516.23076
Ô454L

TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN CHU VĂN AN - HÀ NỘI
PHAN HUY KHẢI (CHỦ BIÊN)
CHỬ XUÂN DŨNG - HOÀNG VĂN PHỦ - CÙ PHƯỢNG ANH

Tặng một thành viên dịch vụ văn hóa KHÁNG VIỆT
Nhà sách KHANG VIỆT

Ôn Luyện
BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI
HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN
ĐVL 12765 13

NHÀ XUẤT BẢN TỔNG HỢP THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Lời nói đầu

Nhằm giúp các em học sinh trung học phổ thông nói chung, các bạn học sinh giỏi Toán nói riêng có thêm tài liệu để học tập tốt môn Toán trong nhà trường, cũng như chuẩn bị đầy đủ kiến thức phục vụ cho các kì thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng và các kì thi Olympic về Toán các cấp, nhóm giáo viên Toán trường PTTH Chu Văn An – Hà Nội chúng tôi biên soạn hai bộ sách sau:

– Bộ sách chung gồm 6 cuốn:

1. Ôn luyện bồi dưỡng học sinh giỏi hình học không gian.

2. Ôn luyện bồi dưỡng học sinh giỏi hàm số.

3. Ôn luyện bồi dưỡng học sinh giỏi phương trình và bất phương trình.

4. Ôn luyện bồi dưỡng học sinh giỏi hình học giải tích.

5. Ôn luyện bồi dưỡng học sinh giỏi tích phân, tổ hợp và số phức.

6. Ôn luyện bồi dưỡng học sinh giỏi lượng giác, bất đẳng thức, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất..

– Bộ sách luyện thi về môn Toán bao gồm cuốn:

1. Bồi dưỡng học sinh giỏi lượng giác.

2. Bồi dưỡng học sinh giỏi các bài toán về dãy số.

3. Bồi dưỡng học sinh giỏi hàm số và đa thức.

4. Bồi dưỡng học sinh giỏi số học.

5. Bồi dưỡng học sinh giỏi hình học tổ hợp.

6. Bồi dưỡng học sinh giỏi bất đẳng thức và các bài toán cực trị.

Chúng tôi cho rằng hai bộ sách này sẽ đáp ứng được một số lượng lớn bạn đọc. Các bạn học sinh phổ thông trung học nói chung, các bạn học sinh giỏi Toán nói riêng, cũng như các thầy cô giáo dạy Toán đều có thể tìm được cho mình những điều có ích trong các bộ sách này.

Mặc dù tập thể tác giả đã rất nghiêm túc trong quá trình biên soạn, nhưng do dung lượng của bộ sách quá lớn nên chắc chắn trong lần đầu ra mắt bạn đọc không thể tránh khỏi những khiếm khuyết.

Mong nhận được góp ý của bạn đọc xa gần để bộ sách tốt hơn trong các lần tái bản tiếp theo. Xin chân thành cảm ơn!

Các tác giả

Nhà sách Khang Việt xin trân trọng giới thiệu tới Quý độc giả và xin lắng nghe mọi ý kiến đóng góp, để cuốn sách ngày càng hay hơn, bổ ích hơn. Thư xin gửi về:

Cty TNHH Một Thành Viên – Dịch Vụ Văn Hóa Khang Việt.

71, Đinh Tiên Hoàng, P. Đakao. Quận 1, TP. HCM

Tel: (08) 39115694 – 39111969 – 3911968 – 39105797 – Fax: (08) 39110880

Hoặc Email: khangvietbookstore@yahoo.com.vn

CHƯƠNG 1.
ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ SONG SONG

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

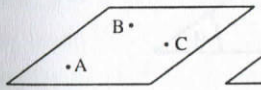
1. Các tiên đề của hình học không gian:

- Qua hai điểm phân biệt trong không gian có một và chỉ một đường thẳng mà thôi.
- Qua ba điểm không thẳng hàng có một và chỉ một mặt phẳng mà thôi.
- Một đường thẳng có hai điểm chung với một mặt phẳng thì nằm trọn trong mặt phẳng ấy.
- Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì có một đường thẳng chung đi qua điểm ấy. Đường thẳng này gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.

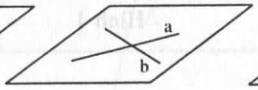
2. Các cách xác định mặt phẳng:

Một mặt phẳng được xác định trong các trường hợp sau:

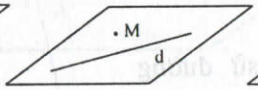
1. Qua ba điểm không thẳng hàng (hình 1a)
2. Qua hai đường thẳng cắt nhau (hình 1b)
3. Qua một đường thẳng và một điểm không nằm trên đường thẳng ấy (hình 1c)
4. Qua hai đường thẳng song song (hình 1d)



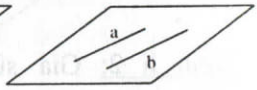
Hình 1a



Hình 1b



Hình 1c



Hình 1d

3. Hai đường thẳng song song:

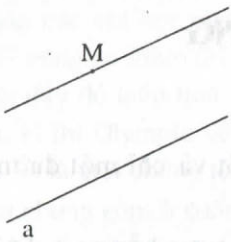
Định nghĩa 1: Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng cùng nằm trên một mặt phẳng và không có điểm chung.

Định nghĩa 2: Hai đường thẳng chéo nhau là hai đường thẳng không cùng nằm trên bất cứ mặt phẳng nào.

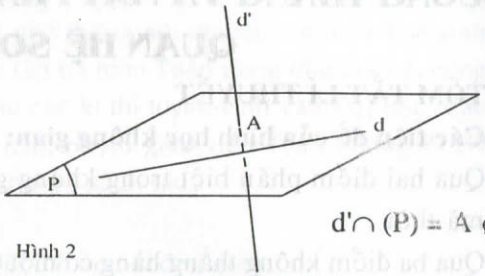
Chú ý:

1. Nếu đường thẳng d không cắt và không song song với d' thì d và d' chéo nhau.
2. Nếu đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (P) và đường thẳng d' cắt mặt phẳng (P) tại một điểm không thuộc d thì d và d' chéo nhau (hình 2)

3. Qua một điểm M ngoài đường thẳng a đã cho có một và chỉ một đườn thẳng song song, với a mà thôi.



Hình 3

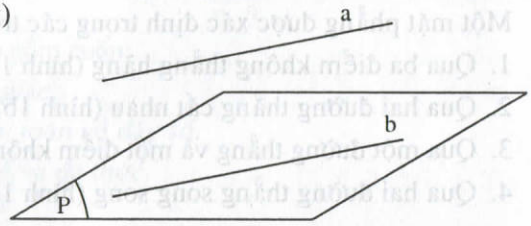


d'∩ (P) = A ∉
Hình 2

4. Đường thẳng song song với mặt phẳng:

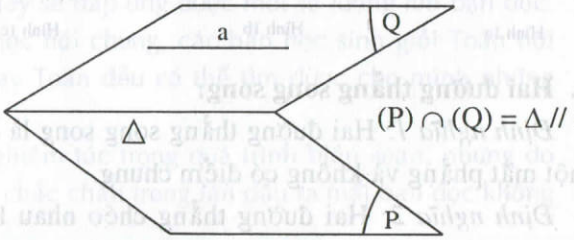
Định nghĩa: Đường thẳng a gọi là song song với mặt phẳng (P) và kí hiệu a // (P) nếu như a và (P) không có điểm chung.

Đinh lí 1: (Tiêu chuẩn song song) Đường thẳng a (không nằm trong mặt phẳng (P)) song song với (P) khi a song song với một đường thẳng b bất kì của (P) (hình 4)



Hình 4

Đinh lí 2: Giả sử đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Khi đó mọi mặt phẳng (Q) đi qua a mà cắt (P), thì giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) sẽ song song với a (hình 5)

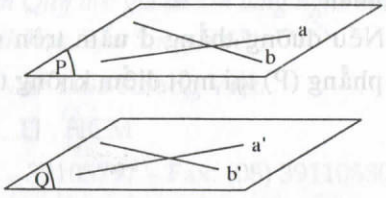


(P) ∩ (Q) = Δ //
Hình 5

5. Hai mặt phẳng song song

Định nghĩa: Hai mặt phẳng (P) và (Q) gọi là song với nhau, nếu như (P) và (Q) không có điểm chung.

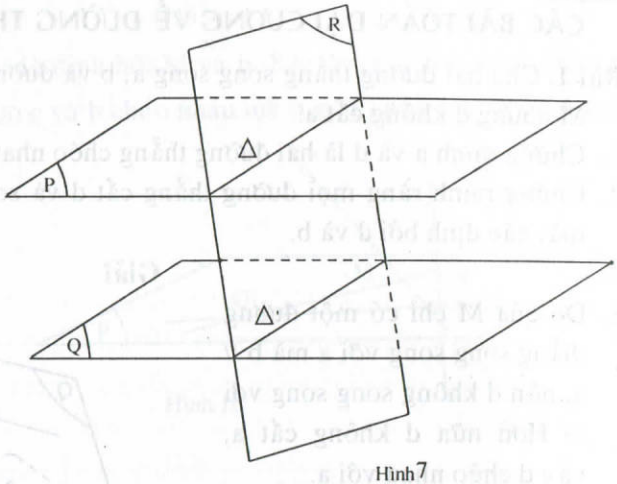
Định lí 1: (Tiêu chuẩn song song) Nếu a và b là cặp đường thẳng giao nhau của (P); còn a' và b' là cặp đường thẳng giao nhau của (Q), sao cho a // a'; b // b'; thì khi



Hình 6

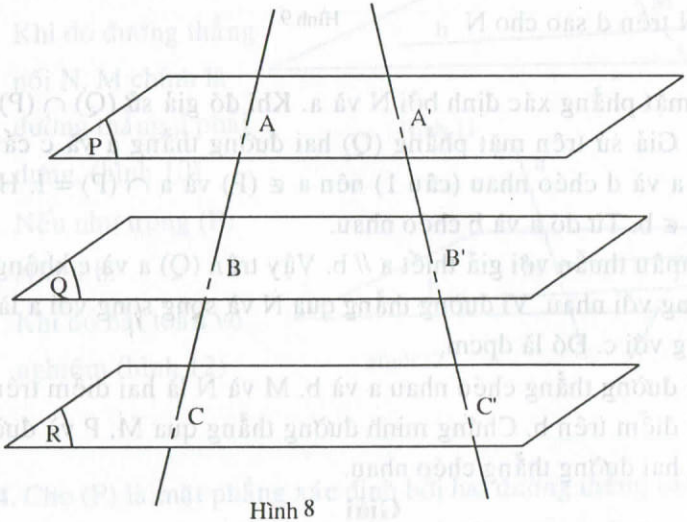
đó (P) và (Q) sẽ là hai mặt phẳng song song (hình 6)

Định lí 2: Nếu (P) và (Q) là hai mặt phẳng song song, và (R) là một mặt phẳng sao cho (R) cắt (P). Khi đó (R) cũng cắt (Q) và giao tuyến Δ của (R) với (P) sẽ song song với giao tuyến Δ' của (R) với (Q) (hình 7)



Hình 7

Định lí 3: Các mặt phẳng song song định ra trên hai cát tuyến những đoạn thẳng tỉ lệ (hình 8)



Hình 8

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$$

II. CÁC DẠNG TOÁN

Loại 1.

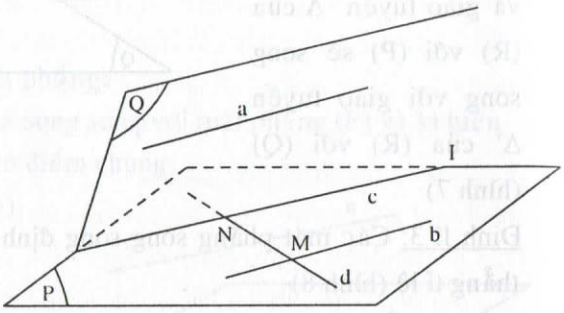
CÁC BÀI TOÁN ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Bài 1. Cho hai đường thẳng song song a, b và đường thẳng d cắt b tại một điểm M nhưng d không cắt a.

1. Chứng minh a và d là hai đường thẳng chéo nhau
2. Chứng minh rằng mọi đường thẳng cắt d và song song với a đều nằm trên mặt xác định bởi d và b.

Giải

1. Do qua M chỉ có một đường thẳng song song với a mà b // a, nên d không song song với a. Hơn nữa d không cắt a, vậy d chéo nhau với a.
2. Do d và b cắt nhau tại M, nên gọi (P) là mặt phẳng xác định bởi hai đường d và b. Lấy điểm N trên d sao cho N khác M.



Hình 9

Gọi (Q) là mặt phẳng xác định bởi N và a. Khi đó giả sử $(Q) \cap (P) = c$, như vậy $N \in c$. Giả sử trên mặt phẳng (Q) hai đường thẳng a và c cắt nhau tại điểm I. Do a và d chéo nhau (câu 1) nên $a \notin (P)$ và $a \cap (P) = I$. Hơn nữa vì b // a nên $I \notin b$. Từ đó a và b chéo nhau.

Đó là điều mâu thuẫn với giả thiết a // b. Vậy trên (Q) a và c không cắt nhau mà song song với nhau. Vì đường thẳng qua N và song song với a là duy nhất nên nó trùng với c. Đó là đpcm.

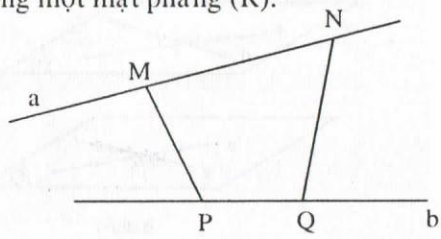
Bài 2. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. M và N là hai điểm trên a, còn P và Q là hai điểm trên b. Chứng minh đường thẳng qua M, P và đường thẳng qua N, Q là hai đường thẳng chéo nhau.

Giải

Giả sử trái lại hai đường thẳng tương ứng qua M, P và N, P không chéo nhau.. Khi đó hai đường thẳng này cùng nằm trong một mặt phẳng (R).

Do M, $N \in (R)$, nên $a \in (R)$. Tương tự do P, $Q \in (R)$, nên $b \in (R)$.

Vậy a và b đều thuộc mặt phẳng (R). Điều này mâu thuẫn với tính chéo nhau của a và b. Như thế giả thiết phản chứng là sai, từ đó suy ra đpcm.

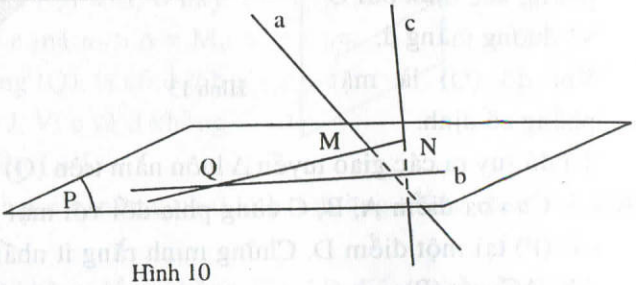


Bài 3. Cho ba đường thẳng a, b, c đôi một chéo nhau và một điểm M trên a. Dựng đường thẳng d qua M và cắt b, c.

Giải

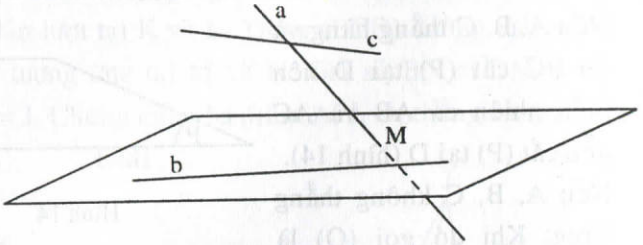
Gọi (P) là mặt phẳng xác định bởi M và b. Khi đó (P) luôn dựng được và là mặt phẳng duy nhất. Do c và b chéo nhau mà $b \in (P)$ nên $c \notin (P)$. Có hai khả năng xảy ra:

1. Nếu c không cắt (P):
   Bài toán vô nghiệm (hình 11)

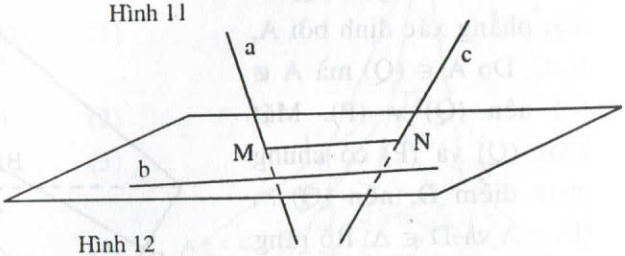


Hình 10

2. Nếu $c \cap (P) = N$.
   Khi đó lại xảy ra hai trường hợp sau:
   1. Nếu như trong (P) $MN \cap b = Q$.
      Khi đó đường thẳng nối N, M chính là đường thẳng d phải dựng. (hình 10)
   2. Nếu như trong (P) NM // b.
      Khi đó bài toán vô nghiệm (hình 12)



Hình 11



Hình 12

Bài 4. Cho (P) là mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng cắt nhau a và b và giả sử $a \cap b = 0$. Gọi d là đường thẳng cắt (P) tại I và d chéo nhau với a, b; M là một điểm chạy trên d. Chứng minh rằng các giao tuyến Δ của hai mặt phẳng (M; a) và (M; b) luôn nằm trên một mặt phẳng cố định (ở đây qua (M; a), (M; b) tương ứng kí hiệu là mặt phẳng xác định bởi M và đường thẳng a; bởi M và đường thẳng b).

Giải

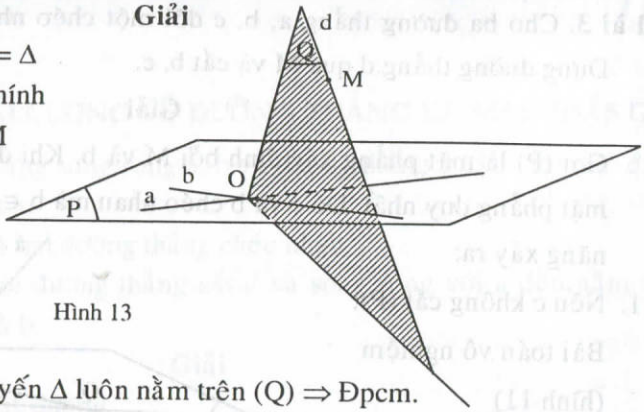
Giả sử $(M; a) \cap (M; b) = \Delta$

Vì $a \cap b = 0$, nên Δ chính là đường thẳng nối O, M

Gọi Q = (O; d) là mặt phẳng xác định bởi O và đường thẳng d.

Khi đó (Q) là mặt phẳng cố định.

Từ đó suy ra các giao tuyến Δ luôn nằm trên (Q) $\Rightarrow$ Đpcm.

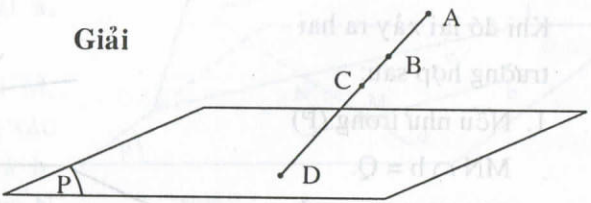


Hình 13

Bài 5. Cho ba điểm A, B, C cùng phía đối với mặt phẳng (P). Đường thẳng BC cắt (P) tại một điểm D. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai đường thẳng AB, AC, cắt (P).

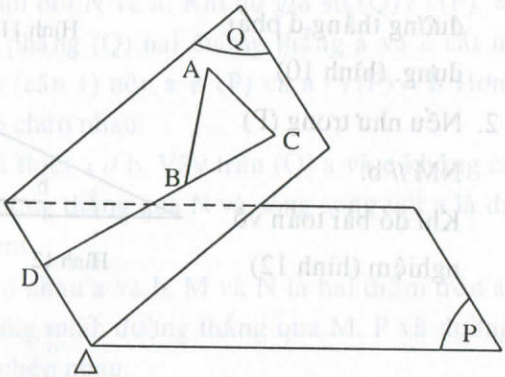
Giải

Nếu A, B, C thẳng hàng và do BC cắt (P) tại D nên hiển nhiên cả AB và AC đều cắt (P) tại D (hình 14).



Hình 14

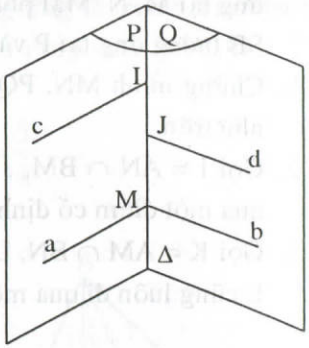
Nếu A, B, C không thẳng hàng. Khi đó gọi (Q) là mặt phẳng xác định bởi A, B, C. Do $A \in (Q)$ mà $A \notin (P)$ nên $(Q) \neq (P)$. Mặt khác (Q) và (P) có chung nhau điểm D, nên $(Q) \cap (P) = \Delta$ và $D \in \Delta$. Rõ ràng trong (Q) thì AC và AB không thể cùng song song với Δ (do qua một điểm A có duy nhất một đường thẳng song song với Δ).



Vậy một trong hai đường thẳng AB, AC phải cắt Δ (tức là cắt (P)) $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 6. Cho hai đường thẳng a, b cắt nhau tại điểm M. Hai đường thẳng c, d không có điểm chung và tương ứng song song với a, b. Chứng minh c và d chéo nhau.

Giải



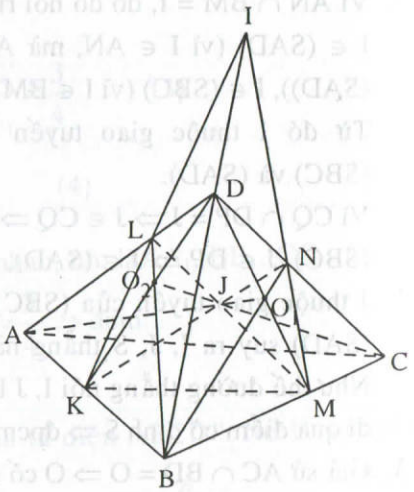
Gọi P và Q là hai mặt phẳng tương ứng xác định bởi a, c và bởi b, d.

Do c, d không có điểm chung (P) và (Q) là hai mặt phẳng phân biệt. Mặt khác (P) và (Q) có điểm chung là M, nên (P) ∩ (Q) = Δ, ở đây M ∈ Δ.Trong (P), ta có a // c mà a ∩ Δ = M, nên c ∩ Δ = I. Tương tự trong (Q), ta có d // b mà b ∩ Δ = M, nên d ∩ Δ = J. Vì c và d không có điểm chung nên hiển nhiên I ≠ J.

Ta có c ∈ (P), d ∩ (P) = J và J ≠ c, nên c và d là hai đường thẳng chéo nhau ⇒ đpcm.

Bài 7. Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi I là điểm trên nửa đường thẳng BD nhưng không thuộc đoạn BD. Trong (ABD) vẽ một đường thẳng qua I và cắt hai đoạn AB, AD lần lượt tại K và L. Trong (BCD) đường thẳng qua I và cắt hai đoạn CB, CD tương ứng tại M và N. Giả sử BN ∩ DM = O_1; BL ∩ DK = O_2; LM ∩ KN = J. Chứng minh ba điểm A, J, O_1 thẳng hàng.

Giải



Theo giả thiết ta có:

$BN \cap DM = O_1 \Rightarrow O_1 \in BN$

$\Rightarrow O_1 \in (ABN)$ (1)

$LM \cap KN = J \Rightarrow J \in KN$

$\Rightarrow J \in (ABN)$ (2)

Dĩ nhiên A ∈ (ABN) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra O_1, J, A cùng thuộc (ABN) (4)

Tương tự, $O_1 \in DM \Rightarrow O_1 \in (ADM)$ (5)

$J \in LM \Rightarrow J \in (ADM)$ (6)

$\Rightarrow O_1$, J, A cùng thuộc (ADM) (7)

Hai mặt phẳng (ABN) và (ADM) có chung nhau điểm A, nên chắc chắn (ABN) ∩ (ADM) = Δ

Từ (4), (7) suy ra A, O_1, J thẳng hàng.

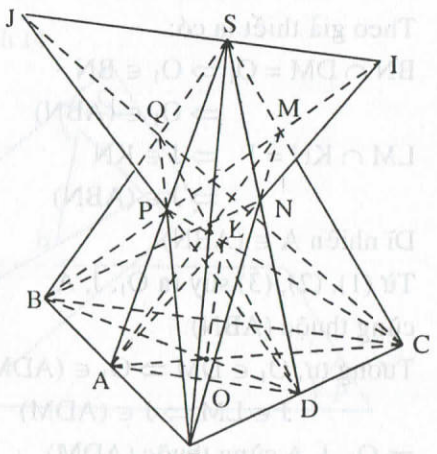
Bài 8. Trong mặt phẳng (P) cho hình thang ABCD (BC // AD) và một điểm S ∉ (P). Mặt phẳng (Q) di động chứa đường thẳng SB và giả sử cắt SC, SD tương

ứng tại M, N. Mặt phẳng (R) di động chứa đường thẳng CD và giả sử cắt SA, SB tương ứng tại P và Q.

1. Chứng minh MN, PQ luôn đi qua một điểm cố định khi (Q) và (R) di động như trên.
2. Gọi I = AN ∩ BM, J = CQ ∩ DP. Chứng minh đường thẳng nối I, J luôn đi qua một điểm cố định.
3. Gọi K = AM ∩ BN, L = CP ∩ DQ. Chứng minh rằng các đường thẳng nối K, L cũng luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

1. Giả sử AB ∩ CD = E, vậy E cố định.
   Như vậy M, N, E cùng nằm trên hai mặt phẳng (ABMN) và (SDC), do đó M, N, E nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng ấy, vì thế M, N, E thẳng hàng.
   Vậy các đường thẳng MN luôn đi qua điểm cố định E ⇒ đpcm
   Hoàn toàn tương tự ta có P, Q, E cùng nằm trên hai mặt phẳng (DCPQ) và (SBA), do đó P,Q, E nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng ấy, vì thế P, Q, E thẳng hàng.
   Như vậy các đường thẳng PQ cũng luôn đi qua điểm cố định E ⇒ đpcm.
2. Vì AN ∩ BM = I, do đó nói riêng I ∈ (SAD) (vì I ∈ AN, mà AN∈ (SAD)), I ∈ (SBC) (vì I ∈ BM).
   Từ đó I thuộc giao tuyến của (SBC) và (SAD).
   Vì CQ ∩ DP = J ⇒ J ∈ CQ ⇒ J ∈ (SBC), J ∈ DP ⇒ J ∈ (SAD), vậy J thuộc giao tuyến của (SBC) và (SAD) suy ra I, J, S thẳng hàng.
   Như thế đường thẳng nối I, J luôn đi qua điểm cố định S ⇒ đpcm.

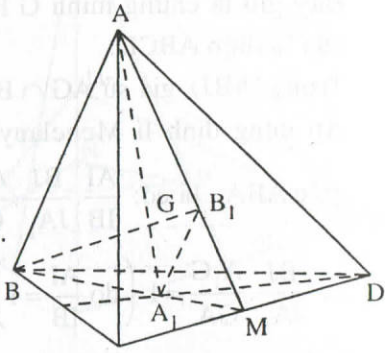


3. Giả sử AC ∩ BD = O ⇒ O cố định.
   Vì AM ∩ BN = K ⇒ K ∈ AM ⇒ K ∈ (SAC)
   K ∈ BN ⇒ K ∈ (SBD), vậy K nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD). Tương tự, do CP ∩ DQ = L cũng nằm trên giao tuyến của (SAC) và (SBD), còn O cũng thuộc giao tuyến của (SAC) và (SBD) (do AC ∩ BD = O) ⇒ K, L, O thẳng hàng. Nói cách khác các đường thẳng nối K, L luôn đi qua điểm cố định O ⇒ đpcm.

Bài 9. Cho tứ diện ABCD. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 tương ứng là trọng tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD và ABC. Chứng minh rằng AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 đồng qui tại điểm G và ta có:

$$\frac{AG}{AA_1}=\frac{BG}{BB_1}=\frac{CG}{CC_1}=\frac{DG}{DD_1}=\frac{3}{4}$$

Giải



Gọi A_1, B_1 tương ứng là các trọng tâm các tam giác BCD, ACD và M là trung điểm của CD. Theo tính chất trọng tâm tam giác ta có: $\frac{MA_1}{MB}=\frac{MB_1}{MA}=\frac{1}{3}$

Do đó theo định lí Talet đảo, ta có $A_1B_1 \,//\, AB$.

Từ đó: $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{MA_1}{MB}=\frac{1}{3}$ (1)

Trong (AMB) rõ ràng $BB_1 \cap AA_1 = G$.

Vì $A_1B_1 \,//\, AB$, nên lại theo định lí Talet, ta có (dựa vào 1)

$$\frac{A_1G}{GA}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{AG}{AA_1}=\frac{3}{4} \quad (2)$$

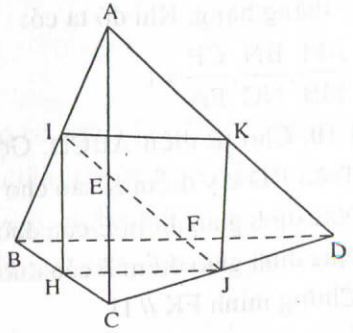
Tương tự, ta có $CC_1 \cap AA_1 = G'$ và $\frac{AG'}{AA_1}=\frac{3}{4}$ (3)

$DD_1 \cap AA_1 = G''$ và $\frac{AG''}{AA_1}=\frac{3}{4}$ (4)

Từ (2) (3) (4) suy ra G, G', G'' trùng nhau, tức là AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 đồng qui tại G và $\frac{AG}{AA_1}=\frac{BG}{BB_1}=\frac{CG}{CC_1}=\frac{DG}{DD_1}=\frac{3}{4}\Rightarrow$ đpm.

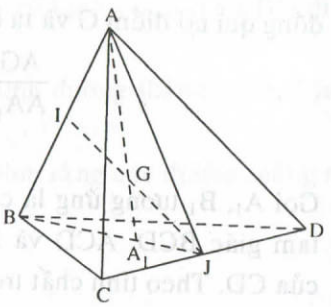
Chú ý:

1. Điểm G nói trên gọi là "trọng tâm của tứ diện ABCD". Nó là sự mở rộng của khái niệm trọng tâm của tam giác.
2. Ta có cách khác xác định trọng tâm của tứ diện ABCD như sau:
   Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J, E, F, K, H lần lượt là trung điểm của AB, CD, AC, BD, AD, BC.
   Khi đó IJ, EF, KH đồng qui tại G và G chính là trọng tâm của tứ diện ABCD.



Dễ thấy IKJH là hình bình hành và IEJF là hình bình hành.

Từ đó IJ và EF cũng như IJ và KH cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Như vậy IJ, HK, EF đồng quy tại một điểm G $\Rightarrow$ đpcm.



Bây giờ ta chứng minh G là trọng tâm của tứ diện ABCD.

Trong (ABJ), giả sử $AG \cap BJ = A_1$.

Áp dụng định lí Menelauyt trong tam giác ABA_1, ta có: $\frac{AI}{IB}.\frac{BJ}{JA_1}.\frac{A_1G}{GA}=1$

$$\Rightarrow \frac{BJ}{JA_1}.\frac{A_1G}{GA}=1 \left(\text{do } \frac{AI}{IB}=1\right) \qquad (1)$$

Lại áp dụng định lí Menelauyt trong Δ BIJ, ta có:

$$\frac{BA_1}{A_1J}.\frac{JG}{GI}.\frac{IA}{AB}=1$$

Do $\frac{JG}{GI}=1$ và $\frac{IA}{AB}=\frac{1}{2}$, nên $\frac{BA_1}{A_1J}=2$ (2)

(1) chứng tỏ A_1 là trọng tâm của tam giác BCD.

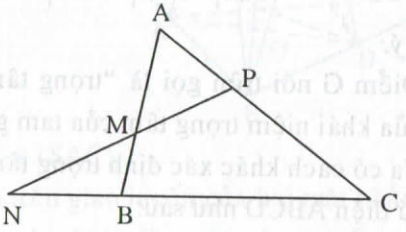
Từ (2) suy ra $\frac{BJ}{JA_1}=3$, vì thế từ (1) có $\frac{A_1G}{GA}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{AG}{AA_1}=\frac{3}{4}$.

Vậy theo bài 9, G là trọng tâm của tứ diện ABCD $\Rightarrow$ đpcm.

3. Nhắc lại định lí Menelauyt (xem hình học lớp 10).

Cho tam giác ABC. M, N, P lần lượt là ba điểm trên các đường thẳng AB, BC, CA sao cho M, N, P thẳng hàng. Khi đó ta có:

$$\frac{AM}{MB}.\frac{BN}{NC}.\frac{CP}{PA}=1$$



Bài 10. Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên BD lấy điểm K sao cho BK = 2KD.

1. Xác định giao điểm E của đường thẳng CD với (IJK) và chứng minh DE = DC.
2. Xác định giao điểm F của đường thẳng AD với (IJK) và chứng minh FA = 2FD.
3. Chứng minh FK // IJ

4. Gọi M, N là điểm bất kì tương ứng trên AB, CD. Tìm giao điểm của MN với (IJK).

Giải

1. Trong (BCD) giả sử $CD \cap KJ = E$

$\Rightarrow CD \cap (IJK) = E$

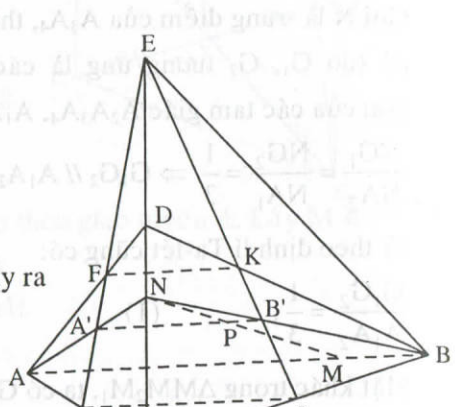
Theo định lí Menelauyt trong tam giác BCD, ta có:

$$\frac{DK}{KB}.\frac{BJ}{JC}.\frac{CE}{ED} = 1. \qquad (1)$$

Do $\frac{DK}{KB} = \frac{1}{2}$ và $\frac{BJ}{JC} = 1$ (g/t) nên từ (1) suy ra

$\frac{CE}{ED} = 2 \Rightarrow CE = 2ED$

$\Rightarrow DE = DC \Rightarrow$ đpcm.



2. Vì $E \in DC \Rightarrow E \in (ADC)$.

Trong (ADC), giả sử $EI \cap AD = F \Rightarrow F \in EI \Rightarrow F \in (IJK) \Rightarrow AD \cap (IJK) = F$.

Trong tam giác ADC lại theo định lí Menelauyt, ta có:

$$\frac{CE}{ED}.\frac{DF}{FA}.\frac{AI}{IC} = 1 \qquad (2)$$

Từ câu 1, ta có $\frac{CE}{ED} = 2$, còn $\frac{AI}{IC} = 1$ (g/t), nên từ (2) có:

$\frac{DF}{FA} = \frac{1}{2} \Rightarrow FA = 2FD \Rightarrow$ đpcm.

3. Theo câu 2 thì $\frac{DF}{FA} = \frac{1}{2}$

Theo giả thiết ta có $\frac{DK}{KB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{DF}{FA} = \frac{DK}{DB} \Rightarrow FK \,//\, AB$ (theo định lí Ta-lét đảo), mà $IJ \,//\, AB \Rightarrow FK \,//\, IJ \Rightarrow$ đpcm.

4. Lấy $M \in AB$, $N \in CD$.

Trong (DAC) giả sử $AN \cap IF = A'$.

Trong (DBC) giả sử $BN \cap KJ = B'$.

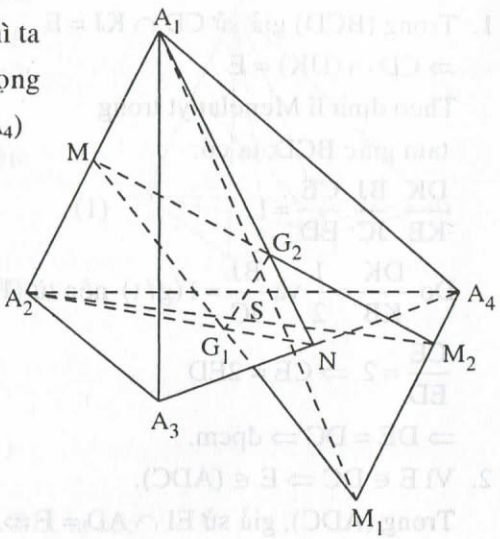
Trong (NAB) giả sử $A'B' \cap NM = P$.

Do $P \in A'B' \Rightarrow P \in (IJK)$, mà $P \in MN$, điều đó có nghĩa là $MN \cap (IJK) = P$.

Bài 11. Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm của các mặt $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$. M là một điểm bất kì trong không gian. Gọi M_1, M_2, M_3, M_4 tương ứng là các điểm đối xứng của M qua G_1, G_2,

G_3, G_4. Chứng minh A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3, A_4M_4 là bốn đường thẳng đồng qui tại một điểm.

Giải



Gọi N là trung điểm của A_3A_4, thế thì ta có (do G_1, G_2 tương ứng là các trọng tâm của các tam giác $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$)

$$\frac{NG_1}{NA_2}=\frac{NG_2}{NA_1}=\frac{1}{3}\Rightarrow G_1G_2 \,//\, A_1A_2,$$

và theo định lí Ta-lét cũng có:

$$\frac{G_1G_2}{A_1A_2}=\frac{1}{3}. \qquad (1)$$

Mặt khác trong ΔMM_2M_1, ta có G_1G_2 là đường trung bình, nên:

$$M_1M_2 = 2G_1G_2. \qquad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra: $M_1M_2=\frac{2}{3}A_1A_2$ (3)

Vậy $A_1A_2M_1M_2$ là hình thang với hai đáy là A_1A_2, M_1M_2 có:

$$M_1M_2=\frac{2}{3}A_1A_2.$$

Vì thế hai đường chéo A_1M_1, A_2M_2 cắt nhau tại một điểm S, trong đó:

$$\frac{SM_1}{SA_1}=\frac{SM_2}{SA_2}=\frac{2}{3}. \qquad (4)$$

Tương tự các đoạn thẳng A_1M_1, A_3M_3; A_1M_1, A_4M_4 cắt nhau tương ứng tại S', S'' trong đó: $\frac{S'M_1}{S'A_1}=\frac{S'M_3}{S'A_3}=\frac{S''M_1}{S''A_1}=\frac{S''M_4}{S''A_4}=\frac{2}{3}$. (5)

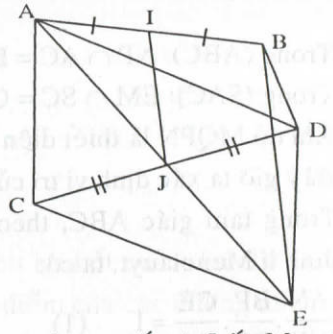
Từ (5) nói riêng suy ra: $\frac{SM_1}{SA_1}=\frac{S'M_1}{S'A_1}=\frac{S''M_1}{S''A_1}=\frac{2}{3}\Rightarrow S\equiv S'\equiv S''$.

Điều đó có nghĩa là A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3, A_4M_4 đồng quy tại một điểm S, và điểm này chia chúng theo tỉ số: $\frac{SM_1}{SA_1}=\frac{SM_2}{SA_2}=\frac{SM_3}{SA_3}=\frac{SM_4}{SA_4}=\frac{2}{3}$. Đó là đpcm.

Bài 12. Cho hai đoạn thẳng chéo nhau AB, CD. Gọi I và J lần lượt là các trung điểm của AB và CD.

Hãy so sánh AC + BD và 2IJ.

Giải



Trong (ACD) dựng hình bình hành ACED.

Vì J là trung điểm CD nên A, J, E thẳng hàng và có AJ = JE.

Trong (ABE) dễ thấy BE = 2IJ .

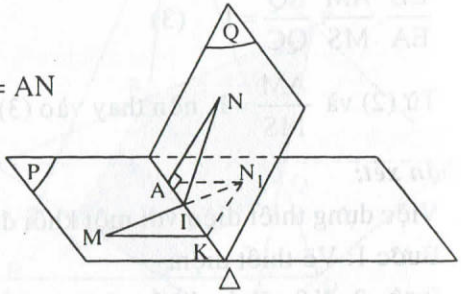
Do AB và CD chéo nhau, nên B, D, E không thẳng hằng. Từ đó ta có: BE < BD + DE

$\Rightarrow$ 2IJ < BD + AC.

Bài 13. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Lấy M ∈ (P), N ∈ (Q) sao cho M và N đều không thuộc Δ.

Tìm trên Δ điểm I sao cho MI + IN là bé nhất.

Giải



Trong (Q) hạ NA ⊥ Δ (A ∈ Δ).

Trên (P) dựng trên nửa mặt phẳng bờ không chứa đoạn $NA_1 \perp \Delta$ và $AN_1 = AN$

Nối MN_1 cắt Δ tại điểm I cần dựng.

Thật vậy do hai tam giác vuông N_1AI và NAI bằng nhau, nên $IN_1 = IN$

Lấy điểm K tùy ý trên Δ (K ≠ I).

Trong tam giác KMN_1 ta có:

$MK + KN_1 > MN_1 = MI + IN_1$,

hay $MK + KN_1 > MI + IN$. (1)

Do $\Delta N_1AK = \Delta NAK$ nên $N_1K = NK$ (2).

Từ (1), (2) suy ra: MK + KN > MI + IN $\Rightarrow$ đpcm.

Loại 2. CÁC BÀI TOÁN VỀ THIẾT DIỆN

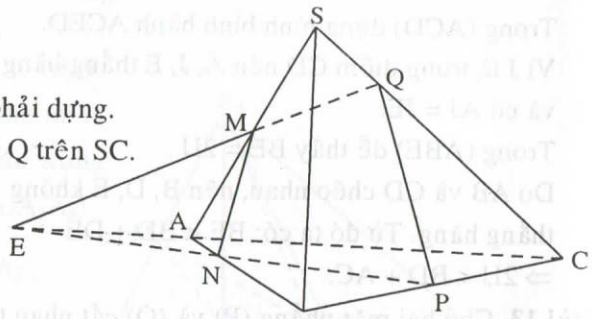
A. Phương pháp xác định giao tuyến bằng hai điểm chung.

Như ta đã biết để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng, ta chỉ cần xác định hai điểm chung A, B của chúng. Đường thẳng đi qua A, B chính là giao tuyến cần tìm. Xác định thiết diện với một khối đa diện thực chất là việc tìm giao tuyến của thiết diện cần tìm với các mặt của khối đã cho.

Thí dụ 1. Cho hình chóp tam giác S.ABC. Gọi M, P lần lượt là các trung điểm của SA, SB còn N là điểm trên AB sao cho: $\frac{AN}{AB} = \frac{1}{4}$

Vẽ thiết diện tạo bởi (MNP).

Giải



Trong (ABC): $NP \cap AC = E$.

Trong (SAC): $EM \cap SC = Q$

Khi đó MQPN là thiết diện phải dựng.

Bây giờ ta xác định vị trí của Q trên SC.

Trong tam giác ABC, theo định lí Menelauyt, ta có:

$$\frac{AN}{NB}.\frac{BP}{PC}.\frac{CE}{EA}=1 \quad (1)$$

Do $\frac{AN}{NB}=\frac{1}{3}\left(\text{vì } \frac{AN}{AB}=\frac{1}{4}\right); \frac{BP}{PC}=1,$ nên thay vào (1), ta có: $\frac{CE}{EA}=3$ (2)

Trong tam giác SAC, lại theo định lí Menelauyt, thì:

$$\frac{CE}{EA}.\frac{AM}{MS}.\frac{SQ}{QC}=1 \quad (3)$$

Từ (2) và $\frac{AM}{MS}=1,$ nên thay vào (3) có $\frac{SQ}{QC}=\frac{1}{3}$, hay $\frac{SQ}{SC}=\frac{1}{4}$.

Nhận xét:

1. Việc dựng thiết diện với một khối đa diện đã cho được tiến hành theo 2 bước:

– Bước 1: Vẽ thiết diện.

– Bước 2: Xác định chính xác vị trí các đỉnh của thiết diện. Để làm điều này người ta thường sử dụng hai định lí cơ bản là định lí Ta-let và định lí Menelauyt.

2. Cần lưu ý các điều sau đây khi giải một bài toán về thiết diện:

– Phải luôn coi mặt phẳng là vô hạn, thí dụ (ABC) chứ không phải là tam giác ABC.

– Trong không gian để tìm giao điểm của hai đường thẳng trước hết phải tìm xem chúng có cùng ở trong một mặt phẳng hay không? Thí dụ trong bài toán trên, ta phải trình bày:

Trong (ABC), ta có $NP \cap AC = E$

Đó là điều cần thiết, nếu không ta rất dễ bị ngộ nhận.

3. Kết quả $\frac{AN}{AB}=\frac{SQ}{SC}$ trong bài trên vẫn đúng, nếu N là điểm bất kì trên AB (miễn là N không phải là trung điểm của AB).

Thật vậy theo định lí Menelauyt, trong các tam giác ABC và SAC, ta có:

$$\frac{AN}{NB}.\frac{BP}{PC}.\frac{CE}{CA}=1; \quad \frac{CE}{CA}.\frac{AM}{MS}.\frac{SQ}{QC}=1$$

$$\Rightarrow \frac{AN}{NB}.\frac{BP}{PC}.\frac{CE}{CA}=\frac{CE}{CA}.\frac{AM}{MS}.\frac{SQ}{QC}$$

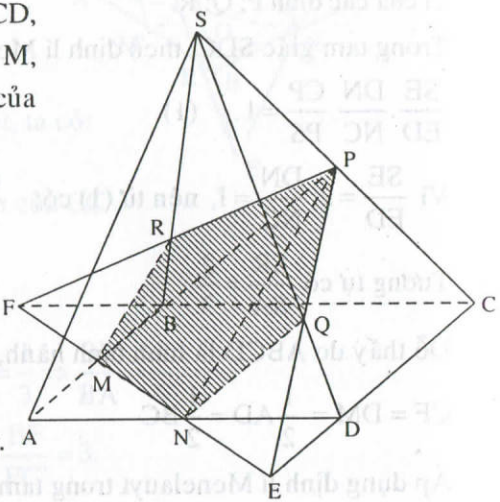
$$\Rightarrow \frac{AN}{NB}=\frac{SQ}{QC}\left(\text{do } \frac{BP}{PC}=\frac{AM}{MS}=1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{AN}{AB}=\frac{SQ}{SC}$$

4. Thực ra nếu N là trung điểm AB, thì ta vẫn thu lại kết quả trên. Tuy nhiên cách dựng thiết diện là khác với cách tìm giao điểm của các đường như trong bài trên!

Thí dụ 2. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P tương ứng là các trung điểm của AB, AD và SC.

Vẽ thiết diện tạo bởi (MNP).



Giải

Trong (ABCD): $MN \cap CD = E$

$MN \cap BC = F$

Trong (SDC): $EP \cap SD = Q$

Trong (SBC): $FP \cap SB = R$

Vậy MNQPR là thiết diện phải dựng.

Ta thấy ba đỉnh M, N, P đã hoàn toàn xác định (vì chúng là trung điểm của các cạnh AB, AD và SC tương ứng). Còn lại ta phải xác định vị trí của Q và R.

Do ABCD là hình bình hành và từ giả thiết suy ra $ED = AM = \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2}$.

Áp dụng định lí Menelauyt trong tam giác SDC, có:

$$\frac{DE}{EC}.\frac{CP}{PS}.\frac{SQ}{QD}=1 \qquad (1)$$

Vì $\frac{DE}{EC}=\frac{1}{3}$ và $\frac{CP}{PS}=1$, nên từ (1) suy ra $\frac{SQ}{SD}=3$ hay $\frac{SQ}{SD}=\frac{3}{4}$.

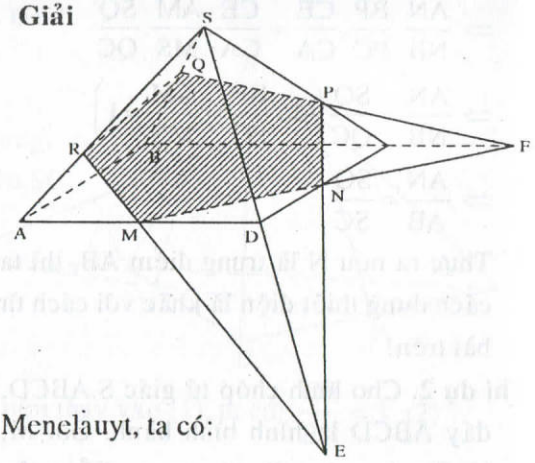
Lập luận tương tự có $\frac{SR}{SD}=\frac{3}{4}$.

Vị trí các đỉnh của ngũ giác thiết diện phải dựng được xác định hoàn toàn.

Thí dụ 3. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD đáy là hình bình hành. Gọi M, N tương ứng là các trung điểm của AD và DC. Kéo dài SD về phía D một đoạn DE = SD. Xác định thiết diện tạo bởi (MNE)

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN

Giải



Trong (SCD): $EN \cap SC = P$.

Trong (SAB): $EM \cap SA = R$.

Trong (ABCD): $MN \cap BC = F$.

Trong (SBC): $FP \cap SB = Q$.

Khi đó MNPQR là ngũ giác thiết diện phải dựng.

Ta chỉ còn phải xác định vị trí của các đỉnh P; Q; R.

Trong tam giác SDC, theo định lí Menelauyt, ta có:

$$\frac{SE}{ED}.\frac{DN}{NC}.\frac{CP}{PS}=1. \quad (1)$$

Vì $\frac{SE}{ED}=2; \frac{DN}{NC}=1$, nên từ (1) có: $\frac{CP}{PS}=\frac{1}{2}$ hay $\frac{SP}{SC}=\frac{2}{3}$.

Tương tự có $\frac{SR}{SA}=\frac{2}{3}$.

Dễ thấy do ABCD là hình bình hành, nên từ giả thiết suy ra:

$$CF = DM = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC$$

Áp dụng định lí Menelauyt trong tam giác SBC ta có:

$$\frac{SQ}{QB}.\frac{BF}{FC}.\frac{CP}{PS}=1. \quad (2)$$

Vì $\frac{BF}{FC}=3; \frac{CP}{PS}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SQ}{QB}=\frac{2}{3}$ (suy từ 2)

Vậy $\frac{SQ}{SB}=\frac{2}{5}$.

Vị trí các đỉnh của ngũ giác thiết diện hoàn toàn xác định.

Chú ý: Có thể thấy MN, AB và RQ đồng qui tại một điểm.

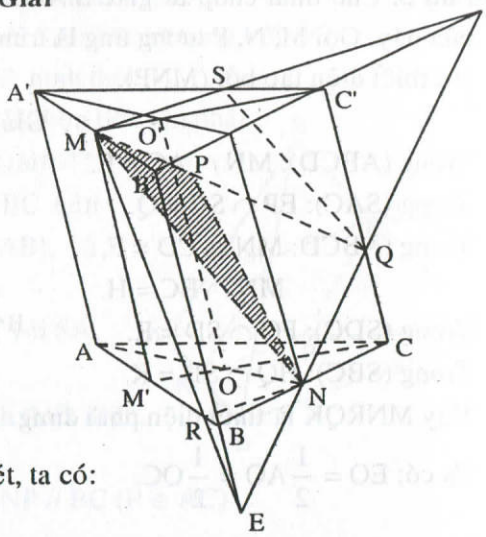
(các bạn tự giải thích vì sao?)

Thí dụ 4. Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' đáy là tam giác đều. Gọi O và O' lần lượt là các tâm của đáy ABC, A'B'C'. Giả sử M và N lần lượt là trung điểm của A'B' và BC, còn P là điểm nằm trên O'O sao cho $\frac{O'P}{O'O}=\frac{1}{6}$.

Dựng thiết diện tạo bởi (MNP).

THƯ VIỆN TIN HỌC THUẬN

Giải



Gọi M' = CO ∩ AB.

Trong (C'MM'C): MP ∩ C'C = Q.

Trong (BB'C'C); QN ∩ B'B = E.

Trong (ABB'A'): EM ∩ AB = R.

Trong (BCC'B'): EQ ∩ B'C' = F.

Trong (A'B'C'): MF ∩ A'C' = S.

Khi đó MSQNR là ngũ giác thiết diện phải dựng.

Bây giờ xác định vị trí các đỉnh của thiết diện.

Do $\frac{O'P}{O'O}=\frac{1}{6}$ mà theo định lí Ta–lét, ta có:

$\frac{O'P}{C'Q}=\frac{MO'}{MC'}=\frac{1}{3}\Rightarrow$ Q là trung điểm của CC'.

Dễ thấy $BE = QC = \frac{1}{2}CC' = \frac{1}{2}BB'$.

Theo định lí Talet, thì $\frac{BR}{B'M}=\frac{EB}{EB'}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{BR}{BA}=\frac{1}{6}$.

Do $FC' = NC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}B'C' \Rightarrow \frac{BF}{FC'}=3$.

Áp dụng định lí Menelauyt trong tam giác A'B'C', ta có:

$$\frac{BF}{FC'}\cdot\frac{C'S}{SA'}\cdot\frac{A'M}{MB}=1. \qquad (1)$$

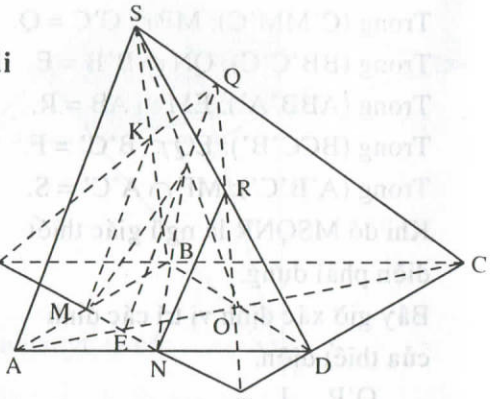
Từ $\frac{BF}{FC'}=3;\frac{A'M}{MB}=1\Rightarrow\frac{C'S}{SA'}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{C'S}{C'A'}=\frac{1}{4}$.

Vậy vị trí các đỉnh của ngũ giác thiết diện hoàn toàn xác định.

Nhận xét:

1. Qua ví dụ này, ta thấy việc xác định giao điểm "đầu tiên" là rất quan trọng (ở đây đó là giao điểm Q). Từ giao điểm Q này, các giao điểm còn lại được xác định một cách không lấy gì làm khó khăn.
2. Như đã nói đến ở phần trên việc tìm giao điểm của hai đường thẳng trong không gian trước hết phải xem chúng có ở trong cùng một mặt phẳng nào hay không? Trong các bài toán trước điều này dễ nhận thấy. Ở bài tập này để tìm giao điểm của MP và C'C ta phải nhìn ra chúng ở trong cùng một mặt phẳng (đó là (MC'CM')). Điều này không phải dễ dàng nhìn thấy ngay.

Thí dụ 5. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD, đáy là hình bình hành và O là tâm của đáy. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm của AB, AD và SO.
Vẽ thiết diện tạo bởi (MNP).



Giải

Trong (ABCD): $MN \cap AC = E$.
Trong (SAC): $EP \cap SC = Q$.
Trong (ABCD: $MN \cap CD = F$,
$MN \cap BC = H$.
Trong (SDC): $FQ \cap SD = R$.
Trong (SBC): $HQ \cap SB = K$.
Vậy MNRQK là thiết diện phải dựng.

Ta có: $EO = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}OC$.

Trong tam giác SOC theo định lí Menelauyt, thì: $\frac{OE}{EC}.\frac{CQ}{QS}.\frac{SP}{PO} = 1$ (1)

Do $\frac{OE}{EC} = \frac{1}{3}; \frac{SP}{PO} = 1$, nên từ (1) suy ra $\frac{CQ}{QS} = 3 \Rightarrow \frac{SQ}{SC} = \frac{1}{4}$.

Dễ thấy $FD = AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}DC$.

Trong tam giác SDC, theo định lí Menelauyt, thì $\frac{CQ}{QS}.\frac{SR}{RD}.\frac{DF}{FC} = 1$ (2)

Vậy R là trung điểm của SD. Tương tự K là trung điểm của SB.

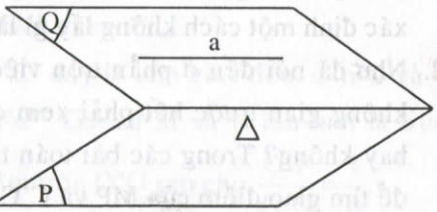
Nhận xét:

1. Một lần nữa qua ví dụ trên, ta thấy rõ vai trò quan trọng của việc xác định giao điểm "đầu tiên" (ở đây là giao điểm Q).
2. Với bài toán này, ta có cách khác để xác định thiết diện (xem phần sau).

B. Sử dụng tính song song để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng.

Phương pháp xác định giao tuyến giữa hai mặt phẳng bằng cách sử dụng tính song song dựa trên mệnh đề cơ bản sau:

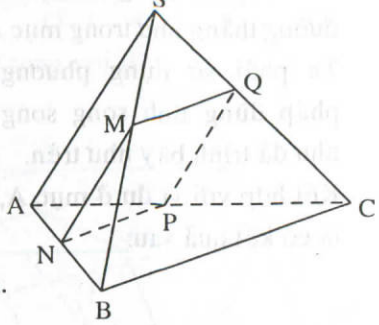
Nếu a // (P), thì mọi mặt phẳng (Q) chứa a mà cắt (P) thì nếu gọi Δ là giao tuyến của (P) và (Q), ta có Δ//a.



Thí dụ 1. Cho tứ diện S.ABC, M là một điểm trên SB.

1. Dựng thiết diện qua M, song song với SA và song song với BC
2. Xác định vị trí của M để thiết diện là hình thoi.
3. Xác định vị trí của M để thiết diện có diện tích lớn nhất.

Giải



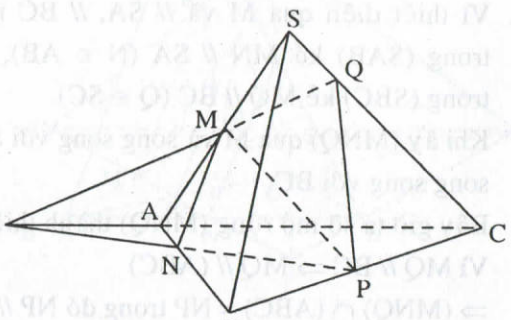
1. Vì thiết diện qua M và // SA, // BC nên trong (SAB) kẻ MN // SA (N ∈ AB), và trong (SBC) kẻ MQ // BC (Q ∈ SC).
   Khi ấy (MNQ) qua M và song song với SA, song song với BC.
   Bây giờ ta sẽ mở rộng (MNQ) thành thiết diện.
   Vì MQ // BC ⇒ MQ // (ABC)
   ⇒ (MNQ) ∩ (ABC) = NP trong đó NP // BC (P ∈ AC)
   Vậy MNPQ là thiết diện phải dựng.
   Vì MN // SA ⇒ MN // (SAC) ⇒ (MNPQ) ∩ (SAC) = MQ, trong đó MQ // NP.
   Vì thế MNPQ là hình bình hành.
2. Từ câu 1. suy ra thiết diện MNPQ là hình thoi khi và chỉ khi: MQ = MN (1)
   Theo định lí Talet, ta có: $\frac{MQ}{BC}=\frac{SM}{SB} \Rightarrow MQ=\frac{SM.BC}{SB}$ (2)
   $\frac{MN}{SA}=\frac{BM}{SB} \Rightarrow MN=\frac{SA.BM}{SB}=\frac{SA(SB-SM)}{SB}$. (3)
   Từ (2) (3) suy ra (1) ⇔ SM.BC = SA(SB – SM)
   $\Leftrightarrow SM=\frac{SA.SB}{BC+SA}$. (4)
   Từ (4) suy ra M hoàn toàn xác định.
3. Ta có: $S_{MNPQ} = MN.NP.\sin\widehat{MNP}$ (5)
   Do $\widehat{MNP}=\alpha$, ở đây α là góc giữa SA và BC là hằng số.
   Từ (5) suy ra: S_{MNPQ}max ⇔ MN.NP max
   $\Leftrightarrow \frac{MN}{SA}.\frac{NP}{BC}$ max (6)
   Do $\frac{MN}{SA}+\frac{NP}{BC}=\frac{BM}{SB}+\frac{SM}{SB}=1$, nên từ (6) suy ra:
   $\frac{MN}{SA}.\frac{NP}{BC}$ max ⇔ $\frac{MN}{SA}=\frac{NP}{BC}=\frac{1}{2}$ ⇔ M là trung điểm của SB.

Nhận xét:

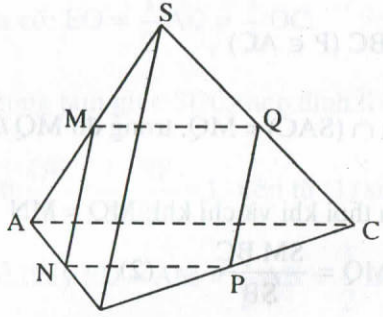
1. Khi M là trung điểm của AB, ta nhắc lại trong ví dụ của mục A. Xét thiết diện tạo bởi (MNP), khi M, N, P tương ứng là trung điểm của SB, AB, AC. Lúc này ta không thể tìm giao tuyến bằng phương pháp xác định các giao điểm của hai đường thẳng như trong mục A, vì lý do ở đây MN // SA, NP // BC.

   Ta phải sử dụng phương pháp dùng tính song song như đã trình bày như trên.

   Kết hợp với ví dụ ở mục A, ta có kết quả sau:



(NA ≠ NB)



(NA = NB)

Cho hình chóp tam giác SABC. Khi đó với mọi vị trí của N trên AB và giả sử SC ∩ (MNP) = Q, thì ta luôn có hệ thức: $\frac{AN}{AB} = \frac{SQ}{SC}$.

2. Với ví dụ 5, ở mục A ta có thể sử dụng phương pháp trong mục B này để giải lại nó như sau:

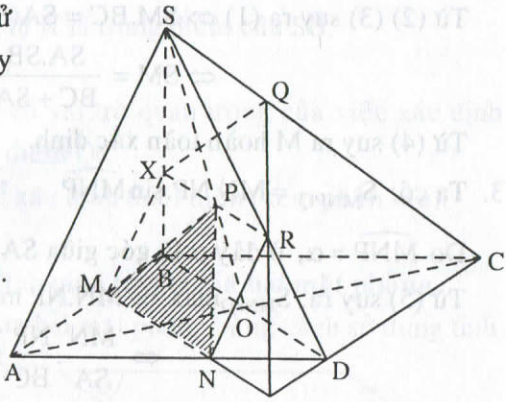
   Vì MN // BD ⇒ MN // (SBD)

   ⇒ (MNP) ∩ (SBD) = Δ,

   trong đó Δ qua P và Δ // BD.

   Vì thế trong SBD qua P kẻ XR // BD.

   Do P là trung điểm của SO, nên X, R tương ứng là trung điểm của SB, SD.



   Trong (ABCD) ta có MN ∩ DC = E.

   Trong (SCD) ta có ER ∩ SC = Q.

   MNRQX là ngũ giác thiết diện phải dựng $\left(\text{dễ thấy } \frac{SQ}{SC} = \frac{1}{4}\right)$.

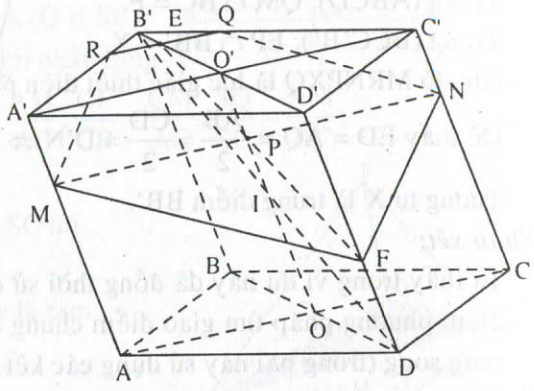
   Lời giải này có phần nào đơn giản như lời giải đã dựng trong ví dụ 5 mục A.

3. Qua ví dụ này ta thấy trong một bài toán xác định thiết diện, người ta thường kết hợp một cách nhuần nhuyễn cả hai phương pháp đã nêu.

Thí dụ 2. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai đáy ABCD, A'B'C'D'. P là điểm trên OO' sao cho $\frac{O'P}{O'O} = \frac{1}{4}$.

Dựng thiết diện qua P song song với AC và song song với B'D.

Giải



Vì thiết diện qua P và // AC nên trong (AA'C'C) qua P vẽ MN // AC (M ∈ AA', N ∈ CC')

Tương tự vì thiết diện còn // B'D, nên trong mặt chéo BDD'B' qua P kẻ EF // B'D (E ∈ B'D'; F ∈ DD').

Mặt phẳng xác định bởi MN và EF là mặt phẳng qua P và song song với AC và B'D.

Bây giờ ta mở rộng nó thành thiết diện.

Vì MN // AC ⇒ MN // A'C' ⇒ MN // (A'B'C'D')

⇒ giao tuyến của thiết diện với (A'B'C'D') sẽ qua E và // MN (tức là // A'C')

Vì thế trong (A'B'C'D') qua E kẻ RQ // A'C' (R ∈ A'B'; Q ∈ B'C')

MRQNF là thiết diện phải dựng.

Bây giờ ta xác định vị trí các đỉnh của thiết diện.

Ta có: $\frac{A'M}{A'A} = \frac{C'N}{C'C} = \frac{O'P}{O'O} = \frac{1}{4}$.

Giả sử $O'O \cap B'D = I \Rightarrow O'P = PI \Rightarrow DF = PI = \frac{1}{4}OO' \Rightarrow \frac{DF}{DD'} = \frac{1}{4}$.

Rõ ràng do E là trung điểm của BO' ⇒ R, Q tương ứng là các trung điểm của A'B' và B'C'.

Các đỉnh của ngũ giác thiết diện MRQNF hoàn toàn xác định.

Thí dụ 3. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo A'C và B'D còn M, N lần lượt là trung điểm của AD và B'C'. Dựng thiết diện tạo bởi (OMN).

Giải

Trong (A'B'C'D'): $MO \cap B'C' = P$.

Khi đó $(MON) \cap (A'B'C'D') = NP$.

Vì (ABCD) // (A'B'C'D')

Nên (MON) ∩ (ABCD) = MQ,

trong đó MQ // NP.

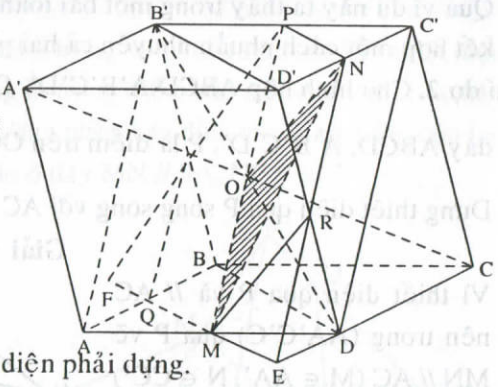
Dễ thấy P và Q tương ứng là trung điểm của B'C' và AB.

Trong (ABCD): QM ∩ CD = E.

Trong (DCC'D'): NE ∩ D'D = R.

Trong (ABCD): QM ∩ BC = F.

Trong (BCC'B'): EP ∩ BB' = X.



Khi đó MRNPXQ là lục giác thiết diện phải dựng.

Dễ thấy $ED = AQ = \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} = D'N \Rightarrow$ R là trung điểm của DD'.

Tương tự X là trung điểm BB'.

Nhận xét:

Ta thấy trong ví dụ này đã đồng thời sử dụng cả hai phương pháp dựng thiết diện: phương pháp tìm giao điểm chung cũng như phương pháp sử dụng tính song song (trong bài này sử dụng các kết quả về hai mặt phẳng song song).

Thí dụ 4. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành. M là điểm trên AC (khác A và khác C). Dựng thiết diện qua M song song với BD và song song với SA.

Giải

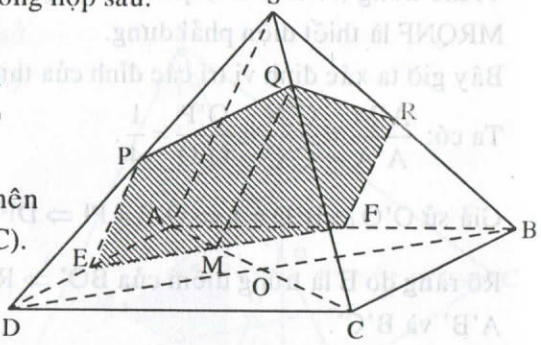
Giả sử AC ∩ BD = O. Xét hai trường hợp sau:

1. Nếu M ∈ (OA) (M ≠ O; M ≠ A)

Vì thiết diện qua M và // BD, nên trong (ABCD) qua M vẽ EF // BD (E ∈ AD, F ∈ AB).

Vì thiết diện qua M và // SA, nên trong (SAC) kẻ MQ // SA (Q ∈ SC).

Vậy (QEF_ là mặt phẳng qua M song song với BD và SA.



Mở rộng nó thành thiết diện như sau:

Vì MQ // SA ⇒ MQ // (SAD) ⇒ (QEF) ∩ (SAD) = EF,

ở đây EP // MQ (tức EP // SA, P ∈ SA)

Vì MQ // SA ⇒ MQ // (SAB) ⇒ (QEF) ∩ (SAD) = FR,

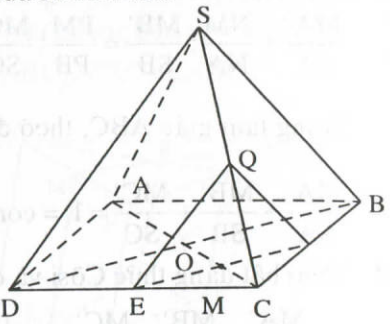
ở đây FR // MQ (tức FR // SA, R ∈ SB)

PQRFE là ngũ giác thiết diện phải dựng.

Dựa vào định lí Talet ta có: $\frac{SQ}{SC} = \frac{AM}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{SP}{SD} = \frac{AF}{AB} = \frac{SR}{SB}$

Vậy 5 đỉnh của thiết diện xác định theo vị trí của M như sau:

$\frac{AE}{AD}=\frac{SP}{SD}=\frac{SQ}{SC}=\frac{SR}{SB}=\frac{AF}{AB}\left(=\frac{AM}{AC}\right)$.



2. Nếu $M \in (OC)$ $(M \neq O; M \neq C)$

Lập luận như trên, ta dựng thiết diện như sau:

Trong (ABCD) kẻ qua M:

EF // BD ($E \in CD$, $F \in BC$).

Trong (SAC) qua M kẻ MQ // SA ($Q \in SC$)

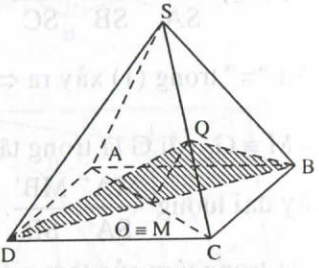
Khi đó QEF là tam giác thiết diện phải dựng

Theo định lí Talet, ta có: $\frac{DE}{DC}=\frac{AM}{AC};\frac{CF}{CB}=\frac{CM}{AC};\frac{SQ}{SC}=\frac{AM}{AC}$.

3. Nếu $M \equiv O$.

Khi đó gọi Q là trung điểm của SC thì MQ // SA.

Thiết diện trong trường hợp này là tam giác QDB.



Loại 3. CÁC BÀI TOÁN VỀ TÍNH SONG SONG CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Thí dụ 1. Cho tứ diện S.ABCD và M là một điểm nằm bên trong tam giác ABC. Qua M kẻ các đường thẳng song song với SA, SB, SC; chúng cắt các mặt tương ứng (SBC), (SAC), (SAB) lần lượt tại A', B', C'.

1. Chứng minh rằng khi M thay đổi thì giá trị của đại lượng: $\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}$ là hằng số.

2. Xác định vị trí của M để đại lượng $\frac{MA'}{SA}.\frac{MB'}{SB}.\frac{MC'}{SC}$ nhận giá trị lớn nhất.

Giải

1. Trong (ABC) giả sử

$AM \cap BC = N$,

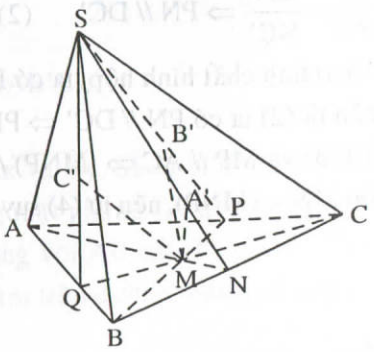
$BM \cap AC = P$,

$CM \cap AB = Q$.

Trong (SAN): kẻ MA' // SA ($A' \in SN$),

(SBP): kẻ MB' // SB ($B' \in SP$)

(SCQ): kẻ MC' // SC ($C' \in SQ$).



Theo định lí Talet, ta có:

$\frac{MA'}{SA}=\frac{NM}{NA};\frac{MB'}{SB}=\frac{PM}{PB};\frac{MC'}{SC}=\frac{QM}{QC}.$

Trong tam giác ABC, theo định lí Xê–va, ta có $\frac{NM}{NA}+\frac{PM}{PB}+\frac{QM}{QC}=1$, vì thế

$\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}=1=\text{const}\Rightarrow$ đpcm.

2. Theo bất đẳng thức Côsi và câu 1, ta có:

$1=\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}\geq 3.\sqrt[3]{\frac{MA'}{SA}.\frac{MB'}{SB}.\frac{MC'}{SC}}$

$\Rightarrow 1\geq 27\frac{MA'}{SA}.\frac{MB'}{SB}.\frac{MC'}{SC}\Rightarrow \frac{MA'}{SA}.\frac{MB'}{SB}.\frac{MC'}{SC}\leq\frac{1}{27}$

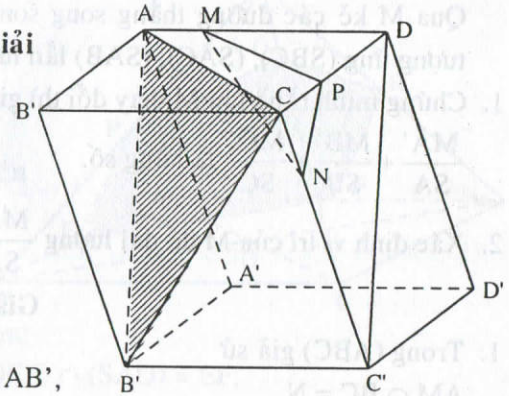
Dấu "=" trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{MA'}{SA}=\frac{MB'}{SB}=\frac{MC'}{SC}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{NM}{NA}=\frac{PM}{PB}=\frac{QM}{QC}=\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow$ M ≡ G, với G là trọng tâm của tam giác ABC.

Vậy đại lượng $\frac{MA'}{SA}.\frac{MB'}{SB}.\frac{MC'}{SC}$ nhận giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{27}$ khi và chỉ khi M là trọng tâm của tam giác ABC.

Thí dụ 2. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AD và CC' sao cho $\frac{AM}{MD}=\frac{CN}{NC'}$. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với mặt phẳng (ACB')

Giải



Vẽ MP // AC (P ∈ CD)

Theo định lí Talet, ta có:

$\frac{AM}{MD}=\frac{CP}{PD}$ (1)

Vì thế từ giả thiết suy ra:

$\frac{CP}{PD}=\frac{CN}{NC'}\Rightarrow$ PN // DC' (2)

Theo tính chất hình hộp, ta có DC' // AB',

nên từ (2) ta có PN // DC' ⇒ PN // AB' (3)

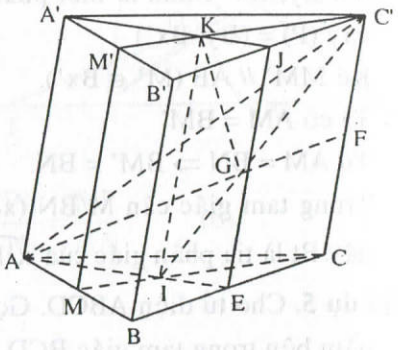
Từ (3) và MP // AC ⇒ (MNP) // (ACB') (4)

Do MN ∈ (MNP), nên từ (4) suy ra MN // (ACB') ⇒ đpcm.

Thí dụ 3. Từ các đỉnh của tam giác ABC, ta kẻ các đoạn thẳng AA', BB', CC' song song cùng chiều, bằng nhau và không nằm trong mặt phẳng của tam giác ABC. Gọi I, G, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACC' và A'B'C'.

1. Chứng minh (IGK) // (BB'C'C).
2. Chứng minh (A'GK) // (AIB').

Giải



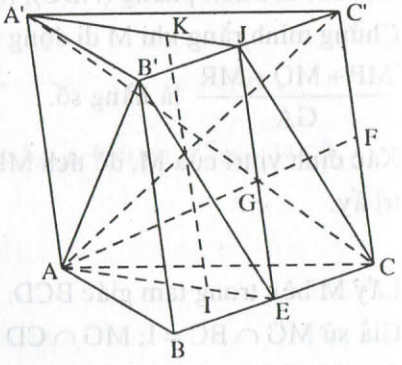
1. Gọi M và M' tương ứng là trung điểm của AB, A'B'.

Theo tính chất trọng tâm tam giác, ta có:

$$\frac{C'K}{C'M}=\frac{CI}{CM}=\frac{2}{3}. \quad (1)$$

Vì (ABC) // (A'B'C'), nên (CMM'C') cắt hai mặt phẳng (ABC) và (A'B'C') theo hai giao tuyến song song $\Rightarrow$ C'M' // CM.

Từ (1) suy ra KI // CC' (2)



Gọi E và F tương ứng là các trung điểm của BC và CC'.

Vì I, G tương ứng là trọng tâm của các tam giác ABC và ACC', nên ta có:

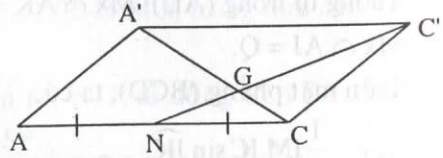
$$\frac{AI}{AE}=\frac{AG}{AF}=\frac{2}{3}.$$

Vậy theo định lí Talet đảo, ta có: IG // EF (3)

Từ (2), (3) suy ra (IKG) // (BCC'B') $\Rightarrow$ đpcm.

2. Do AI $\cap$ BC = E, nên (AIB') chính là (AEB').

Gọi N là trung điểm của AC, thì trong hình bình hành AA'C'C dễ thấy A', G, C thẳng hàng.

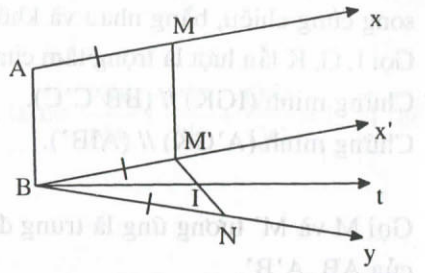


Do vậy (A'KG) chính là (A'CJ) (J là trung điểm của B'C').

Rõ ràng A'J // AE; JC // B'E, do đó (A'JC) // (AB'E), nên ta có (A'KG) // (AIB') $\Rightarrow$ đpcm.

Thí dụ 4. Cho hai nửa đường thẳng chéo nhau Ax và By. M và N là hai điểm di động trên Ax và By sao cho AM = BN. Dựng mặt phẳng (P) qua By và song song với Ax. Đường thẳng qua M và song song với AB cắt (P) tại M'. Gọi I là trung điểm của M'N. Chứng minh rằng I nằm trên đường thẳng cố định.

Giải



Kẻ Bx' // Ax. Khi đó Bx' là đường thẳng cố định. Mặt phẳng xác định bởi By, Bx' chính là mặt phẳng (P), vậy (P) = (By, Bx')

Kẻ MM' // AB (M' ∈ Bx').

Ta có AM = BM'

Từ AM = BN ⇒ BM' = BN.

Trong tam giác cân M'BN (xét trong (P), do IM' = IN ⇒ I nằm trên Bt, ở đây Bt là tia phân giác của $\widehat{x'By}$. Rõ ràng Bt cố định ⇒ đpcm.

Thí dụ 5. Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD và M là điểm nằm bên trong tam giác BCD. Đường thẳng qua M và song song với GA lần lượt cắt các mặt phẳng (ABC), (ACD), (ADB) tại P, Q, R.

1. Chứng minh rằng khi M di động trong tam giác BCD, đại lượng: $\dfrac{MP+MQ+MR}{GA}$ là hằng số.
2. Xác định vị trí của M, để tích MP.MQ.MR đạt giá trị lớn nhất và hãy tính giá trị ấy.

Giải

1. Lấy M bên trong tam giác BCD.

Giả sử MG ∩ BC = I; MG ∩ CD = J; MG ∩ DB = K.

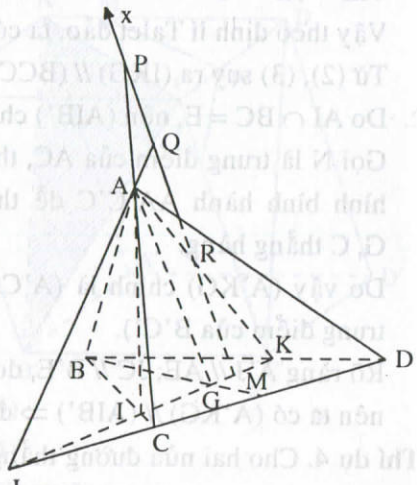
Qua M kẻ Mx // GA

Trong (AIJ): Mx ∩ AI = P

(đó chính là điểm Mx cắt (ABCD).

Tương tự trong (AIJ): Mx ∩ AK = R,

Mx ∩ AJ = Q.



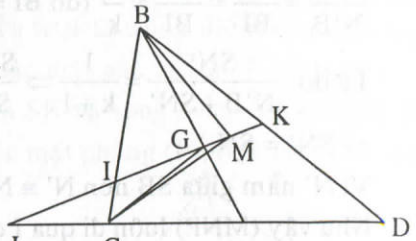
Trên mặt phẳng (BCD), ta có:

$$\frac{IM}{IG}=\frac{\frac{1}{2}IM.IC\sin\widehat{JIC}}{\frac{1}{2}IG.IC\sin\widehat{JIC}}=\frac{S_{MIC}}{S_{GIC}}. \quad (1)$$

Tương tự, ta có $\dfrac{IM}{IG}=\dfrac{S_{MIB}}{S_{GIB}}$. (2)

Từ (1), (2) và theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$\frac{IM}{IG} = \frac{S_{MIC} + S_{MIB}}{S_{GIC} + S_{GIB}} = \frac{S_{MIB}}{S_{GBC}}$. (3)



Do G là trọng tâm tam giác BCD nên ta có:

$S_{GBC} = \frac{1}{3} S_{BCD}$. (4)

Thay (4) vào (3), ta có:

$\frac{IM}{IG} = \frac{3S_{MBC}}{S_{BCD}}$. (5)

Do GA // Mx, nên theo định lí Talet, ta có: $\frac{IM}{IG} = \frac{MP}{GA}$. (6)

Từ (5) và (6) suy ra: $\frac{MP}{GA} = 3\frac{S_{MBC}}{S_{BCD}}$. (7)

Hoàn toàn tương tự, ta có: $\frac{MQ}{GA} = 3\frac{S_{MCD}}{S_{BCD}}$ (8)

$\frac{MR}{GA} = 3\frac{S_{MBD}}{S_{BCD}}$ (9)

Cộng từng vế (7), (8), (9) với lưu ý $S_{MBC} + S_{MCD} + S_{MBD} = S_{BCD}$, ta có:

$\frac{MP + MQ + MR}{GA} = 3 = \text{const} \Rightarrow$ đpcm.

2. Theo bất đẳng thức Cô–si, ta có:

$MP + MQ + MR \geq 3.\sqrt[3]{MP.MQ.MR}$

Áp dụng câu 1, ta có:

$GA \geq \sqrt[3]{MP.MQ.MR} \Rightarrow MP.MQ.MR \leq GA^3$ (10)

Do đó từ (10) ta có max $(MP.MQ.MR) = GA^3$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $MP = MQ = MR \Leftrightarrow$ M là trọng tâm ΔBCD $\Leftrightarrow M \equiv G$.

Thí dụ 6. Cho tứ diện S.ABC với các điểm M, N, P di động trên SA, SB, SC tương ứng sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{1}{k}; \frac{SN}{SB} = \frac{1}{k+1}; \frac{SP}{SC} = \frac{1}{k+2}$ với k = 2, 3...

Chứng minh các giao tuyến của (MNP) với (ABC) khi k thay đổi luôn luôn song song với một đường thẳng cố định.

Giải

Dựng hình bình hành SABI và SBCK.

Giả sử trên (SAB) thì $SB \cap MI = N'$

Theo định lí Talet, ta có:

$\frac{SN'}{N'B} = \frac{SM}{BI} = \frac{SM}{BI} = \frac{1}{k}$ (do BI = SA)

Từ đó: $\frac{SN'}{N'B+SN'} = \frac{1}{k+1} \Rightarrow \frac{SN'}{SB} = \frac{1}{k+1}$

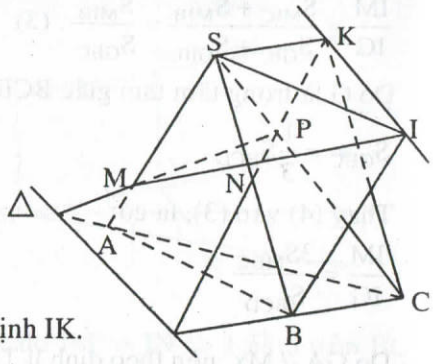
$\Rightarrow$ SN' = SN.

Vì N' nằm giữa SB nên N' $\equiv$ N.

Như vậy (MNP) luôn đi qua I cố định

Tương tự (MNP) luôn đi qua K cố định.

Vậy (MNP) luôn đi qua đường thẳng cố định IK.



Do SK // BC; SI // AB $\Rightarrow$ (KSI) // (ABC).

Lại có (MNP) $\cap$ (SKI) = KI,

(MNP) $\cap$ (ABC) = Δ.

Vì (KSI) // (ABC) $\Rightarrow \Delta$ // KI $\Rightarrow$ đpcm.

Thí dụ 7. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình bình hành tâm O. Một mặt phẳng (P) di động luôn qua A và song song với BD. (P) cắt SB, SC, SD lần lượt tại E, F, G. Mặt phẳng (Q) qua EG và song song với BD cắt SA tại H.

1. Chứng minh EG // BD.
2. Chứng minh HF luôn song song với một đường thẳng cố định.

Giải

1. Do BD // (P) nên (SBD) chứa BD và cắt (P) theo giao tuyến EG, do đó: EG // BD.
2. Rõ ràng E $\in$ (Q) $\cap$ (SBD), và BD // (Q), nên giao tuyến của (Q) với (SBD) qua E và song song với BD, hay đó là đường thẳng EG.

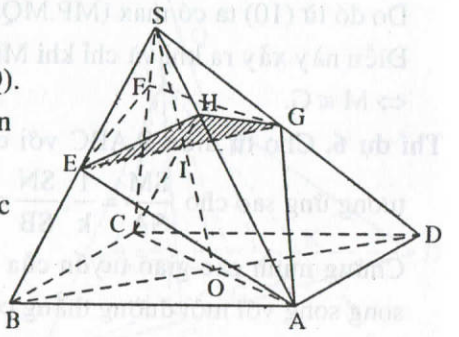
   Giả sử I = EG $\cap$ SO $\Rightarrow$ I $\in$ SO $\subset$ (SAC) $\Rightarrow$ I $\in$ (SAC).

   Mặt khác I $\in$ EG $\subset$ (P) $\Rightarrow$ I $\in$ (P).

   Từ đó suy ra I $\in$ AF = (SAC) $\cap$ (P).

   Tương tự cũng có: I $\in$ CH = (SAC) $\cap$ (Q).

   Vậy I là giao điểm của SO, AF, CH trên (SAC).



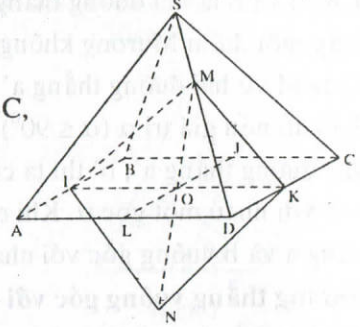
   Áp dụng định lí Xeva trong tam giác SAC ta có:

   $\frac{SF}{FC}.\frac{CO}{OA}.\frac{AN}{HS} = 1$, mà $\frac{CO}{OA} = 1$

   $\Rightarrow \frac{SF}{FC} = \frac{SH}{HA}$.

   Từ đó theo định lí Talet đảo suy ra FH // CA, tức là HF luôn song song với đường thẳng cố định $\Rightarrow$ đpcm.

Thí dụ 8. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD và điểm M ≠ S nằm cùng phía S đối với mặt phẳng (ABCD). Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của AB, BC, CS, DA. Gọi (P), (Q), (R), (I) lần lượt là các mặt phẳng qua SI và song song với MK, qua SI và song song với ML, qua SK và song song với MI, qua SL và song song với MJ. Chứng minh rằng các mặt phẳng (P), (Q), (R), (T) cùng đi qua một đường thẳng.



Giải

Do IJ là đường trung bình trong tam giác ABC,

nên IJ // AC và $IJ = \frac{AC}{2}$.

Tương tự LK // AC và $LK = \frac{AC}{2}$.

Vì thế IJKL là hình bình hành.

Giả sử $IK \cap JL = O$, thì O là trung điểm của IK và JL.

Trong (MIK) vẽ hình bình hành MINK, thì O cũng là trung điểm của MN, do vậy LJMN cũng là hình bình hành nên IN // KM; IM // KN; JN // LM; JM // LN.

Mặt khác MK // (P) và IN // MK, hơn thế do $I \in (P)$ (do (P) qua SI) nên suy ra $IN \in (P) \Rightarrow N \in (P)$.

Lập luận tương tự có $N \in (Q)$; $N \in (R)$, $N \in (T)$

Do $MN \cap (ABCD) = O \Rightarrow$ M và N nằm khác phía đối với (ABCD).

Do S, M nằm cùng phía với (ABCD) $\Rightarrow$ N và S nằm khác phía đối với (ABCD), từ đó suy ra $N \neq S$.

Vậy đường thẳng qua S, N chính là đường thẳng thuộc cả bốn mặt phẳng (P), (Q), (R), (T). Đó là đpcm.

CHƯƠNG 2.
QUAN HỆ VUÔNG GÓC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

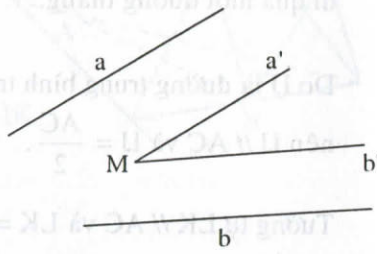
1. Góc giữa hai đường thẳng trong không gian

Cho a và b là hai đường thẳng trong không gian.

Lấy một điểm M trong không gian.

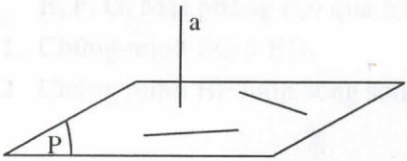
Qua M vẽ hai đường thẳng a' // a và b' // b

Khi đó nếu giá trị α ($\alpha \le 90^0$) là góc tạo bởi hai đường thẳng a', b' thì ta cũng nói a và b tạo với nhau một góc α. Khi $\alpha = 90^0$, ta nói rằng a và b vuông góc với nhau.

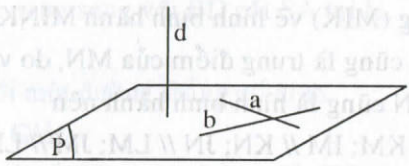


2. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

– Đường thẳng a gọi là vuông góc với mặt phẳng (P), nếu a vuông góc với mọi đường thẳng của (P) (hình 1).



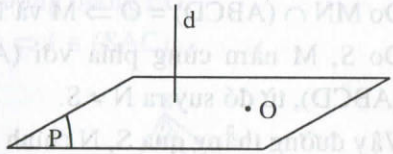
Hình 1



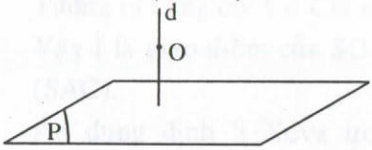
Hình 2

– Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P), thì d vuông góc với (P) (hình 2).

– Qua một điểm O cho trước có duy nhất một mặt phẳng (P) chứa O vuông góc với một đường thẳng d cho trước. (hình 3)



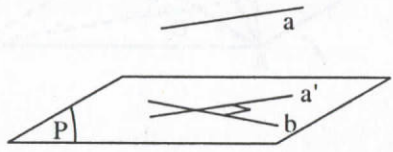
Hình 3



Hình 4

– Qua một điểm O cho trước có duy nhất một đường thẳng d đi qua O vuông góc với một mặt phẳng (P) cho trước (hình 4).

– Định lí ba đường vuông góc: Cho đường thẳng a có hình chiếu a' trên mặt phẳng (P). Khi ấy đường thẳng b nằm trong (P) vuông góc với a khi và chỉ khi nó vuông góc với a' (hình 5).

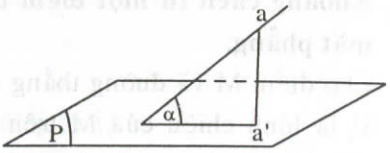


Hình 5

– Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

* Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói góc giữa a và (P) bằng 90^0.

* Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta gọi góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) là góc giữa a và (P) (hình 6).

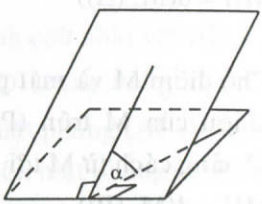


Hình 6

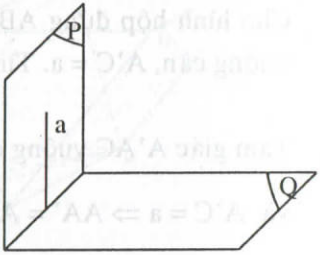
3. Mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng

- Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng ấy (hình 7)
- Hai mặt phẳng gọi là vuông góc nếu góc giữa chúng bằng 90^0.

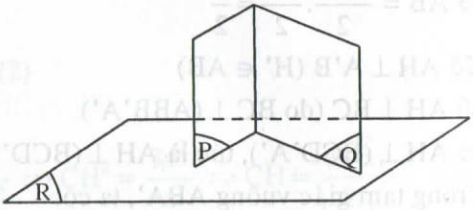
  Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi một trong chúng chứa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng còn lại.
- Nếu (P) ⊥ (Q), thì bất cứ đường thẳng a nào thuộc (P) mà vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) sẽ vuông góc với (Q) (hình 8).
- Hai mặt phẳng (P), (Q) cắt nhau cùng vuông góc với (R), thì giao tuyến của (P) và (Q) sẽ vuông góc với (R) (hình 9)



Hình 7



Hình 8

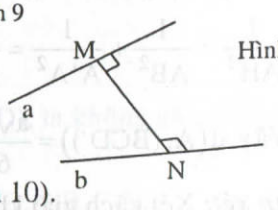


Hình 9

4. Khoảng cách

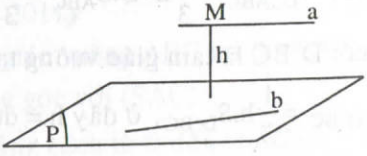
- Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Khi đó nếu M ∈ a, N ∈ b và MN ⊥ a, MN ⊥ b, thì MN gọi là đường vuông góc chung của a và b.

  Lúc đó MN chính là khoảng cách giữa a và b (hình 10).



Hình 10

- Nếu b nằm trong (P) và a // b và a // (P), thì d(a; b) = d(a; (P)).
- Nếu a // (P) và M là điểm tuỳ ý nằm trên a, thì d(a; (P)) = d(M; (P)). Ở đây d(a; (P)), d(M; (P)), lần lượt là khoảng cách giữa a và (P), giữa M và (P) (hình 11).



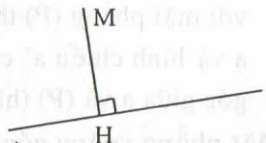
Hình 11

II. CÁC BÀI TOÁN VỀ KHOẢNG CÁCH

A. Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng, hoặc từ một điểm tới mặt phẳng.

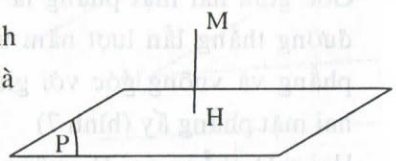
Cho điểm M và đường thẳng Δ ($M \notin \Delta$). Gọi H là hình chiếu của M trên Δ. Khi đó MH chính là khoảng cách từ M tới đường thẳng Δ.

$MH = d(M, (\Delta))$



Cho điểm M và mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu của M trên (P). Khi đó MH chính là khoảng cách từ M tới mặt phẳng (P).

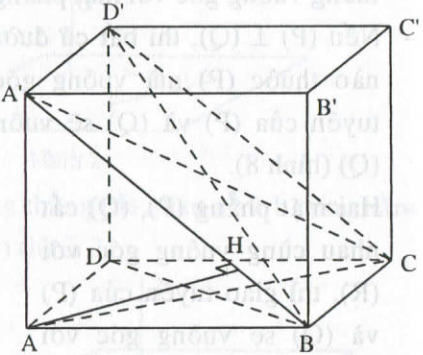
$MH = d(M, (P))$



Thí dụ 1. (Đề thi tuyển sinh đại học khối D – 2012)

Cho hình hộp đứng ABCDA'B'C'D' có đáy là hình vuông, tam giác A'AC vuông cân, A'C = a. Tìm khoảng cách từ A đến (BCD') theo a.

Giải



Tam giác A'AC vuông cân tại A

và $A'C = a \Rightarrow AA' = AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow AB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a}{2}$

Kẻ $AH \perp A'B$ ($H' \in AB$)

Vì $AH \perp BC$ (do $BC \perp (ABB'A')$

$\Rightarrow AH \perp (BCD'A')$, tức là $AH \perp (BCD')$

Trong tam giác vuông ABA', ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{A'A^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{6}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Vậy $d\big(A,(BCD')\big) = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Nhận xét: Xét cách giải khác sau đây (bằng phương pháp thể tích)

Ta có: $V_{D'.ABC} = \dfrac{1}{3}D'D.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{1}{2}\dfrac{a}{2}\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{48}$. (1)

Ta có: D'BC là tam giác vuông tại B, nên

$V_{A.D'BC} = \dfrac{1}{3}h.S_{D'BC}$, ở đây $h = d(A, (BCD'))$.

Ta có D'BC là tam giác vuông tại C, nên

$$S_{D'BC} = \frac{1}{2}BC.D'C = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}\sqrt{D'D^2 + DC^2} = \frac{a}{4}\sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$$

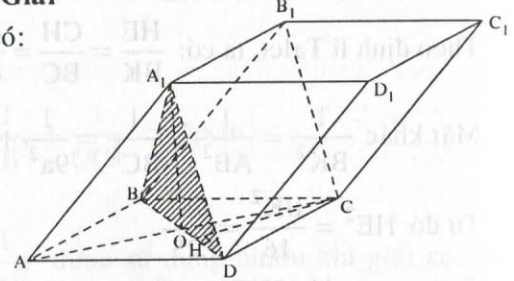
Từ đó suy ra $h = d(A, (BCD')) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Các bạn hãy so sánh tính hiệu quả của hai phương pháp.

Thí dụ 2. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2011)

Cho hình lăng trụ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A_1 trên (ABCD) trùng với giao điểm O của hai đường chéo AC, BD của đáy. Biết rằng hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và (ABCD) tạo với nhau góc 60^0. Tìm khoảng cách từ B_1 đến mặt phẳng (A_1BD).

Giải



Do tính chất của hình hộp, nên ta có:

A_1B_1CD là hình bình hành

$\Rightarrow B_1C // A_1D \Rightarrow B_1C // (A_1BD)$.

Vì thế

$d(B_1, (A_1BD)) = d(C, (A_1BD))$. (1)

Ta có: $A_1O \perp (ABCD)$

$\Rightarrow (BA_1D) \perp (ABCD)$.

Vì $(BA_1D) \cap (ABCD) = BD$, cho nên nếu kẻ $CH \perp BD$ $(H \in BD)$

$\Rightarrow CH \perp (A_1BD)$.

Từ đó đi đến $d(C, A_1BD)) = CH$ (2)

Trong tam giác vuông BCD, ta có:

$$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow CH^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \quad (3)$$

Từ (1) (2) (3) suy ra $d(B_1, (A_1BD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Nhận xét: Trong việc tính khoảng cách từ B_1 đến (A_1BD), ta không cần sử dụng đến giả thiết: $((ADD_1), (ABCD)) = 60^0$. (*)

Giả thiết này dùng để tính thể tích của lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

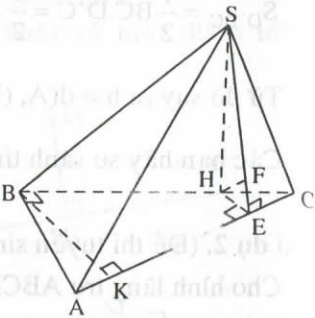
Việc tính thể tích này là phần đầu trong đề thi nói trên.

Thí dụ 3. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2011)

Cho hình chóp tam giác S.ABC đáy là tam giác vuông ABC tại B và $AB = 3a$, $BC = 4a$. Biết rằng mặt phẳng (SBC) vuông góc với (SAC).

Giả sử $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^0$. Tìm khoảng cách từ B đến (SAC).

Giải



Ta có (SBC) ⊥ (ABC) vì (SBC) ∩ (ABC) = BC,

do đó nếu kẻ SH ⊥ BC (H ∈ BC), thì SH ⊥ (ABC).

Kẻ HE ⊥ AC (E ∈ AC).

Theo định lí ba đường vuông góc, ta có: SE ⊥ AC.

Từ đó suy ra AC ⊥ (SHE) ⇒ (SAC) ⊥ (SHE).

Lại có (SAC) ∩ (SHE) = SE, nên nếu kẻ HF ⊥ SE

⇒ HF ⊥ (SAC) ⇒ d(H, (SAC)) = HF. (1)

Ta có $SH = SB.\sin\widehat{SBH} = SB.\sin 30^0 = a\sqrt{3}$,

$$BH = SB.\cos 30^0 = 2a\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 3a \Rightarrow CH = a.$$

Kẻ BK ⊥ AC ⇒ BK // HE.

Theo định lí Talet, ta có: $\frac{HE}{BK} = \frac{CH}{BC} = \frac{a}{4a} = \frac{1}{4}$.

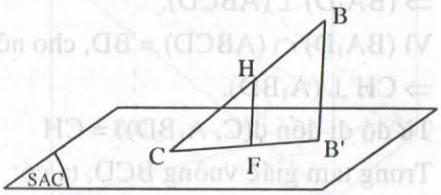
Mặt khác $\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{16a^2} \Rightarrow BK^2 = \frac{144a^2}{25}$.

Từ đó $HE^2 = \frac{BK^2}{16} = \frac{9a^2}{25}$.

Trong tam giác SHE, ta có:

$$\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HE^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{25}{9a^2}$$

$$\Rightarrow HF = \frac{3a}{2\sqrt{7}} \qquad (2)$$



Kẻ BB' ⊥ (SAC). Do $\frac{BB'}{HF} = \frac{BC}{HC} = 4$

$$\Rightarrow BB' = 4HF = \frac{6a}{\sqrt{7}}. \qquad (3)$$

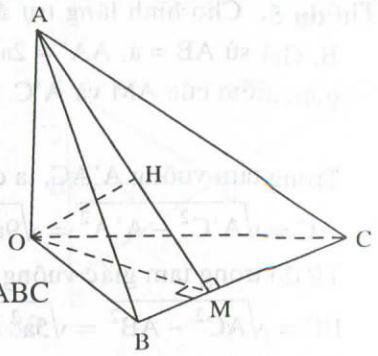
Từ (1), (3) suy ra $d(B; (SAC)) = BB' = \frac{6a\sqrt{7}}{7}$.

