

CHUYÊN ĐỀ
BÀI GIẢNG CẤP SỐ CỘNG

Mục tiêu

❖ **Kiến thức**

- + Hiểu được khái niệm cấp số cộng.
- + Nắm được công thức tổng quát, tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng.
- + Biết được số hạng đầu và công sai của cấp số cộng.

❖ **Kĩ năng**

- + Tìm được các yếu tố còn lại khi biết 3 trong 5 yếu tố: số hạng đầu, số hạng thứ k , công sai, số số hạng, tổng n số hạng đầu của cấp số cộng.
- + Liên hệ được kiến thức về cấp số cộng để giải những bài toán thực tế.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Định nghĩa

Cấp số cộng là một dãy số (vô hạn hay hữu hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số d không đổi, nghĩa là

$$(u_n) \text{ là cấp số cộng } \Leftrightarrow \forall n \geq 2, u_n = u_{n-1} + d.$$

Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

Định lý 1

Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$.

Hệ quả: Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $a + c = 2b$.

Định lý 2

Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức sau: $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Định lý 3

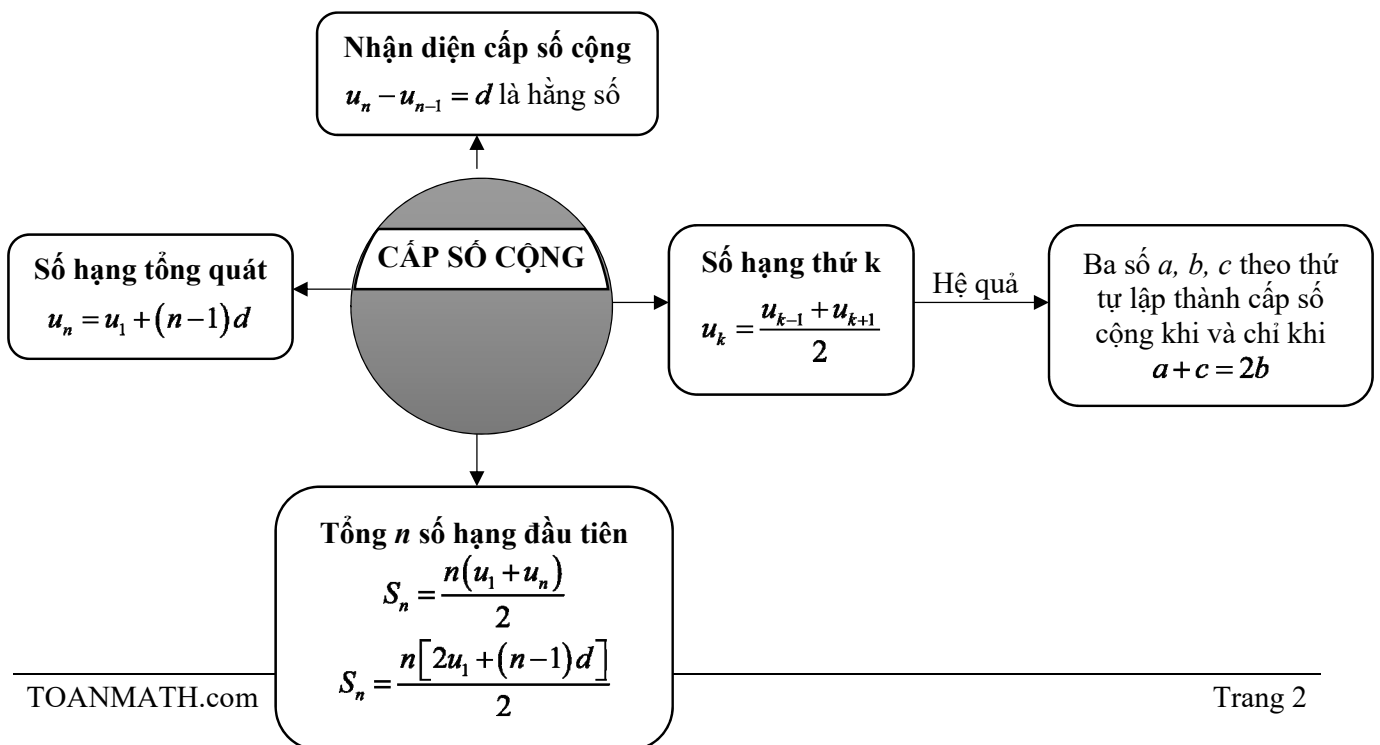
Giả sử (u_n) là một cấp số cộng có công sai d .

$$\text{Gọi } S_n = \sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

(S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng).

$$\text{Ta có } S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}.$$

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Nhận dạng một dãy số là cấp số cộng

Phương pháp giải

Sử dụng định nghĩa (u_n) là một cấp số cộng khi và chỉ khi $u_{n+1} - u_n = d$, với d là một hằng số.

Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số cộng, ta xét $d = u_{n+1} - u_n$

- Nếu d là hằng số thì (u_n) là một cấp số cộng với công sai d .
- Nếu d phụ thuộc vào n thì (u_n) không là cấp số cộng.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Chứng minh các dãy số sau là cấp số cộng.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 2020n - 2021$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = -2n + 5$.

Hướng dẫn giải

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 2020n - 2021$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = 2020(n+1) - 2021 - (2020n - 2021) = 2020$.

Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 2020$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = -2n + 5$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = -2(n+1) + 5 - (-2n + 5) = -2$.

Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = -2$.

Ví dụ 2. Chứng minh các dãy số sau không phải là cấp số cộng.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n + 3n$.

Hướng dẫn giải

a) Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + (n+1) + 1 - (n^2 + n + 1) = 2n + 2$ phụ thuộc vào n .

Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n + 3n$.

Ta có $u_{n+1} - u_n = (-1)^{n+1} + 3(n+1) - [(-1)^n + 3n] = -(-1)^n + 3 - (-1)^n = 3 - 2(-1)^n$ phụ thuộc vào n .

Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Dãy số nào sau đây là cấp số cộng?

- A. 1; 3; 6; 9; 12. B. 1; 4; 7; 10; 14. C. 1; 2; 4; 8; 16. D. 0; 4; 8; 12; 16.

Câu 2: Trong các dãy sau đây, dãy nào là cấp số cộng?

- A. $u_n = 3^n$. B. $u_n = (-3)^{n+1}$. C. $u_n = 3n + 1$. D. $u_n = 5n^2 + n$.

Câu 3: Một cấp số cộng (u_n) với $u_1 = -\frac{1}{2}, d = \frac{1}{2}$ có dạng khai triển nào sau đây?

- A. $-\frac{1}{2}; 0; 1; \frac{1}{2}; 1; \dots$ B. $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{2}; \dots$
C. $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}; \dots$ D. $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; \dots$

Câu 4: Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng

- A. 1; -2; -4; -6; -8. B. 1; -3; -6; -9; -12. C. 1; -3; -7; -11; -15. D. 1; -3; -5; -7; -9.

Câu 5: Trong các dãy số sau đây dãy số nào là cấp số cộng?

- A. $u_n = \sqrt{n+1}, n \geq 1$. B. $u_n = 2n - 3, n \geq 1$. C. $u_n = n^2 + 1, n \geq 1$. D. $u_n = (-2)^{n+1}, n \geq 1$.

Câu 6: Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là cấp số cộng?

- A. $u_n = 3n^2 + 2020$. B. $u_n = 3n + 2020$. C. $u_n = 3^n$. D. $u_n = (-3)^{n+1}$.

Câu 7: Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào **không phải** là cấp số cộng?

- A. $u_n = 3n - 1$. B. $u_n = 2^n + 1$. C. $u_n = (n+1)^2 - n^2$. D. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 1, n \geq 1 \end{cases}$

Câu 8: Các dãy số sau có số dạng tổng quát u_n , dãy số nào **không phải** là cấp số cộng?

- A. 1; 3; 5; 7; 9. B. 13; 17; 21; 25; 29. C. $u_n = 1 + 3^n$. D. $u_n = (n+3)^2 - n^2$.

Câu 9: Trong các dãy số sau đây dãy số nào là cấp số cộng?

- A. $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$. C. $u_n = n^2$. D. $u_n = (n+1)^3$.

Câu 10: Dãy số nào dưới đây là cấp số cộng?

- A. $u_n = n + 2^n, (n \in \mathbb{N}^*)$. B. $u_n = 3n + 1, (n \in \mathbb{N}^*)$. C. $u_n = 3^n, (n \in \mathbb{N}^*)$. D. $u_n = \frac{3n+1}{n+2}, (n \in \mathbb{N}^*)$.

Câu 11: Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Dãy số 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001;... không phải là một cấp số cộng.

- B. Dãy số $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; \dots$ là một cấp số cộng với $1 \begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2} \\ d = \frac{1}{2} \end{cases}$.

C. Dãy số $\frac{1}{2}; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{2^3}; \dots$ là một cấp số cộng có ba số hạng và $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ d = \frac{1}{2} \end{cases}$.

D. Dãy số $-2; -2; -2; -2; \dots$ là một cấp số cộng $\begin{cases} u_1 = -2 \\ d = 0 \end{cases}$.

Câu 12: Cho dãy số có các số hạng đầu là 8; 15; 22; 29; 36;... Viết công thức số hạng tổng quát?

