alpha - \varphi_0|$ nhỏ nhất, tức tại $\alpha = \frac{\varphi_0}{2}$ nếu giá trị này thuộc đoạn, tại đầu mút gần $\frac{\varphi_0}{2}$ hơn nếu không thuộc; tích nhỏ nhất khi $|2\alpha - \varphi_0|$ lớn nhất, tức tại đầu mút xa $\frac{\varphi_0}{2}$ hơn. Tử số k không đổi nên $S(\alpha)$ biến thiên ngược lại.

Chú ý. Miền $[\alpha_1; \alpha_2]$ suy từ điều kiện các điểm thuộc cạnh (Ví dụ 6.1, 6.3, 6.4).

Ví dụ minh họa

Ví dụ 6.1

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 6 và $SA \perp (ABCD)$, $SA = 8$. Trên đoạn BC lấy M , trên đoạn CD lấy N (M, N có thể trùng đầu mút) sao cho $\widehat{MAN} = 30^\circ$. Đặt $\widehat{BAM} = \alpha$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau.



- $\widehat{NAD} = 60^\circ - \alpha$.
- $S_{AMN} = \frac{36}{1 + 2 \cos(2\alpha - 60^\circ)}$.
- Giá trị nhỏ nhất của $V_{S.AMN}$ bằng 12.
- Giá trị lớn nhất của $V_{S.AMN}$ bằng $\frac{96}{1 + \sqrt{3}}$.

Lời giải.

a) Đúng. Vì M thuộc đoạn BC , N thuộc đoạn CD nên $\widehat{BAM} \leq 45^\circ \leq \widehat{BAN}$, suy ra $\widehat{NAD} = 90^\circ - \alpha - 30^\circ = 60^\circ - \alpha$.

b) Đúng. Ta có $AM = \frac{6}{\cos \alpha}$, $AN = \frac{6}{\cos(60^\circ - \alpha)}$, và theo công thức biến đổi tích thành tổng $\cos \alpha \cos(60^\circ - \alpha) = \frac{1 + 2 \cos(2\alpha - 60^\circ)}{4}$, nên

$$S_{AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin 30^\circ = \frac{9}{\cos \alpha \cos(60^\circ - \alpha)} = \frac{36}{1 + 2 \cos(2\alpha - 60^\circ)}.$$

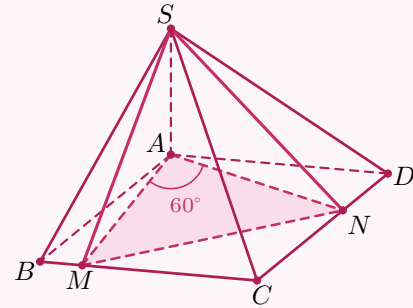
c) Sai. Điều kiện $BM = 6 \tan \alpha \leq 6$, $DN = 6 \tan(60^\circ - \alpha) \leq 6$ cho $\alpha \in [15^\circ; 45^\circ]$. Ta có $S_{AMN} \geq \frac{36}{3} = 12$, dấu bằng tại $\alpha = 30^\circ$, nên giá trị nhỏ nhất của $V_{S.AMN} = \frac{8}{3} S_{AMN}$ bằng 32. Số 12 là giá trị nhỏ nhất của diện tích S_{AMN} .

d) Đúng. Với $\alpha \in [15^\circ; 45^\circ]$ thì $2\alpha - 60^\circ \in [-30^\circ; 30^\circ]$, nên $\cos(2\alpha - 60^\circ) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $S_{AMN} \leq \frac{36}{1 + \sqrt{3}}$.
Suy ra $V_{S.AMN} \leq \frac{8}{3} \cdot \frac{36}{1 + \sqrt{3}} = \frac{96}{1 + \sqrt{3}} \approx 35,14$, dấu bằng tại $\alpha = 15^\circ$ ($N \equiv C$) hoặc $\alpha = 45^\circ$ ($M \equiv C$), hai vị trí này được phép.