Thí dụ 4. (Bài toán cơ bản)

Cho tứ diện OABC, trong đó OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Kẻ OH ⊥ (ABC).

1. Chứng minh H là trực tâm tam giác ABC.
2. Chứng minh hệ thức: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Giải



1. Kẻ $OH \perp (ABC)$

   $AH \cap BC = M$

   Ta có $OH \perp (ABC)$ nên $OH \perp BC$.

   Vì $OA \perp (OBC)$ (do $OA \perp OB$, $OA \perp OC$)

   $\Rightarrow OA \perp BC$

   Vậy $BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp AM$.

   Tương tự $BH \perp AC \Rightarrow H$ là trực tâm tam giác ABC

2. Xét trong tam giác vuông AOM, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OM^2}. \qquad (1)$$

Trong tam giác vuông BOC, do $OM \perp BC$ nên có:

$$\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}. \qquad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow$ đpcm.

Nhận xét:

1. Hệ thức $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ được sử dụng nhiều khi giải các bài toán về tìm khoảng cách.

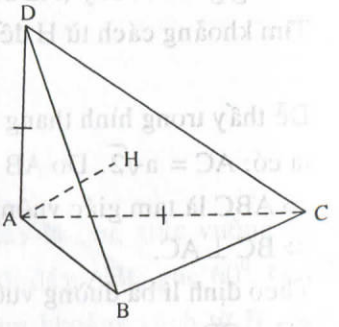
2. Xét thí dụ sau (Đề thi Đại học khối D)

   Cho tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC).

   Giả sử $AC = AD = 4cm$, $AB = 3cm$, $BC = 5cm$.

   Tìm khoảng cách từ A đến (BCD).

Giải



Vì $AB = 3cm$, $AC = 4cm$, $BC = 5cm$

$\Rightarrow ABC$ là tam giác vuông tại A.

Như vậy do $AD \perp (ABC)$

$\Rightarrow AD \perp AB$; $AD \perp AC$.

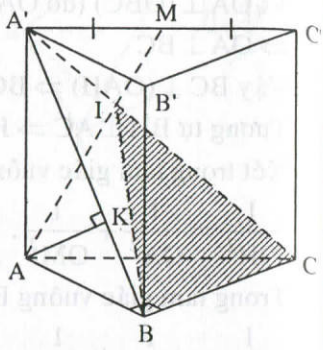
Từ đó áp dụng kết quả trên ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{6\sqrt{34}}{17}.$$

Thí dụ 5. Cho hình lăng trụ đứng ABCA'B'C'đáy là tam giác ABC vuông tại B. Giả sử AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a. Gọi M là trung điểm của A'C' và I là giao điểm của AM và A'C. Tìm khoảng cách từ A đến mặt phẳng IBC.

Giải



Trong tam vuông A'AC, ta có:

$AC = \sqrt{A'C^2 - A'A^2} = \sqrt{9a^2 - 4a^2} = a\sqrt{5}$.

Từ đó trong tam giác vuông ABC, ta có:

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a$.

Nhận thấy (IBC) = (A'BC)

Theo định lí ba đường vuông góc, ta có BC ⊥ A'B (do BC ⊥ AB). Từ đó kết hợp với BC ⊥ AA' suy ra BC ⊥ (A'AB) ⇒ (A'BC) ⊥ (A'AB).

Vì (A'BC) ∩ (A'AB) = A'B, nên nếu kẻ AK ⊥ A'B (K ∈ A'B)

⇒ AK ⊥ (A'BC)

⇒ d(A; (A'BC) = AK. (1)

Trong tam giác vuông A'AB, ta có:

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2}$$

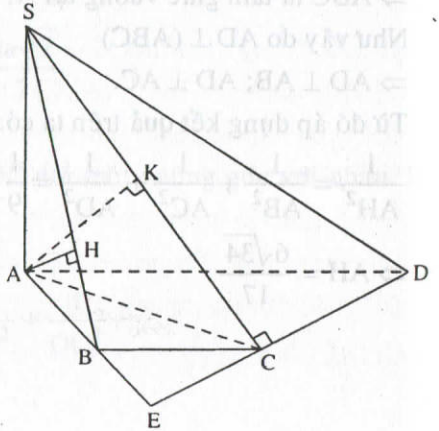
$$\Rightarrow AK^2 = \frac{4a^2}{5} \Rightarrow AK = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Từ (1) suy ra $d(A, (ICB)) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Thí dụ 6. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông, trong đó $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^0$; BA = BC = a; AD = 2a. Giả sử SA = $a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy (ABCD). Gọi H là hình chiếu của A trên SB.

Tìm khoảng cách từ H đến (SCD).

Giải



Dễ thấy trong hình thang vuông ABCD, ta có: AC = $a\sqrt{2}$. Do AB = 2a

⇒ ABC là tam giác vuông cân tại C

⇒ BC ⊥ AC.

Theo định lí ba đường vuông góc ta có: SC ⊥ CD.

Giả sử DC ∩ AB = E.

Ta có B là trung điểm của AE.

Vì $BC \perp (SAC) \Rightarrow (SDC) \perp (SAC)$.

Do $(SDC) \cap (SAC) = SC$, nên nếu kẻ

$AK \perp SC \Rightarrow AK \perp (SCD)$

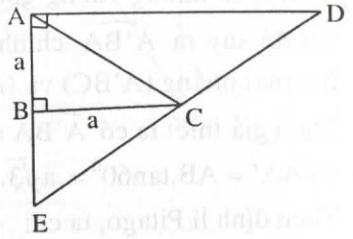
$\Rightarrow d(A, (SCD)) = AK.$ (1)

Ta có $AB \cap (SCD) = E$

$\Rightarrow d(A, (SCD)) = 2d(B, (SCD))$ (2)

(do $AB = BE$)

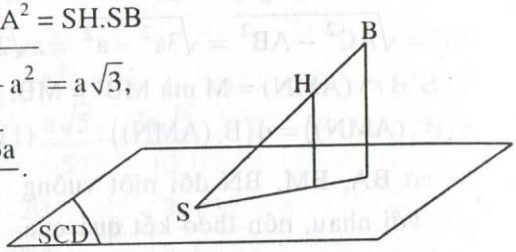
Kẻ $AH \perp SB$.



Ta có trong tam giác vuông SAB: $SA^2 = SH.SB$

Vì $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2} = a\sqrt{3}$,

nên $SH = \dfrac{SA^2}{SB} = \dfrac{2a^2}{a\sqrt{3}} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$.



Theo định lí Talet, ta có:

$$\frac{d(B,(SCD))}{d(H,(SCD))} = \frac{BS}{HS} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{2} \Rightarrow d\left(H,(SCD)\right) = \frac{2}{3}d\left(B,(SCD)\right). \quad (3)$$

Từ (1) (2) (3) suy ra

$$d\left(H,(SCD)\right) = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}d\left(A,(SCD)\right) = \frac{1}{3}d\left(A,(SCD)\right) = \frac{1}{3}AK. \quad (4)$$

$$\text{Do } SA = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AK = a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = a. \quad (5)$$

Từ (4) (5) suy ra $d\left(H,(SCD)\right) = \dfrac{a}{3}$.

Nhận xét:

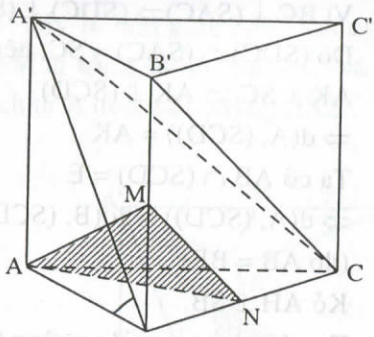
Trong thí dụ này để tính $d\left(H,(SCD)\right)$ ta đã hai lần thông qua tính khoảng cách từ điểm khác đến (SCD).

Trước hết $d\left(H,(SCD)\right) = \dfrac{2}{3}d\left(B,(SCD)\right)$

Sau đó sử dụng $d\left(B,(SCD)\right) = \dfrac{1}{2}d\left(A,(SCD)\right)$

Thí dụ 7. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông tại B có $AB = a$; $AC = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng A'BC tạo với đáy ABC góc 60^0. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của BB' và BC. Tìm khoảng cách từ B' đến mặt phẳng AMN.

Giải



Ta có A'A ⊥ (ABC), AB ⊥ BC nên theo định lí ba đường vuông góc có A'B ⊥ BC.

Từ đó suy ra $\widehat{A'BA}$ chính là góc tạo bởi hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC).

Theo giả thiết ta có $\widehat{A'BA} = 60^0$

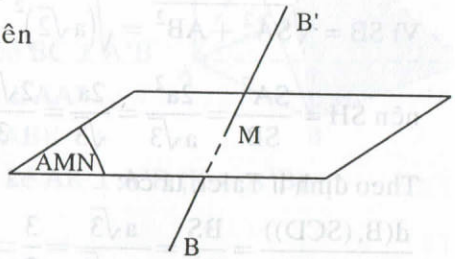
$\Rightarrow AA' = AB.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$.

Theo định lí Pitago, ta có:

$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

Vì B'B ∩ (AMN) = M mà MB' = MB, nên

$d(B', (AMN)) = d(B, (AMN))$. (1)



Ta có BA, BM, BN đôi một vuông góc với nhau, nên theo kết quả của ví dụ 4 (ví dụ cơ bản), ta có nếu gọi h = d(B, (AMN)) thì:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2} + \frac{2}{a^2} \quad \left(\text{do } BM = \frac{a\sqrt{3}}{2};\ BN = \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$$

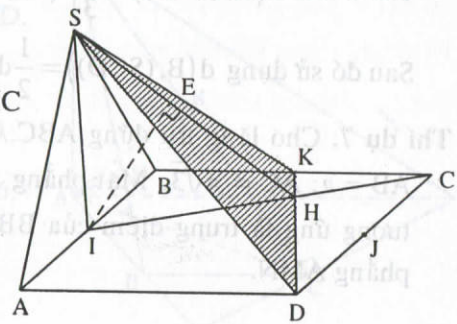
$$= \frac{13}{3a^2}$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{13} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{39}}{13}. \quad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra $d(B', (AMN)) = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Thí dụ 8. Cho hình vuông ABCD và tam giác đều SAB cạnh a ở trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, BC. Tìm khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SDK).

Giải



Do SI ⊥ AB ⇒ SI ⊥ (ABCD).

Trong hình vuông ABCD dễ thấy KD ⊥ IC và giả sử KD ∩ IC = H.

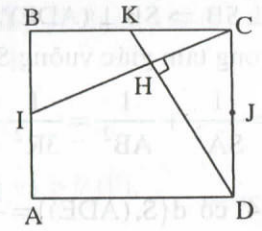
Ta có KD ⊥ SI (do SI ⊥ (ABCD), từ đó suy ra KD ⊥ (SIC) ⇒ (SKD) ⊥ (SIC).

Vì (SKD) ∩ (SIC) = SH, nên nếu kẻ IE ⊥ SH (E ∈ SH) thì IE ⊥ (SDK)

$\Rightarrow d(I,(SDK)) = IE.$ (1)

Trong tam giác vuông SIH, ta có:

$$\frac{1}{IE^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IH^2}.$$ (2)



Dễ thấy $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong hình vuông ABCD, ta có: $IC = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Lại có $\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{KC^2} + \frac{1}{CD^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{a^2}$.

$\Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow IH = IC - CH = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a\sqrt{5}}{5} = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$.

Từ đó thay vào (2) và có $\frac{1}{IE^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{20}{9a^2} \Rightarrow IE = \frac{3a\sqrt{32}}{32}$.

Vậy $d\big(I,(SDK)\big) = \frac{3a\sqrt{32}}{32}$.

Thí dụ 9. Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Trên đường thẳng d vuông góc với (P) tại A lấy điểm S và $SA = R\sqrt{3}$. M là một điểm trên đường tâm O, sao cho góc giữa SM và (P) bằng 60^0. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SM.

Tìm khoảng cách từ S đến (ADE) và từ A đến (SBM).

Giải

Theo giả thiết ta có $\widehat{SMA} = 60^0$.

Ta có $\widehat{AMB} = 90^0$, nên theo định lí ba đường vuông góc suy ra $SM \perp MB$.

Từ đó $BM \perp (SAM) \Rightarrow (SBM) \perp (SAM)$.

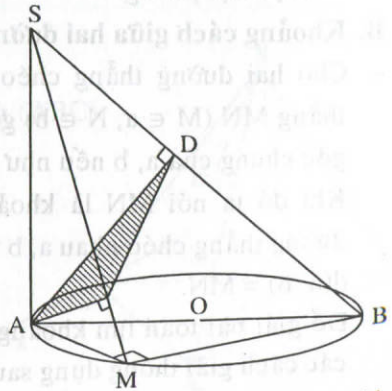
Vì $(SBM) \cap (SAM) = SM$, mà $AE \perp SM \Rightarrow AE \perp (SMB)$

$\Rightarrow d(A,(SBM)) = AE.$ (1)

Ta có $AM = SA.\cot 60^0 = R\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{3} = R.$

Từ đó

$AE = AM.\sin\widehat{AME} = R.\sin 60^0 = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$ (2)



Từ (1) (2) suy ra $d(A,(SMB)) = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $AE \perp (SMB) \Rightarrow AE \perp SB$.

Vì $AD \perp SB \Rightarrow SB \perp (ADE) \Rightarrow d(S, (ADE)) = SD$. (3)

Ta có trong tam giác vuông SAB

$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{3R^2} + \frac{1}{4R^2} = \frac{7}{12R^2} \Rightarrow AD = \frac{R\sqrt{12}}{\sqrt{7}} = \frac{2R\sqrt{21}}{7} \quad (4)$$

Từ (3) (4) có $d\big(S,(ADE)\big) = \frac{2R\sqrt{21}}{7}$.

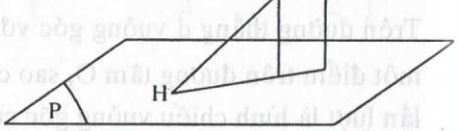
Qua các thí dụ trên ta rút ra được kết luận sau đây:

* Để giải bài toán tìm khoảng cách từ một điểm M đến một mặt phẳng (P) ta thường tiến hành theo các bước sau:

- Tìm một mặt phẳng (Q) chứa M sao cho $(Q) \perp (P)$
- Tìm giao tuyến Δ của (P) và (Q)
- Trong (Q), kẻ $MH \perp \Delta$. Khi đó: MH = d(M; (P))

* Cần lưu ý thêm các điều sau đây:

- Đôi khi việc tính d(M, (P)) thường thay bằng việc tính d(N, (P)), trong đó dĩ nhiên việc tính d(N, (P)) là dễ hơn so với việc tính d(M, (P)), ngoài ra biết được tỉ số: $k = \frac{NH}{MH}$, ở đây $MN \cap (P) = H$.

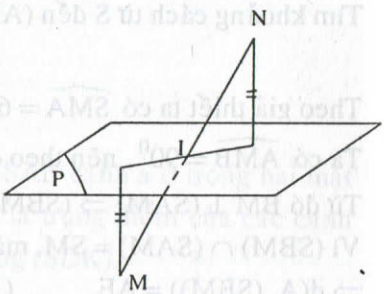


Khi đó $\frac{d\big(N,(P)\big)}{d\big(M,(P)\big)} = k$.

- Nói riêng ta sử dụng kết quả sau:

  Nếu $MN \cap (P) = I$ và I là trung điểm của MN, thì

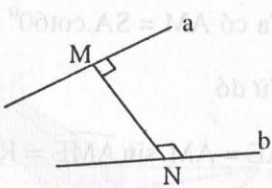
  d(M, (P)) = d(N, (P))



- Việc dùng kết quả của bài toán cơ bản (thí dụ 4) cũng hay sử dụng để tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

B. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

- Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b. Đoạn thẳng MN ($M \in a$, $N \in b$) gọi là đường vuông góc chung của a, b nếu như $MN \perp a$, $MN \perp b$. Khi đó ta nói MN là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a, b và kí hiệu: d(a; b) = MN.



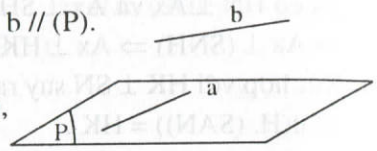
- Để giải bài toán tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a, b ta có các cách giải thông dụng sau đây:

Cách 1: Trực tiếp dùng định nghĩa. Cách này sử dụng khi ta có thể xác định được đường vuông góc chung MN của a và b.

Khi đó d(a; b) = MN.

Cách 2:

Giả sử xác định được mặt phẳng (P) chứa a và b // (P).



Khi đó d(a; b) = d(b; (P))

Chú ý rằng vì b // (P) nên d(b; (P)) = d(M, (P)),

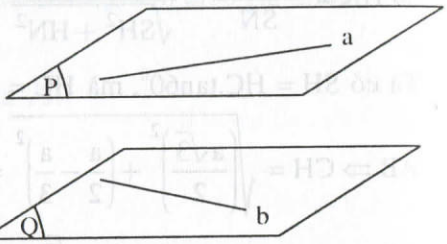
ở đây M là điểm tùy ý $\in$ b.

Trong mỗi bài toán cụ thể ta sẽ xác định điểm M sao cho việc tính d(M, (P)) là đơn giản nhất có thể được.

Cách 3:

Giả sử xác định được (P) chứa a;

(Q) chứa b sao cho (P) // (Q).



Khi đó d(a; b) = d((P); (Q))

Vì (P) // (Q) nên

d((P); (Q)) = d(M, (Q)) = d(N, (P)),

ở đây M là điểm tùy ý của (P), N là điểm tùy ý của (Q).

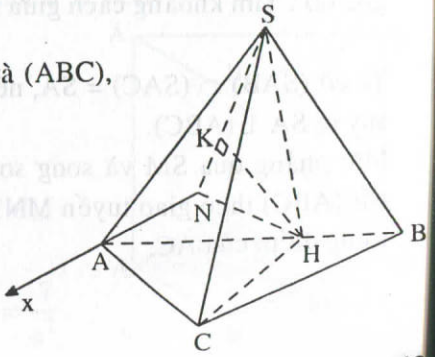
Việc xác định M, N được lựa chọn thích hợp trong mỗi bài toán cụ thể.

Bài toán tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau thường xuyên xuất hiện trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng trong những năm gần đây.

Thí dụ 1. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2012)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho HA = 2HB. Góc giữa đường thẳng SC và (ABC) bằng 60^0. Tính khoảng cách giữa SA và BC theo a.

Giải



Ta có: $\widehat{SCH}$ là góc giữa đường thẳng SC và (ABC),

nên $\widehat{SCH} = 60^0$.

Kẻ Ax // BC. Kẻ HN $\perp$ Ax và HK $\perp$ SN.

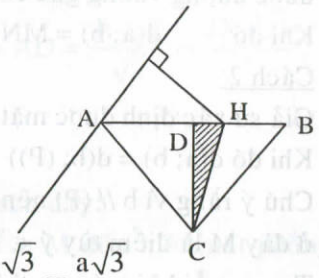
Ta có: BC // (SAN), nên

d(BC, SA) = d(BC; (SAN))

= d(B; (SAN)). (1)

Từ $HA = 2HB \Rightarrow BA = \frac{3}{2}HA$

$\Rightarrow d(B, (SAN)) = \frac{3}{2}d(H; (SAN))$. (2)



Ta có $HN \perp Ax$ và $Ax \perp SH$ (do $SH \perp (ABC)$)

$\Rightarrow Ax \perp (SNH) \Rightarrow Ax \perp HK$.

Kết hợp với $HK \perp SN$ suy ra $HK \perp (SAN)$

$\Rightarrow d(H, (SAN)) = HK$. (3)

Ta có $AH = \frac{2}{3}AB = \frac{2a}{3}$; $HN = AH.\sin 60^0 = \frac{2a}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Trong tam giác vuông SNH, ta có $HK.SN = SH.NH$

$\Rightarrow HK = \frac{SH.NH}{SN} = \frac{SH.NH}{\sqrt{SH^2 + HN^2}}$. (4)

Ta có $SH = HC.\tan 60^0$, mà $HC = \sqrt{CD^2 + HD^2}$, ở đây D là trung điểm của AB $\Rightarrow CH = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$.

Thay lại vào (4) có $HK = \frac{\frac{a\sqrt{7}}{3}.\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{7a^2}{3}}} = \frac{a\sqrt{42}}{12}$. (5)

Từ (1) (2) (4) (5) đi đến $d(BC, SA) = \frac{a\sqrt{42}}{8}$.

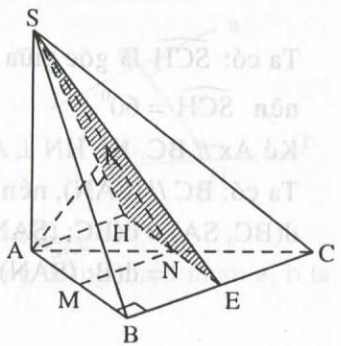
Thí dụ 2. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A - 2011)

Cho hình chóp tam giác S.ABC, đáy là tam giác vuông cân tại B, trong đó AB = BC = 2a. Giả sử hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy (ABC). Gọi M là trung điểm của AB. Mặt phẳng qua SM và song song với BC cắt AC tại N. Biết rằng hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) tạo với nhau góc 60^0. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

Giải

Ta có $(SAB) \cap (SAC) = SA$, nên từ giả thiết suy ra $SA \perp (ABC)$.

Mặt phẳng qua SM và song song với BC sẽ cắt (ABC) theo giao tuyến MN // BC $\Rightarrow$ N là trung điểm của AC.



Qua A kẻ đường song song với BC, qua N kẻ đường song song với AB, chúng cắt nhau ở H, và cắt BC ở E.

Ta có AB // HE và do SN ∈ (SHE), nên d(AB, SN) = d(AB, (SHE))
= d(A, (SHE)). (1)

Ta có SA ⊥ HE (do SA ⊥ (ABC) mà HE ∈ (ABC)),

Lại có HE ⊥ AH (theo cách dựng),

Từ đó suy ra HE ⊥ (SAH) ⇒ (SAH) ⊥ (SHE).

Vì (SAH) ∩ (SHE) = SH, nên nếu kẻ AK ⊥ SH (K ∈ SH), thì AK ⊥ (SHE).

Do đó d(A, (SHE)) = AK . (2)

Vì BC ⊥ AB, nên theo định lí ba đường vuông góc ta có SB ⊥ BC, từ đó $\widehat{SBA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC), nên theo giả thiết: $\widehat{SBA} = 60^0$.

Ta có $SA = AB.\tan\widehat{SBA} = 2a.\tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$.

Dễ thấy $AH = BE = \dfrac{BC}{2} = a$.

Trong tam giác vuông SAH, ta có:

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{12a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{13}{12a^2} \Rightarrow AK^2 = \frac{12a^2}{13} \Rightarrow AK = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

Vậy $d(AB, SN) = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Thí dụ 3. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' đáy là tam giác vuông có BA = BC = a, cạnh bên AA' = $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và B'C.

Giải

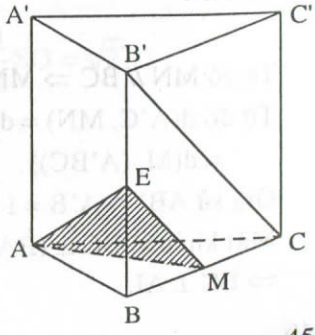
Gọi E là trung điểm của BB'. Khi đó ta có B'C // EM ⇒ B'C // (AME)
⇒ d(AM, B'C) = d(B'C, (AEM)) (1)

Do B'B ∩ (AEM) = E mà E là trung điểm của B'B, nên
d(B', (AEM)) = d(B, (AEM)) (2)

Từ B'C // (AEM) và từ (1) (2) suy ra
d(AM, B'C) = d(B, (AEM)) (3)

Do BA, BE, BM đôi một vuông góc với nhau nên nếu gọi h là khoảng cách từ B đến (AEM), thì ta có:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BE^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{7}{a^2}.$$



$\Rightarrow h = \frac{a\sqrt{7}}{7}$ (4)

Từ (3) (4) đi đến $d(AM, B'C) = \frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Thí dụ 4. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B)

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh đáy bằng a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của AE và BC. Tìm khoảng cách theo a giữa hai đường thẳng MN, AC.

Giải

Gọi P là trung điểm của AB. Ta có:

MP // EB. (1)

Vì DASE là hình bình hành nên

SE // DA và SE = DA ⇒

SE // BC và SE = BC ⇒

SEBC là hình bình hành

⇒ EB // SC. (2)

Từ (1) (2) suy ra MN // SC. (3)

Lại có NP // AC. (4)

Từ (3) (4) ta có (MNP) // (SAC).

Từ đó ta có: d(MN, AC) = d((MNP), (SAC)) (5)

Giả sử $AC \cap DB = O$, $BD \cap NP = H$.

Vì $DB \perp AC$; $BD \perp SO \Rightarrow SB \perp (SAC)$.

Từ đó suy ra d((MNP), (SAC)) = OH. (6)

Do $OH = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{4}BD = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, nên từ (5) (6) suy ra $d(MN, AC) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Thí dụ 5. Cho hình lập phương ABCDA'B'C"D' cạnh bằng 1. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng A'C và MN.

Giải

Ta có MN // BC ⇒ MN // (A'BC).

Từ đó d(A'C, MN) = d(MN, (A'BC))

= d(M, (A'BC)). (1)

Giả sử $AB' \cap A'B = I \Rightarrow AI \perp A'B$.

Mặt khác vì $BC \perp (BAA'B')$

$\Rightarrow BC \perp AI$.

Từ đó $AI \perp (A'BC) \Rightarrow d(A; (A'BC)) = AI.$ (2)

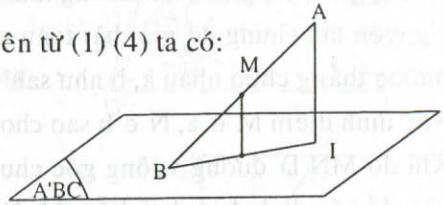
Ta có $AM \cap (A'BC) = B$ và M là trung điểm của AB, nên

$d(A, A'BC)) = 2d(M, (A'BC))$. (3)

Từ (2) (3) suy ra $d(M,(A'BC)) = \frac{1}{2}d(A,(A'BC)) = \frac{1}{2}AI$. (4)

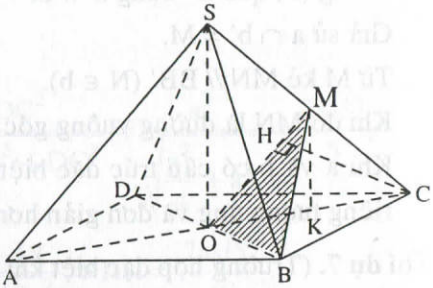
Vì $AI = \frac{1}{2}A'B = \frac{1}{2}A'B\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, nên từ (1) (4) ta có:

$d(A'C, MN) = \frac{\sqrt{2}}{4}$.



Thí dụ 6. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD đáy là hình thoi cạnh $AB = \sqrt{5}$, đường chéo $AC = 4$; $SO = 2\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy ABCD, ở đây O là giao điểm của AC và BD. Gọi M là trung điểm của cạnh SC. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM.

Giải



Ta có $MO // SA \Rightarrow SA // (MOB)$

$\Rightarrow d(SA, BM) = d(SA, (MOB))$

$= d(S, (MOB))$. (1)

Vì $SC \cap (MOB) = M$,

mà M là trung điểm của SC nên

$d(S, (MOB)) = d(C, (MOB))$. (2)

Ta có $BO \perp AC$ (do ABCD là hình thoi, $BO \perp SO$ (do $SO \perp (ABCD)$)

$\Rightarrow BO \perp (SOC)$ tức $BO \perp (MOC) \Rightarrow (MOB) \perp (MOC)$.

Vì $(MBO) \cap (MOC) = OM$, do đó nếu kẻ $CH \perp OM$ ($H \in OM$) thì

$CH \perp (BOM) \Rightarrow d(C, (MOB)) = CH$ (3)

Ta có: $OM = \frac{SA}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{SO^2 + OA^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{3}$

$MC = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}SA = \sqrt{3} \Rightarrow$ OMC là tam giác cân OMC đỉnh M.

Kẻ $MK \perp OC \Rightarrow$ K là trung điểm của OC nên $MK = \frac{1}{2}SO = \sqrt{2}$.

Trong tam giác MOC, ta có $MK.OC = MO.CH$

$\Rightarrow CH = \frac{MK.OC}{MO} = \frac{\sqrt{2}.2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ (4)

Từ (1) (2) (3) (4) đi đến $d(SA, BM) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Nhận xét: Trong các thí dụ trên, để tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a, b, ta đều sử dụng cách 2 hoặc cách 3.

Dưới đây sẽ trình bày các thí dụ áp dụng cách 1 để tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. Cách này dựa vào việc xác định trực tiếp đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau.

Nguyên tắc chung để giải bài toán xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a, b như sau:

Xác định điểm $M \in a$, $N \in b$ sao cho $MN \perp a$, $MN \perp b$.

Khi đó MN là đường vuông góc chung của a và b. Vấn đề là ở chỗ làm thế nào để xác định được hai điểm M, N?

Phương pháp tổng quát ta giải như sau:

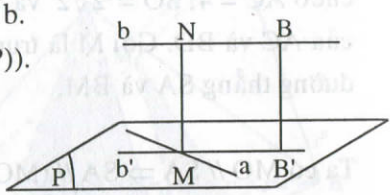
Dựng mặt phẳng (P) chứa a và song song với b.

Lấy một điểm B trên b kẻ $BB' \perp (P)$ ($B' \in (P)$).

Trong (P) qua B' dựng $b' // b$.

Giả sử $a \cap b' = M$.

Từ M kẻ $MN // BB'$ ($N \in b$).



Khi đó MN là đường vuông góc chung của a và b.

Khi a và b có cấu trúc đặc biệt (thí dụ như $a \perp b$,...) thì ta lại có cách xử lý riêng tương ứng và đơn giản hơn phép giải tổng quát nêu trên.

Thí dụ 7. (Trường hợp đặc biệt khi $a \perp b$)

Trình bày cách dựng đường vuông góc chung với hai đường chéo nhau và vuông góc với nhau.

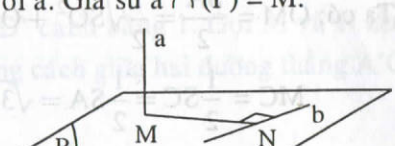
Giải

Cho a và b chéo nhau và vuông góc với nhau.

Dựng mặt phẳng (P) qua b và vuông góc với a. Giả sử $a \cap (P) = M$.

Trong (P) dựng $MN \perp b$

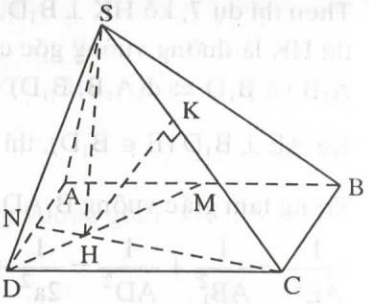
Khi đó MN là đường vuông góc chung của a và b.



Thí dụ 8.

Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông ABCD cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD. Giả sử H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SH = a\sqrt{3}$. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

Giải



Trong hình vuông ABCD, ta có:

$\triangle AMD = \triangle DNC$

$\Rightarrow \widehat{NCD} = \widehat{ADM} \Rightarrow DM \perp CN$

Mặt khác $DM \perp SH$ (do $SH \perp (ABCD)$)

$\Rightarrow DM \perp (SNC) \Rightarrow DM \perp SC$

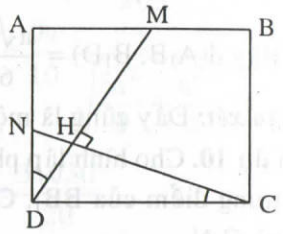
(như vậy DM và SC là hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau).

$DM \cap (SNC) = H$,

vậy từ H kẻ $HK \perp SC$ (trong (SNC))

Theo thí dụ cơ bản 7 thì HK chính là đường vuông góc chung của SM và SC.

Như vậy $d(DM, SC) = HK$.



Ta có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HC^2}$ (1)

$SH = a\sqrt{3}$ (g/t);

còn $HC = DC.\cos\widehat{DCN} = DC.\frac{DC}{CN} = \frac{DC^2}{\sqrt{DN^2 + DC^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Thay vào (1) và có: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{5}{4a^2} = \frac{19}{12a^2} \Rightarrow HK = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

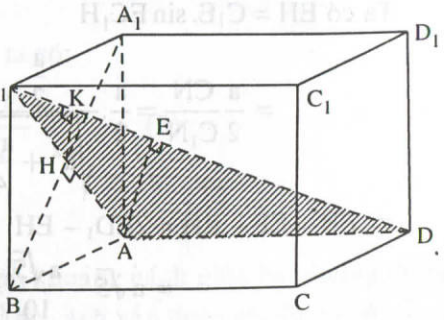
$\Rightarrow d(DM, SC) = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Nhận xét: Thí dụ 8 là một minh họa sinh động cho bài toán tổng quát nằm trong thí dụ 7.

Thí dụ 9.

Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B và B_1D.

Giải



Ta có $AB_1 \perp A_1B$,

$A_1B \perp AD$ (do $AD \perp (ABB_1A_1)$)

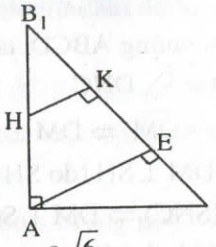
$\Rightarrow A_1B \perp (B_1AD) \Rightarrow A_1B \perp B_1D$

(như thế A_1B và B_1D là hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau)

Giả sử $BA_1 \cap AB_1 = H$

$\Rightarrow A_1B \cap (B_1AD) = H$.

Theo thí dụ 7, kẻ $HK \perp B_1D$,
thì HK là đường vuông góc chung của
A_1B và $B_1D \Rightarrow d(A_1B, B_1D) = HK$.



Kẻ $AE \perp B_1D$ ($E \in B_1D$), thì $HK = \frac{1}{2}AE$

Trong tam giác vuông B_1AD, ta có:

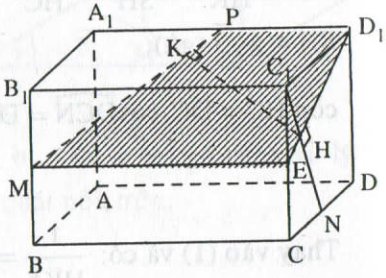
$$\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AB_1^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AE = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Vậy $d(A_1B, B_1D) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

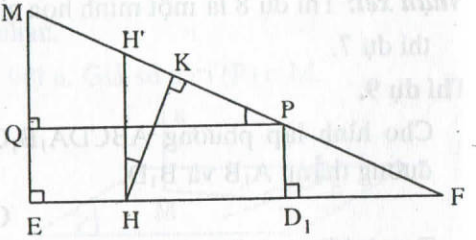
Nhận xét: Đây cũng là một minh họa sinh động cho thí dụ 7.

Thí dụ 10. Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BB_1, CD, A_1D_1. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng MP và C_1N.

Giải

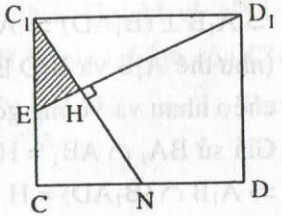


Gọi E là trung điểm của CC_1
$\Rightarrow ME // BC \Rightarrow ME // A_1D_1$
Trong hình vuông CDD_1C_1
ta thấy $D_1E \perp C_1N$
(xem chứng minh tương tự trong thí dụ 8).
Mặt khác $C_1N \perp ME$ (vì $ME // (CDD_1C_1)$).
Từ đó ta có $C_1N \perp (MED_1P) \Rightarrow C_1N \perp MP$.
Vậy MP và C_1N là hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau.
Giả sử $C_1N \cap ED_1 = H \Rightarrow C_1N \cap (MED_1P) = H$.
Kẻ $HK \perp MP$.
Theo thí dụ cơ bản 7, ta có HK
là đường vuông góc chung của
MP và C_1N, nên
$d(MP, C_1N) = HK$ (1)



Ta có $EH = C_1E.\sin\widehat{EC_1H}$

$$= \frac{a}{2}\frac{CN}{C_1N} = \frac{a}{2}.\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{5}}{10}.$$



$$\Rightarrow FH = EF - EH = 2ED_1 - EH$$

$$= a\sqrt{5} - \frac{a\sqrt{5}}{10} = \frac{9a\sqrt{5}}{10}.$$

Theo định lí Talet, ta có: $\frac{HH'}{EM} = \frac{FH}{EF} = \frac{\frac{9a\sqrt{5}}{10}}{a\sqrt{5}} = \frac{9}{10}$.

Vậy $HH' = \frac{9}{10}EM = \frac{9a}{10}$.

Ta có $\widehat{H'HK} = \widehat{HPQ}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

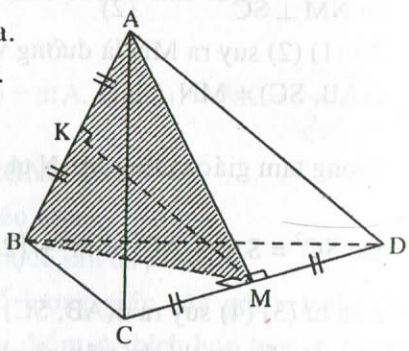
Từ đó trong tam giác vuông H'HK, thì:

$$HK = HH'.\cos\widehat{H'HK} = HH'.\cos\widehat{HPQ} = \frac{9a}{10}.\frac{QP}{MQ} = \frac{9a}{10}.\frac{\frac{a\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{\frac{5a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}}$$

$$= \frac{9a}{10}.\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{3a\sqrt{30}}{20}. \quad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra $d(MP, C_1N) = \frac{3a\sqrt{30}}{20}$.

Thí dụ 11. Cho hình tứ diện đều ABCD cạnh a. Hãy xác định khoảng cách giữa AB và CD.



Giải

Gọi M là trung điểm của CD.

Do ABCD là tứ diện đều, nên trong các tam giác đều ACD, BCD ta có:

$AM \perp CD$, $BM \perp CD$

$\Rightarrow CD \perp (AMB) \Rightarrow CD \perp AB$.

Vậy AB và CD là hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau.

Ta có $CD \cap (AMB) = M$, vì thế nếu kẻ $MK \perp AB$ ($K \in AB$), thì theo thí dụ cơ bản 7, MK là đường vuông góc chung của AB và CD, nên

$d(AB, CD) = MK$ (1)

Ta có $AM = BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó trong tam giác cân MAB đỉnh M, ta có:

$$MK = \sqrt{MA^2 - AK^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \quad (2)$$

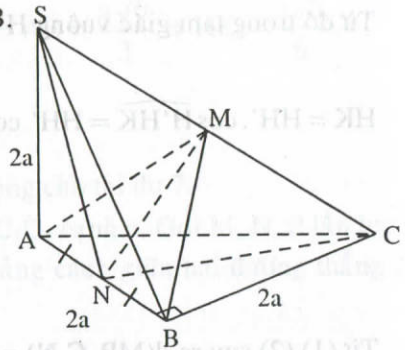
Từ (1) (2) suy ra $d(AB, CD) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Nhận xét: Trong các thí dụ 8 – 11, ta đã tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau a, b bằng cách vận dụng thí dụ cơ bản 7.

Trong các thí dụ dưới đây, ta xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a, b trong các trường hợp khác (a và b không vuông góc với nhau.

Thí dụ 12. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B (BA = BC = 2a), cạnh bên SA = 2a và vuông góc với đáy (ABC). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

Giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC, AB.

Ta có $AB \perp BC \Rightarrow SB \perp BC$

(định lí ba đường vuông góc)

Từ đó trong hai tam giác vuông SAC và SBC suy ra MA = MB (vì cùng = $\frac{SC}{2}$)

$\Rightarrow MN \perp AB$ (1)

Rõ ràng $\triangle SAN = \triangle NBC$

$(SA = BC = 2a; NA = NB = a) \Rightarrow NS = NC$

$\Rightarrow NM \perp SC$ (2)

Từ (1) (2) suy ra MN là đường vuông góc chung của AB và SC, nên

$d(AB, SC) = MN$ (3)

Trong tam giác vuông MAN ta có $MN = \sqrt{MA^2 - AN^2} = \sqrt{\frac{SC^2}{4} - \frac{AB^2}{4}}$ (4)

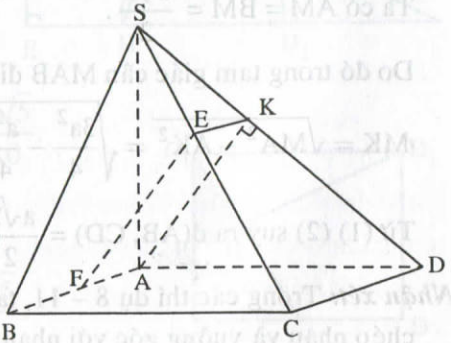
Do $SC^2 = SA^2 + AC^2 = 4a^2 + \left(2a\sqrt{2}\right)^2 = 12a^2$,

nên từ (3) (4) suy ra $d(AB, SC) = a\sqrt{2}$.

Nhận xét: Trong thí dụ trên rõ ràng AB và SC chéo nhau nhưng không vuông góc với nhau. Do bài toán có cấu trúc đặc biệt nên việc xác định trực tiếp đường vuông góc chung của AB và SC trong thí dụ này là đơn giản!

Thí dụ 13. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA = h và SA vuông góc với đáy (ABCD). Dựng đường vuông góc chung của SC và AB, từ đó tính d(SC, AB)

Giải



Trong (SAD) kẻ $AK \perp SD$ ($K \in SD$).

Trong (SCD) kẻ KE // CD ($E \in SC$).

Khi đó EK // AB

Trong mặt phẳng (BAKE) (do EK // AB) kẻ EF // AK ($K \in AB$).

Do $AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AK$.

nên AK // EF $\Rightarrow$ AB $\perp$ EF (1)

Ta có DC $\perp$ (SAD) $\Rightarrow$ (SDC) $\perp$ (SAD)

Vì (SDC) $\cap$ (SAD) = SD, nên AK $\perp$ SD $\Rightarrow$ AK $\perp$ (SCD)

$\Rightarrow$ AK $\perp$ SC mà AK // EF $\Rightarrow$ EF $\perp$ SC. (2)

Từ (1) (2) suy ra EF là đường vuông góc chung của SC, AB.

Cũng từ đó ta có: d(SC, AB) = EF. (3)

Dễ thấy EKAF là hình bình hành nên EF = AK. (4)

Trong tam giác vuông (SAD) ta có: $\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{h^2}$

$\Rightarrow AK=\frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$. (5)

Từ (3) (4) (5) suy ra $d(SC, AB)=\frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$.

Nhận xét: Nếu bài toán chỉ đòi hỏi tính d(SC, AB) mà không yêu cầu dựng đường vuông góc chung của chúng, ta giải theo cách 2 như sau:

Vì AB // CD $\Rightarrow$ AB // (SCD)

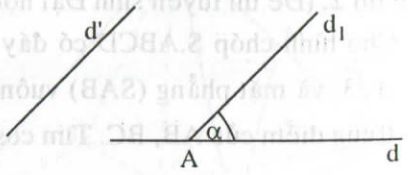
$$\Rightarrow d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AK = \frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$$

III. CÁC BÀI TOÁN VỀ GÓC TRONG KHÔNG GIAN

A. Bài toán về góc giữa hai đường thẳng chéo nhau

Để giải bài toán này ta tiến hành theo hai bước sau đây:

- Giả sử cần xác định góc α (hoặc hàm số lượng giác của góc α) giữa hai đường thẳng chéo nhau d và d'. Chọn một điểm A thích hợp trên d. Qua A vẽ đường thẳng d_1 // d'. Khi đó góc có đỉnh A tạo bởi d và d_1 chính là góc tạo bởi d và d'.
- Trong mặt phẳng xác định bởi d và d_1, bằng cách dựa vào các kiến thức của hình học phẳng để tính độ lớn của góc α, hoặc tính hàm số lượng giác của góc α theo yêu cầu đề bài.



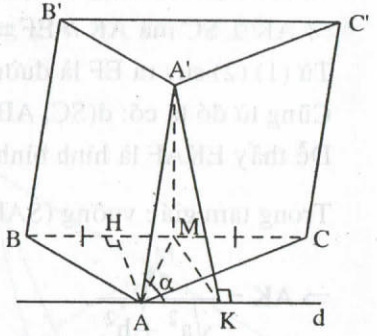
Ở đây thường là các bài toán đơn giản về hệ thức lượng trong tam giác, hoặc là các bài toán lượng giác cơ bản.

Thí dụ 1.

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy là tam giác vuông tại A có AB = a, AC = $a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên

mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA' và B'C'.

Giải



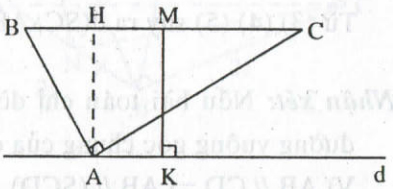
Gọi M là trung điểm của BC, khi đó theo giả thiết ta có A'M ⊥ BC.

Trong (ABC) qua A kẻ d // BC (tức d // B'C').

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AA' và B'C', thì $\alpha = \left(\widehat{AA',d}\right) = \widehat{A'Ad}$

Do BAC là tam giác vuông tại A có AB = a, $AC = a\sqrt{3} \Rightarrow BC = 2a \Rightarrow BM = MC = a$.

Ta có $AM = \dfrac{BC}{2} = a$



$\Rightarrow$ ABM là tam giác đều cạnh a.

Gọi H là trung điểm của BM,

thì AH ⊥ BM và $HB = GM = \dfrac{a}{2}$.

Kẻ MK ⊥ d (tức MK // HA).

Theo định lí ba đường vuông góc ta có A'K ⊥ d.

Do đó $\cos\alpha = \cos\widehat{A'AK} = \dfrac{AK}{AA'}$ (1)

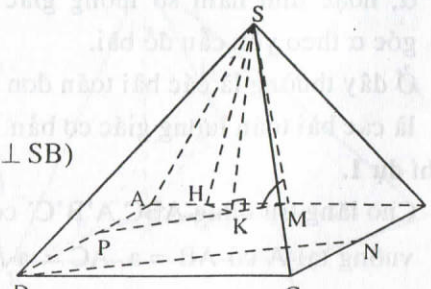
Vì AA' = 2a; $AK = HM = \dfrac{a}{2}$ nên thay vào (1), ta có $\cos\alpha = \dfrac{\frac{a}{2}}{2a} = \dfrac{1}{4}$.

Vậy $\cos(AA', BC) = \dfrac{1}{4}$.

Thí dụ 2. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh bằng 2a, SA = a, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với đáy (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Tìm cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng SM, DN.

Giải



Ta có SA = a, $SB = a\sqrt{3}$, AB = 2a

$\Rightarrow SA^2 + SB^2 = AB^2$

$\Rightarrow$ ASB là tam giác vuông tại S (tức SA ⊥ SB)

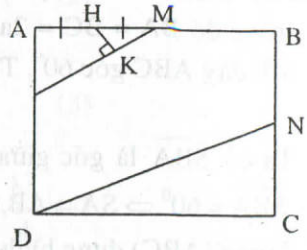
Ta có $SM = \dfrac{AB}{2} = a$

$\Rightarrow$ SAM là tam giác đều cạnh a.

Kẻ $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ (do $(SAB) \perp (ABCD)$) và $HA = HM = \frac{a}{2}$.

Trong (ABCD) từ M kẻ MP // DN ($P \in AD$). Khi đó $\widehat{SMP}$ là góc tạo bởi hai đường thẳng SM và DN. Đặt $\alpha = \widehat{SMP}$.

Kẻ $SK \perp MP$, theo định lí ba đường vuông góc ta có $HK \perp MP$.



Trong tam giác vuông SMK, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{MK}{SM}. \qquad (1)$$

Dễ thấy $AP = \frac{1}{4}AD = \frac{a}{2}$.

Ta có $MK = MH.\cos\widehat{HMK} = MH.\frac{AM}{MP} = \frac{a}{2}.\frac{a}{\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}} = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

Thay vào (1) và có

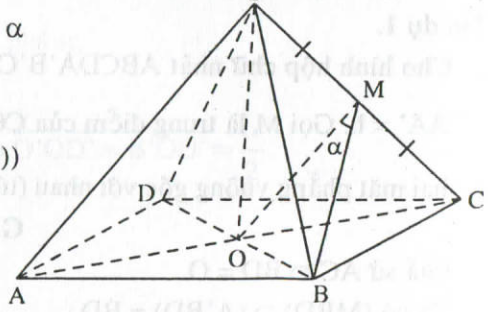
$$\cos(SM, DN) = \cos\alpha = \frac{\frac{a}{\sqrt{5}}}{a} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Thí dụ 3.

Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thoi cạnh bằng $\sqrt{5}$, $AC = 4$ và chiều cao của hình chóp là $SO = 2\sqrt{2}$, ở đây $AC \cap BD = O$. Gọi M là trung điểm của SC. Tìm góc giữa hai đường thẳng SA và BM.

Giải

Rõ ràng ta có MO // SA, vậy $\widehat{OMB} = \alpha$ là góc giữa SA và BM.



Vì ABCD là hình thoi, nên $DB \perp AC$.

Mặt khác $DB \perp SO$ (do $SO \perp (ABCD)$)

$\Rightarrow DB \perp (SAC) \Rightarrow DB \perp OM$.

Trong tam giác vuông MOB tại O,

ta có $\tan\alpha = \frac{OB}{OM}$. (1)

Do $OM = \frac{1}{2}SA = \frac{1}{2}\sqrt{SO^2+OA^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(2\sqrt{2})^2+2^2} = \sqrt{3}$,

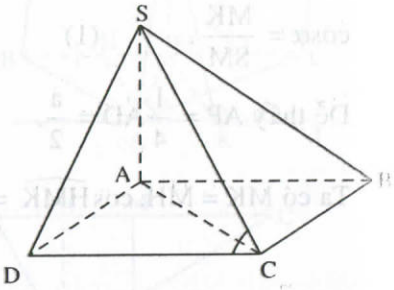
còn $OB = \sqrt{BC^2-OC^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2-2^2} = 1$.

Từ đó thay vào (1), ta có $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^0$.

Vậy $\left(\widehat{SA,SM}\right) = 30^0$.

Thí dụ 4. Cho hình chóp tam giác S.ABC đáy là tam giác vuông cân ABC tại B, trong đó BA = BC = 2a và SA vuông góc với đáy (ABC). Biết rằng SB tạo với đáy ABC góc 60^0. Tìm góc giữa hai đường thẳng AB và SC.

Giải



Ta có $\widehat{SBA}$ là góc giữa SB và (ABC) nên

$\widehat{SBA} = 60^0 \Rightarrow SA = AB.\tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$.

Trong (ABC) dựng hình vuông ABCD

Vì DC // AB $\Rightarrow$ $\widehat{SCD}$ là góc giữa hai đường thẳng AB và DC.

Đặt $\widehat{SCD} = \alpha$

Ta có CD = 2a,

$$SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{(2a\sqrt{3})^2 + (2a)^2} = 4a.$$

Ta có $DC \perp AD \Rightarrow SD \perp DC$ (định lí ba đường vuông góc).

Trong tam giác vuông SDC, ta có $\tan\alpha = \frac{SD}{DC} = \frac{4a}{2a} = 2$

Vậy $\alpha = (AB, AC) = \arctan 2$.

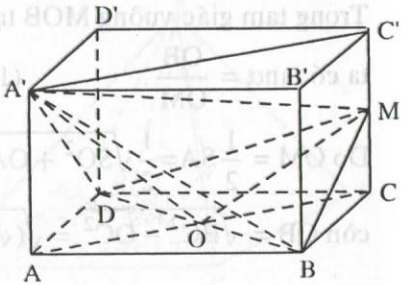
B. Bài toán về góc giữa đường thẳng và mặt phẳng và góc giữa hai mặt phẳng

Phương pháp giải các bài toán này dựa trực tiếp vào định nghĩa góc giữa đường thẳng và mặt phẳng và góc giữa hai mặt phẳng đã được trình bày kĩ lưỡng trong sách giáo khoa hình học lớp 11.

Thí dụ 1.

Cho hình hộp chữ nhật ABCDA'B'C'D' đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên AA' = b. Gọi M là trung điểm của CC'. Tìm tỷ số $\frac{a}{b}$ để (A'BD) và (MBD) là hai mặt phẳng vuông góc với nhau (tức góc giữa hai mặt phẳng trên bằng 90^0).

Giải



Giả sử $AC \cap BD = O$

Ta có $(MBD) \cap (A'BD) = BD$

Dễ thấy MD = MB, A'D = A'B,

nên ta có $MO \perp DB$, $A'O \perp DB$

Vậy $\widehat{A'OM}$ là góc giữa hai mặt phẳng (A'BD) và (MBD)

Từ đó $(A'BD) \perp (MBD) \Leftrightarrow \widehat{A'OM} = 90^0$

$\Leftrightarrow A'M^2 = A'O^2 + OM^2$ (1)

Dễ thấy theo định lí Pitago ta có:

$$OM^2 = OC^2 + MC^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{4}, \quad (2)$$

$$A'O^2 = A'A^2 + OA^2 = b^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = b^2 + \frac{a^2}{2}, \quad (3)$$

$$A'M^2 = A'C'^2 + C'M^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 2a^2 + \frac{b^2}{4} \quad (4)$$

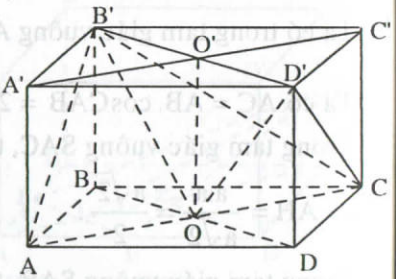
Thay (2) (3) (4) vào (1) và có

$$\widehat{A'OM} = 90^0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{4} + b^2 + \frac{a^2}{2} = 2a^2 + \frac{b^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1 \text{ (do } a > 0; b > 0)$$

Thí dụ 2.

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Tìm số đo của góc tạo bởi hai mặt phẳng (B'AC) và (D'AC).



Giải

Ta có $(B'AC) \cap (D'AC) = AC$.

Giả sử $AC \cap BD = O$.

Do $D'A = D'C = B'A = B'C = a\sqrt{2}$.

(ở đây a là cạnh của hình lập phương),

ta có $B'O \perp AC$, $D'O \perp AC$.

Từ đó $\widehat{B'OD'}$ là góc giữa hai mặt phẳng.

Đặt $\widehat{B'OD'} = \alpha$.

Gọi $O' = A'C' \cap B'D' \Rightarrow \widehat{BOO'} = \widehat{O'OD'} = \widehat{B'OD'} = \frac{\alpha}{2}$.

Ta có $OO' = a$; $B'O' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{B'O'}{OO'} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{(BA'C);(D'AC)} = \alpha = 2\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

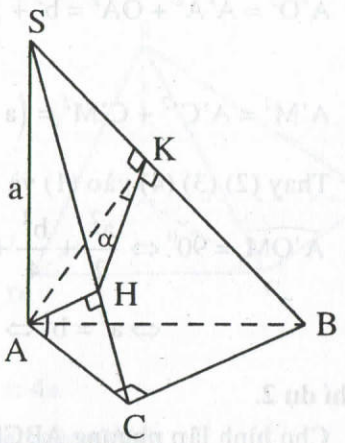
Nhận xét: Bằng cách hoàn toàn tương tự, ta có kết quả sau:

$((BA'C);(DA'C)) = 60^0$

với chú ý ta qui ước góc giữa hai mặt phẳng là góc $\leq 90^0$.

Thí dụ 3. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC vuông tại C, AB = 2a, $\widehat{CAB} = 60^0$. Đoạn SA = a và vuông góc với (P). Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SBC). Tính $\sin\alpha$.

Giải



Kẻ AH ⊥ SC, AK ⊥ SB.

(H ∈ SC, K ∈ SB)

Do BC ⊥ AC, BC ⊥ SA (vì SA ⊥ (P))

⇒ BC ⊥ (SAC) ⇒ (SBC) ⊥ (SAC).

Vì (SBC) ∩ (SAC) = SC, nên AH ⊥ SC

⇒ AH ⊥ (SCB) ⇒ AH ⊥ HK.

Ta có AK ⊥ SB ⇒ HK ⊥ SB

(định lí ba đường vuông góc)

⇒ $\widehat{AKH}$ là góc tạo bởi (SAB) và (SBC)

⇒ $\widehat{AKH} = \alpha$. (1)

Ta có trong tam giác vuông AHK (vuông tại H), thì $\sin\alpha = \dfrac{AH}{AK}$. (2)

Ta có $AC = AB.\cos\widehat{CAB} = 2a.\cos 60^0 = a \Rightarrow SC = a\sqrt{2}$.

Trong tam giác vuông SAC, thì SA.AC = AH. SC

$\Rightarrow AH = \dfrac{a.a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. (3)

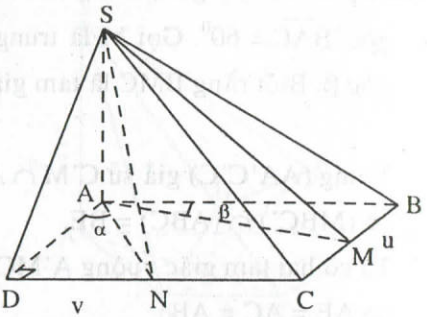
Trong tam giác vuông SAB, thì AK.SB = SA.AB

$\Rightarrow AK = \dfrac{a.2a}{\sqrt{a^2+4a^2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. (4)

Thay (3) (4) vào (2) và có $\sin\alpha = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Thí dụ 4. Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh a. Đoạn SA cố định vuông góc với (P) tại A. M, N lần lượt là hai điểm di động trên cạnh BC và CD. Đặt BM = u, DN = v. Chứng minh rằng $a(u + v) + uv = a^2$ là điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (SAM), (SAN) tạo với nhau một góc 45^0.

Giải



Ta có $(SAM) \cap (SAN) = SA$.

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow AM \perp SA, AN \perp SA$

$\Rightarrow \widehat{MAN}$ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAM) và (SAN).

Đặt $\widehat{DAN} = \alpha$, $\widehat{MAB} = \beta$.

Khi đó $\widehat{MAN} = 45^0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 45$

$$\Leftrightarrow \tan(\alpha + \beta) = 1$$

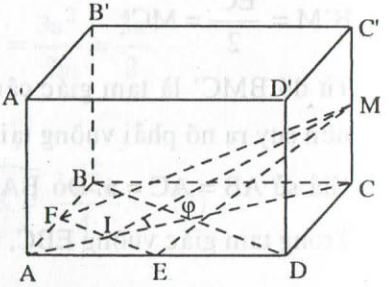
$$\Leftrightarrow \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = 1 \Leftrightarrow \frac{\frac{v}{a} + \frac{u}{a}}{1 - \frac{uv}{a^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow a(u + v) + uv = a^2.$$

Đó là đpcm.

Thí dụ 5. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' cạnh a. Gọi E, F và M lần lượt là trung điểm của AD, AB, CC'. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABCD) và (EFM). Tính $\cos\varphi$.

Giải



Ta có $(EFM) \cap (ABCD) = EF$.

Giả sử $AC \cap FE = I$.

Vì FE // BD nên $AC \perp BD$

$\Rightarrow FE \perp AC$.

Từ đó theo định lí ba đường vuông góc suy ra $MI \perp EF$.

Vậy $\widehat{MIC}$ chính là góc tạo bởi hai mặt phẳng (MEF) và (ABCD), nên $\widehat{MIC} = \varphi$.

Trong tam giác vuông MIC, ta có $\cos\varphi = \frac{IC}{MI}$. (1)

Do $IC = \frac{3}{4}AC = \frac{3}{4}a\sqrt{2}$, còn

$$MI = \sqrt{MC^2 + IC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{11}}{2\sqrt{2}}.$$

Vậy từ (1) suy ra $\cos\varphi = \frac{\frac{3}{4}a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{11}}{2\sqrt{2}}} = \frac{3\sqrt{11}}{11}$.

Thí dụ 6. Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' đáy là tam giác cân BAC đỉnh A, có góc $\widehat{BAC} = 60^0$. Gọi M là trung điểm của AA'. Giả sử (MBC') tạo với đáy góc β. Biết rằng BMC là tam giác vuông. Tính góc β.

Giải

Trong (AA'C'C) giả sử $C'M \cap AC = E$

$\Rightarrow (MBC') \cap (ABC) = BE.$

Ta có hai tam giác vuông A'MC' và MAE bằng nhau $\Rightarrow AE = A'C'.$

$\Rightarrow AE = AC = AB$

$\Rightarrow$ EBC là tam giác vuông tại B, tức là $EB \perp BC.$

Theo định lí ba đường vuông góc thì $C'B \perp BE.$

Do đó $\widehat{C'BC}$ là góc tạo bởi (M'BC) với (ABC)

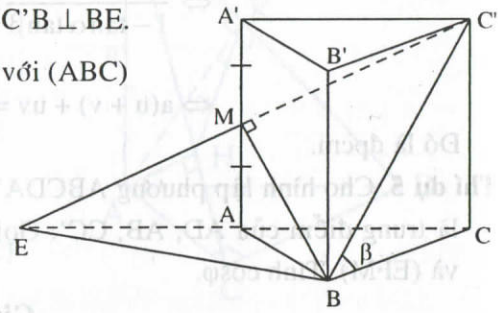
$\Rightarrow \widehat{C'BC} = \beta$

Theo trên ta có ME = MC'

(vì $\Delta AME = \Delta A'MC'$)

Dễ thấy trong tam giác vuông thì

$$B'M = \frac{EC'}{2} = MC'$$



Từ đó BMC' là tam giác cân đỉnh M. Từ giả thiết BMC' là tam giác vuông nên suy ra nó phải vuông tại $M \Rightarrow BE = BC'.$ (1)

Giả sử AB = AC = a. Do $\widehat{BAC} = 60^0 \Rightarrow \widehat{BEC} = 30^0.$

Trong tam giác vuông EBC, ta có $EB = EC.\cos\widehat{BEC} = 2a\cos 30^0$

$$= 2a\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}. \quad (2)$$

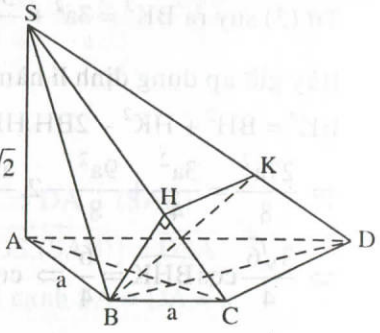
Ta có $BC = EC\sin\widehat{BEC} = 2a\sin 30^0 = a$

$$\Rightarrow BC' = \frac{BC}{\cos\beta} = \frac{a}{\cos\beta} \quad (3)$$

Từ (2) (3) suy ra $a\sqrt{3} = \frac{a}{\cos\beta} \Leftrightarrow \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \beta = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$

Thí dụ 7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông với AB // CD, AB = 2a, CD = a và đường cao AD = a. Giả sử SA vuông góc với (ABCD) và $SA = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Giải



Ta có (SBC) ∩ (SCD) = SC.

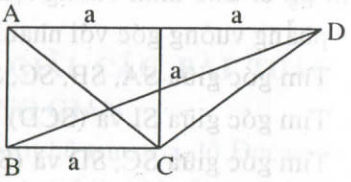
Trong hình thang vuông ABCD, từ giả thiết suy ra AC ⊥ CD, vậy từ đó theo định lí ba đường vuông góc ta có: SC ⊥ CD.

Vì AB ⊥ BC ⇒ SB ⊥ BC (định lí ba đường vuông góc)

Trong (SBC) kẻ BH ⊥ SC (H ∈ SC).

Trong (SCD) từ N kẻ HK // CD. Do CD ⊥ SC ⇒ HK ⊥ SC, vậy $\widehat{BHK}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD)

Ta có SB = a√3, SC = (a√2)√2 = 2a



Trong tam giác vuông SBC, ta có

$$\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{SB^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{4}{3a^2}$$

$$\Rightarrow BH^2=\frac{3a^2}{4} \qquad (1)$$

Ta có CD = a√2; $SB^2 = SH.SC \Rightarrow SH = \frac{SB^2}{SC}=\frac{3a^2}{2a}=\frac{3a}{2}$.

Áp dụng định lí Talet ta có:

$$\frac{HK}{CD}=\frac{SH}{SC}\Rightarrow HK=\frac{SH.CD}{SC}=\frac{\frac{3a}{2}.a\sqrt{2}}{2a}\Rightarrow HK=\frac{3\sqrt{2}a}{4}. \qquad (2)$$

Dễ thấy $BD=\sqrt{4a^2+a^2}=a\sqrt{5}$.

Trong tam giác BSC, theo định lí hàm số cosin, ta có:

$$BD^2 = SB^2 + SD^2 - 2SB.SD.\cos\widehat{BSD}$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 = 3a^2 + 9a^2 - 2.a\sqrt{3}.a\sqrt{6}.\cos\widehat{BSD}$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{2}\cos\widehat{BSD}=4 \Rightarrow \cos\widehat{BSD}=\frac{2}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}. \qquad (3)$$

Ta có $\frac{SK}{SD}=\frac{SH}{SC}=\frac{\frac{3a}{2}}{2a}=\frac{3}{4}\Rightarrow SK=\frac{3}{4}SD=\frac{3}{4}a\sqrt{6}$.

Trong tam giác SBK, theo định lí hàm số cosin ta có

$$BK^2 = SB^2 + SK^2 - 2SB.SK.\cos\widehat{BSK}.$$

Từ (3) suy ra $BK^2 = 3a^2 + \frac{54a^2}{16}a^2 - 2a\sqrt{3}.\frac{3}{4}a\sqrt{6}.\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{51a^2}{8} - 3a^2 = \frac{27a^2}{8}$.

Bây giờ áp dụng định lí hàm số cosin trong tam giác BHK ta có:

$BK^2 = BH^2 + HK^2 - 2BH.HK\cos\widehat{BHK}$

$\Rightarrow \frac{27a^2}{8} = \frac{3a^2}{4} + \frac{9a^2}{8} - 2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{3\sqrt{2}a}{4}.\cos\widehat{BHK}$

$\Rightarrow \frac{3\sqrt{6}}{4}\cos\widehat{BHK} = \frac{6}{4} \Rightarrow \cos\widehat{BHK} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $\widehat{(SBC),(SCD)} = \arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Thí dụ 8. Cho hình vuông ABCD và tam giác đều SAB cạnh a ở trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi I là trung điểm cạnh AB.

1. Tìm góc giữa SA, SB, SC, SD với (ABCD)
2. Tìm góc giữa SI và (SCD)
3. Tìm góc giữa SC, SD và (SAB)

Giải

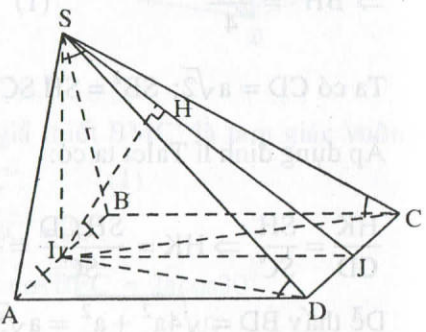
1. Ta có $SI \perp AB \Rightarrow SI \perp (ABCD)$ (do $(SAB) \perp (ABCD)$)

SA có hình chiếu là AI trên (ABCD), nên $\widehat{SAI}$ là góc giữa SA và (ABCD)

$\Rightarrow \widehat{(SA,(ABCD))} = \widehat{SAI} = 60^0$.

Tương tự $\widehat{(SB,(ABCD))} = \widehat{SBI} = 60^0$,

$\widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{SCI}$. (1)



Ta có $IC = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \tan\widehat{SCI} = \frac{SI}{IC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

Vậy từ (1) có $\widehat{(SC,(ABCD))} = \arctan\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Tương tự do $\widehat{SDI} = \widehat{SCI} \Rightarrow \widehat{(SD,(ABCD))} = \arctan\frac{\sqrt{15}}{5}$.

2. Gọi J là trung điểm của DC, thì $IJ \perp DC \Rightarrow DC \perp (SIJ)$ (kết hợp với $DC \perp SI$) $\Rightarrow (SDC) \perp (SIJ)$. Do $(SDC) \cap (SIJ) = SJ$, nên nếu kẻ $IH \perp SJ \Rightarrow IH \perp (SDC)$ $\Rightarrow \widehat{ISH} = \widehat{(SI,(SDC))}$

Trong tam giác SIJ, ta có $\tan\widehat{ISH} = \tan\widehat{ISJ} = \dfrac{IJ}{SI} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\widehat{(SI,(SDC))} = \arctan\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

3. Ta có $DA \perp AB$, $DA \perp SI$ (do $SI \perp (ABCD)$) $\Rightarrow DA \perp (SAB)$

$\Rightarrow$ SA là hình chiếu của SD trên (SAB) $\Rightarrow \widehat{(DS,(SAB))} = \widehat{DSA}$.

Ta có DSA là tam giác vuông cân đỉnh A với cạnh SA = DA = a

$\Rightarrow \widehat{DSA} = 45^0$.

Vậy $\widehat{(SD,(SAB))} = 45^0$

Tương tự $\widehat{(SC,(SAB))} = 45^0$.

IV. SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ GIẢI CÁC BÀI TOÁN VỀ KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC TRONG KHÔNG GIAN

Trong nhiều trường hợp nếu có thể đưa vào một hệ trục tọa độ Đecac vuông góc Oxyz một cách thích hợp, thì nhiều bài toán về tìm khoảng cách và xác định góc trong không gian sẽ có một lời giải đơn giản. Trong mục này ta sẽ xét những bài toán như vậy.

Trước hết nhắc lại một số kiến thức cần dùng đến trong mục này.

- Trong không gian cho vectơ $\overrightarrow{MN}$ với $M = (x_1; y_1; z_1)$, $N = (x_2; y_2; z_2)$ thì $\overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.
- Độ dài $|\vec{u}|$ của véctơ $\vec{u}\,(u_1; u_2; u_3)$ được xác định như sau:

$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

- Cho hai véctơ $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$; $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$.

Tích vô hướng của $\vec{u}$, $\vec{v}$ được kí hiệu $\vec{u}.\vec{v}$ và được xác định như sau:

$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v}) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

- Gọi α giữa hai véctơ $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ và $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ được xác định:

$$\cos\alpha = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}.$$

Từ đó suy ra $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$.

- Cho hai véctơ $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ và $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$. Khi đó tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ là một véctơ (được kí hiệu là $[\vec{u},\vec{v}]$, và ta có

$$[\vec{u},\vec{v}] = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right).$$

Cho hai véctơ: $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$; $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$

Giả sử $M(x_1; y_1; z_1) \in \vec{u}$; $N(x_2; y_2; z_2) \in \vec{v}$

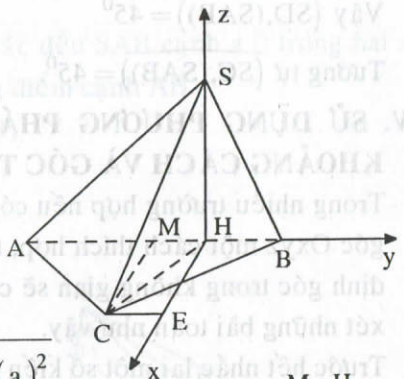
Khi đó khoảng cách $d(\vec{u}, \vec{v})$ giữa hai véctơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ xác định bằng công thức sau: $d(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\left|[\vec{u},\vec{v}].\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left\|[\vec{u},\vec{v}]\right\|}$.

Thí dụ 1. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2012)

Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho HA = 2HB.

Góc giữa đường thẳng SC và (ABC) bằng 60^0. Tìm khoảng cách giữa SA và BC theo a.

Giải

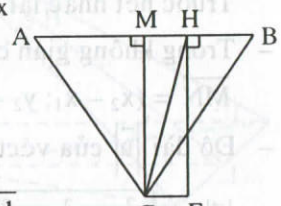


Gọi M là trung điểm của AB, thì

$MH = BM - BH = \dfrac{a}{2} - \dfrac{a}{3} = \dfrac{a}{6}$

Từ C kẻ CE // AB $\Rightarrow CE = \dfrac{a}{6}$; $HE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Dựng hệ trục tọa độ H.xyz (Xem hình vẽ)



Ta có: $CH = \sqrt{MC^2 + MH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{6}\right)^2}$

$= \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{a^2}{36}} = \dfrac{a\sqrt{28}}{6} = \dfrac{2a\sqrt{7}}{6}$.

Vì $\widehat{SCH} = 60^0 \Rightarrow SH = CH.\tan 60^0 = \dfrac{2a\sqrt{7}}{6}.\sqrt{3} = \dfrac{2a\sqrt{21}}{6}$.

Trong hệ trục tọa độ nói trên ta có:

$H = (0; 0; 0)$;

$S = \left(0; 0; \dfrac{2a\sqrt{21}}{6}\right)$; $A = \left(0; -\dfrac{2a}{3}; 0\right)$; $B = \left(0; \dfrac{a}{3}; 0\right)$; $C = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; -\dfrac{a}{6}; 0\right)$.

Vậy $\overrightarrow{SA} = \left(0; -\dfrac{2a}{3}; -\dfrac{2a\sqrt{21}}{6}\right)$; $\overrightarrow{BC} = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; -\dfrac{a}{2}; 0\right)$.

Áp dụng công thức tính khoảng cách giữa hai véctơ $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}$ ta có:

$$d(SA,BC) = d\left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left\|\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}\right]\right\|} \qquad (1)$$

Ta có: $\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-\frac{2a}{3} & -\frac{2a\sqrt{21}}{6}\\ -\frac{a}{2} & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-\frac{2a\sqrt{21}}{6} & 0\\ 0 & \frac{a\sqrt{3}}{2}\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & -\frac{2a}{3}\\ \frac{a\sqrt{3}}{2} & -\frac{a}{2}\end{vmatrix}\right)$

$$=\left(-\frac{a^2\sqrt{21}}{6};-\frac{a^2\sqrt{63}}{6};\frac{a^2\sqrt{3}}{3}\right), \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{AB}=(0;a;0) \qquad (3)$$

Thay (2) (3) vào (1) vào có:

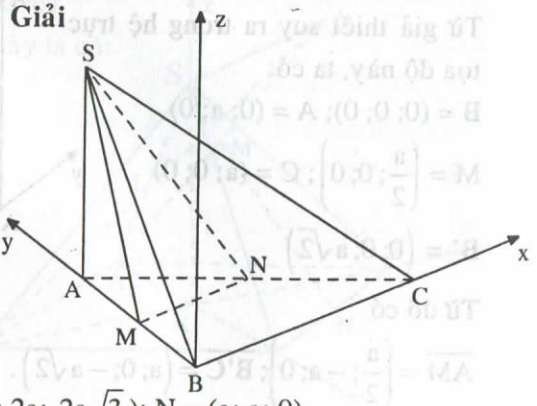
$$d(SA;BC)=\frac{\left|-\frac{a^3\sqrt{63}}{6}\right|}{a^2\sqrt{\frac{21}{36}+\frac{63}{36}+\frac{1}{3}}}=\frac{\frac{a\sqrt{63}}{6}}{\frac{\sqrt{96}}{6}}=\frac{a\sqrt{42}}{8}.$$

Ta thu lại kết quả giải bằng phương pháp hình học không gian thuần túy! (xem thí dụ 1, mục B, II chương 2).

Thí dụ 2.

Cho hình chóp tam giác S.ABC đáy là tam giác vuông cân tại B, trong đó AB = BC = 2a. Giả sử hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy (ABC). Gọi M là trung điểm của AB. Mặt phẳng qua SM và song song với BC cắt AC tại N. Biết rằng hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) tạo với nhau góc 60^0. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

Giải



Ta có SA = (SAB) ∩ (SAC)

⇒ SA ⊥ (ABC).

Vì ((SBC), (ABC)) = 60^0

⇒ $\widehat{SBA} = 60^0$

Từ B kẻ Bz // SA ⇒ Bz ⊥ (ABC).

Dựng hệ trục tọa độ Bxyz

(xem hình vẽ)

Trong hệ trục này ta có:

B = (0; 0; 0); A = (0; 2a; 0); S = (0; 2a; $2a\sqrt{3}$); N = (a; a; 0)

(do SA = AB tan$\widehat{SBA}$ = $2a\sqrt{3}$; do MN // BC nên N là trung điểm của AC)

Ta có $\overrightarrow{AB}=(0;-2a;0)$; $\overrightarrow{SN}=(a;-a;-2a\sqrt{3})$

Từ đó ta có: $d(AB, SN) = d\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SN}\right) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SN}\right].\overrightarrow{AN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SN}\right]\right|}$. (1)

Ta lại có $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SN}\right] = \left(\begin{vmatrix} -2a & 0 \\ -a & -2a\sqrt{3} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2a\sqrt{3} & a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -2a \\ a & -a \end{vmatrix}\right)$

$= \left(4a^2\sqrt{3}; 0; 2a^2\right)$, (2)

$\overrightarrow{AN} = (a; -a; 0)$. (3)

Thay (2) (3) vào (1) và có

$d(AB; SN) = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{a^2\sqrt{48+4}} = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Ta thu lại kết quả bằng cách sử dụng phương pháp hình học không gian thuần túy để giải thí dụ này (xem thí dụ 2, mục B, II chương 2)

Thí dụ 3.

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' đáy là tam giác vuông có BA = BC = a; cạnh bên AA' = $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và B'C.

Giải

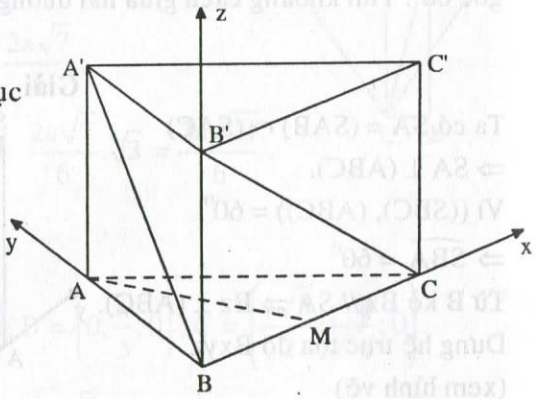
Dựng hệ trục tọa độ Bxyz (xem hình vẽ).

Từ giả thiết suy ra trong hệ trục tọa độ này, ta có:

B = (0; 0; 0); A = (0; a; 0)

$M = \left(\dfrac{a}{2}; 0; 0\right)$; C = (a; 0; 0)

$B' = \left(0; 0; a\sqrt{2}\right)$



Từ đó có

$\overrightarrow{AM} = \left(\dfrac{a}{2}; -a; 0\right)$; $\overrightarrow{B'C} = \left(a; 0; -a\sqrt{2}\right)$.

Ta có $d(AM, B'C) = d\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}\right) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}\right]\right|}$. (1)

Rõ ràng $\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}\right] = \left(\begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a\sqrt{2} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & \frac{a}{2} \\ -a\sqrt{2} & a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \frac{a}{2} & -a \\ a & 0 \end{vmatrix}\right)$

$= \left(a^2\sqrt{2}; \frac{a^2\sqrt{2}}{2}; a^2\right)$, (2)

$\overrightarrow{AC} = (a; -a; 0)$ (3)

Thay (2) (3) vào (1) và có: $d(AM, B'C) = \frac{\left|-\frac{a^3\sqrt{2}}{2}\right|}{a^2\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 1}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{7}{2}}} = \frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Ta thu lại kết quả giải bằng phép tính sử dụng hình học không gian thuần túy (xem thí dụ 3, mục B, II chương 2).

Thí dụ 4.

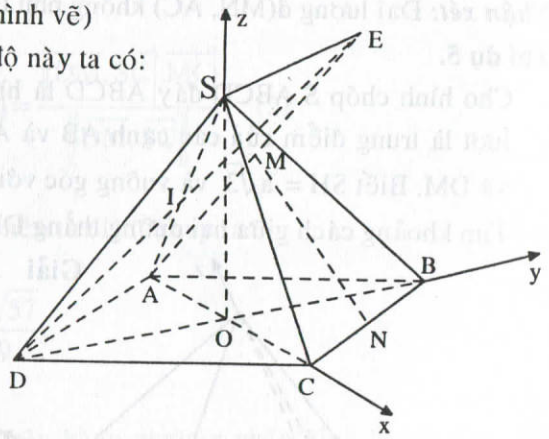
Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh đáy bằng a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của AE và BC. Tìm khoảng cách theo a giữa hai đường thẳng MN và AC.

Giải

Gọi O là tâm của đáy.

Xét hệ trục tọa độ Oxyz (xem hình vẽ)

Đặt SO = h. Trong hệ trục tọa độ này ta có:



$O = (0; 0; 0); C = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$

$B = \left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right); S = (0; 0; h)$

$D = \left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right);$

$A = \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right).$

Gọi I là trung điểm của SA, thì $I = \left(-\frac{a\sqrt{2}}{4}; 0; \frac{h}{2}\right).$

Do đó E có tọa độ là $E=\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};h\right)$, từ đó $M=\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{h}{2}\right)$,

Ta có $N=\left(\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{4};0\right)$. Do đó $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{3a\sqrt{2}}{4};0;-\frac{h}{2}\right)$; $\overrightarrow{AC}=\left(a\sqrt{2};0;0\right)$.

Ta có: $d(MN,AC)=d\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{NC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right]\right|}$. (1)

Dễ thấy $\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}0 & -\frac{h}{2}\\ 0 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-\frac{h}{2} & \frac{3a\sqrt{2}}{4}\\ 0 & a\sqrt{2}\end{vmatrix};\begin{vmatrix}\frac{3a\sqrt{2}}{4} & 0\\ a\sqrt{2} & 0\end{vmatrix}\right)=\left(0;-\frac{ah\sqrt{2}}{2};0\right)$, (2)

$NC=\left(\frac{a\sqrt{2}}{4};-\frac{a\sqrt{2}}{4};0\right)$ (3)

Thay (2) (3) vào (1) và có: $d(MN,AC)=\frac{\frac{a^2h}{4}}{\frac{ah\sqrt{2}}{2}}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Ta thu lại kết quả khi giải bài trên bằng phương pháp hình học không gian thuần túy (xem thí dụ 4, mục B, II chương 2).

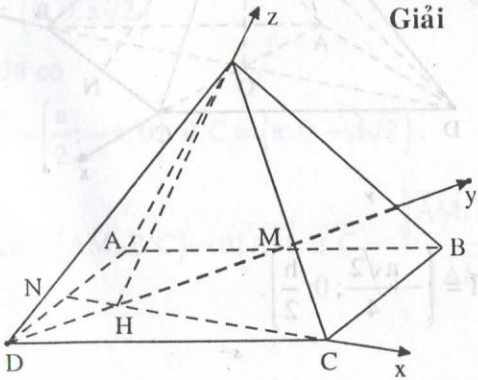
Nhận xét: Đại lượng d(MN, AC) không phụ thuộc vào h.

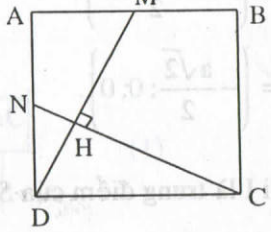
Thí dụ 5.

Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD. Giả sử H là giao điểm của CN và DM. Biết $SH=a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy (ABCD).

Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

Giải





Trong hình vuông ABCD, dễ thấy CN ⊥ SM. Do SH ⊥ (ABCD), nên dựng hệ trục tọa độ Hxyz (xem hình vẽ)

Ta có $NC = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow HC = DC.\cos\widehat{DCH} = a.\frac{DC}{NC} = \frac{a^2}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$

$$HD = \sqrt{DC^2 - HC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{4a^2}{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\Rightarrow HM = DM - DH = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a\sqrt{5}}{5} = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$$

Từ đó suy ra trong hệ tọa độ nói trên, ta có:

$H = (0; 0; 0)$;

$$C = \left(\frac{2a\sqrt{5}}{5}; 0; 0\right); M = \left(0; \frac{3a\sqrt{5}}{10}; 0\right); S = \left(0; 0; a\sqrt{3}\right); D = \left(0; -\frac{a\sqrt{5}}{5}; 0\right)$$

Vậy $\overrightarrow{DM} = \left(0; \frac{a\sqrt{5}}{2}; 0\right)$ và $\overrightarrow{SC} = \left(\frac{2a\sqrt{5}}{5}; 0; -a\sqrt{3}\right)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{SC}\right] = \left(\begin{vmatrix} \frac{a\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & -a\sqrt{3} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -a\sqrt{3} & \frac{2a\sqrt{5}}{5} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & \frac{a\sqrt{5}}{2} \\ \frac{2a\sqrt{5}}{5} & 0 \end{vmatrix}\right)$$

$$= \left(-\frac{a^2\sqrt{15}}{2}; 0; -a^2\right). \qquad (1)$$

Ta có $d(DM, SC) = d\left(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{SC}\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{MC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{SC}\right]\right|}$. (2)

Do $\overrightarrow{MC} = \left(\frac{2a\sqrt{5}}{5}; -\frac{3a\sqrt{5}}{10}; 0\right)$, nên từ (1) (2) suy ra

$$d(DM, SC) = \frac{a^3\sqrt{3}}{a^2\sqrt{\frac{15}{4} + 1}} = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

Ta thu lại kết quả giải thí dụ trên bằng phương pháp hình học không gian thuần túy (xem thí dụ 8, mục B, II, chương 2).

Thí dụ 6.

Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm khoảng cách giữa hai đường A'C và MN.

Giải

Dựng hệ trục tọa độ Axyz (xem hình vẽ)

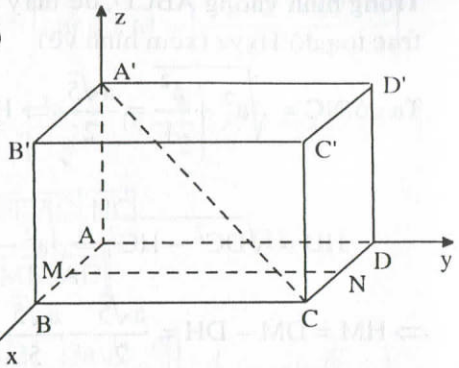
Trong hệ trục tọa độ này, ta có:

A = (0; 0; 0); A' = (0; 0; 1); C = (1; 1; 0).

$M = \left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$; $N = \left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$.

Vậy $\overrightarrow{A'C} = (1; 1; -1)$; $\overrightarrow{MN} = (0; 1; 0)$.

Từ đó:



$$\left[\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}\right] = \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = (1; 0; 1).$$

Lại có: $d(A'C, MN) = d\left(\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}\right) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}\right].\overrightarrow{CN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}\right]\right|}$. (1)

Do $\overrightarrow{CN} = \left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$, nên từ (1) có: $d(A'C, MN) = \dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Ta thu lại kết quả giải ví dụ trên bằng phương pháp hình học không gian thuần túy (xem thí dụ 5, mục B, II, chương 2)

Thí dụ 7.

Cho hình chóp tứ giác S.ABCD đáy là hình thoi cạnh AB = $\sqrt{5}$, đường chéo AC = 4; SO = $2\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy, ở đây O là giao điểm của AC và BD. Gọi M là trung điểm của SC. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM.

Giải

Vì ABCD là hình thoi nên AC ⊥ BD, do vậy dựng hệ trục tọa độ Oxyz (xem hình vẽ).

Trong hệ trục tọa độ này, ta có:

O = (0; 0;0); A = (0; –2; 0);

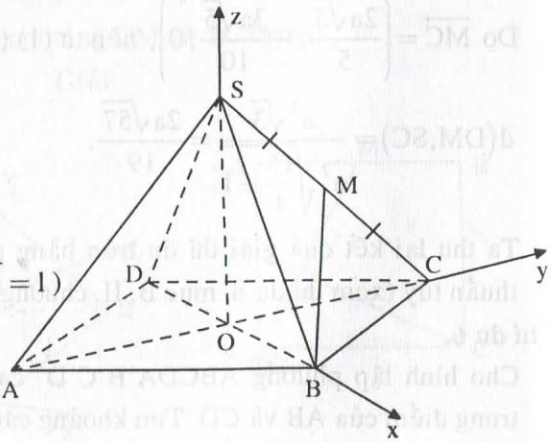
$S = \left(0; 0; 2\sqrt{2}\right)$; B = (1; 0; 0)

$C = \left(0; 2; 0\right)$; $M = \left(0; 1; \sqrt{2}\right)$

(do $OB = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{5-4} = 1$)

Từ đó $\overrightarrow{SA} = \left(0; -2; -2\sqrt{2}\right)$;

$\overrightarrow{BM} = \left(-1; 1; \sqrt{2}\right)$



$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}\right] = \left(\begin{vmatrix} -2 & -2\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right) = \left(0; 2\sqrt{2}; -2\right) \quad (1)$$

Lại có: $d(SA, BM) = d\left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}\right) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left\|\left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}\right]\right\|}$ (2)

Vì $\overrightarrow{AB} = (1; 2; 0)$, nên từ (1) suy ra $d(SA, BM) = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{8+4}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Ta thu lại kết quả giải ví dụ trên bằng phương pháp sử dụng hình học không gian thuần túy (xem thí dụ 6, mục B, II, chương 2)

Thí dụ 8. Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B và B_1D.

Giải

Dựng hệ trục tọa độ Axyz (xem hình vẽ).

Khi đó ta có:

$A = (0; 0; 0)$, $A_1 = (0; 0; a)$

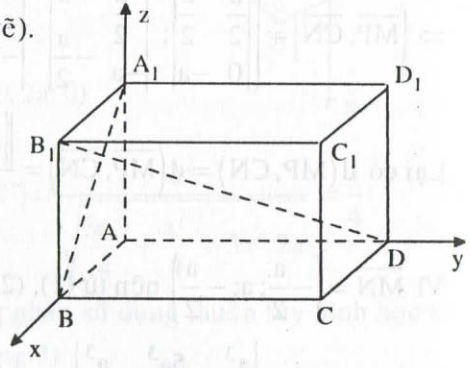
$B = (a; 0; 0)$, $B_1 = (a; 0; a)$,

$D = (0; a; 0)$.

Từ đó:

$\overrightarrow{A_1B} = (a; 0; -a)$

$\overrightarrow{B_1D} = (-a; a; -a)$



Vậy $\left[\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{B_1D}\right] = \left(\begin{vmatrix} 0 & -a \\ a & -a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -a & a \\ -a & -a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & 0 \\ -a & a \end{vmatrix}\right) = \left(a^2; 2a^2; a^2\right)$. (1)

Lại có: $d\left(A_1B, B_1D\right) = d\left(\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{B_1D}\right) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{B_1D}\right].\overrightarrow{BD}\right|}{\left\|\left[\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{B_1D}\right]\right\|}$. (2)

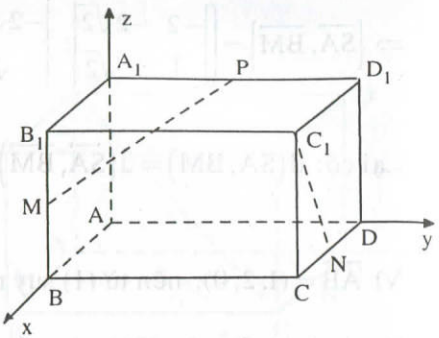
Do $\overrightarrow{BD} = (-a; a; 0)$, nên từ (1) (2) suy ra:

$$d\left(A_1B_1, B_1D_1\right) = \frac{a^3}{a^2\sqrt{1+4+1}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Ta thu lại kết quả giải thí dụ trên bằng phương pháp hình học không gian thuần túy (xem thí dụ 9, mục B, II, chương 2)

Thí dụ 9. Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BB_1, CD, A_1D_1. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng MP và C_1N.

Giải



Dựng hệ trục tọa độ Axyz (xem hình vẽ)

Khi đó ta có:

$A = (0; 0; 0)$; $B = (a; 0; 0)$,

$B_1 = (a; 0; a)$; $C = (a; a; 0)$,

$D = (0; a; 0)$; $A_1 = (0; 0; a)$,

$D_1 = (0; a; a)$; $C_1 = (a; a; a)$.

Từ đó ta có:

$$M = \left(a; 0; \frac{a}{2}\right);\ N = \left(\frac{a}{2}; a; 0\right);\ P = \left(0; \frac{a}{2}; a\right),$$

Từ đó ta có: $\overrightarrow{MP} = \left(-a; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$ và $\overrightarrow{C_1N} = \left(-\frac{a}{2}; 0; -a\right)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{CN}\right] = \left(\begin{vmatrix} \frac{a}{2} & \frac{a}{2} \\ 0 & -a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \frac{a}{2} & -a \\ -a & -\frac{a}{2} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -a & \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} & 0 \end{vmatrix}\right) = \left(-\frac{a^2}{2}; -\frac{5a^2}{4}; \frac{a^2}{4}\right). \quad (1)$$

Lại có $d(MP, CN) = d\left(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{CN}\right) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{CN}\right].\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{CN}\right]\right|}$. (2)

Vì $\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{a}{2}; a; -\frac{a}{2}\right)$ nên từ (1), (2) có:

$$d(MP, CN) = \frac{\left|\frac{a^3}{4} - \frac{5a^3}{4} - \frac{a^3}{8}\right|}{a^2\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{16} + \frac{1}{16}}} = \frac{\frac{9a^3}{8}}{a^2\frac{\sqrt{30}}{4}} = \frac{3a\sqrt{30}}{20}.$$

Ta thu lại kết quả giải thí dụ trên bằng phương pháp hình học không gian thuần túy (xem thí dụ 10, mục B, II, chương 2)

Thí dụ 10. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có độ dài cạnh là 2a, đáy là tam giác vuông tại A có AB = a; AC = $a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tìm cosin của góc giữa hai đường thẳng AA' và B'C'.

Giải

Ta có AB = a, AC = $a\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ BC = 2a $\Rightarrow$ AM = BM = AB = a.

Kẻ AH $\perp$ BC $\Rightarrow$ HM = HB = $\dfrac{a}{2}$.

Kẻ Mx $\perp$ BC (tức Mx // AH)

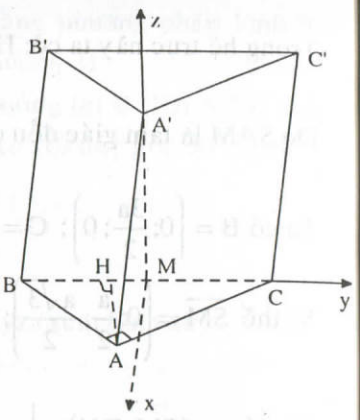
Dựng hệ trục tọa độ Mxyz (xem hình vẽ).

Khi đó ta có

$M = (0; 0; 0)$, $A = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; 0\right)$,

$A' = \left(0; 0; 2\sqrt{3}\right)$, $B = (0; -a; 0)$, $C = (0; a; 0)$

(vì $A'M = \sqrt{A'A^2 - AM^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$)

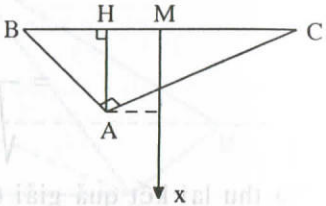


Ta có: $(AA', B'C') = (AA', BC)$

$\Rightarrow \cos(AA', B'C') = \cos(AA', BC)$

$$= \left|\cos\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BC}\right)\right|$$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{AA'}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|}. \qquad (1)$$



Vì $\overrightarrow{AA'} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; a\sqrt{3}\right)$; $\overrightarrow{BC} = (0; 2a; 0)$

Thay lại vào (1) và có $\cos(AA', B'C') = \frac{a^2}{\sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + 3a^2.2a}} = \frac{1}{4}$.

Ta thu lại kết quả tính bằng phương pháp sử dụng thuần túy hình học không gian (xem thí dụ 1, mục A, III, chương 2).

Thí dụ 11. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh là 2a, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và (SAB) vuông góc với đáy (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Tìm cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

Giải

Ta có $(SAB) \perp (ABCD)$ mà $(SAB) \cap (ABCD) = AB$, nên nếu kẻ $SH \perp AB$, thì SH vuông góc với (ABCD).

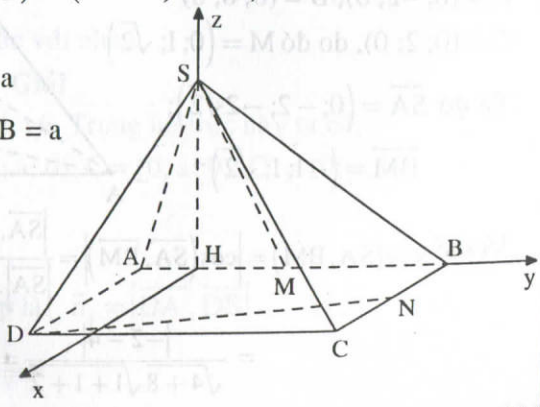
Ta có $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$; $AB = 2a$

$\Rightarrow \widehat{ASB} = 90^0 \Rightarrow SM = MA = MB = a$

(ở đây M là trung điểm của AB)

$\Rightarrow HA = \frac{a}{2}$.

Từ H kẻ Hx // BC và dựng hệ trục tọa độ Hxyz (xem hình vẽ)



Trong hệ trục này ta có: $H = (0; 0; 0)$, $M = \left(0; \frac{a}{2}; 0\right)$.

Do SAM là tam giác đều cạnh $a \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S = \left(0; 0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ta có $B = \left(0; \frac{3a}{2}; 0\right)$; $C = \left(2a; \frac{3a}{2}; 0\right) \Rightarrow N = \left(a; \frac{3a}{2}; 0\right)$; $D = \left(2a; -\frac{a}{2}; 0\right)$

Vì thế $\overrightarrow{SM} = \left(0; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$; $\overrightarrow{DN} = (-a; 2a; 0)$

Từ đó $\cos(SM, DN) = \left|\cos\left(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{DN}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{DN}\right|}{\left|\overrightarrow{SM}\right|.\left|\overrightarrow{DN}\right|}$

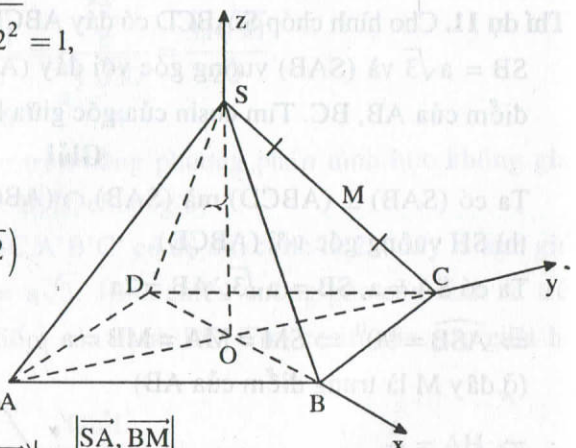
$$= \frac{a^2}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}}.\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Ta thu lại kết quả giải thí dụ trên bằng phương pháp hình học không gian thuần túy (xem thí dụ 2, mục A, III chương 2).

Thí dụ 12. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thoi cạnh bằng $\sqrt{5}$, $AC = 4$ và chiều cao của hình chóp là $SO = 2\sqrt{2}$, ở đây $AC \cap BD = O$. Gọi M là trung điểm của SC. Tìm góc giữa hai đường thẳng SA và BM.

Giải

Vì $AC \perp BD$, $SO \perp (ABCD)$, nên chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ.



Ta có $OC = 2$, $OB = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 2^2} = 1$,

nên trong hệ trục này ta có:

$O = (0; 0; 0)$; $S = \left(0; 0; 2\sqrt{2}\right)$

$A = (0; -2; 0)$; $B = (0; 0; 0)$

$C = (0; 2; 0)$, do đó $M = \left(0; 1; \sqrt{2}\right)$

Từ đó $\overrightarrow{SA} = \left(0; -2; -2\sqrt{2}\right)$;

$\overrightarrow{BM} = \left(-1; 1; \sqrt{2}\right)$

Vì thế $\cos(SA, BM) = \left|\cos\left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}\right|}{\left|\overrightarrow{SA}\right|.\left|\overrightarrow{BM}\right|}$

$$= \frac{|-2-4|}{\sqrt{4+8}\sqrt{1+1+2}} = \frac{6}{2\sqrt{3}.2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (SA, BM) = 30^0.$$

Ta thu lại kết quả bằng cách giải ví dụ trên bằng phương pháp hình học không gian thuần túy (xem thí dụ 3, mục A, III chương 2)

Thí dụ 13. Cho hình chóp S.ABC đáy là tam giác vuông tại B (BA = BC = 2a) và SA vuông góc với đáy (ABC). Biết rằng SB tạo với đáy góc 60^0. Tìm góc giữa hai đường thẳng AB và SC.

Giải

Ta có $\widehat{SBA} = 60^0 \Rightarrow SA = 2a.\tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$.

Dựng hình vuông ABCD và xét hệ trục tọa độ Axyz (xem hình vẽ)

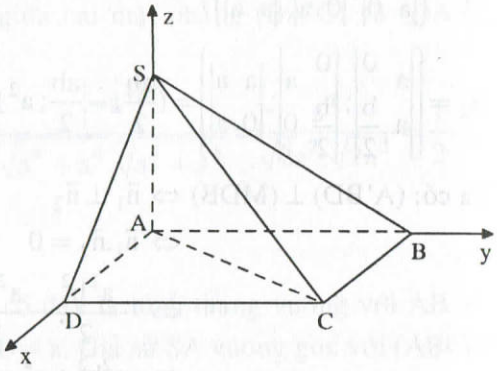
Trong hệ trục này ta có

$A = (0; 0; 0)$; $S = \left(0; 0; 2a\sqrt{3}\right)$

$B = (0; 2a; 0)$; $C = (2a; 2a; 0)$

$\overrightarrow{AB} = (0; 2a; 0)$;

$\overrightarrow{SC} = \left(2a; 2a; -2a\sqrt{3}\right)$



Ta có:

$$\cos(AB, SC) = \left|\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}\right)\right|$$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{SC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{SC}\right|} = \frac{4a^2}{2a.\sqrt{4a^2 + 4a^2 + 12a^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy $(AB, SC) = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Ta thu lại kết quả giải ví dụ trên bằng phương pháp hình học không gian thuần túy (xem thí dụ 4, mục A, III chương 2).

Thí dụ 14. Cho hình hộp chữ nhật ABCDA'B'C"D' đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên AA' = b. Gọi M là trung điểm của CC'. Tìm tỷ số $\frac{a}{b}$ để (A'BD) và (MBD) là hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

Giải

Dựng hệ trục tọa độ Dxyz như hình vẽ. Trong hệ trục này ta có:

$D = (0; 0; 0)$; $A' = (a; 0; b)$; $B = (a; a; 0)$; $C = (0; a; 0)$; $C' = (0; a; b)$

$\Rightarrow M = \left(0; a; \frac{b}{2}\right)$

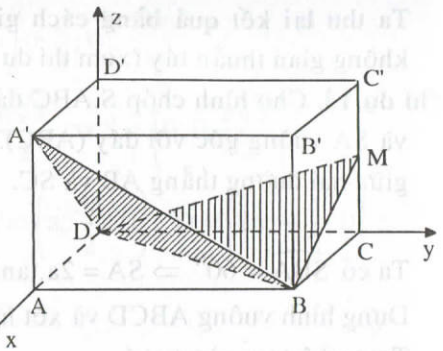
Mặt phẳng (A'BD) có véc–tơ pháp là: $\vec{n}_1 = \left[\overrightarrow{DA'}, \overrightarrow{DB}\right]$ (1)

Mặt phẳng (MBD) có véctơ pháp là:

$\vec{n}_2 = \left[\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DB}\right]$ (2)

Ta có: $\overrightarrow{DA'} = (a; 0; b)$;

$\overrightarrow{DB} = (a; a; 0); \overrightarrow{DM} = \left(0; a; \frac{b}{2}\right)$



Vì thế từ (1) (2) có:

$\vec{n}_1 = \left(\begin{vmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} b & a \\ 0 & a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & 0 \\ a & a \end{vmatrix}\right) = (-ab; ab; a^2)$,

$\vec{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} a & 0 \\ a & \frac{b}{2} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & a \\ \frac{b}{2} & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & a \end{vmatrix}\right) = \left(\frac{ab}{2}; -\frac{ab}{2}; a^2\right)$.