A. $u_n = 7n + 7$.

B. $u_n = 7n$.

C. Không viết được dưới dạng công thức.

D. $u_n = 7n + 1$.

Câu 13: Cho 2 cấp số cộng hữu hạn 4; 7; 10; 13; 16;... và 1; 6; 11; 16; 21;...; mỗi cấp số cộng có 100 số hạng. Hỏi có tất cả bao nhiêu số có mặt trong cả hai cấp số trên?

A. 21.

B. 20.

C. 18.

D. 19.

Câu 14: Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

A. Dãy số (a_n) , với $a_n = (2n + 5)^2 - 4n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

B. Dãy số (b_n) , với $b_1 = 1, b_{n+1} = 3b_n + 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. Dãy số (c_n) , với $c_n = 2019^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

D. Dãy số (d_n) , với $d_1 = 1, d_{n+1} = \frac{2020}{d_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Dạng 2: Tìm số hạng đầu tiên, công sai của cấp số cộng, tìm số hạng thứ k của cấp số cộng, tính tổng k số hạng đầu tiên.

Phương pháp giải

Ta lập hệ phương trình gồm hai ẩn u_1 và d . Sau đó giải hệ phương trình này tìm được u_1 và d . Muốn tìm số hạng thứ k , trước tiên ta phải tìm u_1 và d . Sau đó áp dụng công thức $u_k = u_1 + (k - 1)d$. Muốn tính tổng của k số hạng đầu tiên, ta phải tìm u_1 và d . Sau đó áp dụng công thức

$$S_k = \frac{k(u_1 + u_k)}{2} = \frac{k[2u_1 + (k - 1)d]}{2}.$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1. Ta có $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d = 9 \\ u_1^2 + (u_1 + d)^2 + (u_1 + 2d)^2 = 35 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 - d \\ (3 - d)^2 + 3^2 + (3 + d)^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 - d \\ d^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 - d \\ d = \pm 2 \end{cases}.$$

Với $d = 2 \Rightarrow u_1 = 1$.

Với $d = -2 \Rightarrow u_1 = 5$.

Cách 2. Đặt $u_1 = x - d; x_2 = x; u_3 = x + d$.

Áp dụng công thức

$$u_n = u_1 + (n - 1)d$$

lập hệ phương trình

gồm hai ẩn u_1 và d .

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - d + x + x + d = 9 \\ (x - d)^2 + x^2 + (x + d)^2 = 35 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ (3 - d)^2 + 3^2 + (3 + d)^2 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ d^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ d = \pm 2 \end{cases}.$$

Với $d = 2 \Rightarrow u_1 = 1$.

Với $d = -2 \Rightarrow u_1 = 5$.

Ví dụ 2. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 20 và tổng các bình phương của chúng bằng 120.

Hướng dẫn giải

Giả sử bốn số hạng $a - 3x; a - x; a + x; a + 3x$ lập thành cấp số cộng với công sai là $d = 2x$.

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} (a - 3x) + (a - x) + (a + x) + (a + 3x) = 20 \\ (a - 3x)^2 + (a - x)^2 + (a + x)^2 + (a + 3x)^2 = 120 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 20 \\ 4a^2 + 20x^2 = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

Vậy bốn số cần tìm là 2; 4; 6; 8.

Ví dụ 3. Tìm số hạng đầu tiên, công sai, số hạng thứ 50 và tổng của 20 số

hạng đầu tiên của cấp số cộng u_n , biết rằng $\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n - 1)d$,

$$\text{ta có } \begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 19 \\ u_1 + 8d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}.$$

Vậy số hạng đầu tiên $u_1 = 3$, công sai $d = 4$.

Số hạng thứ 50 là $u_{50} = u_1 + 49d = 3 + 49 \cdot 4 = 199$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên là

$$S_{50} = \frac{50(2u_1 + 49d)}{2} = 25 \cdot (2 \cdot 3 + 49 \cdot 4) = 5050.$$

Ví dụ 4. Tìm số hạng đầu và công sai của các cấp số cộng

- Nếu số số hạng của cấp số cộng là lẻ thì gọi công sai $d = x$, là chẵn thì gọi công sai $d = 2x$ rồi viết các số hạng dưới dạng đối xứng.

- Nếu cấp số cộng (a_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_n = p \\ a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = s^2 \end{cases} \text{ thì}$$

$$a_1 = \frac{1}{n} \left[p - \frac{n(n-1)}{2} \cdot d \right]$$

$$\text{và } d = \pm \sqrt{\frac{12(ns^2 - p^2)}{n^2(n^2 - 1)}}.$$

Áp dụng công thức

$$u_n = u_1 + (n - 1)d$$

Lập được hệ phương trình gồm hai ẩn u_1 và d .

Để tính tổng k số hạng đầu tiên, ta áp dụng công thức

$$S_k = \frac{k[2u_1 + (k - 1)d]}{2}.$$

$$\text{a) } \begin{cases} S_{12} = 34 \\ S_{18} = 45 \end{cases}.$$

$$\text{b) } \begin{cases} S_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{a) Ta có } \begin{cases} S_{12} = 34 \\ S_{18} = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{12(2u_1 + 11d)}{2} = 34 \\ \frac{18(2u_1 + 17d)}{2} = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6u_1 + 33d = 17 \\ 2u_1 + 17d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{31}{9} \\ d = -\frac{1}{9} \end{cases}.$$

$$\text{b) } \begin{cases} S_4 = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2u_1 + 3d) = 20 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{25}{24} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = 5 - \frac{3}{2}d \\ \frac{1}{5 - \frac{3}{2}d} + \frac{1}{5 - \frac{3}{2}d + d} + \frac{1}{5 - \frac{3}{2}d + 2d} + \frac{1}{5 - \frac{3}{2}d + 3d} = \frac{25}{24} \end{cases} (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5 - \frac{3}{2}d} + \frac{1}{5 + \frac{3}{2}d} \right) + \left(\frac{1}{5 - \frac{d}{2}} + \frac{1}{5 + \frac{d}{2}} \right) = \frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{10}{25 - \frac{9d^2}{4}} + \frac{10}{25 - \frac{d^2}{4}} = \frac{25}{24}.$$

Đặt $\frac{d^2}{4} = t; t \geq 0$, ta được

$$\frac{10}{25 - 9t} + \frac{10}{25 - t} = \frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{2(25 - t) + 2(25 - 9t)}{(25 - 9t)(25 - t)} = \frac{5}{24}$$

$$\Leftrightarrow \frac{100 - 20t}{(25 - 9t)(25 - t)} = \frac{5}{24} \Rightarrow 24(20 - 4t) = (25 - 9t)(25 - t)$$

$$\Leftrightarrow 9t^2 - 154t + 145 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{145}{9} \\ t = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Nếu } t = \frac{145}{9} \Leftrightarrow d^2 = \frac{145}{9} \Rightarrow d = \pm \frac{\sqrt{145}}{3}.$$

- Với $d = \frac{\sqrt{145}}{3} \Rightarrow u_1 = 5 - \frac{\sqrt{145}}{2}.$
- Với $d = -\frac{\sqrt{145}}{3} \Rightarrow u_1 = 5 + \frac{\sqrt{145}}{2}.$

$$\text{Nếu } t = 1 \Leftrightarrow d^2 = 1 \Leftrightarrow d = \pm 1.$$

- Với $d = 1 \Rightarrow u_1 = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}.$

Áp dụng công thức

$$S_k = \frac{k[2u_1 + (k-1)d]}{2}$$

Biểu diễn được S_4 theo hai

ẩn u_1 và d .

Áp dụng công thức

$$u_n = u_1 + (n-1)d$$

Lập được hệ phương trình gồm hai ẩn u_1 và d .

- Với $d = -1 \Rightarrow u_1 = 5 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}$.

Ví dụ 5. Biết $u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 224$. Tính S_{19} .

Hướng dẫn giải

Ta có $u_4 + u_8 + u_{12} + u_{16} = 224$

$$\Leftrightarrow u_1 + 3d + u_1 + 7d + u_1 + 11d + u_1 + 15d = 224 \Leftrightarrow 4u_1 + 36d = 224 \Leftrightarrow u_1 + 9d = 56.$$

Ta có $S_{19} = \frac{19}{2}(2u_1 + 18d) = 19(u_1 + 9d) = 19 \cdot 56 = 1064$.

Ví dụ 6. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_n = 9 - 5n$. Tìm S_{100} .

Hướng dẫn giải

Ta có $u_{n+1} - u_n = [9 - 5(n+1)] - (9 - 5n) = -5, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra $d = -5, u_1 = 4$.

$$\text{Vậy } S_{100} = \frac{n(2u_1 + (n-1)d)}{2} = \frac{100(2 \cdot 4 + 99 \cdot (-5))}{2} = -24350.$$

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 7; u_3 = 4$ là

- A. $u_1 = 1; d = 3$. B. $u_1 = 10; d = -3$. C. $u_1 = 4; d = -3$. D. $u_1 = 4; d = -3$.

Câu 2: Cho cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu là $u_1 = 15$ và công sai $d = -2$. Số hạng thứ 8 của cấp số cộng là

- A. $u_8 = 1$. B. $u_8 = -1$. C. $u_8 = 103$. D. $u_8 = 64$.