Đáp số: a) Đúng; b) Đúng; c) Sai; d) Đúng.

Ví dụ 6.2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông cạnh 6, $SA \perp (ABCD)$, $SA = 4$. Trên BC lấy M , trên CD lấy N sao cho $\widehat{MAN} = 60^\circ$. Tính giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.AMN$ (làm tròn đến hàng phần mười).



Lời giải. Chọn *ẩn và miền giá trị*. Đặt $\alpha = \widehat{BAM}$. Vì M thuộc đoạn BC , N thuộc đoạn CD nên $\widehat{BAM} \leq 45^\circ \leq \widehat{BAN}$, tia AM nằm giữa hai tia AB , AN và $\widehat{NAD} = 90^\circ - 60^\circ - \alpha = 30^\circ - \alpha$, với $\alpha \in [0^\circ; 30^\circ]$. Vì $BM = 6 \tan \alpha \leq 6 \tan 30^\circ < 6$ và $DN = 6 \tan(30^\circ - \alpha) < 6$ nên mọi $\alpha \in [0^\circ; 30^\circ]$ đều cho M, N thuộc hai đoạn.

Biểu diễn diện tích. Ta có $AM = \frac{6}{\cos \alpha}$, $AN = \frac{6}{\cos(30^\circ - \alpha)}$, nên

$$S_{AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{\cos \alpha \cos(30^\circ - \alpha)}.$$

Đánh giá. Theo công thức biến đổi tích thành tổng, $\cos \alpha \cos(30^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} [\cos 30^\circ + \cos(2\alpha - 30^\circ)] \leq \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$, dấu bằng khi $\alpha = 15^\circ \in [0^\circ; 30^\circ]$ (đúng như (6.1)). Suy ra

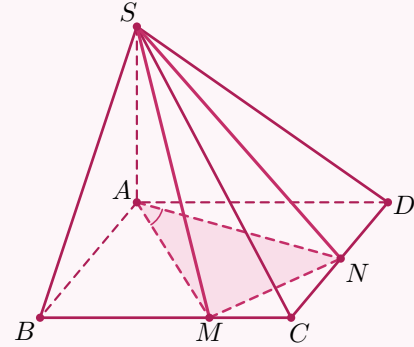
$$S_{AMN} \geq \frac{36\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 36\sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) = 72\sqrt{3} - 108, \quad V_{S.AMN} = \frac{4}{3} S_{AMN} \geq 96\sqrt{3} - 144 \approx 22,28.$$

Dấu bằng khi $BM = DN = 6 \tan 15^\circ = 6(2 - \sqrt{3})$. Vậy giá trị nhỏ nhất của thể tích xấp xỉ 22,3.

Đáp số: $V_{\min} = 96\sqrt{3} - 144 \approx 22,3$.

Ví dụ 6.3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông cạnh 6, $SA \perp (ABCD)$, $SA = 6$. Trên BC lấy M , trên CD lấy N sao cho $\widehat{MAN} = 30^\circ$. Tính giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.AMN$.



Lời giải. *Chọn ẩn và miền giá trị.* Đặt $\alpha = \widehat{BAM}$. Điểm M thuộc đoạn BC nên $\widehat{BAM} \leq 45^\circ \leq \widehat{BAN}$, do đó $\widehat{BAN} = \alpha + 30^\circ$ và $\widehat{NAD} = 60^\circ - \alpha$. Ta có $BM = 6 \tan \alpha \leq 6 \iff \alpha \leq 45^\circ$ và $DN = 6 \tan(60^\circ - \alpha) \leq 6 \iff \alpha \geq 15^\circ$. Vậy $\alpha \in [15^\circ; 45^\circ]$.