Ta có: $(A'BD) \perp (MDB) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

$\Leftrightarrow \vec{n}_1 . \vec{n}_2 = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{a^2b^2}{2} - \frac{a^2b^2}{2} + a^4 = 0$

$\Leftrightarrow -a^2b^2 + a^4 = 0$

$\Leftrightarrow a^2(a^2 - b^2) = 0.$ (3)

Do $a > 0, b > 0$, nên (3) $\Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1$.

Vậy $\frac{a}{b} = 1$ là điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (A'BD) và (MBD) là vuông góc với nhau.

Thí dụ 15.

Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D'. Tìm góc giữa hai mặt phẳng (BA'C) và (DA'C).

Giải

Xét hệ tọa độ Bxyz như hình vẽ.

Giả sử cạnh của hình lập phương là a,

khi đó trong hệ trục này ta có:

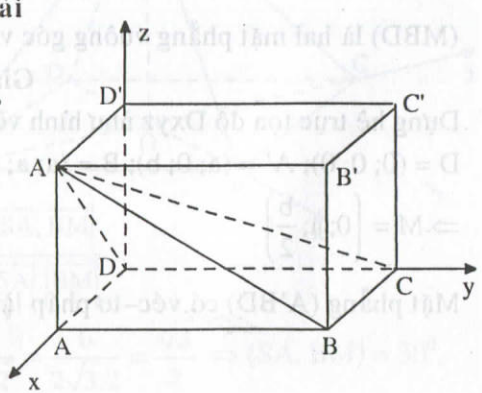
B = (0; 0; 0); A' = (a; 0; a)

C = (0; a; 0); D = (a; a; 0)

Mặt phẳng (BA'C) có

véc tơ chỉ phương là:

$\vec{n}_1 = \left[\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{BC}\right]$. (1)



Mặt phẳng (DA'C) có véc tơ chỉ phương là: $\vec{n}_2 = \left[\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{DC}\right]$. (2)

Ta có: $\overrightarrow{A'C} = (-a; a; -a)$; $\overrightarrow{DC} = (-a; 0; 0)$ và $\overrightarrow{BC} = (0; a; 0)$.

Do đó từ (1) (2) có:

$$\vec{n}_1 = \left(\begin{vmatrix} a & -a \\ a & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -a & -a \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -a & a \\ 0 & a \end{vmatrix}\right) = (a^2; 0; -a^2),$$

$$\vec{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} a & -a \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -a & -a \\ 0 & -a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -a & a \\ -a & 0 \end{vmatrix}\right) = (0; a^2; a^2).$$

Theo qui ước nếu gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (BA'C) và (DA'C) thì $\alpha \le 90^0$ và từ đó ta có:

$$\cos\alpha = \left|\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)\right| = \frac{|\vec{n}_1, \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| . |\vec{n}_2|} = \frac{\left|-a^4\right|}{\sqrt{a^4 + a^4} . \sqrt{a^4 + a^4}} = \frac{a^4}{\sqrt{2}a^2 . \sqrt{2}a^2} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \alpha = 60^0$.

Vậy $\widehat{(BA'C), (DA'C)} = 60^0$.

Thí dụ 16. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông với AB // CD, AB = 2a; CD = a và đường cao AD = a. Giả sử SA vuông góc với (ABCD) và $SA = a\sqrt{2}$. Tìm góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Giải

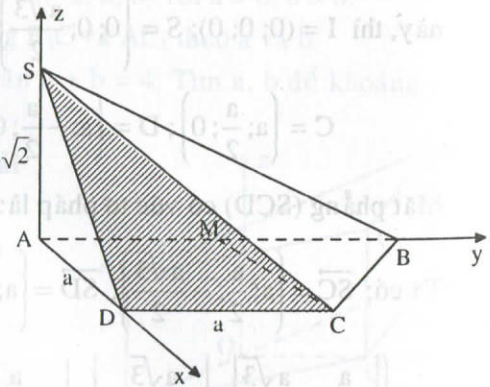
Dựng hệ trục Axyz như hình vẽ.

Trong hệ trục tọa độ này ta có:

$A = (0; 0; 0)$; $S = \left(0; 0; a\sqrt{2}\right)$

$B = (0; 2a; 0)$; $C = (a; a; 0)$

(và nếu gọi M là trung điểm của AB, thì $CM \perp AB$), $D = (a; 0; 0)$.



Mặt phẳng (SBC) có véc tơ pháp là:

$\vec{n}_1 = \left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}\right]$. (1)

Mặt phẳng (SDC) có véc tơ pháp là:

$\vec{n}_2 = \left[\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{SC}\right]$. (2)

Ta có: $\overrightarrow{SB} = \left(0; 2a; -a\sqrt{2}\right)$; $\overrightarrow{SC} = \left(a; a; -a\sqrt{2}\right)$; $\overrightarrow{SD} = \left(a; 0; -a\sqrt{2}\right)$

Vậy từ (1) (2) có:

$$\vec{n}_1 = \left(\begin{vmatrix} 2a & -a\sqrt{2} \\ a & -a\sqrt{2} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -a\sqrt{2} & 0 \\ -a\sqrt{2} & a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 2a \\ a & a \end{vmatrix}\right) = \left(-a^2\sqrt{2}; -a^2\sqrt{2}; -2a^2\right)$$

$$\vec{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} 0 & -a\sqrt{2} \\ a & -a\sqrt{2} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -a\sqrt{2} & a \\ -a\sqrt{2} & a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & 0 \\ a & a \end{vmatrix} \right) = \left(a^2\sqrt{2}; 0; a^2 \right)$$

Vậy nếu gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD), thì theo qui ước $\alpha \le 90^0$, nên ta có:

$$\cos\alpha = \left|\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)\right| = \frac{|\vec{n}_1 . \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| . |\vec{n}_2|} = \frac{\left|-2a^4 + 0 - 2a^4\right|}{a^2\sqrt{2+2+4}.a^2\sqrt{2+0+1}} = \frac{4}{a\sqrt{2}.\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ta thu lại kết quả giải ví dụ trên bằng phương pháp hình học không gian thuần túy (xem thí dụ 7, mục B, III, chương 2)

Ta nhận thấy với ví dụ này phương pháp sử dụng tọa độ là gọn gàng hơn.

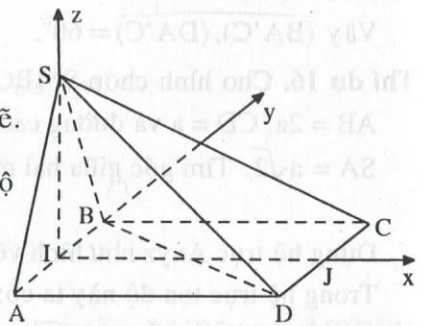
Thí dụ 17. Cho hình vuông ABCD và tam giác đều SAB cạnh a ở trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi I là trung điểm của cạnh AB. Tìm góc giữa SI và mặt phẳng (SCD).

Giải

Ta có SI ⊥ (ABCD).

Gọi J là trung điểm CD, thì IJ ⊥ AB.

Vì thế dựng hệ trục tọa độ Ixyz như hình vẽ.



Ta có: $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, từ đó trong hệ trục tọa độ này, thì $I = (0; 0; 0)$; $S = \left(0; 0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$;

$$C = \left(a; \frac{a}{2}; 0\right); D = \left(a; -\frac{a}{2}; 0\right).$$

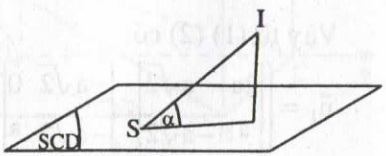
Mặt phẳng (SCD) có véc tơ pháp là: $\vec{n} = \left[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}\right]$ (1)

Ta có: $\overrightarrow{SC} = \left(a; \frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$; $\overrightarrow{SD} = \left(a; -\frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, vậy từ (1) có:

$$\vec{n} = \left(\begin{vmatrix} \frac{a}{2} & -\frac{a\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{a}{2} & -\frac{a\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -\frac{a\sqrt{3}}{2} & a \\ -\frac{a\sqrt{3}}{2} & a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & \frac{a}{2} \\ a & -\frac{a}{2} \end{vmatrix} \right) = \left(-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}; 0; -a^2 \right).$$

Lại có $\overrightarrow{SI} = \left(0; 0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

Gọi α là góc giữa SI và mặt phẳng (SCD) thì



$$\sin\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{SI}, \vec{n}\right)\right|. \qquad (2)$$

Ta có $\left|\cos\left(\overrightarrow{SI}, \vec{n}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{SI}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{SI}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \dfrac{\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}}{a^2\sqrt{\dfrac{3}{4}+1}.a.\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}.$

Vậy từ (2) suy ra $\alpha = \arcsin\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

Chú ý: Theo cách giải bằng phương pháp hình học không gian thuần túy, ta có:

$\alpha = \arctan\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Để ý rằng $\tan\alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cot\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{3}{4}}} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}.$

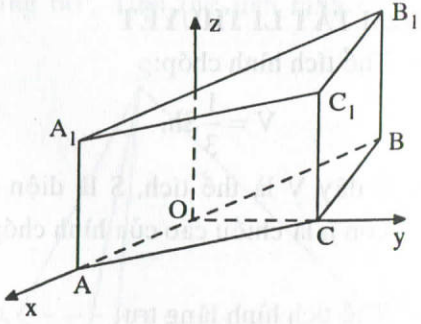
Ta thu lại hai kết quả như nhau (xem thí dụ 8, mục B, III, chương 2)

Thí dụ 18. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình lăng trụ đứng $ABCA_1B_1C_1$. Biết A(a; 0; 0), B(–a; 0; 0), C(0; 1; 0), B_1(–a; 0; b) với a > 0, b > 0.

1. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1C và AC_1 theo a và b.
2. Cho a, b thay đổi nhưng luôn thỏa mãn a + b = 4. Tìm a, b để khoảng cách giữa B_1C và AC_1 là lớn nhất.

Giải



1. Ta có: $A_1 = (a; 0; b)$, $C_1 = (0; 1; b)$.

Theo công thức tính khoảng cách giữa hai đường thẳng ta có:

$$d\left(B_1C, AC_1\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AC_1}\right].\overrightarrow{CC_1}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AC_1}\right]\right|}. \qquad (1)$$

Do $\overrightarrow{B_1C} = (a; 1; -b)$; $\overrightarrow{AC_1} = (-a; 1; b)$; $\overrightarrow{CC_1} = (0; 0; b)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AC_1}\right] = \left(\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 1 & b \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -b & a \\ b & -a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & 1 \\ -a & 1 \end{vmatrix}\right) = (2b; 0; 2a).$$

Thay vào (1) và có: $d\left(B_1C, AC_1\right) = \dfrac{2b}{\sqrt{4b^2+4a^2}} = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$ (2)

2. Từ (2) và áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$d(B_1C, AC_1) \le \frac{ab}{\sqrt{2ab}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{ab} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a+b}{2} = \sqrt{2} \text{ (do } a + b = 4).$$

Vậy $\max d(B_1C, AC_1) = \sqrt{2} \Leftrightarrow a = b = 2$.

Nhận xét: Trong các thí dụ 1 – 17 bài toán ra dưới dạng hình học không gian, nhưng khi giải ta dùng phương pháp tọa độ, còn trong bài trên đề bài ra dưới dạng hình học tọa độ nên việc sử dụng phương pháp tọa độ để giải bài toán này là hợp lí.

Bình luận: Qua các thí dụ 1 – 18, ta rút ra phương pháp giải các bài toán về khoảng cách và góc trong hình học không gian bằng phương pháp tọa độ như sau:

- Lập một hệ trục tọa độ thích hợp với đầu bài.
- Tìm tọa độ của các điểm, các véc tơ cần thiết.
- Sử dụng các công thức tương ứng đã biết để tính các đại lượng theo yêu cầu đầu bài.

Cần nhấn mạnh rằng, việc xây dựng hệ trục tọa độ là quan trọng nhất vì nó đảm bảo cho việc tính toán ở các bước tiếp theo là đơn giản hay phức tạp phụ thuộc vào việc lựa chọn hệ trục tọa độ ban đầu.

V. THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

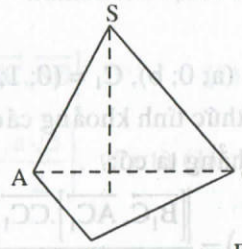
Bài toán tính thể tích của khối đa diện là một trong những chủ đề thiết yếu của chương trình hình học được giảng dạy trong chương trình ở nhà trường trung học phổ thông. Nội dung này luôn luôn được đề cập đến trong đề thi tuyển sinh môn toán vào các trường Đại học và Cao đẳng ở các khối A, B và D.

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

- Thể tích hình chóp:

$$V = \frac{1}{3}Sh,$$

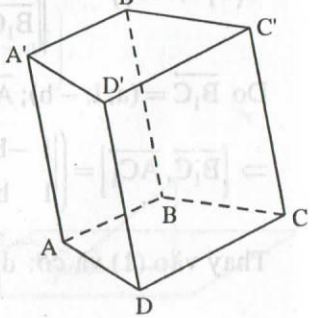
ở đây V là thể tích, S là diện tích đáy còn h là chiều cao của hình chóp.



- Thể tích hình lăng trụ:

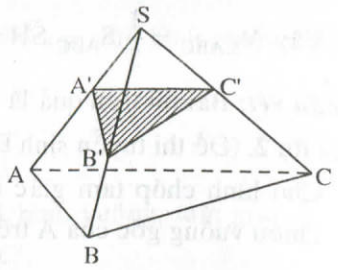
$$V = Sh,$$

ở đây V là thể tích, S là diện tích đáy còn h là chiều cao của lăng trụ.



– Người ta thường sử dụng kết quả sau đây:

Cho hình chóp tam giác S.ABC. Lấy A', B', C' tương ứng trên SA, SB, SC. Khi đó ta có $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$



A. Tính thể tích bằng cách sử dụng trực tiếp các công thức về thể tích.

Phương pháp giải bài toán thuộc loại này được tiến hành như sau:

– Xác định đường cao của khối đa diện cần tính thể tích. Trong nhiều trường hợp chiều cao này dễ dàng xác định được ngay từ đầu bài. Nhìn chung việc xác định này phải dựa vào các định lí về quan hệ vuông góc đã học trong chương trình hình học lớp 11 (hay dùng nhất là các định lí về điều kiện để một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng).

Việc tính chiều cao thông thường nhờ vào việc sử dụng định lí Pitago, hoặc nhờ đến phép tính lượng giác.

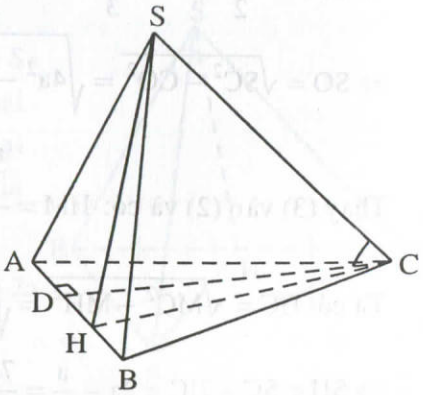
– Tìm diện tích đáy bằng các công thức quen biết.

Các bài toán thuộc loại này rất cơ bản, chỉ đòi hỏi việc tính toán cẩn thận và chính xác.

Thí dụ 1. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2012)

Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho HA = 2HB. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích hình chóp S.ABC.

Giải



Ta có $\widehat{SCH} = 60^0$ (g/t)

Gọi D là trung điểm của AB,

khi đó do $HD = HA - AD = \frac{2}{3}a - \frac{a}{2} = \frac{a}{6}$

Vì $CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, nên

$$HC = \sqrt{HD^2 + DC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{36} + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

Trong tam giác vuông SHC, ta có: $SH = HC.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{21}}{3}$

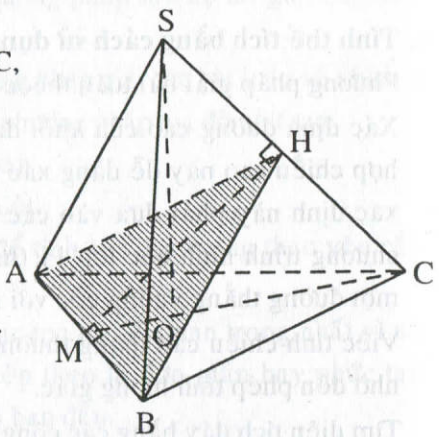
Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{21}}{3} = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}$.

Nhận xét: Bài thi trên quả là rất cơ bản và đơn giản.

Thí dụ 2. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2012)

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC với SA = 2a, AB = a. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SC. Tìm thể tích hình chóp S.ABH.

Giải



Vẽ chiều cao SO của hình chóp S.ABC, khi đó O là tâm của tam giác đều ABC.

Giả sử $CO \cap AB = M \Rightarrow CM \perp AB$.

Mặt khác $AB \perp SO$ (do $SO \perp (ABC)$)

$\Rightarrow AB \perp (SCM) \Rightarrow AB \perp SC$.

Lại có $AH \perp SC \Rightarrow SC \perp (ABH)$

$\Rightarrow$ SH là chiều cao của hình chóp S.ABH.

Mặt khác do $AB \perp (SCM) \Rightarrow AB \perp HM$

$\Rightarrow S_{ABH} = \frac{1}{2}AB.HM$.

Từ đó $V_{S.ABH} = \frac{1}{3}S_{HAB}.SH = \frac{1}{6}AB.HM.SH$. (1)

Trong ΔSMC, ta có: $SO.MC = SC.HM$ $(= 2S_{SMC})$

$\Rightarrow HM = \frac{SO.MC}{SC}$. (2)

Vì $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; CO = \frac{2}{3}CM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$,

$\Rightarrow SO = \sqrt{SC^2 - CO^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{33}}{3}$, (3)

Thay (3) vào (2) và có: $HM = \frac{\frac{a\sqrt{33}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2a} = \frac{a\sqrt{11}}{4}$. (4)

Ta có: $HC = \sqrt{MC^2 - MH^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{11a^2}{16}} = \frac{a}{4}$

$\Rightarrow SH = SC - HC = 2a - \frac{a}{4} = \frac{7a}{4}$. (5)

Thay (4) (5) vào (1) và có: $V_{S.ABH} = \frac{1}{6}a.\frac{a\sqrt{11}}{4}.\frac{7a}{4} = \frac{7\sqrt{11}a^3}{96}$.

Nhận xét:

1. Trong bài thi trên, việc phát hiện ra SH là chiều cao của hình chóp S.AHB không nhận ra ngay như trong thí dụ 1.
2. Ta có cách khác giải ví dụ này trong mục B

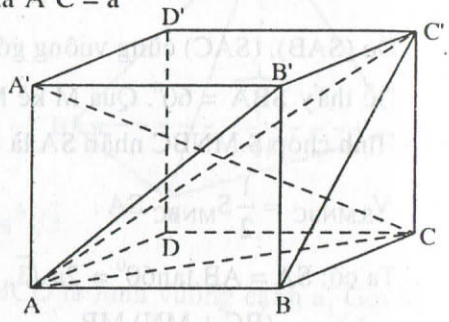
Thí dụ 3. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2012)

Cho hình hộp đứng ABCDA'B'C'D' có đáy là hình vuông, tam giác A'AC vuông cân, A'C = a. Tìm thể tích tứ diện ABB'C'.

Giải

Vì AA'C là tam giác vuông cân đỉnh A mà A'C = a

$\Rightarrow AA' = AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AB = \dfrac{a}{2}.$



Vì C'B' ⊥ (ABB'A')

⇒ C'B' là chiều cao hình chóp C'.ABB'

Từ đó:

$V_{ABB'C'} = V_{C'.ABB'} = \dfrac{1}{3} S_{ABB'}.C'B'$

$= \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2} AB.BB'.C'B' = \dfrac{1}{6}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{48}.$

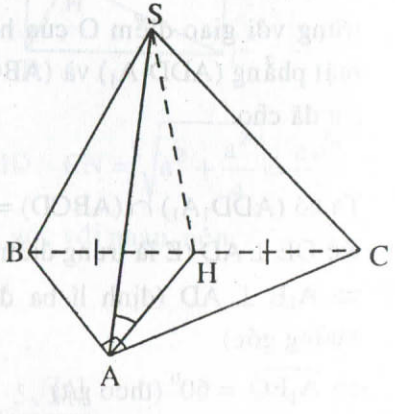
Nhận xét: Bài toán là đơn giản sau khi nhận biết tứ diện ABB'C' chính là hình chóp đỉnh C' đáy là tam giác ABB' và có chiều cao chính là C'B'.

Thí dụ 4. (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A – 2012)

Cho hình chóp S.ABC đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a\sqrt{2}$, SA = SB = SC. Góc giữa SA và (ABC) bằng 60^0. Tìm thể tích hình chóp S.ABC.

Giải

Vì SA = SB = SC, nên hình chiếu H của S trên (ABC) chính là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Vì ABC là tam giác vuông tại A nên H là trung điểm của BC. Từ giả thiết suy ra $\widehat{SAH} = 60^0$



Do $AB = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow BC = \left(a\sqrt{2}\right)\sqrt{2} = 2a$

$\Rightarrow AH = \dfrac{BC}{2} = a.$

Trong tam giác vuông SAH, ta có: $SH = AH.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$

Vậy $S_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AB.AC.SH = \frac{1}{6}.a\sqrt{2}.a\sqrt{2}.a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Nhận xét: Bài thi là rất đơn giản!

Thí dụ 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, AB = BC = 2a, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với (ABC). Gọi M là trung điểm của AB. Mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tìm thể tích hình chóp S.BCNM.

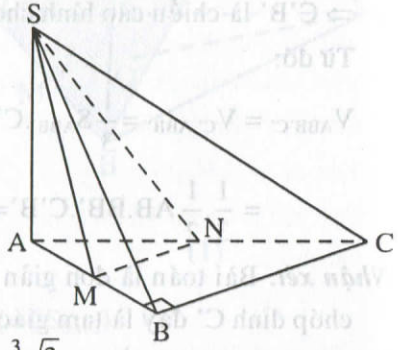
Giải

Do (SAB), (SAC) cùng vuông góc với (ABC) $\Rightarrow$ SA $\perp$ (ABC).

Dễ thấy $\widehat{SBA} = 60^0$. Qua M kẻ MN // BC (N $\in$ AC).

Hình chóp S.MNBC nhận SA là đường cao, ta có:

$V_{S.MNBC} = \frac{1}{2}S_{MNBC}.SA$. (1)



Ta có: $SA = AB.\tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$.

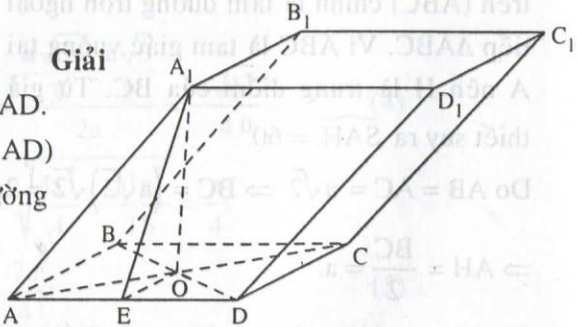
$S_{MNBC} = \frac{(BC+MN).MB}{2}$

$= \frac{(2a+a).a}{2} = \frac{3a^2}{2}$.

Từ đó theo (1) có $V_{S.MNBC} = \frac{1}{2}.\frac{3a^2}{2}.2a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$.

Thí dụ 6. Cho hình lăng trụ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A_1 trên mặt phẳng (ABCD) trùng với giao điểm O của hai đường chéo AC, BD của đáy. Biết rằng hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và (ABCD) tạo với nhau góc 60^0. Tìm thể tích của lăng trụ đã cho.

Giải



Ta có $(ADD_1A_1) \cap (ABCD) = AD$.

Kẻ OE $\perp$ AD (E là trung điểm AD)

$\Rightarrow A_1E \perp AD$ (định lí ba đường vuông góc)

$\Rightarrow \widehat{A_1EO} = 60^0$ (theo g/t)

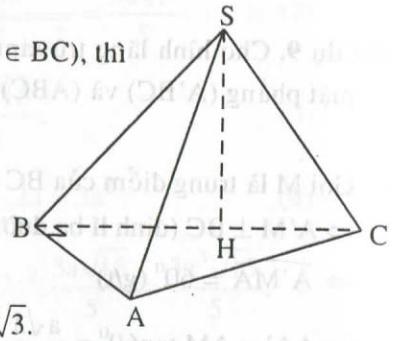
Ta có $A_1O = OE.\tan 60^0 = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

Ta lại thấy: $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD}.A_1O = a.a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^3}{2}$

Thí dụ 7. Cho hình chóp S.ABC đáy là tam giác vuông ABC tại B, AB = 3a, BC = 4a. Biết rằng mặt phẳng (SBC) vuông góc với (ABC). Giả sử SB = $a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^0$. Tìm thể tích hình chóp S.ABC.

Giải

Do (SBC) ⊥ (ABC), nên nếu kẻ SH ⊥ BC (H ∈ BC), thì SH ⊥ (ABC)



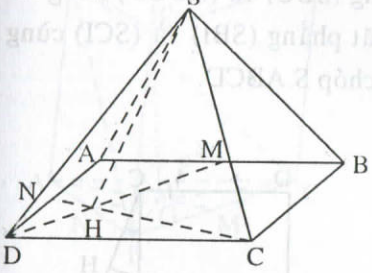
Ta có $SH = SB.\sin 30^0 = 2a\sqrt{3}.\frac{1}{2} = a\sqrt{3}$.

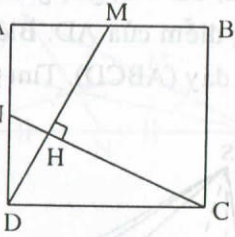
$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}\frac{AB.BC}{2}.SH$$

$$= \frac{1}{3}\frac{3a.4a}{2}a\sqrt{3} = 2a^3\sqrt{3}.$$

Thí dụ 8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AD. Giả sử H là giao điểm của CN và DM. Biết rằng SH = $a\sqrt{3}$ và vuông góc với (ABCD). Tìm thể tích hình chóp S.SDMN.

Giải





Trong hình vuông ABCD ta có MD ⊥ CN và $MD = CN = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Do MNDC là tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau, nên

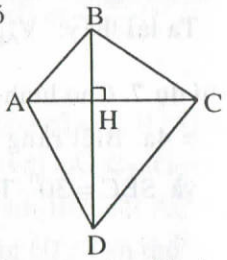
$$S_{MNDC} = \frac{1}{2}MD.NC = \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{8}.$$

Ta có: $V_{S.CDNM} = \frac{1}{3}S_{CDNM}.SH = \frac{1}{3}.\frac{5a^2}{8}.a\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}a^3}{24}.$

Chú ý: Cần nhớ lại công thức sau: Giả sử ABCD là tứ giác có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Khi đó:

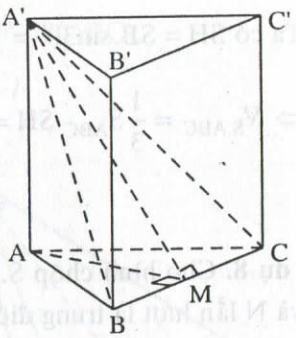
$$S_{ABCD} = S_{BAC} + S_{DAC}$$

$$= \frac{1}{2}AC.BH + \frac{1}{2}AC.HD = \frac{1}{2}AC.BD$$



Thí dụ 9. Cho hình lăng trụ tam giác đều ABCA'B'C' có AB = a, góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) bằng 60^0. Tìm thể tích lăng trụ ấy.

Giải



Gọi M là trung điểm của BC

$\Rightarrow$ A'M $\perp$ BC (định lí ba đường vuông góc)

$\Rightarrow \widehat{A'MA} = 60^0$ (g/t)

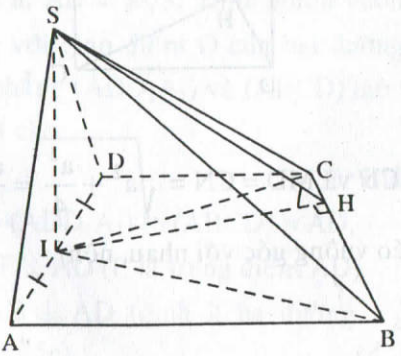
$\Rightarrow AA' = AM.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{3a}{2}.$

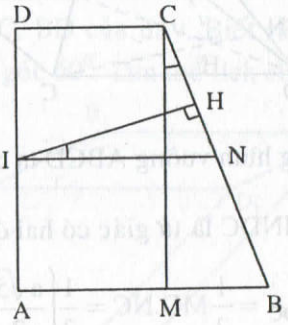
Ta có:

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{3a}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}.$$

Thí dụ 10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và D, AB = AD = 2a, CD = a, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của AD. Biết rằng hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với đáy (ABCD). Tìm thể tích khối chóp S.ABCD.

Giải





Do (SIB) và (SIC) cùng vuông góc với (ABCD) $\Rightarrow$ SI $\perp$ (ABCD)

(SBC) $\cap$ (ABCD) = BC.

Kẻ IH $\perp$ BC $\Rightarrow$ SH $\perp$ BC (định lí ba đường vuông góc) $\Rightarrow \widehat{SHI} = 60^0$ (g/t)

$\Rightarrow SI = IH.\tan 60^0 = IH.\sqrt{3}$. (1)

Gọi M và N tương ứng là trung điểm của AB, BC. Vì IN là đường trung bình của hình thang ABCD $\Rightarrow IN = \dfrac{DC+AB}{2} = \dfrac{a+2a}{2} = \dfrac{3a}{2}$.

Ta có $IH = IN.\cos\widehat{HIN} = IN.\cos\widehat{MCB}$

$$= IN.\frac{CM}{BC} = \frac{3a}{2}.\frac{2a}{\sqrt{4a^2+a^2}} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}. \quad (2)$$

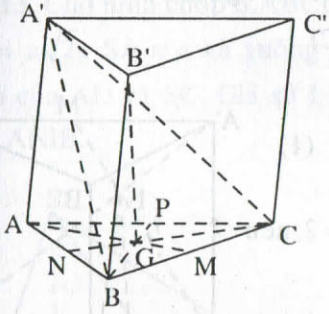
Thay (2) vào (1) và có: $SI = \dfrac{3a\sqrt{5}}{5}.\sqrt{3} = \dfrac{3a\sqrt{15}}{5}$. (3)

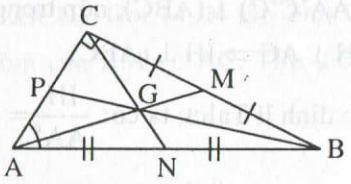
Lại có $S_{ABCD} = \dfrac{AB+CD}{2}.AD = IN.AD = \dfrac{3a}{2}.2a = 3a^2$. (4)

Từ (3) (4) suy ra: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SI = \dfrac{1}{3}.3a^2.\dfrac{3a\sqrt{15}}{5} = \dfrac{3a^3\sqrt{15}}{5}$.

Thí dụ 10. Cho hình lăng trụ ABCA'B'B'C' có cạnh bên BB' = a và BB' tạo với đáy (ABC) góc 60^0. Giả sử ABC là tam giác vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của B' lên (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Tính thể tích tứ diện A'ABC.

Giải





Gọi G là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow$ B'G $\perp$ (ABC).

Ta có $\widehat{B'BG} = 60^0 \Rightarrow BG = BB'.\cos 60^0 = \dfrac{a}{2}$

$$\Rightarrow B'G = BB'.\sin 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Đặt AB = 2x.

Trong tam giác vuông BAC ta có: AC = x (do $\widehat{ABC}$ 30^0), $BC = x\sqrt{3}$

Giả sử $BG \cap AC = P \Rightarrow BP = \dfrac{3}{2}BG = \dfrac{3a}{4}$

Trong tam giác vuông BCP theo định lí Pitago, thì

$BP^2 = BC^2 + PC^2 \Leftrightarrow \frac{9a^2}{16} = 3x^2 + \frac{x^2}{4}$ $\left(\text{do } PC = \frac{AC}{2} = \frac{x}{2}\right)$

$\Rightarrow x^2 = \frac{9a^2}{52}$. (1)

Ta có: $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC}.B'G$ (2)

(do (A'B'C') // (ABC) $\Rightarrow$ d(A', (ABC)) = d(B', (ABC)) = B'G)

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}CA.CB = \frac{1}{2}x.x\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 = \frac{9\sqrt{3}a^2}{104}$ (do (1)).

Từ đó thay vào (2), ta có: $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{9\sqrt{3}a^2}{104}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{9a^3}{208}$.

Thí dụ 11. Cho hình lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy là tam giác vuông ABC tại B. Giả sử AB = a, AA' = 2a, AC' = 3a. Gọi M là trung điểm của A'C' và I là giao điểm của AM và A'C. Tìm thể tích tứ diện IABC.

Giải

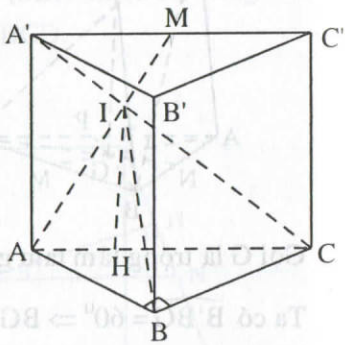
Trong tam giác vuông A'AC ta có $AC = \sqrt{9a^2 - 4a^2} = a\sqrt{5}$

$\Rightarrow BC = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a$ (xét trong tam giác vuông ABC).

Do (AA'C'C) $\perp$ (ABC), nên trong (AA'C'C)

kẻ IH $\perp$ AC $\Rightarrow$ IH $\perp$ (ABC)

Theo định lí Talet, ta có: $\frac{IH}{AA'} = \frac{CI}{CA'}$. (1)



Do M là trung điểm của A'C' nên: $\frac{AC}{A'M} = 2$, nên

$\frac{CI}{IA'} = \frac{AC}{A'M} = 2 \Rightarrow \frac{CI}{CI + IA'} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{CI}{CA'} = \frac{2}{3}$ (2)

Từ (1) (2) có: $\frac{IH}{AA'} = \frac{2}{3} \Rightarrow IH = \frac{2}{3}AA' = \frac{4a}{3}$.

Ta có $V_{I.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.IH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}BA.BC.IH = \frac{1}{6}.a.2a.\frac{4a}{3} = \frac{4a^3}{9}$.

Thí dụ 12. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông ABCD cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC, CD. Tìm thể tích tứ diện CMNP.

Giải

Do (SAB) ⊥ (ABCD), nên nếu kẻ SH ⊥ AB

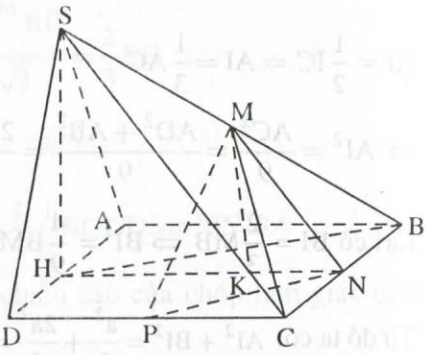
⇒ SH ⊥ (ABCD).

Ta có H là trung điểm của AB.

Trong tam giác SHB kẻ MK // SH

⇒ MK ⊥ (ABCD).

Khi đó MK là chiều cao của hình chóp tam giác M.PCN, và có:



$$MK = \frac{1}{2}SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

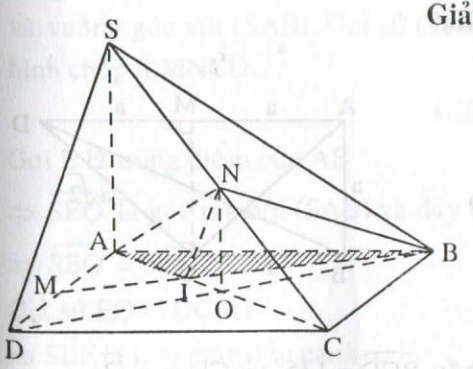
Ta có:

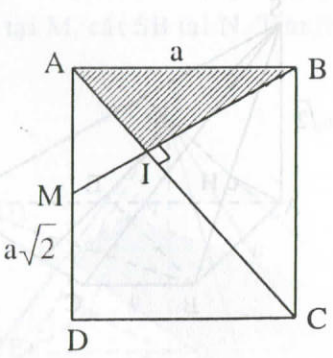
$$V_{CMNP} = V_{M.NCP} = \frac{1}{3}S_{CNP}.MK = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}CP.CN.MK$$

$$= \frac{1}{6}\frac{a}{2}\frac{a}{2}\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}$$

Thí dụ 13. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = $a\sqrt{2}$, SA = a và vuông góc với (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC. Giả sử I là giao điểm của BM và AC. Tìm thể tích tứ diện ANIB.

Giải





Gọi O là tâm của đáy ABCD ⇒ NO // SA ⇒ NO ⊥ (ABCD), vậy NO là chiều cao hình chóp tam giác đỉnh N, đáy là tam giác AIB.

Ta có: $V_{ANIB} = V_{N.AIB} = \frac{1}{3}S_{AIB}.NO$. (1)

Ta có $NO = \frac{1}{2}AS = \frac{a}{2}$. (2)

Xét hình chữ nhật ABCD. Ta có: $MA = \frac{1}{2}AD \Rightarrow MA = \frac{1}{2}BC$, vậy suy ra

$AI = \frac{1}{2}IC \Rightarrow AI = \frac{1}{3}AC$

$\Rightarrow AI^2 = \frac{AC^2}{9} = \frac{AD^2 + AB^2}{9} = \frac{2a^2 + a^2}{9} = \frac{a^2}{3}$.

Lại có $BI = \frac{2}{3}MB \Rightarrow BI^2 = \frac{4}{9}BM^2 = \frac{4}{9}\left(a^2 + \frac{a^2}{2}\right) = \frac{2a^2}{3}$.

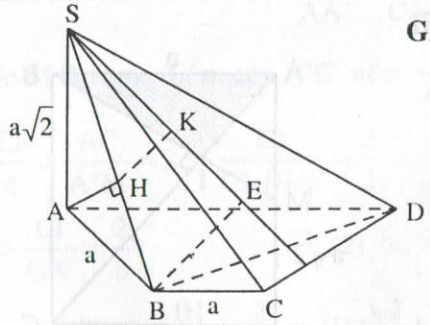
Từ đó ta có: $AI^2 + BI^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} = a^2 = AB^2$, vậy AIB là tam giác vuông tại I.

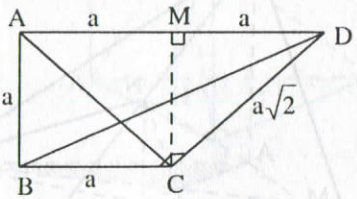
Từ đó $S_{AIB} = \frac{1}{2}IA.IB = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{6}$. (3)

Thay (2) (3) vào (1) và có: $V_{ANIB} = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{2}}{6}.\frac{1}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Thí dụ 14. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, trong đó $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^0$, BA = BC = a, AD = 2a. Giả sử SA vuông góc với đáy ABCD và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu của A trên SB. Tìm thể tích tứ diện SHCD.

Giải





Trong hình thang vuông ABCD dễ thấy $\widehat{BCD} = 135^0$ và $CD = a\sqrt{2}$.

Kẻ HK và BE cùng vuông góc (SCD) $\Rightarrow$ HK // BE và S, K, E thẳng hàng.

Theo định lí Talet, ta có: $\frac{HK}{BE} = \frac{SH}{SB}$ (1)

Ta có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

Trong tam giác vuông SAB, ta có:

$$SA^2 = SH.SB \Rightarrow SH = \frac{SA^2}{SB} = \frac{2a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$$

Do đó từ (1) suy ra: $HK = \frac{SH}{SB}BE = \frac{\frac{2\sqrt{3}a}{2}BE}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{3}BE.$

Từ đó $V_{H.SCD} = \frac{2}{3}V_{B.SCD}$. (2)

Lại có: $V_{B.SCD} = V_{S.BCD} = \frac{1}{3}.S_{BCD}.SA = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}BC.CD.\sin 135^0.SA$

(chú ý rằng SA ⊥ (ABCD), nên SA là chiều cao của chóp tam giác đỉnh S đáy là tam giác BCD)

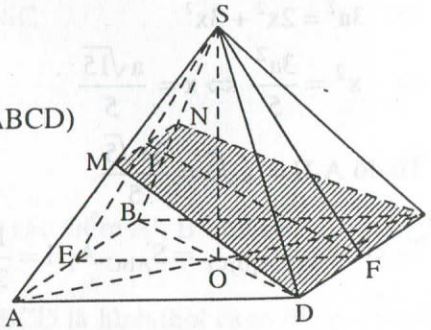
Vậy $V_{B.SCD} = \frac{1}{6}.a.a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (3)

Từ (2) (3) suy ra: $V_{SHCD} = V_{H.SCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Nhận xét: Qua thí dụ này ta thấy khi tính thể tích một tứ diện, cần khéo léo chọn một đỉnh thích hợp để qui về một hình chóp tam giác. Trong thí dụ trên ta coi tứ diện SHCD là hình chóp đỉnh H, đáy là tam giác SCD.

Thí dụ 15. Cho hình chóp tứ giác đều SABCD đáy là hình vuông cạnh a. Biết rằng mặt bên SAB tạo với đáy ABCD góc 60^0. Gọi (P) là mặt phẳng qua CD và vuông góc với (SAB). Giả sử (P) cắt SA tại M, cắt SB tại N. Tìm thể tích hình chóp S.MNCD.

Giải



Gọi E là trung điểm của AB

⇒ $\widehat{SEO}$ là góc tạo bởi (SAB) và đáy (ABCD)

⇒ $\widehat{SEO} = 60^0$.

Giả sử EO ∩ DC = F

⇒ SEF là tam giác đều cạnh a.

Gọi I là trung điểm của SE thì FI ⊥ SE.

Do SE ⊥ AB ⇒ SE ⊥ DC (vì AB // CD)

⇒ SE ⊥ (DCI) ⇒ (SAB) ⊥ (DCI) ⇒ (P) = (DCI)

Do DC // AB $\Rightarrow$ DC // (SAB) $\Rightarrow$ (DCI) $\cap$ (SAB) theo giao tuyến qua I và // DC. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của SA, SB với (DCI). Ta có M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB.

Hình chóp S.MNCD có đường cao là SI và đáy là hình thang MNDC.

Ta có: $V_{S.MNCD} = \frac{1}{3}S_{MNCD}.SI = \frac{1}{3}\frac{(CD+MN).IF}{2}.SI$. (1)

Ta có CD = a, MN = $\frac{a}{2}$; SI = $\frac{1}{2}$SE = $\frac{a}{2}$; IF = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, vì thế thay vào (1), ta có: $V_{S.MNCD} = \frac{1}{6}\left(a+\frac{a}{2}\right).\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Thí dụ 16. Cho lăng trụ tam giác $ABCA_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông cân với cạnh huyền AB = $a\sqrt{2}$. Mặt phẳng (AA_1B_1B) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Giả sử $AA_1 = a\sqrt{3}$, góc $\widehat{A_1AB}$ nhọn và mặt phẳng ACC_1A_1 tạo với đáy (ABC) góc 60^0. Tìm thể tích lăng trụ.

Giải

Kẻ $A_1H \perp AB \Rightarrow A_1H \perp (ABC)$.

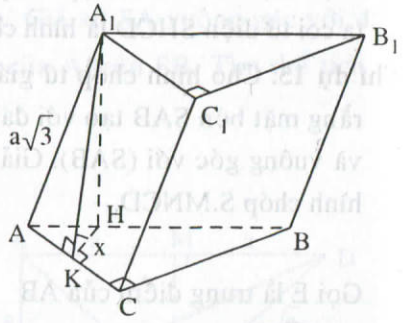
Kẻ $HK \perp AC \Rightarrow$ HK // BC và AKH là tam giác vuông cân đỉnh K.

Ta có $A_1K \perp AC$ (định lí ba đường vuông góc).

Đặt $KA = KH = x \Rightarrow AH = x\sqrt{2}$.

Do $\widehat{A_1KH} = 60^0$ (vì $\widehat{A_1KH}$ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (AA_1C_1C) và (ABC))

$\Rightarrow A_1K = 2x$ và $A_1H = x\sqrt{3}$



Trong tam giác vuông A_1AH, ta có:

$A_1A^2 = AH^2 + A_1H^2$

$\Leftrightarrow 3a^2 = 2x^2 + 3x^2$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{3a^2}{5} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Từ đó $A_1H = x\sqrt{3} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Ta có $V_{ABC.A_1B_1C_1} = S_{ABC}.A_1H = \frac{1}{2}CA.CB.A_1H$

$= \frac{1}{2}a.a.\frac{3a\sqrt{5}}{5}$ (do $CA = CB = \frac{a\sqrt{2}.\sqrt{2}}{2} = a$)

$= \frac{3a^3\sqrt{5}}{10}$.

B. Tính thể tích bằng cách sử dụng thể tích của các khối đa diện khác

Trong nhiều bài toán việc tính trực tiếp thể tích khối đa diện như trong phần A có thể gặp khó khăn vì hai lí do: Hoặc là khó xác định và tính được chiều cao của khối đa diện; hoặc là việc tính diện tích đáy không dễ dàng.

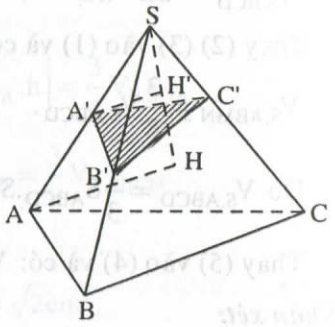
Khi đó trong nhiều trường hợp ta có thể làm như sau:

- Phân chia khối đa diện cần tính thể tích thành tổng hoặc hiệu các khối cơ bản (hình chóp hoặc hình lăng trụ) mà các khối này việc tính thể tích của chúng là dễ dàng hơn.
- So sánh thể tích khối đa diện cần tính với một khối đa đện khác đã biết trước thể tích.
- Với loại toán này ta thường sử dụng kết quả sau:

Cho hình chóp S.ABC. Lấy A', B', C' tương ứng trên SA, SB, SC.

Khi đó ta có:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$$



Kết quả này được chứng minh đơn giản như sau:

Kẻ A'H' và AH cùng vuông góc (SBC)

Khi đó A'H' // AH và S, H', H thẳng hàng.

Ta có:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{A'.SB'C'}}{V_{A.SBC}} = \frac{\frac{1}{3}S_{SB'C'}.A'H'}{\frac{1}{3}S_{SBC}.AH}. \quad (1)$$

Do $\frac{S_{SB'C'}}{S_{SBC}} = \frac{\frac{1}{2}SB'.SC'.\sin\widehat{B'SC'}}{\frac{1}{2}SB.SC.\sin\widehat{BSC}} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$

$\frac{A'H'}{AH} = \frac{SA'}{SA}$ (theo định lí Talet)

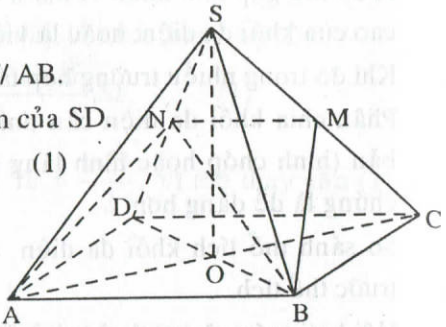
Từ đó thay vào (1) ta có đpcm.

Chú ý: Kết quả trên vẫn đúng nếu như trong các điểm A', B', C' có thể có điểm $A \equiv A', B \equiv B', C \equiv C'$.

Thí dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng $\sqrt{5}$ cm, đường chéo AC = 4cm. Đoạn thẳng SO = $2\sqrt{2}$ cm và vuông góc với đáy, ở

đây O là giao điểm của AC và BD. Gọi M là trung điểm của cạnh SC. Giả sử (ABM) cắt SD tại N. Tìm thể tích hình chóp S.ABMN.

Giải



Vì AB // DC $\Rightarrow$ AB // (SDC)

$\Rightarrow$ (MAB) $\cap$ (SDC) = MN, trong đó MN // AB.

Vì M là trung điểm SC $\Rightarrow$ N là trung điểm của SD.

Ta có: $V_{S.ABMN} = V_{S.ABN} + V_{S.MNB}$ (1)

Ta có: $\dfrac{V_{S.NAB}}{V_{S.ABD}} = \dfrac{SN}{SD} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow V_{S.NAB} = \dfrac{1}{2}V_{V_{S.ABD}} = \dfrac{1}{4}V_{S.ABCD}$ (2)

$\dfrac{V_{S.MNB}}{V_{S.BCD}} = \dfrac{SN}{SD}.\dfrac{SM}{SC} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow V_{S.MNB} = \dfrac{1}{4}V_{S.BCD} = \dfrac{1}{8}V_{S.ABCD}.$ (3)

Thay (2) (3) vào (1) và có:

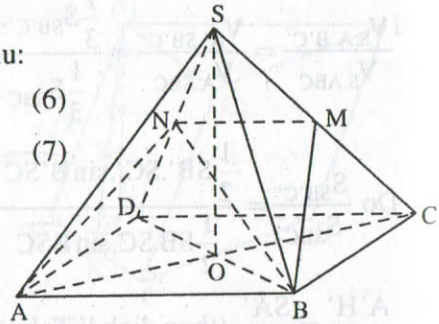
$V_{S.ABMN} = \dfrac{3}{8}V_{S.ABCD}.$ (4)

Do $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}AC.BD.SO = \dfrac{1}{6}.4.2.2\sqrt{2} = \dfrac{8}{3}\sqrt{2}$ (5)

Thay (5) vào (4) và có: $V_{S.ABMN} = \sqrt{2}cm^3$.

Nhận xét:

1. Xét cách giải khác của thí dụ trên như sau:



Ta có: $V_{S.ABMN} = V_{S.ABCD} - V_{ADNMBC}.$ (6)

Do $V_{ADNMBC} = V_{N.ADB} + V_{B.DNMC}.$ (7)

Dễ thấy: $\dfrac{V_{N.ADB}}{V_{S.ADB}} = \dfrac{SN}{SD} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow V_{N.ADN} = \dfrac{1}{2}V_{S.ADB} = \dfrac{1}{4}V_{S.ABCD}$ (8)

Vì $S_{DNMC} = \dfrac{3}{4}S_{SDC} \Rightarrow V_{B.DNMC} = \dfrac{3}{4}V_{B.SCD} = \dfrac{3}{4}V_{S.DBC} = \dfrac{3}{8}V_{S.ABCD}$ (9)

Từ (7) (8) (9) $\Rightarrow V_{ADNMBC} = \dfrac{5}{8}V_{S.ABCD}$ (10)

Từ (1) (10) suy ra $V_{S.ABMN} = \dfrac{3}{8}V_{S.ABCD} = \sqrt{2}cm^3$.

Ta thu lại kết quả trên!

2. Xét thêm cách giải khác nữa của thí dụ trên như sau:

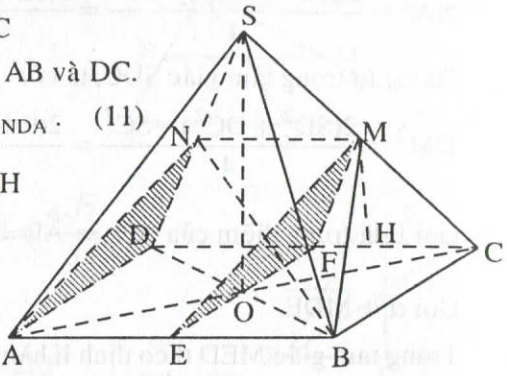
Qua O kẻ EF // AD ($E \in AB, F \in AC$

$\Rightarrow$ E và F lần lượt là trung điểm của AB và DC.

Ta có: $V_{ADNMBC} = V_{M.EBCF} + V_{MFE.NDA}$. (11)

Do $S_{EBC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ và chiều cao MH của hình chóp M.EBCF bằng $\frac{1}{2}$SO

$\Rightarrow V_{M.EBCF} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD}$. (12)



Với hình lăng trụ MFE.NDF ta thấy chiều cao h_1 của nó bằng $\frac{1}{2}$ chiều cao h của hình chóp B.SAD và $S_{NDA} = \frac{1}{2} S_{SDA}$

$$\Rightarrow V_{MFE.NDA} = S_{NAD}.h_1 = \frac{1}{2} S_{SDA} \cdot \frac{1}{2} h = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3} S_{SDA}.h\right) = \frac{3}{4} V_{B.SDA}$$

$$= \frac{3}{4} V_{S.ADB} = \frac{3}{8} V_{S.ABCD}.$$

Từ đó theo (12) ta có:

$$V_{M.EBCF} = \frac{5}{8} V_{S.ABCD} \Rightarrow V_{S.ABMN} = \frac{3}{8} V_{S.ABCD} = \sqrt{2}\text{cm}^3.$$

Ta cũng thu lại kết quả trên.

3. Trong ba cách giải trên ta đều sử dụng phương pháp tính thể tích khối cần tính bằng phương pháp gián tiếp (tức là thông qua thể tích của các khối khác). Để so sánh hiệu quả của phương pháp này với phương pháp trực tiếp đã trình bày trong mục A, ta hãy xem cách giải sau đây:

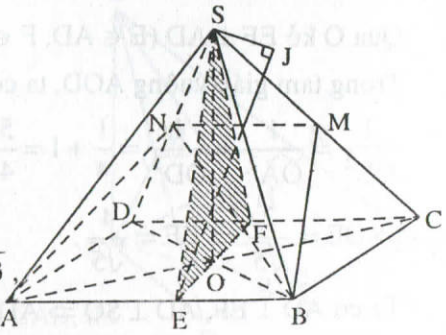
Giả sử $h = d(S,(ADMN))$, khi đó ta có:

$V = \frac{1}{3} S_{ABMN}.h$ (13)

Ta có SO = $2\sqrt{2}$, OA = 2; OB = 1,

$SA = SC = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{8+4} = 2\sqrt{3}$.

$SB = SD = \sqrt{SO^2 + OB^2} = \sqrt{8+1} = 3$.



Trong tam giác SAB, theo công thức tính đường trung tuyến ta có:

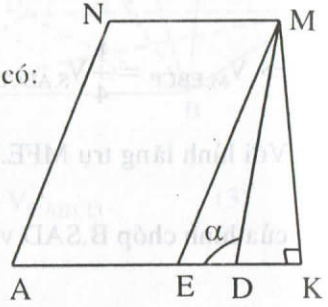
$$NA^2 = \frac{2(SA^2 + AB^2) - SB^2}{4} = \frac{2(12+5)-9}{4} = \frac{25}{4}.$$

Tương tự trong tam giác SDC, ta có:

$$DM^2 = \frac{2(SD^2 + DC^2) - SC^2}{4} = \frac{2(9+5)-12}{4} = 4.$$

Gọi E là trung điểm của AD $\Rightarrow AE = ED = NM = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $ME = NA = \frac{5}{2}$.

Gọi $\alpha = \widehat{MDE}$.



Trong tam giác MED theo định lí hàm số cosin, ta có:

$$ME^2 = ED^2 + MD^2 - 2ED.MD.\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{25}{4} = \frac{5}{4} + 4 - 2.\frac{\sqrt{5}}{2}.2\cos\alpha \Rightarrow 1 = -2\sqrt{5}\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-1}{2\sqrt{5}} \text{ (vậy } \alpha > 90^0)$$

Kẻ $MK \perp AD \Rightarrow MK = MD.\sin\widehat{MDK} = 2.\sin\widehat{MDK}$

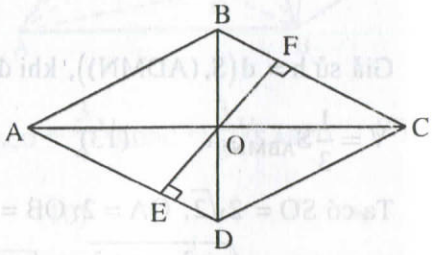
Ta có: $\widehat{MDK} = 180^0 - \alpha \Rightarrow \sin^2\widehat{MDK} = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$.

$$\Rightarrow \sin\widehat{MDK} = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{5}}.$$

Vậy $MK = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{5}}$.

Từ đó ta có: $S_{ADMN} = \frac{(AD+MN).MK}{2} = \frac{\left(\sqrt{5}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right).\sqrt{19}}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{19}}{4}$. (14)

Qua O kẻ $EF \perp AD$ ($E \in AD$, $F \in BC$)



Trong tam giác vuông AOD, ta có:

$$\frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OD^2} = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow OE = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow EF = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

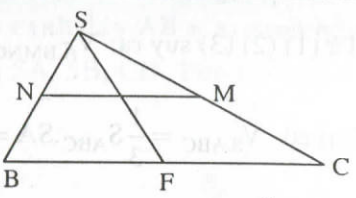
Ta có $AD \perp EF$, $AD \perp SO \Rightarrow AD \perp (SEF) \Rightarrow (ADMN) \cap (SEF) = EI$

Từ đó nếu kẻ $SJ \perp EI$, thì $SJ \perp (ADMN)$

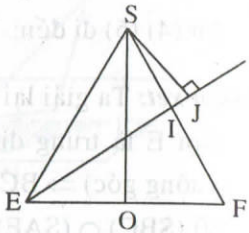
$\Rightarrow d\left(S;(ADMN)\right)=SJ$

Ta có $S_{SEI}=\frac{1}{2}EI.SJ$

$\Rightarrow SJ=\frac{2.S_{SEI}}{EI}=\frac{S_{SEF}}{EI}$



Ta có: $S_{SEF}=\frac{1}{2}EF.SO=\frac{1}{2}\frac{4}{\sqrt{5}}.2\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{2}}{5}$



Lại có trong tam giác SEF:

$EI^2=\frac{2\left(SE^2+EF^2\right)-SF^2}{4}=\frac{SE^2+2EF^2}{4}$ (do SE = SF)

$=\frac{SO^2+EO^2+8EO^2}{4}=\frac{8+9.\frac{4}{5}}{4}=\frac{19}{5}\Rightarrow EI=\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{5}}$

Từ đó ta có: $SJ=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{19}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{19}}$

Thay vào (13), ta có $V_{S.ABMN}=\frac{1}{3}\frac{3\sqrt{19}}{4}.\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{19}}=\sqrt{2}cm^3$.

Ta thu lại kết quả trên. Các bạn đã thấy rõ phương pháp nào có hiệu quả hơn?

Thí dụ 12.

Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a, SA = 2a và vuông góc với đáy (ABC). Gọi M, N tương ứng là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC. Tìm thể tích khối chóp A.BMNC.

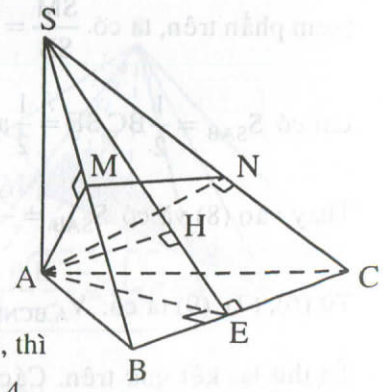
Giải

Ta có: $V_{A.BMNC}=V_{S.ABC}-V_{S.AMN}$. (1)

Ta lại có:

$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}$

$\Rightarrow V_{S.AMN}=\left(\frac{SM}{SB}\right)^2V_{S.ABC}$ (2)



(do SB = SC; SM = SN $\Rightarrow \frac{SM}{SB}=\frac{SN}{SC}$).

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông SAB, thì

$SA^2=SM.SB\Rightarrow\frac{SA^2}{SB^2}=\frac{SM}{SB}\Rightarrow\frac{SM}{SB}=\frac{4a^2}{5a^2}=\frac{4}{5}$. (3)

Từ (1) (2) (3) suy ra: $V_{A.BMNC} = V_{S.ABC}\left(1-\frac{16}{25}\right) = \frac{9}{25}V_{S.ABC}$. (4)

Lại có $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.2a = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$. (5)

Từ (4) (5) đi đến: $V_{A.BMNC} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{50}$.

Nhận xét: Ta giải lại thí dụ trên bằng phương pháp trực tiếp như sau:

Gọi E là trung điểm của BC $\Rightarrow$ AE $\perp$ BC $\Rightarrow$ SE $\perp$ BC (định lí ba đường vuông góc) $\Rightarrow$ BC $\perp$ (SAE) $\Rightarrow$ (SBC) $\perp$ (SAE).

Vì (SBC) $\cap$ (SAE) = SE; nên nếu kẻ AH $\perp$ SE (H $\in$ SE), thì AH $\perp$ (SBC)

$\Rightarrow$ AH là chiều cao của hình chóp A.BCNM.

Từ đó $V_{A.BCNM} = \frac{1}{3}S_{BCNM}.AH$. (6)

Trong tam giác vuông SAE, ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{4}{3a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{19}{12a^2} \Rightarrow AH = 2a\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}} \quad (7)$$

Ta có (do MN // BC): $\frac{S_{SMN}}{S_{SAB}} = \left(\frac{SM}{SB}\right)^2 \Rightarrow S_{SMN} = \left(\frac{SM}{SB}\right)^2 - S_{SAB}$

$$\Rightarrow S_{BCNM} = \left(1-\left(\frac{SM}{SB}\right)^2\right).S_{SAB} = \frac{9}{25}S_{SAB} \quad (8)$$

(xem phần trên, ta có $\frac{SM}{SB} = \frac{4}{5}$).

Lại có $S_{SAB} = \frac{1}{2}BC.SE = \frac{1}{2}a\sqrt{SA^2+AE^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{4a^2+\frac{3a^2}{4}} = \frac{1}{4}a^2\sqrt{19}$.

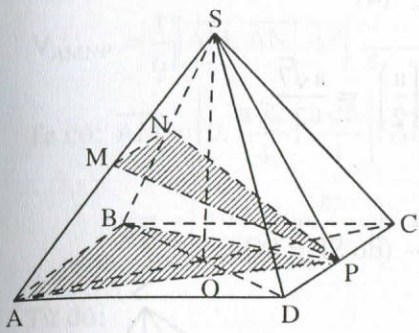
Thay vào (8) và có $S_{SAB} = \frac{9a^2\sqrt{19}}{100}$. (9)

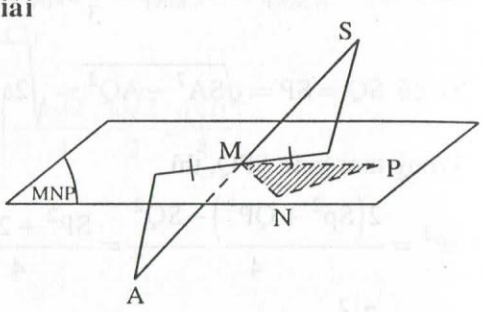
Từ (6), (7), (9) ta có: $V_{A.BCNM} = \frac{1}{3}\frac{9a^2\sqrt{19}}{100}.2a\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{19}} = \frac{3a^3\sqrt{5}}{50}$.

Ta thu lại kết quả trên. Các bạn hãy so sánh tính hiệu quả của hai phương pháp trên.

Thí dụ 3. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy AB = a, cạnh bên SA = $a\sqrt{2}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, SB, CD. Tìm thể tích tứ diện A.MNP.

Giải





Do $SA \cap (MNP) = M$ mà $MS = MA \Rightarrow d(A,(MNP)) = d(S,(MNP))$

$\Rightarrow V_{A.MNP} = V_{S.MNP}$. (1)

Lại có $\dfrac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABP}} = \dfrac{SM}{SA}\dfrac{SN}{SB} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow V_{S.MNP} = \dfrac{1}{4}V_{S.ABP}$. (2)

Hai hình chóp S.APB và S.ABCD có cùng chiều cao SO ($AC \cap BD = O$) và

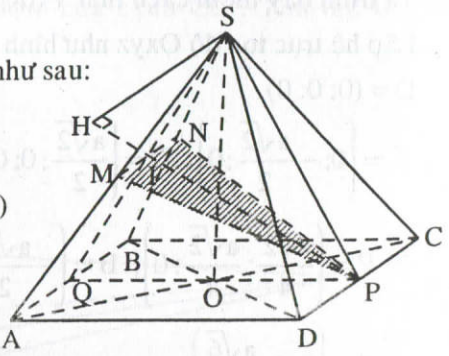
$S_{ABP} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD}$

$\Rightarrow V_{S.ABP} = \dfrac{1}{2}V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}a^2\sqrt{SA^2 - OA^2} = \dfrac{1}{6}a^2\sqrt{2a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{48}$ (3)

Từ (1) (2) (3) suy ra: $V_{A.MNP} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{48}$.

Nhận xét:

1. Ta có thể tính $V_{S.MNP}$ một cách trực tiếp như sau:



Giả sử $PO \cap AB = Q$

$\Rightarrow$ Q là trung điểm của AB.

Ta có $AB \perp QP$, $AB \perp SQ \Rightarrow AB \perp (SPQ)$

Vì $MN // AB \Rightarrow MN \perp (SPQ)$

$\Rightarrow (MNP) \perp (SPQ)$

Lại có $(MNP) \cap (SPQ) = IP$,

ở đây $MN \cap SQ = I$ (khi đó I là trung điểm của MN).

Vì thế nếu kẻ $SH \perp IP$ $(H \in IP)$ $(H \in IP) \Rightarrow SH \perp (MNP)$

$\Rightarrow d(S,(MNP)) = SH$

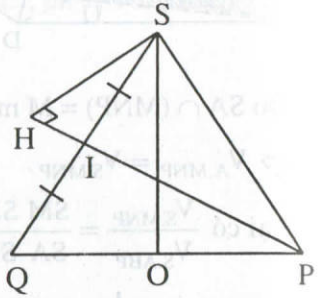
Như vậy $V_{A.MNP} = V_{S.MNP} = \frac{1}{3} S_{MNP}.SH$. (4)

Ta có $SQ = SP = \sqrt{SA^2 - AQ^2} = \sqrt{2a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Trong tam giác SPQ, thì

$IP^2 = \frac{2\left(Sp^2 + QP^2\right) - SQ^2}{4} = \frac{SP^2 + 2QP^2}{4}$ (do SP = SQ)

$= \frac{\frac{7a^2}{4} + 2a^2}{4} = \frac{15a^2}{16} \Rightarrow IP = \frac{a\sqrt{15}}{4}$.



Ta có: $S_{SQP} = \frac{1}{2} QP.SO = \frac{1}{2} a.\sqrt{2a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$

$\Rightarrow S_{SIP} = \frac{1}{2} S_{SQP} = \frac{a^2\sqrt{6}}{8}$

Lại có $S_{SIP} = \frac{1}{2} IP.SH \Rightarrow \frac{a^2\sqrt{6}}{8} = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{15}}{4}.SH \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$. (5)

Ta có $S_{MNP} = \frac{1}{2} MN.IP = \frac{1}{2}\frac{a}{2}\frac{a\sqrt{15}}{4} = \frac{a^2\sqrt{15}}{16}$ (6)

Từ (4) (5) (6) suy ra: $V_{AMNP} = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{15}}{16}.\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{a^3\sqrt{6}}{48}$.

Ta thu lại kết quả trên!

2. Ta trình bày thêm cách tính V_{AMNP} bằng phương pháp tọa độ

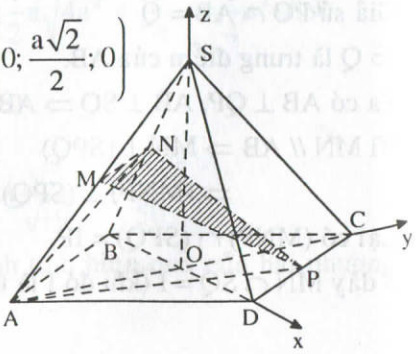
Lập hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ. Trong hệ trục này ta có:

O = (0; 0; 0)

$A = \left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$; $D = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$; $C = \left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$

$\Rightarrow P = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; 0\right)$; $B = \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$;

$S = \left(0; 0; \frac{a\sqrt{6}}{2}\right)$;



$\Rightarrow M=\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{6}}{4}\right);\ N=\left(-\frac{a\sqrt{2}}{4};0;\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)$

Áp dụng công thức tính thể tích tứ diện AMNP, ta có:

$$V_{AMNP}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right].\overrightarrow{AP}\right|. \qquad (7)$$

Ta có: $\overrightarrow{AM}=\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{6}}{4}\right);\ \overrightarrow{AN}=\left(-\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)$

$$\overrightarrow{AP}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{3a\sqrt{2}}{4};0\right).$$

Từ đó:

$$\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right]=\left(\begin{vmatrix}\frac{a\sqrt{2}}{4} & \frac{a\sqrt{6}}{4}\\ \frac{a\sqrt{2}}{2} & \frac{a\sqrt{6}}{4}\end{vmatrix};\begin{vmatrix}\frac{a\sqrt{6}}{4} & 0\\ \frac{a\sqrt{6}}{4} & -\frac{a\sqrt{2}}{4}\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & \frac{a\sqrt{2}}{4}\\ -\frac{a\sqrt{2}}{4} & \frac{a\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}\right)$$

$$=\left(-\frac{a^2\sqrt{3}}{8};-\frac{a^2\sqrt{3}}{8};-\frac{a^2}{8}\right).$$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right].\overrightarrow{AP}=-\frac{a^3\sqrt{6}}{32}-\frac{3a^3\sqrt{6}}{32}=-\frac{a^3\sqrt{6}}{8} \qquad (8)$$

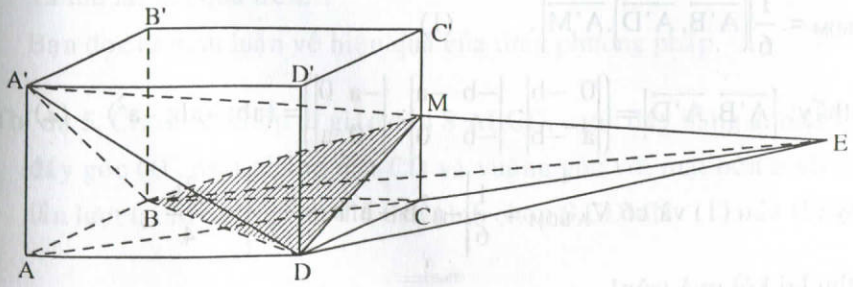
Thay (8) vào (7) và có: $V_{AMNP}=\frac{a^3\sqrt{6}}{48}$.

Ta thu lại kết quả trên!

Các bạn hãy so sánh tính hiệu quả của các phương pháp!

Thí dụ 4. Cho hình hộp chữ nhật ABCDA'B'C'D' đáy là hình vuông cạnh bằng a, chiều cao AA' = b. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Tìm thể tích tứ diện BDA'M.

Giải



Trong ACC'A' ta có A'M ∩ AC = E. Vì MC = MC' ⇒ AC = CE

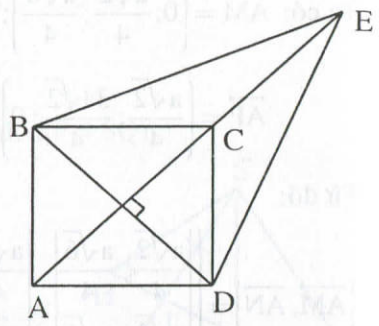
Ta có $V_{BDA'M} = V_{A'.BMD} = V_{A'.BDE} - V_{M.BDE} = \frac{1}{3} S_{BDE}.AA' - \frac{1}{3} S_{BDE}.ME$

$= \frac{1}{3} S_{BDE}(AA' - MC)$ (1)

Ta lại có:

$S_{BDE} = \frac{1}{2} BD.CO = \frac{1}{2}.a\sqrt{2}\left(a\sqrt{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \frac{3a^2}{2}$. (2)



Mặt khác: $AA' - MC = b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}$ (3)

Thay (2) (3) vào (1) và có: $V_{BDA'M} = \frac{a^2 b}{4}$.

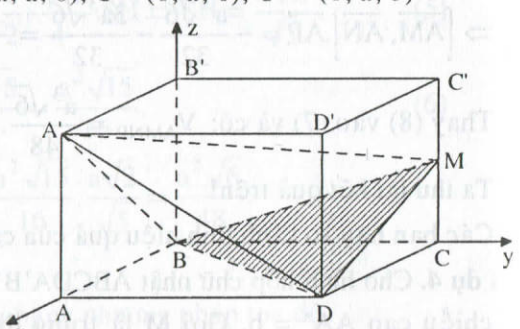
Nhận xét:

1. Xét cách giải khác bằng phương pháp tọa độ như sau:

Dựng hệ trục tọa độ Bxyz như hình vẽ. Trong hệ trục này ta có:

B = (0; 0; 0); A' = (a; 0; b); D = (a; a; 0); C = (0; a; 0); C' = (0; a; b)

$\Rightarrow M = \left(0; a; \frac{b}{2}\right)$.



Từ đó:

$\overrightarrow{A'B} = (-a; 0; -b)$,

$\overrightarrow{A'D} = (0; a; -b)$,

$\overrightarrow{A'M} = \left(-a; a; -\frac{b}{2}\right)$.

Theo công thức tính thể tích tứ diện, ta có:

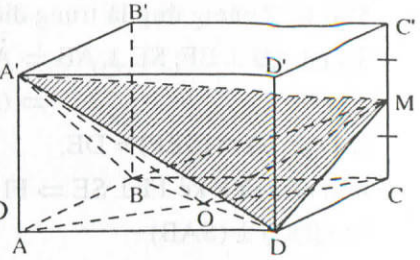
$V_{A'BDM} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'D}\right].\overrightarrow{A'M}\right|$. (1)

Dễ thấy: $\left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'D}\right] = \left(\begin{vmatrix} 0 & -b \\ a & -b \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -b & -a \\ -b & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}\right) = (ab; -ab; -a^2)$ (2)

Thay (2) vào (1) và có $V_{A'BDM} = \frac{1}{6}\left|-a^2 b - a^2 b + \frac{a^2 b}{2}\right| = \frac{a^2 b}{4}$.

Ta thu lại kết quả trên!

2. Xét cách giải bằng phương pháp trực tiếp sau đây:



Ta có $MO \perp BD$; $A'O \perp BD$

$\Rightarrow BD \perp (A'OM) \Rightarrow (MBD) \perp (A'OM)$.

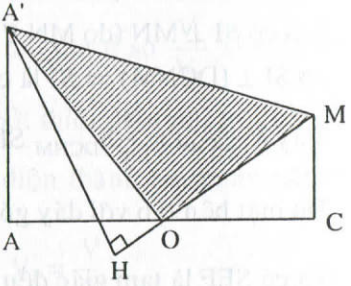
Lại có $(MBD) \cap (A'OM) = MO$.

Từ đó nếu kẻ $A'H \perp MO$ thì $A'H \perp (BMD)$

$\Rightarrow A'H$ là chiều cao của hình chóp $A'.BMD$

Ta có: $V_{A'.BMD} = \frac{1}{3} SMBD.A'H.$ (3)

Ta có: $S_{MBD} = \frac{1}{2} BD.MO = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{4}}.a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}\sqrt{b^2+2a^2}$ (4)



Xét hình thang AA'MC, ta có:

$AA' = b$; $MC = \frac{b}{2}$; $AC = a\sqrt{2}$.

Ta có:

$S_{A'OM} = S_{AA'MC} - S_{A'AO} - S_{MOC}$

$= \frac{\left(b+\frac{b}{2}\right)a\sqrt{2}}{2} - \frac{b.a\sqrt{2}}{4} - \frac{b.a\sqrt{2}}{8} = \frac{3ab\sqrt{2}}{8}.$

Mặt khác: $S_{A'OM} = \frac{1}{2} MO.A'H$

$\Rightarrow A'H = \frac{2S_{A'OM}}{MO} = \frac{3ab\sqrt{2}}{4\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^2}{2}}} = \frac{3ab\sqrt{2}}{2\sqrt{b^2+2a^2}}.$ (5)

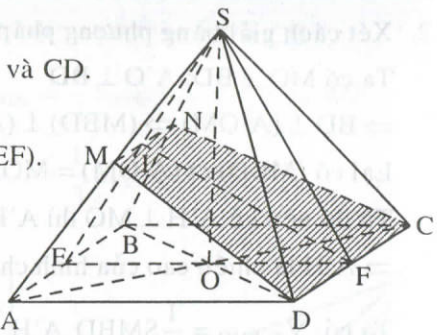
Thay (4) (5) vào (3) và có: $V_{A'MB} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{2}}{4}\sqrt{b^2+2a^2}.\frac{3ab\sqrt{2}}{2\sqrt{b^2+2a^2}} = \frac{a^2b}{4}$

Ta thu lại kết quả trên!

Bạn đọc tự bình luận về hiệu quả của từng phương pháp.

Thí dụ 5. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, cạnh đáy bằng a, mặt bên tạo với đáy góc 60^0. Mặt phẳng qua CD và vuông góc với mặt bên SAB cắt SA, SB lần lượt tại M và N. Tìm thể tích hình chóp S.CDMN

Giải



Gọi E, F tương ứng là trung điểm của AB và CD.

Ta có $AB \perp EF$; $SE \perp AB \Rightarrow AB \perp (SEF)$

$\Rightarrow (SAB) \perp (SEF)$.

Do $(SAB) \cap (SEF) = DE$,

nên nếu từ F kẻ $FI \perp SE \Rightarrow FI \perp (SAB)$

$\Rightarrow (IDC) \perp (SAB)$

Ta có $DC // AB \Rightarrow DC // (SAB)$

$\Rightarrow (IDC) \cap (SAB) = MN$, trong đó MN qua I và $MN // DC$ (tức $MN // AB$).

Vậy DCNM là mặt phẳng qua DC và vuông góc với (SAB)

Ta có $FI \perp (SAB) \Rightarrow FI \perp SI$

Lại có $SI \perp MN$ (do $MN // AB$ và $SE \perp AB$)

$\Rightarrow SI \perp (DCNM) \Rightarrow$ SI là chiều cao của hình chóp S.CDMN.

Vậy $V_{S.DCNM} = \frac{1}{3} S_{DCNM} . SI$. (1)

Do mặt bên tạo với đáy góc $60^0 \Rightarrow \widehat{SEO} = 60^0$, O là tâm của đáy ABCD.

Ta có SEF là tam giác đều cạnh a $\Rightarrow$ I là trung điểm của SE và có $IF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $MN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$; $SI = \frac{1}{2}SE = \frac{a}{2}$

$$\Rightarrow S_{DCNM} = \frac{(DC + MN)IF}{2} = \frac{\left(a + \frac{a}{2}\right)a\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}.$$

Thay vào (1) và có: $V_{S.DCNM} = \frac{1}{3}\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}\frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Nhận xét: Cách giải trên là sử dụng phương pháp trực tiếp. Xét cách giải khác sau đây:

Ta có $V_{S.DCNM} = V_{S.MDN} + V_{S.NDC}$ (2)

Do $\frac{V_{S.MDN}}{V_{S.ABD}} = \frac{SM}{SA}\frac{SN}{SB} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.MDN} = \frac{1}{4}V_{S.ABD} = \frac{1}{8}V_{S.ABCD}$ (3)

$\frac{V_{S.NDC}}{V_{S.BDC}} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.NDC} = \frac{1}{2}V_{S.BDC} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD}$. (4)

Từ (2) (3) (4) suy ra:

$V_{S.DCNM} = \frac{3}{8} V_{S.ABCD}$. (5)

Do $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3} a^2 . \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ $\left(\text{do } SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

Từ đó thay vào (5) và có: $V_{S.DCNM} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Ta thu lại kết quả trên!

C. Bài toán so sánh thể tích

Các bài toán thuộc thể loại này có dạng như sau:

Cho một khối đa điện và một mặt phẳng (P). Mặt phẳng này sẽ cắt khối đa diện theo một thiết diện nào đó. Thiết diện này chia khối đa diện thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Bài toán đòi hỏi tìm tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ (tức là so sánh thể tích hai phần của khối đa diện bị chia bởi thiết diện nói trên). Khi $\frac{V_1}{V_2} = 1$, ta sẽ nói rằng thiết diện chia khối đa diện thành hai phần tương đương (tức là hai phần có thể tích bằng nhau $V_1 = V_2 = \frac{V}{2}$).

Cần lưu ý rằng mặc dù các bài toán trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng không có dạng trực tiếp như thế, nhưng thực chất nhiều bài toán lại đều sử dụng đến việc so sánh thể tích này (các bạn có thể xem các thí dụ 1, thí dụ 2, thí dụ 3, thí dụ 5 của mục B, phần V)

Thực vậy trong các thí dụ nói trên để tính thể tích khối đa diện theo yêu cầu, ta không tính trực tiếp nó mà thông qua thể tích một khối trung gian, sau đó tìm tỉ số thể tích khối đa diện cần tính với thể tích của khối trung gian này. Tìm thể tích của khối trung gian (mà việc tính nó dễ dàng hơn, đơn giản hơn so với việc trực tiếp tính thể tích khối đa diện theo yêu cầu) ta suy ra kết quả cần tính.

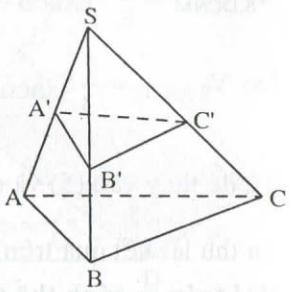
Lược đồ chung của các bài toán về so sánh thể tích như sau:

- Xác định thiết diện. Khi đó thiết diện chia khối đa diện thành hai khối
- Chọn một trong hai phần nói trên để tìm thể tích
- Giả sử ta tính được $V_1 = kV$ $(0 < k < 1)$, ở đây V_1 là thể tích phần ta tính, V là thể tích của khối đa diện cần tính, khi đó $V_2 = (1 - k)V$, và ta có:

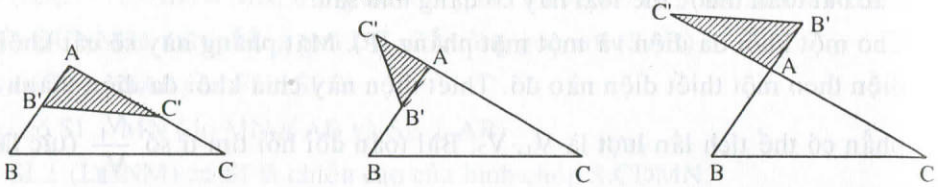
$\frac{V_1}{V_2} = \frac{k}{1-k}$.

Hai kết quả luôn được sử dụng khi tính toán là:

1. Cho hình chóp tam giác S.ABC. Giả sử A', B', C' lần lượt thuộc SA, SB, SC. Khi đó ta có: $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$.

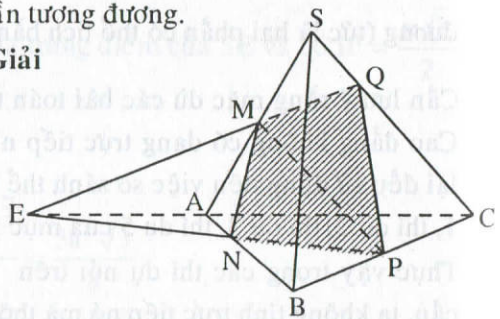


2. Cho tam giác ABC. B' và C' lần lượt là các điểm trên các cạnh AB và AC (hoặc phần kéo dài của nó). Khi đó ta có: $\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \frac{AB'}{AB}.\frac{AC'}{AC}$.



Thí dụ 1. Cho hình chóp S.ABC. Gọi M, P lần lượt là trung điểm của SA, BC; N là điểm trên AB sao cho $\frac{AN}{AB} = \frac{1}{3}$. Chứng minh rằng thiết diện tạo bởi (MNP) chia hình chóp thành hai phần tương đương.

Giải



Trong (ABC): $NP \cap AC = E$

Trong (SAC): $EM \cap SC = Q$

Khi đó MNPQ là thiết diện tạo bởi (MNP) với hình chóp S.ABC

Như đã biết $\frac{SQ}{SC} = \frac{1}{3}$; AF = AC

(xem lại cách giải trong chương 1 bằng cách sử dụng định lí Menelauyt)

Gọi V_1 là thể tích phần của hình chóp nằm phía dưới thiết diện.

Ta có: $V_1 = V_{Q.ECP} - V_{M.EAB}$. (1)

Gọi V, S, h lần lượt là thể tích $V_{S.ABC}$, diện tích đáy S_{ABC} và chiều cao kẻ từ S của hình chóp S_{ABC}.

Vì $EC = 2AC$, $PC = \frac{1}{2}BC \Rightarrow S_{ENC} = S_{ABC} = S$.

Do $\frac{CQ}{CS} = \frac{2}{3} \Rightarrow d(Q;(ABC)) = \frac{2}{3}d(S;(ABC)) = \frac{2}{3}h$.

Vậy $V_{Q.ECP} = \frac{1}{3}S_{ENC}.d\big(Q,(ABC)\big) = \frac{1}{3}S.\frac{2}{3}h = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}Sh\right) = \frac{2}{3}V$. (2)

Tương tự do AE = AC; $AN = \frac{1}{3}AB \Rightarrow S_{EAN} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{3}S$.

Vì MS = MA $\Rightarrow d(M,(ABC)) = \frac{1}{2}d(S,(ABC)) = \frac{1}{2}h$.

Từ đó $V_{M.EAN} = \frac{1}{3}S_{EAN}d(M,(ABC)) = \frac{1}{3}\frac{1}{3}S.\frac{1}{2}h = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}Sh\right) = \frac{1}{6}V$. (3)

Thay (2) (3) vào (1) và có $V_1 = \frac{2}{3}V - \frac{1}{6}V = \frac{V}{2}$. (4)

Từ (5) suy ra $V_2 = V - V_1 = \frac{V}{2} \Rightarrow V_1 = V_2$ (đpcm)

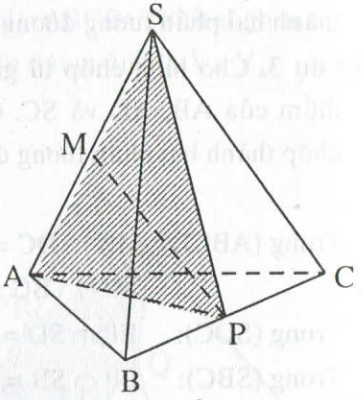
Nhận xét:

1. Bài toán có dạng tổng quát sau đây:

   Cho hình chóp S.ABC. Gọi M, P lần lượt là trung điểm của SA, BC. N là điểm tùy ý trên AB (với N ≠ S, N ≠ A và N không phải là trung điểm của SA). Chứng minh rằng thiết diện tạo bởi (MNP) chia hình chóp thành hai phần tương đương.

   Lời giải bài toán này tương tự bằng cách đặt:

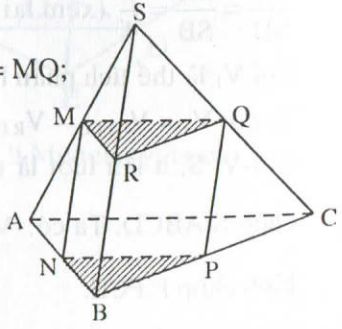
   $\frac{AN}{AB} = k \ (0 < k < 1)$



2. Chú ý rằng nếu N ≡ A hoặc N ≡ B thì kết quả vẫn đúng (Thí dụ khi N ≡ A thì thiết diện là SAP $\Rightarrow$ $V_1 = V_{S.ABD}$; $V_2 = V_{S.APC}$ và dĩ nhiên $V_1 = V_2 = \frac{V}{2}$).

Thí dụ 2. Cho hình chóp S.ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, BC, AB. Chứng minh rằng thiết diện tạo bởi (MNP) chia hình chóp thành hai phần tương đương.

Giải



Do NP // AC $\Rightarrow$ NP // (SAC) $\Rightarrow$ (MNP) ∩ (SAC) = MQ; trong đó MQ // NP (tức MQ // AC).

Dễ thấy Q là trung điểm của SC.

Gọi V_1 là thể tích phần hình chóp nằm phía trước thiết diện.

Gọi V, S, h tương ứng là thể tích, diện tích đáy ABC và chiều cao kẻ từ S của hình chóp S.ABC.

Gọi R là trung điểm của SB $\Rightarrow$ MR // AB, RQ // BC $\Rightarrow$ (MRQ) // (NBP)
$\Rightarrow$ MRQ.NBP là hình lăng trụ tam giác.

Dễ thấy nếu gọi h_1 là chiều cao của lăng trụ thì $h_1 = \frac{h}{2}$.

Ta cũng có $S_{NBP} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{4}S$.

Ta có: $V_1 = V_{S.MRQ} + V_{MRQ.NBP} = \frac{1}{3}S_{MRQ}\cdot\frac{h}{2} + S_{MRQ}.h_1$

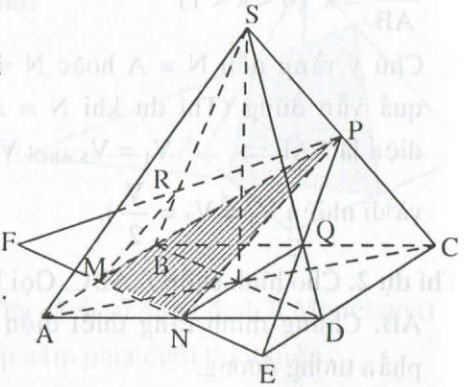
$$= \left(\frac{1}{3}Sh\right)\frac{1}{8} + 3\left(\frac{1}{3}\right)\frac{S}{4}\frac{h}{2} = \frac{1}{8}V + \frac{3}{8}V = \frac{V}{2}.$$

Từ đó $V_2 = \frac{V}{2} \Rightarrow V_1 = V_2 \Rightarrow$ đpcm.

Nhận xét: Kết hợp với thí dụ 1, ta có kết quả sau:

Cho hình chóp S.ABC. Giả sử M, P lần lượt là trung điểm của SA, BC còn N là điểm tùy ý trên cạnh AB. Khi đó thiết diện tạo bởi (MNP) chia hình chóp thành hai phần tương đương.

Thí dụ 3. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD và SC. Chứng minh thiết diện tạo bởi (MNP) chia hình chóp thành hai phần tương đương.



Giải

Trong (ABCD): MN $\cap$ DC = E,
MN $\cap$ BC = F.
Trong (SDC): EP $\cap$ SD = Q.
Trong (SBC): FP $\cap$ SB = R.
Khi đó MNQPR là thiết diện phải dựng.
Áp dụng định lí Menelauyt ta có:
$\frac{SQ}{SD} = \frac{SR}{SB} = \frac{3}{4}$ (xem lại chương 1)

Gọi V_1 là thể tích phần hình chóp nằm dưới thiết diện.

Ta có: $V_1 = V_{P.FCE} - V_{R.FMB} - V_{Q.NED}$. (1)

Gọi V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy ABCD và chiều cao của hình chóp S.ABCD. Ta có: $V_{P.FCE} = \frac{1}{3}S_{FCE}.h_1$, ở đây h_1 là chiều cao kẻ từ P của hình chóp P.FCE.

Ta có: $h_1 = \frac{h}{2}$; $S_{FCE} = \frac{3}{2}.\frac{3}{2}S_{CBD} = \frac{9}{8}S_{ABCD} = \frac{9}{8}S$.

Từ đó $V_{P.FCE} = \frac{1}{3}\frac{9}{8}S.\frac{h}{2} = \frac{9}{16}\left(\frac{1}{3}Sh\right) = \frac{9V}{16}$. (2)

Ta có: $V_{R.FMB} = V_{Q.NED} = \frac{1}{3}S_{NED}.h_2$, ở đây h_2 là chiều cao kẻ từ Q của hình chóp Q.NED

Dễ thấy $h_2 = \frac{1}{4}h$ $\left(\text{do}\ \frac{DQ}{DS} = \frac{1}{4}\right)$; $S_{NED} = \frac{S}{8}$, nên

$V_{R.FMB} = V_{Q.NED} = \frac{1}{3}\frac{S}{8}\frac{h}{4} = \frac{V}{32}$. (3)

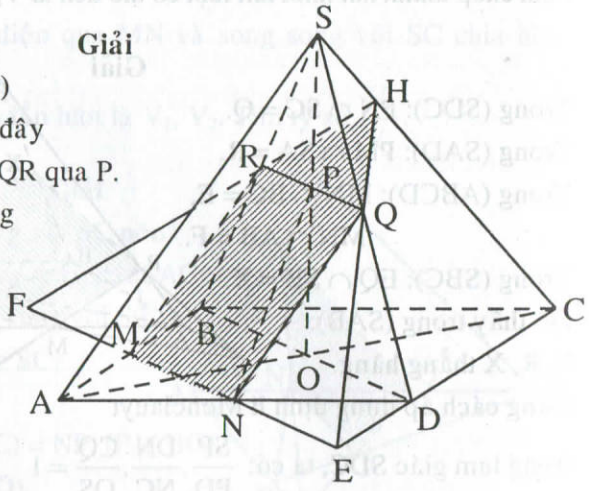
Thay (2) (3) vào (1) và có $V_1 = \frac{9V}{16} - \frac{V}{16} = \frac{V}{2} \Rightarrow V_2 = \frac{V}{2} \Rightarrow V_1 = V_2$.

Đó là đpcm.

Thí dụ 4. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD, SO, ở đây O là tâm của đáy ABCD. Thiết diện tạo bởi (MNP) chia hình chóp thành hai phần có thể tích tương ứng là V_1, V_2.

Tìm tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

Giải



Vì MN // BD $\Rightarrow$ MN // (SBD)

$\Rightarrow$ (MNP) $\cap$ (SBD) = QR, ở đây

PQ // MN (tức PQ // BD) và QR qua P.

Ta có R, Q tương ứng là trung điểm của SB, SD.

Trong (ABCD) giả sử:

MN $\cap$ CD = E.

MN $\cap$ BC = F.

Trong (SDC): EQ $\cap$ SC = H

Dễ thấy H, R, F thẳng hàng.

Do ED = $\frac{1}{2}$DC, nên trong tam giác SDC, theo định lí Menelauyt ta có:

$\frac{SQ}{QD}.\frac{DE}{EC}.\frac{CH}{HS} = 1$.

Vì $\frac{SQ}{QD} = 1; \frac{DE}{EC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CH}{HS} = 3 \Rightarrow \frac{CH}{CS} = \frac{3}{4}$.

Gọi V_1 là thể tích phần nằm dưới thiết diện MNQHR, ta có:

$V_1 = V_{H.FCE} - V_{Q.NED} - V_{R.FMB}$ (1)

Tương tự như thí dụ 3, dễ thấy: $V_{H.FCE} = \frac{1}{3}S_{FCE}.h_1$, ở đây h_1 là chiều cao kẻ từ H của hình chóp H.FEC. Dễ thấy $h_1 = \frac{3}{4}h$, còn $S_{FCE} = \frac{8}{8}S$, do đó:

$$V_{H.FCE} = \frac{1}{3}\frac{9}{8}S.\frac{3}{4}h = \frac{27}{32}V. \quad (2)$$

Tương tự: $V_{Q.NED} = V_{R.FMB} = \frac{1}{3}.\frac{S}{8}.\frac{h}{2} = \frac{V}{16}$. (3)

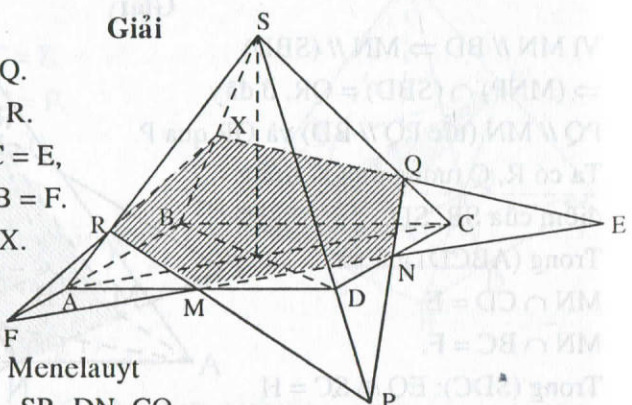
Thay (2) (3) vào (1) và có: $V_1 = \frac{27V}{32} - \frac{V}{8} = \frac{23V}{32}$. (4)

Từ (4) có: $V_2 = V - V_1 = \frac{9V}{32}$. (5)

Kết hợp (4) (5) ta đi đến: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{23}{9}$.

Thí dụ 5. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và CD. Kéo dài SD một đoạn DP = SD. Thiết diện tạo bởi (MNP) chia hình chóp thành hai khối lần lượt có thể tích là V_1, V_2. Tìm tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

Giải



Trong (SDC): $PN \cap SC = Q$.

Trong (SAD): $PM \cap SA = R$.

Trong (ABCD): $MN \cap BC = E$,

$MN \cap AB = F$.

Trong (SBC): $EQ \cap SB = X$.

Dễ thấy trong (SAB):

F, R, X thẳng hàng.

Bằng cách áp dụng định lí Menelauyt trong tam giác SDC, ta có: $\frac{SP}{PD}.\frac{DN}{NC}.\frac{CQ}{QS} = 1$

Do $\frac{SP}{PD} = 2; \frac{DN}{NC} = 1$ (g/t) $\Rightarrow \frac{CQ}{QS} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SQ}{SC} = \frac{2}{3}; \frac{CQ}{CS} = \frac{1}{3}$.

Tương tự có: $\frac{SR}{SA} = \frac{2}{3}; \frac{AR}{SA} = \frac{1}{3}$.

Áp dụng định lí Manelauyt trong tam giác SBC sẽ có:

$\frac{SX}{SB}=\frac{2}{5}$ (chú ý là CE = MD = $\frac{1}{2}$BC)

Thiết diện MNQXR chia hình chóp thành hai khối. Gọi V_1 là thể tích phần hình chóp nằm dưới thiết diện. Ta có:

$V_1 = V_{X.BFE} - V_{Q.CNE} - V_{R.FAM}$. (1)

Ta gọi V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy ABCD và chiều cao kẻ từ S của hình chóp S.ABCD. Khi đó ta có:

$V_{X.BFE}=\frac{1}{3}S_{FBE}.h_1$, h_1 là chiều cao kẻ từ X của hình chóp X.BFE. Ta có:

$S_{FBE}=\frac{9}{8}S; \frac{h_1}{h}=\frac{BX}{BS}=\frac{3}{5}\Rightarrow h_1=\frac{3}{5}h$.

Từ đó $V_{X.BFE}=\frac{1}{3}\frac{9}{8}S\frac{3}{5}h=\frac{27}{40}V$. (2)

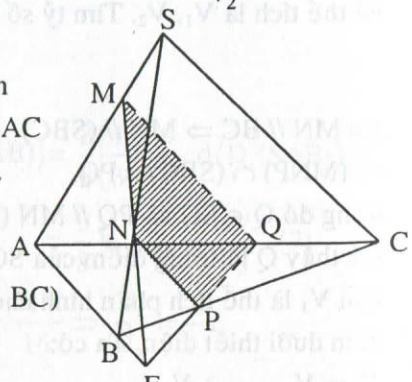
Tương tự có $V_{Q.CNE}=V_{R.FAM}=\frac{1}{3}\frac{S}{8}\frac{h}{3}=\frac{V}{24}$. (3)

Thay (2) (3) vào (1) và có:

$V_1=\frac{27V}{40}-\frac{V}{12}=\frac{71}{120}V \Rightarrow V_2=\frac{49V}{120}\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{71}{49}$.

Thí dụ 6. Cho hình chóp S.ABCD. Lấy M trên SA và N trên SB sao cho $\frac{SM}{MA}=\frac{1}{2}$ và $\frac{SN}{NB}=2$. Thiết diện qua MN và song song với SC chia hình chóp thành hai khối có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Tìm tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

Giải



Thiết diện qua MN và song song với SC nên nó song song với (SAC), từ đó nó phải cắt SAC theo giao tuyến qua M và song song với SC.

Từ đó qua M vẽ MQ // SC (Q ∈ SC).

Vì MQ // SC ⇒ MQ // (SBC)

⇒ (MNQ) ∩ (SBC) = NP, (P ∈ BC)

trong đó NP // SC (tức NP // MQ),

⇒ MNPQ là thiết diện cần tìm.

Giả sử MN ∩ AB = E ⇒ E, P, Q thẳng hàng.

Theo định lí Talet, ta có: $\frac{SM}{MA}=\frac{CQ}{QA}=\frac{1}{2}$; $\frac{SN}{NB}=\frac{CP}{PB}=2$.

Trong tam giác ABC theo định lí Manelauyt, ta có:

$\frac{CQ}{QA}.\frac{AE}{EB}.\frac{BP}{PC}=1.$ (1)

Do $\frac{CQ}{QA}=\frac{1}{2};\frac{BP}{PC}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{AE}{AB}=4\Rightarrow AE=\frac{4}{3}AB.$

Gọi V_1 là thể tích phần hình chóp nằm dưới thiết diện, ta có:

$V_1 = V_{M.AQE} - V_{N.BEF}.$ (1)

Gọi V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích tam giác ABC và chiều cao kẻ từ S của hình chóp S.ABC.

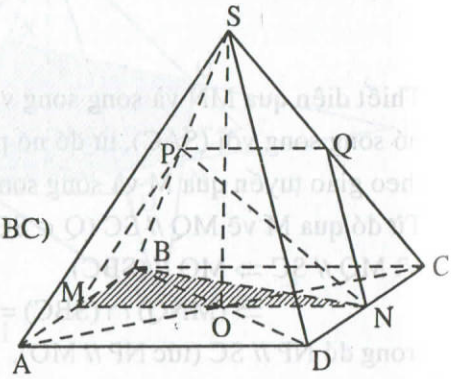
Ta có: $S_{AQE}=\frac{4}{3}\frac{2}{3}S=\frac{8}{9}S$ $\left(\text{do}\ \frac{AQ}{AC}=\frac{2}{3}\right)$; $h_1=\frac{2}{3}h$, ở đây h_1 là chiều cao kẻ từ M của hình chóp M.AQE, do đó:

$V_{M.AQE}=\frac{1}{3}\left(\frac{8}{9}S\right)\left(\frac{2}{3}h\right)=\frac{16V}{27}.$ (2)

Lại có: $S_{BEF}=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}S=\frac{1}{9}S;\ h_2=\frac{1}{3}h$, ở đây h_2 là chiều cao kẻ từ N của hình chóp N.BEF, vì thế: $V_{N.BEF}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}S\right)\left(\frac{1}{3}h\right)=\frac{1}{27}V$ (3)

Thay (2) (3) vào (1) và có: $V_1=\frac{5V}{9}\Rightarrow V_2=\frac{4V}{9}\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{4}.$

Thí dụ 7. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, CD và SB. Thiết diện tạo bởi (MNP) chia hình chóp thành hai phần có thể tích là V_1, V_2. Tìm tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.



Giải

Do MN // BC $\Rightarrow$ MN // (SBC)

$\Rightarrow$ (MNP) $\cap$ (SBC) = PQ,

trong đó Q $\in$ SC và PQ // MN (tức PQ // BC)

Dễ thấy Q là trung điểm của SC.

Gọi V_1 là thể tích phần hình chóp nằm dưới thiết diện. Ta có:

$V_1 = V_{P.MBN} + V_{N.BPQC}.$ (1)

Gọi V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy ABCD và chiều cao kẻ từ S của hình chóp S.ABCD. Ta có:

$S_{MBN}=\frac{S}{4};\ h_1=\frac{h}{2}$, ở đây h_1 là chiều cao kẻ từ P của hình chóp P.BMN.

Vì thế $V_{P.BMN}=\frac{1}{3}S_{MBN}.h_1=\frac{1}{3}\left(\frac{S}{4}\right)\left(\frac{h}{2}\right)=\frac{V}{8}$. (2)

Ta có: $S_{BPQC}=\frac{3}{4}S_{SBC}$; còn $d(N,(BPQC))=\frac{1}{4}d(D,(SBC))$

Vậy $V_{N.BPQC}=\frac{1}{3}S_{BPQC}.d(N,(BPQC))=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}S_{SBC}\right).\frac{1}{2}d(D,(SBC))$

$=\frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}S_{SBC}\right).d(D,(SBC))=\frac{3}{8}V_{D.SBC}$

$=\frac{3}{8}V_{S.BDC}=\frac{3}{16}V$ (3)

Thay (2) (3) vào (1) và có: $V_1=\frac{V}{8}+\frac{3V}{16}=\frac{5V}{16}\Rightarrow V_2=\frac{11V}{16}\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{11}$.