Câu 3: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -1; d = 2; S_n = 483$. Giá trị của n là

- A. $n = 20$. B. $n = 21$. C. $n = 22$. D. $n = 23$.

Câu 4: Cho cấp số cộng (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$. Số 70 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng?

- A. 15. B. 23. C. 25. D. 205.

Câu 5: Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 5$ và tổng của 50 số hạng đầu bằng 5150. Công thức của số hạng tổng quát u_n là

- A. $u_n = 1 + 4n$. B. $u_n = 5n$. C. $u_n = 3 + 2n$. D. $u_n = 2 + 3n$.

Câu 6: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_n = 2n + 3$. Biết $S_n = 320$, giá trị của n là

- A. $n = 16$ hoặc $n = -20$. B. $n = 15$.
C. $n = 20$. D. $n = 16$.

Câu 7: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = 2n - 5$. Chọn khẳng định đúng.

- A. (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 2$. B. (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = -2$.
C. (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 5$. D. (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = -5$.

Câu 8: Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_1 = 7$ và $d = 4$. Lựa chọn kết quả đúng trong các kết quả sau

- A. $u_{15} - u_3 = 46$. B. $u_{29} - u_{22} = 28$. C. $u_{17} - u_{13} = 18$. D. $u_{1000} - u_{100} = 350$.

Câu 9: Cho dãy số (u_n) là một cấp số cộng có công sai $d = 3$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- A. Dãy số $u_{10}; u_{20}; u_{30}; \dots; u_{10n}, \forall n \geq 1$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai là 10.
B. Dãy số $u_{10}; u_{20}; u_{30}; \dots; u_{10n}, \forall n \geq 1$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai là 20.
C. Dãy số $u_{10}; u_{20}; u_{30}; \dots; u_{10n}, \forall n \geq 1$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai là 30.
D. Dãy số $u_{10}; u_{20}; u_{30}; \dots; u_{10n}, \forall n \geq 1$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai là 15.

Câu 10: Cho cấp số cộng (u_n) có công sai d . Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên. Hãy chỉ ra hệ thức **sai** trong các hệ thức sau.

- A. $u_3 + u_8 = u_5 + u_6$. B. $u_5 + u_9 = 2u_7$. C. $u_4 \cdot u_9 = u_6^2$. D. $S_3 + S_5 = 2S_4 + d$.

Câu 11: Cho cấp số cộng (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 + 2u_5 = 0 \\ S_4 = 14 \end{cases}$. Số hạng đầu u_1 và công sai d là

- A. $u_1 = 8; d = -3$. B. $u_1 = 8; d = 2$. C. $u_1 = -8; d = -3$. D. $u_1 = -8; d = 2$.

Câu 12: Số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) có $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7 \end{cases}$ là

- A. $u_1 = 33; d = 12$. B. $u_1 = 36; d = -13$. C. $u_1 = 35; d = 13$. D. $u_1 = 34; d = -13$.

Câu 13: Cấp số cộng (u_n) có $S_6 = 18, S_{10} = 110$ thì tổng 20 số hạng đầu tiên là

- A. 620. B. 280. C. 360. D. 153.

Câu 14: Cho cấp số cộng $u_n = 5n - 2$. Biết $S_n = 16040$, số số hạng của cấp số cộng là

- A. 79. B. 3024. C. 80. D. 100.

Câu 15: Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau. Nếu 3 số a, b, c khác 0 lập thành cấp số cộng thì

- A. nghịch đảo của chúng cũng lập thành một cấp số cộng.
B. bình phương của chúng cũng lập thành cấp số cộng.
C. c, b, a theo thứ tự đó cũng lập thành cấp số cộng.
D. Tất cả các khẳng định trên đều sai.

Câu 16: Cho cấp số cộng có $S_{10} = -85, S_{15} = -240$, khi đó S_{20} bằng

- A. -325. B. -170. C. -395. D. -470.

Câu 17: Tổng tất cả các số tự nhiên chẵn nhỏ hơn 555 là

- A. 77145. B. 77284. C. 76450. D. 77006.

Câu 18: Cho cấp số cộng có $u_1 = \frac{1}{4}, d = -\frac{1}{4}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây?

- A. $S_5 = \frac{5}{4}$. B. $S_5 = \frac{4}{5}$. C. $S_5 = -\frac{5}{4}$. D. $S_5 = -\frac{4}{5}$.

Câu 19: Cho cấp số cộng (u_n) , với $u_1 = 2, d = -3$. Kết quả nào sau đây đúng?

- A. $u_3 = -1$. B. $u_3 = -7$. C. $u_4 = -7$. D. $u_6 = 0$.

Câu 20: Cho cấp số cộng có $u_2 + u_{22} = 60$. Tổng của 23 số hạng đầu là

- A. 690. B. 680. C. 600. D. 500.

Câu 21: Công sai d của một cấp số cộng hữu hạn có số hạng đầu $u_1 = 10$ và số hạng cuối $u_{21} = 50$ là

- A. $d = 4$. B. $d = 2$. C. $d = 2$. D. $d = -2$.

Câu 22: Tổng 10 số hạng đầu của cấp số cộng có $u_1 = 8, u_{10} = 62$ là

- A. $S_{10} = 175$. B. $S_{10} = 350$. C. $S_{10} = 700$. D. $S_{10} = 1400$.

Câu 23: Cho cấp số cộng có $u_1 = -1, d = 2, S_n = 483$. Số các số hạng của cấp số cộng đó là

- A. $n = 20$. B. $n = 21$. C. $n = 22$. D. $n = 23$.

Câu 24: Cho cấp số cộng có tổng 4 số hạng bằng 22, tổng bình phương của chúng bằng 166. Bốn số hạng của cấp số cộng này là

- A. 1; 4; 7; 10. B. 1; 4; 5; 10. C. 2; 3; 5; 10. D. 2; 3; 4; 5.

Câu 25: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 + u_5 = 42 \\ u_3 + u_{10} = 66 \end{cases}$. Tổng của 346 số hạng đầu là

- A. 242546. B. 242000. C. 241000. D. 240000.

Câu 26: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_5 = 18$ và $4S_n = S_{2n}$. Số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng là

- A. $u_1 = 2; d = 4$. B. $u_1 = 2; d = 3$.
C. $u_1 = 2; d = 2$. D. $u_1 = 3; d = 2$.

Câu 27: Cho cấp số cộng gồm 4 số hạng $-1, a, 7, b$. Giá trị của a, b là

- A. $a = 3, b = 11$. B. $a = 2, b = 9$.
C. $a = 4, b = 12$. D. $a = 7, b = -1$.

Câu 28: Cho dãy số (a_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = 2n^2 + 3n$. Khi đó

- A. (a_n) là một cấp số cộng với công sai bằng 4. B. (a_n) là một cấp số cộng với công sai bằng 2.
C. (a_n) là một cấp số cộng với công sai bằng 1. D. (a_n) là một cấp số cộng với công sai bằng 8.

Câu 29: Cho cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu là $u_1 = -6$ và công sai $d = 4$. Tổng 14 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó bằng

- A. 280. B. 308. C. 644. D. 46.

Câu 30: Cho cấp số cộng (u_n) gồm 4 số hạng $2, a, 6, b$. Tích $a.b$ bằng

- A. 12. B. 32. C. 40. D. 22.

Câu 31: Cho cấp số cộng có tổng n số hạng đầu là $S_n = 3n^2 + 4n, n \in \mathbb{N}^*$. Giá trị số hạng thứ 10 của cấp số cộng là

- A. $u_{10} = 55$. B. $u_{10} = 67$. C. $u_{10} = 61$. D. $u_{10} = 59$.

Câu 32: Thêm 6 số xen giữa hai số 3 và 24 ta được một cấp số cộng có 8 số hạng. Khi đó tổng các số hạng là

- A. 110. B. 107. C. 106. D. 108.

Câu 33: Thêm 5 số xen giữa hai số 25 và 1 ta được một cấp số cộng có 7 số hạng. Số hạng thứ 50 là

- A. -169. B. 169. C. -171. D. 171.

Câu 34: Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và tổng 100 số hạng đầu bằng 24850. Giá trị biểu thức

$$S = \frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \dots + \frac{1}{u_{49} u_{50}} \text{ là}$$

- A. $S = \frac{9}{246}$. B. $S = \frac{4}{23}$. C. $S = 123$. D. $S = \frac{49}{246}$.

Câu 35: Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_5 + 3u_3 - u_2 = -21 \\ 3u_7 - 2u_4 = -34 \end{cases}$. Giá trị của biểu thức $S = u_4 + u_5 + \dots + u_{30}$ là

- A. -1242. B. -1222. C. -1276. D. -1286.

Dạng 3: Dựa vào tính chất của cấp số cộng: chứng minh đẳng thức, giải phương trình và các bài toán thực tế

Phương pháp giải

Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối cùng đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$.

Hệ quả: Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $a + c = 2b$.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, chứng minh rằng

a) $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$. b) $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$.