Biểu diễn thể tích. Các tam giác ABM , ADN vuông tại B , D nên $AM = \frac{6}{\cos \alpha}$, $AN = \frac{6}{\cos(60^\circ - \alpha)}$. Suy ra

$$S_{AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin 30^\circ = \frac{9}{\cos \alpha \cos(60^\circ - \alpha)}, \quad V_{S.AMN} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{AMN} = \frac{18}{\cos \alpha \cos(60^\circ - \alpha)}.$$

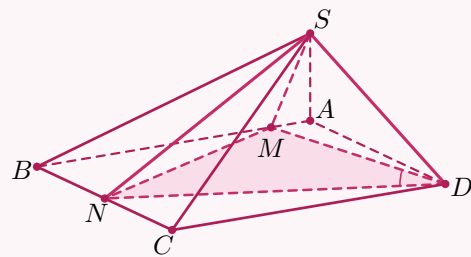
Đánh giá. Theo công thức biến đổi tích thành tổng, $\cos \alpha \cos(60^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} [\cos 60^\circ + \cos(2\alpha - 60^\circ)] \leq \frac{1}{2} (\frac{1}{2} + 1) = \frac{3}{4}$, nên $V_{S.AMN} \geq 18 : \frac{3}{4} = 24$.

Điểm rơi. Dấu bằng xảy ra khi $\cos(2\alpha - 60^\circ) = 1 \iff \alpha = 30^\circ \in [15^\circ; 45^\circ]$. Khi đó $BM = DN = 6 \tan 30^\circ = 2\sqrt{3}$, hai điểm M , N đối xứng qua AC . Vậy giá trị nhỏ nhất của thể tích bằng 24.

Đáp số: $V_{\min} = 24$.

Ví dụ 6.4

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 2AD = 12$ và $SA \perp (ABCD)$, $SA = 3$. Trên cạnh AB lấy M , trên cạnh BC lấy N sao cho $\widehat{MDN} = 60^\circ$. Tính giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.DMN$ (làm tròn đến hàng phần mười).



Lời giải. *Chọn ẩn và miền giá trị.* Đặt $\alpha = \widehat{ADM}$. Vì M thuộc cạnh AB , N thuộc cạnh BC nên $\widehat{ADM} \leq \widehat{ADB} \leq \widehat{ADN}$, tia DM nằm giữa hai tia DA , DN ; do đó $\widehat{NDC} = 90^\circ - 60^\circ - \alpha = 30^\circ - \alpha$. Ta có $AM = 6 \tan \alpha$ và $CN = DC \tan(30^\circ - \alpha) = 12 \tan(30^\circ - \alpha)$. Điều kiện N thuộc cạnh BC : $12 \tan(30^\circ - \alpha) \leq 6 \iff \tan(30^\circ - \alpha) \leq \frac{1}{2}$, nên $\alpha \in [30^\circ - \alpha_0; 30^\circ]$ với $\tan \alpha_0 = \frac{1}{2}$ ($\alpha_0 \approx 26,57^\circ$, $30^\circ - \alpha_0 \approx 3,43^\circ$). Khi đó $AM \leq 6 \tan 30^\circ < 12$ nên M luôn thuộc cạnh AB .

Biểu diễn thể tích. Ta có $DM = \frac{6}{\cos \alpha}$, $DN = \frac{12}{\cos(30^\circ - \alpha)}$, nên

$$S_{DMN} = \frac{1}{2} DM \cdot DN \cdot \sin 60^\circ = \frac{18\sqrt{3}}{\cos \alpha \cos(30^\circ - \alpha)}, \quad V_{S.DMN} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot S_{DMN} = S_{DMN}.$$

Đánh giá. Theo công thức biến đổi tích thành tổng, $\cos \alpha \cos(30^\circ - \alpha) \leq \frac{1}{2}(\cos 30^\circ + 1) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$, nên