Nhận xét: Ta có cách giải khác như sau:

Gọi K là trung điểm của BC.

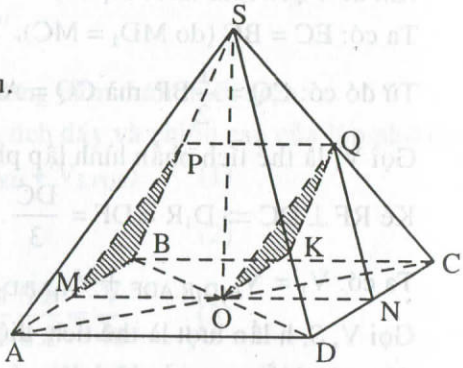
Khi đó ta có MBP.OKQ là hình lăng trụ.

Ta có:

$V_1=V_{Q.OKCN}+V_{MBP.OKQ}$. (4)

Ta có: $V_{Q.OKCN}=\frac{1}{3}\frac{S}{4}\frac{h}{2}=\frac{V}{8}$. (5)

$V_{MBP.OKQ}=S_{MBP}.d(O,(MBP))$. (6)



Ta có: $S_{MBP}=\frac{1}{4}S_{SAB}$

$d(O;(MBP))=\frac{1}{2}d(D,(SAB))$.

Từ (6) suy ra: $V_{MBP.OKQ}=\frac{1}{4}S_{SAB}.\frac{1}{2}d(D,(SAB))=\frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}S_{SAB}.d(D,(SAB))\right)$

$=\frac{3}{8}V_{D.SAB}=\frac{3V}{16}$. (7)

Thay (5) (7) vào (4) và có: $V_1=\frac{5V}{16}\Rightarrow V_2=\frac{11V}{16}\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{11}$.

Ta thu lại kết quả trên.

Thí dụ 8. Cho hình lập phương $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Gọi M, N tương ứng là tâm của các mặt ABCD, DCC_1D_1. Thiết diện tạo bởi (A_1MN) chia hình lập phương thành hai phần có thể tích tương ứng là V_1, V_2. Tìm tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

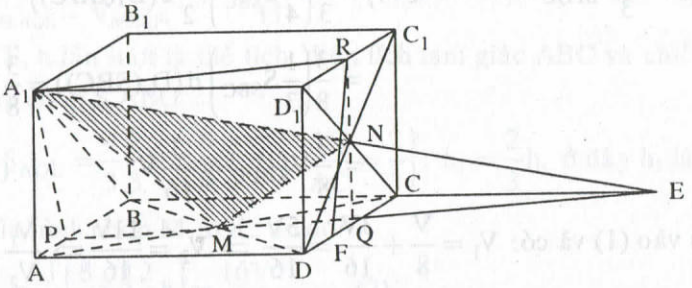
Giải

Trong $(BA_1D_1C_1)$: $A_1M \cap BC = E$,

Trong $(ABCD)$: $EM \cap CD = Q$,

$EM \cap AB = P$.

Trong (DD_1C_1C): $QN \cap C_1D_1 = R$.



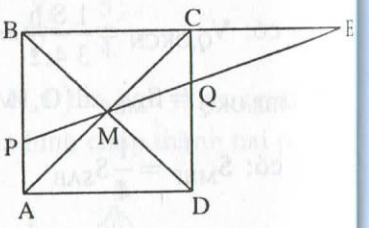
Khi đó $PQRA_1$ là thiết diện tạo bởi (MNP).

Ta có: EC = BC (do $MD_1 = MC$).

Từ đó có: $CQ = \frac{1}{2}BP$ mà $CQ = AP \Rightarrow \frac{CQ}{CD} = \frac{1}{3}; \frac{BP}{BA} = \frac{2}{3}$.

Gọi V_1 là thể tích phần hình lập phương nằm trước thiết diện.

Kẻ $RF \perp DC \Rightarrow D_1R = DF = \frac{DC}{3}$.



Ta có: $V_1 = V_{A_1D_1R.ADF} + V_{A_1AP.D_1FQ}$. (1)

Gọi V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy và chiều cao của hình lập phương đã cho.

Ta có: $V_{AD_1R.ADF} = S_{A_1D_1R}.AA_1 = \frac{S}{6}h = \frac{V}{6}$ (2)

Lập luận tương tự có: $V_{A_1AD.D_1FQ} = \frac{V}{6}$ (3)

Thay (2) (3) vào (1) và có: $V_1 = \frac{V}{3} \Rightarrow V_2 = \frac{2V}{3} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$.

Thí dụ 9. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi O là tâm của hình lập phương. Dựng thiết diện qua O và vuông góc với đường chéo. Chứng minh thiết diện chia hình lập phương thành hai phần tương đương.

Giải

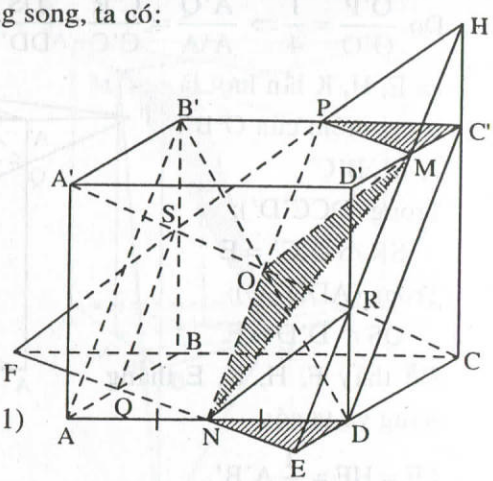
Gọi M là trung điểm của C'D'. Ta có $MA' = MD \Rightarrow MO \perp A'C$.

Gọi N là trung điểm của AD. Ta có $NA' = NC \Rightarrow NO \perp A'C$.

Như vậy $A'C \perp (MON)$.

Trong (AB'C'D): $NO \cap B'C' = P$

Theo tính chất của hai mặt phẳng song song, ta có:
(MON) ∩ (A'B'C'D') = MP,
(MON) ∩ (ABCD) = NQ,
trong đó MP // NQ.
Trong (ABCD): NQ ∩ DC = E,
NQ ∩ BC = F.
Trong (DCC'D'): EM ∩ DD' =. R
Trong (BCC'B'): P ∩ BB' = S.
Dễ thấy MP, S, Q, N, R tương ứng là trung điểm của C'D', B'C', BB', AB, AD, DD' (có thể xem lại chương 1)
Trong (DCC'D'): RM ∩ CC' = H
⇒ H, P, S thẳng hàng.



Cũng có thể thấy ngay $HC' = \frac{1}{2}CC'$.

Gọi V_1 là thể tích phần hình lập phương nằm dưới thiết diện.
Gọi V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy và chiều cao của lập phương.
Ta có: $V_1 = V_{H.FCE} - (V_{H.PMC'} + V_{R.NED} + V_{S.FQB})$. (1)

Ta có: $V_{H.FCE} = \frac{1}{3}\frac{9}{8}S.\frac{3}{2}h = \frac{9V}{16}$. (2)

Lại có: $V_{H.PMC'} = V_{R.NED} = V_{S.FQB} = \frac{1}{3}\frac{S}{8}\frac{h}{2} = \frac{V}{48}$. (3)

Thay (2) (3) vào (1) và có: $V_1 = \frac{9}{16} - 3\frac{V}{48} = \frac{V}{2} \Rightarrow V_2 = \frac{V}{2} \Rightarrow V_1 = V_2$.

⇒ đpcm.

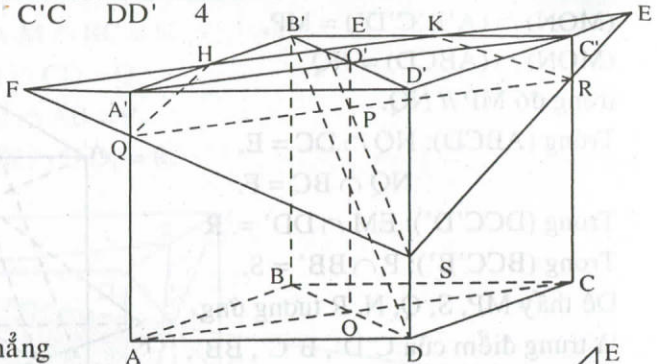
Thí dụ 10. Cho hình hộp chữ nhật ABCDA'B'C'D' đáy là hình vuông. Gọi O, O' lần lượt là tâm của đáy ABCD và A'B'C'D'. P là điểm trên OO' sao cho $\frac{O'P}{O'O} = \frac{1}{4}$. Thiết diện qua P song song với AC' và song song với B'D chia hình hộp thành hai phần tương ứng có thể tích là V_1, V_2. Tìm tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

Giải

Qua P kẻ QR // A'C' (Q ∈ A'A và R ∈ CC').
Cũng qua P kẻ ES // B'D (E ∈ B'D' và SE ∈ DD')
Do QR // A'C' ⇒ QR // (A'B'C'D')
⇒ thiết diện cắt (A'B'C'D') theo giao tuyến HK, ở đây HK qua E, HK // QR (tức HK // A'C'). H ∈ A'B' và K ∈ B'C'.

Do $\frac{O'P}{O'O}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{A'Q}{A'A}=\frac{C'R}{C'C}=\frac{DS}{DD'}=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ E, H, K lần lượt là trung điểm của O'B', A'B', B'C'.



Trong (DCC'D'):

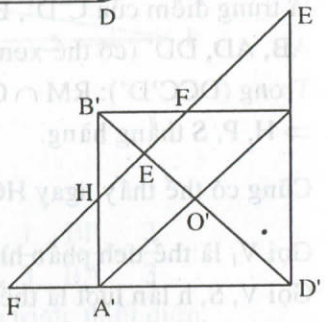
$SR\cap D'C'=E$

Trong (ADD'A'):

$QS\cap D'D=F$.

Dễ thấy F, H, K, E thẳng hàng và ta có:

$FE=HF=\frac{1}{2}A'B'$.



Gọi V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy và chiều cao của hình hộp.

Gọi V_1 là thể tích phần hình hộp nằm trước thiết diện.

$V_1=V_{S.FD'E}-\left(V_{R.KC'E}+V_{Q.FA'H}\right)$. (1)

Ta có: $V_{S.FD'E}=\frac{1}{3}S_{D'FE}.SD'=\frac{1}{3}\frac{9}{8}S.\frac{3h}{4}=\frac{9V}{32}$. (2)

Mặt khác: $V_{R.KC'E}=V_{Q.FA'H}=\frac{1}{3}\frac{S}{8}\frac{h}{4}=\frac{V}{96}$. (3)

Thay (2) (3) vào (1) và có: $V_1=\frac{9V}{32}-\frac{V}{48}=\frac{25V}{96}\Rightarrow V_2=\frac{71V}{96}\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{25}{71}$.

Thí dụ 11. Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C'. Gọi O và O' lần lượt là tâm của đáy ABC và A'B'C'. P là điểm trên O'O sao cho $\frac{O'P}{O'O}=\frac{1}{6}$. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của A'B' và BC. Thiết diện tạo bởi (MNP) chia lăng trụ thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Tìm tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

Giải

Gọi M' là hình chiếu của M trên AB.

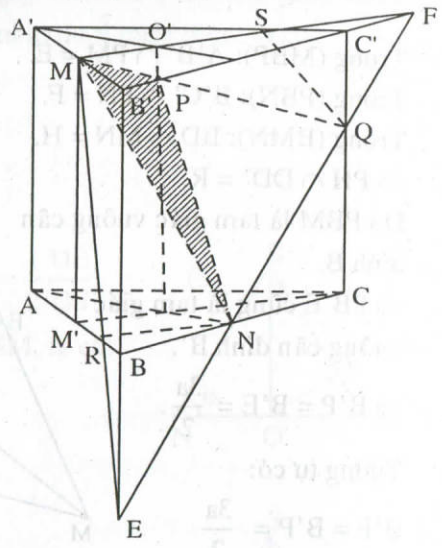
Trong (MC'CM'): $MP\cap CC'=Q$.

Trong (BCC'B'): $QN\cap BB'=E$; $QN\cap B'C'=F$.

Trong (ABB'A'): $EM\cap AB=R$.

Trong (A'B'C'): $FM\cap A'C'=S$.

Khi đó MSQNR là ngũ giác thiết diện.



Do $\frac{O'P}{C'Q}=\frac{MO'}{MC'}=\frac{1}{3}$ mà $\frac{O'P}{O'O}=\frac{1}{6}$

$\Rightarrow$ Q là trung điểm của CC'

$\Rightarrow BE=\frac{1}{2}BB'$; $C'F=\frac{1}{2}B'C$.

Theo định lí Talet, ta có:

$\frac{BR}{B'M}=\frac{EB}{EB'}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{BR}{AB}=\frac{1}{6}$.

Trong tam giác A'B'C' theo định lí Menelauyt, ta có:

$\frac{A'M}{MB'}.\frac{B'F}{FC'}.\frac{C'S}{SA'}=1$

Do $\frac{A'M}{MB'}=1;\frac{B'F}{FC'}=3\Rightarrow\frac{C'S}{SA'}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{C'S}{C'A'}=\frac{1}{4}$.

Gọi V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy và chiều cao của lăng trụ.

Gọi V_1 là phần thể tích của lăng trụ nằm trước thiết diện. Ta có:

$V_1=V_{E.MB'F}-(V_{E.RBN}+V_{Q.SC'F})$. (1)

Ta có: $V_{E.MB'F}=\frac{1}{3}S_{MB'F}.h_1$, ở đây $h_1=EB'$.

Do $S_{MB'F}=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}S=\frac{3}{4}S$; $h_1=\frac{3h}{2}$, nên $V_{E.MB'F}=\frac{3}{8}Sh=\frac{3}{8}V$. (2)

Tương tự có: $V_{E.RBN}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\frac{1}{2}S\right)\frac{h}{2}=\frac{V}{72}$, (3)

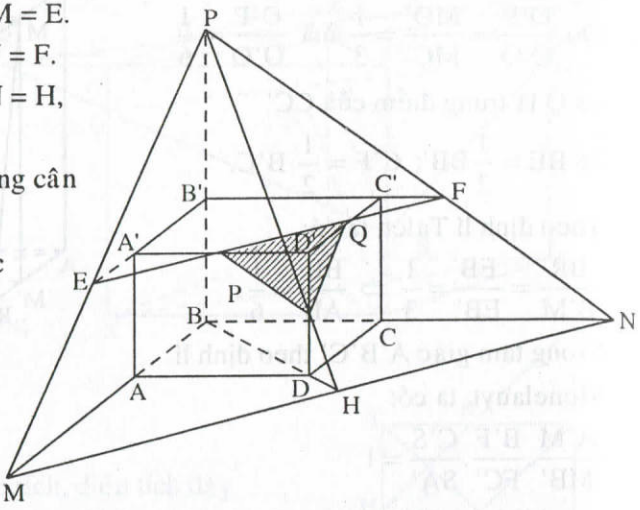
$$V_{Q.SC'F}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\frac{1}{2}S\right)\frac{h}{2}=\frac{V}{48}. \quad (4)$$

Thay (3) (4) vào (2) và có:

$V_1=\frac{3V}{8}-\frac{V}{72}-\frac{V}{48}=\frac{49V}{144}\Rightarrow V_2=\frac{95V}{144}\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{49}{95}$.

Thí dụ 12. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' cạnh a. Kéo dài các cạnh BA, BC, BB' các đoạn tương ứng AM = CN = B'P = $\frac{3}{2}$a. Thiết diện tạo bởi (MNP) chia hình lập phương thành hai phần lần lượt có thể tích là V_1, V_2. Tìm tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

Giải



Trong (MBP): $A'B' \cap PM = E$.

Trong (PBN): $B'C' \cap PN = F$.

Trong (BMN): $BD \cap MN = H$,

$\Rightarrow PH \cap DD' = R$.

Do PBM là tam giác vuông cân đỉnh B.

$\Rightarrow$ PB'E cũng là tam giác vuông cân đỉnh B'.

$\Rightarrow B'P = B'E = \dfrac{3a}{2}$.

Tương tự có:

$B'F = B'P = \dfrac{3a}{2}$

$\Rightarrow$ P và Q lần lượt là trung điểm của A'D' và D'C, ở đây $EF \cap A'D' = P$ và $EF \cap D'C = Q$.

Tương tự R là trung điểm của DD'.

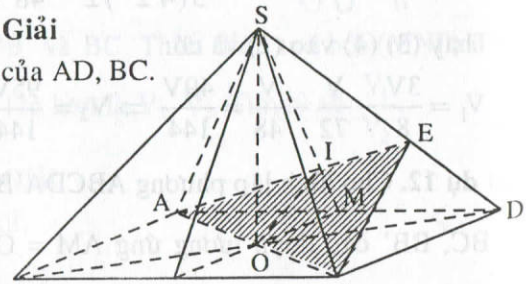
Gọi a là cạnh của hình lập phương, khi đó nếu gọi V là thể tích của hình lập phương, thì $V = a^3$.

Gọi V_1 là thể tích phần hình lập phương nằm phía trước thiết diện.

Ta có: $V_1 = V_{R.D'PQ} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{a}{2}\dfrac{a}{2}\right)\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3}{48} = \dfrac{V}{48} \Rightarrow V_2 = \dfrac{47V}{48} \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{47}$.

Thí dụ 13. Cho hình chóp tứ giác đều, có các mặt bên tạo với đáy góc φ. Thiết diện qua AC và vuông góc với mặt phẳng (SAD) chia hình chóp thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Tìm tỷ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

Giải



Gọi M, N tương ứng là trung điểm của AD, BC.

Khi đó ta có: $\widehat{SMN} = \widehat{SNM} = \varphi$

Ta có: $OM \perp AD$,

$SM \perp AD$,

$\Rightarrow AD \perp (SOM)$.

Do $(SOM) \cap (SAD) = SM$,

nên nếu kẻ $OI \perp SM \Rightarrow OI \perp (SAD)$.

Trong (SAC): $OI \cap SD = E$

$\Rightarrow$ (EAC) là thiết diện qua AC và vuông góc với (SAD).

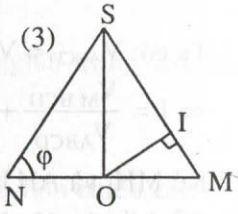
Gọi V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy và chiều cao của hình chóp S.ABCD. Gọi V_1 là thể tích phần hình chóp nằm dưới thiết diện, ta có:

$V_1 = V_{E.ACD}$. (1)

Ta có: $V_{E.ACD} = V_{D.EAC}$.

Rõ ràng $\frac{V_{D.EAC}}{V_{D.SAC}} = \frac{DE}{DS}$. (2)

Vì $V_{D.SAC} = V_{S.ACD} = \frac{1}{2}V$, nên từ (2) có: $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{2}\frac{DE}{DS}$. (3)

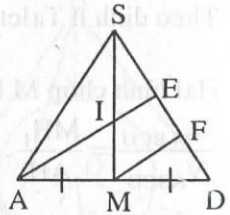


Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông OSM, ta có:

$SO^2 = SI.SM$

$OM^2 = MI.SM$

$\Rightarrow \frac{IM}{IS} = \left(\frac{OM}{OS}\right)^2 = \cot^2\varphi$. (4)



Ta có: $\frac{DE}{ES} = 2\frac{EF}{ES} = 2\frac{IM}{IS} = 2\cot^2\varphi = \frac{2\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}$

$\Rightarrow \frac{DE}{ES+DE} = \frac{2\cos^2\varphi}{2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}$

$\Rightarrow \frac{DE}{DS} = \frac{2\cos^2\varphi}{1+\cos^2\varphi}$. (5)

Thay (5) vào (3) và có: $\frac{V_1}{V} = \frac{2\cos^2\varphi}{2\left(1+\cos^2\varphi\right)} \Rightarrow V_1 = \frac{\cos^2\varphi}{1+\cos^2\varphi}V$

$\Rightarrow V_2 = V - V_1 = \frac{V}{1+\cos^2\varphi} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \cos^2\varphi$

Nhận xét: Nói riêng nếu cho $\varphi = 60^0 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4}$.

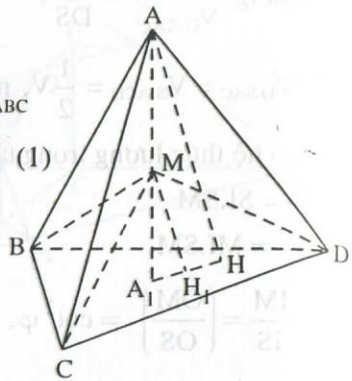
D. Các bài toán liên quan đến thể tích

Trong mục này ta sẽ xét một số bài toán liên quan đến thể tích như:

- Sử dụng thể tích để tính khoảng cách
- Sử dụng thể tích để chứng minh các đẳng thức hoặc bất đẳng thức
- Bài toán thể tích có tham gia yếu tố của giá trị lớn nhất, nhỏ nhất...

Loại 1. Sử dụng thể tích để chứng minh các đẳng thức hoặc bất đẳng thức trong hình học không gian.

Thí dụ 1. Cho hình chóp tứ diện ABCD. M là một điểm trong tứ diện. AM, BM, CM, DM tương ứng cắt các mặt đối của tứ diện tại A_1, B_1, C_1, D_1. Chứng minh $\frac{A_1M}{A_1A}+\frac{B_1M}{B_1B}+\frac{C_1M}{C_1C}+\frac{D_1M}{D_1D}=1$.



Giải

Ta có: $V_{ABCD} = V_{M.BCD} + V_{M.ABD} + V_{M.ACD} + V_{M.ABC}$

$$\Rightarrow 1 = \frac{V_{M.BCD}}{V_{ABCD}}+\frac{V_{M.ABD}}{V_{ABCD}}+\frac{V_{M.ABD}}{V_{ABCD}}+\frac{V_{M.ABC}}{V_{ABCD}}. \quad (1)$$

Kẻ MH_1 và AH lần lượt vuông góc (BCD).

Dễ thấy A_1, H_1, H thẳng hàng.

Theo định lí Talet ta có: $\frac{MH_1}{AH}=\frac{A_1M}{A_1A}$. (2)

Hai hình chóp M.BCD và A.BCD có chung đáy BCD, nên

$$\frac{V_{M.BCD}}{V_{ABCD}}=\frac{MH_1}{AH}. \quad (3)$$

Từ (2) (3) suy ra $\frac{V_{M.BCD}}{V_{ABCD}}=\frac{A_1M}{A_1A}$. (4)

Lập luận tương tự có:

$$\frac{V_{M.ABD}}{V_{ABCD}}=\frac{B_1M}{B_1B};\ \frac{V_{M.ABD}}{V_{ABCD}}=\frac{C_1M}{C_1C} \text{ và } \frac{V_{M.ABC}}{V_{ABCD}}=\frac{D_1M}{D_1D}. \quad (5)$$

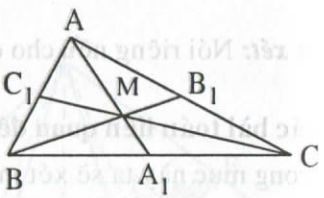
Thay (3) (4) (5) vào (1) có đpcm.

Nhận xét:

1. Hệ thức trên là tương tự với định lí Xeva trong hình học phẳng.

   Giả sử AA_1, BB_1, CC_1 đồng qui tại M (xét trong tam giác ABC).

   Khi đó ta có: $\frac{A_1M}{A_1A}+\frac{B_1M}{B_1B}+\frac{C_1M}{C_1C}=1$.



2. Sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\left(\frac{A_1M}{A_1A}+\frac{B_1M}{B_1B}+\frac{C_1M}{C_1C}+\frac{D_1M}{D_1D}\right)\left(\frac{A_1A}{A_1M}+\frac{B_1B}{B_1M}+\frac{C_1C}{C_1M}+\frac{D_1D}{D_1M}\right)\geq 16$$

$$\Rightarrow \frac{A_1A}{A_1M}+\frac{B_1B}{B_1M}+\frac{C_1C}{C_1M}+\frac{D_1D}{D_1M}\geq 16$$

$$\Rightarrow \frac{A_1M+MA_1}{MA_1}+\frac{B_1M+MB_1}{MB_1}+\frac{C_1M+MC_1}{MC_1}+\frac{D_1M+MD_1}{MD_1}\geq 16$$

$$\Rightarrow \frac{A_1M}{MA_1}+\frac{B_1M}{MB_1}+\frac{C_1M}{MC_1}+\frac{D_1M}{MD_1}\geq 12 \qquad (6)$$

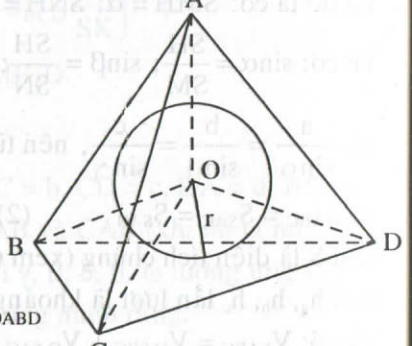
Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{A_1M}{A_1A}=\frac{B_1M}{B_1B}=\frac{C_1M}{C_1C}=\frac{D_1M}{D_1D}=\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow M \equiv G,$

ở đây G là trọng tâm của tứ diện ABCD (xem định nghĩa trọng tâm của tứ diện trong chương 1).

(6) là bất đẳng thức quen biết trong tứ diện.

Thí dụ 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi h_1, h_2, h_3, h_4 lần lượt là bốn chiều cao của tứ diện kẻ từ A, B, C, D và r là bán kính hình cầu nội tiếp của tứ diện. Chứng minh $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}$.



Giải

Gọi O là tâm hình cầu nội tiếp.

Khi đó bốn hình chóp:

O.BCD, O.ACD, O.ABD, O.ABC

đều có chiều cao kẻ từ O bằng r.

Ta có: $V_{ABCD} = V_{OBCD} + V_{OACD} + V_{OABC} + V_{OABD}$

$$\Rightarrow 1 = \frac{V_{OBCD}}{V_{ABCD}}+\frac{V_{OACD}}{V_{ABCD}}+\frac{V_{OABD}}{V_{ABCD}}+\frac{V_{OABC}}{V_{ABCD}}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{r}{h_1}+\frac{r}{h_2}+\frac{r}{h_3}+\frac{r}{h_4} \Rightarrow \frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}$$ đpcm.

Nhận xét:

1. Hệ thức trên là mở rộng hệ thức quen biết sau trong hình học phẳng. Trong mọi tam giác ABC, ta có: $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$, ở đây h_a, h_b, h_c tương ứng là các chiều cao kẻ từ A, B, C; còn r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.
2. Từ thí dụ trên ta suy ra bất đẳng thức sau: Trong mọi tứ diện ta có:

   $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 \geq 16r$

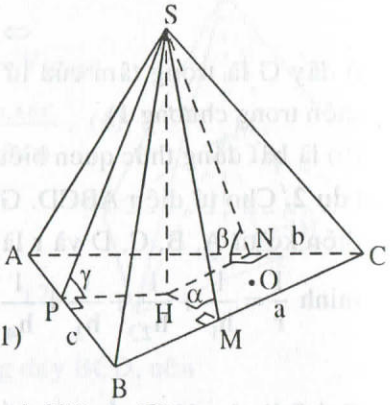
   Điều này suy ra từ bất đẳng thức Côsi sau:

$$(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}\right)\geq 16$$

Thí dụ 3. Cho hình chóp tam giác SABC, có:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma},$$

ở đây BC = a; AC = b; AB = c; α, β, γ lần lượt là góc tạo bởi các mặt SBC, SAC và SAB với đáy ABC. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ một điểm O bất kì trên mặt đáy đến các mặt xung quanh SBC, SAC, SAB của hình chóp là không đổi.



Giải

Kẻ SH ⊥ (ABC) và SM, SN, SP lần lượt vuông góc BC, AC, AB.

Khi đó HM ⊥ BC, HN ⊥ AC, HP ⊥ AB (định lí ba đường vuông góc).

Từ đó ta có: $\widehat{SMH}=\alpha$; $\widehat{SNH}=\beta$; $\widehat{SPH}=\gamma$

Ta có: $\sin\alpha=\frac{SH}{SM}$; $\sin\beta=\frac{SH}{SN}$; $\sin\gamma=\frac{SH}{SP}$ (1)

Vì $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$, nên từ (1) có: a.SM = b.SN = c.SP

$\Rightarrow S_{ABC}=S_{SAC}=S_{SAB}$ (2)

Gọi S là diện tích chung (xem (2)). Gọi O là điểm tùy ý trong đáy ABC.

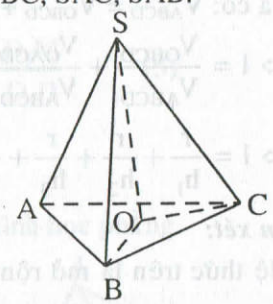
Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là khoảng cách từ O tới mặt SBC, SAC, SAB.

Ta có: $V_{SABC}=V_{O.SBC}+V_{O.SAC}+V_{O.SAB}$

$$=\frac{1}{3}S(h_a+h_b+h_c)\quad\text{(dựa vào (2))}$$

$$\Rightarrow h_a+h_b+h_c=\frac{3V_{SABC}}{S}=\text{const.}$$

Đó là đpcm.



Thí dụ 4. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD, đáy là tứ giác lồi ABCD. Một mặt phẳng cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại K, L, P, N. Chứng minh rằng:

$$S_{BCD}\frac{SA}{SK}+S_{ABD}\frac{SC}{SP}=S_{ABC}\frac{SD}{SN}+S_{ACD}\frac{SB}{SL}$$

Giải

Do K, L, P, N đồng phẳng nên ta có:

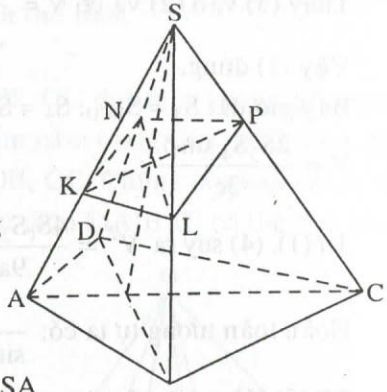
$V_{S.KLP}+V_{S.KNP}=V_{S.NPL}+V_{S.NKL}$ (1) (vì cùng bằng $V_{S.KNPL}$)

Ta có: $V_{S.KLP}=\frac{SK}{SA}.\frac{SL}{SB}.\frac{SP}{SC}V_{S.ABC}$

$$V_{S.KNP} = \frac{SP}{SC}.\frac{SN}{SD}.\frac{SK}{SA}V_{S.ADC},$$

$$V_{S.NPL} = \frac{SL}{SB}.\frac{SP}{SC}.\frac{SN}{SD}V_{S.BCD},$$

$$V_{S.NKL} = \frac{SN}{SD}.\frac{SL}{SB}.\frac{SK}{SA}V_{S.ABD}.$$



Thay vào (1), rồi nhân cả hai vế với đại lượng $\frac{SA}{SK}.\frac{SB}{SL}.\frac{SC}{SP}.\frac{SD}{SN}$,

Ta có:

$$V_{SABC}\frac{SD}{SN} + V_{SADC}\frac{SB}{SL} = V_{S.ABD}\frac{SC}{SP} + V_{SBCD}\frac{SA}{SK}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}h\left(S_{ABC}\frac{SN}{SD} + S_{ADC}\frac{SB}{SL}\right) = \frac{1}{3}h\left(S_{ABD}\frac{SC}{SP} + S_{BCD}\frac{SA}{SK}\right). \quad (2)$$

ở đây h là chiều cao kẻ từ S của hình chóp S.ABCD.

Từ (2) suy ra đpcm.

Thí dụ 5. Cho tứ diện ABCD, trong đó AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = e, BD = f. Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng SAB và CAB (khi đó ta nói tắt α là góc nhị diện cạnh AB). Với kí hiệu trên gọi γ, β, δ, θ, ω tương ứng là các góc nhị diện cạnh BC, CD, DA, AC và BD. Chứng minh rằng:

$$\frac{ac}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{bd}{\sin\gamma\sin\delta} = \frac{ef}{\sin\theta\sin\omega}.$$

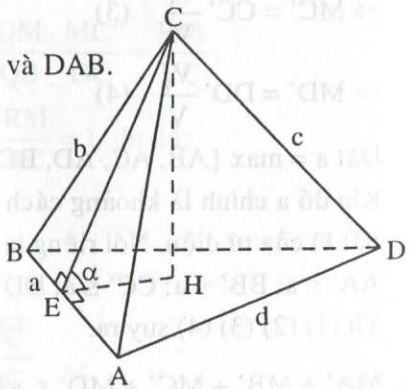
Giải

Trước hết ta chứng minh kết quả sau:

Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hai mặt CAB và DAB.

Gọi V là thể tích tứ diện ABCD.

Khi đó ta có: $V = \frac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}$. (1)



Kẻ CH ⊥ (ABCD), kẻ CE ⊥ AB

⇒ HE ⊥ AB (định lí ba đường vuông góc)

Ta có $S_1 = S_{ABC}$; $S_2 = S_{ABD}$.

Lại có; $V = \frac{1}{3}S_2.CH$. (2)

Ta thấy $CH = CE\sin\alpha = \frac{2S_{ABC}}{AB}\sin\alpha = \frac{2S_1\sin\alpha}{a}$. (3)

Thay (3) vào (2) và có $V = \dfrac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}$.

Vậy (1) đúng.

Bây giờ đặt $S_3 = S_{BCD}$; $S_4 = S_{ACD}$. Áp dụng (1) ta có:

$$V = \frac{2S_3S_4\sin\beta}{3c} \qquad (4)$$

Từ (1), (4) suy ra $V^2 = \dfrac{4S_1S_2S_3S_4}{9ac}\sin\alpha.\sin\beta \Rightarrow \dfrac{ac}{\sin\alpha\sin\beta} = \dfrac{4S_1S_2S_3S_4}{9V^2}$ (5)

Hoàn toàn tương tự ta có: $\dfrac{bd}{\sin\gamma\sin\delta} = \dfrac{ef}{\sin\theta\sin\alpha} = \dfrac{4S_1S_2S_3S_4}{9V^2}$. (6)

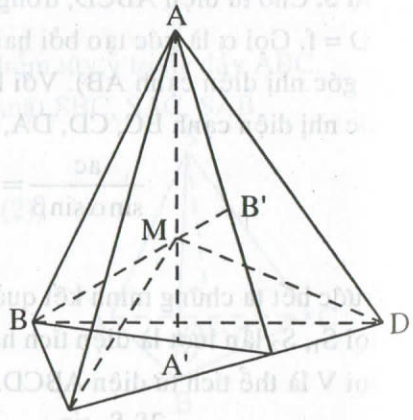
Từ (5) (6) suy ra đpcm.

Thí dụ 6. Cho tứ diện ABCD và một điểm M trong tứ diện. AM , BM, CM, DM lần lượt cắt các mặt đối diện tại A', B', C', D'.

Chứng minh MA' + MB' + MC' + MD' ≤ max{AB, AC, AD, BC, BD, CD}

Giải

Gọi V, V_1, V_2, V_3, V_4 lần lượt là thể tích của các tứ diện ABCD, MBCD, MACD, MABD, MABC.



Dễ thấy: $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{MA'}{AA'}$

$\Rightarrow MA' = AA'\dfrac{V_1}{V}$ (1)

$\Rightarrow MB' = BB'\dfrac{V_2}{V}$ (2)

$\Rightarrow MC' = CC'\dfrac{V_3}{V}$ (3)

$\Rightarrow MD' = DD'\dfrac{V_4}{V}$. (4)

Đặt a = max {AB, AC, AD, BC, BD, CD}

Khi đó a chính là khoảng cách lớn nhất trong các khoảng cách giữa hai điểm bất kì của tứ diện. Nói riêng ta có:

$AA' \le a$; $BB' \le a$; $CC' \le a$; $DD' \le a$. (5)

Từ (1) (2) (3) (4) suy ra:

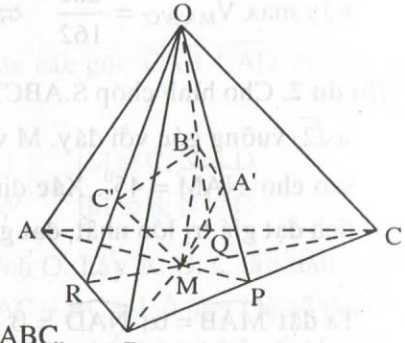
$$MA' + MB' + MC' + MD' \le a\frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{V}. \quad (6)$$

Từ $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$ và từ (6) suy ra đpcm.

Loại 2. Các bài toán về thể tích kết hợp với giá trị lớn nhất, nhỏ nhất, hoặc chứng minh các bất đẳng thức liên quan đến thể tích.

Thí dụ 1. Cho tứ diện OABC, trong đó OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, OA = a, OB = b, OC = c. M là một điểm nằm trong đáy ABC. Qua M vẽ các đường tương ứng song song với OA, OB, OC. Chúng lần lượt cắt mặt đối diện tại A', B', C'. Xác định điểm M để tứ diện MA'B'C' có thể tích lớn nhất và tính giá trị lớn nhất ấy.

Giải



Trong (ABC) giả sử: $AM \cap BC = P$,

$BM \cap AC = Q$,

$CM \cap AB = R$.

Kẻ MA' // OA (A' $\in$ OP)

MB' // OB (B' $\in$ OQ)

MC' // OC (C' $\in$ OR)

Đem tứ diện MA'B'C' "lồng vào" tứ diện OABC.

Do MA' // OA, MB' // OB, MC' // OC, nên ta có (xem hình vẽ bên)

$$\frac{V_{M.A'B'C'}}{V_{O.ABC}} = \frac{V_{OA'B'C'}}{V_{OABC}} = \frac{MA'}{OA}.\frac{MB'}{OB}.\frac{MC'}{OC}. \quad (1)$$

Dễ thấy OA $\perp$ (OBC), nên

$$V_{OABC} = V_{A.OBC} = \frac{1}{3}S_{OBC}.AO = \frac{1}{3}\frac{1}{2}OB.OC.OA = \frac{abc}{6}. \quad (2)$$

Từ (1) (2) có: $V_{M.A'B'C'} = \frac{abc}{6}\frac{MA'}{OA}.\frac{MB'}{OB}\frac{MC'}{OC}.$ (3)

Theo định lí Talet, thì $\frac{MA'}{OA} = \frac{PM}{PA}; \frac{MB'}{OB} = \frac{QM}{QB}; \frac{MC'}{OC} = \frac{RM}{RC}.$

Trong tam giác ABC, rõ ràng $\frac{PM}{PA} + \frac{QM}{QB} + \frac{RM}{RC} = 1$, do đó:

$$\frac{MA'}{OA} + \frac{MB'}{OB} + \frac{MC'}{OC} = 1 \quad (4)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, thì

$$1 = \frac{MA'}{OA} + \frac{MB'}{OB} + \frac{MC'}{OC} \geq 3\sqrt[3]{\frac{MA'}{OA}.\frac{MB'}{OB}.\frac{MC'}{OC}}$$

$$\Rightarrow \frac{MA'}{OA}.\frac{MB'}{OB}.\frac{MC'}{OC} \leq \frac{1}{27} \quad (5)$$

Từ (3) (5) có:

$$V_{MA'B'C'} \le \frac{abc}{162} \qquad (6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{MA'}{OA} = \frac{MB'}{OB} = \frac{MC'}{OC} = \frac{1}{3}$

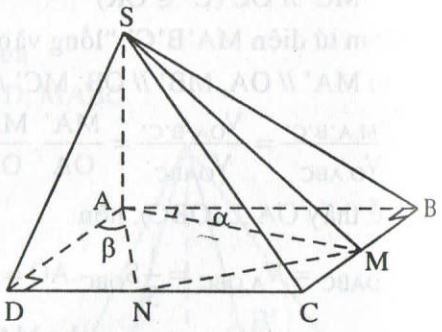
$$\Leftrightarrow \frac{PM}{PA} = \frac{QM}{QB} = \frac{RM}{RC} = \frac{1}{3}$$

$\Leftrightarrow$ M là trọng tâm tam giác ABC.

Vậy $\max V_{MA'B'C'} = \frac{abc}{162}$ $\Leftrightarrow$ M là trọng tâm tam giác ABC.

Thí dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, còn $SA = a\sqrt{2}$ vuông góc với đáy. M và N là các điểm di động trên BC, CD tương ứng sao cho $\widehat{NAM} = 45^0$. Xác định vị trí của M, N để hình chóp S.AMN có thể tích đạt giá trị lớn nhất, đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm các giá trị ấy.

Giải



Ta đặt $\widehat{MAB} = \alpha$; $\widehat{NAD} = \beta$

$\Rightarrow AM = \frac{a}{\cos\alpha}$; $AN = \frac{a}{\cos\beta}$.

Vì $\widehat{NAM} = 45^0 \Rightarrow \alpha + \beta = 45^0$

Ta có: $V_{S.AMN} = \frac{1}{3} S_{AMN}.SA$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{3}.\frac{1}{2} AM.AN \sin 45^0$$

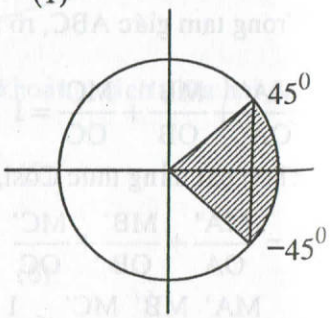
$$= \frac{a\sqrt{2}}{6}.\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a^2}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{a^3}{6\cos\alpha\cos\beta} = \frac{a^3}{3[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]}$$

$$= \frac{a^3}{3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos(\alpha-\beta)\right)}. \qquad (1)$$

Do $0 \le \alpha \le 45^0$; $0 \le \beta \le 45^0 \Rightarrow -45^0 \le \alpha - \beta \le 45^0$

$\Rightarrow \max[\cos(\alpha-\beta)] = 1 \Leftrightarrow \alpha - \beta = 0$

$$\min[\cos(\alpha-\beta)] = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha = 45^0; \beta = 0 \\ \alpha = 0^0; \beta = 45^0 \end{bmatrix}$$



Từ (1) suy ra:

$V_{S.AMN}$ đạt giá trị max $\Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta)$ đạt giá trị min

$V_{S.AMN}$ đạt giá trị min $\Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta)$ đạt giá trị max.

Vì thế max $V_{S.AMN} = \dfrac{a^3}{3\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$,

$$\min V_{S.AMN} = \frac{a^3}{3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)} = \frac{2a^3}{3\left(2+\sqrt{2}\right)} = \frac{a^3\left(2-\sqrt{2}\right)}{3}.$$

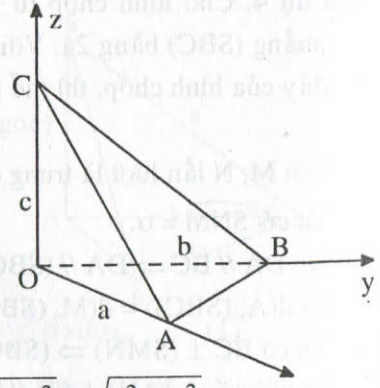
Giá trị lớn nhất đạt được $\Leftrightarrow \alpha = \beta = 22^0 30'$.

$\Leftrightarrow$ M, N lần lượt là chân đường phân giác các góc $\widehat{CAB}, \widehat{CAD}$ vẽ trong các tam giác CAB, CAD.

Giá trị bé nhất đạt được $\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\alpha = 45^0; \beta = 0\\ \alpha = 0; \beta = 45^0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}M \equiv C; N \equiv D\\ M \equiv B; N \equiv C\end{bmatrix}$

Thí dụ 3. Cho góc tam diện vuông Oxyz đỉnh O. Lấy A, B, C lần lượt trên Ox, Oy, Oz sao cho OA + OB + OC + AB + AC + BC = l, ở đây *l* là số dương cho trước. Xác định vị trí các điểm A, B, C sao cho thể tích tứ diện OABC đạt giá trị lớn nhất và hãy tính giá trị lớn nhất ấy.

Giải



Đặt OA = a, OB = b, OC = c

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:

$a+b \le \sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$,

$a+c \le \sqrt{2\left(a^2+c^2\right)}$,

$b+c \le \sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}$.

Từ đó suy ra: $\sqrt{2}(a+b+c) \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}$

$\Rightarrow \sqrt{2}(a+b+c)+a+b+c \le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}+a+b+c$ (1)

Từ giả thiết suy ra VP (1) = OA + OB + OC + AB + AC + BC = *l*.

Vậy từ (1) ta có: $(a+b+c)\left(\sqrt{2}+1\right) \le l$. (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b = c. (3)

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$. (3)

Mặt khác $V = V_{O.ABC} = \dfrac{1}{6}abc$. Vì thế từ (3) suy ra:

$$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{6V}. \quad (4)$$

Kết hợp (2) (4) có: $l \geq 3\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{6V}$

$$\Rightarrow V \leq \frac{l^3}{162\left(\sqrt{2}+1\right)^3} = \frac{l^3\left(\sqrt{2}-1\right)^3}{162}. \qquad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$. Kết hợp với điều kiện:

$a+b+c+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2} = l.$

$\Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{l\left(\sqrt{2}-1\right)}{3}$ (suy từ phương trình $3a + 3a\sqrt{2} = l$).

Vậy $\max V_{OABC} = \dfrac{l^3\left(\sqrt{2}-1\right)^3}{162}$.

Giá trị lớn nhất đạt được $\Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{l\left(\sqrt{2}-1\right)}{3}$.

Nhận xét: Trong các thí dụ 1, 2, 3 ta đã sử dụng phương pháp bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Thí dụ 4. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD mà khoảng cách từ A tới mặt phẳng (SBC) bằng 2a. Với giá trị nào của α, ở đây α là góc giữa mặt bên và đáy của hình chóp, thì thể tích của khối chóp là nhỏ nhất. Tìm giá trị đó.

Giải

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC.

Ta có $\widehat{SNM} = \alpha$.

Do DA // BC $\Rightarrow$ DA // (SBC)

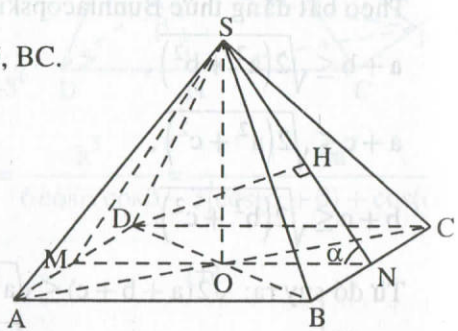
$\Rightarrow d(A, (SBC)) = d(M, (SBC))$. (1)

Ta có BC $\perp$ (SMN) $\Rightarrow$ (SBC) $\perp$ (SMN).

Do đó nếu kẻ MH $\perp$ SN (H $\in$ SN)

$\Rightarrow$ MH $\perp$ (SBC)

$\Rightarrow d(M, (SBC)) = H$. (2)



Từ (1) (2) và giả thiết ta có MH = 2a.

Do đó $MN = \dfrac{MH}{\sin\alpha} = \dfrac{2a}{\sin\alpha} \Rightarrow SO = ON.\tan\alpha = \dfrac{a}{\sin\alpha}\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{a}{\cos\alpha}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2a}{\sin\alpha}\right)^2 \dfrac{a}{\cos\alpha} = \dfrac{4a^3}{3\sin^2\alpha\cos\alpha}$. (3)

Từ (3) suy ra $V_{S.ABCD}$ bé nhất $\Leftrightarrow \sin^2\alpha\cos\alpha$ nhận giá trị lớn nhất.

Xét biểu thức $P = \sin^2\alpha\cos\alpha = \cos\alpha(1 - \cos^2\alpha) = \cos\alpha - \cos^3\alpha$ (4)

Do $0 < \alpha < 90^0 \Rightarrow 0 < \cos\alpha < 1$.

Từ (4) xét hàm số sau: $y = x - x^3$ với $0 < x < 1$.

Ta có: $y' = 1 - 3x^2$, từ đó có bảng biến thiên sau:

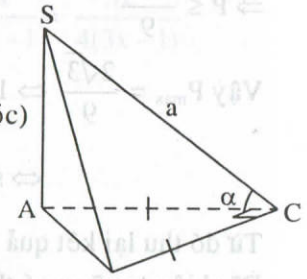
x		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
y'		0		+		0	–	
y			↗		↗		↘	

Vậy $y_{max} = y\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Do đó $\min V_{S.ABCD} = \frac{4a^3}{3\frac{2\sqrt{3}}{9}} = 2\sqrt{3}a^3 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Thí dụ 5. Hình chóp S.ABCD có đáy là tam giác vuông cân đỉnh C và SA vuông góc với đáy (ABC). Giả sử SC = a. Hãy tìm góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) sao cho thể tích khối chóp là lớn nhất.

Giải



$(SBC) \cap (ABC) = BC$.

Do $AC \perp BC \Rightarrow SC \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc)

$\Rightarrow \widehat{SCA}$ là góc giữa (SBC) và (ABC).

Đặt $\widehat{SCA} = \alpha$ $(0 < \alpha < 90^0)$.

Ta có: $SA = a\sin\alpha$, $AC = a\cos\alpha$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{11}{32}(a\cos\alpha)^2 a\sin\alpha = \frac{a^3}{6}\cos^2\alpha\sin\alpha. \quad (1)$$

Từ (1) suy ra $V_{S.ABC}$ nhận giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow P = \cos^2\alpha\sin\alpha$ nhận giá trị lớn nhất. Xét biểu thức: $P = \cos^2\alpha\sin\alpha = (1 - \sin^2\alpha)\sin\alpha$ với $0 < \alpha < 90$

Xét hàm số: $y = (1 - x^2)x = x - x^3$ với $0 < x < 1$.

Ta có: $y' = 1 - 3x^2$, và có bảng biến thiên sau:

x		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
y'				+		0	–	
y				↗		↗	↘	

Vậy $y_{max} = y\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $V_{S.ABC}$ nhận giá trị lớn nhất $= \frac{a^3\sqrt{3}}{27} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Chú ý: Ta có thể tìm giá trị lớn nhất của P bằng phương pháp bất đẳng thức như sau:

Do $P > 0$ nên $P_{max} \Leftrightarrow P^2 max$

Ta có: $P^2 = (1 - \sin^2\alpha)^2\sin^2\alpha = \frac{(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)(2\sin^2\alpha)}{2}$.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\sqrt[3]{(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)(2\sin^2\alpha)} \le \frac{(1-\sin^2\alpha)+(1-\sin^2\alpha)+2\sin^2\alpha}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow (1 - \sin^2\alpha)(1 - \sin^2\alpha)(2\sin^2\alpha) \le \frac{8}{27}$$

$$\Rightarrow P \le \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Vậy $P_{max} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow 1 - \sin^2\alpha = 2\sin^2\alpha \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (do } \sin\alpha > 0)$$

Từ đó thu lại kết quả trên!

Dĩ nhiên ta cũng có thể giải thí dụ 4 bằng phương pháp bất đẳng thức.

Thí dụ 6. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành. Gọi K là trung điểm của SC. Mặt phẳng qua AK cắt các cạnh SB, SD của hình chóp tại M, N. Xác định vị trí của M, N để đại lượng:

$$P = \frac{V_{S.AMNK}}{V_{S.ABCD}}$$

đạt giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất.

Giải

Giả sử $AK \cap SO = E$, ở đây O là giao điểm của AC, BD; khi đó M, E, N thẳng hàng.

Đặt $x = \frac{SM}{SB}$; $y = \frac{SN}{SD}$

Ta có: $V_{S.AMNK} = V_{S.AMK} + V_{S.ANK}$. (1)

Dễ thấy: $\frac{V_{S.AMK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SK}{SC} = \frac{x}{2}$

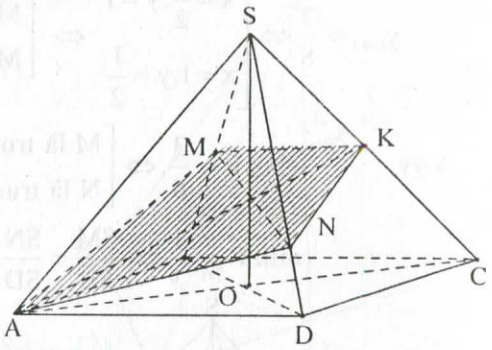
$\Rightarrow V_{S.AMK} = \frac{x}{2} V_{S.ABC} = \frac{x}{4} V$. (2)

ở đây $V = V_{S.ABCD}$

Tương tự ta có: $V_{S.ANK} = \frac{yV}{4}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra

$V_{S.AMNK} = \frac{V}{4}(x + y)$. (4)



Lại có $V_{S.AMNK} = V_{S.AMN} + V_{S.MNK} = \frac{xyV}{2} + \frac{xyV}{4} = \frac{3xyV}{4}$. (5)

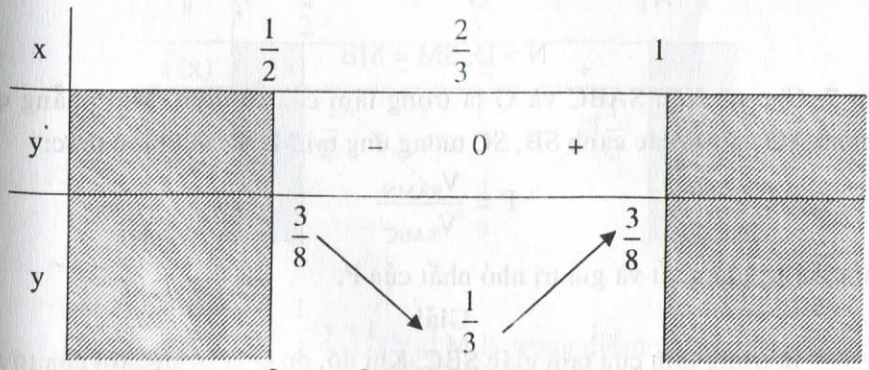
Từ (4) (5) ta có $x+y = 3xy \Rightarrow y = \frac{x}{3x-1}$. (6)

Từ (6) và do $0 \le y < 1 \Rightarrow \frac{x}{3x-1} \le 1 \Rightarrow x \ge \frac{1}{2}$ Vậy $\frac{1}{2} \le x \le 1$.

Từ (5) (6) có: $P = \frac{V_{S.AMKN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\frac{3}{4}xyV}{V} = \frac{3}{4}xy = \frac{3}{4}x.\frac{x}{3x-1} = \frac{3x^2}{4(3x-1)}$

Xét hàm số $y = \frac{3x^2}{4(3x-1)}$ với $\frac{1}{2} < x \le 1$

Ta có $y' = \frac{3x(3x-2)}{4(3x-1)^2}$ và có bảng biến thiên:

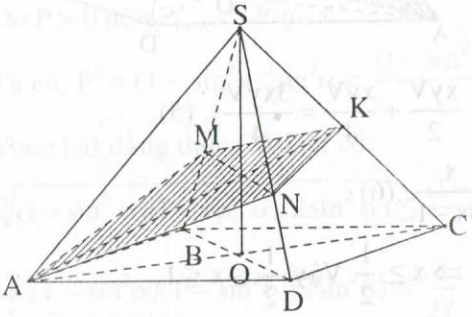


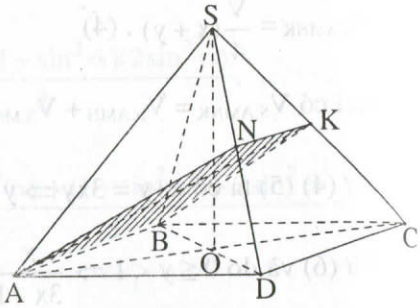
Từ đó $y_{min} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}; y = \frac{2}{3}$

$$y_{max} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = \frac{1}{2}; y = 1 \\ x = 1; y = \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} M \text{ là trung điểm của SB, } N \equiv D \\ M \equiv B; N \text{ là trung điểm của SD} \end{bmatrix}$$

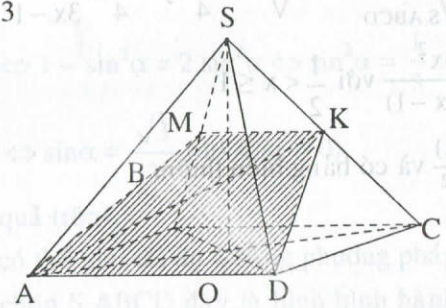
Vậy $\max P = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} M \text{ là trung điểm của SB, } N \equiv D \\ N \text{ là trung điểm của SD, } M \equiv B \end{bmatrix}$

$$\min P = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SD} = \frac{2}{3}$$





$\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SD} = \frac{2}{3}$ $\quad M \equiv B; SN = ND$



$N \equiv D; SM = MB$

Thí dụ 7. Cho tứ diện SABC và G là trọng tâm của tứ diện. Mặt phẳng quay quanh AG và cắt các cạnh SB, SC tương ứng tại M, N. Xét biểu thức:

$$P = \frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}}$$

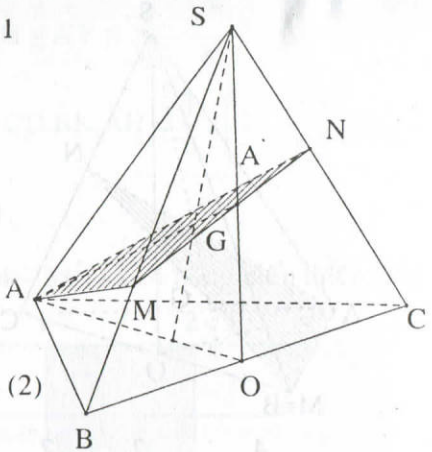
Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của P.

Giải

Gọi A' là trọng tâm của tam giác SBC. Khi đó, do G là trọng tâm của tứ diện SABC nên A, G, A' thẳng hàng (Xem lại chương 1).

Gọi O là trung điểm của BC, tức là $SA' \cap BC = O$.

Đặt $\frac{SM}{SB} = x$; $\frac{SN}{SC} = y$, thì $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$



Ta có: $P = \frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = xy$. (1)

Ta có:

$S_{SMN} = S_{SMA'} + S_{A'NS}$

$= \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SA'}{SO} S_{SBO} + \frac{SN}{SC} \cdot \frac{SA'}{SO} S_{SOC}$

$= x \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{SBC} + y \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{SBC} = \frac{x+y}{3} S_{SBC}$. (2)

(do $S_{SBO} = S_{SOC} = \frac{1}{2} S_{SBC}$)

Mặt khác ta lại có: $P = \frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{V_{A.SMN}}{V_{A.SBC}} = \frac{V_{SMN}}{V_{SBC}} = \frac{x+y}{3}$. (3) (do(2))

Từ (1) (3) suy ra $xy = \frac{x+y}{3} \Rightarrow y = \frac{x}{3x-1}$

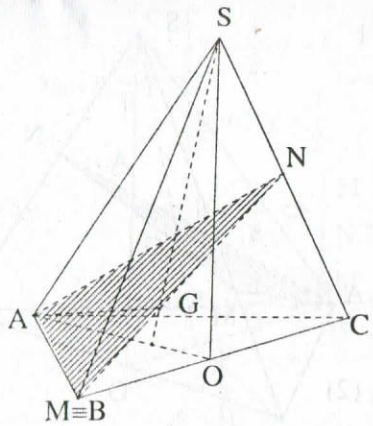
Lập luận như thí dụ 6, ta có $\frac{1}{2} \le x \le 1$; $\frac{1}{2} \le y \le 1$. Từ đó ta có $P = \frac{x^2}{3x-1}$

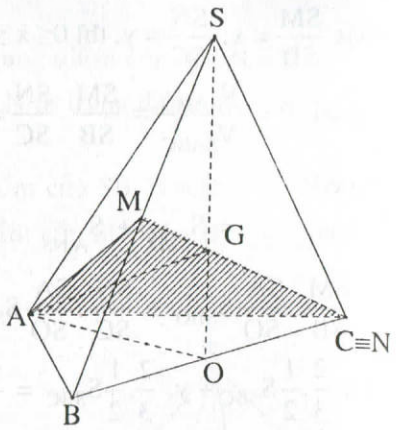
Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2}{3x-1}$ với $\frac{1}{2} \le x \le 1$

Ta có $f'(x) = \frac{x(3x-2)}{(3x-1)^2}$ và có bảng biến thiên sau:

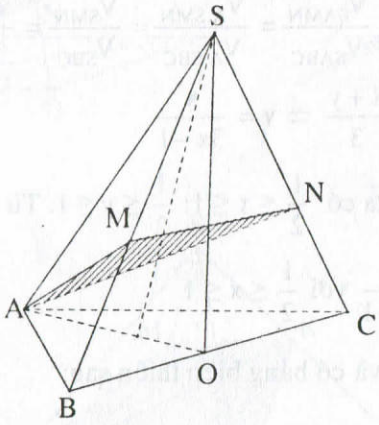
x	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $\frac{1}{2}$	↘	$\frac{4}{9}$	↗	$\frac{1}{2}$

Vậy $\max P = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}; y = 1 \\ x = 1; y = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} M \text{ là trung điểm của } SB, N \equiv C \\ M \equiv B; N \text{ là trung điểm của } SC \end{array}\right.$





$$\min P = \frac{4}{9} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}; y = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} = \frac{2}{3}$$



$$\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} = \frac{2}{3}$$

Thí dụ 8: Cho tứ diện ABCD có AB > 1, còn tất cả các cạnh còn lại đều nhỏ hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng $V_{ABCD} < \frac{1}{8}$.

Giải

Vẽ AF ⊥ CD và BK ⊥ CD. Đặt CD = x, khi đó $0 < x \le 1$

Ta có $\max\{CF, FD\} \ge \frac{CD}{2} = \frac{x}{2}$

Giả sử $\max\{CF, FD\} = CF \Rightarrow CF \ge \frac{x}{2}$

Ta có $AF = \sqrt{AC^2 - CF^2} \le \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ (do $AC \le 1, CF \ge \frac{x}{2}$)

Tương tự, ta có $BK \le \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$

Vẽ chiều cao AH của hình chóp. Ta có $AH \le AF \le \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} < 1$

Từ đó suy ra $V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{BCD} . AH = \frac{1}{3} . \frac{1}{2} CD.BK.AH < \frac{1}{6} x \left(1-\frac{x^2}{4}\right)$. (1)

$\Rightarrow V_{ABCD} < \frac{1}{24} x(4 - x^2)$. (2), với $0 < x \le 1$

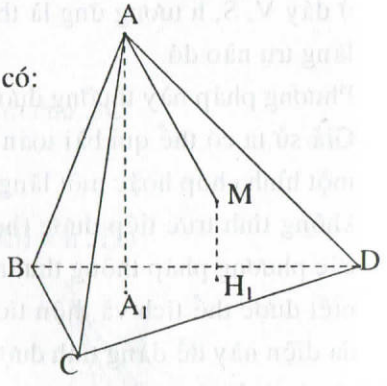
Xét hàm số $y = x(4-x^2) = 4x - x^3 \Rightarrow y' = 4 - 3x^2$, và có bảng biến thiên sau:

x	0		1		$2\sqrt{3}$
y'		+			0
y		↗			

Từ đó suy ra $y_{max} = y(1) = 3$. Thay vào (2) và có $V_{ABCD} < \frac{1}{8} \Rightarrow$ đpcm.

Thí dụ 9. Cho tứ diện ABCD có các cạnh đối đôi một vuông góc với nhau. Chứng minh rằng với mọi điểm M nằm bên trong tứ diện, ta có bất đẳng thức sau: $MA . S_{BCD} + MB . S_{ACD} + MC . S_{ABD} + MD . S_{ABC} \ge 9V$, ở đây V là thể tích tứ diện ABCD.

Giải



Kẻ AA_1, MH_1 lần lượt vuông góc (BCD). Ta có:

$AM + MH_1 \ge AH_1 \ge AA_1$

$\Rightarrow AM \ge AA_1 - MH_1$. (1)

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow M \in AA_1$.

Từ (1) ta có:

$AM . S_{BCD} \ge AA_1 . S_{BCD} - MH_1 . S_{BCD}$

$\Rightarrow AM . S_{BCD} \ge 3V - 3V_{M.BCD}$. (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow M \in AA_1$.

Tương tự ta có: $BM . S_{ACD} \ge 3V - 3V_{M.ACD}$. (3)

$CM . S_{ABD} \ge 3V - 3V_{M.ABD}$. (4)

$DM . S_{ABC} \ge 3V - 3V_{M.ABC}$. (5)

Dấu bằng trong (3), (4), (5) tương ứng xảy ra

$\Leftrightarrow M \in BB_1, M \in CC_1, M \in DD_1$;

ở đây BB_1, CC_1, DD_1 lần lượt là các chiều cao của tứ diện kẻ từ B, C, D.

Để ý rằng $V_{M.BCD} + V_{M.ACD} + V_{M.ABD} + V_{M.ABC} = V$. (6)

Cộng từng vế (2), (3), (4), (5) và sử dụng (6), ta có:

$MA . S_{BCD} + MB . S_{ACD} + MC . S_{ABD} + MD . S_{ABC} \ge 9V$. (7)

Dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2), (3), (4), (5).

Ta biết rằng nếu ABCD là tứ diện có các cặp cạnh đối diện đôi một vuông góc với nhau thì bốn đường cao của tứ diện đồng qui tại một điểm H.

Vì thế dấu bằng trong (7) xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv H$ đó là đpcm.

***Nhận xét*:** Tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối diện đôi một vuông góc với nhau gọi là "tứ diện trực tâm".

Về "tứ diện trực tâm" xin xem trong phần "Một số chuyên đề đặc biệt của hình học không gian trong chương 4 của cuốn sách này.

E. Sử dụng phương pháp thể tích để tìm khoảng cách

Các bài toán tìm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau trong nhiều trường hợp có thể qui về bài toán tìm thể tích khối đa diện. Việc tính các khoảng cách này dựa trên công thức:

$$h = \frac{3V}{S}$$

ở đây V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy và chiều cao của một hình chóp nào đó; hoặc là công thức: $h = \frac{V}{S}$

ở đây V, S, h tương ứng là thể tích, diện tích đáy và chiều cao của một hình lăng trụ nào đó.

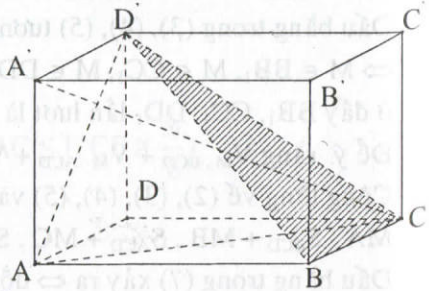
Phương pháp này thường được áp dụng trong các trường hợp sau:

Giả sử ta có thể qui bài toán tìm khoảng cách về bài toán tìm chiều cao của một hình chóp hoặc một lăng trụ nào đó. Dĩ nhiên, các chiều cao này thường không tính trực tiếp được (hoặc tính toán quá phức tạp) bằng cách sử dụng các phương pháp thông thường. Tuy nhiên, các khối đa diện này lại dễ dàng biết được thể tích và diện tích đáy của nó. Như thế, chiều cao của các khối đa diện này dễ dàng tính được bằng các công thức trên.

Thí dụ 1. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2012)

Cho hình hộp đứng $ABCDA'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $AA'C$ vuông cân, $A'C = a$. Tìm khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD').

Giải:



Gọi $h = d(A, (BCD'))$. Ta có:

$$V_{A.BCD'} = \frac{1}{3} S_{BCD'}.h$$

$$\Rightarrow h = \frac{3V_{A.BCD'}}{S_{BCD'}}. \quad (1)$$

Do $AA'C$ là tam giác vuông cân có $A'C = a$

$\Rightarrow AA' = AC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AB = BC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}$.

Từ đó $V_{A.BCD'} = \frac{1}{3} S_{ABC} . DD' = \frac{1}{3} . \left(\frac{1}{2} . \frac{a}{2} . \frac{a}{2}\right) \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}$. (2)

Ta có $BC \perp (DCC'D') \Rightarrow BC \perp CD'$

$\Rightarrow S_{BCD'} = \frac{1}{2} BC.D'C = \frac{1}{2} . \frac{a}{2} . \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. (3)

Thay (2), (3) vào (1) và có: $h = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

Nhận xét: Hãy so sánh với cách tính trực tiếp h (xem thí dụ 1, mục A, §2, chương này)

Thí dụ 2: Cho hình chóp tam giác S.ABC, đáy là tam giác vuông cân ABC tại B, trong đó AB = BC = 2a. Giả sử hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với (ABC). Gọi M là trung điểm của AB. Mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết rằng hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) tạo với nhau góc 60^0. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

Giải

Dễ thấy $SA \perp (ABC)$ và $\widehat{SBA} = 60^0$

Qua M kẻ MN // BC, khi đó N là trung điểm của AC.

Kẻ NK // AB, thì K là trung điểm của BC.

Ta có AB // NK $\Rightarrow$ AB // (SNK)

$\Rightarrow d(AB, SN) = d(AB, (SNK)) = d(M, (SNK)) = h$. (1)

(đặt h = d(M, (SNK))

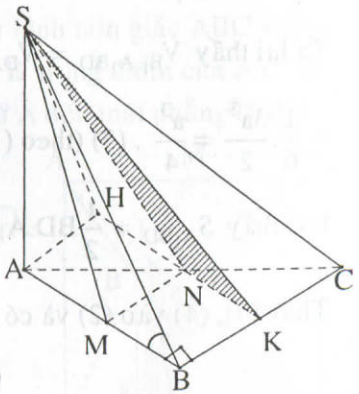
Ta có: $V_{M.SNK} = \frac{1}{3} . S_{SNK} . h$

$\Rightarrow h = \frac{3V_{M.SNK}}{S_{SNK}}$. (2)

Ta có $V_{M.SNK} = V_{S.MNK} = \frac{1}{4} V_{S.ABC}$. (3)

Do $SA = AB \tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$

$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} . (\frac{1}{2} . 2a . 2a) . 2a\sqrt{3} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. (4)



Từ A kẻ AH// BC (H nằm trên HK kéo dài) $\Rightarrow SH \perp HK$ (theo định lí ba đường vuông góc). Do AH = BK = a $\Rightarrow SH = \sqrt{a^2 + (2a\sqrt{3})^2} = a\sqrt{13}$

Vậy $S_{SNK} = \frac{1}{2}NK \cdot SH = \frac{1}{2}a.a\sqrt{13} = \frac{a^2\sqrt{13}}{2}$. (5)

Thay (3), (4), (5) vào (1), ta có $h = \frac{a^3\sqrt{3}}{\frac{a^2\sqrt{13}}{2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$

Nhận xét: Hãy so sánh với phương pháp trực tiếp tính h của thí dụ này trong thí dụ 2, phần B chương này.

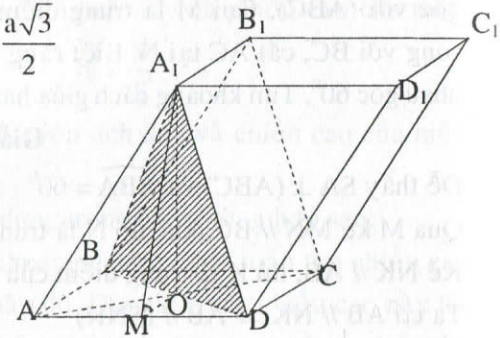
Thí dụ 3: Cho hình lăng trụ $ABCDA_1B_1C_1D_1$ có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB= a, AD = $a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A_1 trên (ABCD) trùng với giao điểm O của AC, BD. Giả sử hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và (ABCD) tạo với nhau góc 60^0. Tìm khoảng cách từ B_1 đến mặt phẳng (A_1BD)

Giải

Gọi M là trung điểm của AD

$\Rightarrow$ góc $A_1MO = 60^0$

Ta có $OM = \frac{a}{2}$; $A_1O = \frac{a}{2}\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$



$\Rightarrow V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = AB.AD.A_1O$

$= a.(a\sqrt{3}).(\frac{a\sqrt{3}}{2}) = \frac{3a^3}{2}$. (1)

Ta có $V_{B_1.A_1BD} = \frac{1}{3}S_{A_1BD}.h$

$\Rightarrow h = \frac{3V_{B_1.A_1BD}}{S_{A_1BD}}$. (2)

Ta lại thấy $V_{B_1.A_1BD} = V_{D.A_1B_1B} = \frac{1}{2}V_{D.A_1B_1AB} = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1})$

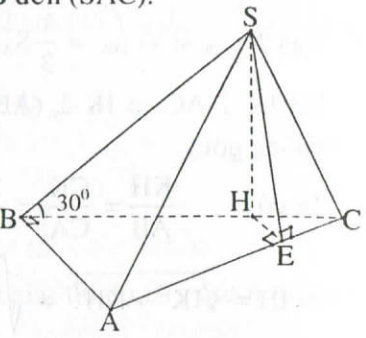
$= \frac{1}{6}.\frac{3a^3}{2} = \frac{a^3}{4}$. (3) (theo (1))

Lại thấy $S_{A_1BD} = \frac{1}{2}BD.A_1O = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+3a^2}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. (4)

Thay (3), (4) vào (2) và có $h = \frac{3a^3}{4.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Nhận xét: Hãy so sánh với phương pháp trực tiếp giải thí dụ này trong thí dụ 2, mục A, §2, chương này.

Thí dụ 4: Cho hình chóp tam giác S.ABC đáy là tam giác vuông ABC tại B và AB = 3a, BC = 4a. Biết rằng mặt phẳng (SBC) vuông góc với (ABC). Cho SB = $2a\sqrt{3}$; $\widehat{SBC} = 30^0$. Tìm khoảng cách từ B đến (SAC).



Giải

Kẻ AH ⊥ BC ⇒ SH ⊥ (ABC)

Ta có AC = 5a; SH = $a\sqrt{3}$; BH = 3a ⇒ HC = a

Đặt h = d (B, (SAC)), thì $V_{B.SAC} = \frac{1}{3} S_{SAC} . h$

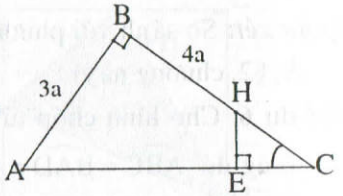
$\Rightarrow h = \frac{3V_{B.SAC}}{S_{SAC}}$. (1)

Ta có $V_{B.SAC} = V_{S.BAC} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}.3a.4a).a\sqrt{3} = 2a^3\sqrt{3}$. (2)

Kẻ HE ⊥ AC ⇒ SE ⊥ AC (định lý ba đường vuông góc)

Ta có $HE = HC \sin \widehat{HCE} = a. \frac{AB}{AC} = a. \frac{3a}{5a} = \frac{3a}{5}$

$\Rightarrow SE = \sqrt{SH^2 + HE^2} = \sqrt{3a^2 + \frac{9a^2}{25}} = \frac{2a}{5}\sqrt{21}$



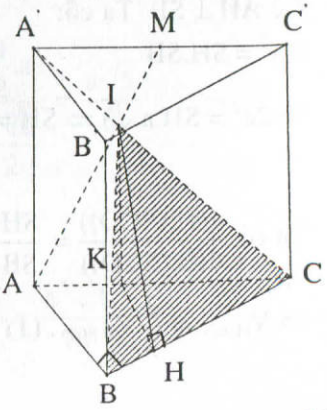
Vậy $S_{SAC} = \frac{1}{2} AC.SE = \frac{1}{2}.5a. \frac{2a}{5}\sqrt{21} = a^2\sqrt{21}$ (3)

Thay (2), (3) vào (1) và có: $h = \frac{6a^3\sqrt{3}}{a^2\sqrt{21}} = \frac{6a\sqrt{7}}{7}$

Nhận xét: Hãy so sánh với lời giải sử dụng phương pháp giải trực tiếp thí dụ này (xem thí dụ 3, mục A, §2, chương này)

Thí dụ 5: Cho hình lăng trụ đứng ABCA'B'C' đáy hình tam giác ABC vuông tại B. Giả sử AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a. Gọi M là trung điểm của A'C' và I là giao điểm của AM và A'C.Tìm khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC).

Giải



Ta có $\frac{IC}{CA'} = \frac{2}{3} \Rightarrow d(I, (ABC)) = \frac{2}{3} d(A', (ABC))$

$= \frac{2}{3} A'A = \frac{4a}{3}$

Đặt h = d(A, (IBC)), ta có $V_{A.IBC} = \frac{1}{3} S_{IBC} . h$

$\Rightarrow h = \frac{3V_{A.IBC}}{S_{IBC}}$. (1)

Ta có $AC = \sqrt{A'C^2 - A'A^2} = \sqrt{9a^2 - 4a^2} = a\sqrt{5}$

$\Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a$

Vậy $V_{A.IBC} = V_{I.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC}.d(A,(IBC)) = \frac{1}{3}.(\frac{1}{2}a.2a).\frac{4a}{3} = \frac{4a^3}{9}$. (2)

Kẻ $IK \perp AC \Rightarrow IK \perp (ABC)$. Kẻ $KH \perp BC \Rightarrow IH \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc)

Ta có : $\frac{KH}{AB} = \frac{CK}{CA} = \frac{2}{3} \Rightarrow KH = \frac{2}{3}a$

$\Rightarrow IH = \sqrt{IK^2 + KH^2} = \sqrt{\frac{16a^2}{9} + \frac{4a^2}{9}} = \frac{2a\sqrt{5}}{3}$

$\Rightarrow S_{IBC} = \frac{1}{2}BC.IH = \frac{1}{2}.2a.\frac{2a\sqrt{5}}{3} = \frac{2a^2\sqrt{5}}{3}$. (3)

Thay (2), (3) vào (1) và có $h = \frac{4a^3}{3.\frac{2a^2\sqrt{5}}{3}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$

***Nhận xét*:** So sánh với phương pháp trực tiếp giải thí dụ này (xem thí dụ 5, mục A, §2, chương này)

Thí dụ 6: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông, trong đó $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^0$; BA = BC = a; AD = 2a. Giả sử $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy (ABCD). Gọi H là hình chiếu của A trên SB. Tìm khoảng cách từ H đến (SCD).

Giải

Trong hình thang vuông ABCD, ta có $AC = a\sqrt{2}$, $CD = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ ACD là tam giác vuông cân tại C

$\Rightarrow SC \perp CD$ (định lí ba đường vuông góc).

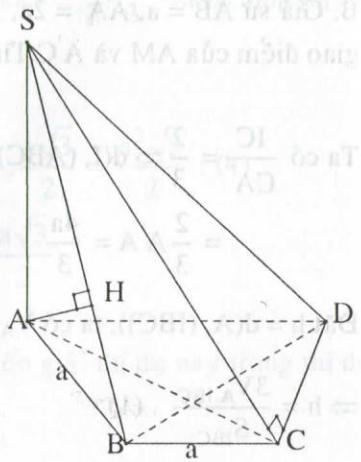
Kẻ $AH \perp SB$. Ta có:

$SA^2 = SH.SB$

$\Rightarrow 2a^2 = SH.a\sqrt{3} \Rightarrow SH = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$

Ta có $\frac{d(H;(SCD))}{d(B;(SCD))} = \frac{SH}{SB} = \frac{\frac{2\sqrt{3}a}{3}}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow V_{H.SCD} = \frac{2}{3}V_{B.SCD}$. (1)



Gọi h = d(H, (SCD)), ta có $h = \frac{3V_{H.SCD}}{S_{SCD}}$. (2)

Ta có $V_{B.SCD} = V_{S.BCD} = \frac{1}{3} S_{BCD} . SA = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}.a.a\sqrt{2} \sin 135^0).a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (3)

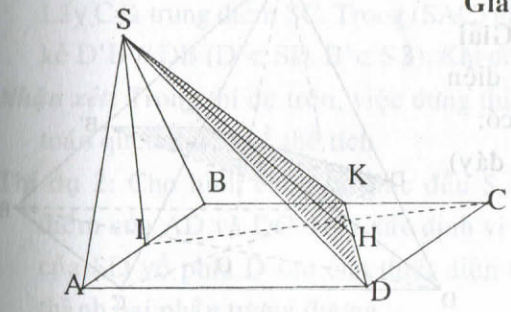
$S_{SCD} = \frac{1}{2}.SC.CD = \frac{1}{2}.a\sqrt{2}.2a = a^2\sqrt{2}$. (4)

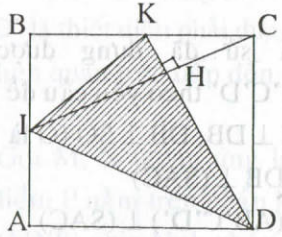
Thay (1), (3), (4) vào (2) và có $h = \frac{3.\frac{2}{3}.\frac{a^3\sqrt{2}}{6}}{a^2\sqrt{2}} = \frac{a}{3}$

Nhận xét : Hãy so sánh với phương pháp trực tiếp giải thí dụ này (xem thí dụ 6, mục A, loại 2, chương này).

Thí dụ 7: Cho hình vuông ABCD và tam giác đều SAB cạnh a ở trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AB, BC. Tìm khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SDK).

Giải





Đã thấy IC ⊥ DK ⇒ SH ⊥ KD (định lí ba đường vuông góc).

Gọi h = d(I, (SDK)), ta có: $h = \frac{3V_{I.SDK}}{S_{SDK}}$. (1)

Ta có $V_{I.SDK} = V_{S.IKD} = \frac{1}{3}.S_{IKD}.SI = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}.KD.IH).\frac{a\sqrt{3}}{2}$. (2)

Ta có $KD = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $CH = \frac{CK.CD}{KD} = \frac{\frac{a}{2}.a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a\sqrt{5}}{5} = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$. (3)

Thay (3) vào (2) và có: $V_{I.SDK} = \frac{a\sqrt{3}}{12}.\frac{a\sqrt{5}}{2}.\frac{3a\sqrt{5}}{10} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. (4)

Lại có $S_{SDK} = \frac{1}{2}.KD.SH = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2}.\sqrt{SI^2 + IH^2} = \frac{a\sqrt{5}}{4}\sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{9a^2}{20}} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$. (5)

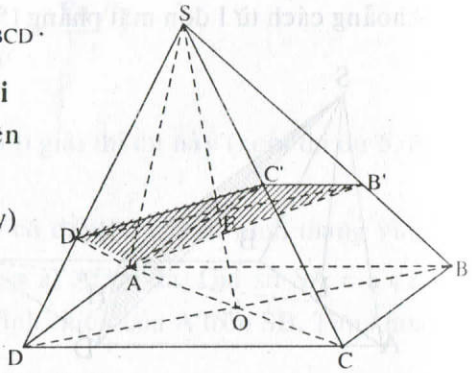
Thay (4), (5) vào (1) ta có: $h = \frac{3a^3\sqrt{3}}{16.\frac{a^2\sqrt{6}}{4}} = \frac{3a\sqrt{2}}{8}$

Nhận xét : Hãy so sánh với phương pháp trực tiếp giải thí dụ này trong thí dụ 8, mục A, §2, chương này.

Loại 4. Một số bài toán khác về thể tích

Trong mục này, ta sẽ xét một số bài toán về thể tích liên quan nhiều đến việc xác định thiết diện của một khối đa diện.

Thí dụ 1: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Dựng thiết diện qua A và vuông góc với (SAC) sao cho nó cắt SB, SC, SD tương ứng tại A', B', C' và thoả mãn hệ thức: $V_{S.AB'C'D'} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD}$.



Giải

Giả sử đã dựng được thiết diện AB'C'D' theo yêu cầu đề bài. Ta có:

AC ⊥ DB, DB ⊥ SO (O là tâm của đáy)

⇒ DB ⊥ (SAC)

Vì (AB'C'D') ⊥ (SAC)

⇒ DB // (AB'C'D')

mà (SDB) ∩ (AB'C'D') = D'B' nên D'B' // BD.

Giả sử D'B' ∩ SO = E ⇒ A, E, C' thẳng hàng.

Đặt $\frac{SC'}{SC} = x$ $(0 < x < 1)$.

Áp dụng định lí Menelauyt trong tam giác SOC, ta có $\frac{SC'}{C'C}.\frac{CA}{AO}.\frac{OE}{SE} = 1$ (1)

Do $\frac{SC'}{SC} = x \Rightarrow \frac{SC'}{SC - SC'} = \frac{x}{1-x} \Rightarrow \frac{SC'}{C'C} = \frac{x}{1-x}$

Ta có : $\frac{CA}{AO} = 2$, nên từ (1) suy ra: $\frac{OE}{SE} = \frac{1}{2\frac{x}{1-x}} = \frac{1-x}{2x}$

$\Rightarrow \frac{SE}{OE} = \frac{2x}{1-x} \Rightarrow \frac{SE}{OE + SE} = \frac{2x}{1+x} \Rightarrow \frac{SE}{SO} = \frac{2x}{1+x}$.

Từ đó theo định lí Talet, ta có: $\frac{SB'}{SB} = \frac{SD'}{SD} = \frac{SE}{SO} = \frac{2x}{1+x}$ (2)

Ta có $V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'D'} + V_{S.C'B'D'}$

$$= \frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD}.V_{S.ABD} + \frac{SC'}{SC}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SD'}{SD}.V_{S.CBD}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1+x}\right)^2 V_{S.ABCD} + \frac{1}{2}x\left(\frac{2x}{1+x}\right)^2 V_{S.ABCD}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1+x}\right)^2.(1+x).V_{S.ABCD} = \frac{2x^2}{1+x} V_{S.ABCD} .(3) \text{ (dựa vào 2)}$$

Từ (3) suy ra $V_{S.AB'C'D'} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD} \Leftrightarrow \frac{2x^2}{1+x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 6x^2 - x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow C \text{ là trung điểm của AC.}$$

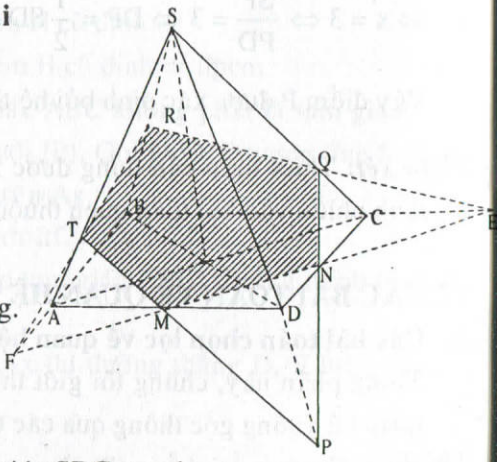
Từ đó suy ra cách dựng thiết diện như sau:

Lấy C là trung điểm SC. Trong (SAC) giả sử $AC' \cap SO = E$. Trong (SBD) qua E kẻ $D'B' // DB$ ($D' \in SD$, $B' \in SB$). Khi đó AB'C'D' là thiết diện phải dựng.

***Nhận xét*:** Trong thí dụ trên, việc dựng thiết diện liên quan trực tiếp đến các bài toán quen thuộc về thể tích.

Thí dụ 2: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của AD và DC. Hãy xác định vị trí của điểm P nằm trên phần kéo dài của SD về phía D sao cho thiết diện tạo bởi (MNP) chia hình chóp đã cho thành hai phần tương đương.

Giải



Trong (SDC) : $PN \cap SC = Q$.

Trong (SAD) : $PM \cap SA = T$.

Trong (ABCD): $MN \cap BC = E$,

$MN \cap AB = F$.

Trong (SBC) : $EQ \cap SB = R$

Khi đó dễ thấy R, F, T thẳng hàng.

Vì thế MNQRT là thiết diện phải dựng.

Giả sử P thỏa mãn yêu cầu đề ra.

Đặt $\frac{SP}{PD} = x$ $(x>0)$

Áp dụng định lí Menelauyt trong tam giác SDC, ta có:

$$\frac{SP}{PD}.\frac{DN}{NC}.\frac{CQ}{QS} = 1 \Rightarrow \frac{CQ}{QS} = \frac{1}{x}$$

Tương tự $\frac{AT}{TS}=\frac{1}{x}$

Lại áp dụng định lý Menelauyt trong tam giác (SBC) và có:

$$\frac{CQ}{QS}.\frac{SR}{RB}.\frac{BE}{EC}=1$$

Do $\frac{CQ}{QS}=\frac{1}{x};\ \frac{BE}{EC}=3\Rightarrow\frac{SR}{RB}=\frac{x}{3}\Rightarrow\frac{BR}{SR}=\frac{3}{x}\Rightarrow\frac{BR}{BS}=\frac{3}{x+3}$.

Từ trên ta có $\frac{CQ}{CS}=\frac{AT}{AS}=\frac{1}{x+1}$

Gọi V_1 là thể tích phần hình chóp nằm dưới thiết diện. Ta có:

$V_1 = V_{R.FBE} - (V_{Q.NCE} + V_{T.FAM})$.

Gọi V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy ABCD và chiều cao kẻ từ S của hình chóp S.ABCD. Ta có:

$$V_1=\frac{1}{3}\left(\frac{9}{8}S\right).\left(\frac{3}{3+x}h\right)-2.\frac{1}{3}.\frac{S}{8}.\frac{1}{x+1}h=\frac{27V}{8(x+3)}-\frac{2V}{8(x+1)}.\ (1)$$

Từ (1) và do $V_1=\frac{1}{2}V$; nên ta có phương trình:

$$\frac{27}{8(x+3)}-\frac{2}{8(x+1)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 27.(x+1)-2.(x+3)=4.(x+1).(x+3)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-9x-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-\frac{3}{4}\end{array}\right.\ (\text{loại do } x>0)$$

$$\Leftrightarrow x=3\Leftrightarrow\frac{SP}{PD}=3\Leftrightarrow DP=\frac{1}{2}SD.$$

Vậy điểm P được xác định bởi hệ thức $DP=\frac{1}{2}SD$.

***Nhận xét*:** Thiết diện cần dựng được xác định bởi điểm P,và điểm P được xác định nhiều vào bài toán quen thuộc về thể tích.

VI. CÁC BÀI TOÁN VỀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC

A. Các bài toán chọn lọc về quan hệ vuông góc

Trong phần này, chúng tôi giới thiệu với các bạn các bài toán tổng hợp về quan hệ vuông góc thông qua các thí dụ được lựa chọn một cách chọn lọc.

Thí dụ 1: Trong mặt phẳng (P) cho tam giác vuông ABC tại C. Dựng nửa đường thẳng Ax vuông góc với (P). Trên Ax lấy điểm S. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SB.

1) Chứng minh SB ⊥ (ADE)

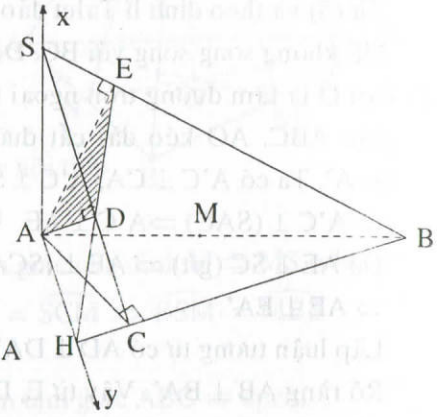
2) Chứng minh SE.SB = SD.SC

3) Cho S chạy trên Ax, hãy chứng minh

a) Tồn tại điểm cố định cách đều 5 điểm A, B, C, D, E.

b) Đường thẳng nối D, E hồi qui một điểm cố định.

Giải



1) Do SA ⊥ (P) ⇒ SA ⊥ BC.

Vì BC ⊥ AC (g/t) ⇒ BC ⊥ (SAC)

⇒ (SBC) ⊥ (SAC)

Do (SBC) ∩ (SAC) = SC, mà AD ⊥ SC

⇒ AD ⊥ (SBC) ⇒ AD ⊥ SB.

Lại có SB ⊥ AE (g/t)

⇒ SB ⊥ (ADE) ⇒ đpcm.

2) Trong các tam giác vuông SAC, SAB tại A và do AD ⊥ SC, SB ⊥ AE nên ta có:

$SA^2 = SD.SC = SE.SB \Rightarrow$ đpcm.

3) a) Ta có AE ⊥ EB, AD ⊥ DB (do AD ⊥ (SBC))

AC ⊥ BC (g/t). Vậy nếu gọi M là trung điểm của AB thì M cố định và ta có:

$MA = MB = MC = MD = ME$ (vì cùng $= \frac{AB}{2}$) Đó là đpcm.

b) Giả sử ED ∩ BC = H, ta có SB ⊥ (ADE) ⇒ SB ⊥ AH (vì AH ∈ (ADE))

Lại có AH ⊥ SA (do SA ⊥ (P)) nên AH ∈ (P)) ⇒ AH ⊥ (SAB) ⇒ AH ⊥ AB.

Trong (ABC), kẻ Ay ⊥ AB, khi đó khi S chạy trên Ax thì Ay là nửa đường thẳng cố định. Từ đó: H = BC ∩ Ay, nên H cố định

Vậy đường thẳng nối D, E là đi qua điểm H cố định ⇒ đpcm.

Thí dụ 2: Cho trong mặt phẳng (P) tam giác ABC không phải là tam giác cân. Dựng nửa đường thẳng Ax vuông góc với (P). Gọi D và E tương ứng là hình chiếu của A trên SB, SC, ở đây S nằm trên Ax.

1) Chứng minh DE không song song với BC

2) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh O cách đều năm điểm A, B, C, D, E.

3) Chứng minh rằng khi S chạy trên Ax thì đường thẳng D, E luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

1) Vì ABC không phải là tam giác cân nên AB ≠ AC.

Giả sử AB < AC (1). Ta có trong các tam giác SAB, SAC:

$SA^2 = SD.SB = SE.SC$. (2)

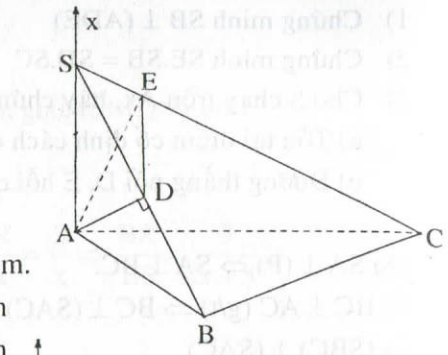
Từ (1) suy ra $SB < SC$. (3)

Từ (2), (3) ta có $SD > SE$. (4)

Từ (3), (4) đi đến $\frac{SD}{SB} > \frac{SE}{SC}$. (5)

Từ (5) và theo định lí Talet đảo suy ra:

DE không song song với BC. Đó là đpcm.



2) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. AO kéo dài cắt đường tròn tại A'. Ta có $A'C \perp CA$, $A'C \perp SA$

$\Rightarrow A'C \perp (SAC) \Rightarrow A'C \perp AE$

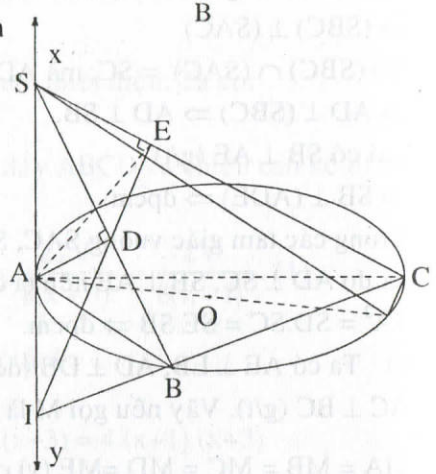
Do $AE \perp SC$ (g/t) $\Rightarrow AE \perp (SCA')$

$\Rightarrow AE \perp EA'$.

Lập luận tương tự có $AD \perp DA'$

Rõ ràng $AB \perp BA'$. Vậy từ E, D, C, B đều nhìn AA' dưới một góc vuông, nên ta có $OA = OB = OC = OD = OE$

(vì cùng $\varphi = \frac{AA'}{2}$)



Do O là điểm cố định $\Rightarrow$ đpcm.

3) Giả sử $DE \cap BC = I$. Do $AI \in (P) \Rightarrow AI \perp SA$ (vì $SA \perp (P)$).

Theo câu 2 ta có $AE \perp (SCA') \Rightarrow AE \perp SA'$.

Lập luận tương tự ta có $AD \perp SA'$. Từ đó $SA' \perp (ADE) \Rightarrow SA' \perp AI$ (do $AI \in (ADE)$)

Từ đó suy ra $AI \perp (SAA') \Rightarrow AI \perp AA' \Rightarrow AI$ là tiếp tuyến với vòng tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A.

Gọi Ay là tiếp tuyến này, thì Ay cố định. Ta có $I = BC \cap Ay \Rightarrow I$ cố định

Vậy đường thẳng nối D, E luôn đi qua điểm I cố định nói trên $\Rightarrow$ đpcm.

Thí dụ 3. Cho hình chóp S.ABC, trong đó SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Trên SA, SB, SC lấy A', B', C' sao cho: $SA'.SA = SB'.SB = SC'.SC$

Kẻ $SH \perp (A'B'C')$ và giả sử $SH \cap (ABC) = G$. Chứng minh G là trọng tâm tam giác ABC.

Giải

Ta có H là trực tâm tam giác A'B'C'.

Giả sử $A'H \cap B'C' = E$; $C'H \cap A'B' = F$

Vì H là trực tâm tam giác A'B'C' nên $A'E \perp B'C'$ và $C'F \perp A'B'$

Giả sử $AG \cap BC = M$; $CG \cap AB = N$

Dễ thấy S, E, M thẳng hàng

(Vì S, E, M cùng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAG)).

Tương tự S, F, N cũng thẳng hàng.

Vì $A'E \perp B'C' \Rightarrow SE \perp B'C'$

(định lí ba đường vuông góc)

Ta có $\widehat{SB'E} = \widehat{ESC'}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

Vì $SB'.SB = SC'.SC \Rightarrow BB'C'C$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{SB'E} = \widehat{SCM}$ (vì cùng bù với $\widehat{BB'C'}$)

Như thế ta có $\widehat{ESC} = \widehat{SCM} \Rightarrow MSC$ là tam giác cân đỉnh $M \Rightarrow MS = MC$.

Vì BSC là tam giác vuông tại S nên $\widehat{ESC} = \widehat{SCM} \Rightarrow \widehat{BSM} = \widehat{MBS}$

$\Rightarrow MB = MS$. Vậy $MB = MC$.

Tương tự ta có $NB = NA \Rightarrow G$ là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow$ đpcm.

Nhận xét: Ta có bài toán tương tự sau: Gọi G là trọng tâm tam giác A'B'C'. Giả sử $SH \cap (ABC) = H$. Khi đó H là trực tâm tam giác ABC.

Thí dụ 4. Cho hình chóp S.ABCD, trong đó ABCD là hình chữ nhật, SA vuông góc với đáy (ABCD). Kẻ các đường cao AE, AF, BG, BH của các tam giác tương ứng ASB, ASD, BSC, ABC. Chứng minh rằng các mặt phẳng (AEF) và (BGH) song song với nhau.

Giải

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên $AB \perp BC$

$\Rightarrow SB \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc)

$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.

Vì $(SBC) \cap (SAB) = SB$ mà $AE \perp SB$

$\Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$.

Tương tự ta có $AF \perp SC$,

từ đó suy ra $SC \perp (AEF)$ (1)

Lại có $SA \perp BH$ (do $SA \perp (ABCD)$)

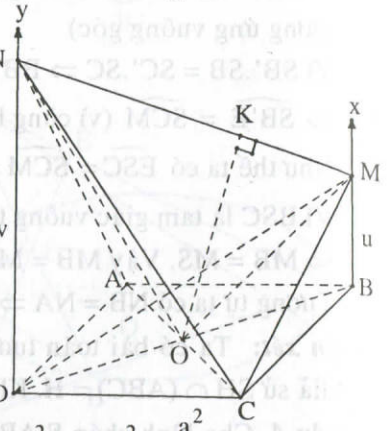
Vì $BH \perp AC \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$

Lại có $BG \perp SC$ (g/t) $\Rightarrow (BGH) \perp SC$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $(AEF) // (BGH) \Rightarrow$ đpcm.

Thí dụ 5. Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh bằng a. Hai nửa đường thẳng Bx, By vuông góc với (P) và ở về cùng một phía của (P). M và N là hai điểm tương ứng di động trên Bx, By. Đặt BM = u, DN = v.

1) Tìm mối liên hệ giữa u, v để (MAC) ⊥ (NAC).
2) Giả sử u, v thỏa mãn điều kiện ở câu 1
   a) Tìm giá trị nhỏ nhất của u + v
   b) Gọi HK là đường vuông góc chung của AC và MN (H ∈ AC, K ∈ MN). Chứng minh rằng H cố định, còn độ dài HK không đổi
   c) Chứng minh (AMN) ⊥ (CMN).



Giải

1) Do BA = BC ⇒ MA = MC

   DA = DC ⇒ NA = NC

   Giả sử AC ∩ BD = O ⇒ MO ⊥ AC, NO ⊥ AC

   ⇒ $\widehat{MON}$ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (MAC) và (NAC)

   Ta có (MAN) ⊥ (NAC) ⇔ $\widehat{MON} = 90^0$

   ⇔ $MN^2 = MO^2 + NO^2$

   ⇔ $\left(a\sqrt{2}\right)^2 + (v-u)^2 = u^2 + \frac{a^2}{2} + v^2 + \frac{a^2}{2}$ (do $OB^2 = OD^2 = \frac{a^2}{2}$)

   ⇔ $2uv = a^2$. (1)

   Vậy (1) là điều kiện cần và đủ để (MAC) ⊥ (NAC).

2) Trong suốt câu 2 này ta luôn giả sử u, v thỏa mãn hệ thức (1).

   a) Theo bất đẳng thức Cô–si, ta có $u+v \geq 2\sqrt{uv}$, vậy giá trị nhỏ nhất của đại lượng u + v là $a\sqrt{2}$. Giá trị này đạt được khi $u = v = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

   b) Từ Bx và Dy ⊥ (P) ⇒ (DBMN) ⊥ (ABCD).

   Do (DBMN) ∩ (ABCD) = DB, mà AC ⊥ DB (do ABCD là hình vuông)

   ⇒ AC ⊥ (DBMN).

   Trong (DBMN) kẻ OK ⊥ MN. Do AC ⊥ (DBMN) ⇒ AC ⊥ OK.

   Vậy OK chính là đường vuông góc chung của AC và MN, tức là H ≡ O, vậy H là điểm cố định ⇒ đpcm.

   Trong tam giác vuông OMN, theo hệ thức lượng, ta có

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{OM^2 + ON^2}{OM^2.ON^2}$$

$$\Rightarrow OK^2 = \frac{OM^2.ON^2}{OM^2+ON^2} = \frac{\left(v^2+\frac{a^2}{2}\right).\left(u^2+\frac{a^2}{2}\right)}{v^2+u^2+a^2} = \frac{v^2u^2+\frac{a^2}{2}(v^2+u^2)+\frac{a^4}{4}}{v^2+u^2+a^2} \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có:

$$OK^2 = \frac{\frac{a^2}{2}(v^2+u^2+a^2)}{v^2+u^2+a^2} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \text{const} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

c) Ta có $CO \perp (DBMN)$, mà $OK \perp MN \Rightarrow CK \perp MN$ (theo định lí ba đường vuông góc). Lập luận hoàn toàn tương tự, có $AK \perp MN \Rightarrow \widehat{AKC}$ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (CMN) và (AMN).

Ta có từ b) $OK = OA = OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, nên AKC là tam giác vuông tại K

$\Rightarrow \widehat{AKC} = 90^0 \Rightarrow (CMN) \perp (AMN) \Rightarrow$ đpcm.

Thí dụ 6: Cho đường tròn đường kính AB cố định bằng 2R và C là một điểm chạy trên đường tròn. Trên nửa đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng của đường tròn, lấy điểm S sao cho $SA = a < 2R$.