Hướng dẫn giải

Vì a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng nên $a + c = 2b \Leftrightarrow a = 2b - c$.

a) Ta có $a^2 - 2ab = (2b - c)^2 - 2(2b - c).b = 4b^2 - 4bc + c^2 - 4b^2 + 2bc$
 $= c^2 - 2bc$.

Vậy $a^2 - 2ab = c^2 - 2bc \Leftrightarrow a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$.

b) Ta có $a^2 + 8bc = (2b - c)^2 + 8bc = 4b^2 - 4bc + c^2 + 8bc$
 $= 4b^2 + 4bc + c^2 = (2b + c)^2$.

Ví dụ 2. Một tam giác vuông có chu vi bằng $3a$ và ba cạnh lập thành một cấp số cộng. Tính độ dài ba cạnh của tam giác theo a .

Hướng dẫn giải

Gọi x, y, z theo thứ tự là độ dài ba cạnh của tam giác ($x < y < z$).

Chu vi của tam giác là $x + y + z = 3a$. (1)

Theo tính chất của cặp số cộng, ta có $x + z = 2y$. (2)

Tam giác đã cho vuông nên $x^2 + y^2 = z^2$. (3)

Thay (2) và (1), ta được $3y = 3a \Leftrightarrow y = a$.

Thay $y = a$ vào (2), ta được $x + z = 2a \Rightarrow x = 2a - z$.

Thay $x = 2a - z$ và $y = a$ vào (3), ta được

$$(2a - z)^2 + a^2 = z^2 \Leftrightarrow 5a^2 - 4az = 0 \Leftrightarrow z = \frac{5a}{4} \Rightarrow x = \frac{3a}{4}.$$

Vậy độ dài ba cạnh của tam giác là $\frac{3a}{4}, a, \frac{5a}{4}$.

Ví dụ 3. Cho a^2, b^2, c^2 lập thành một cặp số cộng có công sai khác 0.

Ta sẽ chứng minh

Chứng minh rằng $\frac{1}{b+c}; \frac{1}{c+a}; \frac{1}{a+b}$ cũng lập thành một cặp số cộng.

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{2}{c+a}.$$

Hướng dẫn giải

Theo giả thiết, ta có $a^2 + c^2 = 2b^2$.

Ta phải chứng minh $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} = \frac{2}{c+a}$.

Ta có $a^2 + c^2 = b^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = b^2 - c^2 \neq 0$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a+b) = (b-c)(b+c) \Rightarrow \frac{a-b}{b+c} = \frac{b-c}{a+b}$$

$$\Rightarrow \frac{a-b}{(b+c)(c+a)} = \frac{b-c}{(a+b)(c+a)} \Leftrightarrow \frac{(a+c)-(b+c)}{(b+c)(c+a)} = \frac{(a+b)-(c+a)}{(a+b)(c+a)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+c}{(a+c)(c+a)} - \frac{b+c}{(b+c)(c+a)} = \frac{a+b}{(a+b)(c+a)} - \frac{c+a}{(a+b)(c+a)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b+c} - \frac{1}{c+a} = \frac{1}{c+a} - \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{2}{c+a} \text{ (điều phải chứng minh).}$$

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC có $\tan \frac{A}{2}, \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{C}{2}$, theo thứ tự đó lập thành

Ta sẽ chứng minh

cấp số cộng. Chứng minh $\cos A, \cos B, \cos C$ theo thứ tự cũng lập thành cấp số cộng.

$$\cos A + \cos C = 2\cos B$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{C}{2} = 2 \tan \frac{B}{2} \Leftrightarrow \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = 2 \cdot \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{\sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}} = 2 \cdot \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} \\
&\Leftrightarrow \frac{\sin \left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2} \right)}{\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}} = 2 \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} \Leftrightarrow \frac{\cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}} = 2 \cdot \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} \\
&\Leftrightarrow \cos^2 \frac{B}{2} = 2 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \\
&\Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{2} = \left[\cos \left(\frac{A-C}{2} \right) + \cos \left(\frac{A+C}{2} \right) \right] \cdot \sin \frac{B}{2} \\
&\Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{2} = \cos \frac{A-C}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \\
&\Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{2} = \cos \frac{A-C}{2} \cdot \cos \frac{A+C}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} \\
&\Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{2} = \frac{1}{2} [\cos(-C) + \cos A] + \frac{1 - \cos B}{2} \\
&\Leftrightarrow 1 + \cos B = \cos C + \cos A + 1 - \cos B \\
&\Leftrightarrow \cos A + \cos C = 2 \cos B \\
&\Rightarrow \cos A, \cos B, \cos C \text{ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.}
\end{aligned}$$

Ví dụ 5. Cho các số dương $a; b; c$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}; \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}; \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \text{ theo thứ tự đó cũng lập thành cấp số cộng.}$$

Ta sẽ chứng minh

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}
\end{aligned}$$

Hướng dẫn giải

Vì a, b, c lập thành cấp số cộng nên $a + c = 2b$.

$$\text{Ta cần chứng minh } \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{2}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}.$$

$$\text{Ta có } a + c = 2b \Leftrightarrow a - b = b - c \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{c} + \sqrt{a})} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{c}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{a})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{c}) - (\sqrt{b} + \sqrt{c})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{c} + \sqrt{a})} = \frac{(\sqrt{b} + \sqrt{a}) - (\sqrt{c} + \sqrt{a})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{a})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{2}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}$$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}; \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}; \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng.

Ví dụ 6. Tìm giá trị của m để phương trình $(x^2 + 2x - 3)(x - 2m) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng có công sai lớn hơn 2.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } (x^2 + 2x - 3)(x - 2m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \\ x = 2m \end{cases}.$$

Ba nghiệm này lập thành một cấp số cộng có công sai lớn hơn 2 nên có 3 trường hợp.

Trường hợp 1: Ba nghiệm thứ tự là $-3; 1; 2m$.

Suy ra $d = 4; m = \frac{5}{2}$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: Ba nghiệm thứ tự $-3; 2m; 1$. Suy ra $d = 2; m = -\frac{1}{2}$ (loại).

Trường hợp 3: Ba nghiệm thứ tự $2m; -3; 1$.

Suy ra $d = 4; m = -\frac{7}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy các giá trị m cần tìm là $m \in \left\{ -\frac{7}{2}; \frac{5}{2} \right\}$.

Ví dụ 7. Tìm m để phương trình $x^4 - 20x^2 + (m-1)^2 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = x^2, t \geq 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 20t + (m-1)^2 = 0$ (1).

Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm dương t_1, t_2 phân biệt ($0 < t_1 < t_2$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 2m + 99 > 0 \\ 20 > 0 \\ (m-1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 < m < 11 \\ m \neq 1 \end{cases}. \quad (*)$$

Bốn nghiệm của phương trình lập thành cấp số cộng là $-\sqrt{t_2}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} -\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1} = -2\sqrt{t_1} \\ -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow 3\sqrt{t_1} = \sqrt{t_2} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1.$$

$$\text{Theo Định lí Vi-ét, ta có } \begin{cases} t_2 = 9t_1 \\ t_1 + t_2 = 20 \\ t_1 t_2 = (m-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 18 \\ (m-1)^2 = 36 \end{cases}.$$

Suy ra $m = 7$ hoặc $m = -5$ (thỏa mãn (*)).

Vậy các giá trị m cần tìm là $m \in \{-5; 7\}$.

Ví dụ 8. Chứng minh rằng: Nếu phương trình $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ có ba nghiệm lập thành cấp số cộng thì $9ab = 2a^3 + 27c$.

Hướng dẫn giải

Giả sử phương trình có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số cộng.

$$\text{Suy ra } x_1 + x_3 = 2x_2. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } x^3 - ax^2 + bx - c &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } x_1 + x_2 + x_3 = a. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra } 3x_2 = a \text{ hay } x_2 = \frac{a}{3}.$$

$$\text{Phương trình đã cho có nghiệm } x_2 = \frac{a}{3}, \text{ tức là } \left(\frac{a}{3}\right)^3 - a\left(\frac{a}{3}\right)^2 + b\left(\frac{a}{3}\right) - c = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2a^3}{27} + \frac{ba}{3} - c = 0 \Leftrightarrow 9ab = 2a^3 + 27c \text{ (điều phải chứng minh).}$$

Ví dụ 9. Cho $x^2; \frac{1}{2}; y^2$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{3}xy + y^2$.

Hướng dẫn giải

Ta có $x^2; \frac{1}{2}; y^2$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên $x^2 + y^2 = 1$.

Đặt $x = \sin \alpha, y = \cos \alpha$. Ta có

$$P = \sqrt{3}xy + y^2 = \sqrt{3} \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha + \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow 2P - 1 = \sqrt{3} \sin 2\alpha + \cos 2\alpha.$$

Phương trình $2P - 1 = \sqrt{3} \sin 2\alpha + \cos 2\alpha$ theo biến α có nghiệm

$$\Leftrightarrow (2P - 1)^2 \leq (\sqrt{3})^2 + 1^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq P \leq \frac{3}{2}.$$

Vậy $\max P = \frac{3}{2}$. Đẳng thức khi và chỉ khi $\sqrt{3} \sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 2$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\min P = -\frac{1}{2}. \text{ Đẳng thức khi và chỉ khi } \sqrt{3} \sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -2$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Cho tổng $1+6+11+16+\dots+x=970$. Giá trị của x là

- A. 96. B. 69. C. 97. D. 7.