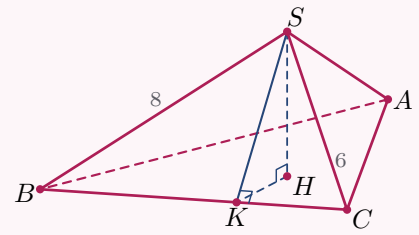
$$V_{S.DMN} \geq \frac{72\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 72\sqrt{3}(2-\sqrt{3}) = 144\sqrt{3} - 216 \approx 33,42.$$

Điểm rơi. Dấu bằng khi $\alpha = 15^\circ$, thuộc miền $[30^\circ - \alpha_0; 30^\circ]$; khi đó $AM = 6 \tan 15^\circ \approx 1,61$, $CN = 12 \tan 15^\circ \approx 3,22 < 6$. Vậy giá trị nhỏ nhất của thể tích xấp xỉ 33,4.

Đáp số: $V_{\min} = 144\sqrt{3} - 216 \approx 33,4$.

Ví dụ 6.5

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC đều cạnh 10 và $SB = 8$, $SC = 6$. Hạ $SH \perp (ABC)$ tại H , $SK \perp BC$ tại K . Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau.



- a) $SK = \frac{24}{5}$.
- b) Chiều cao SH của khối chóp luôn bằng $\frac{24}{5}$.
- c) $V_{S.ABC} = \frac{25\sqrt{3}}{3} \cdot SH$.
- d) $V_{S.ABC} = 40\sqrt{3}$ khi $(SBC) \perp (ABC)$.

Lời giải.

a) Đúng. Ta có $SB^2 + SC^2 = 64 + 36 = 100 = BC^2$ nên tam giác SBC vuông tại S , đường cao $SK = \frac{SB \cdot SC}{BC} = \frac{48}{10} = \frac{24}{5}$.

b) Sai. Theo Nguyên lí 1, $SH \leq SK = \frac{24}{5}$, dấu bằng chỉ khi $(SBC) \perp (ABC)$. Giữ nguyên tam giác SBC và quay quanh BC đến vị trí góc nhị diện cạnh BC bằng 30° thì các giả thiết vẫn thỏa mãn nhưng $SH = SK \sin 30^\circ = \frac{12}{5}$.

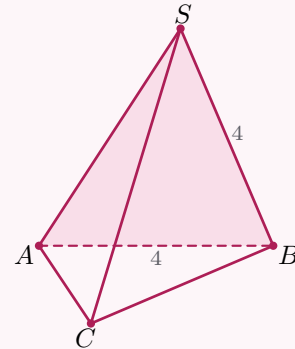
c) Đúng. Ta có $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 100 = 25\sqrt{3}$, nên $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot 25\sqrt{3} \cdot SH = \frac{25\sqrt{3}}{3} \cdot SH$.

d) Đúng. Khi $(SBC) \perp (ABC)$, SK nằm trong (SBC) và vuông góc với giao tuyến BC nên $SK \perp (ABC)$, tức $H \equiv K$ và $SH = \frac{24}{5}$. Khi đó $V_{S.ABC} = \frac{25\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{24}{5} = 40\sqrt{3}$; đây cũng là giá trị lớn nhất của thể tích.

Đáp số: a) Đúng; b) Sai; c) Đúng; d) Đúng.

Ví dụ 6.6

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC và mặt bên SAB là hai tam giác đều cạnh 4. Tính giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$.



Lời giải. Gọi K là trung điểm của AB và H là hình chiếu của S trên (ABC) . Tam giác SAB đều cạnh 4 nên $SK \perp AB$ và $SK = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. Theo Nguyên lí 1, $SH \leq SK = 2\sqrt{3}$. Diện tích đáy $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4^2 = 4\sqrt{3}$, do đó

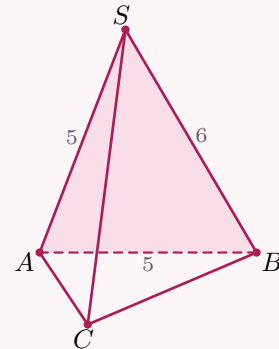
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH \leq \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 8.$$

Dấu bằng xảy ra khi $(SAB) \perp (ABC)$: lấy S trên đường thẳng qua K vuông góc với (ABC) , $SK = 2\sqrt{3}$, thì $SA = SB = \sqrt{SK^2 + KA^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$, tam giác SAB đều cạnh 4. Vậy giá trị lớn nhất của thể tích bằng 8.