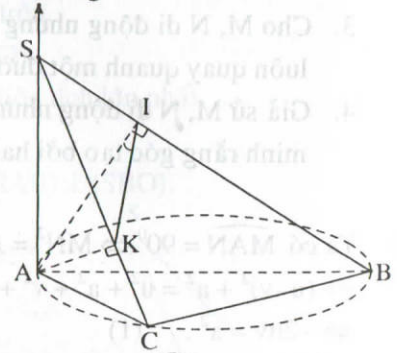
1) Từ A kẻ $AI \perp SB$, $AK \in SC$ ($I \in SB$, $K \in SC$). Chứng minh $AK \perp (SBC)$

2) Giả sử β là góc giữa hai mặt phẳng (SBA) và (SBC). Đặt $\alpha = \widehat{BAC}$. Chứng minh rằng

$$\text{Sin}\,\beta = \frac{\cos\alpha\sqrt{a^2+4R^2}}{\sqrt{a^2+4R^2\cos^2\alpha}}$$

3) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC, SB. Xác định vị trí của C trên đường tròn sao cho EF là đường vuông góc chung của AC và SB.

Giải



1. Ta có $BC \perp AC$, $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAC)$

   $\Rightarrow BC \perp AK$, mà $AK \perp SC$

   $\Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow$ đpcm.

2. Ta thấy $(SBA) \cap (SBC) = SB$

   Do $AI \perp SB$, mà $AK \perp (SBC)$ (Câu 1)

   $\Rightarrow KI \perp SB$ (định lí ba đường vuông góc)

   Vậy $\widehat{AIK}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) $\Rightarrow \widehat{AIK} = \beta$.

   Trong tam giác vuông AIK, ta có $\sin\beta = \frac{AK}{AI}$. (1)

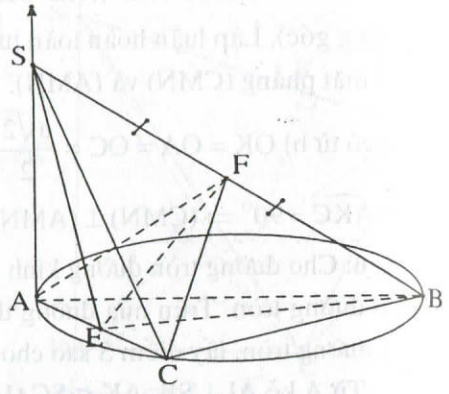
Trong tam giác vuông SAB, thì $AS.AB = SB.AI \Rightarrow AI = \dfrac{a.2R}{\sqrt{a^2+4R^2}}$. (2)

Tương tự từ tam giác vuông SAC, ta có:

$AS.AC = AK.SC \Rightarrow AK = \dfrac{a.2R\cos\alpha}{\sqrt{a^2+4R^2\cos^2\alpha}}$. (3)

(do $AC = 2R.\cos\alpha$). Thay (2), (3) vào (1) và có:

$\text{Sin}\,\beta = \dfrac{\cos\alpha\sqrt{a^2+4R^2}}{\sqrt{a^2+4R^2\cos^2\alpha}} \Rightarrow$ đpcm .



3. Do $SA \perp (P)$, mà $AC \perp BC \Rightarrow SC \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc).

Vì F là trung điểm của SB nên có :

$FA = FC$ (vì cùng bằng $\dfrac{SB}{2}$).

Từ đó suy ra $FE = AC$ (do $EA = EC$)

Đã thấy $EF \perp SB \Leftrightarrow ES = EB$

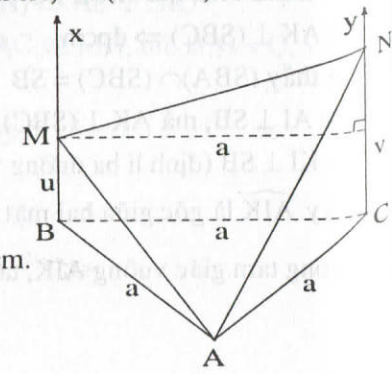
$\Leftrightarrow \Delta SAE = \Delta ECB \Leftrightarrow BC = SA = a$

Do $a < 2R$ (g/t), nên điểm C phải tìm chính là giao của đường tròn đã cho với đường tròn tâm B bán kính a. Bài toán luôn có hai vị trí của C (do $a < 2R$).

Thí dụ 7: Trong mặt phẳng (P) cho tam giác đều ABC cạnh a. Từ B và C về cùng một phía của (P) dựng hai nửa đường thẳng Bx, Cy cùng vuông góc với (P). Lấy điểm M trên Bx và N trên Cy. Đặt BM = u, CN = v.

1. Chứng minh rằng với mọi u, v thì tam giác AMN không thể vuông tại A.
2. Tìm mối liên hệ giữa u, v để AMN là tam giác vuông tại M.
3. Cho M, N di động nhưng v = 2u. Chứng minh rằng các mặt phẳng AMN luôn quay quanh một đường thẳng cố định.
4. Giả sử M, N di động nhưng v= 2u và tam giác AMN vuông tại M. Chứng minh rằng góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMN) và (BCMN) là 45^0.

Giải



1. Ta có $\widehat{MAN} = 90^0 \Leftrightarrow MN^2 = AM^2 + AN^2$

$\Leftrightarrow (u-v)^2 + a^2 = u^2 + a^2 + v^2 + a^2$

$\Leftrightarrow -2uv = a^2$. (1)

Vế trái của (1) < 0, còn vế phải > 0,

do đó (1) không đúng $\Rightarrow \widehat{MAN} \neq 90^0 \Rightarrow$ đpcm.

2. $\widehat{AMN} = 90^0 \Leftrightarrow AN^2 = AM^2 + MN^2$

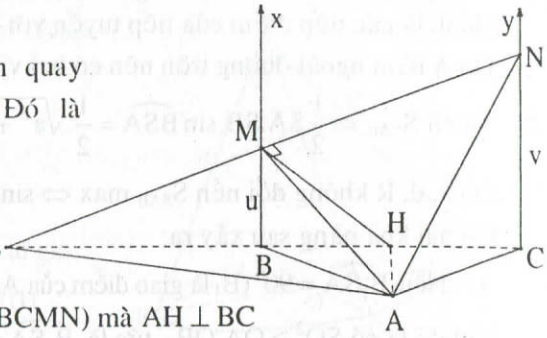
$\Leftrightarrow a^2 + v^2 = a^2 + u^2 + (u-v)^2 + a^2$

$\Leftrightarrow 2uv = a^2 + 2u^2$. (2)

Vậy (2) là điều kiện để tam giác AMN vuông tại M.

3. Vì $v = 2u \Rightarrow BE = BC = a$

$\Rightarrow$ E cố định $\Rightarrow$ (AMN) luôn quay quanh đường thẳng cố định. Đó là đường thẳng nối A và E.



4. Ta có: $(BCNM) \cap (AMN) = MN$

Từ giả thiết ta có $AM \perp MN$

Gọi H là trung điểm của BC.

Ta có $AH \perp BC$. Do $(ABCD) \perp (BCMN)$ mà $AH \perp BC$

$\Rightarrow AH \perp (BCMN) \Rightarrow HM \perp MN$(định lí ba đường vuông góc).

Như vậy $\widehat{AHM}$ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMN) và (BCMN).

Theo câu 2 ta có : $2uv = a^2 + 2u^2$

Lại có $v = 2u$ nên suy ra $4u^2 = a^2 + 2u^2 \Rightarrow a^2 = 2u^2$

Ta có $AM^2 = u^2 + a^2 = \dfrac{3a^2}{2} \Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Lại có $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, vì thế trong tam giác vuông AHM tại H, ta có:

$$\sin \widehat{AHM} = \frac{AH}{AM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{AHM} = 45^0 \Rightarrow \text{đpcm!}$$

Thí dụ 8: Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn tâm O, bán kính R và một điểm A cố định cách O một khoảng $d > R$. SO là đoạn thẳng vuông góc với (P) và $SO = a$; B là một điểm di động trên đường tròn nói trên.

1. Tìm vị trí của B sao cho $(SAB) \perp (SBO)$.
2. Xác định B sao cho tam giác SAB có diện tích lớn nhất.

Giải

1. Giả sử B nằm trên đường tròn (O, R) mà $(SAB) \perp (SBO)$.

Do $(SAB) \cap (SBO) = SB$

Nên nếu kẻ $AK \perp SB \Rightarrow AK \perp (SBO)$

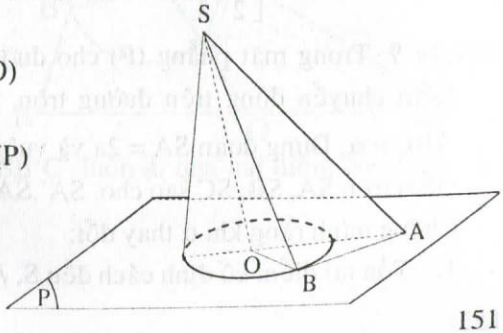
$\Rightarrow AK \perp SO$.

Vì $A \in (P)$ mà $SO \perp (P)$, nên $AK \in (P)$

$\Rightarrow K \in (P)$

Mặt khác $K \in SB$ mà $SB \cap (P) = B$

$\Rightarrow K \equiv B$.



Như vậy $AB \perp SB$, nên theo định lí ba đường vuông góc ta có $OB \perp AB$. Như vậy, điểm B cần tìm chính là các tiếp điểm của tiếp tuyến với đường tròn (O, R) vẽ từ A.

Do A nằm ngoài đường tròn nên có hai vị trí của B.

2. Ta có $S_{SAB} = \frac{1}{2}SA.SB.\sin\widehat{BSA} = \frac{1}{2}.\sqrt{a^2+d^2}.\sqrt{a^2+R^2}\sin\widehat{BSA}$

Do a, d, R không đổi nên S_{SAB} max $\Leftrightarrow \sin\widehat{BSA}$ max

Có hai khả năng sau xảy ra:

a. Nếu $\widehat{B_1SA} = 90^0$ (B_1 là giao điểm của AO kéo dài với đường tròn (O, R)).

Khi đó ta có $SO^2 \geq OA.OB_1$, tức là $\widehat{B_1SA} \leq 90^0 \Rightarrow a^2 \geq dR$.

Ta nhận thấy với mọi vị trí của B trên đường tròn thì $\widehat{BAS} \leq \widehat{B_1SA}$

(Vì hai tam giác SAB và SAB_1 có hai cạnh bên bằng nhau, nhưng do $AB_1 \geq AB \Rightarrow \widehat{B_1SA} \geq \widehat{BAS}$).

Do $\widehat{B_1SA} \leq 90^0 \Rightarrow \sin\widehat{BSA} \leq \sin\widehat{B_1SA} \Rightarrow \max(\sin\widehat{BSA}) = \sin\widehat{B_1SA}$.

Như vậy trong trường hợp này, ta có $\max S_{SAB} = S_{SAB_1} = \frac{1}{2}a(d+R)$.

b. Nếu $\widehat{B_1SA} > 90^0$ ($\Leftrightarrow a^2 < dR$). Khi đó $\max(\sin\widehat{BSA}) = 1 \Leftrightarrow \widehat{BSA} = 90^0$.

Lúc này ta có $\max S_{SAB} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+d^2}.\sqrt{a^2+R^2}$

Điểm B cần tìm là điểm trên (O, R) sao cho $\widehat{BSA} = 90^0$. Điểm B có thể tìm như sau:

Do $AB^2 = SA^2 + SB^2 = d^2 + R^2 + 2a^2$, vậy B chính là giao điểm của đường tròn (O, R) với đường tròn tâm A, bán kính $\sqrt{d^2+R^2+2a^2}$ (các đường tròn này đều xét trong (P). Tóm lại ta có:

$$\max S_{SAB} = \begin{cases} \frac{1}{2}a(d+R), & \text{nếu như } a^2 \geq dR \\ \frac{1}{2}\sqrt{a^2+d^2}.\sqrt{a^2+R^2}, & \text{nếu như } a^2 < dR. \end{cases}$$

Thí dụ 9: Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn đường kính bằng 2R. A là một điểm chuyển động trên đường tròn. BC là đường kính quay quanh O. Đặt $\widehat{ABC} = \alpha$. Dựng đoạn SA = 2a và vuông góc với đáy. A', B', C' lần lượt là các điểm trên SA, SB, SC sao cho: $SA'.SA = SB'.SB = SC'.SC = 3R^2$

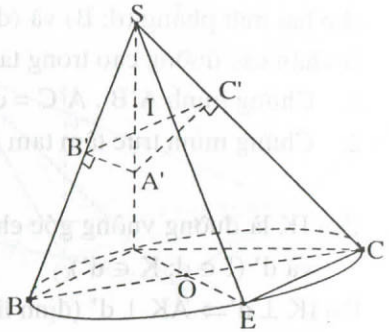
Chứng minh rằng khi α thay đổi:

1. Tồn tại điểm cố định cách đều S, A', B', C'.

2. (A'B'C') là mặt phẳng cố định.

3. Đường tròn ngoại tiếp tam giác SB'C' luôn đi qua hai điểm cố định.

Giải



1. Ta có $SA.SA' = SB.SB' = 3R^2$

$\Rightarrow SA' = \dfrac{3R^2}{SA} = \dfrac{3R^2}{2R} = \dfrac{3R}{2}$

$\Rightarrow$ A' cố định.

Do SA.SA'= SB.SB' nên ABB'A' là tứ giác nội tiếp, mà $\widehat{A'AB} = 90^0$ (do $SA \perp AB$)

$\Rightarrow \widehat{A'B'B} = 90^0 \Rightarrow A'B' \perp SB$.

Hoàn toàn tương tự ta có $A'C' \perp SC$. Vậy nếu gọi I là trung điểm của SA' thì ta có IS = IA' = IB' = IC'

Do I cố định $\Rightarrow$ đpcm.

2. AO kéo dài cắt đường tròn tại E $\Rightarrow$ E cố định $\Rightarrow$ SE cố định

Ta có $\widehat{ECA} = 90^0 \Rightarrow EC \perp CA$. Lại có $SA \perp EC$ (do $SA \perp (P)$) $\Rightarrow EC \perp (SAC)$

$\Rightarrow EC \perp A'C'$

Lại có $A'C' \perp SC$ (theo câu 1) $\Rightarrow A'C' \perp (SEC) \Rightarrow A'C' \perp SE$. (1)

Lập luận tương tự, có $A'B' \perp SE$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $SE \perp (A'B'C')$.

Mặt phẳng (A'B'C') đi qua A' cố định và vuông góc với SE cố định, nên là mặt phẳng cố định $\Rightarrow$ đpcm!

3. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác SB'C' cắt SO tại K.

Vì SB'.SB = SC'.SC $\Rightarrow$ BB'C'C là tứ giác nội tiếp

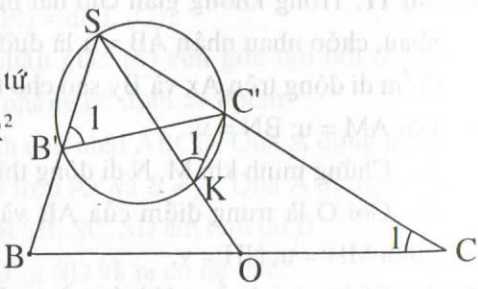
$\Rightarrow \widehat{B'_1} = \widehat{C_1}$ (cùng bù $\widehat{BB'C'}$).

Ta lại có $\widehat{B'_1} = \widehat{K_1}$ (cùng chắn $\widehat{SC'}$)

$\Rightarrow \widehat{K_1} = \widehat{C_1} \Rightarrow$ tứ giác OKC'C là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow SK.SO = SC'.SC = 3R^2$

$\Rightarrow SK = \dfrac{3R^2}{SO} = \text{const}$

$\Rightarrow$ K cố định (trên SO cố định)

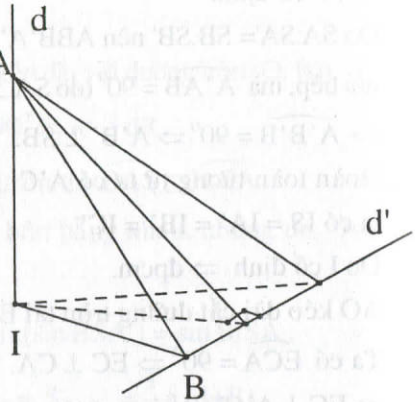


Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác SB'C' luôn đi qua hai điểm cố định là S và K $\Rightarrow$ đpcm.

Thí dụ 10: Cho hai đường thẳng chéo nhau d, d' và vuông góc với nhau. Giả sử A là điểm cố định trên d. Với mỗi điểm B thay đổi trên d', chọn C trên d' sao cho hai mặt phẳng (d; B) và (d; C) vuông góc với nhau. Gọi A', B', C' lần lượt là chân các đường cao trong tam giác ABC.

1. Chứng minh A'B . A'C = const.
2. Chứng minh trực tâm tam giác ABC là cố định.

Giải



1. Gọi IK là đường vuông góc chung của d và d' (I ∈ d; K ∈ d')

   Do IK ⊥ d' ⇒ AK ⊥ d' (định lí ba đường vuông góc) ⇒ A' ≡ K.

   Gọi (π) là mặt phẳng xác định bởi I và d', tức: (π) = (I, d') thì d ⊥ (π).

   Do $\widehat{BIC}$ là góc giữa hai mặt phẳng (AIB) và (AIC) (tức (B; d) và (C; d)).

   Vì (B; d) ⊥ (C; d) ⇒ $\widehat{BIC} = 90^0$

   Trong tam giác vuông BIC, theo hệ thức lượng ta có

   A'B.A'C = KB.KC = IK^2 = const (do I và K cố định). Đó là đpcm!

2. Xét hai trường hợp:

   a. Nếu A ≡ I, khi đó trong tam giác vuông ABC (tức BIC), trực tâm H của nó trùng với I và vì thế H cố định

   b. Nếu A ≠ I. Gọi R là mặt phẳng xác định bởi A và d', ta có

   (R) = (A; d') ⇒ (R) cố định

   Dễ thấy nếu H là trực tâm tam giác ABC, thì IH ⊥ (R)

   Vì I và (R) cố định ⇒ H cố định ⇒ đpcm.

Thí dụ 11: Trong không gian cho hai nửa đường thẳng Ax và By vuông góc với nhau, chéo nhau nhận AB = a là đường vuông góc chung. M, N lần lượt là hai điểm di động trên Ax và By sao cho ta luôn luôn có: MN = AM + BN

Đặt AM = u; BN = v.

1. Chứng minh khi M, N di động thì u.v = const.
2. Gọi O là trung điểm của AB và H là hình chiếu của O trên MN. Chứng minh MH = u, NH = v.
3. Chứng minh rằng H luôn nằm trên một mặt phẳng cố định.

Giải

1. Giả sử (P) và (Q) tương ứng là các mặt phẳng xác định bởi (AB, By) và (AB, Ax).

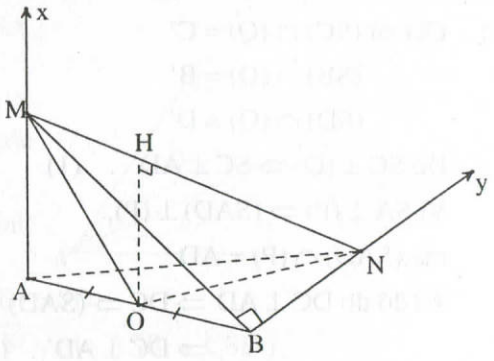
   Từ giả thiết ta có: AM ⊥ (P) ⇒ MB ⊥ BN (theo định lí ba đường vuông góc).

Theo định lí Py–ta–go, ta có:

$MN^2 = MB^2 + BN^2$

$\Rightarrow (u+v)^2 = u^2 + v^2 + a^2 \Rightarrow 2uv = a^2$

$\Rightarrow uv = \dfrac{a^2}{2} = \text{const} \Rightarrow$ đpcm.



2. Kẻ $OH \perp MN$. Ta có

$OM^2 = OH^2 + MH^2$;

$ON^2 = OH^2 + NH^2$;

$OM^2 - ON^2 = MH^2 - NH^2$;

$$\Rightarrow \left(u^2 + \frac{a^2}{4}\right) - \left(v^2 + \frac{a^2}{4}\right) = MH^2 - NH^2$$

$\Rightarrow u^2 - v^2 = (MH - NH)(MH + NH)$.

Do $MH + NH = u + v \Rightarrow MH - NH = u - v$.

Từ đó ta có: $\begin{cases} MH + NH = u + v \\ MH - NH = u - v \end{cases} \Leftrightarrow MH = u;\ NH = v \Rightarrow$ đpcm!

3. Kẻ $HE // Ax$ $(E \in AN)$.

Khi đó $HE \perp (P)$ và $HE = d(H, (P))$

Theo định lí Ta–let, ta có

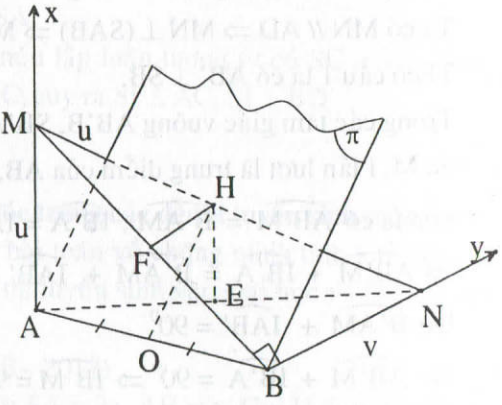
$$\frac{HE}{u} = \frac{v}{u+v} \Rightarrow HE = \frac{uv}{u+v}. \quad (1)$$

Tương tự, kẻ $HF // By$ $(F \in BM)$.

Khi đó $HF \perp (Q)$ và $HF = d(H, (Q))$.

Lại theo định lí Ta–lét thì

$$\frac{HF}{v} = \frac{u}{u+v} \Rightarrow HF = \frac{uv}{u+v}. \quad (2)$$



Từ (1), (2) suy ra $HE = HF \Rightarrow d(H, (P)) = d(H, (Q))$.

Vậy H luôn nằm trên mặt phẳng phân giác (π) của góc tạo bởi (P) và (Q).

Do (P), (Q) cố định, nên (π) là mặt phẳng cố định $\Rightarrow$ đpcm!

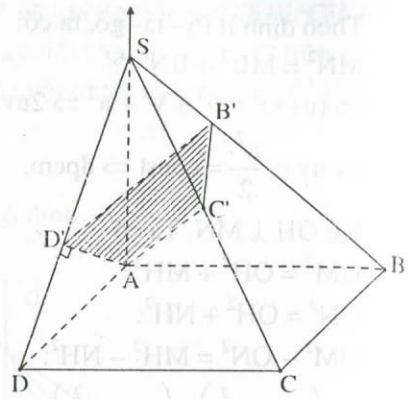
Thí dụ 12: Trong mặt phẳng (P) cho hình chữ nhật ABCD. Qua A dựng nửa đường thẳng $Ax \perp (P)$. Lấy S là điểm tùy ý trên Ax và $S \neq A$. Qua A dựng mặt phẳng (Q) vuông góc SC. Mặt phẳng này cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'.

1. Chứng minh rằng $AB' \perp SB$, $AD' \perp SD$ và ta có hệ thức

$$SB.SB' = SC.SC' = SD.SD'$$

2. Gọi I là trung điểm của SA, (R) là mặt phẳng qua B' và vuông góc với IB'. Chứng minh rằng khi S chạy trên Ax thì (R) luôn quay quanh một đường thẳng cố định.

Giải



1. Giả sử $(SC) \cap (Q) = C'$

   $(SB) \cap (Q) = B'$

   $(SD) \cap (Q) = D'$

   Do $SC \perp (Q) \Rightarrow SC \perp AD'$. (1)

   Vì $SA \perp (P) \Rightarrow (SAD) \perp (P)$,

   mà $(SAD) \cap (P) = AD$

   Từ đó do $DC \perp AD \Rightarrow DC \Rightarrow (SAD)$

   $\Rightarrow DC \perp AD'$. (2)

   Từ (1), (2) ta có $AD' \perp (SCD) \Rightarrow AD' \perp SD$.

   Lập luận tương tự ta có $AB' \perp SB \Rightarrow$ đpcm.

   Do $AB' \perp SB$ nên trong tam giác vuông SAB, ta có $SB'.SB = SA^2$

   Tương tự trong tam giác vuông SAD, vì $AD' \perp SD \Rightarrow SD'.SD = SA^2$

   Vì lẽ đó cùng có $SA^2 = SC.SC' \Rightarrow SB'.SB = SC'.SC = SD'.SD \Rightarrow$ đpcm!

2. Gọi M, N tương ứng là các trung điểm của AB, CD.

   Ta có $MN \,//\, AD \Rightarrow MN \perp (SAB) \Rightarrow MN \perp IB'$. (3)

   Theo câu 1 ta có $AB' \perp SB$.

   Trong các tam giác vuông AB'B, SB'A

   do M, I lần lượt là trung điểm của AB, SA,

   nên ta có $\widehat{AB'M} = \widehat{B'AM}$; $\widehat{IB'A} = \widehat{IAB'}$

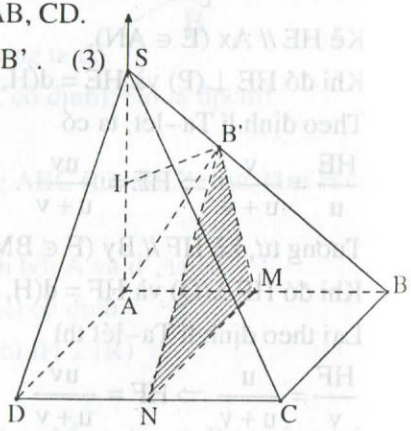
   $\Rightarrow \widehat{AB'M} + \widehat{IB'A} = \widehat{B'AM} + \widehat{IAB'}$

   Do $\widehat{B'AM} + \widehat{IAB'} = 90^0$

   $\Rightarrow \widehat{AB'M} + \widehat{IB'A} = 90^0 \Rightarrow \widehat{IB'M} = 90^0$

   $\Rightarrow IB' \perp B'M$. (4)

   Từ (3), (4) suy ra $IB' \perp (B'MN)$. Vậy (B'MN) chính là mặt phẳng (R) qua BB' và vuông góc với IB' $\Rightarrow$ (R) luôn quay quanh đường thẳng cố định, đó là đường thẳng nối M, N.

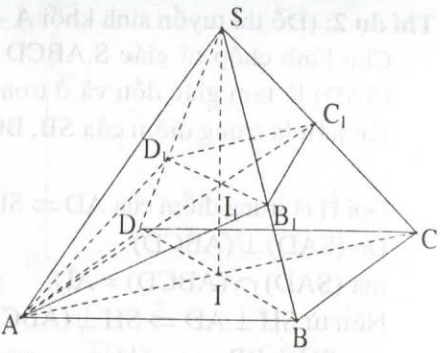


Thí dụ 13: Cho hình chóp S.ABC, trong đó ABCD là hình bình hành nằm trong (P) với I là giao điểm của hai đường chéo. S là điểm ở ngoài (P) sao cho

$$\widehat{ASB} = \widehat{CSD}\,;\ \widehat{BSC} = \widehat{DSA}\,.$$

Chứng minh rằng $SI \perp (P)$.

Giải



Giả sử $SC > SA$. (1)

Khi đó lấy C_1 trên SC sao cho $SC_1 = SA$

Giả sử $AC_1 \cap SI = I_1$

Trên mặt phẳng (SDB) qua I_1 kẻ B_1D_1 vuông góc với tia phân giác của góc $\widehat{BSD}$ ($D_1 \in SD$, $B_1 \in SB$)

Từ đó suy ra SD_1B_1 là tam giác cân đỉnh $S \Rightarrow SB_1 = SD_1$

Xét hai tam giác ASB_1 và C_1SD_1 có $SB_1 = SD_1$;

$SC_1 = SA$ (theo cách đặt), $\widehat{ASB_1} = \widehat{C_1SD_1}$ (do $\widehat{ASB} = \widehat{CSD}$)

$\Rightarrow \Delta ASB_1 = \Delta C_1SD_1$ (c.g.c) $\Rightarrow AB_1 = C_1D_1$. (3)

Tương tự ta có $\Delta B_1SC_1 = \Delta ASD_1$ (c.g.c) $\Rightarrow B_1C_1 = D_1A$. (4)

Vì $AD_1C_1B_1$ là tứ giác phẳng nên lại có (3), (4) nên nó là hình bình hành.

Từ đó có: $I_1A = I_1C_1$

Lại có: $IA = IC$ nên II_1 là đường trung bình của tam giác ACC_1

$\Rightarrow$ $II_1 // CC_1$. (5)

Từ (5) suy ra điều vô lí vì $II_1 \cap CC_1 = S$

Vậy giả thiết $SC > SA$ là sai $\Rightarrow SC \leq SA$.

Do vai trò bình đẳng giữa SA và SC nên lập luận tương tự có $SC \geq SA$. Như thế ta có: $SC = SA$. Kết hợp với $IA = IC$, suy ra $SI \perp AC$, $SI \perp BD$

$\Rightarrow SI \perp (ABCD) \Rightarrow$ đpcm!

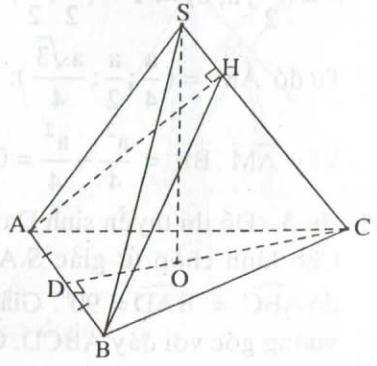
B. Các bài toán chứng minh tính vuông góc trong các đề thi tuyển sinh môn toán

Trong mục này chúng ta điểm lại các bài toán về chứng minh tính vuông góc có mặt trong các đề thi môn toán ở kì thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng trong những năm gần đây.

Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B– 2012)

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC với $SA = 2a$, $AB = a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SC. Chứng minh SC vuông góc với mặt phẳng (ABH).

Giải



Gọi O là tâm của tam giác đều ABC, thì $SO \perp (ABC)$

Gọi D là trung điểm của $AB \Rightarrow CD \perp AB$

Ta cũng có $AB \perp SO$ (do $SO \perp (ABC)$)

$\Rightarrow AB \perp (SCD) \Rightarrow AB \perp SC$. (1)

Lại có $AH \perp SC$ (g/t). (2)

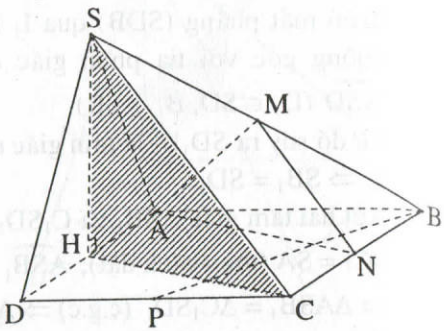
Từ (1), (2) suy ra $SC \perp (ABH) \Rightarrow$ đpcm!

Nhận xét : Bài toán quá cơ bản và đơn giản.

Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh khối A – 2007)

Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh bằng a. Mặt bên (SAD) là tam giác đều và ở trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC, CD. Chứng minh AM ⊥ BP.

Giải



Gọi H là trung điểm của AD ⇒ SH ⊥ AD.

Do (SAD) ⊥ (ABCD)

mà (SAD) ∩ (ABCD) = AD,

Nên từ SH ⊥ AD ⇒ SH ⊥ (ABCD)

⇒ SH ⊥ BP . (1)

Trong hình vuông ABCD, do HA = HD;

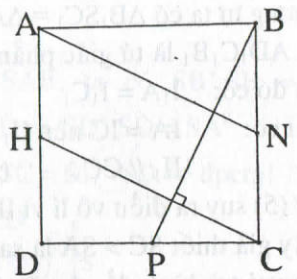
PC = PD ⇒ BP ⊥ HC . (2)

Từ (1), (2) suy ra BP ⊥ (SHC). (3)

Đã thấy MN // SC, AN // HC

⇒ (AMN) // (SHC) . (4)

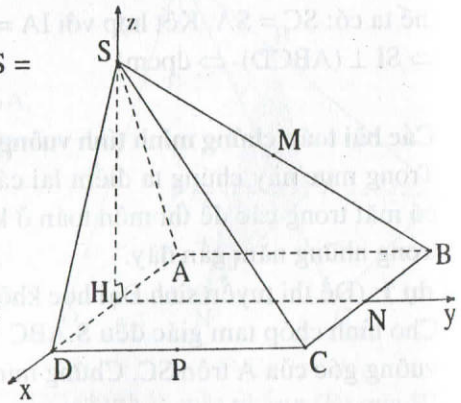
Từ (3), (4) suy ra BP ⊥ (AMN) ⇒ BP ⊥ AM ⇒ đpcm!



Nhận xét: Xét cách giải khác bằng phương pháp tọa độ như sau:

Xét hệ trục tọa độ Hxyz như hình vẽ.

Ta có:



$SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, nên ta có H = (0; 0; 0); S = $(0; 0; \frac{a\sqrt{3}}{2})$

$A = (-\frac{a}{2}; 0; 0)$; $B = (-\frac{a}{2}; a; 0)$

$\Rightarrow M = (-\frac{a}{4}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{4})$; $D = (\frac{a}{2}; 0; 0)$;

$C = (\frac{a}{2}; a; 0) \Rightarrow P = (\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0)$.

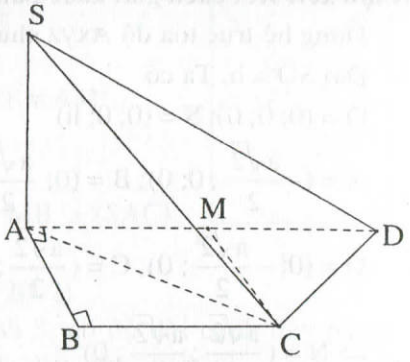
Từ đó $\overrightarrow{AM} = (\frac{a}{4}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{4})$; $\overrightarrow{BP} = (a; -\frac{a}{2}; 0)$

Vậy $\overrightarrow{AM} . \overrightarrow{BP} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = 0 \Rightarrow AM \perp BP \Rightarrow$ đpcm!

Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2007)

Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông trong đó $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^0$. Giả sử BA = BC = a; AD = 2a; SA = $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với đáy ABCD. Chứng minh SC ⊥ CD.

Giải



Gọi M là trung điểm của AD

$\Rightarrow$ AMCB là hình vuông cạnh a.

Từ MC = MA = MD = a

$\Rightarrow$ ACD là tam giác vuông cân đỉnh C, tức là AC $\perp$ CD.

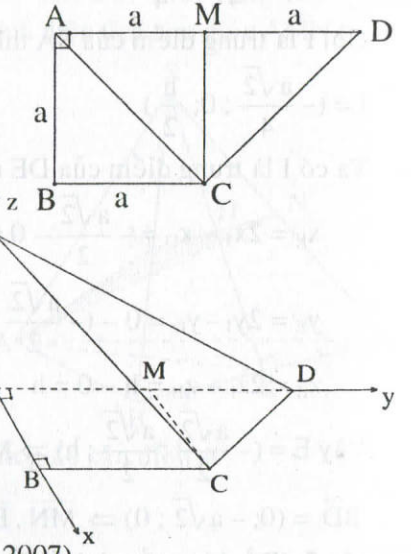
Vì SA $\perp$ (ABCD)

$\Rightarrow$ SC $\perp$ CD (định lí ba đường vuông góc)

$\Rightarrow$ đpcm!

Nhận xét:

1. Xét cách giải khác bằng phương pháp tọa độ như sau:



Xét hệ trục tọa độ Axyz như hình vẽ, ta có: A = (0; 0; 0); C = (a; a; 0);

S = (0; 0; $a\sqrt{2}$); D = (0; 2a; 0)

Ta có $\overrightarrow{SC}$ = (a; a; $-a\sqrt{2}$)

$\overrightarrow{CD}$ = (–a; a; 0)

$\Rightarrow \overrightarrow{SC} . \overrightarrow{CD} = -a^2 + a^2 = 0$

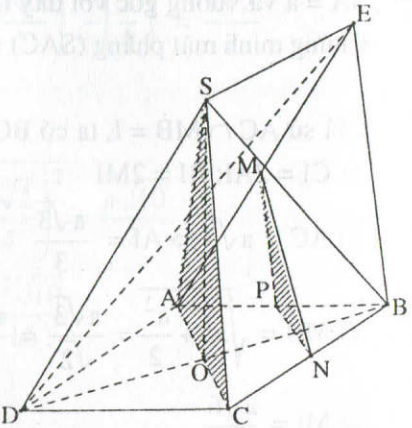
$\Rightarrow$ SC $\perp$ CD $\Rightarrow$ đpcm!

2. Qua cả hai cách giải trên ta thấy, giả thiết SA = $a\sqrt{2}$ là không cần thiết.(Giả thiết này chỉ dùng đến khi tính thể tích của khối S.ABCD)

Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2007)

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE, BC. Chứng minh MN $\perp$ BD.

Giải



Ta có S.EAD là hình bình hành

$\Rightarrow$ SE // DA và SE = DA

$\Rightarrow$ SE // BC và SE = BC

$\Rightarrow$ SEBC là hình bình hành $\Rightarrow$ EB // SC

Gọi P là trung điểm của AB.

Ta có MP // BE $\Rightarrow$ MP // SC, NC //AC

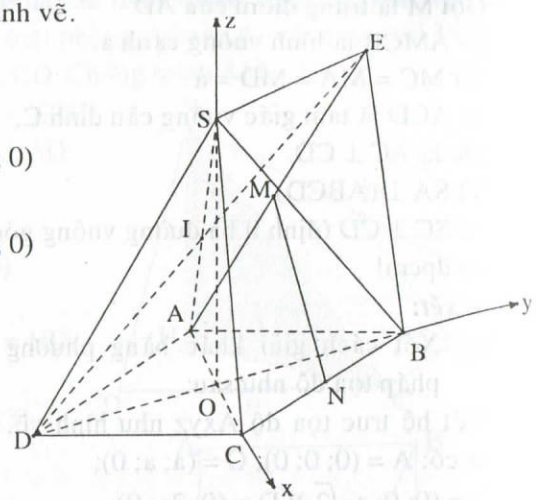
Từ đó (MNP) // (SAC). (1)

Do DB $\perp$ AC; DB $\perp$ SO (ở đây O là tâm của đáy ABCD) $\Rightarrow$ DB $\perp$ (SAC) (2)

Từ (1), (2) suy ra DB $\perp$ (MNP) $\Rightarrow$ DB $\perp$ MN$\Rightarrow$ đpcm!

Nhận xét: Xét cách giải khác bằng phương pháp tọa độ như sau:

Dựng hệ trục tọa độ Axyz như hình vẽ.



Đặt SO = h. Ta có

O = (0; 0; 0); S = (0; 0; h)

$A = (-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0)$; $B = (0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0)$

$D = (0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0)$; $C = (\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0)$

$\Rightarrow N = (\frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; 0)$

Gọi I là trung điểm của SA thì

$I = (-\frac{a\sqrt{2}}{4}; 0; \frac{h}{2})$

Ta có I là trung điểm của DE nên

$$x_E = 2x_I - x_D = -\frac{a\sqrt{2}}{2} - 0 = -\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$y_E = 2y_I - y_D = 0 - (-\frac{a\sqrt{2}}{2}) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$z_E = 2z_I - z_D = h - 0 = h$$

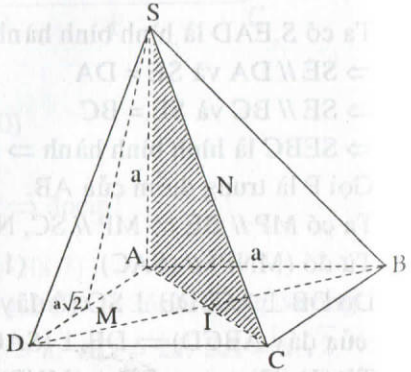
Vậy $E = (-\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; h) \Rightarrow M = (-\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{h}{2})$ và $\overrightarrow{MN} = (\frac{3a\sqrt{2}}{4}; 0; -\frac{h}{2})$;

$\overrightarrow{BD} = (0; -a\sqrt{2}; 0) \Rightarrow \overrightarrow{MN} . \overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow MN \perp BD \Rightarrow$ đpcm!

Thí dụ 5: (Đề thi tuyển sinh khối B – 2006)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a; AD = $a\sqrt{2}$; SA = a và vuông góc với đáy (ABCD). Gọi M, N là trung điểm của AD và SC. Chứng minh mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB).

Giải



Giả sử $AC \cap MB = I$, ta có $BC = 2AM$

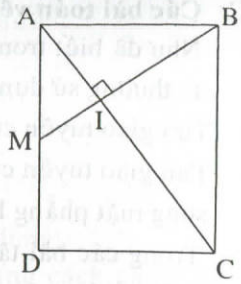
$\Rightarrow CI = 2AI$; $BI = 2MI$

Vì $AC = a\sqrt{3} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Vì $MB = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow MI = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

Ta có $AI^2 + MI^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{2}$.



Mặt khác $AM^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow AI^2 + MI^2 = AM^2$

$\Rightarrow \widehat{AIM} = 90^0 \Rightarrow AC \perp MB$. (1)

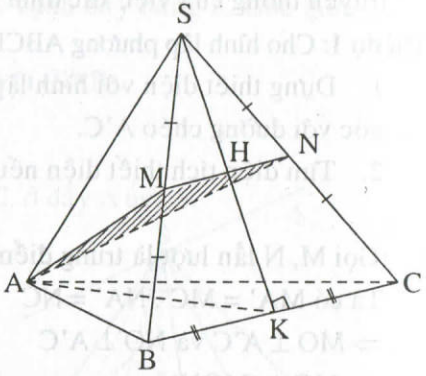
Mặt khác $MB \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$) $\Rightarrow MB \perp (SAC)$

$\Rightarrow (SMB) \perp (SAC) \Rightarrow$ đpcm!

Thí dụ 6: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2002)

Cho hình chóp tam giác đều S.ABCD đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là các trung điểm của SB, SC. Biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính diện tích tam giác AMN theo a.

Giải



Vì SABC là chóp đều, nên $\Delta SAB = \Delta SAC$, do đó hai đường trung tuyến tương ứng bằng nhau, tức là AM = AN.

Gọi H là trung điểm của MN thì $AH \perp MN$.

Ta có $(AMN) \perp (SBC)$;

$(AMN) \cap (SBC) = MN$, mà $AH \perp MN$

$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SH$.

Giả sử $SH \cap BC = K$. Dễ thấy H là trung điểm của SK.

Do $AH \perp SH$, ta có $AH \perp SK \Rightarrow$ ASK là tam giác cân đỉnh A

$\Rightarrow SA = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong tam giác vuông SBK, ta có $SK = \sqrt{SB^2 - BK^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow SH = \frac{1}{2}SK = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

Ta có $AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$

Vì thế $S_{AMN} = \frac{1}{2}MN.AH = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{10}}{4}\frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$

C. Các bài toán về thiết diện liên quan đến tính vuông góc

Như đã biết trong Chương 1, để dựng thiết diện với một khối đa diện người ta thường sử dụng hai phương pháp:

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng bằng cách xác định hai điểm chung
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng dựa vào tính song song (đường thẳng song song mặt phẳng hoặc là hai mặt phẳng song song với nhau)

Trong các bài tập đề cập đến ở Chương 1, hầu như không dùng gì đến tính vuông góc trong không gian.

Các bài tập thuộc mục này có dạng sau: Đòi hỏi dựng thiết diện vuông góc với một đường thẳng cho trước hoặc vuông góc với mặt phẳng cho trước nào đó.

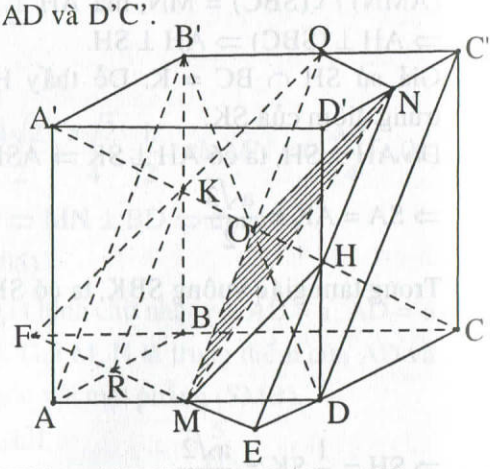
Vận dụng các định lí về tính vuông góc và kết hợp với các phương pháp truyền thống của việc xác định thiết diện, ta sẽ giải được bài toán đặt ra.

Thí dụ 1: Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D'. Gọi O là tâm của hình lập phương.

1. Dựng thiết diện với hình lập phương biết rằng thiết diện qua O và vuông góc với đường chéo A'C.
2. Tìm diện tích thiết diện nếu cạnh của hình lập phương bằng a.

Giải

1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và D'C'.



Ta có MA' = MC , NA' = NC

$\Rightarrow$ MO $\perp$ A'C và NO $\perp$ A'C

$\Rightarrow$ A'C $\perp$ (MON).

Vậy (MON) là mặt phẳng qua O và vuông góc với đường chéo A'C.

Còn lại ta sẽ mở rộng (MON) để nó trở thành thiết diện.

Trong (ADC'B'): MO $\cap$ B'C' = Q

$\Rightarrow$ (MON) $\cap$ (A'B'C'D') = NQ

Dễ thấy Q là trung điểm của B'C'.

Ta có (ABCD) //(A'B'C'D') nên (MON) $\cap$ (ABCD) = MR (R $\in$ AB), trong đó MR // QN. Dễ thấy R cũng là trung điểm của AB.

Trong (ABCD): RM $\cap$ DC = E; RM $\cap$ BC = F.

Trong (DCC'D'): EN $\cap$ DD' = H.

Trong (BCC'B'): FQ $\cap$ BB' = K.

Dễ thấy H, K lần lượt là trung điểm của DD' và BB'.

Vậy MHNQKR là lục giác thiết diện phải dựng.

2. Dễ thấy đây là lục giác đều có cạnh bằng $RM = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $S_{\text{thiết diện}} = 6.\frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Nhận xét: Qua thí dụ trên ta thấy để dựng thiết diện ta đã sử dụng:

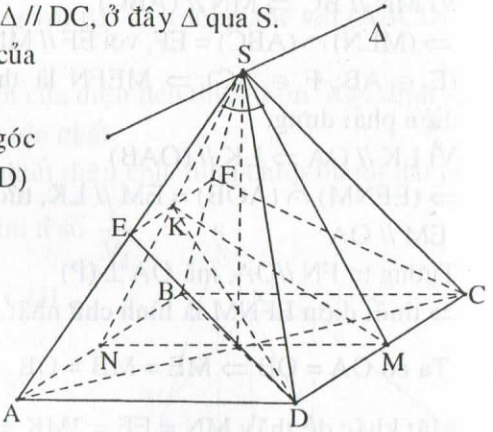
1. Tính vuông góc của đường thẳng với mặt phẳng (bằng cách chọn các điểm M, N rồi chứng minh $A'C \perp (OMN)$).
2. Sử dụng tính song song cũng như tìm hai điểm chung để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (các phương pháp quen biết đã trình bày kỹ trong Chương 1).

Thí dụ 2: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh đáy bằng a. Góc giữa mặt bên (SAB) và (SCD) bằng 60^0.

1. Dựng thiết diện qua DC và vuông góc với (SAB).
2. Tìm diện tích thiết diện theo a.

Giải

1. Vì $DC // (SAB) \Rightarrow (SDC) \cap (SAB) = \Delta // DC$, ở đây Δ qua S.



Gọi M, N lần lượt là các trung điểm của DC, AB. Ta có $SM \perp DC$, $SN \perp AB$

$\Rightarrow SM \perp \Delta$, $SN \perp \Delta$ vậy $\widehat{MSN}$ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)

$\Rightarrow \widehat{MSN} = 60^0$.

Ta có $NS \perp AB$, $MN \perp AB$

$\Rightarrow AB \perp (MNS) \Rightarrow (SAB) \perp (MNS)$.

Lại có $(SAB) \cap (SMN) = SN$

Từ đó nếu kẻ $MK \perp SN$ ($K \in SN$)

$\Rightarrow MK \perp (SAB) \Rightarrow (KDC) \perp (SAB)$.

Vậy KDC là mặt phẳng qua DC và vuông góc với (SAB).

Do $DC // AB \Rightarrow DC // (SAB) \Rightarrow (KDC) \cap (SAB) = EF // DC$ (tức // AB)

Vì EF qua K.

Do $\widehat{NSM} = 60^0 \Rightarrow$ SNM là tam giác đều cạnh bằng a vì $MK \perp SN \Rightarrow KS = KN$

$\Rightarrow$ E, F lần lượt là trung điểm của SA, SB. CDEF là thiết diện phải dựng. Đó là hình thang cân.

2. Ta có $EF = \frac{1}{2}AB = a$; $KM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

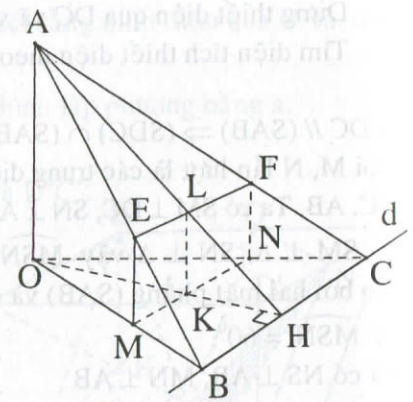
Vậy $S_{CDEF} = \frac{(DC + EF)KM}{2} = \frac{(a + \frac{a}{2}).\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$

Thí dụ 3: Trong mặt phẳng (P) cho điểm O và một đường thẳng (d) cách O một khoảng OH = h. Trên (d) lấy hai điểm B, C sao cho: $\widehat{BOH} = \widehat{COH} = \alpha$. Từ O dựng đường thẳng vuông góc với (P) và trên đó lấy điểm A sao cho OA = OB. Xét tứ diện OABC. Lấy K trên OH và đặt OK = x.

1. Dựng thiết diện vuông góc với OH tại K. Thiết diện là hình gì?
2. Tìm chu vi của thiết diện. Xác định góc α để chu vi đấy không phụ thuộc x.
3. Giả sử α có giá trị tìm được ở câu 2
   a. Chứng minh rằng đường thẳng vuông góc với (ABC) tại I (ở đây I là trực tâm của tam giác ABC) đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC.
   b. Giả sử đường thẳng nói trên cắt OA tại D. Tính OD.

Giải

1. Qua K dựng MN $\perp$ OH (M $\in$ OB, N $\in$ OC)
   Trong (AOH) dựng KL $\perp$ OH (L $\in$ AH), tức là KL // OA.
   Vì MN // BC $\Rightarrow$ MN // (ABC)
   $\Rightarrow$ (MLN) $\cap$ (ABC) = EF, với EF // MN (E $\in$ AB; F $\in$ AC) $\Rightarrow$ MEFN là thiết diện phải dựng.
   Vì LK // OA $\Rightarrow$ LK // (OAB)
   $\Rightarrow$ (EFNM) $\cap$ (AOB) = EM // LK, tức là EM // OA
   Tương tự FN //OA, mà OA $\perp$ (P)
   $\Rightarrow$ thiết diện EFNM là hình chữ nhật.



2. Ta có OA = OB $\Rightarrow$ ME = MB = OB – OM = $\dfrac{h-x}{\cos\alpha}$.
   Mặt khác dễ thấy MN = EF = 2MK = 2xtanα
   Gọi $\mathscr{C}$ là chu vi của thiết diện, thì $\mathscr{C}$ = 2(EM + MN) = 2($\dfrac{h-x}{\cos\alpha}$ + 2xtanα)
   $\mathscr{C} = \dfrac{2}{\cos\alpha}[h + x(2\sin\alpha - 1)]$. (1)
   Từ (1) suy ra để $\mathscr{C}$ không phụ thuộc x, ta cần có $2\sin\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = \dfrac{1}{2}$
   $\Leftrightarrow \alpha = 30^0$
3. Xét khi $\alpha = 30^0$. Lúc đó OBC là tam giác đều. Gọi O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC. Ta sẽ chứng minh $O_1I \perp$ (ABC).
   Do BC $\perp$ (AOH) $\Rightarrow$ BC $\perp O_1I$.
   Xét đường cao CC' của tam giác OBC, thì CC' $\perp$ OB và vì (AOB) $\perp$ (OBC)

$\Rightarrow CC' \perp (AOB)$.

Giả sử $CI \cap AB = J$, thì $CJ \perp AB$ (do I là trực tâm ΔABC)

$\Rightarrow C'J \perp AB$ (đinh lí ba đường vuông góc)

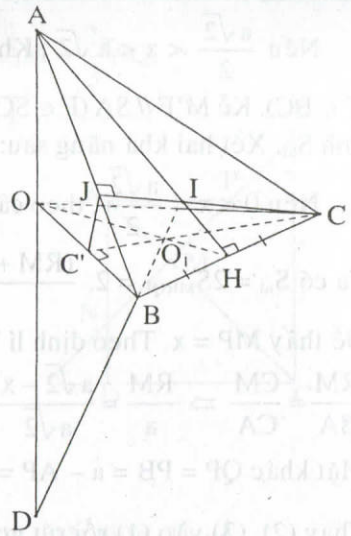
$\Rightarrow AB \perp (JCC') \Rightarrow AB \perp O_1I$.

Kết hợp với $BC \perp O_1I$ đã nói trên, suy ra $O_1I \perp (ABC)$. Đó là đpcm.

Giả sử $O_1I \cap OA = D$. Dễ thấy:

$\Delta OO_1D \backsim \Delta OAH$, tức là $\dfrac{OD}{OH} = \dfrac{OO_1}{OA}$.

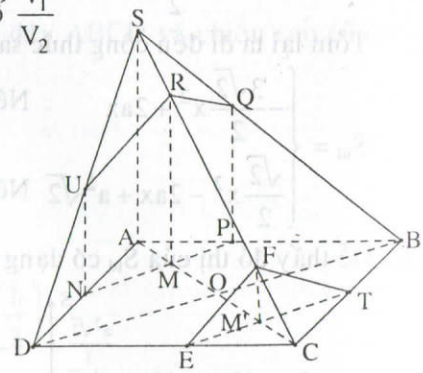
Vậy $OD = \dfrac{OO_1.OH}{OA} = \dfrac{h.\frac{2}{3}h}{2h} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}h$.



Thí dụ 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA = a và vuông góc với đáy. M là điểm trên AC và đặt $AM = x$ $(0 < x < a\sqrt{2})$

1. Dựng thiết diện qua M, song song với BD và vuông góc với (ABCD)
2. Tính diện tích thiết diện
3. Vẽ đồ thị biểu diễn sự biến thiên của diện tích thiết diện. Xác định vị trí của M để thiết diện có diện tích lớn nhất.
4. Khi thỏa mãn điều kiện câu 3, thiết diện chia hình chóp thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Tìm tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$

Giải



1. Vì thiết diện qua M và song song với BD nên nó phải chứa đường thẳng qua M và song song với BD.

   Mặt khác, nó vuông góc với (ABCD), tức là song song với SA nên nó phải chứa đường thẳng qua M và song song với SA.

   Xét hai khả năng sau:

   a. Nếu $0 < x < \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, khi đó qua M kẻ NP // BD ($N \in AD$; $P \in AB$)

   Kẻ MR // SA ($R \in SC$). Vì MR // SA $\Rightarrow$ MR // (SAD) và MR // (SAB)

   $\Rightarrow (NPR) \cap (SAD) = NU$ // RM (tức // SA), với $U \in SD$.

   $(NPR) \cap (SAB) = PQ$ // SA, với $Q \in SB$.

   Như thế trong trường hợp này thiết diện là ngũ giác URQPN.

b. Nếu $\frac{a\sqrt{2}}{2} < x < a\sqrt{2}$. Khi đó qua M' (AM' = x), kẻ ET // DB (E ∈ DC, T ∈ BC). Kẻ M'F // SA (F ∈ SC). Lúc này thiết diện phải dựng là tam giác ETF.

2. Tính S_{td}. Xét hai khả năng sau:

a. Nếu $0 < x < \frac{a\sqrt{2}}{2}$, theo câu 1, thiết diện là ngũ giác URQPN.

Ta có $S_{td} = 2S_{MRQP} = 2.\frac{(RM + QP)MP}{2} = (RM+QP)MP.$ (1)

Dễ thấy MP = x. Theo định lí Ta–lét, ta có

$$\frac{RM}{SA} = \frac{CM}{CA} \Rightarrow \frac{RM}{a} = \frac{a\sqrt{2} - x}{a\sqrt{2}} \Rightarrow RM = \frac{2a - x\sqrt{2}}{2}. \quad (2)$$

Mặt khác $QP = PB = a - AP = a - x\sqrt{2}$. (3)

Thay (2), (3) vào (1) rồi rút gọn, ta có $S_{td} = \frac{3\sqrt{2}}{2}x^2 + 2ax$

b. Nếu $\frac{a\sqrt{2}}{2} \le x < a\sqrt{2}$, theo câu 1, thiết diện là tam giác EFT.

Ta có $S_{td} = \frac{1}{2}ET.FM' = EM'.FM'.$ (4)

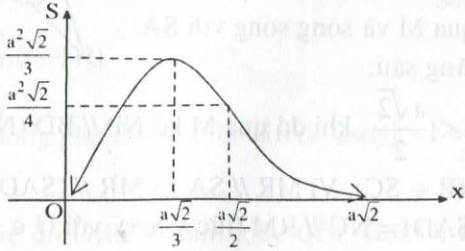
Do $EM' = M'C = a\sqrt{2} - x$ và tương tự như trên ta có

$FM' = \frac{2a - x\sqrt{2}}{2}$, thay vào (4) ta có $S_{td} = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 2ax + a^2\sqrt{2}$

Tóm lại ta đi đến công thức sau để tính diện tích thiết diện

$$S_{td} = \begin{cases} -\frac{3\sqrt{2}}{2}x^2 + 2ax & \text{Nếu } 0 < x < \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - 2ax + a^2\sqrt{2} & \text{Nếu } \frac{a\sqrt{2}}{2} \le x < a\sqrt{2}. \end{cases}$$

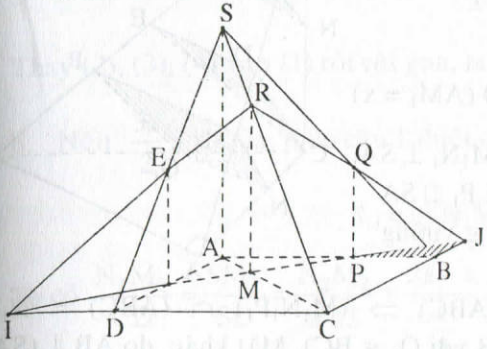
3. Dễ thấy đồ thị của S_{td} có dạng sau :

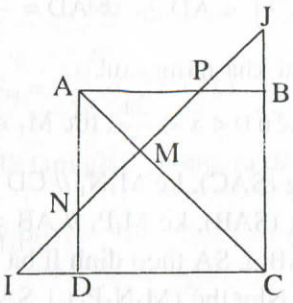


Từ đồ thị suy ra: $S_{max} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow AM = \frac{1}{3}AC.$

4. Khi M thỏa mãn điều kiện ở Câu 3, ta có $AM = \frac{1}{3}AC$.

Trong (ABCD): $NP \cap BC = J$; $NP \cap DC = I$





Gọi V_1 là thể tích phần hình chóp nằm trước thiết diện. Ta có:

$$V_1 = V_{R.ICJ} - V_{Q.PBJ} - V_{E.IDN}$$

Ta có $AM = \frac{1}{3}AC = \frac{a\sqrt{2}}{3} \Rightarrow AP = \frac{a\sqrt{2}}{3}.\sqrt{2} = \frac{2}{3}a \Rightarrow BP = \frac{a}{3}$

Từ đó ta có $\frac{RM}{SA} = \frac{CM}{CA} = \frac{2}{3}$; $\frac{QP}{SA} = \frac{BP}{AB} = \frac{1}{3}$.

Tương tự $\frac{EM}{SA} = \frac{1}{3}$

Gọi V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy ABCD và chiều cao của hình chóp S.ABCD. Ta có:

$$S_{ICJ} = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}a.\frac{4}{3}a = \frac{8a^2}{9} = \frac{8}{9}S,$$

$$S_{PBJ} = S_{IDN} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}a\right)\left(\frac{1}{3}a\right) = \frac{S}{18}.$$

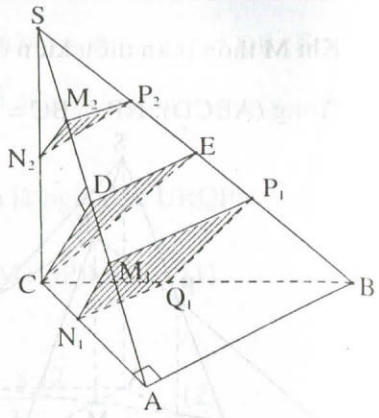
Từ đó ta có $V_1 = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{9}S\right)\left(\frac{2}{3}h\right) - 2.\frac{1}{3}\left(\frac{S}{18}\right)\left(\frac{h}{3}\right)$

$$= \frac{16}{27}V - \frac{V}{27} = \frac{15V}{27} = \frac{5V}{9} \Rightarrow V_2 = \frac{4V}{9} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{4}.$$

Thí dụ 5: Cho hình chóp S.ABCD, trong đó ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, $\widehat{ABC} = 60^0$. Cạnh SC = a và vuông góc với (ABC)

1. Dựng thiết diện qua $M \in SA$ và vuông góc với SA
2. Đặt AM = x. Tính diện tích thiết diện.

Giải



1. Kẻ $CD \perp SA$, ta có $AC^2 = AD.AS$

$\Rightarrow \left(a\sqrt{3}\right)^2 = AD.2a \Rightarrow AD = \dfrac{3a}{2}$

Xét hai khả năng sau:

a. Nếu $0 < x < \dfrac{3a}{2}$, tức $M_1 \in AD$ $(AM_1 = x)$

Trong (SAC), kẻ $M_1N_1 // CD \Rightarrow M_1N_1 \perp SA$.

Trong (SAB), kẻ $M_1P_1 // AB \Rightarrow M_1P_1 \perp SA$ (do $AB \perp SA$ theo định lí ba đường vuông góc). Như thế $(M_1N_1P_1) \perp SA$.

Vì $M_1P_1 // AB \Rightarrow M_1P_1 // (ABC) \Rightarrow (M_1N_1P_1) \cap (ABC) = N_1Q_1$, thì $N_1Q_1 // M_1P_1$ (ta có $N_1Q_1 // AB$ với $Q_1 \in BC$). Mặt khác, do $AB \perp (SAC)$ $\Rightarrow AB \perp M_1N_1 \Rightarrow M_1N_1 \perp M_1P_1$.

Vậy $M_1P_1Q_1N_1$ là hình thang vuông tại M_1, N_1 và là thiết diện phải dựng.

b. Nếu $\dfrac{3a}{2} \le x < 2a$, ta có $M_2 \in SD$ $(AM_2 = x)$.

Trong (SAC), kẻ $M_2N_2 // CD$
Trong (SAB), kẻ $M_2N_2 // AB$
$\Rightarrow (M_2N_2P_2) \perp SA \Rightarrow$ Tam giác $M_2N_2P_2$ là thiết diện phải dựng.

Tóm lại:

- Nếu $M \in (SD)$: Thiết diện là tam giác.
- Nếu $M \in (DA)$: Thiết diện là hình thang vuông.

2. Để tính diện tích thiết diện, xét hai khả năng sau:

a. Nếu $0 < x < \dfrac{3a}{2}$, theo câu 1 thiết diện là hình thang vuông và ta có

$$S_{td} = \frac{1}{2}(M_1P_1 + N_1Q_1).M_1N_1. \qquad (1)$$

Theo định lí Ta–lét, ta có $\Rightarrow \dfrac{M_1P_1}{AB} = \dfrac{SM_1}{SA} \Rightarrow \dfrac{M_1P_1}{a} = \dfrac{2a - x}{2a}$

$$\Rightarrow M_1P_1 = \frac{2a - x}{2}. \qquad (2)$$

Ta có $CD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{N_1M_1}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{x}{\frac{3a}{2}} \Rightarrow N_1M_1 = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$. (3)

Lại theo định lí Ta–lét, thì $\dfrac{N_1Q_1}{AB} = \dfrac{CQ_1}{CB} = \dfrac{EP_1}{EB} = \dfrac{DM_1}{DA} = \dfrac{\frac{3a}{2} - x}{\frac{3a}{2}}$.

Do (CDE) // $(N_1M_1P_1Q_1)$ $\Rightarrow$ hai giao tuyến của hai mặt phẳng này với (SBC) phải song song với nhau, tức CE // Q_1P_1

$$\Rightarrow N_1Q_1 = \frac{3a-2x}{3}. \qquad (4)$$

Thay (2), (3), (4) vào (1) rồi rút gọn, ta có $S_{td} = \frac{x\sqrt{3}}{36}(12a-7x)$.

b. Nếu $\frac{3a}{2} \le x < 2a$, theo câu 1 thiết diện là tam giác vuông, ta có

$$S_{td} = \frac{1}{2}N_2M_2 . M_2P_2 . \qquad (5)$$

Ta có $\frac{N_2M_2}{CD} = \frac{SM_2}{SD} = \frac{N_2M_2}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2a-x}{\frac{a}{2}} \Rightarrow N_2M_2 = (2a-x)\sqrt{3}$. (6)

Lập luận tương tự có $\frac{M_2P_2}{a} = \frac{2a-x}{2a} \Rightarrow M_2P_2 = \frac{2a-x}{2}$. (7)

Thay (6), (7) vào (5), ta có $S_{td} = \frac{\sqrt{3}(2a-x)^2}{4}$

Tóm lại đi đến công thức sau để tính diện tích thiết diện

$$S_{td} = \begin{cases} \frac{a\sqrt{3}}{36}(12a-7x) & \text{nếu } 0 < x < \frac{3a}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4}(2a-x)^2 & \text{nếu } \frac{3a}{2} \le x < 2a \end{cases}$$

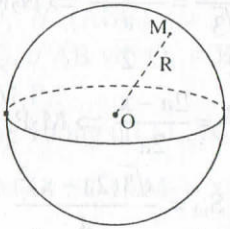
CHƯƠNG 3. KHỐI TRÒN XOAY

§1. HÌNH CẦU

Các bài toán về hình cầu trong hình học không gian thuần túy thiên về các tính chất định tính. Để giải được các bài toán trong phần này đòi hỏi học sinh phải nắm vững và sử dụng thành thạo các kiến thức của hình học không gian (đặc biệt là các kiến thức về quan hệ song song và quan hệ vuông góc).

A. Tóm tắt lý thuyết.

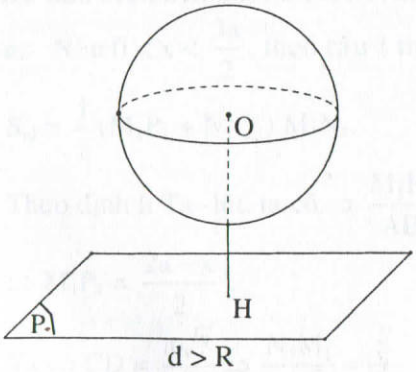
- Hình cầu là tập hợp những điểm M trong không gian mà khoảng cách từ M đến một điểm cố định O luôn luôn nhỏ hơn hay bằng một độ dài R cho trước, tức là $OM \le R$



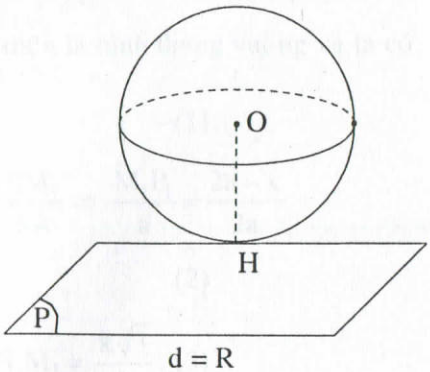
- Mặt cầu là tập hợp những điểm M cách đều một điểm cố định O một đoạn không đổi bằng R, tức là $OM = R$.
- Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu

  Xét hình cầu S(O; R) tâm O, bán kính R và mặt phẳng (P). Giả sử d là khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (P).

  a. Nếu $d > R$: Mặt phẳng (P) và mặt cầu S(O; R) không cắt nhau



$d > R$

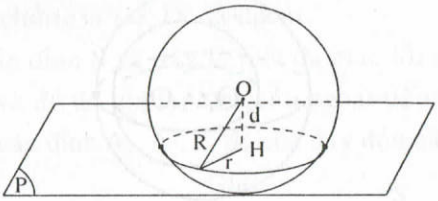


$d = R$

  b. Nếu $d = R$, thì mặt phẳng (P) và mặt cầu S(O; R) chỉ có một điểm chung duy nhất. Nếu gọi H là điểm chung ấy thì H gọi là tiếp điểm của mặt cầu với mặt phẳng. Lúc đó (P) sẽ gọi là tiếp diện với mặt cầu.

  c. Nếu $d < R$ thì mặt phẳng (P) và mặt cầu S(O; R) cắt nhau theo một giao tuyến là đường tròn. Hình chiếu H của O trên (P) chính là tâm của đường tròn giao tuyến. Nếu gọi r là bán kính của đường tròn giao tuyến thì:

$r = \sqrt{R^2 - d^2}$

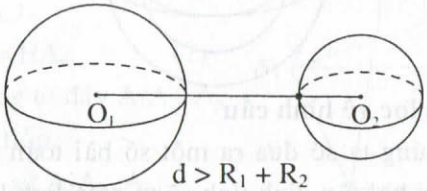


- Vị trí tương đối giữa hai mặt cầu

Cho hai hình cầu $S_1(O_1; R_1)$ và $S_2(O_2; R_2)$.

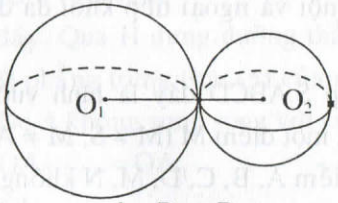
Đặt $d = O_1O_2$ là khoảng cách giữa hai tâm của hai hình cầu.

a. Nếu $d > R_1 + R_2$ thì hai hình cầu không cắt nhau và ở ngoài nhau.



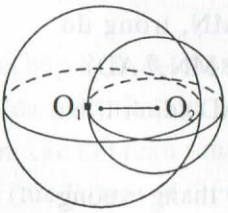
$d > R_1 + R_2$

b. Nếu $d = R_1 + R_2$ thì hai hình cầu tiếp xúc ngoài với nhau.



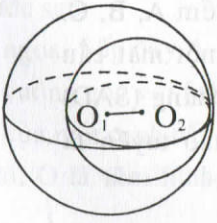
$d = R_1 + R_2$

c. Nếu $|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$ thì hai hình cầu cắt nhau.

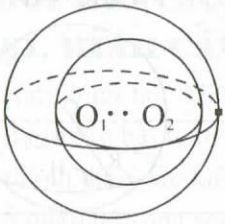


$|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$

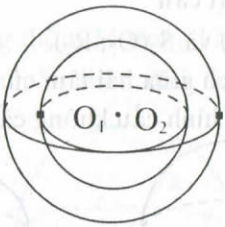
d. Nếu $d = |R_1 - R_2| > 0$, khi đó hai hình cầu tiếp xúc trong với nhau.



e. Nếu $0 < d < |R_1 - R_2|$, hai hình cầu đựng nhau.



f. Nếu $d = 0$, hai hình cầu đồng tâm (khi đó $O_1 \equiv O_2$)



B. Các bài toán chọn lọc về hình cầu

Trong phần này chúng ta sẽ đưa ra một số bài toán chọn lọc về hình cầu. Chúng bao gồm các bài tập định tính cũng như định lượng về hình cầu, các bài toán về hình cầu nội và ngoại tiếp khối đa diện, các bất đẳng thức liên quan đến hình cầu....

Thí dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông, còn SB vuông góc với (ABCD). Lấy trên SA một điểm M ($M \neq S$, $M \neq A$). Giả sử $SD \cap (BCM) = N$. Chứng minh rằng 6 điểm A, B, C, D, M, N không thể nằm trên một mặt cầu.

Giải

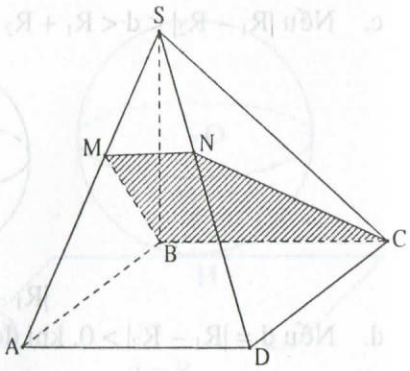
Do $BC // AD \Rightarrow BC // (SAD)$

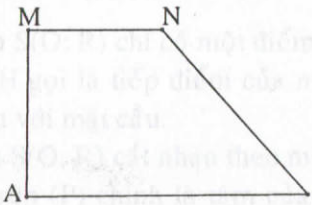
$\Rightarrow (BCM) \cap (SAD) = MN$, trong đó $N \in SD$ và $MN // BC$ (tức $MN // AD$)

Vì $BA \perp AD \Rightarrow SA \perp AD$ (định lí ba đường vuông góc).

Vì thế MADN là hình thang vuông thực sự (do $MN < AD$). Do đó MADN không phải là tứ giác nội tiếp.

Giả thiết phản chứng 6 điểm A, B, C, D, M, N cùng nằm trên một mặt cầu (?) nào đó. Khi đó mặt phẳng (SAD) phải cắt (?) theo một giao tuyến là một đường tròn.



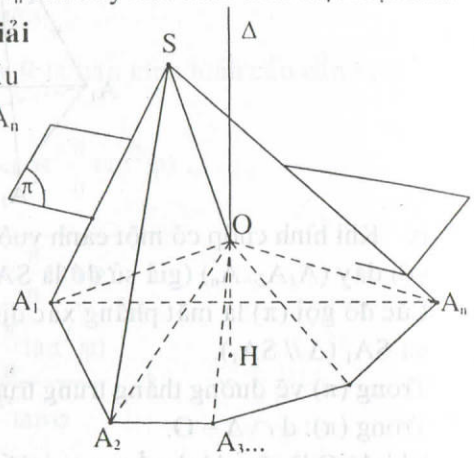


Rõ ràng M, N, A, D thuộc đường tròn giao tuyến này. Như thế MADN nói riêng là một tứ giác nội tiếp. Điều này mâu thuẫn với kết luận trên.

Vậy giả thiết phản chứng là sai. Đó là đpcm.

Thí dụ 2: Cho hình chóp đỉnh S và đáy là một đa giác lồi $A_4A_2...A_n$ (n–giác lồi). Tìm điều kiện cần và đủ để tồn tại hình cầu ngoại tiếp hình chóp, tức là đỉnh S của hình chóp và các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ của đáy đều nằm trên một mặt cầu.

Giải



1. **Điều kiện cần:** Giả sử tồn tại hình cầu tâm O ngoại tiếp hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ tức là ta có

$OS = OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$. (1)

Kẻ $OH \perp (A_1A_2...A_n)$

$\Rightarrow HA_1 = HA_2 = ... = HA_n$. (2)

Đẳng thức (2) chứng tỏ đáy $A_1A_2...A_n$ là một đa giác nội tiếp.

2. **Điều kiện đủ**: Giả sử $A_1A_2...A_n$ là một đa giác nội tiếp. Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy. Qua H dựng đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $A_1A_2...A_n$. Vẽ mặt phẳng trung trực (π) của một cạnh bất kỳ của hình chóp (chẳng hạn SA_1). Do Δ không song song với (π) nên giả sử $\Delta \cap (\pi) = 0$.

Khi đó ta thấy $\begin{cases} OA_1 = OA_2 = ... = OA_n \\ OA_1 = OH \end{cases}$

Từ đó suy ra O là tâm hình cầu ngoại tiếp hình chóp S. $A_1A_2...A_n$. Như vậy, ta có kết luận sau:

Điều kiện cần và đủ để hình chóp S. $A_1A_2...A_n$ nội tiếp trong một hình cầu là: Đa giác đáy $A_1A_2...A_n$ là một đa giác nội tiếp.

Nhận xét: Từ thí dụ trên, ta rút ra các kết luận sau:

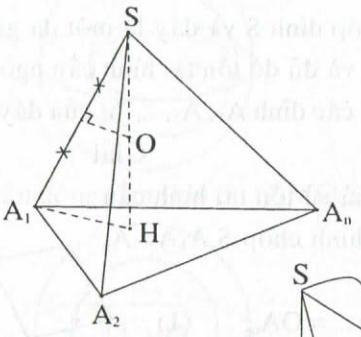
1. Mọi hình chóp tam giác (tức là mọi tứ diện), mọi hình chóp đều là hình chóp nội tiếp trong một hình cầu.

2. Khi hình chóp đã thỏa mãn điều kiện trên thì tâm hình cầu ngoại tiếp của nó xác định theo các bước sau:

- Xác định tâm H đường tròn ngoại tiếp đáy $A_1A_2...A_n$
- Qua H dựng đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $(A_1A_2...A_n)$
- Vẽ mặt phẳng trung trực (π) của một cạnh bất kỳ của hình chóp
- Giả sử $\Delta \cap (\pi) = 0$. Khi đó, O là tâm hình cầu ngoại tiếp của hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ cần dựng

3. Trong các trường hợp sau đây mặt phẳng trung trực (π) có thể thay bằng đường trung trực.

a. Khi hình chóp là chóp đều (vì khi đó Δ qua đỉnh S của hình chóp)



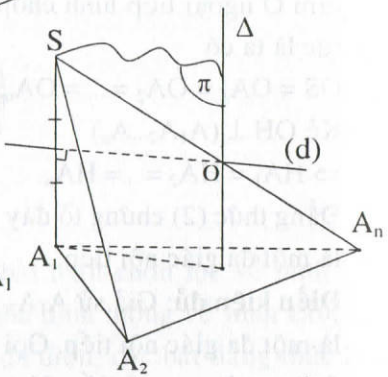
b. Khi hình chóp có một cạnh vuông góc với đáy $(A_1A_2...A_n)$ (giả sử đó là SA_1).

Lúc đó gọi (π) là mặt phẳng xác định bởi Δ và SA_1 ($\Delta // SA_1$).

Trong (π) vẽ đường thẳng trung trực d của SA_1

Trong (π): $d \cap \Delta = O$.

Khi đó O là tâm hình cầu ngoại tiếp cần tìm.

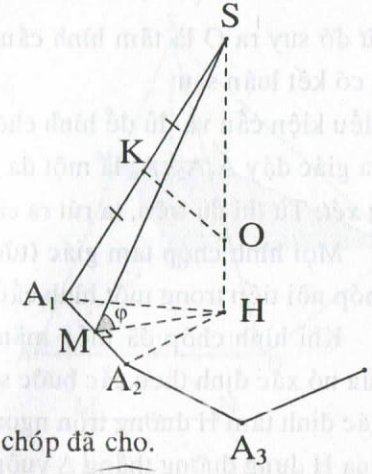


c. Khi hình chóp có đường thẳng Δ qua S. Lúc này vẽ trung trực của một cạnh bất kỳ (giống như trường hợp a)

4. Xét các thí dụ minh họa sau đây:

Minh họa 1: Cho hình chóp n giác đều $S.A_1A_2...A_n$ cạnh đáy bằng a, góc của mặt bên và đáy bằng φ. Hãy xác định tâm và tính bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp.

Giải



Kẻ $SH \perp (A_1A_2...A_n)$ khi đó ta có

$$\widehat{A_1HA_2} = \frac{2\pi}{n}$$

Kẻ $HM \perp A_1A_2 \Rightarrow MA_1 = MA_2 = \frac{a}{2}$

$$\Rightarrow HA_1 = \frac{MA_1}{\sin \widehat{A_1HM}} = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$$

Trung trực của SA_1 cắt SH tại O

$\Rightarrow$ O là tâm hình cầu ngoại tiếp của hình chóp đã cho.

Ta có $\widehat{SMH}$ là góc tạo bởi mặt bên và đáy nên $\widehat{SMH} = \varphi$. Từ đó suy ra

$$SH = MH\tan\varphi = MA_1\cot\widehat{A_1HM}\tan\varphi = \frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n}\tan\varphi$$

Ta có $SA_1 = \sqrt{SH^2 + A_1H^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}\cot^2\frac{\pi}{n}\tan^2\varphi + \frac{a^2}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}}$

$$= \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{n}\tan^2\varphi + 1}$$

Hai tam giác SKO và SHA_1 đồng dạng nên

$\frac{SK}{SH} = \frac{SO}{SA_1} \Rightarrow R = SO = \frac{SK.SA_1}{SH}$ (Ở đây R là bán kính hình cầu cần tìm)

Như vậy $R = \frac{\frac{SA_1}{2}.SA_1}{SH} = \frac{\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\pi}{n}}(1+\cos^2\frac{\pi}{n}\tan^2\varphi)}{2.\frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n}\tan\varphi}$

$$\Rightarrow R = \frac{a(1+\cos^2\frac{\pi}{n}\tan^2\varphi)}{4\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\tan\varphi} = \frac{a(1+\cos^2\frac{\pi}{n}\tan^2\varphi)}{2\sin\frac{2\pi}{n}\tan\varphi}$$

Chú ý: Nói riêng nếu $n = 4, \varphi = \frac{\pi}{3}$, ta có: $R = \frac{a(1+\cos^2\frac{\pi}{4}\tan^2\frac{\pi}{3})}{2\sin\frac{\pi}{2}\tan\frac{\pi}{3}} = \frac{5\sqrt{3}a}{12}$.

Minh họa 2: Cho tứ diện đều ABCD cạnh bằng 1. Tìm bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện.

Giải

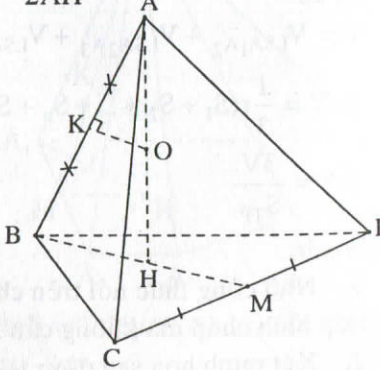
Gọi H là tâm của đáy BCD. Trung trực của AB (vẽ trong tam giác ABH) cắt AH tại O. Khi đó O là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và bán kính R của hình cầu này xác định như sau:

$$R = AO = \frac{AK}{\cos\widehat{KAO}} = \frac{AB}{2\cos\widehat{BAH}} = \frac{AB}{2.\frac{AH}{AB}} = \frac{AB^2}{2AH} \quad (*)$$

Ta có $AB = 1; BH = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

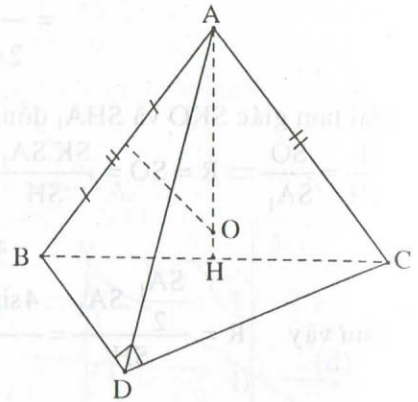
$\Rightarrow AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Thay vào (*) và có $R = \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$



Minh họa 3: Cho tứ diện ABCD với AB = AC = a, BC = b. Hai mặt phẳng (BCD) và (ABC) vuông góc với nhau và $\widehat{BDC} = 90^0$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD theo a, b.

Giải



Kẻ $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (BCD)$ (do $(ABC) \perp (BCD)$).

Do $\widehat{BDC} = 90^0$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Vẽ trung trực của AB cắt AH tại O, thì O là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và bán kính R của hình cầu này tính như sau:

$R = AO = \dfrac{AB.AC.BC}{4S_{ABC}}$ (áp dụng công thức lượng giác quen biết $S = \dfrac{abc}{4R}$)

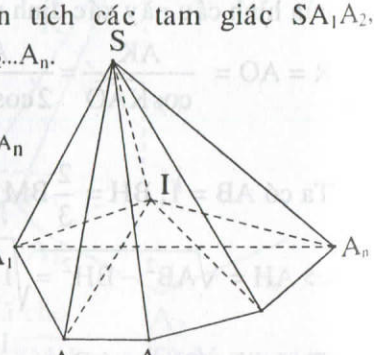
$$= \frac{AB^2.BC}{4\frac{1}{2}BC.AH} = \frac{AB^2}{2AH} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}} = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}.$$

Thí dụ 3. Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$. Giả sử tồn tại hình cầu nội tiếp trong hình chóp, tức là hình cầu tiếp xúc với tất cả các mặt bên và đáy. Gọi r là bán kính hình cầu này. Chứng minh: $r = \dfrac{3V}{S_{TP}}$ ở đây V, S_{TP} lần lượt là thể tích và diện tích toàn phần của hình chóp.

Giải

Gọi I là tâm hình cầu nội tiếp. Khi đó các hình chóp ISA_1A_2, ISA_2A_3, ... $ISA_{n-1}An$, ISA_nA_1 và hình chóp $IA_1A_2...A_n$ có chiều cao đều bằng r.

Gọi S_1, S_2,..., S_n và S tương ứng là diện tích các tam giác SA_1A_2, SA_2A_3,...SA_nA_1 và diện tích tam giác đáy $A_1A_2...A_n$.



Ta có

$V = V_{I.SA_1A_2} + V_{I.SA_2A_3} + V_{I.SA_nA_1} + V_{I.SA_1A_2...A_n}$

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}r(S_1 + S_2 + ... + S_n + S) = \dfrac{1}{3}r.S_{TP}$

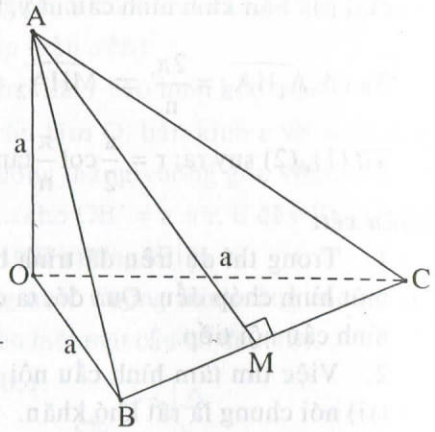
$\Rightarrow r = \dfrac{3V}{S_{TP}}$

***Nhận xét*:**

1. Nhờ công thức nói trên cho phép ta xác định bán kính r của hình cầu nội tiếp hình chóp mà không cần xác định tâm hình cầu nội tiếp.
2. Xét minh họa sau đây:

Cho tứ diện OABC, trong đó OA = a, OB = b, OC = c và OA ⊥ OB, OA ⊥ OC; $\widehat{BOC} = 120^0$. Tìm bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện.

Giải



Ta có OA ⊥ (OBC), dễ thấy

$AB = BC = a\sqrt{2}$; còn $BC = a\sqrt{3}$

Ta có $V = V_{OABC} = \frac{1}{3}S_{OBC}.OA$

$= \frac{1}{3}.\frac{1}{2}a^2 \sin 120^0.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Gọi M là trung điểm của BC thì:

$AM = \sqrt{AB^2 - MB^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^2\sqrt{15}}{4}$

Vì thế $S_{TP} = S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC} + S_{ABC}$

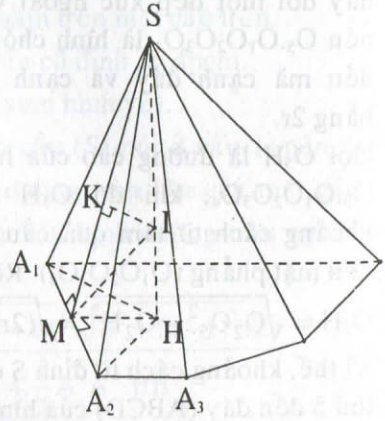
$= \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{15}}{4} = \frac{a^2}{4}(4 + \sqrt{3} + \sqrt{15})$

Do vậy $r = \frac{3V}{S_{TP}} = \frac{a\sqrt{3}}{4 + \sqrt{3} + \sqrt{15}}$

Nhắc lại một kỷ niệm: Đây là bài toán tuyển sinh vào Đại học Tổng hợp Hà Nội năm 1964. Tác giả cuốn sách này làm bài thi trên trong lúc thi vào khoa Toán của trường tại trụ sở 19 Lê Thánh Tôn – Hà Nội. Tác giả là cựu sinh viên của trường.

Thí dụ 4: Cho hình chóp n giác đều $SA_1A_2...A_n$, cạnh đáy bằng a, góc của mặt bên và đáy là φ. Xác định tâm và tính bán kính hình cầu nội tiếp hình chóp.

Giải



Kẻ SH vuông góc đáy $A_1A_2...A_n$.

Do hình chóp là đều nên mọi điểm trên SH đều cách đều tất cả các mặt bên.

Do đó, tâm I hình cầu nội tiếp hình chóp là điểm nằm trên SH sao cho I cách đều một mặt bên nào đó (chẳng hạn (SA_1A_2) và đáy $A_1A_2...A_n$).

Gọi M là trung điểm của A_1A_2, khi đó $HM \perp A_1A_2 \Rightarrow SM \perp A_1A_2$ (định lí ba đường vuông góc).

Ta có $\widehat{SMH} = \varphi$ vì nó là góc của (SA_1A_2) tạo với đáy $A_1A_2...A_n$. Trong tam giác SMH, vẽ phân giác của $\widehat{SMH}$, nó cắt SH tại I.

Kẻ $IK \perp SM$. Do $(SMH) \perp (SA_1A_2) \Rightarrow IK \perp (SA_1A_2)$.

Ta có IK = IH, vậy I là tâm hình cầu nội tiếp hình chóp.

Gọi r là bán kính hình cầu này, thì $r = IH = HM \tan\frac{\varphi}{2}$. (1)

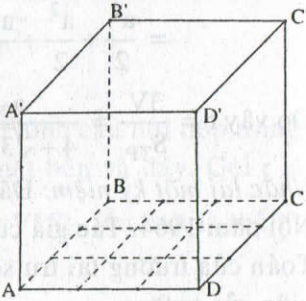
Ta có $\widehat{A_1HA_2} = \frac{2\pi}{n} \Rightarrow \widehat{MHA_2} = \frac{\pi}{n} \Rightarrow HM = MA_2 \cot \widehat{MHA_2} = \frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n}$. (2)

Từ (1), (2) suy ra: $r = \frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n}\tan\frac{\varphi}{2}$

***Nhận xét*:**

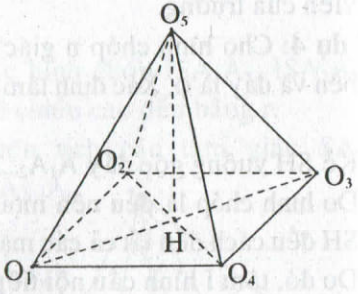
1. Trong thí dụ trên đã trình bày cách xác định tâm hình cầu nội tiếp với một hình chóp đều. Qua đó, ta cũng thấy với mọi hình chóp đều, đều tồn tại hình cầu nội tiếp.
2. Việc tìm tâm hình cầu nội tiếp của một hình chóp (dĩ nhiên khi nó tồn tại) nói chung là rất khó khăn.

Thí dụ 5: Cho hình hộp đứng đáy là hình vuông bằng 6r, chiều cao là 3,5r. Hỏi có thể xếp vào hộp 13 quả bóng bán kính r không ? (Giả sử các quả bóng không biến dạng khi xếp chồng lên nhau).



Giải

Xét 4 quả cầu đặt kề nhau ở về góc bên trái của hình hộp. Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 là tâm của 4 quả cầu này. Khi đó mặt phẳng $(O_1O_2O_3O_4)$ song song với đáy (ABCD) và cách nó một khoảng bằng r.



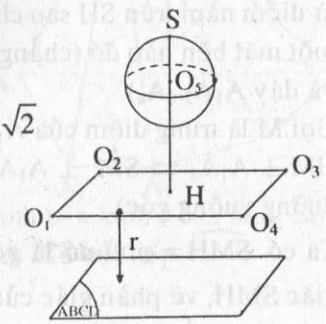
Gọi O_5 là tâm của quả cầu thứ 5 đặt trên 4 quả cầu này. Khi đó các quả cầu này đôi một tiếp xúc ngoài với nhau, nên $O_5.O_1O_2O_3O_4$ là hình chóp tứ giác đều mà cạnh đáy và cạnh bên đều bằng 2r.

Gọi O_5H là đường cao của hình chóp $O_5.O_1O_2O_3O_4$, khi đó O_5H chính là khoảng cách từ tâm quả cầu thứ năm đến mặt phẳng $(O_1O_2O_3O_4)$. Rõ ràng:

$O_5H = \sqrt{O_2O_5^2 - O_2H^2} = \sqrt{(2r)^2 + (r\sqrt{2})^2} = r\sqrt{2}$

Vì thế, khoảng cách từ đỉnh S của quả cầu thứ 5 đến đáy (ABCD) của hình hộp là:

$r + r\sqrt{2} + r = r(2+\sqrt{2}) < 3,5r$



Bất đẳng thức trên chứng tỏ quả cầu thứ năm đặt trên 4 quả cầu tâm O_1, O_2, O_3, O_4 lọt vào hẳn bên trong hình hộp.

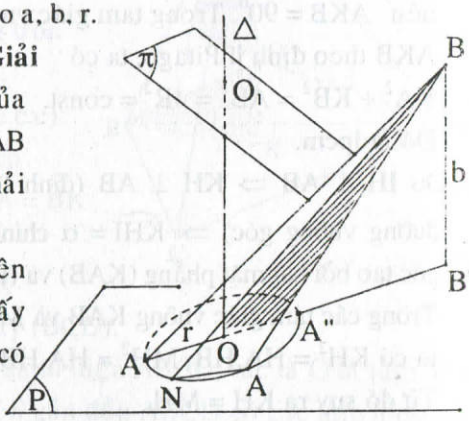
Vì trên đáy ABCD xếp được 9 quả cầu, người ta có 4 khả năng để xếp thêm 1 quả cầu đặt trên 4 quả cầu dưới (theo lập luận trên).

Như vậy, có thể xếp được 13 quả bóng bán kính r vào hình hộp trên.

Thí dụ 6: Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn tâm O, bán kính r và A là một điểm cố định trên đường tròn. Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với (P) tại O và B là một điểm không nằm trong (P) sao cho OB' = a > r, ở đây B' là hình chiếu của B trên (P). Giả sử khoảng cách từ B xuống (P) là b.

1. Biết N là một điểm di động trên đường tròn. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABN là nằm trên một mặt cầu cố định (S).
2. Tìm bán kính của mặt cầu (S) theo a, b, r.

Giải



1. Gọi (π) là mặt phẳng trung trực của AB. Do OB' > a nên A ≠ B' ⇒ AB không song song với Δ, nên (π) phải cắt Δ và giả sử: $\Delta \cap (\pi) = O_1$

⇒ O_1 cố định. Rõ ràng mọi điểm trên đường tròn (O, r) đều cách đều O_1. Lấy N là điểm tùy ý trên đường tròn. Ta có theo nhận xét trên

$$O_1N = O_1A = O_1B$$

Vậy N, A, B là ba điểm không thẳng hàng cùng nằm trên mặt cầu O_1, bán kính O_1B. Vì mọi mặt phẳng cắt hình cầu theo giao tuyến là đường tròn nên đường tròn ngoại tiếp tam giác ANB cũng nằm trên mặt cầu trên.

Vì hình cầu tâm O_1, bán kính O_1B là hình cầu cố định ⇒ đpcm.

2. Giả sử B'O cắt đường tròn (O, r) tại A', A (xem hình vẽ).

A'A"B là mặt phẳng qua tâm O_1 của hình cầu (S) nói ở câu 1, nên đường tròn ngoại tiếp tam giác BA'A" chính là đường tròn lớn của mặt cầu (S). Vậy bán kính R của hình cầu (S) chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BA'A". Áp dụng công thức:

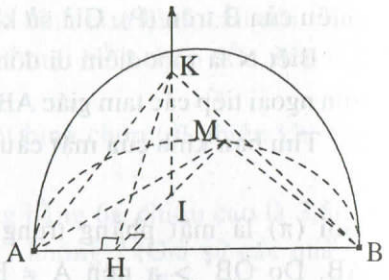
$$R = \frac{A'B.BA".A"A'}{4S} = \frac{\sqrt{b^2+(r+a)^2}.\sqrt{b^2+(a-r)^2}.2r}{4.\frac{1}{2}A'A".BB'}$$

$$= \frac{\sqrt{b^2+(r+a)^2}.\sqrt{b^2+(a-r)^2}}{2b}$$

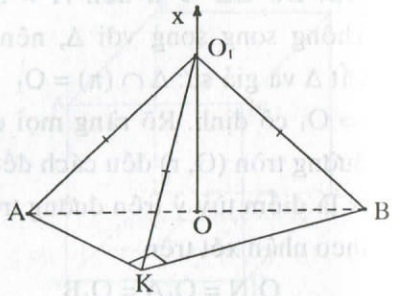
Thí dụ 7: Trong mặt phẳng (P) vẽ nửa đường tròn đường kínhAB = 2R. Trên AB lấy điểm H. Từ H kẻ đường vuông góc với AB cắt nửa đường tròn trên tại M. Gọi I là trung điểm của HM. Nửa đường thẳng vuông góc với (P) tại I cắt mặt cầu đường kính AB tại K.

1. Chứng minh đại lượng $KA^2 + KB^2$ không phụ thuộc vào vị trí của H.
2. Chứng minh rằng khi H di động thì mặt phẳng (KAB) luôn tạo với (P) một góc không đổi.
3. Chứng minh rằng khi H di động thì tâm S của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABKI nằm trên một đường thẳng cố định.

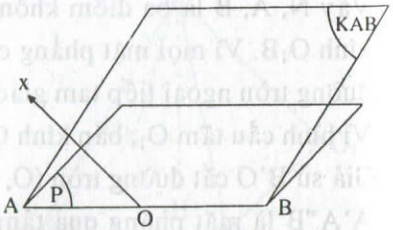
Giải



1. Do K nằm trên mặt cầu đường kính AB nên $\widehat{AKB} = 90^0$. Trong tam giác vuông AKB theo định lí Pitago, ta có
$KA^2 + KB^2 = AB^2 = 4R^2 = \text{const}$.
Đó làđpcm.



2. Do $IH \perp AB \Rightarrow KH \perp AB$ (định lí ba đường vuông góc) $\Rightarrow \widehat{KHI} = \alpha$ chính là góc tạo bởi hai mặt phẳng (KAB) và (P).
Trong các tam giác vuông KAB và MAB, ta có $KH^2 = HA.HB$; $MH^2 = HA.HB$
Từ đó suy ra KH = MH.
Do đó $\cos\widehat{KHI} = \cos\alpha = \dfrac{HI}{KH} = \dfrac{HM}{2KH} = \dfrac{1}{2}$
$\Rightarrow \alpha = 60^0 = \text{const} \Rightarrow$ đpcm.



3. Xét tứ diện ABKI. Tâm O_1 của hình cầu ngoại tiếp tứ diện này thỏa mãn điều kiện $O_1A = O_1B = O_1K = O_1I$
Nói riêng ta có $O_1A = O_1B = O_1K$
Vậy tâm O_1 nằm trên đường vuông góc với (AKB) tại tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AKB. Do $\widehat{AKB} = 90^0$ nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AKB chính là trung điểm O của AB. Chú ý rằng O là điểm cố định.
Mặt phẳng (KAB) cắt (P) theo giao tuyến AB cố định vì tạo với (P) một góc không đổi $= 60^0$ (theo câu 2)
$\Rightarrow$ (KAB) là mặt phẳng cố định
Đường thẳng Ox vuông góc với (KAB) cố định tại điểm O cố định, nên Ox cố định. Tâm O_1 hình cầu ngoại tiếp tứ diện ABKI nằm trên Ox.Đó là đpcm.

Thí dụ 8: Cho ABCD là tứ diện có các cặp cạnh đối đôi một bằng nhau (tức ABCD là tứ diện gần đều). Chứng minh rằng tâm hình cầu nội và ngoại tiếp của nó trùng nhau.

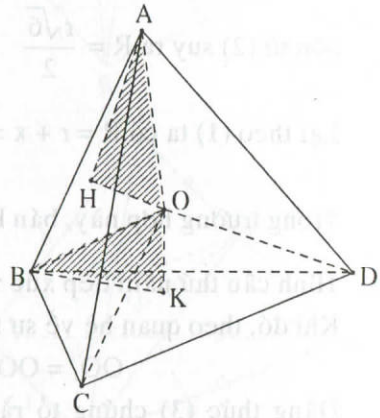
Giải

Xét tứ diện gần đều ABCD với AB = CD, AC = BD; AD = BC.

Rõ ràng tứ diện này tồn tại hình cầu ngoại tiếp (theo **thí dụ 2**).

Gọi O là tâm hình cầu ngoại tiếp của tứ diện này. Khi đó ta có:

OA = OB = OC = OD



Kẻ OH ⊥ (AOB) và OK ⊥ (BCD)

Do OA = OB = OC ⇒ HA = HB = HC

Do OB = OC = OD ⇒ KB = KC = KD

Vậy H, K tương ứng là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, BCD.

Từ giả thiết suy ra Δ ABC = Δ BCD (c.c.c) nên các bán kính đường tròn ngoại tiếp của hai tam giác này bằng nhau ⇒ HA = BK

Mặt khác, OA = OB nên hai tam giác OAH và OBK bằng nhau ⇒ OH = OK

Vậy O cách đều mặt bên (ABC) và đáy (BCD).

Tương tự, O cũng cách đều bốn mặt của tứ diện ABCD, tức là O là tâm hình cầu nội tiếp ABCD. Vì thế hình tứ diện gần đều ABCD có các tâm hình cầu nội và ngoại tiếp trùng nhau ⇒ đpcm.

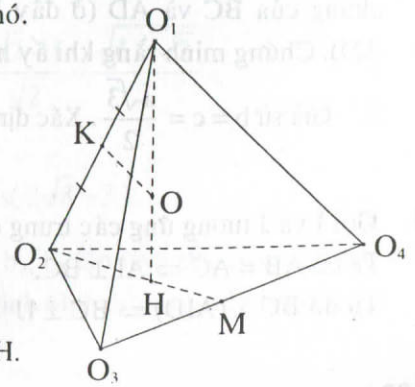
Thí dụ 9: Cho bốn hình cầu bán kính r từng đôi một tiếp xúc với nhau. Hình cầu thứ năm tiếp xúc với cả bốn hình cầu trên. Tìm bán kính hình cầu này.

Giải

Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 là tâm của 4 hình cầu bán kính r. Khi đó $O_1O_2O_3O_4$ là tứ diện đều cạnh bằng 2r. Gọi O là tâm của hình cầu thứ năm tiếp xúc với cả 4 hình cầu trên và giả sử x là bán kính của nó.

Xét hai trường hợp sau:

1. Hình cầu thứ năm tiếp xúc ngoài với 4 hình cầu trên. Khi đó ta có:



$OO_1 = OO_2 = OO_3 = OO_4 = r + x$ (1)

Đẳng thức (1) chứng tỏ O cũng là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện $O_1O_2O_3O_4$.

Kẻ OH ⊥ $(O_2O_3O_4)$. Theo thí dụ 2, O là giao điểm của trung trực O_1O_2 với O_1H.

Ta có: $R = O_1O = \dfrac{O_1K}{\cos\widehat{KO_1O}} = \dfrac{O_1O_2}{2\cos\widehat{O_2O_1H}} = \dfrac{O_1O_2}{2\dfrac{O_1H}{O_1O_2}}$

$= \dfrac{{O_1O_2}^2}{2O_1H} = \dfrac{4r^2}{2\sqrt{{O_1O_2}^2 - {O_2H}^2}}$ (2)

Do $O_2H = \dfrac{2}{3}O_2M$ (ở đây M là trung điểm của O_3O_4) $= \dfrac{2}{3}.\dfrac{2r\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$,

nên từ (2) suy ra $R = \dfrac{r\sqrt{6}}{2}$

Lại theo (1) ta có $R = r + x \Rightarrow x = \dfrac{r\sqrt{6}}{2} - r$

Trong trường hợp này, bán kính của hình cầu thỏa mãn là: $r_5 = r.(\dfrac{\sqrt{6}}{2} - 1)$.