Câu 2: Biết $(x+1)+(x+4)+(x+7)+\dots+(x+28)=155$. Giá trị của x là

- A. $x=1$. B. $x=-1$. C. $x=2$. D. $x=-3$.

Câu 3: Với giá trị nào của x thì $1+3x; x^2+5; 1-x$ lập thành cấp số cộng?

- A. $x=0$. B. $x=\pm 1$. C. $x=\pm\sqrt{2}$. D. $x\in\emptyset$.

Câu 4: Chu vi của một đa giác là 158 cm, số đo các cạnh lập thành một cấp số cộng với công sai $d=3$ cm. Biết cạnh lớn nhất là 44 cm. Số cạnh của đa giác đó là

- A. 6. B. 3. C. 5. D. 4.

Câu 5: Phương trình $x^4-10x^2+m=0$ có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng. Khi đó m thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $m\in(0;5)$. B. $m\in(5;15)$. C. $m\in(-25;0)$. D. $m\in(15;25)$.

Câu 6: Cho tam giác ABC có ba góc A, B, C theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng và $\hat{C}=5\hat{A}$. Số đo các góc A, B, C lần lượt là

- A. $10^\circ, 120^\circ, 50^\circ$. B. $15^\circ, 105^\circ, 60^\circ$.
C. $5^\circ, 60^\circ, 25^\circ$. D. $20^\circ, 60^\circ, 100^\circ$.

Câu 7: Một công ty thực hiện việc trả lương cho các kĩ sư theo phương thức như sau: Mức lương của quý làm việc đầu tiên cho công ty là 15 triệu đồng/quý và kể từ quý làm việc thứ hai mức lương sẽ được tăng thêm 1,5 triệu đồng mỗi quý. Tổng số tiền lương một kĩ sư được nhận sau 3 năm làm việc cho công ty là

- A. 495 triệu đồng. B. 279 triệu đồng. C. 384 triệu đồng. D. 558 triệu đồng.

Câu 8: Cho tam giác vuông có độ dài ba cạnh lập thành một cấp số cộng với công sai $d=2$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác đó là

- A. $R=3$. B. $R=4$. C. $R=-1$. D. $R=5$.

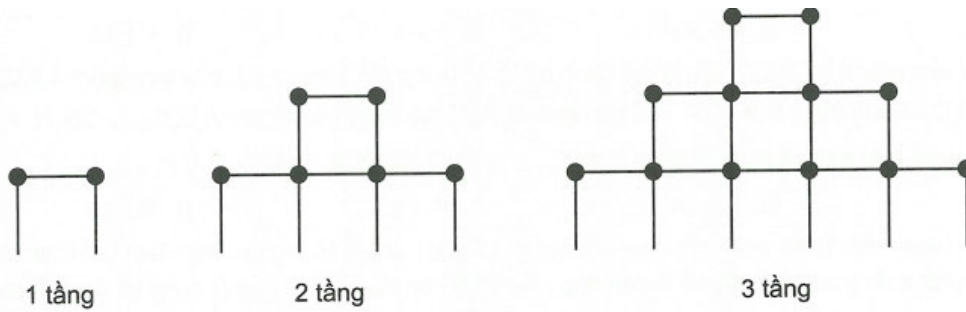
Câu 9: Độ dài ba cạnh của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Nếu cạnh trung bình bằng 6 thì công sai của cấp số cộng này là

- A. 7,5. B. 4,5. C. 0,5. D. 1,5.

Câu 10: Giá trị a, b để phương trình $x^3+ax+b=0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng là

- A. $b=0, a>0$. B. $b>0, a<0$.
C. $b=0, a<0$. D. $b=0, a=1$.

Câu 11: Một em học sinh dùng các que diêm để xếp thành hình tháp có quy luật được thể hiện như trong hình dưới.



Số que diêm để xếp thành hình tháp 10 tầng là

- A. 69 que. B. 39 que. C. 420 que. D. 210 que.

Câu 12: Tam giác ABC có ba cạnh a, b, c thỏa mãn a^2, b^2, c^2 theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- A. $\tan^2 A, \tan^2 B, \tan^2 C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.
 B. $\cot^2 A, \cot^2 B, \cot^2 C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.
 C. $\cos A, \cos B, \cos C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.
 D. $\sin^2 A, \sin^2 B, \sin^2 C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

Câu 13: Số đo các góc của một tứ giác lồi lập thành một cấp số cộng và góc lớn nhất gấp 5 lần góc nhỏ nhất. Số đo góc nhỏ nhất bằng

- A. 25° . B. 30° . C. 45° . D. 35° .

Câu 14: Người ta trồng 3420 cây theo một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, kể từ hàng thứ 2 trở đi số cây trồng mỗi hàng nhiều hơn 1 cây so với hàng liền trước nó. Hỏi có tất cả bao nhiêu hàng cây?

- A. 81. B. 82. C. 80. D. 79.

Câu 15: Chu vi một đa giác là 158 cm, các cạnh của đa giác này lập thành một cấp số cộng với công sai $d = 3\text{cm}$. Biết cạnh lớn nhất có độ dài là 44 cm, độ dài cạnh nhỏ nhất của đa giác là

- A. 32 cm. B. 33 cm. C. 38 cm. D. 35 cm.

Câu 16: Giá trị của n để C_n^1, C_n^2, C_n^3 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng là

- A. $n = 9$. B. $n = 6$. C. $n = 2$. D. $n = 7$.

Câu 17: Giá trị của x để $-2; 2x+1; 5$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng là

- A. $x = -\frac{1}{4}$. B. $x = -\frac{1}{3}$. C. $x = \frac{1}{4}$. D. $x = 1$.

Câu 18: Cho A, B, C, D là bốn số thực dương lập thành một cấp số cộng. Giá trị biểu thức $\frac{D^2 - A^2}{C^2 - B^2}$ bằng

- A. 1. B. 0. C. 3. D. -1.

Câu 19: Cho x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + a = 0$ và y_1, y_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 11x - b = 0$. Nếu x_1, x_2, y_1, y_2 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì tích ab có giá trị là

- A. $ab = -1$. B. $ab = -\frac{585}{8}$. C. $ab = \frac{585}{8}$. D. $ab = 54$.

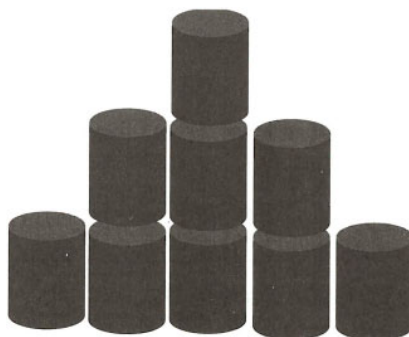
Câu 20: Tìm m để phương trình $x^3 - (2m+1)x^2 - 9x = 0$ có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng, ta được $m = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$, phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị biểu thức $P = a^2 + b^2$ là

- A. $P = 13$. B. $P = 20$. C. $P = 5$. D. $P = 10$.

Câu 21: Cho tam giác đều $A_1B_1C_1$ có độ dài cạnh bằng 4. Trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$ tạo thành tam giác $A_2B_2C_2$, trung điểm các cạnh của tam giác $A_2B_2C_2$ tạo thành tam giác $A_3B_3C_3, \dots$. Gọi $P_1, P_2, P_3, \dots$ lần lượt là chu vi của tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$. Giá trị biểu thức $P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots$ là

- A. $P = 8$. B. $P = 24$. C. $P = 6$. D. $P = 18$.

Câu 22: Cửa hàng xếp 1089 hộp sơn theo số lượng 1; 3; 5; ... (hộp) từ trên xuống dưới (số hộp sơn trên mỗi hàng xếp từ trên xuống dưới là các số lẻ liên tiếp như hình bên dưới). Hàng cuối cùng có bao nhiêu hộp sơn?



- A. 63. B. 65. C. 67. D. 69.

Câu 23: Một đội công nhân trồng cây xanh từ kilômet số 6 đến kilômet số 8. Cứ 20m trồng một cây. Hỏi có bao nhiêu cây được trồng?

- A. 100. B. 200. C. 250. D. 101.

Câu 24: An từ thành phố về quê thăm ông bà trên quãng đường 54 km. Biết giờ đầu tiên An đi được 15km và mỗi giờ sau An đi kém hơn giờ trước 1km. Thời gian An đi từ nhà về quê là

- A. 27 giờ. B. 4 giờ. C. 3 giờ. D. 15 giờ

Câu 25: Ngày thứ nhất cửa hàng bán được 10 cốc nước mía, ngày sau bán nhiều hơn ngày hôm trước đó 1 cốc nước mía. Hỏi ngày thứ 10 cửa hàng sẽ bán được bao nhiêu cốc nước mía?

- A. 15 cốc. B. 17 cốc. C. 19 cốc. D. 21 cốc.

Câu 26: Một nhóm gồm 3003 người xếp thành hình tam giác như sau: hàng thứ nhất có 1 người, hàng thứ hai có 2 người, hàng thứ ba có 3 người, ... Hỏi có bao nhiêu hàng?