Đáp số: $V_{\max} = 8$.

Ví dụ 6.7

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC đều cạnh 5 và tam giác SAB có $SA = 5$, $SB = 6$. Tính giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$ (làm tròn đến hàng phần mười).



Lời giải. Gọi K là chân đường vuông góc hạ từ S xuống AB . Tam giác SAB có nửa chu vi $p = \frac{5+5+6}{2} = 8$, theo công thức Heron $S_{SAB} = \sqrt{8 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2} = 12$, nên $SK = \frac{2 \cdot 12}{5} = \frac{24}{5}$. Theo Nguyên lí 1, chiều cao của khối chóp không vượt quá $\frac{24}{5}$, do đó

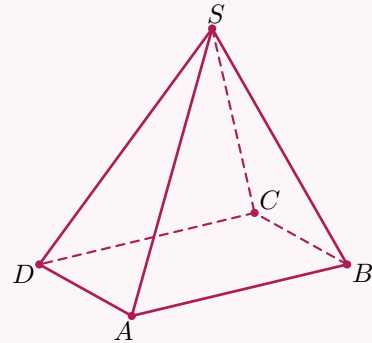
$$V_{S.ABC} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{25\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{24}{5} = 10\sqrt{3} \approx 17,32.$$

Dấu bằng xảy ra khi $(SAB) \perp (ABC)$, tức tam giác SAB nằm trong mặt phẳng qua AB vuông góc với đáy. Vậy giá trị lớn nhất của thể tích bằng $10\sqrt{3} \approx 17,3$.

Đáp số: $V_{\max} = 10\sqrt{3} \approx 17,3$.

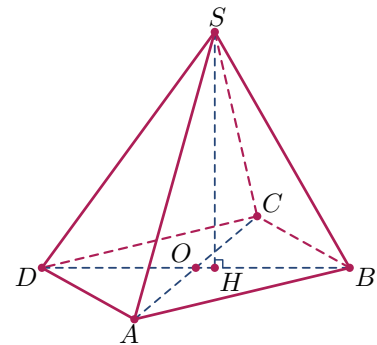
Ví dụ 6.8

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh 6. Biết $SA = SB = SC = 8$. Tính giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABCD$ (làm tròn đến hàng phần mười).



Lời giải. Gọi H là hình chiếu của S trên $(ABCD)$.

Xác định chân đường cao. Vì $SA = SB = SC$ nên $HA = HB = HC$, tức H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tam giác ABC cân tại B nên H nằm trên trung trực của AC , chính là đường thẳng BD . Gọi O là tâm hình thoi, $BD = d$ ($0 < d < 12$); khi đó $BO = \frac{d}{2}$ và $AC = 2\sqrt{36 - \frac{d^2}{4}} = \sqrt{144 - d^2}$.



Tính chiều cao. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC : $R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{36 \cdot AC}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot \frac{d}{2}} = \frac{36}{d}$. Suy ra $SH^2 = SB^2 - R^2 = 64 - \frac{1296}{d^2}$; điều kiện $SH > 0$ cho $d > \frac{9}{2}$. Vậy $d \in (\frac{9}{2}; 12)$.

Biểu diễn thể tích. Ta có $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}d\sqrt{144 - d^2}$, nên

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}d\sqrt{144 - d^2} \cdot \sqrt{64 - \frac{1296}{d^2}} = \frac{1}{6}\sqrt{(144 - d^2)(64d^2 - 1296)}.$$

Đặt $t = d^2 \in (\frac{81}{4}; 144)$: $V^2 = \frac{64}{36}(144 - t)(t - \frac{81}{4})$.