2. Hình cầu thứ năm tiếp xúc và chứa 4 hình cầu bằng nhau ở trong.

Khi đó, theo quan hệ về sự tiếp xúc trong giữa hai hình cầu, ta có:

$$OO_1 = OO_2 = OO_3 = OO_4 = x - r \qquad (3)$$

Đẳng thức (3) chứng tỏ rằng O cũng là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện $O_1O_2O_3O_4$ và ta có: $x - r = R$

ở đây theo phần 1 thì $R = \dfrac{r\sqrt{6}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{r\sqrt{6}}{2} + r$

Vậy trong trường hợp này, bán kính hình cầu thứ năm là: $r_5 = r\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2} + 1\right)$.

Thí dụ 10: Cho tứ diện ABCD có BC = a, AB = AC = b, BD = DC = c. Gọi α là góc phẳng của nhị diện cạnh BC của tứ diện (tức là góc giữa hai mặt phẳng ABC và DBC).

1. Với điều kiện nào của b, c thì đường thẳng nối I, J là đường vuông góc chung của BC và AD (ở đây I và J tương ứng là các trung điểm của BC, AD). Chứng minh rằng khi ấy hình cầu đường kính CD qua I và J.

2. Giả sử $b = c = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Xác định α để hình cầu đường kính IJ tiếp xúc với CD.

Giải

1. Gọi I và J tương ứng các trung điểm của BC, AD.

Ta có AB = AC $\Rightarrow$ AI $\perp$ BC, DB = DC $\Rightarrow$ DI $\perp$ BC.

Từ đó BC $\perp$ (AID) $\Rightarrow$ BC $\perp$ IJ (1)

Từ (1) suy ra để IJ là đường vuông góc chung của BC và AD, ta cần có IJ ⊥ AB.

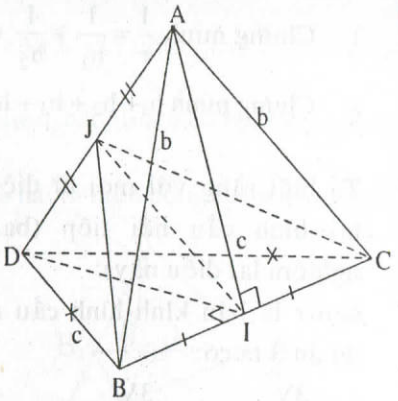
Do J là trung điểm của AD nên IJ ⊥ AB $\Leftrightarrow$ IA = ID $\Leftrightarrow$ $\Delta ABC = \Delta DBC \Leftrightarrow b = c$.

Vậy b = c là điều kiện cần tìm.

Do b = c nên trong tam giác cân CAD (đỉnh C), ta có CJ ⊥ AD.

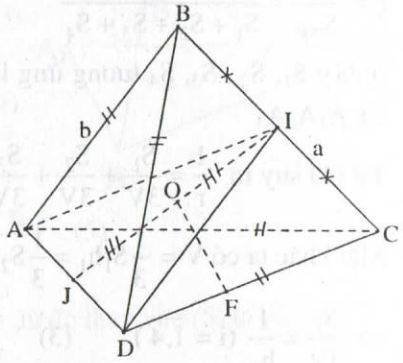
Kết hợp với DI ⊥ BC suy ra I và J nhìn CD dưới một góc vuông

$\Rightarrow$ hình cầu đường kính CD qua I và J.



2. Giả sử $b = c = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Dễ thấy $\widehat{AID}$ chính là góc phẳng nhị diện cạnh BC, từ đó $\widehat{AID} = \alpha$.

Gọi O là trung điểm của IJ. Hình cầu đường kính IJ tiếp xúc CD khi và chỉ khi khoảng cách từ trung điểm O của IJ xuống DC bằng $\dfrac{1}{2}$IJ.



Khi $b = c = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AI = DI = \sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{b^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Giả sử hình cầu đường kính IJ tiếp xúc với CD tại F (chú ý theo câu 1, thì IJ ⊥ BC $\Rightarrow$ CI = CF = $\dfrac{a}{2}$ (do CI và CF là hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ C đối với hình cầu đường kính IJ).

Từ đó $DF = CD - CF = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} - \dfrac{a}{2} \Rightarrow DJ = DF = \dfrac{a}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$.

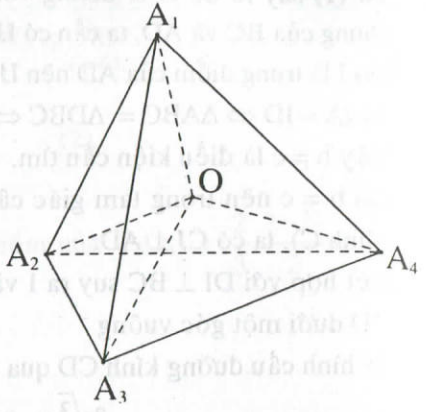
Ta có $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sin\widehat{JID} = \dfrac{JD}{ID} = \dfrac{\dfrac{a}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = 2\sqrt{3} - 3 \Rightarrow \alpha = \arccos(2\sqrt{3} - 3)$.

Thí dụ 11: Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Gọi h_1, h_2, h_3, h_4 lần lượt là bốn chiều cao của tứ diện kẻ từ A_1, A_2, A_3, A_4. Gọi r là bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện.

1. Chứng minh $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}$

2. Chứng minh $h_1+h_2+h_3+h_4 \geq 16r$.



Giải

1. Ta biết rằng với mọi tứ diện đều tồn tại hình cầu nội tiếp (bạn đọc tự nghiệm lại điều này).

Gọi r là bán kính hình cầu này. Theo thí dụ 3 ta có:

$$r=\frac{3V}{S_{TP}}=\frac{3V}{S_1+S_2+S_3+S_4} \qquad (1)$$

ở đây S_1, S_2, S_3, S_4 tương ứng là diện tích các mặt $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$ và $A_1A_2A_3$

Từ (1) suy ra $\frac{1}{r}=\frac{S_1}{3V}+\frac{S_2}{3V}+\frac{S_3}{3V}+\frac{S_4}{3V}$ (2)

Mặt khác ta có $V=\frac{1}{3}S_1h_1=\frac{1}{3}S_2h_2=\frac{1}{3}S_3h_3=\frac{1}{3}S_4h_4$

$\Rightarrow \frac{S_i}{3V}=\frac{1}{h_i}$ $(i=\overline{1,4})$ (3)

Thay (3) vào (2) suy ra $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4} \Rightarrow$ đpcm.

2. Áp dụng bất đẳng thức Cô–si, ta có

$$(h_1+h_2+h_3+h_4)\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}\right)\geq 16 \qquad (4)$$

Từ câu 1 và (4) suy ra $h_1+h_2+h_3+h_4 \geq 16\,r$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow h_1=h_2=h_3=h_4 \Leftrightarrow A_1A_2A_3A_4$ là tứ diện đều.

Thí dụ 12: Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Vẽ hình cầu nội tiếp tứ diện. Sau đó vẽ 4 tiếp diện với hình cầu nội tiếp này, sao cho mỗi tiếp diện tương ứng song song với các mặt $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$ và $A_1A_2A_3$. Gọi các tiếp diện này lần lượt là $B_2B_3B_4$, $B_1B_3B_4$, $B_1B_2B_4$, $B_1B_2B_3$. Xét 4 tứ diện nhỏ $A_1B_2B_3B_4$, $A_2B_1B_3B_4$, $A_3B_1B_2B_4$, $A_4B_1B_2B_3$. Gọi r_1, r_2, r_3, r_4 là bán kính của 4 hình cầu tương ứng nội tiếp bốn tứ diện nói trên.

1. Chứng minh rằng $r_1+r_2+r_3+r_4=2r$.

2. Chứng minh rằng $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\geq\frac{8}{r}$.

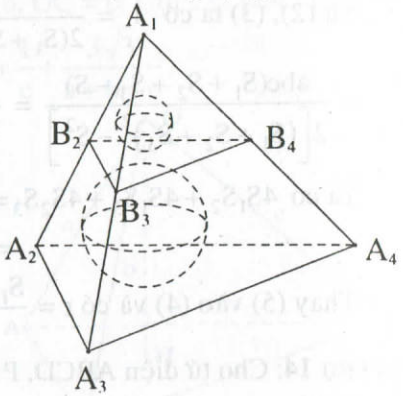
Giải

1. Gọi h_1 là chiều cao của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$, còn h'_1 là chiều cao của tứ diện $A_1B_2B_3B_4$.

Vì $(B_2B_3B_4) // (A_2A_3A_4)$ và $B_2B_3B_4$ là tiếp diện với hình cầu nội tiếp của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ nên ta có: $h'_1 = h_1 - 2r$.

Dễ thấy, hai tứ diện $A_1B_2B_3B_4$ và $A_1A_2A_3A_4$ là hai tứ diện đồng dạng nên ta có:

$$\frac{h'_1}{h_1} = \frac{r_1}{r} \Rightarrow \frac{h_1 - 2r}{h_1} = \frac{r_1}{r} \Rightarrow 1 - 2\frac{r}{h_1} = \frac{r_1}{r} \quad (1)$$



Lập luận tương tự, ta có $1 - 2\frac{r}{h_2} = \frac{r_2}{r}$ (2)

$$1 - 2\frac{r}{h_3} = \frac{r_3}{r} \quad (3)$$

$$1 - 2\frac{r}{h_4} = \frac{r_4}{r} \quad (4)$$

Cộng từng vế (1), (2), (3), (4) và có

$$4 - 2r\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}\right) = \frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}{r} \quad (5)$$

Theo thí dụ 11, ta có $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}$ từ đó thay vào (5) ta có:

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 2r \Rightarrow \text{đpcm.}$$

2. Áp dụng bất đẳng thức Cô–si, ta có:

$$(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}\right) \geq 16 \quad (6)$$

Từ phần 1 và (6) suy ra $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \geq \frac{8}{r} \Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow r_1 = r_2 = r_3 = r_4 \Leftrightarrow A_1A_2A_3A_4$ là tứ diện đều.

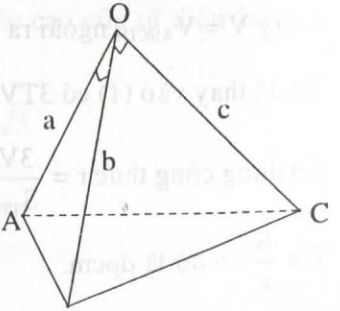
Thí dụ 13: Cho tứ diện vuông OABC đỉnh O, tức OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Giả sử OA = a, OB = b, OC = c. Đặt $S_1 = S_{OAB}$, $S_2 = S_{OBC}$, $S_3 = S_{OAC}$, $S = S_{ABC}$. Gọi r là bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện OABC. Chứng minh rằng: $r = \frac{S_1 + S_2 + S_3 - S}{a + b + c}$

Giải

Vì $OA \perp OB$, $OA \perp OC \Rightarrow OA \perp (OBC)$ nên

$$V = V_{O.ABC} = V_{A.OBC} = \frac{1}{3}S_{OBC}.OA = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}bc\right)a$$

$$= \frac{abc}{6} \quad (1)$$



Áp dụng công thức trong thí dụ 3, ta có

$$r = \frac{3V}{S_{TP}} = \frac{3V}{S_1 + S_2 + S_3 + S} = \frac{abc}{2(S_1 + S_2 + S_3 + S)} \quad (2)$$

Áp dụng định lí Pi–ta–go mở rộng trong không gian, ta có:

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^2 \quad (3)$$

Từ (2), (3) ta có $r = \frac{abc(S_1 + S_2 + S_3 - S)}{2(S_1 + S_2 + S_3 + S)(S_1 + S_2 + S_3 - S)}$

$$= \frac{abc(S_1 + S_2 + S_3 - S)}{2\left[(S_1 + S_2 + S_3)^2 - S^2\right]} = \frac{abc(S_1 + S_2 + S_3 - S)}{2(2S_1S_2 + 2S_1S_3 + 2S_2S_3)} \quad (4)$$

Ta có $4S_1S_2 + 4S_1S_3 + 4S_2S_3 = (ab.bc) + (ab.ca) + (bc.ca)$

$$= abc\,(a + b + c) \quad (5)$$

Thay (5) vào (4) và có $r = \frac{S_1 + S_2 + S_3 - S}{a + b + c} \Rightarrow$ đpcm.

Thí dụ 14: Cho tứ diện ABCD, P là điểm tùy ý bên trong tứ diện. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là hình chiếu của P trên các mặt BCD, ACD, ABD, ABC. Gọi S và r tương ứng là diện tích toàn phần và bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện.

Chứng minh rằng: $T = \frac{S_{BCD}}{PA_1} + \frac{S_{ACD}}{PB_1} + \frac{S_{ABD}}{PC_1} + \frac{S_{ABC}}{PD_1} \geq \frac{S}{r}$

Giải

Đặt $a_1 = \sqrt{\frac{S_{BCD}}{PA_1}}$; $a_2 = \sqrt{\frac{S_{ACD}}{PB_1}}$; $a_3 = \sqrt{\frac{S_{ABD}}{PC_1}}$; $a_4 = \sqrt{\frac{S_{ABC}}{PD_1}}$

$b_1 = \sqrt{S_{BCD}.PA_1}$; $b_2 = \sqrt{S_{ACD}.PB_1}$; $b_3 = \sqrt{S_{ABD}.PC_1}$; $b_4 = \sqrt{S_{ABC}.PD_1}$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có

$$\left(\frac{S_{BCD}}{PA_1} + \frac{S_{ACD}}{PB_1} + \frac{S_{ABD}}{PC_1} + \frac{S_{ABC}}{PD_1}\right)(S_{BCD}.PA_1 + S_{ACD}.PB_1 + S_{ABD}.PC_1 + S_{ABC}.PD_1)$$

$$\geq (S_{BCD} + S_{ACD} + S_{ABD} + S_{ABC})^2 \quad (1)$$

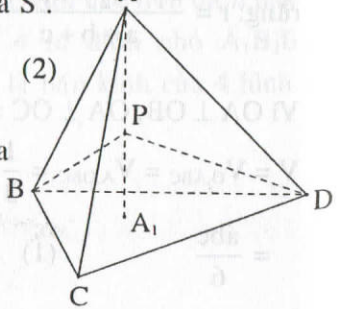
Để ý rằng $S_{BCD}.PA_1 + S_{ACD}.PB_1 + S_{ABD}.PC_1 + S_{ABC}.PD_1 = 3V$

ở đây $V = V_{ABCD}$, ngoài ra vế phải của (1) chính là S^2.

Từ đó thay vào (1) có $3TV \geq S^2 \Rightarrow T \geq \frac{S^2}{3V}$ (2)

Áp dụng công thức $r = \frac{3V}{S_{TP}} = \frac{3V}{S}$ nên từ (2) suy ra

$T \geq \frac{S}{r} \Rightarrow$ đó là đpcm.



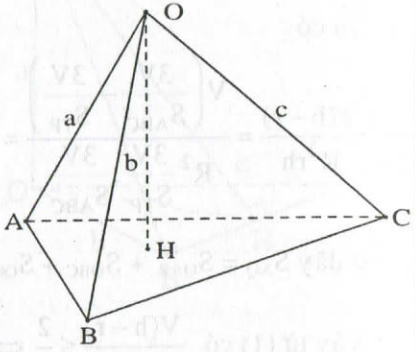
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_4}{b_4}$

$\Leftrightarrow PA_1 = PA_2 = PA_3 = PA_4 \Leftrightarrow P \equiv I$

ở đây I là tâm hình cầu nội tiếp tứ diện ABCD.

Thí dụ 15: Cho OABC là tứ diện vuông đỉnh O (tức là OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau). Giả sử OA = a, OB = b, OC = c. Gọi r là bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện. Chứng minh $\frac{1}{r} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{3\sqrt{3}}{a+b+c}$

Giải



Kẻ OH ⊥ (ABC) và đặt OH = h.

Theo kết quả cơ bản (xem Chương 2) ta có

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \qquad (1)$$

Tứ diện OABC có 4 chiều cao kẻ lần lượt từ O, A, B, C là h, a, b, c. Theo **thí dụ 11**, ta có $\frac{1}{r}=\frac{1}{h}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Từ đó suy ra $\frac{1}{r} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{3\sqrt{3}}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{1}{h} \geq \frac{3\sqrt{3}}{a+b+c}$ (2)

Từ (1) và theo bất đẳng thức Cô–si, ta có

$$\frac{1}{h^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}} \qquad (3)$$

Vẫn theo bất đẳng thức Cô–si, ta có: $(a+b+c)^2 \geq 9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ (4)

Từ (3), (4) suy ra (2) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$ OABC là tứ diện vuông cân đỉnh O (tức là OA = OB = OC và OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau).

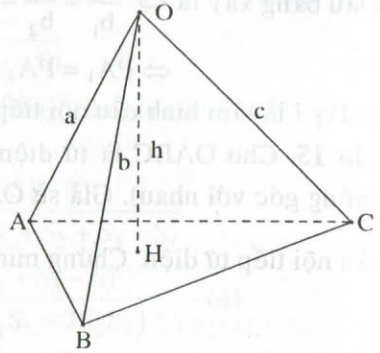
Thí dụ 16: Cho tứ diện vuông OABC đỉnh O (tức là OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau). Gọi R, r, h, V tương ứng là bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện, bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện, chiều cao của tứ diện kẻ từ O và thể tích của tứ diện. Chứng minh rằng:

1. $\frac{V(h-r)}{R^2rh} \leq \frac{2}{3}$
2. $\frac{h}{r} \geq 1+\sqrt{3}$
3. $\frac{R}{r} \geq \frac{3+3\sqrt{3}}{2}$

Giải

1. Đặt OA = a, OB = b, OC = c

Kẻ OH ⊥ (ABC), thì OH = h



Theo **Thí dụ 3**, ta có $r = \frac{3V}{S_{TP}}$; $h = \frac{3V}{S_{ABC}}$,

ở đây S_{TP} và S_{ABC} lần lượt là diện tích toàn phần của tứ diện và diện tích tam giác ABC.

Ta có

$$\frac{V(h-r)}{R^2rh} = \frac{V\left(\frac{3V}{S_{ABC}} - \frac{3V}{S_{TP}}\right)}{R^2\frac{3V}{S_{TP}}\cdot\frac{3V}{S_{ABC}}} = \frac{V(S_{TP}3V - 3VS_{ABC})}{R^2 9V^2} = \frac{S_{TP} - S_{ABC}}{3R^2} = \frac{S_{XQ}}{3R^2} \quad (1)$$

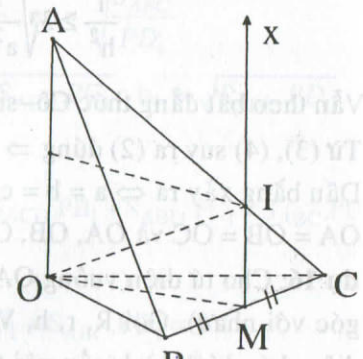
ở đây $S_{XQ} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA} = \frac{ab + bc + ca}{2}$

Vậy từ (1) có $\frac{V(h-r)}{R^2rh} \le \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{ab + bc + ca}{6R^2} \le \frac{2}{3} \Leftrightarrow ab + bc + ca \le 4R^2$ (2)

Theo **thí dụ 2** tâm I hình cầu ngoại tiếp tứ diện OABC là giao điểm của đường thẳng Mx và đường trung trực của OA (vẽ trong (AOM)), ở đây M là trung điểm của BC và Mx vuông góc với (OBC) tại M. Khi đó dễ thấy:

$$R = OI = \sqrt{OM^2 + IM^2} = \sqrt{\frac{BC^2}{4} + \frac{OA^2}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + a^2}$$



Từ đó (2) $\Leftrightarrow ab + bc + ca \le a^2 + b^2 + c^2$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \ge 0$ (3)

Vì (3) đúng suy ra đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

$\Leftrightarrow$ OABC là tứ diện vuông cân đỉnh O.

2. Theo **thí dụ 15**, ta có: $\frac{1}{r} = \frac{1}{h} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ (4)

Áp dụng bất đẳng thức Bunhia copski, thì: $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \le 3\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$ (5)

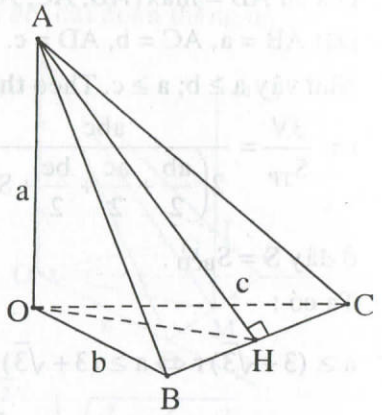
Mặt khác vẫn theo **thí dụ 15**, ta có: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$ (6)

Từ (5), (6) suy ra: $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \le \frac{3}{h^2} \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le \frac{\sqrt{3}}{h}$ (7)

Từ (4), (7) ta lại có $\frac{1}{r}-\frac{1}{h} \le \frac{\sqrt{3}}{h} \Rightarrow \frac{1}{r} \le \frac{1}{h}\left(\sqrt{3}+1\right)$ hay $\frac{h}{r} \le 1+\sqrt{3} \Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$ OABC là tứ diện vuông cân đỉnh O.

3. Theo phần 1, ta có $R = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+a^2}$



Theo thí dụ 3 lại có

$$r = \frac{3V}{S_{TP}} = \frac{3\frac{abc}{6}}{\frac{ab}{2}+\frac{bc}{2}+\frac{ca}{2}+S_{ABC}}. \quad (8)$$

Kẻ $OH \perp BC \Rightarrow AH \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc). Ta có

$BC = \sqrt{b^2+c^2}$, $AH^2 = OA^2 + OH^2$

Vả lại $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \Rightarrow OH^2 = \frac{b^2c^2}{b^2+c^2}$

$$\Rightarrow AH^2 = a^2 + \frac{b^2c^2}{b^2+c^2} = \frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{b^2+c^2}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2}\,\frac{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}. \quad (9)$$

Thay (9) vào (8) và có $r = \frac{abc}{ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}$

từ đó suy ra: $\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,(ab+bc+ca+\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2})}{2abc}$. (10)

Áp dụng liên tiếp bất đẳng thức Cô–si, ta có

$\sqrt{a^2+b^2+c^2} \ge \sqrt{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} = \sqrt{3}\sqrt[3]{abc}$,

$ab+bc+ca \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$,

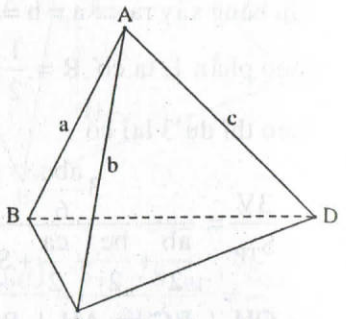
$\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2} \ge \sqrt{3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}} = \sqrt{3}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$.

Từ đó theo (10) suy ra: $\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{abc}\left(\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\left(3+\sqrt{3}\right)\right)}{2abc} = \frac{3+3\sqrt{3}}{2}$ đó là đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Thí dụ 17: Cho tứ diện ABCD đỉnh A (tức là AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau). Gọi a là cạnh lớn nhất của tứ diện xuất phát từ A và r là bán kính hình cầu nội tiếp. Chứng minh: $a \geq (3+\sqrt{3})\,r$

Giải



Giả sử AB = max{AB, AC, AD}.

Đặt AB = a, AC = b, AD = c.

Như vậy $a \geq b$; $a \geq c$. Theo **thí dụ 3**, ta có

$$r = \frac{3V}{S_{TP}} = \frac{abc}{2\left(\frac{ab}{2}+\frac{ac}{2}+\frac{bc}{2}+S\right)}$$

ở đây $S = S_{BCD}$.

Ta có :

$$a \geq (3+\sqrt{3})\,r \Leftrightarrow a \geq (3+\sqrt{3})\,\frac{abc}{ab+ac+bc+2S}$$

$$\Leftrightarrow ab+ac+bc+2S \geq (3+\sqrt{3})\,bc \Leftrightarrow ab+ac+2S \geq 2bc+\sqrt{3}bc \qquad (1)$$

Vì $a = \max\{a; b; c\}$ ta có

$$ab + ac \geq 2bc \qquad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Theo định lí Pitago, thì $BC = \sqrt{a^2+b^2}$; $CD = \sqrt{b^2+c^2}$; $BD = \sqrt{a^2+c^2}$

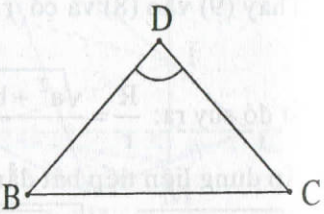
Từ đó suy ra các góc của tam giác BCD đều nhọn vì bình phương mỗi cạnh đều bé hơn tổng bình phương hai cạnh còn lại. Có thể cho BC là cạnh lớn nhất của tam giác BCD $\Rightarrow \widehat{BDC}$ là góc lớn nhất $\Rightarrow 60^0 \leq \widehat{BDC} < 90^0$ (3)

Ta có $2S = BD.CD \sin\widehat{BDC}$

$= \sqrt{a^2+c^2}\,.\sqrt{b^2+c^2}\,.\sin\widehat{BDC}$

$\geq \sqrt{2ac}.\sqrt{2bc}\sin 60^0 = \sqrt{3}\,bc.$ (4)

(do bất đẳng thức Côsi và (3))



Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

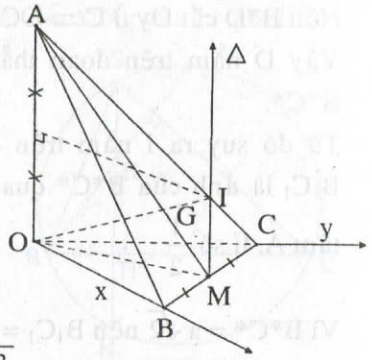
Từ (2), (4) suy ra (1) đúng $\Rightarrow$ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$ ABCD là tứ diện vuông cân đỉnh A.

Thí dụ 18: Trong mặt phẳng (P) cho góc vuông xOy. B và C lần lượt di động trên Ox, Oy sao cho OB + OC = a, ở đây a là số dương cho trước. Đặt OB = x, OC = y. Đoạn OA = a vuông góc với (P).

1. Xác định tâm I hình cầu ngoại tiếp tứ diện OABC và tính bán kính R của hình cầu này theo a, x, y.
2. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh O, G, I thẳng hàng.
3. Chứng minh V_{OABC} lớn nhất $\Leftrightarrow$ bán kính R của hình cầu nói trên nhỏ nhất.
4. Chứng minh rằng khi B, C chạy lần lượt trên Ox, Oy sao cho OB + OC = a thì tâm I chạy trên một đoạn thẳng. Tìm độ dài đoạn thẳng này.

Giải



1. Gọi M là trung điểm của BC $\Rightarrow$ M là tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác OBC. Qua M vẽ $\Delta \perp (P)$. Đường trung trực của OA (xét trong (AOM) cắt Δ tại I. Khi đó I chính là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện OABC.

Ta có $R = OI = \sqrt{IM^2 + OM^2} = \sqrt{\frac{OA^2}{4} + \frac{BC^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}$

2. Giả sử $OI \cap AM = G$. Theo cách dựng tâm I ở phần 1 và theo định lí Talet, ta có: $\frac{MG}{GA} = \frac{MI}{OA} = \frac{1}{2}$ (1)

Mặt khác G nằm trên trung tuyến AM của tam giác ABC nên kết hợp với (1) suy ra G là trọng tâm tam giác ABC. Nói cách khác O, G, I thẳng hàng.

3. Ta có $V_{OABC} = \frac{1}{6}axy$. Từ đó V_{OABC} max $\Leftrightarrow$ xy max

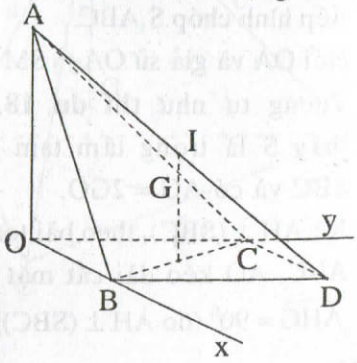
Vì $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (x+y)^2 - 2xy} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 - 2xy}$

Từ đó suy ra R min $\Leftrightarrow$ xy max.

Vậy V_{OABC} max $\Leftrightarrow$ R min $\Rightarrow$ đpcm.

4. Ta có thể thấy tâm I của hình cầu ngoại tiếp tứ diện OABC có thể dựng như sau:
   - Vẽ hình chữ nhật BOCD
   - Gọi I là trung điểm của AD thì

I là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện OABC.



Xét phép vị tự tâm A, tỉ số $k = \frac{1}{2}$

Trong phép vị tự này $D \to I$.

Xét bài toán hình học phẳng sau:

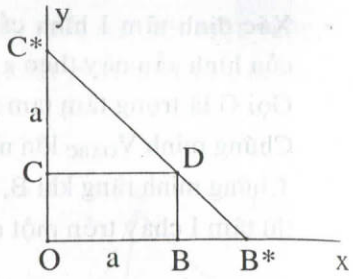
Cho góc vuông xOy. Trên Ox lấy B, Oy lấy C sao cho OB + OC = a.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật BOCD.

Đặt trên Ox điểm B* sao cho OB* = a

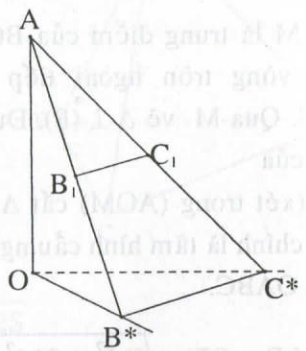
Nếu B*D cắt Oy ở C ⇒ OC* = a

Vậy D nằm trên đoạn thẳng cố định B*C*.



Từ đó suy ra I nằm trên đoạn thẳng B_1C_1 là ảnh của B*C* qua phép vị tự tâm A, tỉ số $\frac{1}{2}$

Vì $B^*C^* = a\sqrt{2}$ nên $B_1C_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

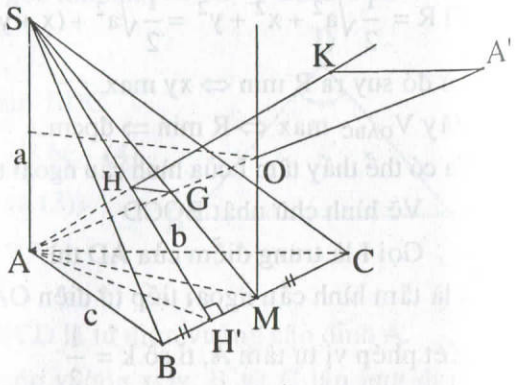


Thí dụ 19: Cho hình chóp S.ABCD trong đó đáy ABC là tam giác vuông tại A, SA vuông góc với đáy ABC. Gọi O là tâm hình cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

1. Kẻ AH ⊥ (SBC). Kéo dài AH gặp mặt cầu ngoại tiếp nói trên tại K. Chứng minh HK = 2AH.
2. Gọi O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC và r là bán kính đường tròn này. Chứng minh: $r^2 = HO_1^2 + 2AH^2$

Giải

1. Gọi M là trung điểm của BC. Kẻ Mx // SA. Trong mặt phẳng xác định bởi (SA, Mx), vẽ trung trực của SA cắt Mx tại O. Khi đó, O là tâm hình cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.



Nối OA và giả sử OA ∩ SM = S

Tương tự như **thí dụ 18**, dễ thấy S là trọng tâm tam giác SBC và có AG = 2GO.

Kẻ AH ⊥ (SBC), theo bài toán cơ bản ở Chương 2, thì H là trực tâm tam giác ABC. AO kéo dài cắt mặt cầu tại A', còn AH cắt mặt cầu tại K. Ta có $\widehat{AHG} = 90^0$ (do AH ⊥ (SBC)).

Lại có $\widehat{AKA'} = 90^0$ vì K nằm trên mặt cầu, còn AA' là đường kính. Từ đó có HG // A'K.

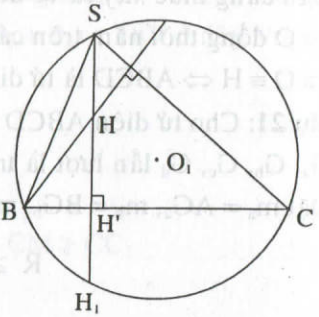
Theo định lí Talet có: $\frac{AH}{HK} = \frac{AG}{GA'}$ (1)

Vì AG = 2GO nên AO = OA' $\Rightarrow$ GA' = 2GA

Vì thế từ (1) có HK = 2AH $\Rightarrow$ đpcm

2. Gọi H là trực tâm tam giác SBC và H_1 là điểm đối xứng của H qua BC.

Giả sử SH $\cap$ BC = H'



Ta có $HH_1 = 2HH'$. Theo hình học lớp 10 thì

$\mathcal{P}_H(O_1) = HO_1^2 - r^2$

Mặt khác: $\mathcal{P}_H(O_1) = -HS.HH_1 = -2HS.HH'$

Từ đó suy ra: $HO_1^2 - r^2 = -2HS.HH'$

$\Rightarrow r^2 - HO_1^2 = 2HS.HH'$ (*)

Trong tam giác vuông SAH tại A, ta có

$HS.HH' = AH^2$. (**)

Từ (*) và (**) suy ra $r^2 = HO_1^2 + 2AH^2 \Rightarrow$ đpcm.

Thí dụ 20: Cho tứ diện ABCD với AB = a, AC = b, AD = c, BC = x, BD = y, CD = z, nội tiếp trong hình cầu bán kính R. Gọi G là trọng tâm tứ diện. Chứng minh:

$$GA + GB + GC + GD \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2}{4R}$$

Giải

Do G là trọng tâm tứ diện nên ta có

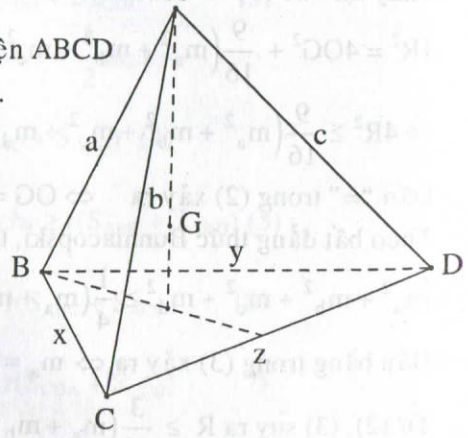
$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (1)

Theo tính chất của trọng tâm tứ diện, ta có $4(GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2)$

$= a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2$ (2)

Gọi O là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD

Khi đó ta có OA = OB = OC = OD = R.



Ta có $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{OA} \leq \left|\overrightarrow{GA}\right|.\left|\overrightarrow{OA}\right| = GA.R$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA}\left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}\right) \leq GA.R$ (3)

Lập luận tương tự có

$\overrightarrow{GB}\left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB}\right) \leq GB.R$ (4)

$\overrightarrow{GC}\left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}\right) \leq GC.R$ (5)

$\overrightarrow{GD}\left(\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GD}\right) \leq GD.R$ (6)

Cộng từng vế (3), (4), (5), (6) ta có

$\overrightarrow{OG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)+GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$

$\le R\,(GA+GB+GC+GD)$ (7)

Từ (1),(2), (7) suy ra

$GA+GB+GC+GD \ge \dfrac{a^2+b^2+c^2+x^2+y^2+z^2}{4R} \Rightarrow$ đpcm.

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (3), (4), (5), (6)

$\Leftrightarrow$ O đồng thời nằm trên các đường thẳng GA, GB, GC, GD

$\Leftrightarrow O \equiv H \Leftrightarrow$ ABCD là tứ diện đều!

Thí dụ 21: Cho tứ diện ABCD có R là bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện. Gọi G_a, G_b, G_c, G_d lần lượt là trọng tâm của các mặt BCD, ACD, ABD và ABC. Đặt $m_a = AG_a$, $m_b = BG_b$, $m_c = CG_c$, $m_d = DG_d$. Chứng minh rằng:

$$R \ge \frac{3}{16}\left(m_a+m_b+m_c+m_d\right)$$

Giải

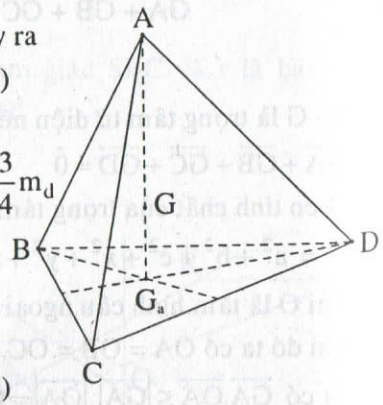
Gọi O là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện. Ta có $4R^2 = OA^2+OB^2+OC^2+OD^2$

$=\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC}\right)^2+\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GD}\right)^2$

với G là trọng tâm tứ diện

Ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ nên từ trên suy ra

$4R^2 = 4OG^2+GA^2+GB^2+GC^2+GD^2$ (1)



Theo tính chất của trọng tâm tứ diện, ta có

$GA = \dfrac{3}{4}m_a$; $GB = \dfrac{3}{4}m_b$; $GC = \dfrac{3}{4}m_c$; $GD = \dfrac{3}{4}m_d$

Thay lại vào (1) và đi đến

$4R^2 = 4OG^2 + \dfrac{9}{16}\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2+m_d^2\right)$

$\Rightarrow 4R^2 \ge \dfrac{9}{16}\left(m_a^2+m_b^2+m_c^2+m_d^2\right)$ (2)

Dấu "=" trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow OG = 0 \Leftrightarrow O \equiv G$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có

$m_a^2+m_b^2+m_c^2+m_d^2 \ge \dfrac{1}{4}\left(m_a+m_b+m_c+m_d\right)^2$ (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra $\Leftrightarrow m_a = m_b = m_c = m_d$

Từ (2), (3) suy ra $R \ge \dfrac{3}{16}\left(m_a+m_b+m_c+m_d\right)$ (4)

Đó là đpcm.

Dấu bằng trong (4) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2) (3)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} O \equiv G \\ m_a = m_b = m_c = m_d \end{cases} \Leftrightarrow \text{ABCD là tứ diện đều.}$$

Thí dụ 22: Cho tứ diện ABCD có $AB = a_1$, $AC = a_2$, $AD = a_3$, $CD = b_1$, $DB = b_2$, $BC = b_3$. Gọi I là tâm hình cầu nội tiếp tứ diện. Giả sử các khoảng cách từ tâm I đến các cạnh có độ dài a_i, b_i là h_i và d_i tương ứng ($i = 1; 2; 3$). Chứng minh rằng: $a_1b_1(h_1 + d_1) + a_2b_2(h_2 + d_2) + a_3b_3(h_3 + d_3) \geq 18V$ ở đây V là thể tích tứ diện.

Giải

Giả sử $AI \cap (BCD) = I'$; $BC \cap (AI'D) = M$

Hạ $BB_1 \perp (AMD)$; $CC_1 \perp (BMD)$

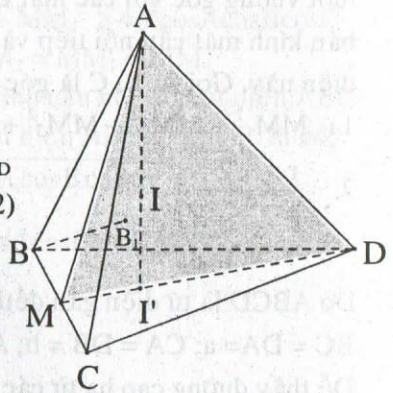
Vì $M \in (AMD)$ nên hiển nhiên ta có $BM \geq BB_1$; $CM \geq CC_1$

$\Rightarrow BM + CM \geq BB_1 + CC_1$

$\Rightarrow b_3 \geq BB_1 + CC_1$ (1)

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow B_1 \equiv M \equiv C_1$

$\Leftrightarrow BC \perp AD$ và đường vuông góc chung của BC và AD qua I.



Từ (1) suy ra $b_3.S_{AID} \geq (BB_1 + CC_1).S_{AID}$

$\Rightarrow$ $b_3.S_{AID} \geq 3(V_{B.AID} + V_{C.AID})$ (2)

Vì $V_{B.AID} = V_{I.ABD} = \frac{1}{3} r.S_{ABD}$

$V_{C.AID} = V_{I.ACD} = \frac{1}{3} r.S_{ACD}$

Thay lại vào (2) ta có: $b_3.S_{AID} \geq r(S_{ABD} + S_{ACD})$ (3)

Từ giả thiết ta lại có: $S_{AID} = \frac{1}{2} AD.d(I, AD) = \frac{1}{2}.a_3.h_3$

Thay lại vào (3) ta có: $\frac{1}{2}.a_3.h_3.b_3 \geq r(S_{ABC} + S_{ACD})$ (4)

Lập luận hoàn toàn tương tự có: $\frac{1}{2}.a_1.h_1.b_1 \geq r(S_{ABC} + S_{ABD})$ (5)

$$\frac{1}{2}.a_2.h_2.b_2 \geq r(S_{ABC} + S_{ACD}) \quad (6)$$

$$\frac{1}{2}.a_1.b_1.d_1 \geq r(S_{CDA} + S_{CDB}) \quad (7)$$

$$\frac{1}{2}.a_2.b_2.d_2 \geq r(S_{BDA} + S_{BDC}) \qquad (8)$$

$$\frac{1}{2}.a_3.b_3.d_3 \geq r(S_{BCA} + S_{BCD}) \qquad (9)$$

Cộng từng vế (4)–(9), đi đến

$a_1b_1(h_1 + d_1) + a_2b_2(h_2 + d_2) + a_3b_3(h_3 + d_3) \geq 6r(S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CDA} + S_{DAB})$. (10)

Để ý rằng $V = V_{I.ABC} + V_{I.BCD} + V_{I.CDA} + V_{I.DAB}$

$$= \frac{1}{3}r(S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CDA} + S_{DAB}). \qquad (11)$$

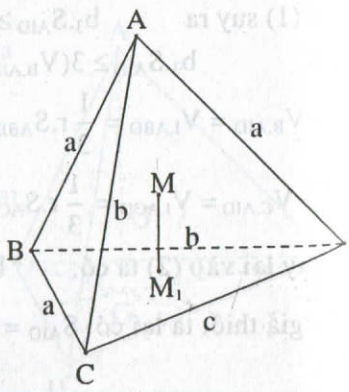
Từ (10), (11) đi đến $a_1b_1(h_1 + d_1) + a_2b_2(h_2 + d_2) + a_3b_3(h_3 + d_3) \geq 18V$. (12)

Đó là đpcm!

Dấu bằng trong (12) xảy ra (bằng lí luận tương tự như dấu bằng trong (1) xảy ra) $\Leftrightarrow$ ABCD là tứ diện đều.

Thí dụ 23. Cho ABCD là tứ diện gần đều (tức là có các cạnh đối diện bằng nhau) và M là một điểm tùy ý trong tứ diện. Hạ MM_1, MM_2, MM_3, MM_4 lần lượt vuông góc với các mặt BCD, CDA, DAB, ABC. Gọi r và ρ tương ứng là bán kính mặt cầu nội tiếp và bán kính đường tròn ngoại tiếp một mặt của tứ diện này. Gọi A, B, C là góc của tam giác ABC. Chứng minh :

1. $MM_1^2 + MM_2^2 + MM_3^2 + MM_4^2 > 4\rho^2 \cos A \cos B \cos C$
2. $\frac{r}{\rho} \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$



Giải

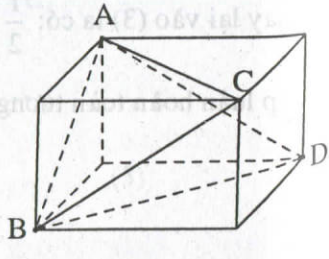
1. Do ABCD là tứ diện gần đều nên ta có

BC = DA = a; CA = DB = b; AB = CD = c

Dễ thấy đường cao hạ từ các đỉnh của tứ diện gần đều là bằng nhau và giả sử = h.

Thật vậy do $S_{BCD} = S_{CDA} = S_{DAB} = S_{ABC} = S$,

nên $h_a = h_b = h_c = h_d = \frac{3V}{S}$ ở đây h_a, h_b, h_c, h_d tương ứng là các chiều cao của tứ diện kẻ từ A, B, C, D. Ta có



$V = V_{ABCD} = V_{M.BCD} + V_{M.CDA} + V_{M.DAB} + V_{M.ABC}$

$$= \frac{1}{3}S(MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4),$$

Mặt khác $V = \frac{1}{3}Sh \Rightarrow MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 = h$

Dựng hình hộp chữ nhật ngoại tiếp hình hộp này, ta có

$$V = \frac{1}{12}\sqrt{2\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)} \qquad (1)$$

Áp dụng định lí hàm số Cosin trong tam giác ABC ta có

$b^2+c^2-a^2 = 2bc\cos A;\ a^2+c^2-b^2 = 2ac\cos B;\ a^2+b^2-c^2 = 2ab\cos C$

Từ đó theo (1) ta có $V = \frac{1}{3}abc\sqrt{\cos A\cos B\cos C}$ (2)

Ta có $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{abc}{4\rho}$

Ta có $MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 = h = \frac{3V}{S} = \frac{abc\sqrt{\cos A\cos B\cos C}}{\frac{abc}{4\rho}}$

$= 4\rho\sqrt{\cos A\cos B\cos C}$ (3)

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski thì

$(MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4)^2 \le 4(MM_1^2 + MM_2^2 + MM_3^2 + MM_4^2)$ (4)

Từ (3) (4) suy ra $MM_1^2 + MM_2^2 + MM_3^2 + MM_4^2 \ge 4\rho^2\cos A\cos B\cos C$

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow MM_1 = MM_2 = MM_3 = MM_4$

$\Leftrightarrow$ M là tâm hình cầu nội tiếp tứ diện ABCD

2. Lấy $M \equiv I$, ở đây I là tâm hình cầu nội tiếp tứ diện ABCD. Khi đó ta có:

$h = 4r = 4\rho\sqrt{\cos A\cos B\cos C} \Rightarrow r = \rho\sqrt{\cos A\cos B\cos C}$

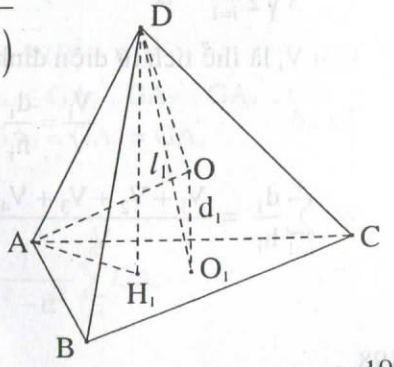
Ta biết rằng trong mọi tam giác ABC thì: $\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$

(dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều).

Từ đó ta có: $r \le \frac{\rho}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{r}{\rho} \le \frac{\sqrt{2}}{4}$

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow$ ABCD là tứ diện đều

Thí dụ 24: Cho tứ diện ABCD. Gọi S_i, R_i, l_i (i = 1,2,3,4) lần lượt là diện tích của mặt thứ i, bán kính của đường tròn ngoại tiếp mặt này và khoảng cách từ tâm đường tròn này đến đỉnh đối diện của tứ diện. Gọi V là thể tích của tứ diện. Chứng minh: $V = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} S_i^2\left(l_i^2 - R_i^2\right)}$



Giải

Coi ABC là mặt lớn nhất của tứ diện.

Gọi O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, O là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện, thì rõ ràng $OO_1 \perp (ABC)$

Khi đó ta có $DO_1 = l_1$; $AO_1 = R_1$; $OA = R$ (ở đây R là bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD).

Đặt $OO_1 = d_1$, gọi h_1 là chiều cao kẻ từ D của tứ diện (tức là nếu kẻ $DH_1 \perp (ABC)$, $H_1 \in (ABC) \Rightarrow DH_1 = h_1$)

d_2, d_3, d_4; h_2, h_3, h_4 được kí hiệu tương tự.

Rõ ràng ta có $S_1h_1 = S_2h_2 = S_3h_3 = S_4h_4 = 3V$. (1)

Ta có

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} S_i^2\left(\ell_i^2 - R_i^2\right)} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} S_i^2 h_i^2 \frac{\ell_i^2 - R_i^2}{h_i^2}} \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) và có

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} S_i^2\left(\ell_i^2 - R_i^2\right)} = V\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} \frac{\ell_i^2 - R_i^2}{h_i^2}} \quad (3)$$

Rõ ràng trong tam giác vuông OAO_1 ta có

$OA^2 = OO_1^2 + O_1A^2 \Rightarrow R^2 = R_1^2 + d_1^2 \Rightarrow R_1^2 = R^2 - d_1^2$

$\Rightarrow l_1^2 - R_1^2 = l_1^2 - (R^2 - d_1^2) = (l_1^2 - h_1^2) - (R^2 - d_1^2) + h_1^2$ (4)

Rõ ràng ta có $l_1^2 - h_1^2 = DO_1^2 - DH_1^2 = H_1^2O_1^2 = OK^2$ (kẻ $OK \perp DH_1$)

$= R^2 - DK^2 = R^2 - (h_1 - d_1)^2$ (5)

Thay (5) vào (4) và có $l_1^2 - R_1^2 = R^2 - (h_1 - d_1)^2 - (R^2 - d_1^2) + h_1^2$

$= R^2 - h_1^2 - d_1^2 + 2h_1d_1 - R^2 + h_1^2 + d_1^2 = 2h_1d_1$.

$$\Rightarrow \frac{\ell_1^2 - R_1^2}{h_1^2} = \frac{2h_1d_1}{h_1^2} = 2\frac{d_1}{h_1} \quad (6)$$

Lập luận tương tự như (6) ta có $\frac{\ell_i^2 - R_i^2}{h_i^2} = 2\frac{d_i}{h_i}$ $\forall i = 1, 2, 3, 4$. (7)

Thay (7) vào (3) ta đi đến

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} S_i^2\left(l_i^2 - R_i^2\right)} = V\sqrt{\frac{1}{2}.2\sum_{i=1}^{4}\frac{d_i}{h_i}} = V\sqrt{\sum_{i=1}^{4}\frac{d_i}{h_i}} \quad (8)$$

Gọi V_i là thể tích tứ diện đỉnh O và đáy là các mặt có diện tích S_i ($i = \overline{1,4}$)

Ta có $\frac{V_i}{V} = \frac{d_i}{h_i}$ $\forall i = \overline{1,4}$

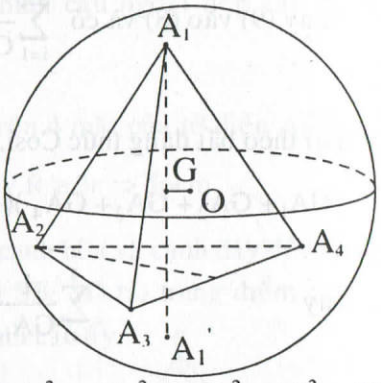
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{4}\frac{d_i}{h_i} = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{V} = 1 \quad (9)$$

Thay (9) vào (8) và có $V = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} S_i^2\left(l_i^2 - R_i^2\right)}$ Đó là đpcm!

Thí dụ 25: Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ và G là trọng tâm của nó. Các đường thẳng GA_1, GA_2, GA_3, GA_4 lần lượt cắt mặt cầu ngoại tiếp tứ diện tại A_1', A_2', A_3', A_4'. Chứng minh

1. $GA_1 . GA_2 . GA_3 . GA_4 \le GA_1' . GA_2' . GA_3' . GA_4'$
2. $\frac{1}{GA_1'} + \frac{1}{GA_2'} + \frac{1}{GA_3'} + \frac{1}{GA_4'} \le \frac{1}{GA_1} + \frac{1}{GA_2} + \frac{1}{GA_3} + \frac{1}{GA_4}$

Giải



1. Đặt d = OG, ở đây O là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện. Theo phương tích của một điểm với mặt cầu, ta có $GA_i . GA_i' = R^2 - d^2$ $(i = \overline{1,4})$, ở đây R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện. Từ đó ta có $(GA_1 . GA_2 . GA_3 . GA_4).(GA_1' . GA_2' . GA_3' . GA_4') = (R^2 - d^2)^4$. (1)

Do $OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_4 = R \Rightarrow OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2 + OA_4^2 = 4R^2$ (2)

Lại có

$$OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2 + OA_4^2 = \left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA_1}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA_2}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA_3}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA_4}\right)^2$$

$$= 4OG^2 + GA_1^2 + GA_2^2 + GA_3^2 + GA_4^2 \quad (3)$$

(vì $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3} + \overrightarrow{GA_4} = \vec{0}$ do G là trọng tâm tứ diện).

Từ (2), (3) suy ra $GA_1^2 + GA_2^2 + GA_3^2 + GA_4^2 = 4(R^2 + d^2)$ (4)

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có

$$GA_1^2 + GA_2^2 + GA_3^2 + GA_4^2 \ge 4\sqrt[4]{GA_1^2 GA_2^2 GA_3^2 GA_4^2}$$

Hay $GA_1 . GA_2 . GA_3 . GA_4 \le \left(\frac{GA_1^2 + GA_2^2 + GA_3^2 + GA_4^2}{4}\right)^2$ (5)

Từ (4), (5) ta có $GA_1 . GA_2 . GA_3 . GA_4 \le (R^2 - d^2)^2$ (6)

Từ (1), (6) suy ra $GA_1 . GA_2 . GA_3 . GA_4 \le GA_1' . GA_2' . GA_3' . GA_4'$

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow GA_1 = GA_2 = GA_3 = GA_4$

$\Leftrightarrow H \equiv O \Leftrightarrow A_1A_2A_3A_4$ là tứ diện đều.

2. Theo trên ta có

$$\frac{1}{GA_i'} = \frac{GA_i}{R^2 - d^2} \; \forall i = \overline{1,4} \Rightarrow \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{GA_i'} = \frac{1}{R^2 - d^2} \sum_{i=1}^{4} GA_i \quad (7)$$

Từ (4), (7) ta có $\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{GA_i'}=4\frac{\sum_{i=1}^{4}GA_i}{\sum_{i=1}^{n}GA_i^2}$ (8)

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có

$$\left(\frac{GA_1+GA_2+GA_3+GA_4}{4}\right)^2\le GA_1^2+GA_2^2+GA_3^2+GA_4^2 \quad (9)$$

Thay (9) vào (8) và có $\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{GA_i'}\le\frac{16}{\sum_{i=1}^{4}GA_i}$ (10)

Lại theo bất đẳng thức Cosi, thì

$$(GA_1+GA_2+GA_3+GA_4)\left(\frac{1}{GA_1}+\frac{1}{GA_2}+\frac{1}{GA_3}+\frac{1}{GA_4}\right)\ge 16$$

hay $\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{GA_i}\ge\frac{16}{\sum_{i=1}^{4}GA_i}$ (11)

Từ (10), (11) đi đến $\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{GA_i'}\le\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{GA_i}\Rightarrow$ đpcm.

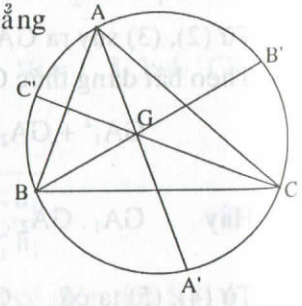
Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow GA_1=GA_2=GA_3=GA_4\Leftrightarrow H\equiv O$

$\Leftrightarrow A_1A_2A_3A_4$ là tứ diện đều.

Nhận xét: Ta có kết quả tương tự sau trong hình học phẳng

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn.

Gọi G là trọng tâm tam giác. Giả sử AG, BG, CG lần lượt cắt đường tròn tại A', B', C'. Khi đó ta có

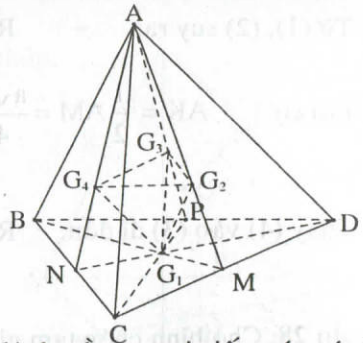


1. $GA.GB.GC\le GA'.GB'.GC'$
2. $\frac{1}{GA}+\frac{1}{GB}+\frac{1}{GC}\ge\frac{1}{GA'}+\frac{1}{GB'}+\frac{1}{GC'}$

Dấu bằng xảy ra trong hai bất đẳng thức trên $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Thí dụ 26: Cho tứ diện ABCD bất kì. Gọi R và r tương ứng là bán kính hình cầu ngoại tiếp và nội tiếp tứ diện. Chứng minh rằng: $R\ge 3r$.

Giải



Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm các mặt BCD, ACD, ABD và ABC.

Dễ thấy rằng $G_1G_2 \,//\, AB$, $G_1G_4 \,//\, AD$, $G_1G_3 \,//\, AC$.

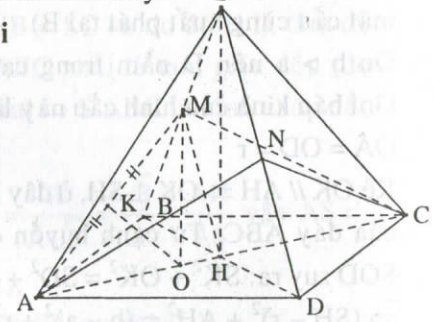
Vậy hai tứ diện ABCD và $G_1G_2G_3G_4$ là hai tứ diện đồng dạng theo tỷ số $\frac{1}{3}$.

Gọi R và R' tương ứng là các bán kính hình cầu ngoại tiếp các tứ diện ABCD và $G_1G_2G_3G_4$. Ta có $R' = \frac{R}{3}$

Vì G_1, G_2, G_3, G_4 là 4 điểm lần lượt nằm trên 4 mặt của tứ diện ABCD, do đó, hiển nhiên ta có: $R' \geq r \Rightarrow \frac{R}{3} = R' \geq r$ hay $R \geq 3r \Rightarrow$ đpcm.

Thí dụ 27: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. Có một hình cầu đi qua A và tiếp xúc với SB, SD tại trung điểm của mỗi đường . Xác định tâm O và tính bán kính hình cầu ấy.

Giải



Vì hình cầu tiếp xúc với SB tại trung điểm M của nó, nên tâm O của hình cầu phải nằm trên mặt phẳng trung trực của SB. Do giả thiết suy ra: $MA \perp SB$, $CM \perp SB$ nên $SB \perp (MAC)$.

Vậy (MAC) chính là mặt phẳng trung trực của SB.

Tương tự nếu gọi N là trung điểm của SD thì $O \in (NAC)$, ở đây dễ thấy (NAC) là mặt phẳng trung trực của SD $\Rightarrow O \in AC = (MAC) \cap (NAC)$.

Trong (MAC) vẽ trung trực của MA và giả sử đường này cắt AC tại O.

$\Rightarrow OM = OA$. Dễ thấy $\Delta MAO = \Delta NAO \Rightarrow OM = ON$

Vậy O chính là tâm hình cầu qua A và tiếp xúc với SB, SD tại trung điểm của mỗi đường. Gọi R là bán kính của hình cầu này.

Ta có: $$R = OA = \frac{AK}{\cos\widehat{KAO}} = \frac{AK}{\cos\widehat{MAH}} \qquad (1)$$

Ở đây K là trung điểm của MN, còn H là tâm của đáy ABCD.

Do $MA = MC \Rightarrow MH \perp AC \Rightarrow \cos\widehat{MAH} = \frac{AH}{AM}$ (2)

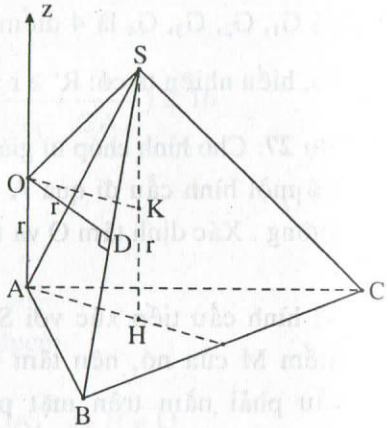
Từ (1), (2) suy ra: $R = \dfrac{AK.AM}{AH}$ (3)

Lại có: $AK = \dfrac{1}{2}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$; $AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (4)

Thay (4) vào (3) đi đến: $R = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{8}$.

Thí dụ 28: Cho hình chóp tam giác đều SABC, cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b (b > a). Hình cầu tiếp xúc với (ABC) tại A và tiếp xúc với cạnh SB. Tìm bán kính hình cầu.

Giải



Vì hình cầu tiếp xúc với (ABC) tại A nên tâm O của nó nằm trên đường thẳng Az ⊥ (ABC) tại A.

Giả sử D là tiếp điểm của mặt cầu với SB

⇒ BA = BD = a (hai tiếp tuyến của mặt cầu cùng xuất phát tại B)

Do b > a nên D nằm trong cạnh SB.

Gọi bán kính của hình cầu này là r, thì

OA = OD = r

Kẻ OK // AH ⇒ OK ⊥ SH, ở đây H là tâm của đáy ABC. Từ cạnh huyền chung SO của hai tam giác vuông SOK và SOD suy ra: $SK^2 + OK^2 = SD^2 + OD^2$

$\Rightarrow (SH - r)^2 + AH^2 = (b - a)^2 + r^2$

$\Rightarrow SH^2 + r^2 - 2SH.r + AH^2 = b^2 - 2ab + a^2 + r^2$

$\Rightarrow b^2 - 2SH.r = b^2 - 2ab + a^2$ (do $SH^2 + AH^2 = SA^2 = b^2$) $\Rightarrow r = \dfrac{a(2b-a)}{2.SH}$ (1)

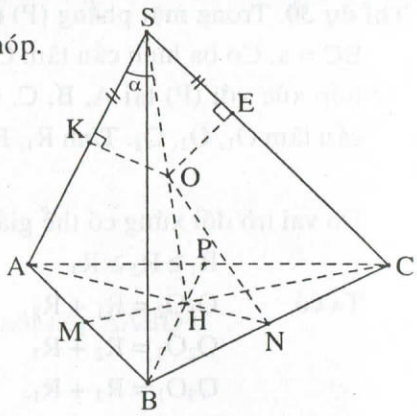
Do $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{b^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3b^2 - a^2}{3}}$ (2)

Thay (2) vào (1) và có $r = \dfrac{a(2b-a)\sqrt{3}}{\sqrt{3b^2 - a^2}}$.

Thí dụ 29: Cho hình chóp tam giác S.ABC. Biết rằng tồn tại hình cầu tâm O bán kính R (O nằm trên chiều cao hình chóp) tiếp xúc với cả sáu cạnh của hình chóp.

1. Chứng minh S.ABC là hình chóp đều.
2. Cho $SC = R\sqrt{3}$. Tìm chiều cao hình chóp.

Giải



1. Gọi M, N lần lượt là các tiếp điểm của hình cầu với các cạnh AB, BC, CA. Gọi SH là chiều cao của hình chóp và O là tâm của hình cầu đã cho, thì $O \in SH$. Theo định lí ba đường vuông góc, ta có $HM \perp AB$ (vì $OM \perp AB$, do hình cầu tiếp xúc AB tại M).

Tương tự $HN \perp BC$, $HP \perp AC$.

Do $OM = OM = OP = R$ nên $HM = HN = HP$, vậy H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Gọi K, E thứ tự là các tiếp điểm của hình cầu với các cạnh SA, SC. Ta có $SK = SE$ (hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ một điểm).

$\Rightarrow \Delta KSO = \Delta ESO \Rightarrow \widehat{KSO} = \widehat{OSE}$

$\Rightarrow \Delta SAH = \Delta SCH \Rightarrow SA = SC.$

Lí luận tương tự $SA = SB$, vậy $SA = SB = SC$ và do đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Như vậy, ABC phải là tam giác đều (do tâm hai đường tròn nội và ngoại tiếp trùng nhau) $\Rightarrow$ S.ABC là hình chóp đều

$\Rightarrow$ đpcm.

2. Ta đặt $\widehat{ASH} = \alpha$, như vậy $\sin\alpha = \dfrac{OK}{OS} = \dfrac{R}{R\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{AH}{AS}$ vậy $AS = \sqrt{3}\,AH$.

Đặt $SH = h$, $HN = x$ (như vậy $AH = 2x$).

Trong tam giác vuông SAH, theo định lí Pitago, ta có

$SA^2 = SH^2 + AH^2 \Rightarrow SH^2 = 2AH^2 \Leftrightarrow h^2 = 8x^2$

Trong tam giác vuông OHN, theo định lí Pitago, có

$ON^2 = OH^2 + HN^2 \Rightarrow R^2 = (h - \sqrt{3}\,R)^2 + x^2$

$\Rightarrow R^2 = h^2 - 2hR\sqrt{3} + 3R^2 + x^2.$ (1)

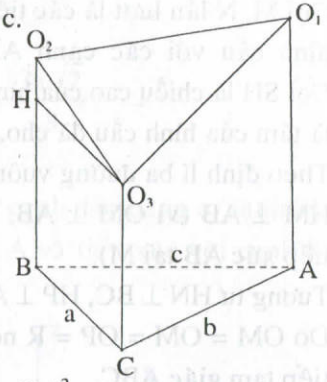
Thay $h^2 = 8x^2$ vào (1), rồi rút gọn ta có $9h^2 - 16\sqrt{3}\,hR + 16R^2 = 0.$ (2)

Từ (2) có $h = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}R$ hoặc $h = \dfrac{4\sqrt{3}R}{3}$

Nghiệm $h = \dfrac{4\sqrt{3}R}{9}$ bị loại vì ta có $h = SH > SO = R\sqrt{3} > \dfrac{4\sqrt{3}R}{9}$.

Vậy chiều cao của hình chóp $SH = \dfrac{4\sqrt{3}R}{9}$.

Thí dụ 30. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC có ba cạnh AB = c, AC = b, BC = a. Có ba hình cầu tâm O_1, O_2, O_3 từng đôi tiếp xúc với nhau và lần lượt tiếp xúc với (P) tại A, B, C. Gọi R_1, R_2, R_3 tương ứng là bán kính các hình cầu tâm O_1, O_2, O_3. Tính R_1, R_2, R_3 theo a, b, c.



Giải

Do vai trò đối xứng có thể giả sử

$$R_1 \geq R_2 \geq R_3$$

Ta có $O_1O_2 = R_1 + R_2$

$O_2O_3 = R_2 + R_3$

$O_3O_1 = R_3 + R_1$.

Kẻ O_3H // BC và theo định lí Pitago trong tam giác O_2HO_3, ta có

$$HO_3^2 = O_2O_3^2 - O_2H^2 \Rightarrow a^2 = (R_2 + R_3)^2 - (R_2 - R_3)^2$$

$$\Rightarrow a^2 = 4R_2R_3 \qquad (1)$$

Lập luận tương tự có $b^2 = 4R_3R_1$ (2)

$c^2 = 4R_1R_2$ (3)

Nhân từng vế (1), (2), (3) và có $a^2b^2c^2 = 64R_1^2R_2^2R_3^2$

$$\Rightarrow \quad abc = 8R_1R_2R_3 \qquad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) dễ dàng suy ra

$$R_1 = \frac{bc}{2a};\ R_2 = \frac{ac}{2b};\ R_3 = \frac{ab}{2c}$$

Thí dụ 31: Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tồn tại hình cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của tứ diện ABCD là: AB + CD = AC + BD = AD + BC

Giải

1. Điều kiện cần: Giả sử có hình cầu tiếp xúc với cả sáu cạnh của tứ diện. Gọi P, Q, R, T, U , S là các tiếp điểm với AB, AC, AD, CD, BD, BC

   ⇒ hình cầu sẽ cắt các mặt của tứ diện theo các giao tuyến là các đường tròn nội tiếp của các mặt của tứ diện

   Theo tính chất của tiếp tuyến ta có:

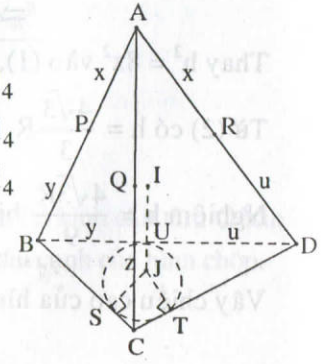
   $AP = AQ = AR = l_1$

   $BP = BS = BU = l_2$

   $CQ = CS = CT = l_3$ $\Rightarrow \begin{cases} AB + CD = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 \\ AC + BD = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 \\ AD + BC = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 \end{cases}$

   $DR = DT = DU = l_4$

   Từ đó suy ra đpcm.



2. Điều kiện đủ:

   Giả sử có AB + CD = AC + BD = AD + BC.

Gọi P, Q, S là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp ΔABC với các cạnh của tam giác. Đặt $x = AP$; $y = BP$; $z = CQ$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(AB + AC - BC) \\ y = \frac{1}{2}(AB + BC - AC) \\ z = \frac{1}{2}(AC + BC - AB) \end{cases}$$

Xét các tiếp điểm P', R, U của đường tròn nội tiếp ΔABD

Khi đó ta có $AP' = \frac{1}{2}(AB + AD - BD)$

$= \frac{1}{2}(AB + AD + BC - BD - BC)$ (do $AD+BC = AC + BD$)

$= \frac{1}{2}(AB + AC - BC) = x \Rightarrow AP' = x$ vậy $P' \equiv P$

$\Rightarrow AR = x$; $BU = y$

Đặt $DR = DU = u$ và xét đường tròn nội tiếp ΔACD.

Lý luận tương tự như trên ta sẽ thấy chúng tiếp xúc với các cạnh tại Q, R,T.

Gọi d_1 là đường $\perp$ (ABC) và qua tâm ABC
D_2 là đường $\perp$ (ABD) và qua tâm ABD
$\Rightarrow d_1 \cap d_2 = I$

$\Rightarrow \begin{matrix} IP = IQ = IS \\ IP = IR = IU \end{matrix} \Rightarrow IP = IQ = IS = IU$

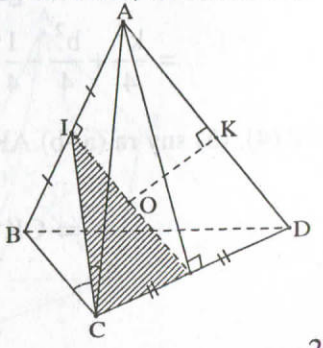
Lại có $IP \perp AB$; $IQ \perp AC$; $IS \perp BC$; $IR \perp AD$; $IU \perp BD$

Gọi J là hình chiếu của I lên (BCD). Vì $IS \perp BC$, $IU \perp BD$ nên theo định lý ba đường vuông góc suy ra $IS \perp BC$; $JU \perp BD$. Vả lại, $IS = IU \Rightarrow JS = JU \Rightarrow$ J là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta BCD \Rightarrow JT = JS \Rightarrow IT = IS$ và $IT \perp CD$. Như thế hình cầu tâm I tiếp xúc với 6 cạnh của tứ diện. Đó là đpcm.

Thí dụ 32: Cho tứ diện ABCD có $AC = AD = BC = BD$; $AB = a$; $CD = b$. Gọi I và J tương ứng là trung điểm của AB và CD. Đặt $IJ = k$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tồn tại hình cầu tiếp xúc với cả 6 cạnh của tứ diện là $ab = 2R^2$

Giải

1. Giả sử tồn tại hình cầu tâm O tiếp xúc với 6 cạnh của tứ diện, khi đó O cách đều AB và BC $\Rightarrow$ O nằm trên (CIJ)
Tương tự O cách đều CB và CD nên O nằm trên giao tuyến của (CIJ) và (BIJ), tức là $O \in IJ$.



Từ giả thiết AC = AD = BC = BD

$\Rightarrow$ IJ là đường vuông góc chung của AB và CD $\Rightarrow$ O là trung điểm của IJ (vì O cũng cách đều AB và CD).

Do IJ = k $\Rightarrow$ OI = OJ = $\frac{k}{2}$

Gọi K là tiếp điểm của mặt cầu với AD. Khi đó theo tính chất của các tiếp tuyến phát xuất từ một điểm, ta có:

AK = AI = $\frac{a}{2}$; DK = DJ = $\frac{b}{2}$. Vì thế AD = $\frac{a+b}{2}$

Trong tam giác vuông AIJ có $AJ^2 = AI^2 + IJ^2 = \frac{a^2}{4} + k^2$ (1)

Trong tam giác vuông AJD lại có: $AJ^2 = AD^2 - ID^2 = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{b^2}{4}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\frac{a^2}{4} + k^2 = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{b^2}{4}$ hay $ab = 2k^2$ (3)

2. Đảo lại giả sử thỏa mãn điều kiện (3), tức là có $ab = 2k^2$

Gọi O là trung điểm IJ. Kẻ OK $\perp$ AD, ta có $AJ^2 = \frac{a^2}{4} + k^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{ab}{2}$

$\Rightarrow AD^2 = AJ^2 + JD^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{4} = \frac{1}{4}(a+b)^2 \Rightarrow AD = \frac{1}{2}(a+b)$

Vì thế $KD = \frac{1}{2}(a+b) - AK$

Xét hai tam giác vuông OKA và OKD, có

$OK^2 = OA^2 - AK^2 = IA^2 + IO^2 - AK^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{k^2}{4} - AK^2$ (4)

Lại có $OK^2 = OD^2 - KD^2 = OJ^2 + JD^2 - KD^2$

$$= \frac{k^2}{4} + \frac{b^2}{4} - \left[\frac{1}{2}(a+b) - AK(a+b)\right]^2$$

$$= \frac{k^2}{4} + \frac{b^2}{4} - \frac{1}{4}(a+b)^2 + (a+b).AK - AK^2 \quad (5)$$

Từ (4), (5) suy ra $(a+b).AK = \frac{a}{2}(a+b) \Rightarrow AK = \frac{a}{2}$

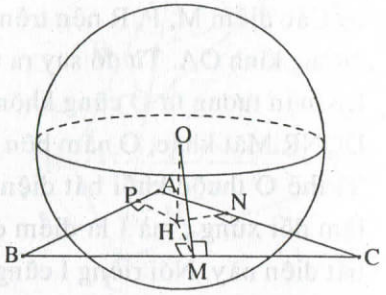
$$\Rightarrow OK^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{k^2}{4} - \frac{a^2}{4} \Rightarrow OK = \frac{k}{2}$$

Lý luận tương tự suy ra khoảng cách từ O tới các cạnh của tứ diện đều bằng $\frac{k}{2}$.

Như vậy, O là tâm hình cầu tiếp xúc với cả 6 cạnh của tứ diện ABCD. Vậy hệ thức $ab = 2k^2$ là điều kiện cần và đủ thỏa mãn yêu cầu đề ra $\Rightarrow$ đpcm.

Thí dụ 33: Ba cạnh của tam giác ABC đều tiếp xúc với mặt cầu tâm O, bán kính R = 5cm. Biết AB = 13cm, BC = 14cm, AC = 15cm. Tìm khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC).

Giải



Giả sử BC, CA, AB lần lượt tiếp xúc với mặt cầu tại M, N, P. Khi đó ta có $OM \perp BC$, $ON \perp CA$, $OP \perp AB$.

Kẻ $OH \perp (ABC)$. Theo định lí ba đường vuông góc ta có $HM \perp BC$, $HN \perp AC$, $HP \perp AB$.

Do $OM = ON = OP = 5cm \Rightarrow HM = HN = HP$. Vậy H chính là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó ta có $HM = HN = HP = r$, ở đây r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Ta có: $r = \frac{S}{\rho}$ ở đây S, ρ tương ứng là diện tích và nửa chu vi của tam giác ABC.

Dễ thấy $\rho = \frac{13+14+15}{2} = 21$

Do đó theo công thức Hêrông thì:

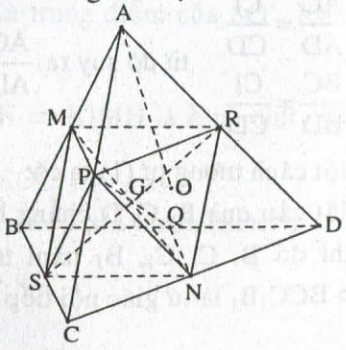
$$S = \sqrt{\rho(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)} = \sqrt{21.8.7.6} = 84\ cm^2$$

Từ đó $r = \frac{84}{21} = 4\ cm$

Lại theo định lí Pitago thì $d(0; (ABC)) = OH = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{25-16} = 3$ cm.

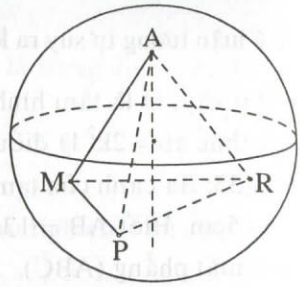
Thí dụ 34: Cho tứ diện ABCD, trọng tâm G, trên mặt cầu ngoại tiếp O. Gọi I là điểm đối xứng của O qua G. Giả sử O nằm trong tứ diện ABCD. Chứng minh rằng I cũng nằm trong tứ diện ABCD.

Giải



Gọi M, N, P, Q, R, S tương ứng là trung điểm của 6 cạnh AB, CD, AC, DB, AD, BC. Khi đó rõ ràng MN, PQ, RS đồng qui tại G và G là trung điểm của mỗi đoạn ấy. Ta cũng thấy G chính là trọng tâm của tứ diện (xem chương 1)

Rõ ràng hình bát diện (tám mặt) MPRNQS nhận G làm tâm đối xứng.



Gọi O là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD $\Rightarrow OA = OB = OC = OD$

$\Rightarrow OM \perp AB$; $OP \perp AC$; $OR \perp AD$.

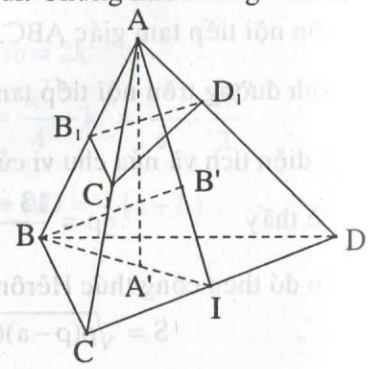
$\Rightarrow \widehat{OMA} = \widehat{OPA} = \widehat{ORA} = 90^0$

$\Rightarrow$ Các điểm M, P, R nên trên mặt cầu đường kính OA. Từ đó suy ra O không nằm bên trong tứ diện AMPR.

Lý luận tương tự O cũng không nằm bên trong các tứ diện BSQM, CNSP và DQNR.Mặt khác, O nằm bên trong tứ diện ABCD.

Vì thế O thuộc khối bát diện MPRNQS. Do khối bát diện này nhận G làm tâm đối xứng , mà I là điểm đối xứng của O qua G $\Rightarrow$ I nằm bên trong khối bát diện này. Nói riêng I cũng nằm trong tứ diện ABCD. Đó là đpcm!

Thí dụ 35: Tứ diện ABCD có các đường thẳng nối đỉnh của tứ diện với tâm đường tròn nội tiếp của mặt đối diện đồng qui. Chứng minh rằng nếu có một mặt cầu đi qua ba đỉnh của tứ diện và cắt các cạnh kề với đỉnh thứ tự tại ba điểm thì ba điểm này là đỉnh của một tam giác đều.



Giải

Giả sử A', B' tương ứng là tâm đường tròn nội tiếp các mặt đối diện đỉnh A, đỉnh B. Giả sử $AB' \cap CD = I$

$\Rightarrow (ABB') \cap (BCD) = BI$

Theo giả thiết thì AA' và BB' cắt nhau nên A' phải nằm trên giao tuyến của (ABB') và (BCD), tức là $A' \in BI$.

Theo giả thiết AI, BI tương ứng là đường phân giác trong của tam giác ACD, BCD nên ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{CI}{CD} \\ \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{CI}{CD} \end{cases} \text{ từ đó suy ra } \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow AC.BD = AD.BC \qquad (1)$$

Một cách tương tự (1) ta có: $AB.CD = AC.BD = AD.BC$ (2)

Mặt cầu qua B, C, D chẳng hạn cắt AB, AC, AD tương ứng tại B_1, C_1, D_1.

Khi đó B, C, C_1, B_1 nằm trên giao tuyến của mặt cầu này với (ABC)

$\Rightarrow BCC_1B_1$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \Delta AB_1C_1 \backsim \Delta ACB$

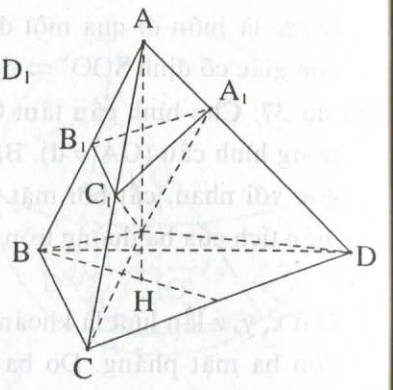
$\Rightarrow \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AB_1}{AC} \Rightarrow B_1C_1 = \frac{AB_1.BC}{AC}$ (3)

Tương tự ta có $B_1D_1 = \frac{AB_1.BD}{AD}$ (4)

Kết hợp (2), (3), (4) suy ra $B_1C_1 = B_1D_1$

Tương tự đi đến $B_1C_1 = B_1D_1 = C_1D_1$

$\Rightarrow B_1C_1D_1$ là tam giác đều $\Rightarrow$ đpcm.



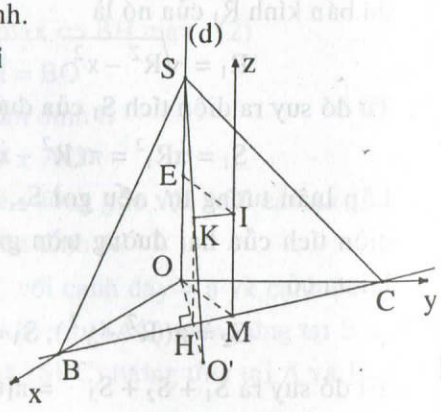
Nhận xét: Tứ diện thỏa mãn điều kiện đầu bài là tồn tại , đơn giản ta chỉ việc lấy ABCD là tứ diện đều.

Khi đó hình cầu qua B, C, D sẽ có tâm nằm trên đường cao AH.

Hình cầu này cắt AB, AC, AD tại A_1, B_1, C_1 trong đó dễ dàng thấy $\Delta B_1C_1A_1 \backsim \Delta BCD \Rightarrow B_1C_1A_1$ là tam giác đều.

Thí dụ 36: Trên mặt phẳng (P), cho đường thẳng Δ và điểm O nằm ngoài Δ. Một góc vuông xOy quay quanh O, các cạnh Ox, Oy lần lượt cắt Δ tại B, C. Trên đường thẳng (d) vuông góc với (P) tại O lấy điểm S cố định ($S \neq O$). Chứng minh rằng khi góc vuông xOy quay quanh O thì mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SOBC luôn đi qua một đường tròn cố định.

Giải



Gọi M, E tương ứng là trung điểm của BC, SO. Qua M kẻ Mz // (d).

Gọi E là trung điểm của SO. Đường trung trực của OS (trong mặt phẳng xác định bởi (d) và Mz) cắt Mz tại I.

Như đã biết I là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện SOBC. Gọi O' là điểm đối xứng của O qua Δ. Khi đó O'cố định.

Gọi H là giao điểm của OO' với Δ và K là trung điểm của SO'. Khi đó rõ ràng H và K cũng là hai điểm cố định.

Ta có $HK = \frac{OS}{2} \Rightarrow MI = HK$ và MI // HK $\Rightarrow$ KIMH là hình chữ nhật nên IK $\perp$ KH. Mặt khác, hiển nhiên do HM $\perp$ (SOO')

$\Rightarrow$ IK $\perp$ (SOO') (vì IK // HM) $\Rightarrow$ K là hình chiếu của I trên (SOO').

Trong tam giác vuông SOO' do K là trung điểm của cạnh huyền SO' nên ta có OK = KS = KO' ⇒ IO' = IS. Mặt khác IS = IO = IB = IC. Vậy O' cũng nằm trên hình cầu ngoại tiếp tứ diện SOBC.

Như thế hình cầu này luôn đi qua ba điểm cố định không thẳng hàng S, O, O'tức là luôn đi qua một đường tròn cố định, đó là đường tròn ngoại tiếp tam giác cố định SOO' ⇒ đpcm.

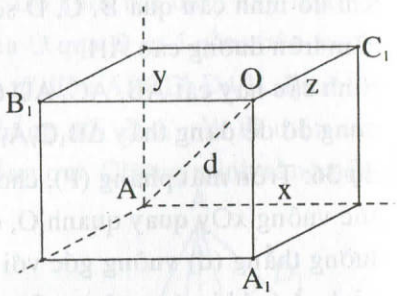
Thí dụ 37: Cho hình cầu tâm O, bán kính R và A là một điểm cố định ở bên trong hình cầu (OA = d). Ba mặt phẳng biến thiên qua A và đôi một vuông góc với nhau, cắt bởi mặt cầu theo ba đường tròn. Chứng minh rằng tổng diện tích của ba đường tròn này không thay đổi.

Giải

Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ O đến ba mặt phẳng. Do ba mặt phẳng ấy qua A và đôi một vuông góc với nhau, nên dễ thấy

$$x^2 + y^2 + z^2 = OA^2 = d^2 \qquad (1)$$

(xem hình bên)

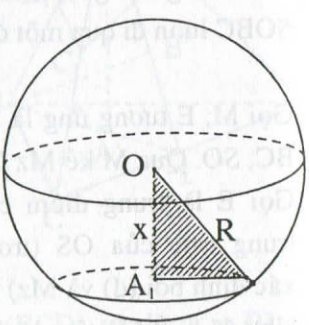


Xét đường tròn giao tuyến có tâm A_1 thì bán kính R_1 của nó là

$$R_1 = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Từ đó suy ra diện tích S_1 của đường tròn này là

$$S_1 = \pi R_1^2 = \pi(R^2 - x^2).$$



Lập luận tương tự, nếu gọi S_2, S_3 lần lượt là diện tích của hai đường tròn giao tuyến còn lại, ta có

$$S_2 = \pi(R^2 - y^2);\ S_3 = \pi(R^2 - z^2).$$

Từ đó suy ra $S_1 + S_2 + S_3 = \pi[(R^2 - x^2) + (R^2 - y^2) + (R^2 - z^2)]$

$$= \pi[3R^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] \qquad (2)$$

Thay (1) vào (2) và có:

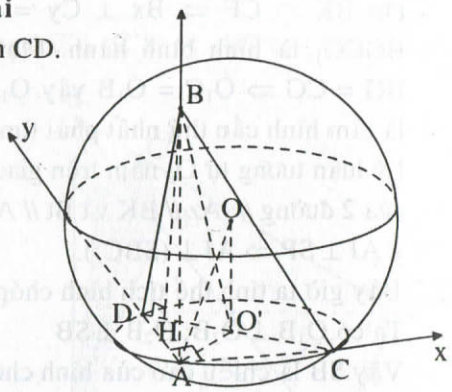
$S_1 + S_2 + S_3 = \pi(3R^2 - d^2) = \text{const} \Rightarrow$ đpcm.

Thí dụ 38: Cho hình cầu bán kính R. (L) là giao tuyến của mặt cầu với một mặt phẳng (P) cách đều mặt cầu một khoảng h (0< h <R). A là một điểm cố định trên (L). Một góc vuông $\widehat{xAy}$ trong (P) quay quanh A. Các cạnh Ax, Ay cắt (L) ở C, D. Đường thẳng qua A vuông góc với (P) và cắt mặt cầu ở B.

1. Chứng minh các tổng $BC^2 + AD^2$ và $BD^2 + AC^2$ luôn luôn có giá trị không đổi.
2. Với vị trí nào của CD thì diện tích tam giác BCD có giá trị lớn nhất.

Giải

1. Gọi O là tâm hình cầu, O' là trung điểm CD.



Do $\widehat{CAD} = 90^0 \Rightarrow OO' \perp (P)$

Theo giả thiết thì $OO' = h$

Ta có $AO' = \sqrt{AO^2 - OO'^2} = \sqrt{R^2 - h^2}$

Trong tam giác vuông CAD thì

$CD = 2AO' = 2\sqrt{R^2 - h^2}$.

Vì $BA \perp (P) \Rightarrow BA \perp AC, BA \perp AD$.

Từ đó ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\Rightarrow BC^2 + AD^2 = AB^2 + AC^2 + AD^2 = AB^2 + CD^2$

$= 4h^2 + 4(R^2 - h^2) = 4R^2 = \text{const}$

(chú ý $AB = 2OO' = 2h$)

Tương tự, ta có $BD^2 + AC^2 = 4R^2 \Rightarrow$ đpcm.

2. Kẻ $BH \perp CD$. Ta có $S_{BCD} = \frac{1}{2}DC.BH = \sqrt{R^2 - h^2}.BH$ (1)

Do R, h không đổi nên từ (1) suy ra S_{BCD} max $\Leftrightarrow$ BH max (2)

Ta có $BH \leq BO'$. Vì thế BH max $\Leftrightarrow BH = BO'$

$\Leftrightarrow H \equiv O' \Leftrightarrow$ BCD là tam giác cân đỉnh B

$\Leftrightarrow BD = BC \Leftrightarrow AD = AC \Leftrightarrow CD \perp AO'$

Như vậy trong (P), đường thẳng qua O' và vuông góc với AO' cắt Ax, Ay tại C và D. Lúc đó ADC là tam giác vuông cân đỉnh A.

Thí dụ 39: Cho hình chóp tam giác đều SABC với cạnh đáy = a và cạnh bên = b. Hình cầu thứ nhất tâm O_1, tiếp xúc với (SAB) và (SAC) tương ứng tại B và C. Hình cầu thứ hai tâm O_2 tiếp xúc (SAC) và (SBC) tương ứng tại A và B. Tìm thể tích hình chóp SBO_1O_2.

Giải

1. Gọi M và N tương ứng là trung điểm của AB và AC $\Rightarrow (SMC) \perp (SAB)$

$\Rightarrow$ nếu từ C kẻ $CF \perp SM \Rightarrow CF \perp (SAB)$.

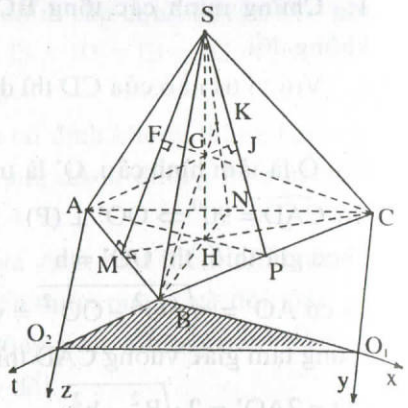
Tương tự kẻ $BK \perp SN$ thì $BK \perp (SAC)$ (do $(SBC) \perp (SAC)$).

Dễ thấy BK, CF, SH đồng quy tại G. Vì hình cầu tâm O_1 tiếp xúc (SAB) tại B nên O_1 nằm trên đường $\perp (SAB)$ tại B, tức là nằm trên đường Bx // CF.

Vì hình cầu tâm O_1 tiếp xúc (SAC) tại C mà BK ⊥ (SAC) nên O_1 nằm trên đường Cy // BK.

Do BK ∩ CF ⇒ Bx ⊥ Cy = O_1 và $BGCO_1$ là hình bình hành. Mặt khác BG = CG ⇒ $O_1C = O_1B$ vậy O_1 chính là tâm hình cầu thứ nhất phải tìm.

Lý luận tương tự O_2 nằm trên giao điểm của 2 đường //: Az // BK và Bt // AJ (chú ý AJ ⊥ SP ⇒ AJ ⊥ (SBC)).



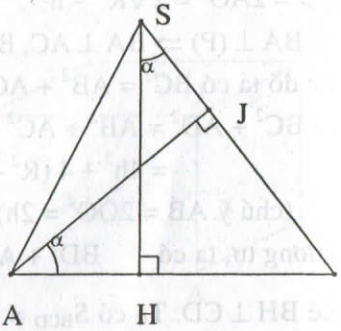
2. Bây giờ ta tính thể tích hình chóp SBO_1O_2

Ta có $O_1B ⊥ O_2B$; $O_2B ⊥ SB$

Vậy SB là chiều cao của hình chóp.

Mặt khác dễ thấy $\Delta BO_2O_1 = \Delta GAC$ (O_2B // GA; O_1B // GC)

$$\Rightarrow V_{SBO_1O_2} = \frac{1}{3}b.S_{AGC}$$



Xét ΔSAP ta có SA = b, $AP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

còn $SP = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$

Ta có trong tam giác vuông GAH thì

$$AG = \frac{AH}{\cos\alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{3\cos HSP} = \frac{a\sqrt{3}.SP}{2SH} = \frac{a\sqrt{3}\sqrt{4b^2 - a^2}}{3.2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}} = \frac{a}{2}\frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{\sqrt{3b^2 - a^2}}$$

Do tam giác GAC nên $GN^2 = AG^2 - AN^2$

$$= \frac{a^2(4b^2 - a^2)}{4(3b^2 - a^2)} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2b^2}{4(3b^2 - a^2)} \Rightarrow GN = \frac{ab}{2\sqrt{3b^2 - a^2}}$$

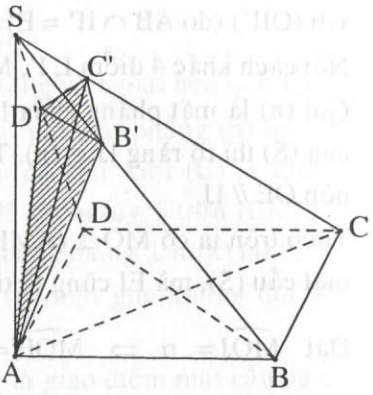
Vậy $V_{SBO_1O_2} = \frac{1}{3}b.\frac{1}{2}a\frac{ab}{2\sqrt{3b^2 - a^2}} = \frac{a^2b^2}{12\sqrt{3b^2 - a^2}}$.

Thí dụ 40: Cho hình chóp tứ giác S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'.

1. Chứng minh năm điểm S, A, B', C', D' nằm trên một mặt cầu ($\mathscr{S}_1$)
2. Chứng minh bảy điểm A, B, C, D, B', C', D' nằm trên mặt cầu ($\mathscr{S}_2$)
3. Tìm giao tuyến của hai mặt cầu ($\mathscr{S}_1$) và ($\mathscr{S}_2$) nói trên.

Giải

1. Vì $SC \perp (ABCD) \Rightarrow SC \perp AB'$. Vì $BC \perp (SAB)$ nên $AB' \perp BC$
$\Rightarrow AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp B'S$.
Tương tự ta có $AD' \perp D'S$. Ngoài ra $AC' \perp C'S$ vì $AC' \in (ABCD)$ và $C'S \perp (ABCD)$.
Từ đó suy ra B', C', D' nằm trên mặt cầu đường kính $AS \Rightarrow$ đpcm.



2. Do $AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp B'C$.
Lập luận tương tự có $AD' \perp D'C$.
Ngoài ra $AC' \perp C'C$, $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = 90^0$
$\Rightarrow$ A, B, C, D, B', C', D' cũng nằm trên mặt cầu đường kính AC.

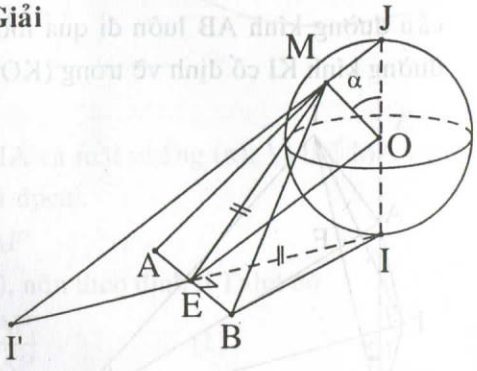
3. Do $AB' \perp (SBC) \Rightarrow \widehat{AB'C'} = 90^0$
Tương tự $\widehat{AD'C} = 90^0$ do đó trên (ABCD) bốn điểm A, B', C', D' nằm trên đường tròn đường kính A'C'. Đó là đường tròn giao tuyến cần tìm.

Thí dụ 41: Hình cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại I, M là một điểm di động trên (S). Hai trong các tiếp tuyến của (S) kẻ từ M cắt (P) tại A và B.

1. Chứng minh $\widehat{AMB} = \widehat{AIB}$
2. Gọi I' là điểm đối xứng của I qua AB. Chứng minh I, I', M và tâm O của (S) nằm trên một mặt phẳng. Chứng minh M' qua một điểm cố định J ở trên (S).
3. Giả thiết M di động trên (S) nhưng $\widehat{AMB} = 90^0$. Cho A biến thiên trên Δ, còn B biến thiên trên Δ'; Δ và Δ' cắt nhau tại K trong (P) và vuông góc với nhau.
   a. Chứng minh mặt cầu đường kính AB chứa một đường tròn cố định.
   b. Tìm hai phân giác của góc $\widehat{IKI'}$.

Giải

1. Do hình cầu (S) tiếp xúc với (P) tại I nên AI, BI chính là các tiếp tuyến với mặt cầu (S). Mặt khác, AM và BM cùng là các tiếp tuyến với mặt cầu (S) tại M. Vì thế theo tính chất của tiếp tuyến ta có: AM = AI; BM = BI.
$\Rightarrow \Delta AMB = \Delta AIB$ (c.c.c)
$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AIB} \Rightarrow$ đpcm.



2. Ta có $OI \perp (P) \Rightarrow OI \perp AB$ nên $AB \perp II' \Rightarrow AB \perp (OII')$

Vì MA, MB là hai tiếp tuyến của (S) $\Rightarrow MA \perp MO, MB \perp MO$

$\Rightarrow MO \perp (MAB) \Rightarrow MO \perp AB$.

Vậy từ $MO \perp (OII')$ và $MO \perp AB$, hơn nữa AB có ít nhất một điểm chung E với (OII') (do $AB \cap II' = E$) $\Rightarrow MO \in (IOI')$.

Nói cách khác 4 điểm I, I', M, O đồng phẳng $\Rightarrow$ đpcm.

Gọi (π) là mặt phẳng chứa I, I', M, O (tức (π) là (IOO')). Xét đường kính IJ của (S) thì rõ ràng $IJ \in (\pi)$. Trong (π) và xét $\Delta I'IJ$ thì OE là đường trung bình nên OE // IJ.

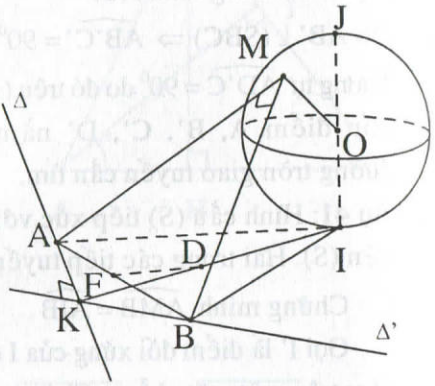
Theo trên ta có $MO \perp (AMB) \Rightarrow MO \perp ME$, vậy ME cũng là tiếp tuyến với mặt cầu (S), mà EI cũng là tiếp tuyến với (S) tại I $\Rightarrow$ EM = EI

Đặt $\widehat{MOJ} = \alpha \Rightarrow \widehat{MOE} = \dfrac{180^0 - \alpha}{2}$.

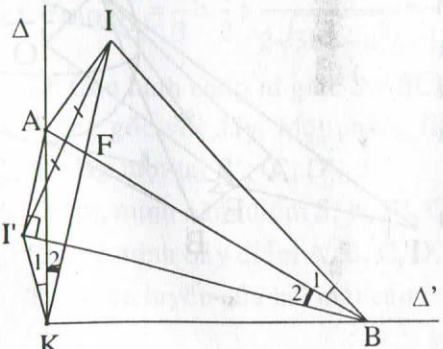
Mặt khác trong tam giác cân MOJ đỉnh O, có $\widehat{OMJ} = \dfrac{180^0 - \alpha}{2} \Rightarrow \widehat{OMJ} = \widehat{MOE}$

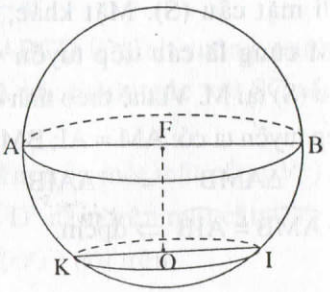
Vậy suy ra MJ // OE.

Tất cả các lập luận trên đều xét trong $(\pi) \Rightarrow$ I', M, J thẳng hàng. Như vậy MI' luôn đi qua một điểm cố định J trên mặt cầu (S) $\Rightarrow$ đpcm.



a. Do $\widehat{AMB} = 90^0$, vậy theo câu 1 suy ra $\widehat{AIB} = 90^0 \Rightarrow$ AKBI là tứ giác nội tiếp và AB chính là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác này. Gọi F là trung điểm của AB, thì F là tâm của đường tròn này. Gọi D là trung điểm KI thì $FD \perp KI$. Mặt khác, $FD \perp OI$ (do $OI \perp (P)$ và $FD \perp (KOI)$. Vậy hình cầu đường kính AB luôn đi qua một đường tròn cố định: đó là đường tròn đường kính KI cố định vẽ trong (KOI) cố định.





b. Do I' là đối xứng của I qua AB nên $\widehat{AI'B} = \widehat{AIB} = 90^0$ và có $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$.

Trong tứ giác nội tiếp AI'KB (do từ I' và K nhìn AB dưới góc 90^0), ta có $\widehat{K_1} = \widehat{B_2}$ (vì cùng chắn AI'). Mặt khác, trong tứ giác nội tiếp AKBI lại có $\widehat{K_2} = \widehat{B_1}$ (vì cùng chắn AI) $\Rightarrow \widehat{K_1} = \widehat{K_2} \Rightarrow \Delta$ là phân giác trong của $\widehat{I'KI}$.

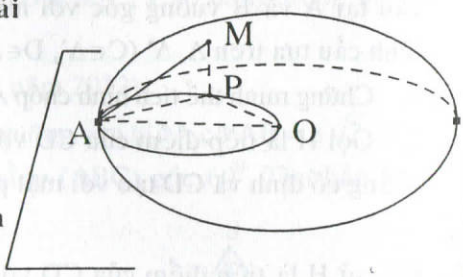
Do $\Delta \perp \Delta' \Rightarrow \Delta'$ là phân giác ngoài của $\widehat{I'KI}$.

Vậy Δ và Δ' chính là hai đường phân giác trong và ngoài của góc $\widehat{I'KI}$.

Thí dụ 42: Cho mặt cầu tâm O, bán kính R và một mặt phẳng (π) qua O. A là điểm trên giao tuyến của (π) với mặt cầu đã cho. Gọi (C) là đường tròn đường kính OA trong mặt phẳng (π) và P là điểm tùy ý trên (C). M là một trong 2 giao điểm của mặt cầu đã cho với đường thẳng $\perp m(\pi)$ tại P.

1. Chứng minh rằng đường MA tạo với (π) một góc không đổi khi P di động trên (C).
2. Gọi P' là điểm trên (C). $(P \neq P')$ và M' là giao điểm mặt cầu đã cho với đường $\perp (\pi)$ tại P' (M' và M nằm cùng phía với (π)). Đường MM' $\cap (\pi)$ tại N. Chứng minh rằng AN là phân giác ngoài của góc $\widehat{PAP'}$.
3. Bây giờ cố định P và cho P' chạy trên (C) tiến dần đến P. Hãy xác định vị trí giới hạn I của N.
4. Chứng minh rằng trung điểm IP nằm trên tiếp diện của mặt cầu đã cho tại A và độ dài PM là trung bình nhân của R và khoảng cách d từ PM đến tiếp diện.

Giải



1. Ta có MO = OA = R

$MP = \sqrt{MO^2 - OP^2} = \sqrt{R^2 - OP^2}$

$AP = \sqrt{AO^2 - OP^2} = \sqrt{R^2 - OP^2}$

($\widehat{APO} = 90^0$ vì là góc nội tiếp chắn đường kính AO)

$\Rightarrow MP = AP \Rightarrow \widehat{MAP} = 45^0$

Nhưng $\widehat{MAP}$ chính là góc tạo bởi MA và mặt phẳng (π). Vì thế MA luôn tạo với (π) 1 góc không đổi $= 45^0$. Đó là đpcm.