- A. 75. B. 76. C. 77. D. 78.

Câu 27: Tổng tất cả các giá trị m để phương trình $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m+1 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng là

- A. $-\frac{40}{9}$. B. $\frac{40}{9}$. C. $-\frac{32}{9}$. D. $\frac{32}{9}$.

ĐÁP ÁN

Dạng 1. Nhận dạng một dãy số là cấp số cộng

1 - D	2 - C	3 - D	4 - C	5 - B	6 - B	7 - B	8 - C	9 - B	10 - B
11 - C	12 - D	13 - B	14 - A						

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Dãy số 0; 4; 8; 12; 16 là cấp số cộng có số hạng đầu là $u_1 = 0$ và công sai $d = 4$.

Câu 2.

Ta có $u_n = 3n + 1$ là một cấp số cộng vì $u_{n+1} - u_n = [3(n+1) + 1] - (3n + 1) = 3$.

Câu 3.

Ta có $u_1 = -\frac{1}{2}, u_2 = 0, u_3 = \frac{1}{2}, u_4 = 1, u_5 = \frac{3}{2}, \dots$

Câu 4.

Dãy số (u_n) có tính chất $u_{n+1} = u_n + d$ thì được gọi là một cấp số cộng.

Ta thấy dãy số 1; -3; -7; -11; -15 là một cấp số cộng có số hạng đầu là 1 và công sai bằng -4.

Câu 5.

Ta có $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 3 - 2n + 3 = 2, \forall n \geq 1$.

Do đó dãy số trong đáp án **B** là cấp số cộng theo định nghĩa.

Câu 6.

Ta có $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 2020 - (3n + 2020) = 3 \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + 3$.

Vậy dãy số trên là cấp số cộng có công sai $d = 3$.

Câu 7.

Ta có $u_n = 2^n + 1$ không là cấp số cộng vì $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n$.

Câu 8.

Xét dãy số $u_n = 1 + 3^n$, suy ra $u_{n+1} = 1 + 3^{n+1}$. Ta có $u_{n+1} - u_n = 2 \cdot 3^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó $u_n = 1 + 3^n$ không phải là cấp số cộng.

Câu 9.

Ta có $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$ là cấp số cộng vì $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 1$.

Câu 10.

Ta có $u_n = 3n + 1 (n \in \mathbb{N}^*)$ là cấp số cộng vì $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 1 - 3n - 1 = 3$ là hằng số.

Câu 11.

Xét đáp án C. $2 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2} \neq \frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}$ nên dãy số $\frac{1}{2}; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{2^3}; \dots$ không là cấp số cộng.

Câu 12.

Dãy số 8; 15; 22; 29; 36; ... là một cấp số cộng với $\begin{cases} u_1 = 8 \\ d = 7 \end{cases} \Rightarrow$ công thức tổng quát là $u_n = 7n + 1$.

Câu 13.

Gọi cấp số cộng thứ nhất là (u_n) và cấp số cộng thứ hai là (v_n) .

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d = 4 + 3(n-1) \Rightarrow u_n = 3n + 1$;

$$v_k = v_1 + (k-1)d = 1 + 5(k-1) \Rightarrow v_k = 5k - 4.$$

Với $k, n \in \mathbb{Z}, 1 \leq n \leq 100, 1 \leq k \leq 100$.

Ta có $u_n = v_k \Leftrightarrow 3n + 1 = 5k - 4 \Leftrightarrow 3n = 5(k-1)$.

Mà 3 và 5 là hai số nguyên tố cùng nhau nên n chia hết cho 5.

Đặt $n = 5t, t \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 3t + 1$.

Do $1 \leq n \leq 100, 1 \leq k \leq 100$ nên $t \in \{1; 2; 3; \dots; 20\}$.

Câu 14.

Ta có $a_n = (2n+5)^2 - 4n^2, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow a_n = 20n + 25, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó $a_{n+1} - a_n = 20, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (a_n) là cấp số cộng với công sai $d = 20$.

Dạng 2. Tìm số hạng đầu tiên, công sai của cấp số cộng, tìm số hạng thứ k của cấp số cộng, tính tổng k số hạng đầu tiên

1 – B	2 – A	3 – D	4 – C	5 – A	6 – D	7 – A	8 – B	9 – C	10 – C
11 – A	12 – B	13 – A	14 – C	15 – C	16 – C	17 – D	18 – C	19 – C	20 – A
21 – C	22 – B	23 – D	24 – A	25 – A	26 – A	27 – A	28 – A	29 – A	30 – B
31 – C	32 – D	33 – C	34 – D	35 – A					

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Ta có $u_2 = 7; u_3 = 4$ suy ra $d = -3$. từ đó $u_1 = 7 - (-3) = 10$.

Câu 2.

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d \Rightarrow u_8 = u_1 + 7d = 15 + 7 \cdot (-2) = 1$.

Câu 3.

Ta có $S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2} \Leftrightarrow 2.483 = n \cdot (2 \cdot -1 + (n-1) \cdot 2) \Leftrightarrow n^2 - 2n - 483 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 23 \\ n = -21 \end{cases}$.

Do $n \in \mathbb{N}^*$ nên $n = 23$.

Câu 4.

Ta có $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases} \Rightarrow u_1 = -2; d = 3$. Suy ra $u_n = -2 + 3(n-1) = 3n - 5$.

Từ đó $70 = 3n - 5 \Rightarrow n = 25$.

Câu 5.

Ta có $S_{50} = \frac{50}{2}(2u_1 + 49d) = 5150 \Rightarrow d = 4$.

Số hạng tổng quát của cấp số cộng bằng $u_n = u_1 + (n-1)d = 1 + 4n$.

Câu 6.

Ta có $u_1 = 5$ suy ra $S_n = \frac{n(5 + 2n + 3)}{2} = n^2 + 4n$.

Câu 7.

$$u_n = 2n - 5 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -3 \\ u_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow d = u_2 - u_1 = 2.$$

Câu 8.

$$u_{15} - u_3 = u_1 + 14d - (u_1 + 2d) = 12d = 48 \neq 6 \text{ loại A};$$

$$u_{29} - u_{22} = u_1 + 28d - (u_1 + 21d) = 7d = 28 \text{ chọn B};$$

$$u_{17} - u_{13} = u_1 + 16d - (u_1 + 12d) = 4d = 16 \neq 18 \text{ loại C};$$

$$u_{1000} - u_{100} = 900d \neq 350 \text{ loại D}.$$

Câu 9.

Gọi (a_n) là cấp số cộng theo thứ tự $u_{10}; u_{20}; u_{30}; \dots; u_{10n}, \forall n \geq 1$, lúc đó ta có

$$\begin{cases} a_1 = u_{10} = u_1 + 9d \\ a_2 = u_{20} = u_1 + 19d \end{cases} \Rightarrow d' = a_2 - a_1 = 10d = 30.$$

Câu 10.

$$\text{Ta có } u_4 \cdot u_9 = (u_1 + 3d)(u_1 + 8d) = u_1^2 = 24d^2 + 11u_1d.$$

$$u_6^2 = (u_1 + 5d)^2 = u_1^2 + 25d^2 + 10u_1d. \text{ Suy ra } u_4 \cdot u_9 \neq u_6^2.$$

Câu 11.

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 + 2u_5 = 0 \\ S_4 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2(u_1 + 4d) = 0 \\ 2(2u_1 + 3d) = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 8d = 0 \\ 2u_1 + 3d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 \\ d = -3 \end{cases}.$$

Câu 12.

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + (u_1 + 4d) - (u_1 + 2d) = 10 \\ u_1 + (u_1 + 5d) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 36 \\ d = -13 \end{cases}.$$

Câu 13.

$$\text{Ta có } \begin{cases} S_6 = 18 \\ S_{10} = 110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2u_1 + 5d) = 18 \\ 5(2u_1 + 9d) = 110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 5d = 6 \\ 2u_1 + 9d = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -7 \\ d = 4 \end{cases}.$$

Từ đó mà $S_{20} = 10(2u_1 + 19d) = 10(2 \cdot (-7) + 19 \cdot 4) = 620$.

Câu 14.

Ta có cấp số cộng: $u_n = 5n - 2$ nên $u_1 = 3, u_2 = 8, \dots \Rightarrow d = 5$.

$$S_n = 16040 \Leftrightarrow \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d] = 16040 \Leftrightarrow \frac{n}{2}[2 \cdot 3 + (n-1) \cdot 5] = 16040$$

$$\Leftrightarrow 5n^2 + n - 32080 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 80 \\ n = -\frac{401}{5} \text{ (loại)} \end{cases} \Rightarrow n = 80.$$

Câu 15.

Không mất tổng quát giả sử $a < b < c \Rightarrow c - b = b - a = d$ với d là công sai.

Khi đó $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+d} = \frac{d}{a(a+d)} \neq \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{d}{(a+d)(a+2d)}$ nên loại **A**.

$(b^2 - a^2 = 2ad + d^2) \neq (c^2 - b^2 = 2ad + 3d^2)$ nên loại **B**.

Nếu a, b, c lập thành cấp số cộng với công sai d thì c, b, a cũng lập thành cấp số cộng với công sai $-d$.