Đánh giá. Hai thừa số $144 - t$ và $t - \frac{81}{4}$ dương, có tổng không đổi. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM,

$$(144 - t)\left(t - \frac{81}{4}\right) \leq \left(\frac{144 - \frac{81}{4}}{2}\right)^2 = \left(\frac{495}{8}\right)^2,$$

nên $V \leq \frac{8}{6} \cdot \frac{495}{8} = \frac{495}{6} = 82,5$.

Điểm rơi. Dấu bằng khi $144 - t = t - \frac{81}{4}$, tức $t = \frac{657}{8}$, $BD = \sqrt{\frac{657}{8}} \approx 9,06 \in (\frac{9}{2}; 12)$. Vậy giá trị lớn nhất của thể tích bằng 82,5.

Đáp số: $V_{\max} = 82,5$.

Lời giải. Quy về tứ diện. Khối chóp $A.A'B'C'$ có cùng đáy và chiều cao với lăng trụ, nên $V_{lt} = 3V_{A.A'B'C'}$.

Các góc ở đỉnh A' . Theo định lí côsin trong các tam giác $AA'B'$, $AA'C'$:

$$\cos \widehat{AA'B'} = \frac{16 + 8 - 16}{2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad \cos \widehat{AA'C'} = \frac{16 + 8 - 36}{2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{8}.$$

Góc $\widehat{B'A'C'}$ thay đổi; đặt $u = \cos \widehat{B'A'C'}$.

Biểu diễn thể tích. Theo công thức (4.3) tại đỉnh A' :

$$\begin{aligned} V_{A.A'B'C'} &= \frac{4 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{6} \sqrt{1 - \frac{1}{8} - \frac{9}{32} - u^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left(-\frac{3\sqrt{2}}{8}\right) u} \\ &= \frac{16}{3} \sqrt{g(u)}, \quad g(u) = -u^2 - \frac{3}{8}u + \frac{19}{32}. \end{aligned}$$

Đánh giá. Tam thức g có hệ số của u^2 âm nên lớn nhất tại đỉnh:

$$g(u) = \frac{161}{256} - \left(u + \frac{3}{16}\right)^2 \leq \frac{161}{256},$$

dấu bằng khi $u = -\frac{3}{16}$. Giá trị này được vì $g(-\frac{3}{16}) > 0$, tức ba tia $A'A$, $A'B'$, $A'C'$ không đồng phẳng; khi đó $B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2 - 2A'B' \cdot A'C' \cdot u = 8 + 8 + 3 = 19$.

Do đó $V_{A.A'B'C'} \leq \frac{16}{3} \cdot \frac{\sqrt{161}}{16} = \frac{\sqrt{161}}{3}$ và $V_{lt} \leq \sqrt{161} \approx 12,69$. Vậy giá trị lớn nhất của thể tích xấp xỉ 12,7.

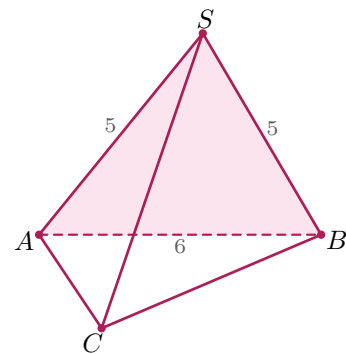
Đáp số: $V_{\max} = \sqrt{161} \approx 12,7$.

Bài tập vận dụng cao

Câu 6.1

Cho tam giác đều ABC cạnh 6 cố định và tam giác SAB có $SA = SB = 5$, gấp quanh cạnh AB . Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau.

- Chiều cao lớn nhất của khối chóp $S.ABC$ bằng 5.
- Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$ bằng $12\sqrt{3}$.
- Khi thể tích lớn nhất thì $SC = 7$.
- $SC \perp AB$ với mọi vị trí gấp.