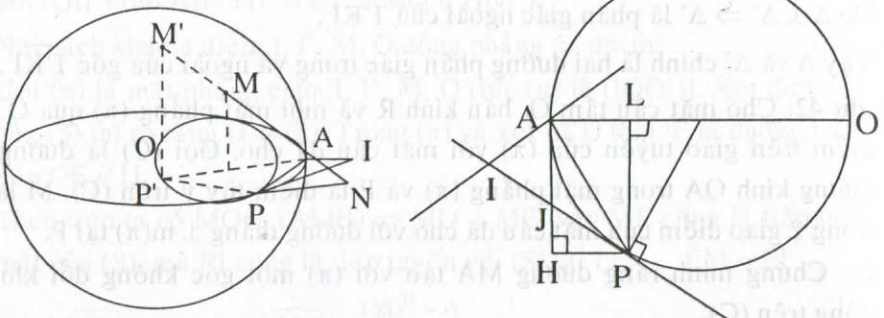
2. Theo trên ta có MP = AP; M'P' = AP'

Vì MP // M'P' (do chúng cùng $\perp (\pi)$, nên theo định lí Talet có

$$\frac{NP'}{NP} = \frac{M'P'}{MP} \Rightarrow \frac{NP'}{NP} = \frac{AP'}{AP} \qquad (1)$$

Hệ thức (1) chứng tỏ rằng AN là phân giác ngoài của góc $\widehat{PAP'} \Rightarrow$ đpcm.

3. Khi P'→ P thì PN tiến đến trùng với tiếp tuyến tại P của (C) và phân giác trong của $\widehat{PAP'}$ tiến đến trùng với AP. Theo câu 2 do AN là phân giác ngoài của $\widehat{PAP'}$, nên khi P'→ P thì AN tiến đến vị trí vuông góc với AP, tức là N tiến đến điểm I đó là giao điểm tiếp tuyến tại P của (C) và đường vuông góc với AP tại A.



4. Ta có AI ⊥ AP. Gọi J là trung điểm của IP thì ta có: JI = JP = JA

Do JI là tiếp tuyến với đường tròn (C)

⇒ JA cũng là tiếp tuyến với (C) ⇒ JA ⊥ AO

⇒ JA thuộc mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại A ⇒ đpcm.

Kẻ PH ⊥ AJ ⇒ PH = d. Vẽ PL ⊥ AO. Theo hệ thức lượng ta có

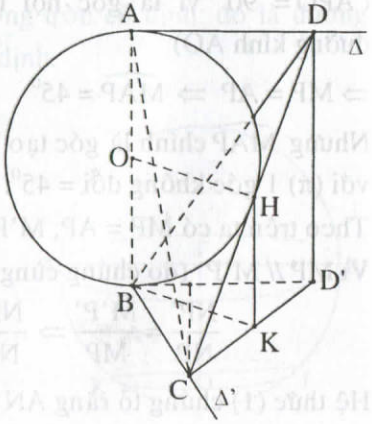
$AP^2 = AL.AO = PH.AO$. Theo trên ta có MP = AP

$\Rightarrow PM^2 = PA^2 = PH.AO = d.R$. Đó chính là đpcm.

Thí dụ 43: Cho hình cầu tâm O đường kính AB. Hai tiếp tuyến Δ, Δ' của hình cầu tại A và B vuông góc với nhau. CD là tiếp tuyến thứ ba thay đổi của hình cầu tựa trên Δ, Δ' (C∈Δ', D∈Δ).

1. Chứng minh thể tích hình chóp ABCD không phụ thuộc vào vị trí của CD.
2. Gọi H là tiếp điểm của CD với hình cầu. Chứng minh rằng H thuộc mặt phẳng cố định và CD tạo với mặt phẳng đó một góc không đổi.

Giải



1. Giả sử H là tiếp điểm của CD với mặt cầu. Gọi D' là hình chiếu vuông góc của D trên mặt phẳng chứa Δ'và vuông góc với AB. Ta có CB ⊥ AB; CB ⊥ AD

$\Rightarrow CB \perp (ABD) \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3}.BCS_{ABD}$

$= \frac{1}{3}BC.\frac{AB.AD}{2} = \frac{1}{6}AB.BC.AD \quad (1)$

Ta lại có CB = CH, AD = HD

$\Rightarrow \quad CD^2 = (CH + HD)^2 = (BC + AD)^2 = BC^2 + AD^2 + 2BC.AD$

Mặt khác, $CD^2 = DD'^2 + CD'^2$

$= DD'^2 + BC^2 + BD^2$

$= AB^2 + BC^2 + AD^2$

Từ đó suy ra $2BC.AD = AB^2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$V_{ABCD} = \dfrac{AB^3}{12} = \text{const} \Rightarrow$ đpcm.

2. Kẻ $HK \perp CD'$ ($K \in CD'$). Do $HK // DD'$ nên $\dfrac{CK}{KD'} = \dfrac{CH}{HD} = \dfrac{CB}{AD} = \dfrac{CB}{BD'}$

suy ra BK là phân giác góc $\widehat{CBD'}$, vậy H thuộc mặt phẳng (Q) được xác định bởi AB và phân giác BK của góc $\widehat{CBD'}$. Do Δ'cố định, $D'B' \perp D'$ (và AB cố định) nên Q cố định. Kẻ $CI \perp BK \Rightarrow CI \perp HK \Rightarrow CI \perp (BHK)$, do đó $\widehat{CHI}$ là góc giữa CD và Q. Ta có: $\sin\widehat{CHI} = \dfrac{CI}{CH} = \dfrac{CI}{BC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^0$ (lưu ý rằng $\widehat{CBK} = 45^0$).

Vậy CD tạo với Q không đổi một góc bằng $45^0 \Rightarrow$ đpcm.

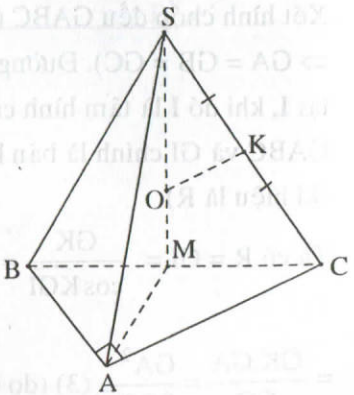
C. Nhìn lại các bài toán về hình cầu trong các đề thi tuyển sinh vào đại học cao đẳng

Trong mục này ta sẽ điểm lại các bài toán về hình cầu có mặt trong các đề thi tuyển sinh môn Toán vào các trường Đại học , Cao đẳng trong những năm gần đây.

Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A năm 2012)

Cho hình chóp S.ABCD, đáy là tam giác vuông cân tại A có $AB = a\sqrt{2}$. Giả sử $SA = SB = SC$ và SA tạo với mặt phẳng (ABC) góc 60^0. Tìm bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

Giải



Gọi M là trung điểm của BC thì M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Do $SA = SB = SC \Rightarrow SM \perp (ABC)$.

Vậy $\widehat{SAM}$ là góc tạo bởi SA và đáy $(ABC) \Rightarrow \widehat{SAM} = 60^0$.

Trong (SBC) vẽ trung trực của SC, cắt SM tại O, khi đó O là tâm hình cầu

ngoại tiếp hình chóp S.ABC và bán kính R của hình cầu này chính là SO.

Ta có $BC = AB\sqrt{2} = 2a \Rightarrow AM = \frac{BC}{2} = a$

$\Rightarrow SM = AM \tan 60^0 = a\sqrt{3} \Rightarrow SC = \sqrt{SM^2 + MC^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$

Trong tam giác vuông SOK, ta có $SO = \frac{SK}{\cos\widehat{OSK}}$

Từ đó $SO = \frac{SK}{\cos\widehat{MSC}} = \frac{SK}{\frac{SM}{SC}} = \frac{SC^2}{2SM} = \frac{4a^2}{2a\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2010)

Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có AB = a, góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác A'BC. Tìm bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC theo a.

Giải:

Gọi M là trung điểm của BC. Ta có $AM \perp BC \Rightarrow A'M \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc).

$\Rightarrow \widehat{A'MA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) $\Rightarrow \widehat{A'MA} = 60^0$.

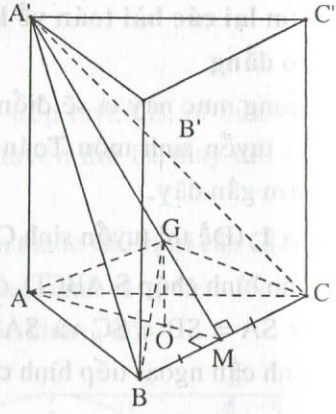
Gọi G là trọng tâm tam giác A'BC

$\Rightarrow G \in A'M$ và ta có $\frac{MG}{MA'} = \frac{1}{3}$ (1)

Gọi O là tâm của đáy ABC,

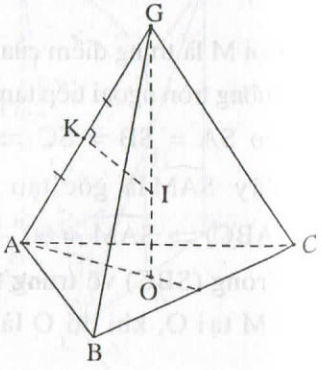
khi đó $O \in AM$ và ta cũng có

$\frac{MO}{MA} = \frac{1}{3}$ (2)



Từ (1), (2) suy ra GO // A'A $\Rightarrow$ GO $\perp$ (ABC)

Xét hình chóp đều GABC (do OA = OB = OC $\Rightarrow$ GA = GB = GC). Đường tròn của GA cắt GO tại I, khi đó I là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện GABC và GI chính là bán kính hình cầu này. (kí hiệu là R).



Ta có $R = GI = \frac{GK}{\cos\widehat{KGI}} = \frac{GK}{\cos\widehat{AGO}} = \frac{GK}{\frac{GO}{GA}}$

$= \frac{GK.GA}{GO} = \frac{GA^2}{2GO}$. (3) (do $GK = \frac{GA}{2}$)

Trong tam giác vuông A'AM, ta có $AA' = AM.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{3} = \frac{3a}{2}$

Do $GO = \frac{1}{3}AA' \Rightarrow GO = \frac{a}{2}$. (4)

Lại có $GA^2 = GO^2 + OA^2 = \frac{a^2}{4} + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{7a^2}{12}$ (5)

Thay (4), (5) vào (3) và có $R = \frac{7a^2}{24\frac{a}{2}} = \frac{7a}{12}$.

Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2003)

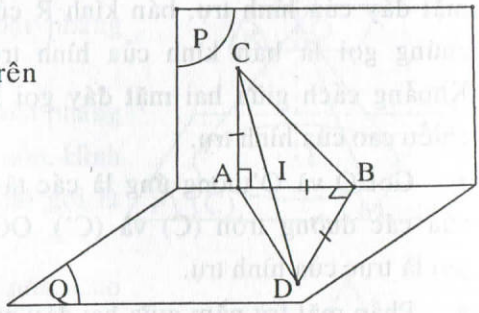
Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau có giao tuyến là Δ. Từ Δ lấy hai điểm A, B sao cho AB = a. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ. Giả sử AC = BD = AB. Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D nằm trên một mặt cầu và tìm bán kính của hình cầu ấy.

Giải

Do $(P) \perp (Q)$, $(P) \cap (Q) = \Delta$ mà $AC \perp \Delta \Rightarrow AC \perp (Q) \Rightarrow AC \perp AD$.

Tương tự ta có $DB \perp BC$. Như vậy nếu gọi I là trung điểm của CD thì có

$IA = IB = IC = ID = \frac{CD}{2}$ (1)



(1) chứng tỏ rằng A, B, C, D nằm trên mặt cầu tâm I bán kính $R = \frac{1}{2}CD$

Ta có $CD^2 = CA^2 + AD^2$

$= CA^2 + AB^2 + BD^2$

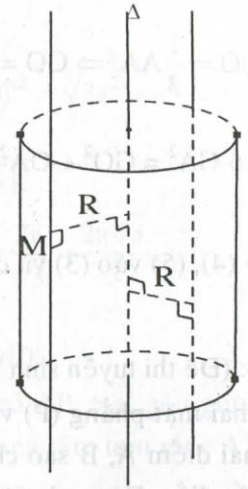
$= a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$

$\Rightarrow CD = a\sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

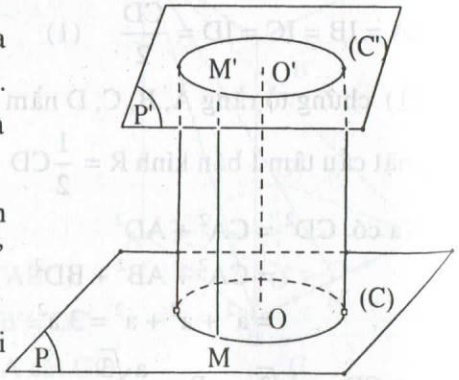
§ 2. HÌNH TRỤ, HÌNH NÓN

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Hình trụ:



- Tập hợp các điểm M trong không gian cách đường thẳng Δ cố định một khoảng cách không đổi R > O gọi là một mặt trụ tròn xoay hoặc đơn giản là mặt trụ.
- Đường thẳng Δ gọi là trục của mặt trụ, R gọi là bán kính của mặt trụ.
- Nếu đường thẳng d // Δ và cách Δ một khoảng R thì đường thẳng d nằm trên mặt trụ (mà ta sẽ kí hiệu là T (Δ, R)). Các đường thẳng d như vậy gọi là đường sinh của mặt trụ.
- Mặt trụ là hình tạo bởi các đường thẳng song song và cách đường thẳng Δ một khoảng R.
- Phần mặt trụ nằm giữa hai mặt phẳng (P) và (P') cùng với hai hình tròn (C) và (C') gọi là hình trụ.
  - Hai hình tròn (C) và (C') gọi là hai mặt đáy của hình trụ, bán kính R của chúng gọi là bán kính của hình trụ. Khoảng cách giữa hai mặt đáy gọi là chiều cao của hình trụ.
  - Gọi O và O'tương ứng là các tâm của các đường tròn (C) và (C'). OO' gọi là trục của hình trụ.
  - Phần mặt trụ nằm giữa hai đáy gọi là mặt xung quanh của hình trụ.
  - Với mỗi M ∈ (C), tồn tại M'∈ (C') sao cho MM' // OO'. MM' gọi là đường sinh của hình trụ.
  - Mỗi hình trụ chia không gian thành hai phần, phần bên trong và bên ngoài hình trụ.



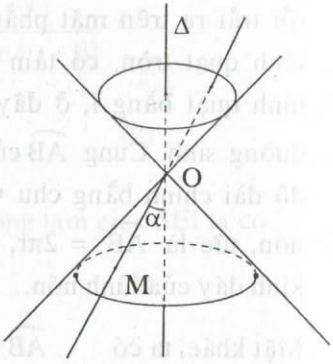
- Hình trụ cùng với phần bên trong của nó được gọi là khối trụ xác định bởi hình trụ đó.
- Diện tích xung quanh và thể tích khối trụ.

Gọi R và h tương ứng là bán kính và chiều cao của khối trụ; S_{xq}, S_{tp}, V tương ứng là diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của khối trụ. Khi đó ta có:

$S_{xq} = 2\pi rh$, $S_{tp} = 2\pi r + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(r+h)$, $V = \pi r^2$

2. Hình nón

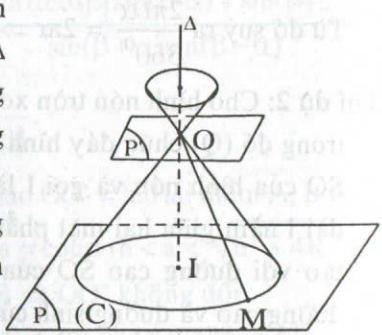
- Cho đường thẳng Δ và một điểm O cố định trên Δ. Tập hợp gồm điểm O và các điểm M không trùng với O sao cho đường thẳng OM tạo với Δ một góc không đổi α ($0^0 < \alpha < 90^0$) được gọi là một mặt nón tròn xoay, hay đơn giản là mặt nón.



- Điểm O là đỉnh của mặt nón.
- Đường thẳng Δ gọi là trục của mặt nón.
- Góc 2α gọi là góc ở đỉnh của mặt nón.
- Nếu M là một điểm nằm trên mặt nón mà M ≠ O thì đường thẳng OM cũng nằm trên mặt nón.

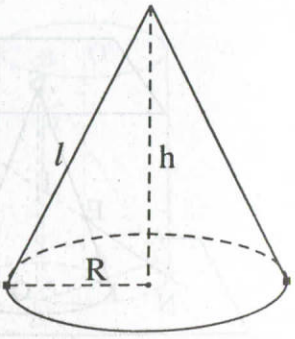
Các đường thẳng này gọi là đường sinh của mặt nón.

- Cho mặt nón với trục Δ, đỉnh O và góc ở đỉnh là 2α. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với Δ tại điểm I ≠ O. (P) cắt mặt nón theo đường tròn (C) có tâm I. Gọi (P') là mặt phẳng vuông góc với Δ tại O.



Phần của mặt nón giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (P') cùng với (C) gọi là hình nón. Hình nón cùng với phần bên trong của nó gọi là khối nón xác định bởi hình nón đó.

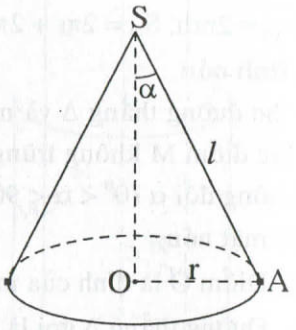
- Diện tích hình nón và thể tích khối nón. Cho hình nón có bán kính đường tròn đáy là R, chiều cao h, đường sinh là *l*. Gọi S_{xq}, S_{tp}, V tương ứng là diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình nón và thể tích của khối nón. Ta có



$$S_{xq} = \pi Rl,\ S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R),\ V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

B. Các dạng toán cơ bản

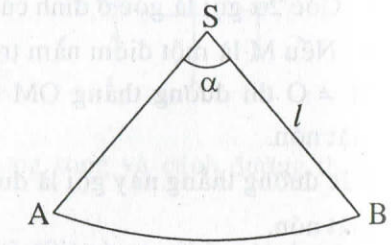
Thí dụ 1: Cho hình nón có đường sinh và đường cao tạo với nhau góc α. Khai triển hình nón theo một đường sinh ta được một hình quạt tròn có góc ở tâm là β. Chứng minh rằng: $\beta = 360^0 \sin\alpha$.



Giải

Giả sử SO là chiều cao hình nón và SA là một đường sinh. Khi đó ta có $\widehat{OSA} = \alpha$.

Cắt dọc hình nón theo đường sinh SA, rồi trải ra trên mặt phẳng ta được một hình quạt tròn, có tâm là S, bán kính hình quạt bằng l, ở đây l là chiều dài đường sinh. Cung $\overset{\frown}{AB}$ của hình quạt có độ dài chính bằng chu vi đáy của hình nón, tức là $\overset{\frown}{AB} = 2\pi r$, ở đây r là bán kính đáy của hình nón.

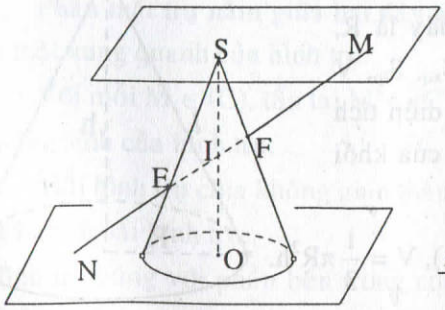


Mặt khác, ta có $\overset{\frown}{AB} = \dfrac{2\pi l.\alpha}{360^0}$

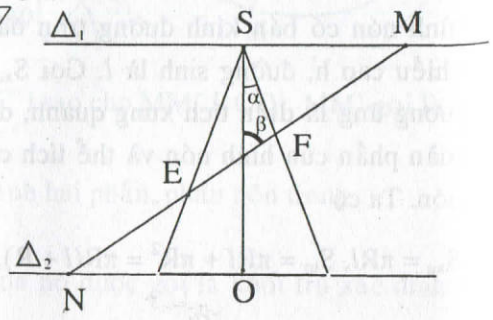
Từ đó suy ra $\dfrac{2\pi l.\alpha}{360^0} = 2\pi r \Rightarrow \alpha = 360^0 \sin\beta$. Đó là đpcm.

Thí dụ 2: Cho hình nón tròn xoay nằm giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q), trong đó (Q) chứa đáy hình nón, còn (P) qua đỉnh S hình nón. Kẻ đường cao SO của hình nón và gọi I là trung điểm của SO. Một đoạn thẳng MN có độ dài l nằm giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) và qua I cắt mặt nón tại E và F và tạo với đường cao SO của hình nón một góc bằng β. Biết rằng góc giữa đường cao và đường sinh của hình nón là α. Tìm độ dài đoạn EF (tức là phần đoạn thẳng nằm trong hình nón).

Giải



Hình a



Hình b

Cắt hình nón bằng thiết diện qua trục ta được hình cắt như trên (xem hình b).

Theo giả thiết ta có MN = l; SI = IO; $\widehat{SIF} = \beta$; $\widehat{ISF} = \alpha$

$\Delta_1 // \Delta_2$. Ta có $EF = EI + IF$ (1)

Vì $\Delta_1 // \Delta_2$ và IS = IO $\Rightarrow MI = NI = \frac{1}{2}$.

Trong tam giác vuông SIM thì $SI = MI\cos\beta = \frac{l\cos\beta}{2}$

Theo định lí hàm số sin trong tam giác SIF, ta có

$$\frac{IF}{\sin\alpha} = \frac{SI}{\sin\left[180^0 - (\alpha+\beta)\right]} = \frac{SI}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\Rightarrow \quad IF = \frac{SI\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\ell\sin\alpha\cos\beta}{2\sin(\alpha+\beta)} \qquad (2)$$

Ta có $\widehat{SEI} = \beta - \alpha$ vì thế theo định lí hàm số sin trong tam giác SEI ta có

$$\frac{EI}{\sin\alpha} = \frac{SI}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{SI\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{\ell\sin\alpha\cos\beta}{2\sin(\alpha-\beta)} \qquad (3)$$

Thay (2) (3) vào (1) ta có

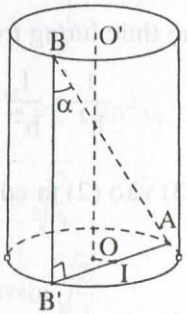
$$EF = \frac{\ell\sin\alpha\cos\beta}{2}\left[\frac{1}{\sin(\beta+\alpha)} + \frac{1}{\sin(\beta-\alpha)}\right] = \frac{\ell\sin\alpha\cos\beta\left[\sin(\beta-\alpha)+\sin(\beta+\alpha)\right]}{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}$$

$$= \frac{2\ell\sin\alpha\cos\beta\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)} = \frac{\ell\sin 2\alpha\sin 2\beta}{2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}.$$

Thí dụ 3: Cho hình trụ bán kính đáy bằng R, chiều cao OO' = h. Hai điểm A, B thay đổi trên hai đường tròn đáy sao cho độ dài AB = a = const ($h < a < \sqrt{h^2 + 4R^2}$).

1. Chứng minh rằng góc giữa hai đường thẳng AB và OO' không đổi.
2. Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OO' không đổi.

Giải



1. Gọi BB' là đường sinh của hình trụ Khi đó BB' // O'O. Khi đó $\widehat{B'BA} = \alpha$ chính là góc giữa hai đường thẳng AB và OO'. Trong tam giác vuông BB'A tại B', ta có: $\cos\alpha = \frac{BB'}{AB} = \frac{h}{a}$ = const.

   $\Rightarrow \alpha$ = const $\Rightarrow$ đpcm.

2. Gọi I là trung điểm của AB' $\Rightarrow$ OI $\perp$ AB'. Kết hợp với BB' $\perp$ OI $\Rightarrow$ OI $\perp$ (ABB').

Do OO' // (ABB') $\Rightarrow$ OI = d(AB, OO')

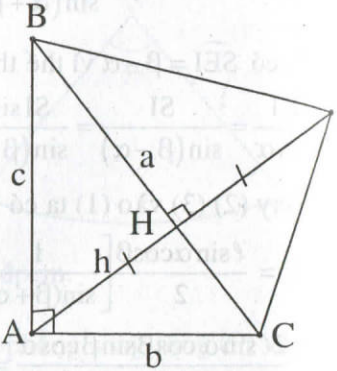
Ta có $AB' = \sqrt{AB^2 - BB'^2} = \sqrt{a^2 - h^2}$

$$\Rightarrow AI = \frac{1}{2}AB' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - h^2} \Rightarrow OI = \sqrt{OA^2 - AI^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2 - h^2}{4}}$$

Vậy $d(AB, OO') = \sqrt{R^2 - \frac{a^2 - h^2}{4}} = \text{const} \Rightarrow$ đpcm.

Thí dụ 4: Cho tam giác vuông ABC tại A. Gọi V_a, V_b, V_c lần lượt là thể tích của các hình nón tròn xoay tạo bởi tam giác ABC khi cho nó quay quanh các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng: $\frac{1}{V_a^2} = \frac{1}{V_b^2} + \frac{1}{V_c^2}$

Giải



Kẻ AH $\perp$ BC.

Đặt AB = c, AC = b, BC = a, AH = h

Ta có $V_b = \frac{1}{3}\pi c^2 b$,

$V_c = \frac{1}{3}\pi b^2 c$,

$V_a = \frac{1}{3}\pi h^2 (BH + HC) = \frac{1}{3}\pi h^2 a$.

Từ đó suy ra $\frac{1}{V_b^2} + \frac{1}{V_c^2} = \frac{9}{\pi^2}\left(\frac{1}{c^4 b^2} + \frac{1}{b^4 c^2}\right)$

$$= \frac{9}{\pi^2}\frac{c^2 + b^2}{b^4 c^4} = \frac{9}{\pi^2}\frac{a^2}{b^4 c^4} \quad (1)$$

$$\frac{1}{V_a^2} = \frac{9}{\pi^2 h^4 a^2} \quad (2)$$

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC thì:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2} = \frac{a^2}{b^2 c^2} \quad (3)$$

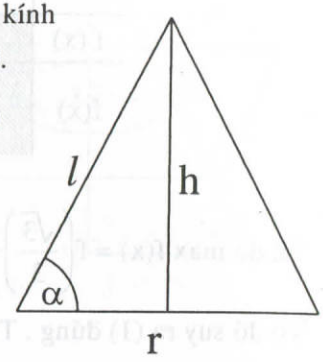
Thay (3) vào (2) ta có: $\frac{1}{V_a^2} = \frac{9}{\pi^2 a^2 \frac{b^4 c^4}{a^4}} = \frac{9a^2}{\pi^2 b^4 c^4}$ (4)

Từ (1) (4) suy ra: $\frac{1}{V_a^2} = \frac{1}{V_b^2} + \frac{1}{V_c^2} \Rightarrow$ đpcm.

Thí dụ 5: Giả sử V, S tương ứng là thể tích và diện tích xung quanh của hình nón. Chứng minh rằng: $\left(\frac{6V}{\pi}\right)^2 \le \left(\frac{2S}{\pi\sqrt{3}}\right)^3$

Giải

Gọi l, h, r lần lượt là đường sinh, chiều cao và bán kính của hình nón, còn α là góc giữa đường sinh và đáy.



Ta có $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^3 \tan\alpha$ (do h =rtanα)

$S = \pi rh = \frac{\pi r^2}{\cos\alpha}$ (do $l = \frac{r}{\cos\alpha}$)

Từ đó ta có

$$\left(\frac{6V}{\pi}\right)^2 \le \left(\frac{2S}{\pi\sqrt{3}}\right)^3 \Leftrightarrow \left(2r^3\tan\alpha\right)^2 \le \left(\frac{2r^2}{\sqrt{3}\cos\alpha}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \tan^2\alpha \le \frac{2}{3\sqrt{3}\cos^3\alpha} \Leftrightarrow \sin^2\alpha.\cos\alpha \le \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad (1)$$

Do $0 < r < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha > 0, \cos\alpha > 0$ nên

$$(1) \Leftrightarrow \sin^2\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha} \le \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{2}\frac{\sin^2\alpha}{2}(1-\sin^2\alpha)} \le \frac{1}{3\sqrt{3}} \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\frac{\sin^2\alpha}{2}\frac{\sin^2\alpha}{2}(1-\sin^2\alpha) \le \left(\frac{\frac{\sin^2\alpha}{2}+\frac{\sin^2\alpha}{2}+(1-\sin^2\alpha)}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$\Rightarrow$ (2) đúng . Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow \frac{\sin^2\alpha}{2} = 1-\sin^2\alpha$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Chú ý: Ta có thể chứng minh (1) như sau:

Đặt $x = \cos\alpha$ $(0 < x < 1)$, khi đó $\sin^2\alpha \cos\alpha = x(1-x^2)$

Xét hàm số $f(x) = x(1-x^2) = x - x^3$ với $0 < x < 1$

Ta có $f'(x) = 1 - 3x^2$, nên có bảng biến thiên sau

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	‖	↗		↘	‖

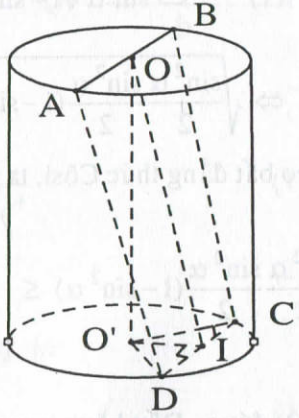
Từ đó $\max f(x) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$, $0 < x < 1$

Từ đó suy ra (1) đúng . Ta thu lại kết quả như trên.

Thí dụ 6: Cho hình trụ có bán kính đáy R, trục $OO' = h$. Mặt phẳng (P) thay đổi đi qua O tạo với đáy hình trụ góc α cho trước và cắt hai đáy của hình trụ đã cho theo các dây AB, CD (AB qua O).

1. Tính diện tích tứ giác ABCD.
2. Chứng minh rằng hình chiếu vuông góc H của O' trên (P) nằm trên một đường tròn cố định.

Giải



1. Vì hai đáy của hình trụ nằm trên hai mặt phẳng song song nên ta có AB // CD

$\Rightarrow$ ABCD là hình thang.

Gọi I là trung điểm của CD $\Rightarrow O'I \perp DC$

$\Rightarrow OI \perp CD$ (định lí ba đường vuông góc)

$\Rightarrow \widehat{OIO'} = \alpha$

Ta có $S_{ABCD} = \frac{(AB+CD)OI}{2}$ (1)

Ta có $OI = \frac{OO'}{\sin\alpha} = \frac{h}{\sin\alpha}$

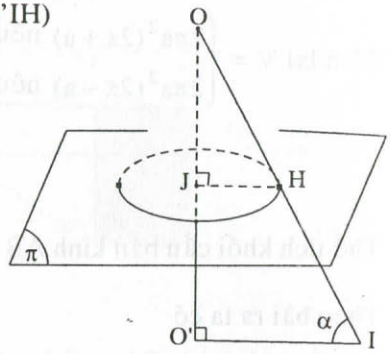
$O'I = h.\cot\alpha \Rightarrow DI = \sqrt{O'D^2 - O'I^2} = \sqrt{R^2 - h^2\cot^2\alpha}$

$\Rightarrow CD = 2DI = 2\sqrt{R^2 - h^2\cot^2\alpha}$

Thay lại vào (1) và có

$$S_{ABCD} = \frac{\left(2R + 2\sqrt{R^2 - h^2\cot^2\alpha}\right)h}{2\sin\alpha} = \left(R + \sqrt{R^2 - h^2\cot^2\alpha}\right)\frac{h}{\sin\alpha}$$

2. Trong (OO'I) kẻ O'H ⊥ OI. Vì DC ⊥ (O'IH)



⇒ (ABCD) ⊥ (O'IH) ⇒ O'H'⊥ (ABCD)

Vậy H chính là hình chiếu của O' trên (P).

Ta có O'H = O'I sinα = hcotαsinα = hcosα

Trong tam giác vuông O'HO kẻ HJ ⊥ OO'

⇒ O'J . OO' = O'H²

$$\Rightarrow O'J = \frac{O'H^2}{OO'} = \frac{h^2\cos^2\alpha}{h} = h\cos^2\alpha = \text{const}$$

⇒ J cố định

Lại có $HJ^2 = OH^2 - O'J^2 = h^2\cos^2\alpha - h^2\cos^4\alpha$

$= h^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha$

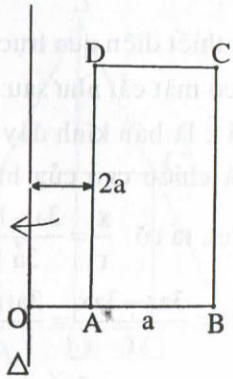
⇒ HJ = const ⇒ H nằm trên đường tròn tâm J bán kính bằng hcosαsinα = const. Đường tròn này nằm trong mặt phẳng (π) vuông góc với OO' tại J do đó (π) cố định ⇒ đpcm.

Thí dụ 7: Cho hình chữ nhật ABCD với AB = a, BC = 2a và đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (ABCD), Δ // AD và Δ cách AD một khoảng x (Δ không có điểm chung với ABCD).

1. Tìm thể tích của hình tròn xoay tạo nên khi quay hình chữ nhật ABCD quanh Δ.
2. Tìm x để thể tích nói trên gấp ba lần thể tích hình cầu có bán kính bằng cạnh AB.

Giải

1. Xét hai trường hợp sau:



a. Nếu OB > OA thì dễ thấy hình tạo thành là hai khối trụ lồng nhau có chiều cao bằng 2a và bán kính đáy lần lượt là a + x, x.

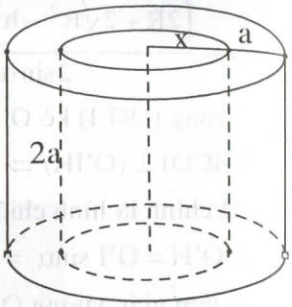
Gọi V là thể tích của hình tròn xoay, thì V là hiệu của hai thể tích hình trụ nên

$V = \pi 2a[(x+a)^2 - x^2] = \pi 2a(a^2 + 2ax) = 2\pi a^2(a+2x)$

b. Nếu OA > OB thì lập luận tương tự như trên ta có $V = \pi 2a[x^2 - (x-a)^2]$

$= 2\pi a(2ax - a^2) = 2\pi a^2(2x-a)$

Tóm lại $V = \begin{cases} 2\pi a^2(2x+a) & \text{nếu } OA < OB \\ 2\pi a^2(2x-a) & \text{nếu } OA > OB \end{cases}$

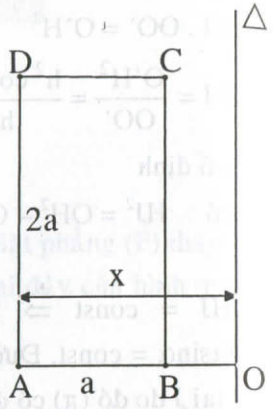


2. Thể tích khối cầu bán kính AB = a là $V_1 = \frac{4}{3}\pi a^3$

Theo bài ra ta có

Nếu OA < OB : $2\pi a^2(2x + a) = 4\pi a^3 \Rightarrow x = \frac{a}{2}$.

Nếu OA > OB : $2\pi a^2(2x - a) = 4\pi a^3 \Rightarrow x = \frac{3a}{2}$.



C. Các bài toán phối hợp giữa hình trụ, hình nón với hình cầu và các khối đa diện

Thí dụ 1: Một hình nón có bán kính đáy bằng r, chiều cao bằng 3a. Tìm hình trụ nội tiếp hình nón và thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

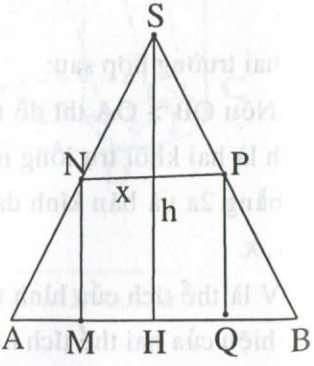
1. Thể tích hình trụ đạt giá trị lớn nhất
2. Diện tích xung quanh hình trụ đạt giá trị lớn nhất

Giải

1. Xét thiết diện qua trục của hình nón.

Ta có mặt cắt như sau:

Gọi x là bán kính đáy của hình trụ nội tiếp và h là chiều cao của hình trụ ấy. Theo định lí Talet, ta có: $\frac{x}{r} = \frac{3a-h}{3a} \Rightarrow 3ax = 3ar - rh$



$\Rightarrow h = \frac{3ar - 3ax}{r} = \frac{3a(r-x)}{r}$

$V = V_{trụ} = \pi x^2 \frac{3a(r-x)}{r} = \frac{3a\pi}{x}\left(x^2 r - x^3\right)$. (1)

Xét hàm số $f(x) = x^2r - x^3$ với $0 < x < r$.

$f'(x) = 2xr - 3x^2$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	0		$\frac{2r}{3}$		r
f'(x)		+	0	-	
f(x)		↗		↘	

Như thế $\max f(x) = f\left(\frac{2r}{3}\right)$ với $0 < x < r$

Vậy hình trụ nội tiếp hình nón có thể tích lớn nhất $\Leftrightarrow$ bán kính đáy của nó $= \frac{2r}{3}$

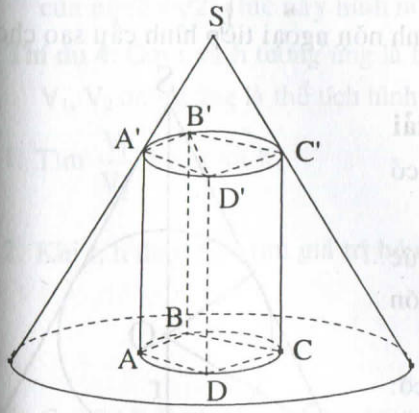
2. $S_{XQ} = S_{XQ\ trụ} = \pi x \frac{3a(r-x)}{r} = \frac{3a\pi}{2} x(r-x)$

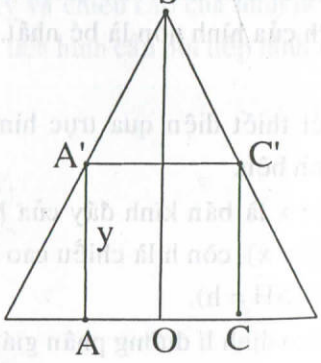
Vậy S_{XQ} đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow x = \frac{r}{2}$.

Thí dụ 2: Cho hình nón có bán kính đáy bằng r, chiều cao bằng h. Tìm hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông nội tiếp hình nón sao cho thể tích của nó là lớn nhất.

Giải

Giả sử ABCD.A'B'C'D' là hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông nội tiếp trong hình nón đã cho. Cắt hình nón bằng thiết diện qua trục ta có mặt cắt như sau:





Gọi x là cạnh đáy của hình hộp, khi đó do đáy là hình vuông nên AC = A'C' = $x\sqrt{2}$. Gọi y là chiều cao của hình hộp. Khi đó theo định lí Talet, ta có:

$$\frac{\frac{x\sqrt{2}}{2}}{r} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow x\sqrt{2}h = 2rh - 2ry \Rightarrow 2ry = h\left(2r - x\sqrt{2}\right)$$

$$\Rightarrow y = \frac{h\left(2r - x\sqrt{2}\right)}{2r}$$

Gọi V là thể tích hình hộp, ta có:

$$V = x^2y = \frac{x^2h\left(2r - x\sqrt{2}\right)}{2r} = \frac{h}{2r}\left(2rx^2 - \sqrt{2}x^3\right)$$

Xét hàm số $f(x) = 2rx^2 - \sqrt{2}x^3$ với $0 < x < r\sqrt{2}$

$$f'(x) = 4rx - 3\sqrt{2}x^2$$

Từ đó có bảng biến thiên sau:

x	0		$\frac{2\sqrt{2}}{3}r$		$r\sqrt{2}$
f'(x)	‖	+	0	-	‖
f(x)	‖	↗		↘	‖

Vậy f(x) đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{2}}{3}r$.

Từ đó suy ra hình hộp cần tìm có đáy là hình vuông với cạnh $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}r$.

Thí dụ 3: Cho hình cầu bán kính r. Tìm hình nón ngoại tiếp hình cầu sao cho thể tích của hình nón là bé nhất.

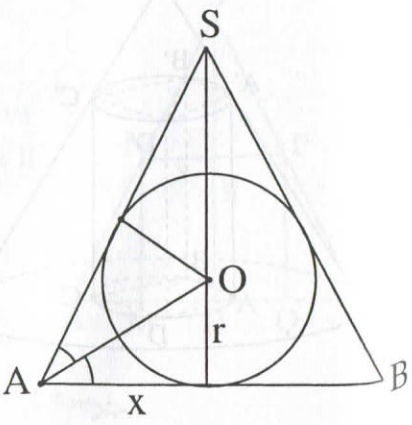
Giải

Xét thiết diện qua trục hình nón, ta có hình bên.

Gọi x là bán kính đáy của hình nón (tức AH = x), còn h là chiều cao của hình nón (tức SH = h).

Theo định lí đường phân giác trong ta có:

$$\frac{OH}{OS} = \frac{AH}{SA} \Rightarrow \frac{r}{h-r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}$$



$$\Rightarrow \frac{(h-r)^2}{r^2} = \frac{x^2+h^2}{x^2} \Rightarrow \frac{h^2-2rh+r^2}{r^2} = \frac{x^2+h^2}{x^2} \Rightarrow \frac{h^2}{r^2} - 2\frac{h}{r} + 1 = 1 + \frac{h^2}{x^2}$$

Do $h > 0$ nên ta có $\frac{h}{r^2} - \frac{2}{r} = \frac{h}{x^2}$

$$\Rightarrow h\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{r} \Rightarrow h\frac{x^2-r^2}{r^2x^2} = \frac{2}{r} \Rightarrow h = \frac{2rx^2}{x^2-r^2}$$

Gọi V là thể tích hình nón. Khi đó ta có

$$V = \pi x^2 h = 2\pi r\frac{x^4}{x^2-r^2} \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{t-r^2}$ với $t > r$

$$f'(t) = \frac{t^2-2tr}{\left(t-r^2\right)^2}$$

Từ đó có bảng biến thiên sau:

t	r		2r	
f'(t)	‖	-	0	+
f(t)	‖	↘		↗

Vậy f(t) đạt giá trị lớn nhất khi $t = 2r$

Từ đó V đạt giá trị bé nhất khi $x^2 = 2r \Leftrightarrow x = r\sqrt{2}$

Như thế, hình nón ngoại tiếp hình cầu có thể tích bé nhất khi bán kính đáy của nó là $r\sqrt{2}$ (lúc này hình nón hoàn toàn xác định).

Thí dụ 4: Gọi r và h tương ứng là bán kính đáy và chiều cao của hình nón. Kí hiệu V_1, V_2 tướng ứng là thể tích hình nón và thể tích hình cầu nội tiếp hình nón.

1. Tìm $\frac{V_1}{V_2}$ theo r và h.

2. Khi r, h thay đổi, tìm giá trị bé nhất của $\frac{V_1}{V_2}$

Giải

1. Gọi SAB là thiết diện qua trục của hình nón.
Đường phân giác của góc A cắt SH tại I.
Khi đó R = IH là bán kính hình cầu nội tiếp.



Theo tính chất của đường phân giác, ta có:

$$\frac{R}{SI}=\frac{AH}{SA}=\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{R+SI}=\frac{r}{r+\sqrt{r^2+h^2}} \Rightarrow R=\frac{hr}{r+\sqrt{r^2+h^2}}$$

Ta có $V_1=\frac{1}{3}\pi r^2h$; $V_2=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\frac{h^3r^3}{\left(r+\sqrt{r^2+h^2}\right)^3}$

Từ đó suy ra $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\left(r+\sqrt{r^2+h^2}\right)^3}{4rh^2}$.

2. Biến đổi tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ như sau:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{4}\frac{\left(\sqrt{1+\frac{h^2}{r^2}}+1\right)^3}{\frac{h^2}{r^2}}=\frac{1}{4}\frac{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^3}{x},\ x=\frac{h^2}{r^2}>1.$$

Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{4}\frac{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^3}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{\left(1+\sqrt{1+x}\right)^2\left(x-2-2\sqrt{1+x}\right)}{4.2x^2\sqrt{1+x}}$

Chỉ cần xét dấu của $g(x)=x-2-2\sqrt{1+x} \Rightarrow g'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{1+x}}>0$

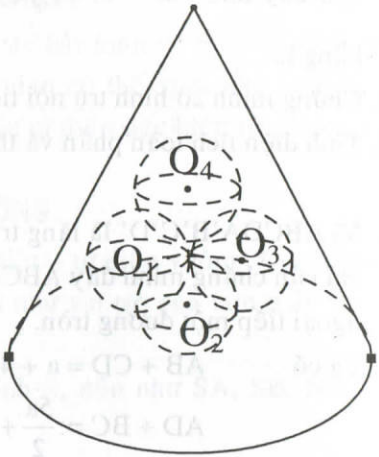
$\Rightarrow$ g(x) là hàm tăng trên miền $x>1$ và $g(8)=0 \Rightarrow \begin{cases} g(x)\le 0 \text{ nếu } 1<x\le 8 \\ g(x)>0 \text{ nếu } x>8 \end{cases}$

x	1		8	+∞
g(x)	‖	-	0	+
f'(x)	‖	-	0	+
f(x)	‖ ↘		2	↗

Vậy $\min f(x)=2 \Rightarrow$ Giá trị bé nhất của $\frac{V_1}{V_2}$ là 2.

Thí dụ 5: Cho hình nón có tính chất sau: Có 4 quả cầu bán kính r, trong đó ba quả tiếp xúc với đáy, tiếp xúc lẫn nhau và tiếp xúc với mặt xung quanh hình nón. Tìm chiều cao hình nón.

Giải



Gọi O_1, O_2, O_3 là tâm của ba quả cầu tiếp xúc với đáy hình nón, tiếp xúc lẫn nhau và tiếp xúc với mặt phẳng xung quanh hình nón. Khi đó $(O_1O_2O_3)$ là mặt phẳng song song với đáy hình nón và cách nó một khoảng bằng r. Xét hình cầu thứ tư tâm O_4. Do hình cầu này tiếp xúc với ba quả cầu kia, tiếp xúc với mặt xung quanh hình nón nên O_4 nằm trên đường cao của hình nón. Cắt hình nón bằng một thiết diện qua trục và qua O_1, ta có hình cắt như ở dưới (ở đây H là tâm tam giác đều $O_1O_2O_3$).

Ta có $O_1O_4 = 2r$; $O_1H = \frac{2}{3}\frac{2r\sqrt{3}}{2} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$ từ đó theo định lí Py-ta-go, ta có:

$$O_4H = \sqrt{O_1O_4^2 - O_1H^2} = \sqrt{4r^2 - \frac{4r^2}{3}} = \sqrt{\frac{8r^2}{3}} \Rightarrow O_4H = \frac{2r\sqrt{6}}{3} \quad (*)$$

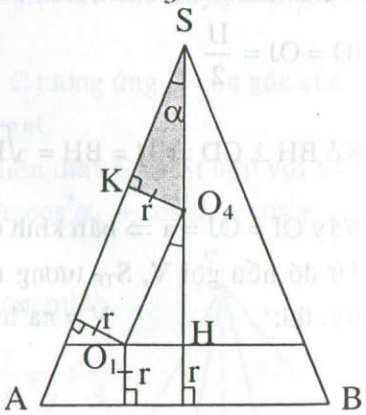
Đặt $\widehat{KSO_4} = \alpha \Rightarrow \widehat{O_1O_4H} = \alpha$.

Ta có trong tam giác vuông SKO_4, thì

$$SO_4 = \frac{r}{\sin\alpha}$$

Còn trong tam giác O_4O_1H, thì:

$$\text{Sin}\alpha = \frac{O_1H}{O_1O_4} = \frac{\frac{2r\sqrt{3}}{3}}{2r} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



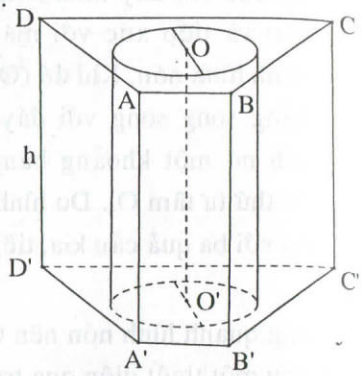
Thay (2) vào (1) và có $SO_4 = r\sqrt{3}$

Vậy gọi h là chiều cao của hình nón thì $h = SO_4 + O_4H + r$

$$= r\sqrt{3} + \frac{2r\sqrt{6}}{3} + r = r\left(\sqrt{3} + 1 + \frac{2\sqrt{6}}{3}\right).$$

Thí dụ 6: Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thang cân đáy nhỏ AB = a, đáy lớn CD = 4a, cạnh bằng $\frac{5a}{2}$; chiều cao lăng trụ bằng h.

1. Chứng minh có hình trụ nội tiếp lăng trụ
2. Tính diện tích toàn phần và thể tích hình trụ đó.



Giải

1. Vì ABCDA'B'C'D' là lăng trụ đứng nên ta chỉ cần chứng minh đáy ABCD là tứ giác ngoại tiếp một đường tròn.

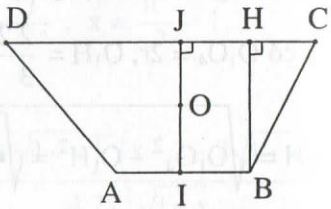
   Ta có $AB + CD = a + 4a = 5a$

   $AD + BC = \frac{5a}{2} + \frac{5a}{2} = 5a$

   $\Rightarrow AB + CD = AD + BC$

   $\Rightarrow$ ABCD là tứ giác ngoại tiếp một đường tròn $\Rightarrow$ đpcm.

2. Hình trụ phải tìm có trục OO' = h và đáy là hình trụ nội tiếp hình thang cân, ở đây O và O'là tâm hai đường tròn nội tiếp hai đáy của lăng trụ) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD. Ta có:



$IO = OJ = \frac{IJ}{2}$

Kẻ $BH \perp CD \Rightarrow IJ = BH = \sqrt{BC^2 - HC^2} = \sqrt{\frac{25a^2}{4} - \left(2a - \frac{a}{2}\right)^2} = 2a.$

Vậy $OI = OJ = a \Rightarrow$ bán kính đáy hình trụ bằng a.

Từ đó nếu gọi V, S_{TP} tương ứng là thể tích và diện tích toàn phần của hình trụ, thì: $V = \pi a^2 h$; $S_{TP} = 2\pi ah + 2\pi a^2 = 2\pi a\,(a + h)$.

CHƯƠNG 4. MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ ĐẶC BIỆT

Chuyên đề 1. HÌNH TỨ DIỆN

Trong chuyên đề này ta sẽ đề cập đến các bài toán về hình tứ diện. Vai trò của hình tứ diện trong hình học không gian có thể xem như hình tam giác trong hình học phẳng. Ở đây ta sẽ xét các tứ diện đặc biệt: tứ diện vuông, tứ diện trực tâm, tứ diện gần đều.

§1. TỨ DIỆN VUÔNG

Dưới đây ta sẽ xét một lớp tứ diện đặc biệt – tứ diện vuông. Có thể xem vai trò của tứ diện vuông trong hình tứ diện như vai trò của tam giác vuông khi nghiên cứu về tam giác.

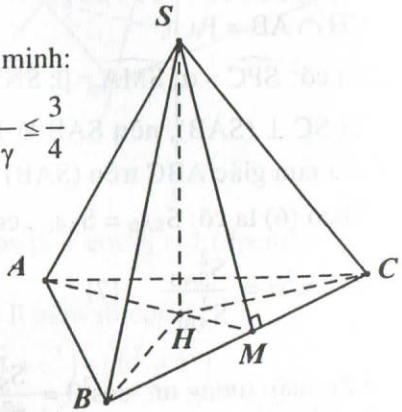
Tứ diện SABC gọi là tứ diện vuông đỉnh S, nếu như SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau.

Thí dụ 1. (Bài tập cơ bản về tứ diện vuông)

Cho tứ diện vuông SABC đỉnh S.

1. Kẻ đường cao SH. Chứng minh H là trực tâm tam giác ABC.
2. Chứng minh rằng: $\frac{1}{SH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{SB^2}+\frac{1}{SC^2}$.
3. Chứng minh định lý Pitago trong không gian: $S^2_{ABC}=S^2_{SAB}+S^2_{SBC}+S^2_{SCA}$
4. Giả sử các mặt bên SAB, SBC, SCA lần lượt tạo với đáy ABC các góc α, β, γ. Chứng minh $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$
5. Giả sử SA = a, SB = b, SC = c. Gọi A, B, C tương ứng là các góc của tam giác ABC. Chứng minh: $a^2\tan A=b^2\tan B=c^2\tan C$
6. Giả sử St là một tia nằm trong góc tam diện đỉnh S và St hợp với SA, SB, SC các góc lần lượt là α_1, β_1, γ_1. Chứng minh: $\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1$
7. Chứng minh ABC là tam giác nhọn.
8. Gọi α, β, γ là 3 góc xác định ở câu 4. Chứng minh:

$$\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta+\sin^2\gamma}+\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta+\sin^2\gamma}+\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\beta+\sin^2\gamma}\le\frac{3}{4}$$



Giải

1) AH ∩ BC = M. Ta có SA ⊥ (SBC)

⇒ SA ⊥ BC. Lại có BC ⊥ SH

⇒ BC ⊥ (SAH) ⇒ BC ⊥ AM

Tương tự BH ⊥ AC

⇒ H là trọng tâm tam giác ABC.

2) Vì $AM \perp BC$

$\Rightarrow SM \perp BC$ (định lý ba đường vuông góc)

Trong tam giác vuông SAM, ta có $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SM^2}$ (1)

Trong tam giác vuông SBC có: $\frac{1}{SM^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2}$ (2)

Thay (2) vào (1) có: $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2} \Rightarrow$ đpcm

3) Ta có: $S_{SBC}^2 = \frac{BC^2 \times SM^2}{4} = \frac{BC^2 \times MH \times MA}{4}$ (do trong tam giác vuông SAM ta có $SM^2 = MH.MA$)

$$= \frac{BC.MA}{2} \cdot \frac{BC.MH}{2} \Rightarrow S_{SBC}^2 = S_{ABC}.S_{HBC} \quad (3)$$

Lập luận tương tự ta có: $S_{SAB}^2 = S_{ABC}.S_{HAB}$ (4)

$$S_{SAC}^2 = S_{ABC}.S_{HAC} \quad (5)$$

Cộng từng vế (3), (4), (5) ta có:

$$S_{SBC}^2 + S_{SAB}^2 + S_{SAC}^2 = S_{ABC}\left(S_{HBC} + S_{HAB} + S_{HAC}\right) = S_{ABC}^2 \Rightarrow \text{đpcm}$$

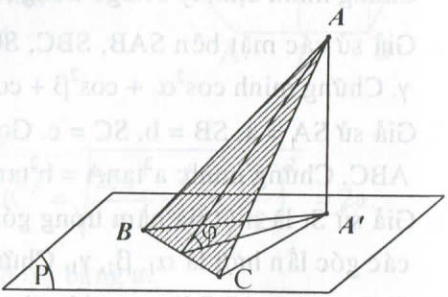
4) Ta có kết quả quen biết sau:

Giả sử ΔABC tạo với đáy (P) góc φ.

Gọi A' là hình chiếu của A trên (P).

Khi đó ta có: $S_{A'BC} = S_{ABC}.\cos\varphi$ (6)

(công thức tính diện tích hình chiếu)



Trở về bài toán cũ ta được

Giả sử $AH \cap BC = M$; $BH \cap AC = N$; $CH \cap AB = P$

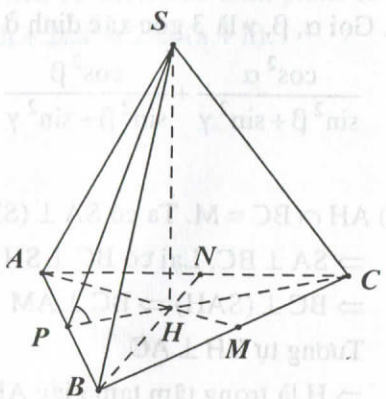
Ta có: $\widehat{SPC} = \alpha$; $\widehat{SMA} = \beta$; $\widehat{SNB} = \gamma$

Vì $SC \perp (SAB)$, nên SAB là hình chiếu của tam giác ABC trên (SAB)

Theo (6) ta có: $S_{SAB} = S_{ABC}.\cos\alpha$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{S_{SAB}^2}{S_{ABC}^2} \quad (7)$$

Lập luận tương tự, $\cos^2\beta = \frac{S_{SBC}^2}{S_{ABC}^2}$ (8)



$$\cos^2\gamma = \frac{S_{SAC}^2}{S_{ABC}^2} \qquad (9)$$

Cộng từng vế (7), (8), (9) và theo phần 2) suy ra $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Nhận xét: Ta có thể giải cách khác như sau:

Trong tam giác vuông SPC ta có $\widehat{SPC} = \widehat{HSC} \Rightarrow \widehat{HSC} = \cos\alpha$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{SH^2}{SC^2}$$

Tương tự có: $\cos^2\beta = \frac{SH^2}{SB^2}$; $\cos^2\gamma = \frac{SH^2}{SC^2}$

Do đó $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = SH^2\left(\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2}\right) = 1$ (theo phần 2 ta thu được kết quả trên)

5) Theo hệ thức lượng trong ΔABC ta có: $\cot A = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{4S_{ABC}}$

Từ đó: $\tan A = \frac{4S_{ABC}}{AC^2 + AB^2 - BC^2}$

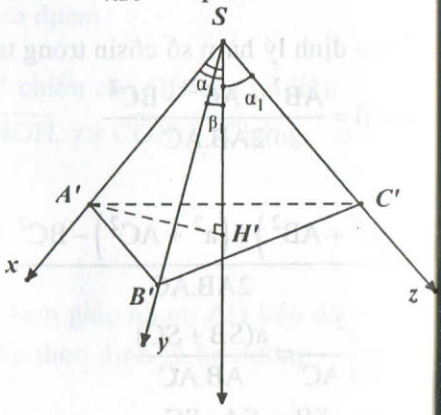
Áp dụng định lý Pitago ta có: $\tan A = \frac{4S_{ABC}}{a^2 + c^2 + a^2 + b^2 - b^2 - c^2} = \frac{2S_{ABC}}{a^2}$

$\Rightarrow a^2\tan A = 2S_{ABC}$.

Lập luận tương tự có: $b^2\tan B = 2S_{ABC}$; $c^2\tan C = 2S_{ABC} \Rightarrow$ đpcm

6) Gọi Sx, Sy, Sz là các tia chứa SA, SB, SC tương ứng.

Giả sử H' là điểm tuỳ ý trên St. Giả sử (π) lần lượt cắt Sx, Sy, Sz tại A', B', C'. Xét tứ diện vuông SA'B'C' đỉnh S. Theo câu 1) thì H' là trực tâm tam giác A'B'C', và theo câu 2) có:



$$\frac{1}{SH'^2} = \frac{1}{SA'^2} + \frac{1}{SB'^2} + \frac{1}{SC'^2} \text{ hay}$$

$$1 = \left(\frac{SH'}{SA'}\right)^2 + \left(\frac{SH'}{SB'}\right)^2 + \left(\frac{SH'}{SC'}\right)^2 \Rightarrow \cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1 \text{ (đpcm)}$$

7) Thật vậy trong tam giác ABC, ta có theo định lí hàm số cosin

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{\left(a^2 + b^2\right) + \left(a^2 + c^2\right) - \left(b^2 + c^2\right)}{2AB.AC} = \frac{a^2}{AB.AC} > 0$$

$\Rightarrow$ A nhọn. Lý luận tương tự thì B, C cũng nhọn $\Rightarrow$ ABC là tam giác nhọn $\Rightarrow$ đpcm.

8) Theo câu 4) ta có $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$ (10)

Đặt $x = \sin^2\gamma + \sin^2\beta$; $y = \sin^2\alpha + \sin^2\gamma$; $z = \sin^2\alpha + \sin^2\beta$

Từ (10) có: $x + y + z = 4$ (11)

Lại có $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - (2 - \sin^2\beta - \sin^2\gamma) = x - 1$

Tương tự có: $\cos^2\beta = y - 2$; $\cos^2\gamma = z - 1$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh có dạng: $\dfrac{x-1}{x} + \dfrac{y-1}{y} + \dfrac{z-1}{z} \le \dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \ge \dfrac{9}{4}$ (12)

Theo bất đẳng thức Cosi, ta có: $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) \ge 9$ (13)

Từ (11), (13) suy ra (12) đúng

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma \Leftrightarrow SA = SB = SC$

Thí dụ 2: Trong mặt phẳng (P) cho góc vuông $\widehat{xSy} = 90^o$ đỉnh S cố định. Đặt AC = a vuông góc với (P). Trên Sx, Sy lần lượt lấy B, C sao cho SB + SC = a. Xét tứ diện vuông SABC đỉnh S. $\widehat{SAB} = \alpha$; $\widehat{BAC} = \beta$; $\widehat{SAC} = \gamma$. Chứng minh rằng $\alpha + \beta + \gamma = \text{const}$ khi B, C di động theo quy luật trên.

Giải

Theo định lý hàm số côsin trong tam giác ABC ta có:

$$\cos\beta = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC}$$

$$= \frac{\left(a^2 + AB^2\right) + \left(a^2 + AC^2\right) - BC^2}{2AB.AC}$$

$$= \frac{a^2}{AB.AC} = \frac{a(SB + SC)}{AB.AC}$$

$$= \frac{SA}{AC}.\frac{SB}{AB} + \frac{SA}{AB}.\frac{SC}{AC}$$

$= \cos\gamma \,.\, \sin\alpha + \cos\alpha \,.\, \sin\gamma$

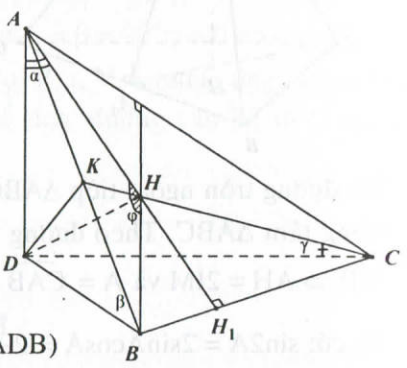
Từ đó ta có: $\cos\beta = \sin(\alpha + \gamma)$ (1)

Do $\alpha, \beta, \gamma \in (0; 90^o)$ nên từ (1) suy ra $\alpha + \beta + \gamma = 90^o = \text{const} \Rightarrow$ đpcm

Thí dụ 3: Cho tứ diện vuông DABC tại D, gọi H là trực tâm tam giác ABC. Đặt $\alpha = \widehat{DAH}$; $\beta = \widehat{DBH}$; $\gamma = \widehat{DCH}$; $\varphi = \widehat{AHB}$.

Chứng minh rằng $\sin\varphi = \dfrac{\sin\gamma}{\cos\alpha.\cos\beta}$ và $\cos\varphi = -\tan\alpha\tan\beta$.

Giải



Do H là trực tâm tam giác ABC $\Rightarrow$ DH $\perp$ (ABC). Kéo dài AH cắt BC tại H_1. Từ đó DH $\perp$ AA_1. Trong tam giác vuông ADH_1, ta có $DH^2 = AH.HH_1$.

Do $HH_1 = BH\cos\widehat{BHH_1} = BH\cos(180^o - \varphi)$

$\Rightarrow DH^2 = -AH.BH.\cos\varphi$

$\Rightarrow \cos\varphi = -\dfrac{DH}{AH}.\dfrac{DH}{BH} \Rightarrow \cos\varphi = -\tan\alpha\tan\beta$

Giả sử CH kéo dài cắt AB tại K. Vì CD $\perp$ (ADB) mà CK $\perp$ AB $\Rightarrow$ DK $\perp$ AB (định lý ba đường vuông góc) $\Rightarrow$ $\widehat{DKC}$ là góc tạo bởi hai mặt phẳng ADB và ABC. Dễ thấy HAB là hình chiếu của DAB trong phép chiếu vuông góc DAB xuống ABC $\Rightarrow S_{HAB} = S_{DAB}.\cos\widehat{DKC}$ (1)

Dễ thấy trong tam giác vuông KDC đỉnh D, thì $\cos\widehat{DKC} = \sin\gamma$

Vậy từ (1) có: $\dfrac{1}{2}HA.HB\sin\varphi = \dfrac{1}{2}DA.DB\sin\gamma$

$\sin\varphi = \dfrac{DA}{HA}.\dfrac{DB}{HB}.\sin\varphi$ hay $\sin\varphi = \dfrac{\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta} \Rightarrow$ đpcm

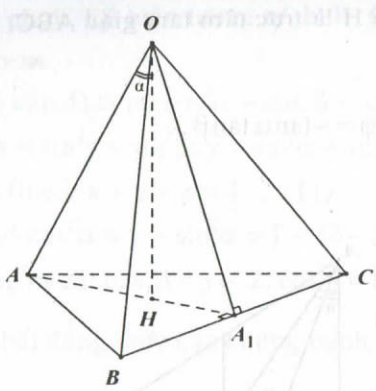
Thí dụ 4: Cho tứ diện vuông OABC đỉnh O. Vẽ chiều cao OH của tứ diện. Đặt $A = \widehat{CAB}$, $B = \widehat{ABC}$, $C = \widehat{BCA}$, $\alpha = \widehat{AOB}$, $\beta = \widehat{BOH}$, $\gamma = \widehat{COH}$. Chứng minh rằng $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin 2A} = \dfrac{\sin^2\beta}{\sin 2B} = \dfrac{\sin^2\gamma}{\sin 2C}$

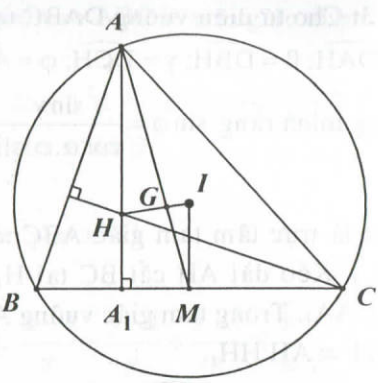
Giải

Dễ thấy H là trực tâm của ΔABC và ABC là tam giác nhọn. AH kéo dài cắt BC tại $A_1 \Rightarrow AA_1 \perp BC$. Vì OA $\perp$ (OBC), nên theo định lý ba đường vuông góc có $OA_1 \perp BC$.

Ta có: $\sin^2\alpha = \dfrac{AH^2}{OA^2}$ (1)

Xét Δ vuông OAA_1 đỉnh O. Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $OA^2 = AH.AA_1$, vậy từ (1) có $\sin^2\alpha = \dfrac{AH}{AA_1}$





Vẽ đường tròn ngoại tiếp ΔABC, và gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp. G là trọng tâm ΔABC. Theo đường thẳng Euther thì H, G, I thẳng hàng và HG = 2GI ⇒ AH = 2IM và $A = \widehat{CAB} = \widehat{BIM}$

Ta có: $\sin 2A = 2\sin A\cos A = 2\frac{BM}{IB}.\frac{IM}{IB} = 2.\frac{BC}{2.IB}.\frac{AH}{2IB} = \frac{BC.AH}{2R^2}$ (2)

với R bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC

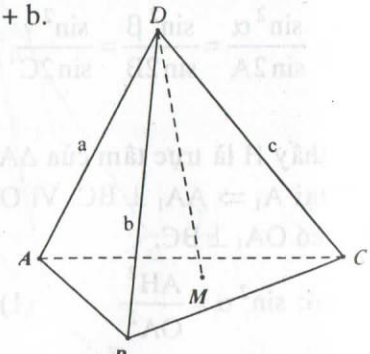
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{\sin^2\alpha}{\sin 2A} = \frac{2R^2}{BC.AA_1} = \frac{R^2}{S}$, ở đây S là diện tích ΔABC

Do sự bình đẳng của các cặp (β, B), (γ, C), ta cũng có

$$\frac{\sin^2\beta}{\sin 2B} = \frac{\sin^2\gamma}{\sin 2C} = \frac{R^2}{S} \Rightarrow \text{đpcm}$$

Thí dụ 5: Cho tứ diện vuông D.ABC đỉnh D. Giả sử DA = a, DB = b, DC = c ($a \le b \le c$). M là một điểm tuỳ ý trong đáy ABC. Gọi l là tổng các khoảng cách từ A, B, C xuống DM. Chứng minh $l \le a + b$.

Giải



Đặt $\widehat{ADM} = \alpha$, $\widehat{BDM} = \beta$, $\widehat{CDM} = \gamma$

Ta có ngay $l = a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma$

Vì góc tam diện đỉnh D vuông nên ta dựng được một hình hộp chữ nhật có DM là đường chéo, còn DA, DB, DC là các cạnh bên.

Vậy ta có $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 3 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = 2$.

Do $0 \le \sin\alpha \le 1$; $0 \le \sin\beta \le 1$, $0 \le \sin\gamma \le 1$

$\Rightarrow \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \ge \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$

$\Rightarrow \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geq 2 \Rightarrow \sin\beta + \sin\gamma - 1 \geq 1 - \sin\alpha$ (1)

Ta có $b \geq a$, nên từ (1) có: $b(\sin\beta + \sin\gamma - 1) \geq a(1 - \sin\alpha)$

$\Rightarrow a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma \geq a + b$ (2)

Lại do $c \geq b \Rightarrow c\sin\gamma \geq b\sin\gamma$ (3)

Từ (2) và (3) ta có: $l = a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma \geq a + b \Rightarrow$ đpcm

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sin\alpha = \sin^2\alpha$; $\sin\beta = \sin^2\beta$; $\sin\gamma = \sin^2\gamma$,

và đồng thời có dấu bằng trong (2) và (3) $\Leftrightarrow \alpha = \beta = 90^\circ; \gamma = 0 \Leftrightarrow M \equiv C$

Thí dụ 6: Cho tứ diện vuông OABC đỉnh O. Gọi R, r, V, h tương ứng là bán kính hình cầu ngoại tiếp, hình cầu nội tiếp, thể tích, đường cao kẻ từ O của tứ diện. Chứng minh:

1) $\dfrac{V(h-r)}{R^2+h} \leq \dfrac{2}{3}$

2) $\dfrac{h}{r} \leq 1+\sqrt{3}$

3) $\dfrac{R}{r} \leq \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

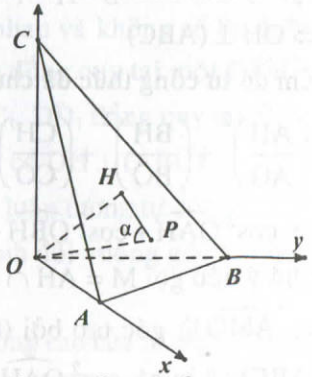
4) $\dfrac{1}{r} \geq \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{3\sqrt{3}}{a+b+c}$ (OA = a; OB = b; OC = c)

Giải

Xem lời giải trong các thí dụ 15, 16 phần B, §1, chương 3 cuốn sách này

Thí dụ 7: Cho tứ diện vuông OABC đỉnh O. P là điểm nằm trong đáy ABC. Đặt $u = \dfrac{AP}{AO}$, $c = \dfrac{BP}{BO}$, $w = \dfrac{CP}{CO}$. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng OP với (ABC). Chứng minh rằng $u^2 + v^2 + w^2 = 2 + \cot^2\alpha$

Giải



Xét hệ trục toạ độ Đề Các vuông góc nhận O làm gốc toạ độ, các trục toạ độ chứa OA, OB, OC. Giả sử trong hệ toạ độ ấy, toạ độ các đỉnh A, B, C tương ứng là A (a, 0, 0); B (0, b, 0); C(0, 0, c).

Giả sử toạ độ của điểm P là $P(x_0, y_0, z_0)$

Ta có: $u^2 + v^2 + w^2 = \dfrac{AP^2}{AO^2} + \dfrac{BP^2}{BO^2} + \dfrac{CP^2}{CO^2} = \dfrac{AP^2}{a^2} + \dfrac{BP^2}{b^2} + \dfrac{CP^2}{c^2}$ (1)

Ta có $AP^2 = (x_0 - a)^2 + y_0^2 + z_0^2$;

$BP^2 = x_0^2 + (y_0 - b)^2 + z_0^2$;

$CP^2 = x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - c)^2$;

Nếu đặt $p^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ thì ta có thể viết

$$AP^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + a^2 - 2x_0a = p^2 + a^2\left(1 - \frac{2x}{a}\right),$$

Tương tự có: $BP^2 = p^2 + b^2\left(1 - \frac{2y_0}{b}\right)$; $CP^2 = p^2 + c^2\left(1 - \frac{2z_0}{b}\right)$

Thay vào (1), có: $u^2 + v^2 + w^2 = p^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + 3 - 2\left(\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} + \frac{z_0}{c}\right)$ (2)

Theo phương trình đoạn chắn thì mặt phẳng ABC có phương trình:

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ mà $P(x_0, y_0, z_0) \in (ABC) \Rightarrow \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} + \frac{z_0}{c} = 1$ (3)

Kẻ $OH \perp (ABC)$, ta có hiển nhiên công thức sau:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{OH^2} \quad (4)$$

Thay (3) và (4) vào (2) có: $u^2 + v^2 + w^2 = \frac{p^2}{OH} + 1$ (5)

Chú ý là $p^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = OP^2$

$$\Rightarrow u^2 + v^2 + w^2 = \frac{OP^2}{OH^2} + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} + 1 = 1 + \cot^2\alpha + 1$$

Vậy $u^2 + v^2 + w^2 = 2 + \cot^2\alpha$

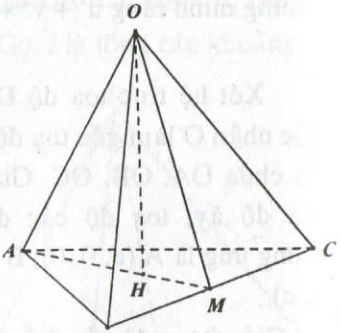
Chú ý: 1) Xét trường hợp đặc biệt khi $P \equiv H$, H là trực tâm ΔABC

$\Rightarrow OH \perp (ABC)$

Khi đó từ công thức đã chứng minh, ta có

$$\left(\frac{AH}{AO}\right)^2 + \left(\frac{BH}{BO}\right)^2 + \left(\frac{CH}{CO}\right)^2 = 2$$

$\Leftrightarrow \cos^2\widehat{OAH} + \cos^2\widehat{OBH} + \cos^2\widehat{OCH} = 2$ (6)



Chú ý nếu gọi $M = AH \cap BC$

$\Rightarrow \widehat{AMO}$ là góc tạo bởi (OBC) với đáy (ABC) và ta có $\cos^2\widehat{OAH} = \sin^2\widehat{AMO}$

Vì vậy nếu gọi α, β, γ là ba góc tạo bởi ba mặt OBC, OAC, OAB với đáy ABC thì từ (6) ta có: $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (7)

Vậy công thức $u^2 + v^2 + w^2 = 2 + \cot^2\alpha$ là mở rộng của công thức quen biết (7)

§2. TỨ DIỆN TRỰC TÂM

Tứ diện ABCD gọi là tứ diện trực tâm, nếu các cạnh đối đôi một vuông góc với nhau, tức là $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$.

Thí dụ 1: (Bài toán cơ bản) Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ABCD là tứ diện trực tâm là một trong các điều kiện sau đây thoả mãn:

a) Các đường cao của tứ diện đồng qui.

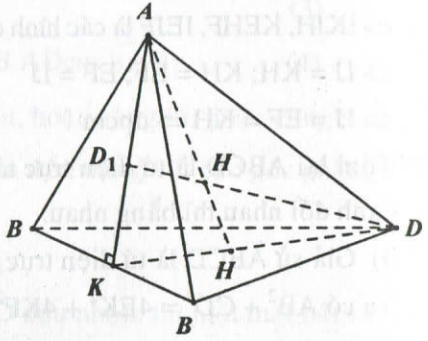
b) Một đường cao của tứ diện đi qua trực tâm của mặt đáy tương ứng.

c) Tổng bình phương các cạnh đối bằng nhau, tức là:

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AC^2 + BC^2$$

d) Các đoạn thẳng nối trung điểm của các cạnh đối nhau thì bằng nhau.

Giải



a) Giả sử ABCD là tứ diện trực tâm, tức là $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$.

Qua DA dựng mặt phẳng vuông góc với BC như sau:

Trong (ABC) kẻ $AK \perp BC$.

Do $BC \perp AD$ (gt) $\Rightarrow BC \perp (AKD)$

$\Rightarrow$ (AKD) là mặt phẳng cần dựng

Đường cao DD_1 của tam giác AKD sẽ vuông góc với AK và BC

$\Rightarrow DD_1 \perp (ABC)$. Tương tự kẻ $AA_1 \perp KD$, thì $AA_1 \in (BCD)$

Do AA_1 và DD_1 cùng nằm trong (AKD) $\Rightarrow AA_1$ và DD_1 cắt nhau.

Vậy hai đường cao bất kì của tứ diện đều cắt nhau và không có ba đường cao nào đồng phẳng $\Rightarrow$ bốn đường cao của tứ diện đồng quy tại một điểm.

Đảo lại giả sử bốn đường cao AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 đồng quy tại H

Khi đó ta có $AH \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp BC$. Lại có $DH \perp (ABC)$

$\Rightarrow DH \perp BC \Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp AD$. Lý luận tương tự có:

$AB \perp CD$ và $AC \perp BD \Rightarrow$ ABCD có các cạnh đối vuông góc với nhau nên nó là tứ diện trực tâm.

Tóm lại ABCD là tứ diện trực tâm $\Leftrightarrow$ Các đường cao của tứ diện đồng quy.

b) Giả sử ABCD là tứ diện trực tâm. Kẻ $AA_1 \perp (BCD) \Rightarrow AA_1 \perp BC$.

Lại có $BC \perp AD$ (gt) $\Rightarrow BC \perp (AA_1D) \Rightarrow BC \perp A_1D \Rightarrow DA_1$ nằm trên đường cao kẻ từ D. Tương tự BA_1 nằm trên đường cao kẻ từ B $\Rightarrow A_1$ là trực tâm của tam giác BCD.

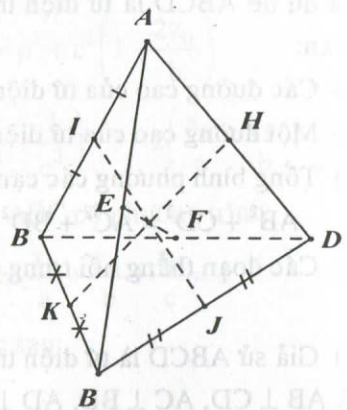
Đảo lại giả sử tồn tại chiều cao AA_1, mà A_1 là trực tâm tam giác BCD

$\Rightarrow CD \perp BA_1$. Kết hợp với $CD \perp AA_1 \Rightarrow CD \perp (AA_1B) \Rightarrow CD \perp AB$

Hoàn toàn tương tự có $AC \perp BD$, $AD \perp BC \Rightarrow ABCD$ là tứ diện trực tâm.

Tóm lại, ABCD là tứ diện trực tâm $\Leftrightarrow$ tồn tại một chiều cao của tứ diện đi qua trực tâm của mặt đáy tương ứng.

c) Gọi I, J, E, F, K, H tương ứng là các trung điểm của các cặp cạnh đối AB, CD, AC, BD, AD và BC.



Dễ thấy IKJH, KEHF, IEJF là các hình bình hành. Ta thấy ABCD là tứ diện trực tâm $\Leftrightarrow AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$.

$\Leftrightarrow$ IKJH, KEHF, IEJF là các hình chữ nhật

$\Leftrightarrow IJ = KH$; $KH = EF$; $EF = IJ$

$\Leftrightarrow IJ = EF = KH \Rightarrow$ đpcm

Tóm lại ABCD là tứ diện trực tâm $\Leftrightarrow$ các đoạn thẳng nối trung điểm của các cạnh đối nhau thì bằng nhau.

4) Giả sử ABCD là tứ diện trực tâm. Theo câu trên suy ra $IJ = EF = KH = l$

Ta có $AB^2 + CD^2 = 4EK^2 + 4KF^2 = 4(EK^2 + KF^2)$

Do KEHF là hình chữ nhật $\Rightarrow AB^2 + CD^2 = 4EF^2 = 4l^2$

Lập luận tương tự có $AC^2 + CD^2 = 4l^2$; $AD^2 + BC^2 = 4l^2$

Vậy $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$

Đảo lại giả sử: $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$ và giả sử $= 4k^2$

$\Rightarrow IK^2 + KJ^2 = EK^2 + EH^2 = IE^2 + IF^2 = k^2$

Theo hệ thức lượng, trong các hình bình hành KIHJ, KEHF và IEJF có:

$2(IK^2 + KJ^2) = IJ^2 + KH^2$

$2(EK^2 + EH^2) = KH^2 + EF^2$

$2(IE^2 + IF^2) = EF^2 + IJ^2$

Vậy suy ra $IJ^2 + KH^2 = KH^2 + EF^2 = EF^2 + IJ^2 \Rightarrow IJ = EF = KH$

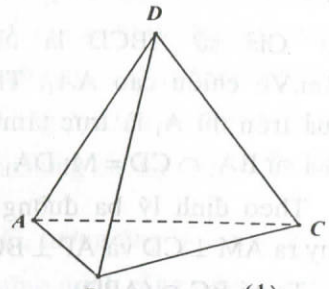
Vậy theo câu c) suy ra ABCD là tứ diện trực tâm

Tóm lại ABCD là tứ diện trực tâm $\Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AC^2 + BC^2$

Đó chính là đpcm.

Thí dụ 2: Cho ABCD là tứ diện trực tâm. Chứng minh rằng có ít nhất một mặt của tứ diện là tam giác nhọn.

Giải



Vì ABCD là tứ diện trực tâm, nên theo thí dụ 1 ta có:

$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AC^2 + BC^2$

Theo định lý hàm số cosin trong tam giác ABC, ta có:

$$2AB.AC\cos\widehat{ABC} = AB^2 + AC^2 - BC^2 \quad (1)$$

Từ giả thiết suy ra: $AB^2 + AC^2 - BC^2 = AB^2 + AD^2 - BD^2$ (2)

Lại theo định lý hàm số côsin trong tam giác ABD có:

$$AB^2 + AD^2 - BD^2 = 2AB.AD\cos\widehat{BAD} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $AB.AC\cos\widehat{ABC} = AB.AD\cos\widehat{BAD}$ (4)

Từ (4) có ngay $\widehat{BAC}$, $\widehat{BAD}$ hoặc cùng nhọn, hoặc cùng tù, hoặc cùng vuông.

Bằng chứng minh tương tự ta suy ra kết luận trên đúng với các góc phẳng bất kì có chung đỉnh của tứ diện.

Từ đó suy ra chỉ có hai khả năng sau xảy ra:

1) Nếu tất cả các góc phẳng của tứ diện ABCD đều nhọn, thì một mặt bất kì của tứ diện là tam giác nhọn.

2) Nếu có một trong các góc phẳng (giả sử tại đỉnh A) không nhọn, thì theo nhận xét trên sẽ có 3 góc phẳng tại đỉnh A là góc không nhọn, tức là:

$\widehat{DAC} \geq 90^o$; $\widehat{DAB} \geq 90^o$; $\widehat{BAC} \geq 90^o$

Vì $\widehat{DAC} \geq 90^o \Rightarrow \widehat{DCA} < 90^o$

Theo nhận xét trên ta có $\widehat{DCB} < 90^o$

Vì $\widehat{DAB} \geq 90^o \Rightarrow \widehat{DBA} < 90^o$ và $\widehat{ADB} < 90^o$

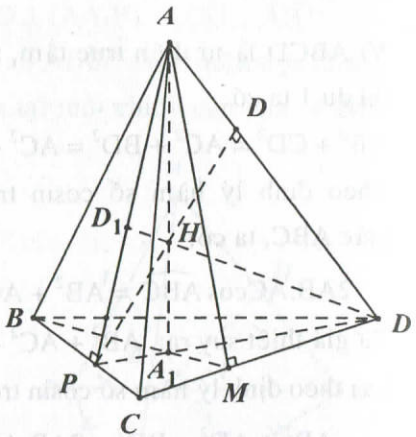
Theo nhận xét trên ta có $\widehat{DBC} < 90^o$ và $\widehat{BDC} < 90^o$

Vậy BDC là mặt của tứ diện nên có 3 góc đều nhọn. Đó là đpcm.

Thí dụ 3: Chứng minh rằng trong một tứ diện trực tâm, thì các đường vuông góc chung của các cặp cạnh đối đồng quy.

Đảo lại một tứ diện có các đường vuông góc chung của các cặp cạnh đối đồng quy, thì có phải là tứ diện trực tâm hay không?

Giải



1) Giả sử ABCD là tứ diện trực tâm.Vẽ chiều cao AA_1. Theo các kết quả trên thì A_1 là trực tâm của ΔBCD. Giả sử $BA_1 \cap CD = M$; $DA_1 \cap BC = P$.

Theo định lý ba đường vuông góc suy ra $AM \perp CD$ và $AP \perp BC$.

Ta có $BC \cap (APD)$

$\Rightarrow (ABC) \perp (APD)$

mà $(ABC) \cap (APD) = AP$, vì thế nếu kẻ $DD_1 \perp AP$ thì $DD_1 \perp (ABC)$

Gọi $H = AA_1 \cap DD_1$. Do ABCD là tứ diện trực tâm nên H là trực tâm của tứ diện (đó là điểm đồng quy của 4 chiều cao AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 của tứ diện)

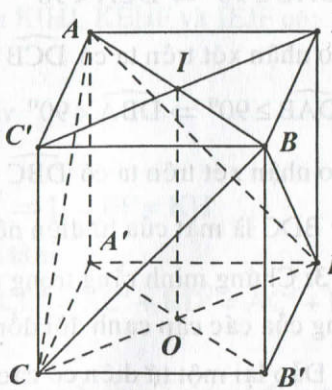
Chú ý rằng H cũng là trực tâm của $\Delta APD \Rightarrow PH \cap AD = R$, thì $PR \perp AD$. Như thế PR là đường vuông góc chung của cặp cạnh BC, AD, và đường PR đi qua trực tâm H của tứ diện.

Lập luận tương tự, các đường vuông góc chung của các cặp cạnh đến AB, CD và AC, BD cũng qua $H \Rightarrow$ ba đường vuông góc chung ấy đồng quy $\Rightarrow$ đpcm.

2) Mệnh đề đảo nói chung không đúng. Thật vậy xét tứ diện ABCD có $AB = CD = a$; $AC = BD = b$, $AD = BC = c$; $AD = BC = c$ với $a > b > c$. Gọi I là trung điểm của AB.

Qua I kẻ đường song song với CD và về hai phía lấy $IC' = ID' = \dfrac{CD}{2}$

Qua J là trung điểm của CD, vẽ đường song song với AB và về hai phía lấy $JA' = JD' = \dfrac{CD}{2}$



Do giả thiết suy ra ABCD, A'B'C'D' là hình hộp chữ nhật.

Rõ ràng IO là đường vuông góc chung của cặp cạnh AB, CD và đi qua tâm của hình hộp.

Tương tự hai đường vuông góc chung còn lại cũng qua tâm của hình hộp này.

Như vậy với hình hộp ABCD thoả mãn tính chất: Các đường vuông góc chung của các cặp cạnh đối đồng quy tại một điểm.

Nhưng ABCD không phải là tứ diện trực tâm. Thật vậy do a > b > c, nên các mặt của hình hộp chữ nhật ABCD A'B'C'D' là các hình chữ nhật thật sự (tức là không phải hình vuông) ⇒ AB không vuông góc C'D', và C'D'// CD ⇒ AB không vuông góc với CD. ⇒ ABCD không phải là tứ diện trực tâm. Phản ví dụ trên chứng tỏ rằng mệnh đề đảo nói chung không đúng.

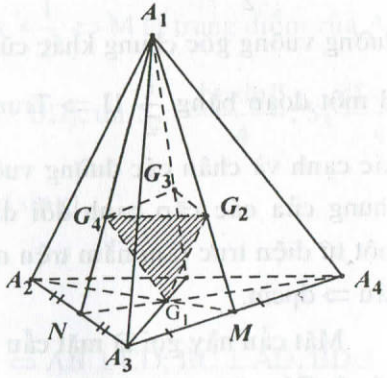
Thí dụ 4: Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 tương ứng là trọng tâm của các mặt $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$. Chứng minh rằng nếu các đường thẳng qua G_1 và vuông góc với mặt chứa G_i, của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ (i = 1, 2, 3, 4) đồng quy, thì $A_1A_2A_3A_4$ là tứ diện trực tâm.

Giải

Do giả thiết và tính chất của trọng tâm tam giác suy ra $\frac{MG_1}{MA_2} = \frac{MG_2}{MA_1} = \frac{1}{3}$

⇒ G_1G_2 // A_1A_2. Tương tự có G_1G_4 // A_1A_4 $(G_1G_2G_4)$ // $(A_1A_2A_4)$

Kí hiệu d_i là đường thẳng qua G_i và vuông góc với mặt tứ diện chứa G_i (i = 1, 2, 3, 4).



Theo giả thiết ta có $d_3 \perp (A_1A_2A_4)$

Vì thế suy ra $d_3 \perp (G_1G_2G_4)$

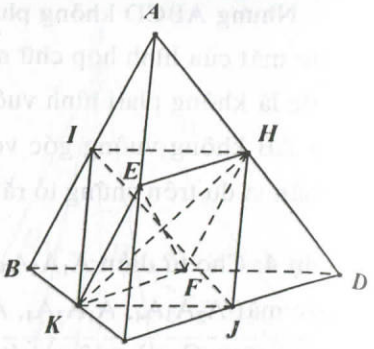
Tương tự ta có $d_2 \perp (G_1G_3G_4)$;

$d_4 \perp (G_1G_2G_3)$ và $d_1 \perp (G_2G_3G_4)$

Xét tứ diện $G_1G_2G_3G_4$, thì từ kết quả trên suy ra d_1, d_2, d_3, d_4 là các đường cao của tứ diện tương ứng kẻ từ các điểm G_1, G_2, G_3, G_4. Theo giả thiết 4 đường cao này đồng quy nên $G_1G_2G_3G_4$ là tứ diện trực tâm. Vì $G_1G_2G_3G_4 \backsim A_1A_2A_3A_4 \Rightarrow A_1A_2A_3A_4$ cũng là tứ diện trực tâm ⇒ đpcm.

Thí dụ 5: Cho ABCD là tứ diện trực tâm. Chứng minh rằng trung điểm các cạnh và các chân của các đường vuông góc chung của các cặp cạnh đối diện nằm trên một mặt cầu.

Giải



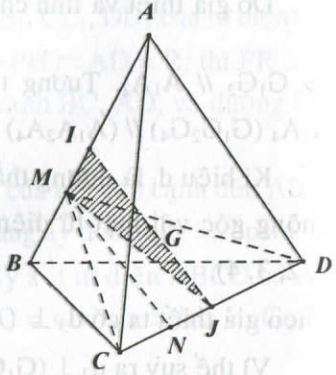
Gọi I, J, E, F, K, H tương ứng là các trung điểm của AB, CD, AC, BD, BC, AD.

Do ABCD là tứ diện trực tâm nên các hình IHJK, EIFJ, KEHF đều là các hình chữ nhật nên IJ = KH = EF và IJ, KH, EF đồng quy tại H và H là trung điểm của mỗi đoạn, tức là:

$$GI = GJ = GE = GF = GK = GH \left(= \frac{1}{2}IJ\right) \quad (1)$$

Gọi MN là đường vuông góc chung của AB và CD ($M \in AB$, $N \in CD$).

Ta có: $AB \perp (BCD) \Rightarrow AB \perp MJ$. Xét tam giác vuông IMJ tại M, ta có:



$GM = \frac{1}{2}IJ$. Tương tự các chân đường vuông góc chung khác cũng cách H một đoạn bằng $\frac{1}{2}$ IJ $\Rightarrow$ Trung điểm các cạnh và chân các đường vuông góc chung của các cặp cạnh đối diện của một tứ diện trực tâm nằm trên một mặt cầu $\Rightarrow$ đpcm.

Mặt cầu này gọi là mặt cầu 12 điểm.

Thí dụ 6: Các cặp cạnh chéo nhau của tứ diện ABCD là a, d; b, e; c, f. Gọi S_1 là diện tích lớn nhất của thiết diện song song với cặp cạnh a, d. Tương ứng S_2, S_3 là diện tích lớn nhất của các thiết diện lần lượt song song với cặp cạnh b, e; c, f.

1) Chứng minh $S_1 + S_2 + S_3 \le \frac{1}{4}(ad + bc + cf)$

2) Chứng minh dấu bằng xảy ra trong bất đẳng thức trên $\Leftrightarrow$ ABCD là tứ diện trực tâm.

Giải

1) Giả sử AB = a; CD = d; BC = b; AD = e; BD = c; AC = f

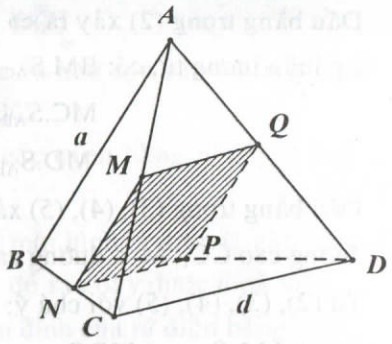
Dễ thấy mọi thiết diện của tứ diện song song với cặp cạnh a, d là hình bình hành MNPQ.

Đặt $\frac{AM}{AC} = x\ (0 < x < 1)$

Ta có: $\frac{AM}{AC} = \frac{MQ}{CD} = x \Rightarrow MQ = xd$

Do $\frac{AM}{AC} = x \Rightarrow \frac{CM}{AC} = 1 - x$

Lại có $\frac{MN}{AB} = \frac{CM}{CA} = 1 - x \Rightarrow MN = (1-x)a$



Đặt $\alpha = (AB, CD) \Rightarrow \widehat{MNP} = \alpha \Rightarrow S_{MNPQ} = x(1-x)ad\sin\alpha$

Vậy $S_1 = \max S_{MNPQ} = \max\limits_{0<x<1} [x(1-x)ad\sin\alpha]$

$$= ad\sin\alpha . \max_{0<x<1} x(1-x) = \frac{ad\sin\alpha}{4}$$

Giá trị lớn nhất đạt được $\Leftrightarrow x = 1 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ M là trung điểm của AC

Tương tự nếu gọi $\beta = (BC, AD)$ và $\gamma = (AC, BD)$, thì $S_2 = \frac{bc\sin\beta}{4}$; $S_3 \frac{cf\sin\gamma}{4}$

Vậy $S_1 + S_2 + S_3 = \frac{1}{4}(ad\sin\alpha + bc\sin\beta + cf\sin\gamma)$

$\Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 \le \frac{1}{4}(ad + be + cf) \Rightarrow$ đpcm

2) Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma = 1 \Leftrightarrow AB \perp CD$; $BC \perp AD$; $BD \perp AC$

$\Leftrightarrow$ ABCD là tứ diện trực tâm. Đó là đpcm

Thí dụ 7: Cho tứ diện trực tâm ABCD. Chứng minh rằng với mọi điểm M nằm trong tứ diện ta có bất đẳng thức sau:

$$MA.S_{BCD} + MB.S_{ACD} + MC.S_{ABD} + MD.S_{ABC} \ge 9V$$

ở đây V là thể tích của tứ diện.

Giải

Kẻ AA_1, MA_2 vuông góc mp(BCD). Rõ ràng ta có$AM + MA_2 \ge AA_2 \ge AA_1$

$\Rightarrow AM \ge AA_1 - MA_2$ (1)

Dấu bằng trong (1) xảy ra $\Leftrightarrow$ M $\in$ đường cao AA_1 của tứ diện. Từ (1) suy ra:

$$AM.S_{BCD} \ge AA_1.S_{BCD} - MA_2.S_{BCD}$$

hay $AM.S_{BCD} \ge 3V - 3V_{M.BCD}$ (2)

Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow$ có dấu bằng trong (1) $\Leftrightarrow$ M $\in$ đường cao AA_1

Lý luận tương tự, có: $BM.S_{ACD} \geq 3V - 3V_{M.ACD}$ (3)

$MC.S_{ABC} \geq 3V - 3V_{M.ADB}$ (4)

$MD.S_{ABC} \geq 3V - 3V_{M.ABC}$ (5)

Dấu bằng trong (3), (4), (5) xảy ra tương ứng $\Leftrightarrow$ M $\in$ đường cao BB_1, M $\in$ đường cao CC_1, M $\in$ đường cao DD_1

Từ (2), (3), (4), (5) với chú ý: $V = V_{M.BCD} + V_{M.ACD} + V_{M.ABD} + V_{M.ABC}$

Ta có $MA.S_{BCD} + MB.S_{ACD} + MC.S_{ABD} + MD.S_{ABC} \geq 9V$ (6)

Đó là đpcm. Dấu bằng trong (6) xảy ra $\Leftrightarrow$ đồng thời có dấu bằng trong (2), (3), (4), (5)

$\Leftrightarrow$ M đồng thời thuộc 4 chiều cao của tứ diện ABCD

$\Leftrightarrow$ M là trực tâm H của tứ diện ABCD.

(*Chú ý do ABCD là tứ diện trực tâm, thì 4 chiều cao của tứ diện đồng quy tại một điểm, đó chính là trực tâm H của tứ diện*).

§3. TỨ DIỆN GẦN ĐỀU

Tứ diện ABCD gọi là tứ diện gần đều, nếu như các cặp cạnh đối diện bằng nhau, tức là AB = CD, AC = BD, AD = BC.

Như vậy tứ diện đều ABCD (có tất cả các cạnh bằng nhau) là trường hợp đặc biệt của tứ diện gần đều.

Thí dụ 1: (Bài toán cơ bản) Chứng minh rằng để một hình tứ diện là gần đều thì điều kiện cần và đủ là một trong những mệnh đề sau đây được thoả mãn.

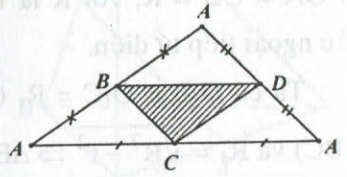
1) Tổng các mặt tại một đỉnh bất kỳ trong bốn đỉnh của tứ diện bằng 180^o.
2) Tổng các mặt tại một đỉnh nào đó của tứ diện bằng 180^o, ngoài ra còn có hai cặp cạnh đối diện bằng nhau.
3) Tất cả các mặt của tứ diện tương đương.
4) Tâm hình cầu nội và ngoại tiếp trùng nhau.
5) Các đoạn thẳng nối trung điểm của các cạnh đối diện vuông góc với nhau.
6) Trọng tâm của tứ diện trùng với tâm hình cầu ngoại tiếp.
7) Trọng tâm của tứ diện trùng với tâm hình cầu nội tiếp.

Giải

Tất cả các điều kiện cần là hiển nhiên (nghĩa là nếu ABCD là tứ diện đều thì dễ dàng suy ra nó thoả mãn mọi tính chất nêu trên).

Bây giờ ta sẽ lần lượt chứng minh các điều kiện đủ.

1) Giả sử ABCD là tứ diện mà tổng các mặt tại mỗi đỉnh bất kỳ trong bốn đỉnh của tứ diện đều bằng 180^o. Khai triển tứ diện ABCD (bằng cách trải các tam giác ABC, ACD, ABD lên mặt phẳng chứa tam giác BCD). Do giả thiết ta suy ra có hình khai triển sau đây.



Từ đó dễ dàng suy ra (theo định lý đường trung bình trong tam giác)

- AC = BD; AB = CD; AD = BC.

Vậy ABCD là tứ diện đều

2) Giả sử AB = CD, AC = DB và tổng các mặt tại đỉnh D bằng 180^o, tức là:

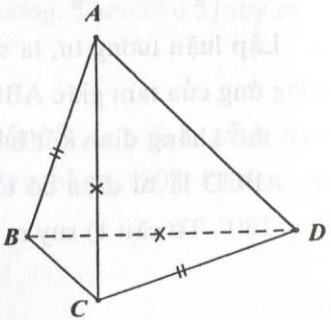
$\widehat{ADB} = \widehat{ADC} = \widehat{BDC} = 180^o$

Ta có $\Delta ACD = \Delta ABD$ (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{DAC}$

Vì thế từ giả thiết thay $\widehat{ADB}$ bằng $\widehat{DAC}$, ta có:

$\widehat{DAC} + \widehat{ADC} + \widehat{BDC} = 180^o$ (1)



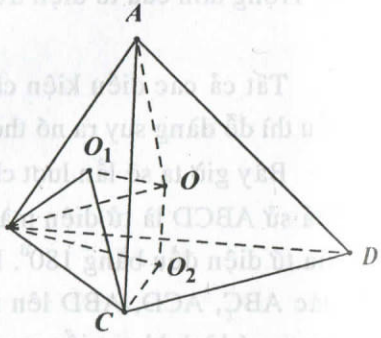
Mặt khác trong Δ DAC, thì $\widehat{DAC} + \widehat{ADC} + \widehat{ACD} = 180^o$ (2)

Vậy từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BDC} = \widehat{ACD} \Rightarrow \Delta ACD = \Delta CDB$ (c.c.c) $\Rightarrow AB = CD$

Do vậy kết hợp với giả thiết AB = CD, AC = DB suy ra ABCD là tứ diện đều.

3) Giả sử ABCD là tứ diện sao cho các mặt đều là tương đương. Chiếu tứ diện ABCD lên trên mặt song song với hai cạnh AB, CD. Thế thì có thể chứng minh được rằng các hình chiếu của hai tam giác ABC và ABD là tương đương. Vẫn bằng cách ấy, ta có hình chiếu của hai tam giác ACD và BCD cũng sẽ tương đương. Điều này có nghĩa là hình bình hành với hai đường chéo AB, CD sẽ là hình chiếu của ABCD. Do đó, suy ra các đẳng thức AC = BD, AD = BC. Đẳng thức AB = CD được chứng minh hoàn toàn tương tự. Vậy ABCD là tứ diện gần đều.

4) Cho ABCD là tứ diện trong đó tâm hình cầu nội và ngoại tiếp trùng nhau và giả sử đó là O. Gọi O_1, O_2 tương ứng là tiếp điểm của hình cầu nội tiếp các mặt (ABC), (BCD)



Như vậy $OO_1 = OO_2 = r$ và $OO_1 \perp (ABC)$, $OO_2 \perp (BCD)$ ở đây r là bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện.

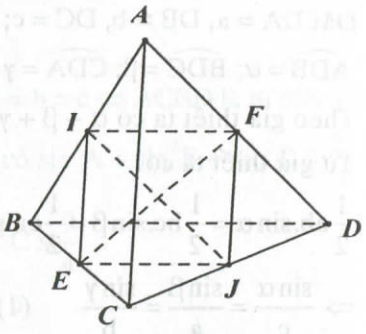
Do O cũng là tâm hình cầu ngoại tiếp $\Rightarrow O_1$ và O_2 tương ứng là các tâm đường tròn ngoại tiếp các ΔABC, ΔBCD. Ngoài ra OA = OB = R, với R là bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện.

Ta có $O_1B = O_1C = R_1$ (R_1 là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC) và $R_1 = \sqrt{R^2 - r^2} \Rightarrow \Delta BCO_1 = \Delta BCO_2 \Rightarrow \widehat{BO_1C} = \widehat{BO_2C}$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BO_1C} = \frac{1}{2}\widehat{BO_2C} = \widehat{BDC}$$

Lập luận tương tự, ta sẽ có được tất cả các mặt kề đỉnh D bằng các góc tương ứng của tam giác ABC, nghĩa là tổng của chúng = 180°. Bằng cách này ta có thể khẳng định kết luận tương tự với các đỉnh còn lại của tứ diện. Như vậy ABCD là tứ diện có tổng các mặt tại một đỉnh bất kì của tứ diện đều bằng 180°. Từ câu 1) suy ra ABCD là tứ diện gần đều.

5) Giả sử ABCD là tứ diện có các đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối diện vuông góc với nhau.