Câu 16.

$$\begin{cases} S_{10} = S_1 + 9d = -85 \\ S_{15} = S_1 + 14d = -240 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_1 = 194 \\ d = -31 \end{cases} \Rightarrow S_{20} = S_1 + 19d = -395.$$

Câu 17.

$$\text{Theo giả thiết } 2 + 4 + \dots + 552 + 554 = \frac{278 \cdot 554}{2} = 77006.$$

Câu 18.

$$\text{Theo giả thiết } S_5 = 5u_1 + 10d = 5 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{4}.$$

Câu 19.

$$\text{Ta có } u_4 = u_1 + 3d = 2 + 3 \cdot (-3) = -7, u_6 = u_1 + 5d = 2 + 5 \cdot (-3) = -13.$$

Câu 20.

$$u_2 + u_{22} = 60 \Leftrightarrow 2u_1 + 22d = 60 \Rightarrow S_{23} = \frac{23}{2}(2u_1 + 22d) = \frac{23 \cdot 60}{2} = 690.$$

Câu 21.

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 = 10 \\ u_{21} = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 10 \\ u_1 + 20d = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 10 \\ d = 2. \end{cases}$$

Câu 22.

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_1 = 8 \\ u_{10} = 62 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 \\ u_1 + 9d = 62 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 \\ d = 6. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } S_{10} = 5(2u_1 + 9d) = 5(2 \cdot 8 + 9 \cdot 6) = 350.$$

Câu 23.

$$S_n = 483 \Leftrightarrow \frac{n}{2}(2u_1 + (n-1)d) = 483 \Leftrightarrow \frac{n}{2}[2 \cdot (-1) + (n-1) \cdot 2] = 483$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 2n - 483 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 23 \\ n = -21(\text{loại}) \end{cases} \Rightarrow n = 23.$$

Câu 24.

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 22 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 166 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 + 6d = 22 \\ 4u_1^2 + 12u_1d + 14d^2 = 166 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u_1 = 10 \\ d = -3 \end{cases}.$$

Câu 25.

$$\begin{cases} u_2 + u_5 = 42 \\ u_3 + u_{10} = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 5d = 42 \\ 2u_1 + 11d = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 11 \\ d = 4 \end{cases} \Rightarrow S_{346} = \frac{346}{2}(2 \cdot 11 + 345 \cdot 4) = 242546.$$

Câu 26.

$$\text{Ta có } u_5 = 18 \Leftrightarrow u_1 + 4d = 18(1).$$

$$4S_n = S_{2n} \Leftrightarrow 4 \left[nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2} \right] = \left[2nu_1 + \frac{2n(2n-1)d}{2} \right]$$

$$\Leftrightarrow 4u_1 + 2nd - 2d = 2u_1 + 2nd - d \Leftrightarrow 2u_1 - d = 0 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } u_1 = 2; d = 4.$$

Câu 27.

$$\text{Ta có } a+1 = 7-a \Rightarrow a=3; 7-a = b-7 \Rightarrow b=14-3=11.$$

Câu 28.

$$\text{Ta có số hạng thứ } n \text{ của dãy là } a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 + 3n - 2(n-1)^2 - 3(n-1) = 4n+1.$$

$$\text{Suy ra } a_{n+1} = 4n+5.$$

$$\text{Khi đó } a_{n+1} - a_n = 4 \longrightarrow (a_n) \text{ là một cấp số cộng với công sai là } 4.$$

Câu 29.

$$\text{Ta có } S_{14} = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d] = 280.$$

Câu 30.

$$\text{Ta có } a-2 = 6-a \Rightarrow a=4; 6-a = b-6 \Rightarrow b=8 \Rightarrow a.b=32.$$

Câu 31.

$$\text{Từ giả thiết ta có } S_1 = u_1 = 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 = 7.$$

$$\text{Ta có } S_n = 3n^2 + 4n = \frac{n(8+6n)}{2} = \frac{n(7+6n+1)}{2} \Rightarrow u_n = 6n+1 \Rightarrow u_{10} = 61.$$

$$\text{Cách khác } u_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow u_{10} = S_{10} - S_9 = 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 - (3 \cdot 9^2 + 4 \cdot 9) = 61.$$

Câu 32.

Xen giữa hai số 3 và 24 thêm 6 số để được cấp số cộng có 8 số hạng thì $S_8 = \frac{(u_1 + u_8)8}{2} = \frac{(3 + 24)8}{2} = 108$.

Câu 33.

Ta có $d = \frac{1-25}{6} = -4$. Do đó $u_{50} = u_1 + 49d = 25 - 49 \cdot 4 = -171$.

Câu 34.

Gọi d là công sai của cấp số đã cho.

Ta có $S_{100} = 50(2u_1 + 99d) = 24850 \Rightarrow d = \frac{497 - 2u_1}{99} = 5$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 5S &= \frac{5}{u_1 u_2} + \frac{5}{u_2 u_3} + \dots + \frac{5}{u_{49} u_{50}} \\ &= \frac{u_2 - u_1}{u_1 u_2} + \frac{u_3 - u_2}{u_2 u_3} + \dots + \frac{u_{50} - u_{49}}{u_{49} u_{50}} \\ &= \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_{49}} - \frac{1}{u_{50}} + \frac{1}{u_{50}} - \frac{1}{u_{51}} \\ &= \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{50}} = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_1 + 49d} = \frac{245}{246} \Rightarrow S = \frac{49}{246}. \end{aligned}$$

Câu 35.

$$\text{Ta có } \begin{cases} u_5 + 3u_3 - u_2 = -21 \\ 3u_7 - 2u_4 = -34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d + 3(u_1 + 2d) - (u_1 + d) = -21 \\ 3(u_1 + 6d) - 2(u_1 + 3d) = -34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 9d = -21 \\ u_1 + 12d = -34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ d = -3 \end{cases}$$

$$S = u_4 + u_5 + \dots + u_{30} = S_{30} - S_3 = \frac{30}{2}(2.2 + 29 \cdot (-3)) - \frac{3}{2}(2.2 - 2.3) = -1242.$$

Dạng 3. Dựa vào tính chất của cấp số cộng: chứng minh đẳng thức, giải phương trình và các bài toán thực tế

1 – A	2 – A	3 – D	4 – D	5 – B	6 – D	7 – B	8 – D	9 – D	10 – C
11 – D	12 – D	13 – B	14 – C	15 – D	16 – D	17 – C	18 – C	19 – B	20 – C
21 – B	22 – B	23 – D	24 – B	25 – D	26 – C	27 – D			

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

Giả sử $x = u_n$. Khi đó cấp số cộng có công sai $d = 5$.

$$\text{Do đó } 1 + 6 + 11 + \dots + x = \frac{2u_1 + (n-1)d}{2} \cdot n \Rightarrow \frac{2 + (n-1)5}{2} \cdot n = 970$$

$$\Rightarrow 5n^2 - 3n - 1940 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 20 \\ n = -\frac{97}{5} \end{cases} \text{ Ta có } x = u_{20} = u_1 + 19d = 1 + 19 \cdot 5 = 96.$$

Câu 2.

Ta có $(x+1)+(x+4)+(x+7)+\dots+(x+28)=155$.

Do đó $\frac{x+1+x+28}{2} \cdot 10 = 155 \Rightarrow 2x+29=31 \Rightarrow x=1$.

Câu 3.

Đề 3 số $1+3x; x^2+5; 1-x$ lập thành cấp số cộng thì $2.(x^2+5)=(1+3x)+(1-x)$

$$\Leftrightarrow 2x^2-2x+8=0 \text{ (phương trình vô nghiệm)}$$

$\Rightarrow$ Không tìm được x thỏa yêu cầu.

Câu 4.

Ta có $158=44+41+38+35$ nên đa giác có 4 cạnh.

Câu 5.

$$x^4-10x^2+m=0. \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t=x^2, t \geq 0, \text{ phương trình (1) trở thành } t^2-10t+m=0. \quad (2)$$

Phương trình (1) có 4 nghiệm là 4 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt thỏa mãn $t_2=9t_1$ (*), ($t_2 > t_1$).

$$\text{Điều kiện phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt } \begin{cases} \Delta' = 25-m > 0 \\ P = m > 0 \\ S = 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 25.$$

$$\text{Theo định lý Vi-ét } \begin{cases} t_2+t_1=10 & (**) \\ t_2 \cdot t_1=m & (***) \end{cases}.$$

Từ (*) và (**) suy ra $t_1=1, t_2=9$ thế vào (***) ta được $m=9$ (nhận).

Câu 6.

$\triangle ABC$ có ba góc A, B, C theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng $\Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = 2\hat{B}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{A} + \hat{C} = 2\hat{B} \\ \hat{C} = 5\hat{A} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = 20^\circ \\ \hat{B} = 60^\circ \\ \hat{C} = 100^\circ \end{cases}$$

Câu 7.

Gọi u_n (triệu đồng) ($n \in N^*$) là mức lương của kỹ sư ở quý làm việc thứ n .

Ta có $u_1=15; d=1,5$. Đến quý thứ 12 mức lương của kỹ sư là $u_{12}=u_1+11d=31,5$ (triệu đồng).