Lời giải. Gọi K là trung điểm của AB . Tam giác SAB cân tại S nên $SK \perp AB$, $SK = \sqrt{SA^2 - KA^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.

a) Sai. Theo Nguyên lí 1, chiều cao không vượt quá $SK = 4$ nên không thể bằng 5; chiều cao bằng 4 khi $(SAB) \perp (ABC)$.

b) Đúng. Ta có $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 36 = 9\sqrt{3}$, nên $V_{S.ABC} \leq \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 4 = 12\sqrt{3}$, dấu bằng khi $(SAB) \perp (ABC)$.

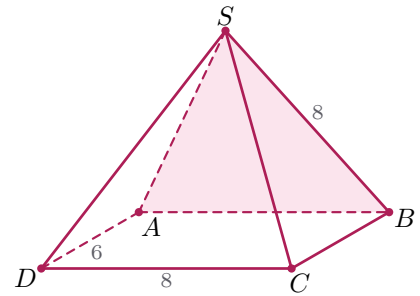
c) Sai. Khi đó $SK \perp (ABC)$ nên $SK \perp KC$, với $KC = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$. Suy ra $SC = \sqrt{16 + 27} = \sqrt{43} \neq 7$.

d) Đúng. Với mọi vị trí gập, $AB \perp SK$ và $AB \perp CK$ (CK là trung tuyến của tam giác đều), nên $AB \perp (SKC)$, do đó $AB \perp SC$.

Đáp số: a) Sai; b) Đúng; c) Sai; d) Đúng.

Câu 6.2

Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8$, $AD = 6$ và tam giác đều SAB cạnh 8, gập quanh cạnh AB . Tính thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ và độ dài SC khi đó.



Lời giải. Gọi K là trung điểm của AB . Tam giác SAB đều cạnh 8 nên $SK \perp AB$, $SK = 4\sqrt{3}$. Theo Nguyên lý 1, chiều cao $h \leq SK = 4\sqrt{3}$, nên

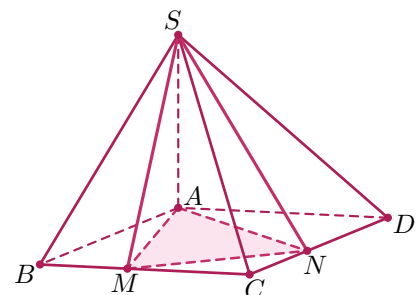
$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot h \leq \frac{1}{3} \cdot 48 \cdot 4\sqrt{3} = 64\sqrt{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $(SAB) \perp (ABCD)$; khi đó $SK \perp (ABCD)$, nên $SK \perp KC$. Ta có $KC^2 = KB^2 + BC^2 = 16 + 36 = 52$ và $SC^2 = SK^2 + KC^2 = 48 + 52 = 100$. Vậy thể tích lớn nhất bằng $64\sqrt{3} \approx 110,85$, khi đó $SC = 10$.

Đáp số: $V_{\max} = 64\sqrt{3}$; $SC = 10$.

Câu 6.3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 6, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 9$. Lấy M trên đoạn BC , N trên đoạn CD sao cho $BM + DN = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.AMN$ và tính MN khi đó.



Lời giải. Đặt $BM = x$, $DN = y$ với $x, y \in [0; 6]$, $x + y = 6$. Khi đó $CM = 6 - x = y$, $CN = 6 - y = x$, nên

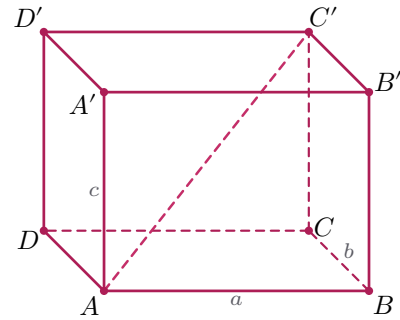
$$S_{AMN} = S_{ABCD} - S_{ABM} - S_{ADN} - S_{CMN} = 36 - 3x - 3y - \frac{1}{2}xy = 18 - \frac{1}{2}xy.$$