Gọi I, J, E, F tương ứng là trung điểm của các cạnh AB, CD, BC, AD $\Rightarrow$ EIFJ là hình bình hành: mà EF $\perp$ JF $\Rightarrow$ EIFJ là hình thoi $\Rightarrow$ IE = IF $\Rightarrow$ AC = BD.

Lý luận tương tự có AB = CD;

AD = BC

Vậy ABCD là tứ diện gần đều.

6) Giả sử ABCD là tứ diện mà trọng tâm G và tâm hình cầu ngoại tiếp O của nó trùng nhau.

Theo kết quả quen biết thì trung điểm G của IJ chính là trọng tâm của tứ diện.

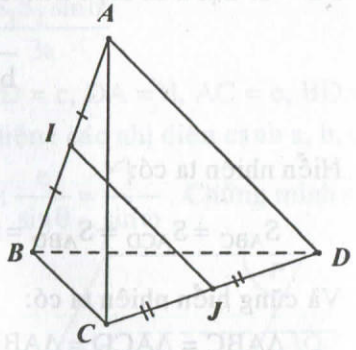
Do G $\equiv$ O $\Rightarrow$ GA = GB = GC = GD = R, với R là bán kính hình cầu ngoại tiếp

$\Rightarrow \Delta$ GAB = ΔGCD (là hai tam giác cân có cạnh bên bằng nhau) $\Rightarrow$ AB = CD.

Lập luận tương tự có AC = BD, AD = BC. Do vậy ABCD là tứ diện gần đều.

7) Giả sử ABCD là tứ diện mà trọng tâm G và tâm hình cầu ngoại tiếp O của nó trùng nhau.

Theo kết quả quen biết thì trung điểm G của IJ, và I, J tương ứng là trung điểm của AB và CD.



$\Rightarrow h_a = 4r$, đây h_a là đường cao của tứ diện kẻ từ A, còn r là bán kính hình cầu nội tiếp. Tương tự có $h_b = h_c = h_d = 4r \Rightarrow$

$h_a = h_b = h_c = h_d$

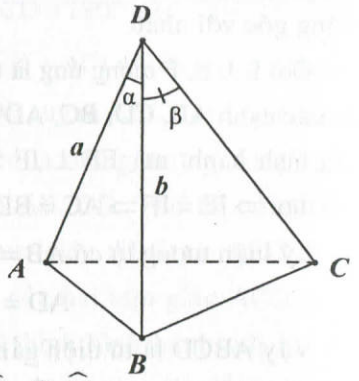
$$\Rightarrow \frac{3V}{h_a} = \frac{3V}{h_b} = \frac{3V}{h_c} = \frac{3V}{h_d}, \text{ với } V = V_{ABCD}$$

$\Rightarrow S_{BCD} = S_{ACD} = S_{ABD} = S_{ABC}$

Như thế ABCD là tứ diện có các mặt tương đương. Theo câu 3) suy ra ABCD là tứ diện gần đều (đpcm).

Thí dụ 2: Cho ABCD là tứ diện thoả mãn điều kiện: $S_{DAB} = S_{DBC} = S_{DCA}$, và tổng các góc phẳng (mặt) ở đỉnh D của tứ diện bằng 180^o. Chứng minh ABCD là tứ diện gần đều.

Giải



Đặt DA = a, DB = b, DC = c;

$\widehat{ADB} = \alpha$; $\widehat{BDC} = \beta$; $\widehat{CDA} = \gamma$

Theo giả thiết ta có $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$

Từ giả thiết ta có:

$$\frac{1}{2}ab.\sin\alpha = \frac{1}{2}bc.\sin\beta = \frac{1}{2}ca.\sin\gamma$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{c} = \frac{\sin\beta}{a} = \frac{\sin\gamma}{b} \quad (1)$$

Xét tam giác D'A'B' có A'B' = c; $\widehat{D'} = \alpha$; $\widehat{A'} = \beta$; $\widehat{B'} = \gamma$

Áp dụng định lý hàm số sin trong tam giác D'A'B' có

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{c} = \frac{\sin\beta}{D'B'} = \frac{\sin\gamma}{D'A'} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra D'B' = a; D'A' = b

Từ đó đi đến $\Delta D'A'B' = \Delta DAB \Rightarrow A'B' = AB \Rightarrow AB = c \Rightarrow AB = DC$ (3)

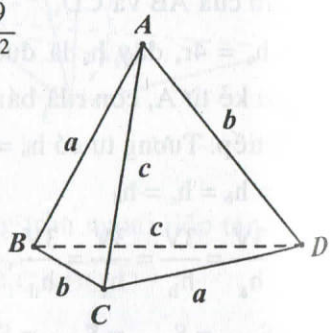
Lập luận tương tự có AC = DB; AB = DC (4)

Từ (3), (4) suy ra ABCD là tứ diện gần đều ⇒ đpcm

Thí dụ 3: Cho ABCD là tứ diện gần đều với AB = CD = a; AD = BC = b; AC = BD = c. Gọi S là diện tích toàn phần của tứ diện. Chứng minh:

$$\frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} + \frac{1}{a^2b^2} \le \frac{9}{S^2}$$

Giải



Hiển nhiên ta có:

$$S_{ABC} = S_{ACD} = S_{ABD} = S_{BCD} = \frac{S}{4}$$

Và cũng hiển nhiên ta có:

$\Delta ABC = \Delta ACD = \Delta ABD = \Delta BCD$ (c.c.c)

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Theo định lý hàm số sin, ta có: a = 2RsinC; b = 2RsinA; c = 2RsinB; ở đây $\hat{A} = \widehat{BAC}$, $\hat{B} = \widehat{ABC}$, $\hat{C} = \widehat{ACB}$

Ta có $S_{ABC} = 2R^2\sin A\sin B\sin C$

Bất đẳng thức đã cho có dạng tương đương sau:

$$\frac{1}{16R^2\sin A\sin B} + \frac{1}{16R^2\sin B\sin C} + \frac{1}{16R^2\sin C\sin A} \le \frac{9}{64R^2\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C}$$

$\Leftrightarrow \sin^2A + \sin^2B + \sin^2C \le \frac{9}{4}$ (1)

Vì (1) luôn luôn đúng $\Rightarrow$ đpcm

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$ ACBD là tứ diện đều

Chú ý: Như đã biết trong mọi tam giác ABC ta có $\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C \le \frac{9}{4}$ (2)

Thật vậy (2) $\Leftrightarrow \frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} + \sin^2 C \le \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow 1 - \cos(A+B).\cos(A-B) + 1 - \cos^2C \le \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow 2 + \cos C.\cos(A-B) - \cos^2C \le \frac{9}{4} \Leftrightarrow 4\cos^2C - 4\cos C.\cos(A-B) + 1 \ge 0$

$\Leftrightarrow [2\cos C - \cos(A-B)]^2 + \sin^2(A-B) \ge 0$ (3)

Vì (3) đúng nên (2) đúng

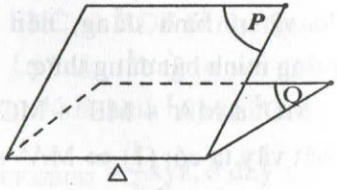
Dấu bằng trong (2) xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu bằng trong (3) xảy ra

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(A-B) = 0 \\ 2\cos C = \cos(A-B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ C = 60^o \end{cases} \Leftrightarrow$ ABC là tam giác đều.

Thí dụ 4: 1) Cho tứ diện ABCD, cạnh AB = a. Gọi S_1, S_2 là diện tích hai mặt CAB và DAB tương ứng. Gọi α là góc nhị diện của hai mặt này, và V là thể tích tứ diện ABCD. Chứng minh rằng: $V = \frac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}$

2) Cho tứ diện ABCD có AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = e, BD = p. Gọi $\alpha, \gamma, \beta, \delta, \theta, \omega$ tương ứng là các góc nhị diện , các nhị diện cạnh a, b, c, d, e, f. Giả thiết rằng $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\beta}; \frac{b}{\sin\gamma} = \frac{d}{\sin\delta}; \frac{e}{\sin\theta} = \frac{f}{\sin\omega}$. Chứng minh rằng ABCD là tứ diện gần đều.

Chú ý: Giả sử (P) $\cap$ (Q) = Δ. Khi đó góc tạo bởi hệ mặt phẳng (P), (Q) còn gọi là góc nhị diện cạnh Δ.



Giải

1) Kẻ CH $\perp$ (ABD), kẻ CK $\perp$ AB thì HK $\perp$ AB (định lý ba đường vuông góc)/ Khi ấy $\widehat{CKH}$ chính là góc nhị diện của hai mặt CAB và DAB nên $\widehat{CKH} = \alpha$

Theo giả thiết $S_1 = S_{ABC}$

$S_2 = S_{ABD} \Rightarrow V = \frac{1}{3}CH.S_2$ (1)

Ta có $CH = CK\sin\alpha = \dfrac{2S_{ABC}}{AB}\sin\alpha = \dfrac{2S_1}{a}\sin\alpha$ (2)

Thay (2) vào (1) có $V = \dfrac{2S_2S_1\sin\alpha}{3a} \Rightarrow$ đpcm

2) Kí hiệu $S_1 = S_{CAB}$; $S_2 = S_{ACD}$; $S_3 = S_{ACD}$; $S_4 = S_{BCD}$

Theo câu 1), ta có $V = \dfrac{2S_2S_1\sin\alpha}{3a} \Rightarrow \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{2S_1S_2}{3V}$

Tương tự có $\dfrac{c}{\sin\beta} = \dfrac{2S_3S_4}{3V}$. Vậy $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\beta} \Leftrightarrow S_1S_2 = S_3S_4$

Tương tự $\dfrac{b}{\sin\gamma} = \dfrac{d}{\sin\gamma} \Leftrightarrow S_1S_3 = S_2S_4$

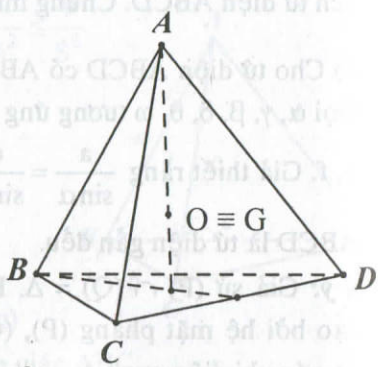
$\dfrac{e}{\sin\theta} = \dfrac{f}{\sin\omega} \Leftrightarrow S_1S_4 = S_2S_3$. Vậy từ giả thiết suy ra

$$\begin{cases} S_1S_2 = S_3S_4 \\ S_1S_3 = S_2S_4 \\ S_1S_4 = S_2S_3 \end{cases} \Leftrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = S_4 \quad (3)$$

Từ (3) và theo thí dụ (1) suy ra ABCD là tứ diện gần đều $\Rightarrow$ đpcm.

Thí dụ 5: Cho ABCD là tứ diện gần đều. Chứng minh rằng bình phương khoảng cách từ M đến một trong các đỉnh không lớn hơn tổng bình phương của khoảng cách từ M đến ba đỉnh còn lại.

Giải



Vì ABCD là tứ diện gần đều, nên theo thí dụ 1 ta có: O ≡ G, ở đây O, G tương ứng là tâm hình cầu ngoại tiếp và trọng tâm của tứ diện.

Do vị trí bình đẳng, nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức:

$MD^2 \le MA^2 + MB^2 + MC^2$ (1) là đại diện

Thật vậy ta có: (1) $\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 - MD^2 \ge 0$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}\right) - \left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OM}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2R^2 + 2OM^2 - 2\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}\right)^2.\overrightarrow{OM} \ge 0 \quad (2)$$

(do OA = OB = OC = OD = R, ở đây R là bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD)

Vì O ≡ H, nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ hay $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OD}$ (3)

Từ (2), (3) suy ra

$$(1)\Leftrightarrow 2R^2+20M^2+4\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OM}\geq 0\Leftrightarrow 2\left(OD^2+OM^2+2.\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OM}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2.\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OM}\right)^2\geq 0 \quad (4)$$

Vì (4) đúng nên (1) đúng ⇒ đpcm.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OM}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=-\overrightarrow{OD}$

⇔ M là đối xứng của D qua O.

Thí dụ 6: Cho ABCD là tứ diện và DA = BC = a; DB = AC = b; DC = AC = c

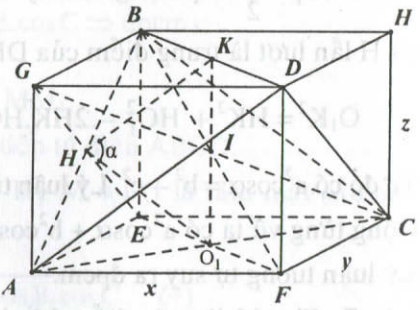
1) Tìm thể tích tứ diện ABCD.

2) Xác định tâm và tính bán kính hình cầu ngoại tiếp của tứ diện trên.

3) Giả sử DA và BC tạo với nhau góc α, tương tự β và γ tương ứng là góc của DB với CA và DC với AB. Chứng minh: $(a^2\cos\alpha + b^2\cos^2\beta - c^2\cos^2\gamma) + (a^2\cos\alpha + c^2\cos\gamma - b^2\cos^2\beta) + (b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma - a^2\cos^2\alpha) = 0$

Giải

1) Nội tiếp tứ diện trong hình hộp chữ nhật như sau: Qua trung điểm O_1 của AC vẽ đường // với BD, và về hai phía lấy $O_1E=O_1F=\frac{BD}{2}$. Do BD = AC nên AECF là hình chữ nhật.



Từ A, E, C kẻ đường // với FD và lần lượt lấy trên đó các điểm G, B, H sao mà AG = EB = CH = FD. Như vậy GB // EC, DH // FC và DG // AF, tức là GBHD là hình chữ nhật. Theo giả thiết BC = AD, mà AD = EH (do hai tam giác EHC và ADF bằng nhau, vậy BC = EH, tức là EBHC cũng là hình chữ nhật. Lý luận tương tự với các mặt còn lại của hình hộp AECF.GBHD. Vậy hình hộp đó là hình hộp chữ nhật.

Gọi V là thể tích của tứ diện, thì: $V=\frac{1}{3}V_{AECF.GBHD}=\frac{1}{3}xyz$, ở đây x = AF, y = FC, z = HC là ba kích thước của hình hộp.

Theo định lý Pitago, ta có hệ phương trình sau để xác định x, y, z.

$$\begin{cases} x^2+y^2=b^2 & (1)\\ x^2+z^2=c^2 & (2)\\ x^2+z^2=a^2 & (3)\end{cases}$$

Cộng từng vế (1), (2), (3) có: $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$, vậy suy ra

$$x^2=\frac{b^2+a^2-c^2}{2},\ y^2=\frac{b^2+a^2-c^2}{2};\ z^2=\frac{b^2+c^2-b^2}{2}$$

Như vậy $V=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{(b^2+a^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}{8}}$

hay $V=\frac{1}{12}\sqrt{2(b^2+a^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)}$

2) Ta biết rằng trong một tứ diện bất kì. 3 đoạn thẳng nối các trung điểm của các cặp cạnh đối diện đồng quy tại một điểm, và điểm đó là trung điểm của mỗi đoạn thẳng. Từ đó suy ra tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện chính là tâm I của hình hộp chữ nhật AECF.GBHD nói trên. Gọi R là bán kính hình cầu ấy, thì: $R=IC=\sqrt{\frac{b^2+z^2}{4}}=\frac{1}{4}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$

3) Ta có $IO_1=\frac{z}{2}$. Áp dụng định lý hàm số côsin trong tam giác KHO_1 (ở đây K và H lần lượt là trung điểm của DB và AB) ta có

$$O_1K^2=HK^2+HO_1^2-2HK.HO_1\cos\alpha \text{ hay } z^2=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}\cos\alpha$$

Từ đó có $a^2\cos\alpha=b^2-c^2$. Lý luận tương tự, có $b^2\cos\beta=a^2-c^2\cos\alpha=a^2-b^2$

Cộng từng vế ta có $a^2\cos\alpha+b^2\cos\beta-c^2\cos\gamma=0$

Lý luận tương tự suy ra đpcm.

Thí dụ 7: Cho M là một điểm bất kỳ nằm trong một tứ diện gần đều ABCD. MM_1, MM_2, MM_3, MM_4 lần lượt vuông góc với các mặt BCD, CDA, DAB và ABC. Gọi r và ρ lần lượt là bán kính của mặt cầu nội tiếp và bán kính đường tròn ngoại tiếp mỗi mặt của tứ diện này. Gọi A, B, C là ba góc của tam giác ABC.

1) Chứng minh: $MM_1^2+MM_2^2+MM_3^2+MM_4^2>4\rho^2\cos A\cos B\cos C$

2) Chứng minh: $\frac{r}{\rho}\le\frac{\sqrt{2}}{4}$

Giải

1) Vì ABCD là tứ diện gần đều, ta có: BC = DA = a; CA = DB = b; AB = DC = c

Dễ thấy rằng các đường cao hạ từ các đỉnh của tứ diện gần đều là bằng nhau và giả sử = h

Ta có thể thấy ngay: $MM_1+MM_2+MM_3+MM_4=h=\frac{3V}{S}$ (1)

ở đây V và S tương ứng là thể tích và diện tích toàn phần của tứ diện.

Dựng hình hộp ngoại tiếp tứ diện này ⇒ đây là hình hộp chữ nhật

$$\Rightarrow V = \frac{1}{12}\sqrt{2(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}$$

$$V = \frac{1}{3}abc\sqrt{\cos A.\cos B.\cos C} \quad (2)$$

(áp dụng định lý hàm số cosin trong tam giác ABC, ở đây A, B, C là các góc của tam giác ABC)

Ta có $S = \frac{1}{2}bc.\sin A = \frac{abc}{4\rho}$ (3)

Thay (2), (3) vào (1) có $\sum_{i=1}^{4} MM_i = h = 4\rho\sqrt{\cos A.\cos B.\cos C}$ (4)

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$h^2 = (MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4)^2 \le 4\left(MM_1^2 + MM_2^2 + MM_3^2 + MM_4^2\right) \quad (5)$$

Từ (4), (5) suy ra: $\sum_{i=1}^{4} MM_i^2 \ge 4\rho^2 \cos A.\cos B.\cos C \Rightarrow$ đpcm

Dấu bằng xảy ra: $\Leftrightarrow MM_1 = MM_2 = MM_3 = MM_4$

$\Leftrightarrow$ M là tâm hình cầu nội tiếp tứ diện ABCD.

2) Áp dụng lập luận trong phần 1, ta thấy khi lấy M ≡ I (I là tâm mặt cầu nội tiếp), ta có $4r^2 = 4\rho^2 \cos A.\cos B.\cos C$

hay $r = \rho\sqrt{\cos A.\cos B.\cos C} \Rightarrow \frac{r}{\rho} = \sqrt{\cos A.\cos B.\cos C}$ (*)

Theo kết quả trong lượng giác, ta có trong mọi tam giác (không có góc tù)

$$\sqrt[3]{\cos A.\cos B.\cos C} \le \frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3} \le \frac{1}{2} \Rightarrow \cos A.\cos B.\cos C \le \frac{1}{8}$$

Còn nếu ABC là tam giác có góc tù, thì hiển nhiên $\cos A.\cos B.\cos C < 0 < \frac{1}{8}$

Vì thế từ (*) suy ra $\frac{r}{\rho} \le \frac{\sqrt{2}}{4}$

Đó là đpcm. Dấu bằng xảy ra cosA = cosB = cosC ⇔ ABCD là tứ diện đều.

Thí dụ 8: Qua đường cao của một tứ diện đều, ta dựng một mặt phẳng cắt các mặt bên theo đường thẳng tạo với mặt đáy của tứ diện các góc α, β, γ. Chứng minh $\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\gamma = 12$

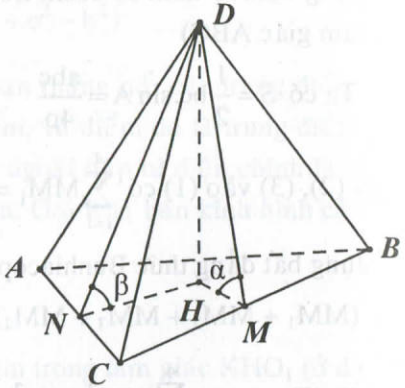
Giải

Kẻ DH ⊥ (ABC) ⇒ H là tâm của tam giác đều ABC. Gọi M, N, P là giao điểm của mặt phẳng qua DH với các đường thẳng BC, CA, AB.

Khi đó từ giả thiết, ta có: $\widehat{DMH} = \alpha$; $\widehat{DNH} = \beta$; $\widehat{DPH} = \gamma$

Ta có: $\tan\alpha = \dfrac{HD}{MH}$; $\tan\beta = \dfrac{HD}{NH}$; $\tan\alpha = \dfrac{HP}{PH}$ (1)

Gọi a là cạnh của tứ diện đều:



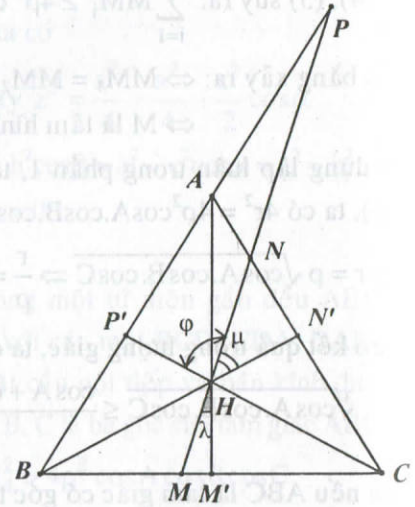
Dễ thấy khi đó $HD = a\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Từ (1) ta có $\tan^2\alpha + \tan^2\beta + \tan^2\gamma = 12$

$\Leftrightarrow HD^2\left(\dfrac{1}{MH^2} + \dfrac{1}{NH^2} + \dfrac{1}{PH^2}\right) = 12$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{MH^2} + \dfrac{1}{NH^2} + \dfrac{1}{PH^2} = \dfrac{18}{a^2}$ (2)

Dễ thấy M, N, P thẳng hàng (vì nó cùng nằm trên giao tuyến của mặt phẳng qua DH với mặt phẳng (ABC))



Giả sử λ, μ, φ là các góc lập bởi HM, HN, HP lập với các đường vuông góc kẻ từ H xuống BC, AC, AB. Các đường vuông góc này đều có độ dài $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $\left(HM' = HN' = HP' = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)$, ngoài ra HM', HN', HP' đôi một lập với nhau góc 120°. Từ đó ta có $HM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6\cos\lambda}$;

$HN = \dfrac{a\sqrt{3}}{6\cos\mu}$; $HP = \dfrac{a\sqrt{3}}{6\cos\varphi}$

Dễ thấy $\mu + \varphi = 120^\circ$; $\mu + \lambda = 60^\circ \Rightarrow \mu = 60^\circ - \lambda$; $\varphi = 60^\circ + \lambda$

Vậy: $\dfrac{1}{HM^2} + \dfrac{1}{HN^2} + \dfrac{1}{HP^2} = \dfrac{1}{9^2}\left[\cos^2\lambda + \cos^2(60^\circ - \lambda) + \cos^2(60^\circ + \lambda)\right]$ (3)

Dễ dàng tính được $\cos^2\lambda + \cos^2(60^\circ - \lambda) + \cos^2(60^\circ + \lambda) = \dfrac{3}{2}$ (4)

Từ (3), (4) suy ra (2) đúng ⇒ đpcm

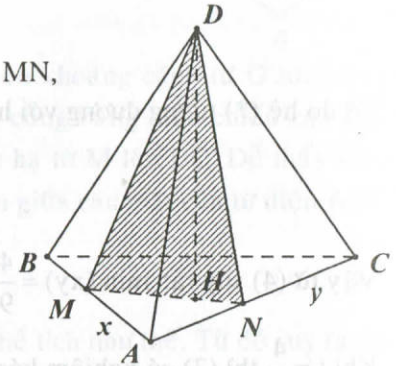
Thí dụ 9: ABCD là tứ diện đều cạnh bằng 1. M và N là các điểm di động trên AB, AC, sao cho (DMN) luôn vuông góc với (ABC). Đặt AM = x, AN = y

1) Chứng minh $x + y = 3xy$

2) Tính thể tích và diện tích toàn phần của tứ diện DAMN.

3) Xác định giá trị của M và N để các đại lượng trong câu 2 đạt giá trị lớn nhất và bé nhất. Tính các giá trị ấy.

Giải



1) Vì (ABC) ⊥ (DMN) và (ABC) ∩ (DMN) = MN, nên nếu kẻ DH ⊥ MN thì DH ⊥ (ABC).

Do DABC là tứ diện đều, nên H là tâm của tam giác đều ABC, vì thế $\widehat{MAH} = \widehat{NAH} = 30^o$

Ta có $S_{AMN} = \frac{1}{2}xy\sin\widehat{MAN} = \frac{\sqrt{3}}{4}xy$ (1)

Mặt khác $S_{AMN} = \frac{1}{2}xAH\sin 30^o + \frac{1}{2}yAH\sin 30^o = \frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{3}(x+y)$ (2)

Từ (1) và(2) suy ra $x + y = 3xy$

2) Ta có ngay: $V_{DAMN} = \frac{1}{3}DH.S_{AMN} = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{6}}{3}.\frac{1}{2}xy\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}xy$

Gọi S là diện tích toàn phần của tứ diện DAMN, ta có:

$$S = \frac{x\sqrt{3}}{4} + \frac{y\sqrt{3}}{4} + \frac{xy\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{(x+y)^2 - 3xy}$$

Theo câu 1) suy ra $S = \sqrt{3}xy + \frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{3xy(3xy-1)}$

3) Từ câu 2) suy ra V_{max} và $S_{max} \Leftrightarrow$ xy max

V_{min} và $S_{min} \Leftrightarrow$ xy min

Rõ ràng $0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1$

Đặt xy = t. Theo câu 1) ta có $x + y = 3t$

Vậy x và y là nghiệm của phương trình: $f(z) = z^2 - 3tz + t = 0$ (3)

Những giá trị có thể của t là những giá trị làm cho (3) có nghiệm z_1, z_2 thoả mãn $0 \le z_1 \le z_2 \le 1$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\Delta \ge 0\\ (z_1-1)(z_2-1)\ge 0\\ z_1+z_2\le 2\\ z_1z_2\ge 0\\ z_1+z_2\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta \ge 0\\ z_1z_2-(z_1+z_2)+1\ge 0\\ z_1+z_2\le 2\\ z_1z_2\ge 0\\ z_1+z_2\ge 0\end{cases} \quad (*)$$

Ta có $\Delta = 9t^2 - 4t$; $z_1 + z_2 = 3t$; $z_1z_2 = t$

Từ đó hệ (*) tương đương với hệ $\begin{cases}9t^2-4t\ge 0\\ t-3t+1\ge 0\\ 3t\le 2\\ t\ge 0\\ 3t\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{9}\le t\le \frac{1}{2}$ (4)

Vậy từ (4) suy ra: $\min(xy)=\frac{4}{9}\Leftrightarrow t=\frac{4}{9}$; $\max(xy)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$

Khi $t=\frac{4}{9}$ thì (3) có nghiệm kép $z=\frac{2}{3}\Rightarrow x=y=\frac{2}{3}$

Khi $t=\frac{1}{2}$ thì (3) có nghiệm $\begin{cases}z_1=\frac{1}{2}\\ z_2=1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=1\end{cases}\end{array}\right.$

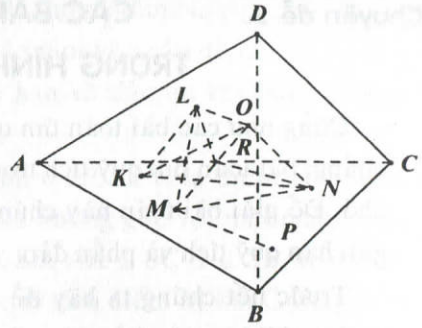
Từ đó ta có kết luận sau:

$$V_{min}=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ và } S_{min}=\frac{\sqrt{3}}{9}(4+\sqrt{2})\Leftrightarrow AM=AN=\frac{2}{3}$$

$$V_{max}=\frac{\sqrt{2}}{24} \text{ và } S_{max}=\frac{1}{4}(2\sqrt{3}+\sqrt{2})\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}M\equiv B,\ N\equiv A\\ M\equiv A,\ N\equiv C\end{array}\right.$$

Thí dụ 10: Gọi O là tâm của một hình tứ diện đều. Từ một điểm M bất kì trên một mặt của tứ diện, hạ các đường vuông góc tới ba mặt phẳng còn lại, với K, L và N là chân của ba đường vuông góc này. Chứng minh rằng đường thẳng OM qua trọng tâm của tâm giác KLN.

Giải



Gọi R là giao điểm của OM với mặt phẳng KLN. Việc khẳng định R là trọng tâm của tam giác KLN tương đương với khẳng định rằng ba tứ diện MKLO, MLNO, MNKO có cùng thể tích. Gọi x, y, z là khoảng cách từ M tới các cạnh tương ứng của tam giác ABC. Vì mặt phẳng KLM vuông góc với cạnh AD nên khoảng cách từ O tới mặt phẳng KLM bằng hình chiếu của OM lên AD, cũng bằng hình chiếu của đoạn MP lên DA, với P là chân đường vuông góc hạ từ M lên BC. Dễ thấy rằng hình chiếu từ M tới BC. Nếu α là góc nhị diện giữa các mặt của tứ diện ABCD thì

$$V_{KLMO} = \frac{1}{6}KM.ML\sin\alpha\frac{z}{\sqrt{3}} = \frac{xyz\sqrt{2}}{27}$$

Các tứ diện MLNO và MNKO cũng có thể tích như thế. Từ đó suy ra đpcm.

Chuyên đề 2. CÁC BÀI TOÁN QUĨ TÍCH TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Cũng như các bài toán tìm quỹ tích (hay tìm tập hợp điểm) trong hình học phẳng, bài toán tìm quỹ tích trong hình học không gian thuộc lớp các bài toán khó. Để giải bài toán này chúng ta phải tiến hành qua ba bước: phần thuận, giới hạn quỹ tích và phần đảo.

Trước hết chúng ta hãy đề cập đến nguyên lý chung của việc tìm phần thuận, giới hạn và phần đảo của quỹ tích.

1) Phần thuận của quỹ tích là phần trọng tâm của bài toán quỹ tích. Trong phần này chúng ta phải chỉ ra miền D mà điểm cần tìm quỹ tích nằm trên đó. Miền D này phải gần sát với quỹ tích cần tìm (thí dụ nếu như quỹ tích là đoạn thẳng AB, thì miền D chẳng hạn là đường thẳng chứa AB...). Để tìm được miền D này người ta thường sử dụng các bước sau đây:

– Tiên đoán quỹ tích, tức là phải hình dung được D có khả năng là miền gì? Muốn thế ta hãy vẽ thử vài điểm cần tìm quỹ tích, rồi phỏng đoán ra miền D. Cần lưu ý với các bạn rằng điều này đối với quỹ tích không gian thường là khó hơn với quỹ tích phẳng. Lý do vì việc vẽ hình với hình học phẳng là chính xác, còn như các bạn đã biết vẽ hình trong hình học không gian có tính chất tương đối của nó.

– Dựa vào điều kiện đầu bài, chứng minh rằng D có khả năng là miền chứa quỹ tích cần tìm. Đây là phần cốt lõi của phần thuận (và cũng là của bài toán tìm quỹ tích).

2) Phần giới hạn của quỹ tích chính là phần chỉ chính xác quỹ tích, tức là tìm ra tập con D_1 của D mà D_1 chính là toàn bộ quỹ tích biến thiên ở đầu bài chuyển động trên đó, và đặc biệt là các điểm biến thiên ở đầu bài chuyển động trên đó, và đặc biệt là các điểm cực biên (như đầu mút của đoạn thẳng... trên đó điểm biến thiên di động).

3) Phần đảo của quỹ tích có thể xem như là phần khó nhất trong quá trình tìm quỹ tích. Có thể hình dung được phần đảo của quỹ tích tiến hành theo các bước sau đây:

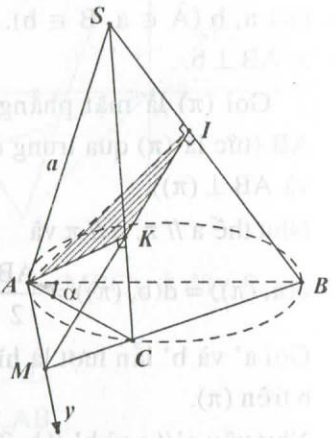
a. Phát biểu bài toán đảo cần làm. Bước này quan trọng ở chỗ chỉ rõ phương hướng cần giải quyết. Nhìn chung lược đồ của nó như sau: Giả sử $M \in D_1$ là điểm nằm trên quỹ tích, ta phải chứng minh rằng tồn tại điểm N biến thiên thoả mãn mọi yêu cầu của đề bài, mà từ điểm N đó xác định cho ta đúng điểm $M \in D_2$.

b. Giải một bài toán dựng hình, thực chất là dựng điểm N.

c. Chứng minh điểm N dựng được thoả mãn mọi yêu cầu đề ra.

Sau khi hoàn thành ba phần: thuận, giới hạn và đảo, ta kết luận về quỹ tích cần tìm.

Thí dụ 1: Cho đường tròn đường kính A cố định = 2R và C là điểm chạy trên đường tròn. Trên đường thẳng Ax đi qua A và vuông góc với mặt phẳng của đường tròn lấy điểm S cố định. Từ A kẻ AI ⊥ SB, AK ⊥ SC (I ∈ SB, K ∈ SC). Giả sử M là giao điểm của BC và IK. Tìm quỹ tích điểm M khi C chạy trên đường tròn.



Giải

1. Phần thuận:

Ta có BC ⊥ AC (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) mà SA ⊥ (SAC)

⇒ SA ⊥ BC ⇒ BC ⊥ (SAC)

⇒ (SBC) ⊥ (SAC).

Do (SBC) ∩ (SAC) = SC mà AK ⊥ SC, vậy AK ⊥ (SBC) ⇒ AK ⊥ SB

Lại thấy AI ⊥ SB (gt) ⇒ SB ⊥ (AIK) (1)

Vì SA ⊥ (ABC) mà AM ⊥ (ABC) ⇒ SA ⊥ AM

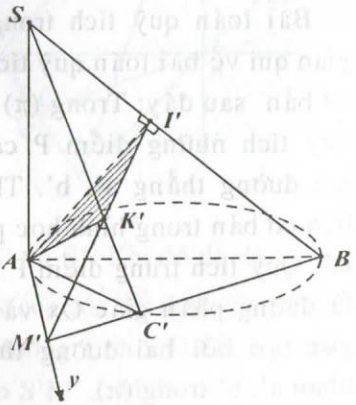
Mặt khác AM ∈ (AIK), nên từ (1) có SB ⊥ AM ⇒ AM ⊥ (SAB) ⇒ AM ⊥ AB, tức là M nằm trên tiếp tuyến Ax của đường tròn đường kính AB vẽ trong (P).

2. Giới hạn

Dễ thấy khi C chạy trên đường tròn, thì M chạy trên toàn tiếp tuyến nói trên.

3. Phần đảo

Đảo lại lấy một điểm M' tuỳ ý trên tiếp tuyến ấy. Ta phải chứng minh tồn tại C' trên đường tròn sao cho nếu gọi I', K', là các hình chiếu của A lên SB, SC, thì M' = I'K' ∩ BC'.



Trong (P), thì M'B cắt đường tròn đường kính AB tại C'. Kẻ AI' ⊥ SB. Trong (MI'B), thì M'I' ∩ SC = K'

Ta sẽ chứng minh rằng AK' ⊥ SC'

Vì Ay ⊥ AB, Ax ⊥ SA ⇒ Ay ⊥ (SAB)

⇒ Ay ⊥ SB. Lại có SB ⊥ AI'

⇒ SB ⊥ (AI'M') ⇒ SB ⊥ AK' (*)

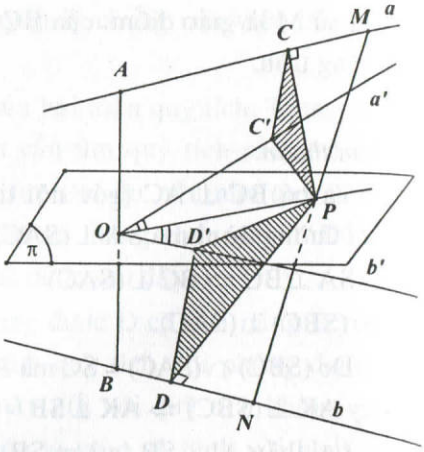
⇒ BC' ⊥ (SAC') ⇒ BC ⊥ AK' (**)

Từ (*), (**) suy ra AK' ⊥ (SBC') ⇒ AK' ⊥ SC' ⇒ đpcm

Vậy quỹ tích của M (hay tập hợp các điểm M) là tiếp tuyến với đường kính AB tại A vẽ trong mặt phẳng (P).

Thí dụ 2: Trong không gian cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. M và N là hai điểm chuyển động tương ứng trên a, b sao cho đường thẳng MN hợp với a, b những góc bằng nhau. Tìm quỹ tích trung điểm P của MN.

Giải



Gọi AB là đường vuông góc chung của a, b (A ∈ a, B ∈ b). Như vậy AB ⊥ a, AB ⊥ b.

Gọi (π) là mặt phẳng trung trực của AB (tức là (π) qua trung điểm O của AB và AB ⊥ (π)).

Như thế a // π. b // π và

$$d(a, (\pi)) = d(b, (\pi)) = \frac{AB}{2}$$

Gọi a' và b' lần lượt là hình chiếu của a, b trên (π).

Như vậy a'// a vì b' // b. Ta có a', b' cùng đi qua O.

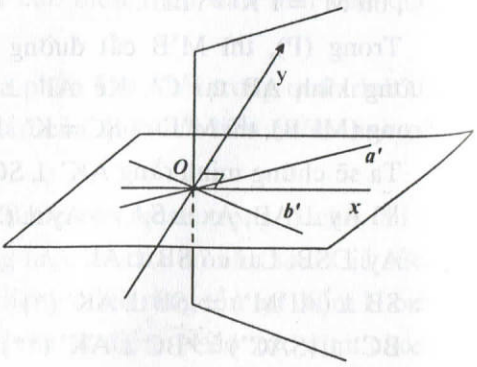
Dễ thấy trung điểm P của MN nằm trên (π).

Kẻ PC ⊥ a, PD ⊥ b (C ∈ a, D ∈ b). Theo giả thiết ta có $\widehat{AMN} = \widehat{BNM}$. Từ đó suy ra hai tam giác vuông MCP cà DNP bằng nhau ⇒ PC = PD

Gọi C' và D' tương ứng là hình chiếu của C và D trên (π). Rõ ràng C' ∈ a', D' ∈ b'.

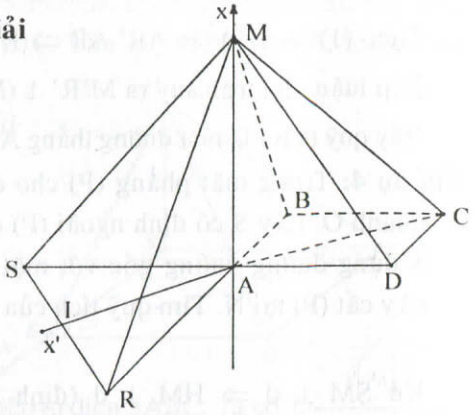
Ta có a ⊥ (PCC') (do a ⊥ CC') ⇒ a ⊥ PC' ⇒ a' ⊥ PC'. Tương tự ta có PD' ⊥ b'. Vì thế từ PC = PD ⇒ PC' = PD'

Bài toán quỹ tích trong không gian qui về bài toán quỹ tích phẳng cơ bản sau đây: Trong (π) hãy tìm quỹ tích những điểm P cách đều hai đường thẳng a', b'. Theo quỹ tích cơ bản trong hình học phẳng ta có: Quỹ tích trung điểm P của MN là đường phân giác Ox và Oy của góc tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau a', b' trong (π).



Thí dụ 3: Trong (P) cho hình vuông ABCD. Qua A vẽ Ax ⊥ (P). Lấy M thuộc Ax. Đường thẳng qua M vuông góc với (MBC) cắt (P) tại R, đường thẳng qua M vuông góc với (MCD) cắt (P) tại S. Gọi I là trung điểm của RS. Tìm quỹ tích I khi M chạy trên Ax.

Giải



1) Phần thuận:

Ta có CD ⊥ AD (gt), CD ⊥ SA (vì SA ⊥ (P)) ⇒ CD ⊥ (MAD) ⇒ (MCD) ⊥ (MAD).

Lại có (MCD) ∩ (MAD) = MD, nên nếu trong (MAD) kẻ MS ⊥ MD, thì MS ⊥ MD, thì MS ⊥ (MCD), ở đây S dễ thấy nằm trên AD kéo dài về phía A.

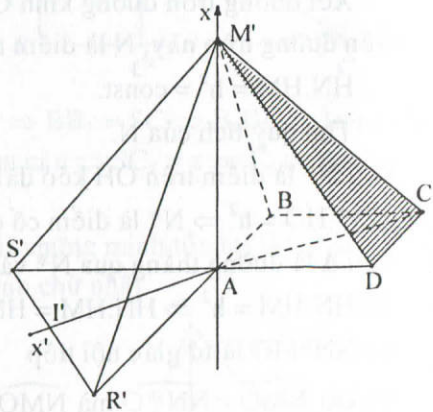
Tương tự trong (MAB) kẻ MR ⊥ MB ⇒ MR ⊥ (MBC), ở đây R nằm trên AB kéo dài về phía A.

Trong tam giác vuông SMD, thì $MA^2 = AS.AD$

Trong tam giác vuông RMB, thì $MA^2 = AR.AB$

Vì AD = AB ⇒ AS = AR. Do I là trung điểm của SR, nên I nằm trên nửa đường thẳng Ax' là phân giác của góc đối đỉnh với góc $\widehat{BAD}$ (góc A của hình vuông ABCD)

2) Phần đảo



Đảo lại giả sử I' là điểm tuỳ ý nằm trên nửa đường thẳng Ax'. Ta phải chứng minh tồn tại M' ∈ Ax sao cho nếu gọi R' là giao của đường thẳng qua M' và vuông góc với (M'BC) với (P), còn S' là giao của đường thẳng qua M' vuông góc với (M'CD) với (P); thì I' là trung điểm của R'S'.

Qua I' dựng đường vuông góc với Ax', cắt AD và AB kéo dài tương ứng tại S' và R'. Khi đó dễ dàng thấy rằng I' là trung điểm của S'R' (do Ax' là phân giác của góc đối đỉnh với góc $\widehat{BAD}$)

Trong mặt phẳng Ax, dựng đường tròn đường kính S'D cắt Ax (chẳng hạn cắt nửa đường thẳng Ax phía trên) tại M' ⇒ S'M' ⊥ M'D

Do $AB \perp (Ax) \Rightarrow DC \perp (Ax)$ (vì $DC // AB$) $\Rightarrow DC \perp S'M'$

$\Rightarrow M'S' \perp (M'DC)$ và $M'S' \cap (P) = S'$

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông M'S'D ta có: $M'A^2 = AS'.AD$ (1)

Vì $AR' = AS'.AB = AD \Rightarrow AS'.AD = AR'.AB$

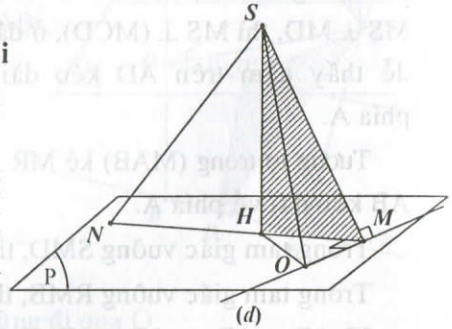
Theo (1) $\Rightarrow M'A^2 = AR'.AB \Rightarrow \widehat{R'M'B} = 90^o \Rightarrow M'Q' \perp M'B$

Lập luận như trên suy ra $M'R' \perp (M'BC)$ và $M'R' \cap (P) = R'$

Vậy quỹ tích I là nửa đường thẳng Ax' là phân giác của góc đối đỉnh với $\widehat{BAD}$

Thí dụ 4: Trong mặt phẳng (P) cho điểm O cố định và d là đường thẳng quay quanh O. Lấy S cố định ngoài (P) có hình chiếu trên (P) là H, với $H \neq 0$. Qua S dựng đường vuông góc với mặt phẳng xác định bởi S và d. Đường thẳng này cắt (P) tại N. Tìm quỹ tích của N.

Giải



Kẻ $SM \perp d \Rightarrow HM \perp d$ (định lý ba đường vuông góc)

Trong (SMH) kẻ đường thẳng vuông góc với SM. Đường thẳng này cắt MH kéo dài ở N. Ta có $SN \perp d$ (do $d \perp (SMH)$), vì $SN \perp SM \Rightarrow SN \perp (S; d)$

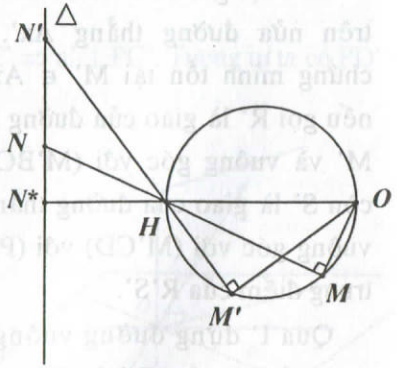
Trong tam giác vuông SMN, ta có: $HN.HM = SH^2 = h^2 = const$

Bài toán trở thành bài toán hình học phẳng sau:

Xét đường tròn đường kính OH cố định trong (P). M là điểm chuyển động trên đường tròn này, N là điểm nằm trên MH kéo dài sao cho:

$HN.HM = h^2 = const.$

Tìm quỹ tích của N.



Gọi N* là điểm trên OH kéo dài sao cho $HN^*.HO = h^2 \Rightarrow N^*$ là điểm cố định

Gọi Δ là đường thẳng qua N* và $\Delta \perp OH$

Vì $HN.HM = h^2 \Rightarrow HN.HM = HN^*.HO$

$\Rightarrow NN^*MO$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow$ Do $\widehat{NMO} = \widehat{NN^*O}$ mà $\widehat{NMO} = 90^o$

$\Rightarrow \widehat{NN^*O} = 90^o \Rightarrow N \in \Delta$

Đã lại lấy N' tuỳ ý trên Δ. Giả sử N'H giao đường trên tại M'

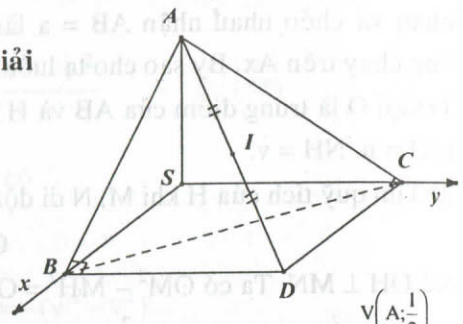
Do $\widehat{N'M'O} = \widehat{N'N^*O} = 90^o \Rightarrow$ tứ giác $N'N^*M'O$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow HN'.HM' = HN^*.HO = h^2$

Vậy quỹ tích của N là đường thẳng Δ (trong (P). Đường thẳng này vuông góc với HO tại điểm N* nói trên.

Thí dụ 5: Trong mặt phẳng (P) cho góc vuông $\widehat{xSy} = 90^0$ đỉnh S cố định. Đoạn AS = a vuông với (P). Trên Sx, Sy lần lượt lấy B, C sao cho SB + SC = a. Gọi I là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện SABC. Tìm quỹ tích I khi B, C di động theo quy luật trên.

Giải



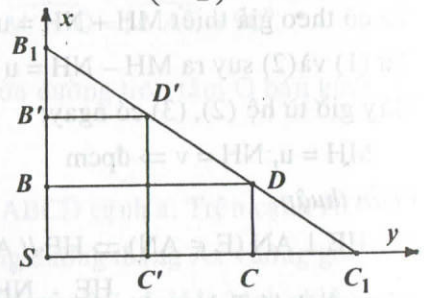
Trong (P) dựng hình chữ nhật SBCD.

Gọi I là trung điểm của AD.

Dễ thấy BD ⊥ AB, DC ⊥ AC (định lý ba đường vuông góc).

Từ đó IA = IB = IC = ID = IS (vì cùng bằng $\frac{1}{2}$ AD). Vậy I là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện SABC. Ta có $D \xrightarrow{V\left(A;\frac{1}{2}\right)} I$

Vậy bài toán tìm quỹ tích I, dựa vào phép vị tự $V\left(A;\frac{1}{2}\right)$ quy về bài toán quỹ tích phẳng (tìm quỹ tích D) như sau:



Cho góc vuông $\widehat{xSy} = 90^0$ đỉnh S cố định.

Trên hai cạnh Sx, Sy lần lượt lấy B, C di động sao cho SB + SC = a. Dựng hình chữ nhật SBDC. Tìm quỹ tích của đỉnh D. Lấy B_1 trên Sx sao cho $SB_1 = a \Rightarrow B_1$ cố định.

Nối B_1D và giả sử $B_1D \cap Sy = C_1$

Do SB + SC = a, nên $SB = BB_1 = SB_1 = a \Rightarrow BB_1 = SC \Rightarrow B_1BD$ là tam giác vuông cân $\Rightarrow B_1SC_1$ cũng là tam giác vuông cân $\Rightarrow SC_1 = a \Rightarrow C_1$ cố định.

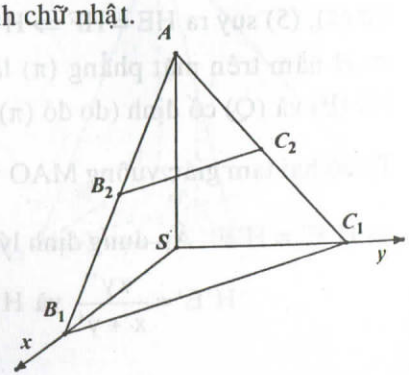
Do đó $D \in$ đoạn B_1C_1

Đảo lại lấy D' tuỳ ý trên đoạn B_1C_1, ta phải chứng minh tồn tại $B' \in Sx$, $C' \in Sy$ sao cho SB' + SC' = a và SB'D'C' là hình chữ nhật.

Thật vậy có thể thấy ngay B', C' tương ứng là hình chiếu của D' trên Sx, Sy.

Vậy quỹ tích của đoạn B_1C_1.

Do I là ảnh của D trong phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{1}{2}$, nên từ trên suy ra:



$$B_1 \xrightarrow{V\left(A;\frac{1}{2}\right)} B_2,\quad C_1 \xrightarrow{V\left(A;\frac{1}{2}\right)} C_2$$

ở đây B_2, C_2 lần lượt là trung điểm của AB_1; AC_1.

Do vậy quỹ tích I là đoạn B_2C_2, tức là đường trung bình của tam giác AB_1C_1 (B_2C_2 // B_1C_1), ở đây B_1, C_1 xác định như trên tức là:

$B_1 \in S_x$, $C_1 \in Sy$ và $SB_1 = SC_1 = a$

Thí dụ 6: Trong không gian cho hai nửa đường thẳng Ax và By vuông góc với nhau và chéo nhau nhận AB = a làm đường vuông góc chung. M, N tương ứng chạy trên Ax, By sao cho ta luôn có MN = AM + BN.

1) Gọi O là trung điểm của AB và H là hình chiếu của I lên MN. Chứng minh MH = u; NH = v.

2) Tìm quỹ tích của H khi M, N di động theo quy luật trên.

Giải

1) Kẻ OH ⊥ MN. Ta có $OM^2 - MH^2 = ON^2 - NH^2$ (vì cùng = OH^2)

$$\Rightarrow u^2 + \frac{a^2}{4} - MH^2 = v^2 + \frac{a^2}{4} - NH^2$$

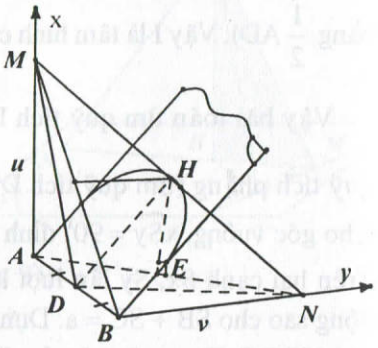
hay $MH^2 - NH^2 = u^2 - v^2$ (1)

Ta có theo giả thiết MH + NH = u + v (2)

Từ (1) và(2) suy ra MH – NH = u – v (3)

Bây giờ từ hệ (2), (3) có ngay:

MH = u, NH = v ⇒ đpcm



2) *Phần thuận*

Kẻ HE ⊥ AN (E ∈ AN) ⇒ HE // Ax vậy HE ⊥ (P)

Theo định lý Talét, có: $\frac{HE}{AM} = \frac{NH}{NM} \Rightarrow HE = \frac{uv}{u+v}$ (4)

Trong tam giác MBN, kẻ HF // NB, mà NB ⊥ (Q) ⇒ HF ⊥ (Q)

Lại theo định lý Talét, có $\frac{HF}{BN} = \frac{MH}{MN} \Rightarrow HF = \frac{uv}{u+v}$ (5)

Từ (4), (5) suy ra HE = HF ⇒ H cách đều hai mặt phẳng (P) và (Q).

⇒ H nằm trên mặt phẳng (π) là mặt phẳng phân giác của góc nhị diện tạo bởi (P) và (Q) cố định (do đó (π) cố định).

Ta có hai tam giác vuông MAO và MHO bằng nhau nên $OH = \frac{a}{2}$.

⇒ H'E' = H'F'. Áp dụng định lý Talét như trên ta có thể tính được:

$$H'E' = \frac{xy'}{x'+y'} \text{ và } H'F' = \frac{x'y}{x'+y'} \Rightarrow xy' = x'y \quad (*)$$

Áp dụng định lý hàm số cosin trong các $\Delta M'H'O$ và $N'H'O$, có

$$\cos\widehat{M'H'O} = \frac{u'^2 + \frac{a^2}{4} - MO^2}{u'a} = \frac{u'^2 - u^2}{u'a}$$

Tương tự, có $\cos\widehat{OH'N'} = \frac{v'^2 - v^2}{v'a}$

Do $\widehat{M'H'O} + \widehat{OH'N'} = 180^0 \Rightarrow \frac{u'^2 - u^2}{u'} = \frac{v^2 - v'^2}{v'}$ (**)

Từ (*) suy ra $u' = \frac{v'u}{v}$, rồi thay vào (**) có

$$\frac{\frac{u^2v'^2}{v^2} - u^2}{uv'}v = \frac{v^2 - v'^2}{v'} \Rightarrow \frac{u(v'^2 - v^2)}{v^2} = -(v'^2 - v^2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{u}{v} + 1\right)(v' + v)(v' - v) = 0 \Rightarrow v' = v \Rightarrow u' = u \Rightarrow M'N' = AM' + BN'$$

Cũng từ đó có $\Delta M'AO = \Delta M'H'O$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{M'H'O} = \widehat{M'AO} = 90^o$.

$\Rightarrow OH' \perp MN'$. Tóm lại quỹ tích của H là nửa đường tròn tâm O bán kính $\frac{a}{2}$ vẽ trong (π).

Thí dụ 7: Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh a. Trên cạnh AD lấy điểm M và đặt AM = x $(0 < x < a)$. Từ A dựng đường thẳng Ax vuông góc với (P) và trên Ax lấy điểm S. Gọi I là trung điểm của SC và H là hình chiếu của I lên CM. Tìm quỹ tích H khi M chạy trên AD và chạy trên Ax.

Giải

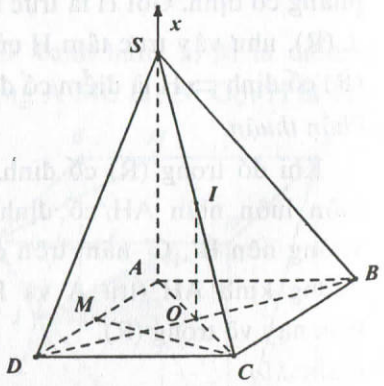
Gọi O là tâm hình vuông ABCD

$\Rightarrow IO // SA \Rightarrow IO \perp (P)$.

Do $IH \perp CM \Rightarrow OH \perp CM$ (định lý ba đường vuông góc). Vậy H nằm trên đường tròn đường kính OC vẽ trong (P).

Bây giờ ta tìm giới hạn của quỹ tích.

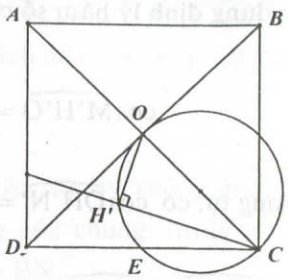
Khi $M \equiv A \Rightarrow H \equiv O$



Khi M ≡ D, gọi E là trung điểm của DC.

Do IE // SD mà SD ⊥ DC (định lý ba đường vuông góc) ⇒ IE ⊥ DC tức H ≡ E

Vậy giới hạn của quỹ tích chỉ là cung tròn $\overset{\frown}{OE}$ (tức là một phần tư đường tròn đường kính OC).



Đảo lại lấy điểm H' tương ứng trên $\overset{\frown}{OE}$ ta phải chứng minh tồn tại M' ∈ AD, S' ∈ Ax sao cho I'H' ⊥ M'C (ở đây I' là trung điểm của S'C)

Thật vậy do H' ∈ $\overset{\frown}{OE}$, nên CH' cắt cạnh AD và giả sử CH' ∩ AD = M'

Lấy S' là điểm tuỳ ý trên Ax (miễn là S' ≠ A). Ta có OH' ⊥ H'C. Do I'O // S'A ⇒ I'O ⊥ (ABCD) ⇒ CM' (định lý ba đường vuông góc)

Vậy quỹ tích của H là một phần tư đường tròn đường kính OC, tức là cung $\overset{\frown}{OE}$, với E là trung điểm của CD.

Thí dụ 8: Cho hai đường thẳng d, d' chéo nhau và vuông góc với nhau. Giả sử A là điểm cố định trên d. Với mỗi điểm B thay đổi trên d', chọn C trên d' sao cho hai mặt phẳng (d, B) và (d, C) vuông góc với nhau. Gọi B', C' là chân các đường cao trong ΔABC kẻ từ B và C. Tìm quỹ tích B' và C' khi B và C di động theo quy luật trên.

Giải

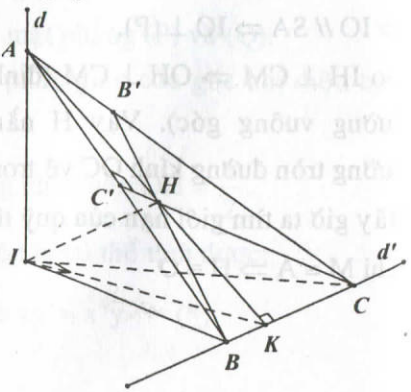
Gọi IK là đường vuông góc chung của d và d' (với I ∈ d, K ∈ d'). Xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: A ≠ I

Gọi R là mặt phẳng xác định bởi A và d', tức là R = (A, d') ⇒ (R) là mặt phẳng cố định. Gọi H là trực tâm ΔABC, khi đó theo bài toán cơ bản ta có IH ⊥ (R), như vậy trực tâm H của Δ ABC là hình chiếu của điểm I cố định lên (R) cố định ⇒ H là điểm cố định khi B, C di động.

1) Phần thuận:

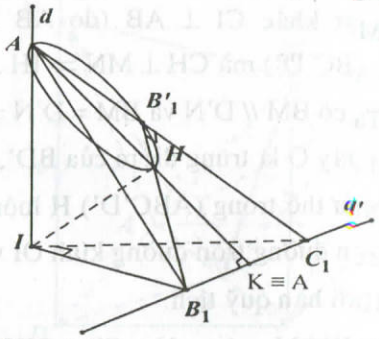
Khi đó trong (R) cố định, B' và C' luôn luôn nhìn AH cố định dưới góc vuông nên B', C' nằm trên đường tròn đường kính AH (trừ A và H). Đường tròn này vẽ trong (R).



2) Phần đảo:

Đảo lại, giả sử B'$_1$ là điểm bất kỳ trên đường tròn này (B'$_1$ ≠ A; B' ≠ H)

Ta phải chứng minh tồn tại B_1, C_1 trên d' sao cho $(B_1, d) \perp (C_1; d)$ và B'_1 là hình chiếu của B_1 trên AC_1



Thật vậy trong (R), giả sử:

$B'H \cap d' = B_1$

Trong (A, d') giả sử $AB'_1 \cap d' = C_1$

Ta có H là trực tâm ΔAB_1C_1 (do $B_1B'_1 \perp AC_1$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn và $AK \perp d'$).

Còn lại ta phải chứng minh $(B_1, d) \perp (C_1, d)$.

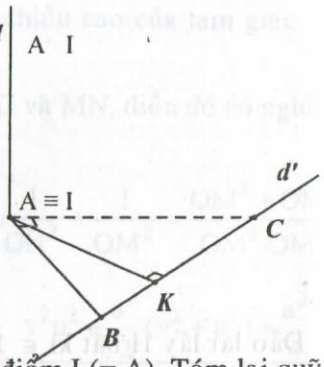
Thật vậy ta có $IB_1 \perp AI$ (do $AI \perp (\pi)$) mà $IB_1 \in (\pi)$

Ta có $AC_1 \perp IH$ (vì $IH \perp (A, d')$, $AC_1 \perp B_1B'_1 \Rightarrow AC_1 \perp (IHB_1)$

$\Rightarrow AC_1 \perp IB_1 \Rightarrow IB_1 \perp (IAC_1) \Rightarrow (IB_1A) \perp (IAC_1)$ tứa là $(B_1, d) \perp (C_1, d)$

Vậy quỹ tích B' là đường tròn đường kính AH (trừ A, H) vẽ trong (R) (với C' hoàn toàn tương tự)

Trường hợp 2: $A \equiv I$



Vì $(B, d) \perp (C, d)$ và do $\widehat{BIC} (= \widehat{BAC})$ chính là góc phẳng của nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng nói trên nên $\widehat{BIC} (= \widehat{BAC}) = 90^o$.

Lúc này trực tâm H của ΔABC chính là A

$H \equiv A \equiv I \Rightarrow B' \equiv C' \equiv I$

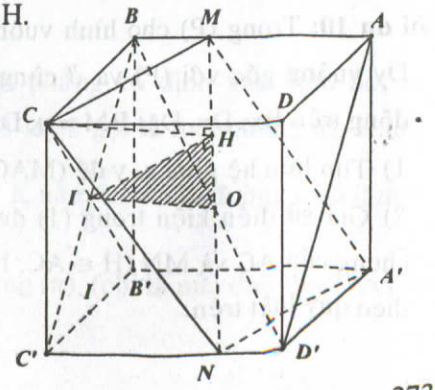
Vậy trong trường hợp này quỹ tích thu về một điểm I (≡ A). Tóm lại quỹ tích của B'(C') là:

1) Đường tròn đường kính AH (trừ A, H) vẽ trong (R) = (A, d') nếu $A \neq I$,

2) Điểm duy nhất A, nếu $A \equiv I$.

Thí dụ 9: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng a, M là điểm di động trên cạnh AB. Giả sử C'D' cắt mặt phẳng A'MC tại N. Gọi H là hình chiếu của C xuống MN. Tìm quỹ tích của H.

Giải



Ta có (ABCD) // (A'B'C'D'),

mà $(A'MC) \cap (ABCD) = MC$

$\Rightarrow (A'MC) \cap (A'B'C'D') = A'N$

trong đó A'N // MC ($N \in D'C'$)

Dễ thấy BM = D'N

Gọi I là trung điểm của BC' (tức I là tâm của mặt bên B'BCC')

Ta có CI ⊥ BC'

Mặt khác CI ⊥ AB (do AB ⊥ BCC'B') ⇒ CI ⊥ (ABC'D'). Do MN ∈ (ABC'D') mà CH ⊥ MN ⇒ IH ⊥ MN (định lý ba đường vuông góc)

Ta có BM // D'N và BM = D'N ⇒ BMD'N là hình bình hành ⇒ MN ∩ BD' = O, ở đây O là trung điểm của BD', tức là O là tâm của hình lập phương.

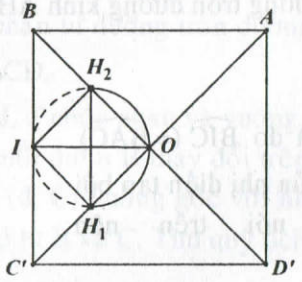
Như thế trong (ABC'D') H luôn nhìn OI cố định một góc vuông, nên H nằm trên đường tròn đường kính OI vẽ trong (ABC'D').

Giới hạn quỹ tích:

1) Khi M ≡ A ⇒ N ≡ C' ⇒ MN = AC' ⇒ H ≡ H_1

2) Khi M ≡ B ⇒ N ≡ D' ⇒ MN = BD' ⇒ H ≡ H_2

Vậy giới hạn quỹ tích là đường tròn $\overset{\frown}{H_1H_2}$



Đảo lại lấy H bất kì ∈ $\overset{\frown}{H_1OH_2}$, ta phải chứng minh tồn tại M ∈ AB sao cho nếu gọi N = (A'MC) ∩ (D'C') thì H là hình chiếu của C là MN.

Thật vậy, gọi M = OH ∩ AB. Ta có IH ⊥ MN (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) ⇒ CH ⊥ MN (định lý ba đường vuông góc).

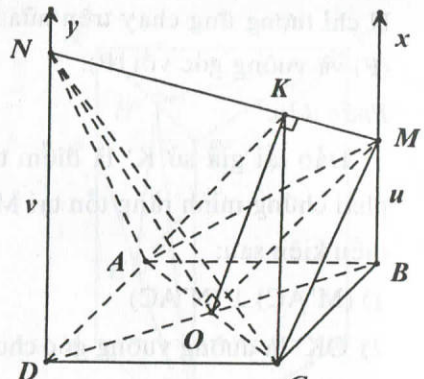
Vậy quỹ tích của H là nửa đường tròn đường kính H_1H_2 vẽ trong (ABC'D')

Thí dụ 10: Trong (P) cho hình vuông ABCD cạnh a. Hai nửa đường thẳng Bx, Dy vuông góc với (P) và ở cùng một phía đối với (P). M, N là hai điểm di động trên Bx, Dy. Đặt BM = u, DN = v.

1) Tìm liên hệ giữa x, y để (MAC) ⊥ (NAC).

2) Giả sử điều kiện trong (1) được thoả mãn. Gọi HK là đường vuông góc chung của AC và MN (H ∈ AC, K ∈ MN). Tìm quỹ tích của K khi M, N chạy theo quy luật trên.

Giải



1) Gọi O là trung điểm của AC thì do

MA = MC $\Rightarrow$ MO $\perp$ AC

Tương tự có NO $\perp$ AC

Vậy $\widehat{NOM}$ là góc giữa hai mặt phẳng (MAC) và (NAC)

(MAC) $\perp$ (NAC) $\Leftrightarrow \widehat{MON} = 90^o$

$\Leftrightarrow NO^2 + MO^2 = MN^2$

$$\Leftrightarrow u^2 + \frac{a^2}{2} + v^2 + \frac{a^2}{2} = (v-u)^2 + 2a^2 \Leftrightarrow 2uv = a^2 \quad (1)$$

2) Do Bx và Dy $\perp$ (P) $\Rightarrow$ (DBMN) $\perp$ (ABCD)

Vì (ABCD) $\cap$ (DBMN) = DB, mà AC $\perp$ DB $\Rightarrow$ AC $\perp$ (DBMN)

Trong (DBMN), kẻ OK $\perp$ MN (tức là OK là chiều cao của tam giác vuông NOM) $\Rightarrow$ AC $\perp$ OK.

Như vậy OK là đường vuông góc chung của AC và MN, điều đó có nghĩa là:

H $\equiv$ O $\Rightarrow$ H cố định

Lại có trong tam giác vuông NOM, thì $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OM^2} = \frac{OM^2 + OM^2}{OM^2.OM^2}$

$$\Rightarrow OK^2 = \frac{OM^2.OM^2}{OM^2 + OM^2} = \frac{\left(v^2 + \frac{a^2}{2}\right)\left(u^2 + \frac{a^2}{2}\right)}{v^2 + u^2 + a^2} = \frac{v^2u^2 + \frac{a^2}{2}(v^2 + u^2) + \frac{a^2}{4}}{v^2 + u^2 + a^2} \quad (2)$$

Theo (1) thì $u^2v^2 = \frac{a^2}{4}$ thay vào (2) có: $OK^2 = \frac{\frac{a^2}{2}(v^2 + u^2 + a^2)}{v^2 + u^2 + a^2} = \frac{a^2}{2}$

$$\Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \text{const} \Rightarrow HK = \text{const}$$

Phần thuận:

Từ chứng minh trên suy ra trong mặt phẳng cố định xác định bởi hai đường thẳng song song cố định Bx, Dy (và ta sẽ gọi là mặt phẳng π), K luôn cách O cố định 1 khoảng $OK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, vậy K nằm trên nửa đường tròn tâm O, bán kính $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Đường tròn này vẽ trong (π), (chỉ là nửa đường tròn vì M,

N chỉ tương ứng chạy trên nửa đường thẳng Bx, Dy ở về cùng một phía của (P) và vuông góc với (P).

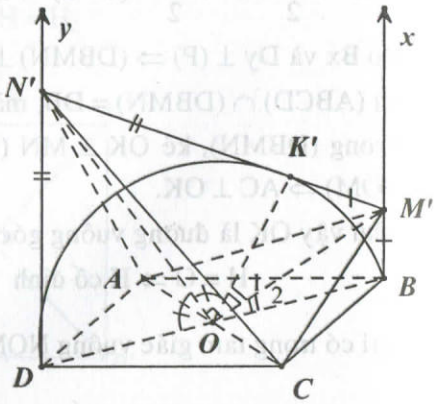
Phần đảo:

Đảo lại giả sử K' là điểm tuỳ ý nằm trên cùng mọi đường tròn này. Ta phải chứng minh rằng tồn tại M' ∈ Bx, N' ∈ Dy sao cho đồng thời thoả mãn điều kiện sau:

1) (M'AC) ⊥ (N'AC)

2) OK' là đường vuông góc chung của AC và M'N' (O ∈ AC, K' ∈ M'N')

Trong mặt phẳng (π) = (Bx, Dy) vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn đường kính BD tại K'. Tiếp tuyến này cắt Bx, Dy tương ứng tại M', N'.



Do (π) ⊥ (P) nên (π) ∩ (P) = DB mà AC ⊥ DB ⇒ AC ⊥ (π) ⇒ AC ⊥ OK'

Hiển nhiên theo cách dựng thì:

OK' ⊥ M'N', vậy OK' chính là đường vuông góc chung của AC và M'N'

(O ∈ AC, K' ∈ M'N')

Dễ thấy N'O ∈ AC; M'O ∈ AC ⇒ $\widehat{N'OM}$ là góc phẳng tạo bởi hai mặt phẳng (M'AC) và (N'AC). Trong mặt phẳng (π), theo tính chất của hai tiếp tuyến xuất phát từ một điểm M'B và M'K ta có $\widehat{K'OM'} = \widehat{M'OB}$

Lập luận tương tự có: $\widehat{N'OK'} = \widehat{N'OD}$

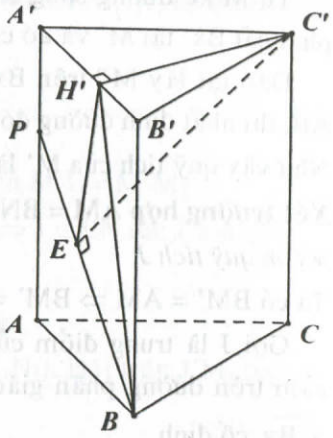
Từ đó theo tính chất các đường phân giác của hai góc kề bù suy ra:

$$\widehat{N'OM'} = 90^0 \Rightarrow (M'AC) \in (N'AC)$$

Tóm lại quỹ tích chân đường vuông góc chung K là nửa đường tròn tâm O bán kính $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (tức là nửa đường tròn đường kính DB) dựng trong (π) = (Bx, By).

Thí dụ 11: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' đáy là tam giác cân (AB = AC). P là điểm chạy trên AA'. Gọi E là hình chiếu của C' là BP. Tìm quỹ tích của E khi P chạy trên AA'.

Giải



Kẻ C'H' ⊥ A'B'.

Do (A'B'C') ⊥ (ABB'A') nên từ đó suy ra C'H ⊥ (ABB'A') ⇒ C'H ⊥ BP

Lại có BP ⊥ C'E ⇒ BP ⊥ (C'H'E)

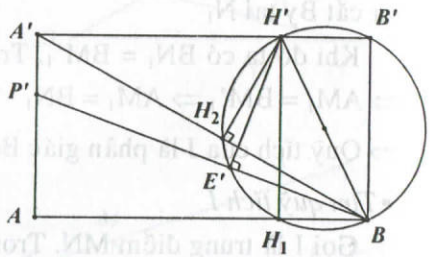
⇒ BP ⊥ H'E

Trong (ABB'A'), ta có E nhìn BH' cố định dưới một góc vuông, nên E nằm trên đường tròn đường kính BH' vẽ trong mặt phẳng ấy.

Bây giờ ta tìm giới hạn của quỹ tích

Khi P ≡ A, thì E ≡ H_1; còn khi P ≡ A', thì E ≡ H_2 (H_1 là hình chiếu của H' trên AB, còn H_2 là hình chiếu của H' trên A'B)

Vì thế E chỉ chạy trên cung tròn $\overset{\frown}{H_1H_2}$.



Ta phải chứng minh tồn tại P' ∈ AA' sao cho E' là hình chiếu của C' là BP'.

Thật vậy trong (BAA'B') giả sử BE' ∩ AA' = P'. Do $\widehat{H'E'B} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), nên H'E' ⊥ E'B tại là H'E' ⊥ BP'. Vì C'H' ⊥ BP' nên suy ra BP' ⊥ (C'H'E') ⇒ BP' ⊥ CE'

Vậy quỹ tích của E là cung tròn $\overset{\frown}{H_1H_2}$ của đường tròn đường kính BH' vẽ trong mặt phẳng (BAA'B').

Thí dụ 12: Cho hai nửa đường thẳng chéo nhau Ax và By. M và N là hai điểm thay đổi trên Ax và By.

1) Dựng mặt phẳng (P) qua By và song song với Ax. Đường thẳng qua M và song song với AB cắt (P') tại M'.

2) Gọi I là trung điểm của MN, J là trung điểm của M'N, tìm quỹ tích J và I trong hai trường hợp sau đây:

a) AM = BN

b) AM + BN = 21 với *l* là số dương cho trước.

Giải

1) Với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 song song hoặc cắt nhau, ta sẽ dùng ký hiệu (Δ_1, Δ_2) để chỉ mặt phẳng xác định bởi Δ_1 và Δ_2.

Qua B kẻ Bx' // Ax ⇒ Bx' cố định và khi đó (P) = (By, Bx')

Từ M kẻ đường song song với AB. Vì Ax // Bx' nên đường song song đó phải cắt Bx' tại M' và đó cũng chính là điểm cắt (P) $\Rightarrow$ M' $\in$ Bx

Đảo lại lấy M" trên Bx'. Từ M' trong mặt phẳng (Ax, Bx') kẻ đường // AB, thì nhất định đường đó phải cắt Ax tại M_1 nào đó.

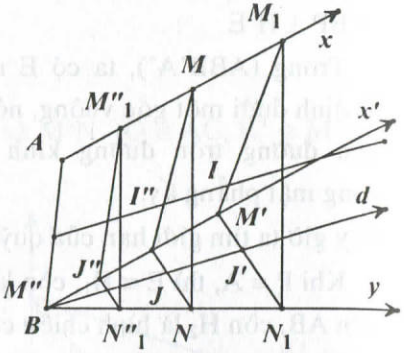
Như vậy quỹ tích của M' là đường thẳng Bx' // Ax

2) Xét trường hợp AM = BN

• *Tìm quỹ tích J*

Ta có BM' = AM $\Rightarrow$ BM' = BN

Gọi J là trung điểm của M'N, thì J nằm trên đường phân giác Bd của góc $\widehat{x'By}$ cố định.



Đảo lại lấy J' tuỳ ý $\in$ Bd. Qua J' kẻ đường vuông góc với Bd cắt Bx' tại M'_1 và cắt By tại N_1

Khi đó ta có $BN_1 = BM'_1$. Trong (Ax, Bx') từ M'_1 kẻ // AB cắt Ax tại M_1 $\Rightarrow AM_1 = BM'_1 \Rightarrow AM_1 = BN_1$

$\Rightarrow$ Quỹ tích của J là phân giác Bd của $\widehat{x'By}$ cố định.

• *Tìm quỹ tích I*

Gọi I là trung điểm MN. Trong $\Delta MM'N$ thì IJ là đường trung bình $\Rightarrow$ JI // AB (vì IJ // MM' mà MM' // AB) $\Rightarrow$ I $\in$ (AB, Bd)

Mặt khác ta có $IJ = \frac{AB}{2}$. Vì vậy nếu lấy OA = OB $\Rightarrow$ OI // Bd. Vậy I nằm trên đường Ot // Bd.

Đảo lại lấy I" tuỳ ý trên Ot. Trong (Ot, Bd) kẻ từ I" đường song song với AB. Nó cắt Bd tại J". Qua J" kẻ đường vuông góc với Bd. Nó cắt Bx' và By tạ $M"_1$ trong (Bx', Ax) kẻ $M"_1M"$ // AB $\Rightarrow$ AM" = $BN"_1$

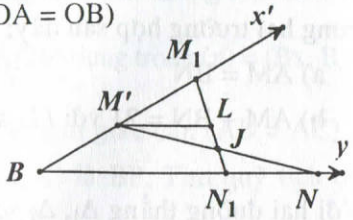
Xét $\Delta M"M"_1N"_1$ ta có theo định lý Talét đảo $\Rightarrow$ M", I", $N"_1$ thẳng hàng.

Vậy quỹ tích I là nửa đường thẳng Ot // Bd (OA = OB)

Xét trường hợp AM = BN = 2*l*

• *Tìm quỹ tích J:* Rõ ràng J $\in$ (x'By).

Vậy để tìm quỹ tích J ta xét bài toán quỹ tích hình phẳng sau đây:



Cho $\widehat{x'By}$, M' và N di động trên Bx' và By sao cho BM' + BN = 2*l* = const.

Tìm quỹ tích J trung điểm của M'N.

Trên Bx' lấy M_1, By lấy N_1 sao cho $BM_1 = BN_1 = l$. $\Rightarrow M_1, N_1$ cố định

Ta có M_1BN_1 là tam giác cân

Chú ý nếu $M' \equiv M$, $N \equiv N_1$ thì rõ ràng $J \in M_1N_1$.

Bây giờ giả thiết $BM' < BM_1 \Rightarrow BN > BN_1$

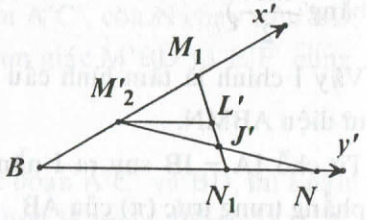
Kẻ $M'L // By \Rightarrow By \Rightarrow M'LM_1$ cũng là Δ cân nên $M'L = M'M_1$

$\Rightarrow M'L = NN_1$. Vậy $M'LNN_1$ là hình bình hành $\Rightarrow J \in LN$ tức $J \in M_1N_1$

Đảo lại lấy J' là điểm tuỳ ý thuộc M_1N_1

Nếu $J'M_1 = J'N_1$ hoặc nếu $J' = N_1$ thì tầm thường.

Bây giờ giả sử $J' \neq M_1$ ($\neq N_1$ và $\neq$ trung điểm M_1N_1). Đặt trên $J'M_1$ một đoạn $J'L' = J'N_1$. Từ L' kẻ $L'M'_2 // By$, $M'_2J' \cap N'$.

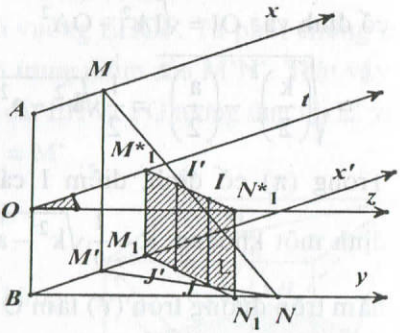


Rõ ràng $N_1N' = M'_2L' = M'_2M_1$

$\Rightarrow BM'_2 + BN = 2l$, vậy quỹ tích của J là đoạn thẳng $M_1N_1 \in (x'By)$ trong đó $M_1 \in Bx'$, $N_1 \in By$ và $B_1M_1 = B_1N = l$

• *Tìm quỹ tích I*

Gọi I là trung điểm MN thì ta luôn có IJ // BA và $= \frac{BA}{2}$ và chú ý là BA cố định, do đó khi J chạy trên đoạn $M_1^*N_1^*$ tương ứng // M_1N_1 trong đó $M_1^* \in Ot$ cố định (Ot // Ox') và $OM_1^* = OM_1 = 1$ và $N_1^* \in$ Oz cố định (Oz // By) và $ON_1^* = BN_1 = l$.



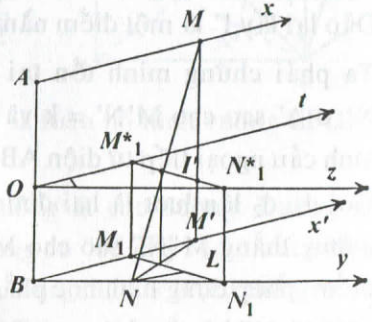
Đảo lại lấy I' tuỳ ý $\in M_1^*N_1^*$. Kẻ trong $\left(M_1M_1^*N_1^*N_1\right)$, IJ' // AB

Tương tự như trên đặt $J'L = J'M_1$

Qua L kẻ M'M // AB (trong Ax // By)

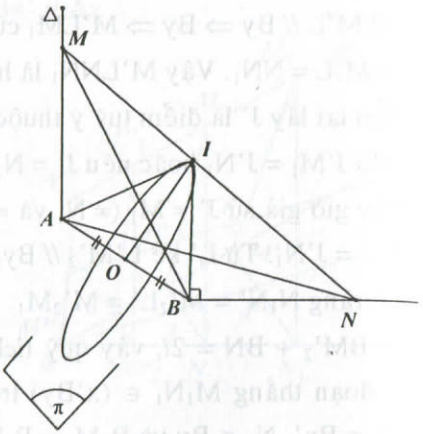
Trong Δ MM'N, theo định lý Talét đảo suy ra MI'N thẳng hàng và I'M = I'N

Vậy quỹ tích I là đoạn $M_1^*N_1^*$ xác định như trên.



Thí dụ 13: Cho Δ và Δ' là hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau nhận AB = a làm đường vuông góc chung (A ∈ Δ, B ∈ Δ').M và N tương ứng là hai điểm di động trên Δ, Δ' nhưng MN có chiều dài không đổi (k > a). Gọi I là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện ABMN. Tìm quỹ tích điểm I.

Giải



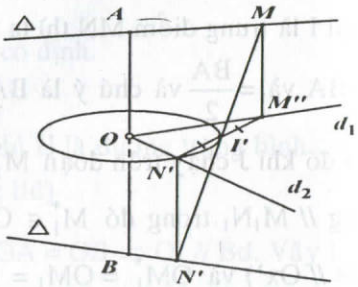
Ta có MA ⊥ (ABN) mà AB ⊥ BN ⇒ MB ⊥ BN

Tương tự MA ⊥ AN

Từ đó suy ra nếu gọi I là trung điểm của MN, thì IA = IB = IM = IN (cùng bằng $\frac{MN}{2}$)

Vậy I chính là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện ABMN.

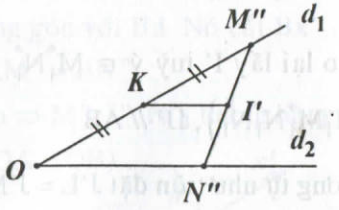
Từ chỗ IA = IB suy ra I nằm trên mặt phẳng trung trực (π) của AB



Gọi O là trung điểm của AB, khi đó O cố định và: $OI = \sqrt{IA^2 - OA^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - a^2} = \text{const}$$

Trong (π) cố định, điểm I cách O cố định một khoảng $R = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - a^2}$, nên I nằm trên đường tròn (ℰ) tâm O bán kính $R = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - a^2}$ (chú ý ở đây k > a)



Đảo lại lấy I' là một điểm nằm trên (ℰ)

Ta phải chứng minh tồn tại M' ∈ Δ, N' ∈ Δ' sao cho M'N' = k và I' là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện ABM'N'.

Gọi d_1, d_2 lần lượt là hai đường thẳng qua O và song song với Δ, Δ'. Dựng đường thẳng M"N" sao cho M" ∈ d_1, N" ∈ d_2 và M"N" nhận I' làm trung điểm (phép dựng hình học phẳng này dễ dàng – xem hình vẽ).

Từ M", N" kẻ các đường tương ứng song song với AB. Chúng cắt Δ, Δ' tương ứng tại M', N'. Dễ dàng chứng minh I' là trung điểm của M'N' và M'N' = k

Vậy quỹ tích của I là đường tròn tâm O bán kính $R = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - a^2}$. Đường tròn này vẽ trong (π) là mặt phẳng trung trực của AB.

Thí dụ 14: Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D'. Hai điểm M, N tương ứng di động trên các đoạn A'C' và BD. Gọi I là trung điểm của MN. Tìm quỹ tích của I.

Giải

Giả sử $M \equiv A'$, còn N chạy trên BD. Khi đó dễ thấy trung diểm I của MN lúc này chạy trên đường trung bình EF của tam giác A'BD (chú ý là EF cách đáy ABCD một đoạn $= \frac{a}{2}$ với a là cạnh của hình lập phương)

Tương tự với một vị trí cố định của M' trên A'C', còn N chạy trên BD, thì I chạy trên đường trung bình của E'F' của tam giác M'BD và E'F' cũng cách đáy ABCD một đoạn $= \frac{a}{2}$).

Như vậy khi M, N tương ứng chạy trên các đoạn A'C' và BD, thì I nằm trên toàn hình vuông FEGH với E, H, G, F lần lượt là trung điểm của A'B, C'B, C'D và A'D.

Đảo lại lấy một điểm I' bất kỳ thuộc hình vuông EHGF. Ta phải chứng minh tồn tại $M' \in A'C'$ và $N' \in BD$ sao cho I' là trung điểm của M'N'. Thật vậy qua I' trong (EHGF) là đường song song với EF cắt EH và FG tương ứng tại E' và F'. Trong mặt phẳng (BA'C'), thì $BE \cap A'C' = M'$

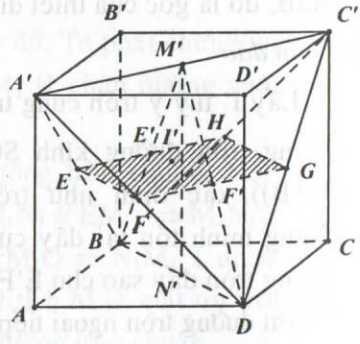
Do $E'F' \,//\, EF \Rightarrow E'F' \,//\, BD$ và $E'F' = \frac{1}{2}BD$

Mặt khác do $\frac{BE'}{BM'} = \frac{1}{2} \Rightarrow M', F', D$ thẳng hàng

Trong mặt phẳng (M'BD), thì $M'I' \cap BD = N'$

Do $E'I' // BN'$ và $\frac{M'E'}{M'B} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{M'I'}{M'N'} = \frac{1}{2}$

tức là I' là trung điểm của M'N'.

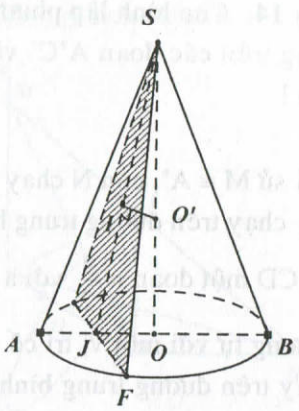


Tóm lại quỹ tích của trung điểm I của MN là toàn bộ hình vuông EFGH (bao gồm 4 cạnh và phần trong của nó).

Nhận xét: Trong các ví dụ trên quỹ tích thường là các đường: Đường thẳng, đường tròn, cung tròn... tức là các miền không có "bề dầy" (diện tích bằng 0), còn trong ví dụ này quỹ tích là một miền có diện tích $\neq 0$ (cụ thể quỹ tích là toàn bộ hình vuông – chứ không phải giới hạn chỉ gồm 4 cạnh của hình vuông). Mong các bạn lưu ý điều này.

Thí dụ 16: Cho hình nón đỉnh S và AB là một đường kính cố định của đáy. EF là dây cung chuyển động của đường tròn đáy, nhưng EF luôn vuông góc với AB. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ SEF. Tìm quỹ tích I.

Giải



1) Phần thuận

Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSAB (O' cố định) ⇒ O'S = OA' = OB' và dĩ nhiên O' ∈ đường cao SO của hình nón.

Dĩ nhiên ta cũng có O'A = O'B = O'E = O'F.

Kẻ O'I ⊥ SJ (ở đây J = EF ∩ AB)

Do (SOJ) ⊥ (SEF) mà (SOJ) ∩ (SEF) = SJ

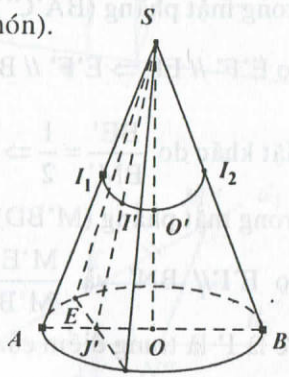
⇒ O'I ⊥ (SEF) (1)

Từ (1) và do O'S = OE = OF ⇒ IS = IE = IF ⇒ I là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ SEF. Trong (SAB) cố định , I luôn nhìn SO cố định dưới một góc vuông.Vậy I nằm trên đường tròn đường kính SO'. Đường tròn này vẽ trong (SAB).

2) Giới hạn quỹ tích

Do J ∈ AB ⇒ nằm trong góc SAB ⇒ I nằm trên cung tròn $\overset{\frown}{I_1I_2}$ (đó là phần của đường tròn đường kính SO' bị giới hạn bởi hai cạnh SA, SB của góc $\widehat{ASB}$, đó là góc của thiết diện qua trục của hình nón).

3) Phần đảo



Lấy I' tuỳ ý trên cung tròn $\overset{\frown}{I_1I_2}$ của đường tròn đường kính SO (vẽ trong (SAB)) xác định như trên. Ta phải chứng minh tồn tại dây cung E'F' của đường tròn đấy sao cho E'F' ⊥ AB và I' là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔSE'F'.

Trong (SAB) giả sử SI' ∩ AB = J'

Qua J' kẻ dây cung E'F' ⊥ AB ⇒ J' là trung điểm của E'F'.

Ta có SJ' ⊥ E'F' (vì J'E' = J'F') mà OJ' ⊥ E'F' ⇒ E'F' ⊥ (SIO')

⇒ (SE'F') ∩ (SQ')

Lại thấy (SE'F') ∩ (SOJ') = SJ'

Vì I' nằm trên $\overset{\frown}{I_1I_2}$ ⇒ $\widehat{SI'O'} = 90^0$ ⇒ O'I ⊥ SI' ⇒ OI' ⊥ (SE'F')

$\Rightarrow I'S = I'E' = I'F'$ (do $O'S = O'E' = O'F'$) $\Rightarrow$ I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta SE'F'$.

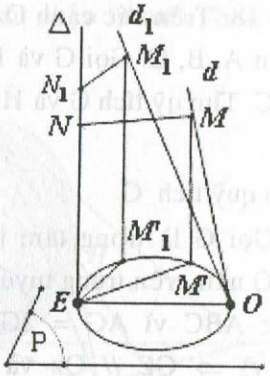
Vậy quỹ tích I chính là cung tròn $\overset{\frown}{I_1I_2}$ của đường tròn đường kính SO' vẽ trong (SAB) xác định như trên.

Thí dụ 17: Cho đường thẳng Δ, một điểm O không thuộc Δ và một đường thẳng d đi qua O. Gọi MN là đường vuông góc chung của d và Δ ($M \in d, N \in \Delta$).

1) Tìm quỹ tích của M (gọi quỹ tích đó là S).

2) Gọi A là điểm nằm ngoài (S). Từ A kẻ cát tuyến ABC với (S). Gọi I là trung điểm của BC. Tìm quỹ tích của I khi cát tuyến ABC quay quanh A.

Giải



1) Qua O dựng mặt phẳng (P) vuông góc với Δ, như vậy (P) cố định và giả sử $\Delta \cap (P) = E$, như thế E cố định. Nếu $d \in (P)$, thì trong trường hợp này $E \equiv N$ vậy quỹ tích M là đường tròn đường kính OE. Xét trường hợp d là đường thẳng tuỳ ý qua $O \notin (P)$. Gọi MN là đường vuông góc chung của Δ và $d(M \in d)$. Từ M kẻ $MM' \perp (P) \Rightarrow \widehat{EMO} = 90^0 \Rightarrow$ M nằm trên đường sinh MM' của mặt trụ tròn xoay nhận đường tròn đường kính AB trong (P) làm đường tròn chuẩn.

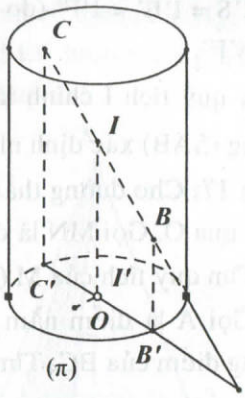
Đảo lại lấy M_1 tuỳ ý thuộc mặt trụ tròn xoay đó. Ta phải chứng minh tồn tại một đường thẳng d_1 qua O và M_1 sao cho M_1 là chân đường vuông góc chung trên d_1 của Δ và d_1.

Thật vậy do $M_1M'_1 \perp (P) \Rightarrow M'_1$ thuộc đường tròn chuẩn. Nối EM'_1. Trong mặt phẳng xác định bởi Δ và M_1M', từ $M_1N_1 // EM'_1 \Rightarrow M_1N_1 \perp \Delta$. Vì $M_1N_1 // EM'_1$ mà $EM'_1 \perp (M_1M'_1O) \Rightarrow EM'_1 \perp M_1O \Rightarrow N_1M_1 \perp d_1 \Rightarrow M_1N_1$ là đường vuông góc chung của Δ và d_1. Vậy quỹ tích M là mặt trụ tròn xoay nhận đường tròn đường kính OE vẽ trong P làm đường tròn chuẩn.

2) Qua A dựng mặt phẳng Q vuông góc với Δ, như vậy Q cắt mặt trụ theo đường tròn (π). Từ B và C kẻ BB', CC' cùng vuông góc Q. Kẻ $II' \perp Q$ như vậy có $IC' = I'B' \Rightarrow O_1I' \perp AC'$ (ở đây O_1 là tâm của đường tròn π). Vậy I' nằm trên phần đường tròn đường kính O_1A nằm trong đường tròn π (mà ta sẽ gọi nó là $\mathscr{C}$)

$\Rightarrow$ I nằm trên phần mặt trụ tròn xoay nhận đường $\mathscr{C}$ làm chuẩn.

Đảo lại lấy I_1 bất kỳ nằm trên phần mặt trụ ấy. Kẻ $I_1I'_1$ vuông góc (Q). Giả sử AI_1 cắt (π) tại B'_1 và C'_1. Từ B_1 và C_1 dựng hai đường vuông góc với (Q) cắt AI_1 tại B'_1 và C'_1. Rõ ràng B_1C_1 nhận I_1 làm trung điểm và $B_1, C_1 \in (S)$. Vậy quỹ tích I là phần mặt trụ tròn xoay nhận $\mathscr{C}$ làm đường chuẩn.



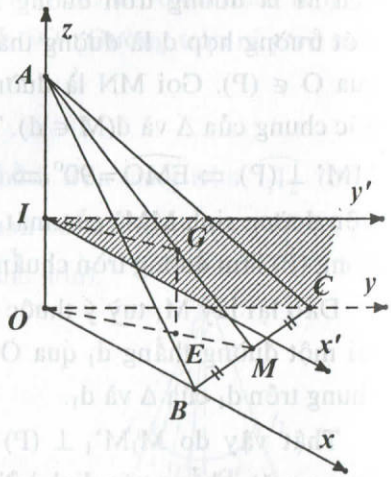
Thí dụ 18: Trên các cạnh Oz, Ox, Oy của tam diện vuông Oxyz, lần lượt lấy ba điểm A, B, C. Gọi G và H tương ứng là trọng tâm và trực tâm của tam giác ABC. Tìm qỹ tích G và H nếu A cố định trên Oz, và B, C chạy trên Ox, Oy.

Giải

1) Tìm quỹ tích G

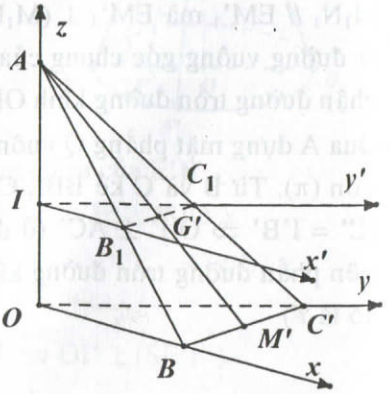
Gọi G là trọng tâm tam giác ABC thì G nằm trên trung tuyến AM của tam giác ABC vì AG = 2GM. Kẻ GE $\perp$ (Oxy) $\Rightarrow$ GE // Oz và theo định lý Talét, ta có $GE = \frac{1}{3}OA$

Như vậy G cách (xOy) cố định một khoảng $= \frac{1}{3}OA = \text{const}$, vậy G nằm trên mặt phẳng (π) // (xOy) và đi qua điểm I trên OA (trong đó $OI = \frac{1}{3}OA$)



Giới hạn quỹ tích: Mặt khác do G bên trong góc tam diện vuông Oxyz vậy G phải nằm trên phần mặt phẳng giới hạn bởi hệ mặt Oxy, Oyz của góc tam diện vuông. Ta có thể hình dung đó là "một phần tư" mặt phẳng (π) Ix'y' (Iy' // Oy; Ix' // Ox)

Đảo lại giả sử G' là điểm tuỳ ý trong "phần tư mặt phẳng" π Ix'y'.



Ta phải chứng minh tồn tại B' ∈ Ox, C' ∈ Oy sao cho G' là trọng tâm đa giác AB'C'. Trong (Ix'y') thực hiện phép dựng cơ bản: Dựng đoạn thẳng B_1C_1 ($B_1 \in Ox', C_1 \in Oy'$) sao cho G' là trung điểm của B_1C_1.

Trong (Oxy) giả sử $AB_1 \cap Ox = B'$

Trong (Oyz) giả sử $AC_1 \cap Oy = C'$

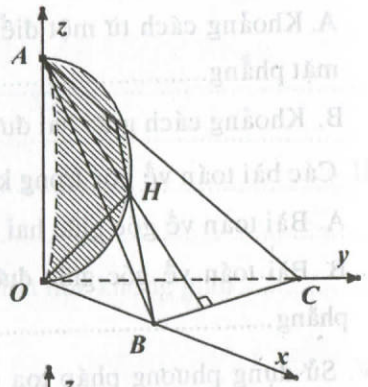
Vì (Ix'y') // (xOy) $\Rightarrow B_1C_1 // B'C'$.

Giả sử $AG' \cap B'C' = M \Rightarrow M'B' = M'C'$ (do $G'B_1 = G'C_1$)

$\Rightarrow$ M' là trung điểm của B'C'. Đã thấy $\frac{AG'}{AM'} = \frac{AI}{AO} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ G' là trọng tâm tam giác AB'C'

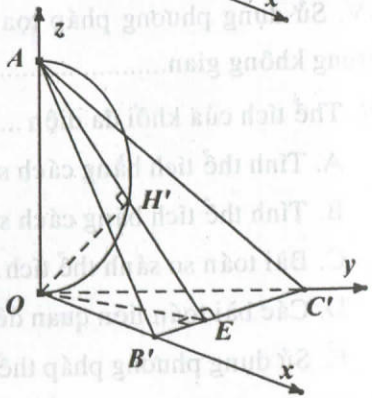
Như thế quỹ tích trọng tâm G của ΔABC là "một phần tư mặt phẳng" Ix'y' xác định như trên.

2) Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Do Oxyz là góc tam diện vuông đỉnh O nên ta có $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp HA$. Vậy H nằm trên mặt cầu đường kính OA.



Giới hạn quỹ tích: Vì H nằm trong góc tam diện vuông Oxyz, nên H nằm trên phần mặt cầu đường kính OA giới hạn bởi hai mặt Oxz và Oyz, tức là H nằm trên một phần tư mặt cầu ấy.

Đảo lại lấy H' tuỳ ý thuộc một phần tư mặt cầu ấy. Ta phải chứng minh tồn tại $B \in Ox$, $C \in Oy$ sao cho H' là trực tâm ΔABC



Giả sử $AH' \cap (Oxy) = E$. Trong (xOy) qua E kẻ đường thẳng vuông góc OE. Đường này cắt Ox tại B' và Oy tại C'.

Theo định lí ba đường vuông góc ta có

$AE \perp B'C' \Rightarrow B'C' \perp (OAE) \Rightarrow (AB'C') \perp (OAE)$.

Do H' nằm trên mặt cầu đường kính $OA \Rightarrow OH' \perp AH' \Rightarrow OH' \perp AE$

$\Rightarrow OH' \perp (AB'C')$ (vì $(AB'C') \cap (OAE) = AE$) $\Rightarrow$ H' là trực tâm $\Delta AB'C'$.

Vậy quỹ tích trực tâm H là một phần tư mặt cầu đường kính OA xác định như trên!

MỤC LỤC

Chương 1. Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian quan hệ song song

I. Tóm tắt lí thuyết 3

II. Các dạng toán 6

Loại 1. Các bài toán đại cương về đường thẳng và mặt phẳng 6

Loại 2. Các bài toán về thiết diện 15

Loại 3. Các bài toán về tính song song của đường thẳng và mặt phẳng.. 25

Chương 2. Quan hệ vuông góc

I. Tóm tắt lý thuyết 32

II. Các bài toán về khoảng cách 34

A. Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng, hoặc từ một điểm tới mặt phẳng 34

B. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau 42

III. Các bài toán về góc trong không gian 53

A. Bài toán về góc giữa hai đường thẳng chéo nhau 53

B. Bài toán về góc giữa đường thẳng và mặt phẳng và góc giữa hai mặt phẳng 56

IV. Sử dụng phương pháp tọa độ giải các bài toán về khoảng cách và góc trong không gian 63

V. Thể tích của khối đa diện 80

A. Tính thể tích bằng cách sử dụng trực tiếp các công thức về thể tích .. 81

B. Tính thể tích bằng cách sử dụng thể tích của các khối đa điện khác .. 93

C. Bài toán so sánh thể tích 105

D. Các bài toán liên quan đến thể tích 119

E. Sử dụng phương pháp thể tích để tìm khoảng cách 136

VI. Các bài toán về quan hệ vuông góc 144

A. Các bài toán chọn lọc về quan hệ vuông góc 144

B. Các bài toán chứng minh tính vuông góc trong các đề thi tuyển sinh môn toán 157

C. Các bài toán về thiết diện liên quan đến tính vuông góc 162

Chương 3. Khối tròn xoay

§1. Hình cầu 170

A. Tóm tắt lý thuyết. 170

B. Các bài toán chọn lọc về hình cầu 172

C. Nhìn lại các bài toán về hình cầu trong các đề thi tuyển sinh vào đại học cao đẳng 217

§ 2. Hình trụ, hình nón 220

A. Tóm tắt lý thuyết 220

B. Các dạng toán cơ bản 222

C. Các bài toán phối hợp giữa hình trụ, hình nón với hình cầu và các khối đa diện 228

Chương 4. Một số chuyên đề đặc biệt

Chuyên đề 1. Hình tứ diện 235

§1. Tứ diện vuông 235

§2. Tứ diện trực tâm 243

§3. Tứ diện gần đều 251

Chuyên đề 2. Các bài toán quĩ tích trong hình học không gian 264