Vậy tổng số tiền nhận được của kỹ sư sau 3 năm là

$$S_{12}=u_1+u_2+\dots+u_{12}=\frac{12(15+31,5)}{2}=279 \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 8.

Gọi độ dài 3 cạnh của tam giác cần tìm là $a, a+2, a+4$ ($a > 0$).

Theo bài ra, ta có $a^2 + (a+2)^2 = (a+4)^2 \Leftrightarrow a^2 - 4a - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = -2 \end{cases}$.

Suy ra độ dài cạnh huyền là $6 + 4 = 10$.

Vậy $R = 5$.

Câu 9.

Theo giả thiết $(6-d)^2 + 6^2 = (6+d)^2 \Leftrightarrow 36 - 12d = 12d \Rightarrow d = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$.

Câu 10.

Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt là x_1, x_2, x_3 theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

Suy ra $2x_2 = x_1 + x_3$.

Mặt khác $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0 \Leftrightarrow x^3 - (x_1+x_2+x_3)x^2 + (x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x - x_1x_2x_3 = 0$.

Đồng nhất với phương trình $x^3 + ax + b = 0$.

Suy ra $x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$.

Thay $x_2 = 0$ vào phương trình đã cho, ta được $b = 0$.

Phương trình đã cho trở thành $x^3 + ax = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + a = 0 \end{cases} \quad (1)$.

Để phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow a < 0$. Vậy $b = 0, a < 0$.

Câu 11.

Ta có số que diêm để xếp được tầng đề của tháp là một cấp số cộng với $u_1 = 3; d = 4$.

Suy ra số que diêm để xếp được tầng đề của tháp 10 là $u_{10} = u_1 + 9d = 39$.

Từ đó số que diêm để xếp được hình tháp 10 tầng là

$$S_{10} = u_1 + u_2 + \dots + u_{10} = \frac{10(3+39)}{2} = 210 \text{ que}$$

Câu 12.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC ta có $a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C$.

Theo giả thiết a^2, b^2, c^2 theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng nên $a^2 + c^2 = 2b^2$

$$\Leftrightarrow 4R^2 \cdot \sin^2 A + 4R^2 \cdot \sin^2 C = 2 \cdot 4R^2 \cdot \sin^2 B \Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 C = 2 \cdot \sin^2 B.$$

Vậy $\sin^2 A, \sin^2 B, \sin^2 C$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng.

Câu 13.

Gọi góc nhỏ nhất là x , ta có bốn góc là $x, x+d, x+2d, x+3d$ (với d là công sai).

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} x + (x+d) + (x+2d) + (x+3d) = 360^\circ \\ x + 3d = 5x \end{cases}$$

Giải hệ ta tìm được $x = 30^\circ$.

Câu 14.

Giả sử trồng được n hàng cây ($n \geq 1, n \in \mathbb{N}$).

Số cây ở mỗi hàng lập thành cấp số cộng có $u_1 = 1$ và công sai $d = 1$.

Theo giả thiết

$$S_n = 3240 \Leftrightarrow \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d] = 3240 \Leftrightarrow n(n+1) = 6480 \Leftrightarrow n^2 + n - 6480 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 80 \\ n = -81 \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được $n = 80$.

Vậy có tất cả 80 hàng cây.

Câu 15.

Giả sử đa giác có n cạnh; độ dài các cạnh thứ tự lập thành cấp số cộng với công sai $d = 3cm$ là $u_1; u_2; \dots; u_n$.

Từ giả thiết ta có

$$\begin{cases} u_n = 44 \\ S_n = 158 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n = 44 \\ \frac{(u_1 + u_n)n}{2} = 158 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3n = 47 \\ n(u_1 + 44) = 316 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 47 - 3n \\ 3n^2 - 91n + 316 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 35 \\ n = 4 \end{cases}.$$

Câu 16.

Ta có $C_n^1 + C_n^3 = 2C_n^2$ ($n \geq 3$)

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{3! \cdot (n-3)!} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} \Leftrightarrow n^2 - 9n + 14 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 7 \\ n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow n = 7 \quad (\text{do } n \geq 3).$$

Câu 17.

Ta có $-2; 2x+1; 5$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên $2x+1 - (-2) = 5 - (2x+1) \Rightarrow x = \frac{1}{4}$.

Câu 18.

Ta có $B = A+d, C = A+2d, D = A+3d$.

$$\text{Khi đó } \frac{D^2 - A^2}{C^2 - B^2} = \frac{(A+3d)^2 - A^2}{(A+2d)^2 - (A+d)^2} = \frac{6Ad + 9d^2}{2Ad + 3d^2} = 3.$$

Câu 19.

Phương trình $x^2 - 3x + a = 0$ (có 2 nghiệm khi $a \geq \frac{9}{4}$).

Theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = a \end{cases}$.

Phương trình $x^2 - 11x - b = 0$ (có 2 nghiệm khi $b \leq \frac{-121}{4}$).

Theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases} y_1 + y_2 = 11 \\ y_1 \cdot y_2 = -b \end{cases}$.

Theo bài ra x_1, x_2, y_1, y_2 theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với công sai là d nên

$$\begin{cases} 2x_1 + d = 3 \\ 2x_1 + 5d = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ d = 2 \end{cases}.$$

Suy ra $a.b = -\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{13}{2} = -\frac{585}{8}$.

Câu 20.

Ta có $x^3 - (2m+1)x^2 - 9x = 0$ (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - (2m+1)x - 9 = 0 \end{cases}$ (2).

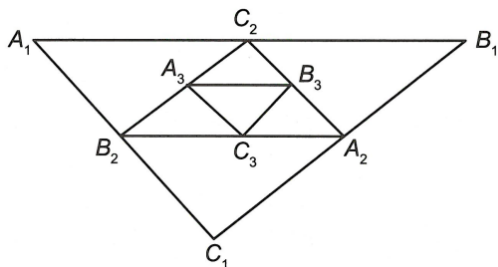
Phương trình (2) luôn có hai nghiệm trái dấu x_1, x_2 do $ac = 1 \cdot (-9) = -9 < 0$.

Do đó phương trình (1) luôn có ba nghiệm phân biệt $x_1 < 0 < x_2$.

Để ba nghiệm trên lập thành một cấp số cộng thì $x_1 + x_2 = 2 \cdot 0 \Leftrightarrow 2m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Vậy $P = 5$.

Câu 21.



Ta có $P_2 = \frac{1}{2}P_1; P_3 = \frac{1}{2}P_2 = \frac{1}{4}P_1; P_4 = \frac{1}{2}P_3 = \frac{1}{8}P_1 \dots; P_n = \frac{1}{2^{n-1}}P_1$.

Vậy $P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots = P_1 + \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{8}P_1 + \dots = \frac{P_1}{1 - \frac{1}{2}} = 2P_1 = 24$.

Câu 22.

Giả sử 1089 được xếp thành n hàng. Từ giả thiết ta có số hộp sơn trên mỗi hàng là số hạng của một cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu $u_1 = 1$ công sai $d = 2$.

Do đó $S_n = 1089 \Leftrightarrow n + n(n-1) = 1089 \Leftrightarrow n = 33$.

Vậy số hộp sơn ở hàng cuối cùng là $u_{33} = 1 + 32 \cdot 2 = 65$ (hộp sơn).

Câu 23.

Khoảng cách từ các cây đến mốc 6 ki-lô-mét tạo thành cấp số cộng có công sai $d = 20m$.

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d = 6000 + (n-1)20$.

Cây cuối cùng ở vị trí 8 ki-lô-mét nên ta có $8000 = 6000 + (n-1)20 \Leftrightarrow n = 101$.

Câu 24.

Quãng đường An đi được trong mỗi giờ là một cấp số cộng.

$$\text{Ta có } S_n = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d] \Leftrightarrow 54 = \frac{n}{2}[30 + (n-1)(-1)] \Leftrightarrow -n^2 + 31n - 108 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 4 \\ n = 27 \end{cases}.$$

Với $n = 27$ thì $u_{27} = u_1 + (27-1)d = -11$ nên vô lý.

Vậy An đi từ nhà về quê hết 4 giờ.

Câu 25.

Số cốc nước bán được trong các ngày lập thành một cấp số cộng với công sai $d = 1$.

Số cốc nước bán trong ngày thứ 10 là $u_{10} = u_1 + 9d = 10 + 9 \cdot 1 = 19$.

Câu 26.

Gọi n là số hàng cần tìm, ta có

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = 3003 \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 3003 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 77 \\ n = -78 \end{cases} \Rightarrow n = 77.$$

Câu 27.

Đặt $t = x^2, t \geq 0$, ta thu được phương trình $t^2 - 2(m+1)t + 2m+1 = 0$. (2)

Điều kiện để phương trình ban đầu có bốn nghiệm phân biệt là phương trình (2) có hai nghiệm dương

$$t_1, t_2 \quad (t_1 < t_2) \text{ hay } \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Khi đó bốn nghiệm là $-\sqrt{t_2}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}$.

Điều kiện để bốn nghiệm trên lập thành cấp số cộng là $\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1}$ hay $t_2 = 9t_1$.

Kết hợp định lý Vi-ét tìm được $m = 4, m = -\frac{4}{9}$.

Từ đó ra tổng các giá trị của m bằng $\frac{32}{9}$.