Theo bất đẳng thức AM - GM, $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = 9$, nên $S_{AMN} \geq 18 - \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$ và $V_{S.AMN} = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot S_{AMN} \geq \frac{81}{2}$. Dấu bằng khi $x = y = 3$, thuộc $[0; 6]$: M, N là trung điểm của BC, CD , và $MN = \sqrt{CM^2 + CN^2} = 3\sqrt{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của thể tích bằng $\frac{81}{2}$, khi đó $MN = 3\sqrt{2}$.

Đáp số: $V_{\min} = \frac{81}{2}$, đạt khi M, N là trung điểm BC, CD ; khi đó $MN = 3\sqrt{2}$.

Câu 6.4

Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài đường chéo $AC' = 9$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích toàn phần khối hộp và tính thể tích khối hộp khi đó.



Lời giải. Đặt $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$, khi đó $a^2 + b^2 + c^2 = AC'^2 = 81$. Ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0,$$

nên diện tích toàn phần $S_{tp} = 2(ab + bc + ca) \leq 2 \cdot 81 = 162$. Dấu bằng khi $a = b = c$, $3a^2 = 81$, $a = 3\sqrt{3}$: khối hộp là khối lập phương cạnh $3\sqrt{3}$, thể tích $(3\sqrt{3})^3 = 81\sqrt{3} \approx 140,30$. Vậy diện tích toàn phần lớn nhất bằng 162, khi đó thể tích bằng $81\sqrt{3}$.

Đáp số: $(S_{tp})_{\max} = 162$, đạt khi khối hộp là khối lập phương cạnh $3\sqrt{3}$; khi đó $V = 81\sqrt{3}$.

Câu 6.5

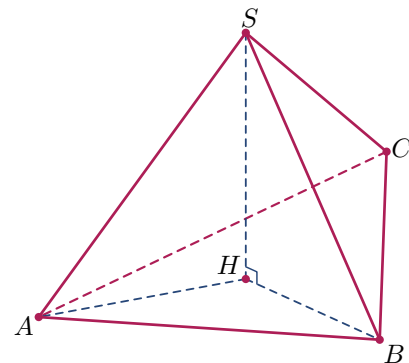
Cho khối chóp $S.ABC$ có thể tích bằng 32, diện tích đáy ABC bằng 24 và $AB = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $SA + SB$.

Lời giải. Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC) .

Chiều cao không đổi. Ta có $SH = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot 32}{24} = 4$, nên $SA = \sqrt{16 + HA^2}$, $SB = \sqrt{16 + HB^2}$.

Đánh giá. Áp dụng bất đẳng thức Minkowski $\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}$ (đây là bất đẳng thức $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$ với $\vec{u} = (a_1; b_1)$, $\vec{v} = (a_2; b_2)$, dấu bằng khi hai vectơ cùng hướng) cho hai vectơ $(4; HA)$ và $(4; HB)$:

$$SA + SB \geq \sqrt{(4 + 4)^2 + (HA + HB)^2}.$$



Trong mặt phẳng (ABC) có $HA + HB \geq AB = 6$, nên $SA + SB \geq \sqrt{64 + 36} = 10$.

Điểm rơi. Dấu bằng của bất đẳng thức Minkowski khi $4 \cdot HB = 4 \cdot HA$, tức $HA = HB$; dấu bằng của bất đẳng thức tam giác khi H thuộc đoạn AB . Hai điều kiện cùng xảy ra khi H là trung điểm của AB ; khi đó $SA = SB = \sqrt{16 + 9} = 5$. Vị trí này dựng được: lấy H là trung điểm AB , S trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại H , $SH = 4$, thì $V = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 4 = 32$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $SA + SB$ bằng 10.

Đáp số: $(SA + SB)_{\min} = 10$, đạt khi hình chiếu của S là trung điểm AB .