

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề có 4 trang)

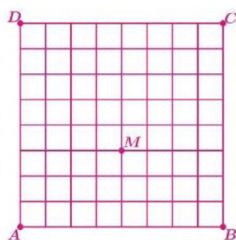
Môn: Toán (Phần trắc nghiệm)
Thời gian làm bài: **50 phút (8,0 điểm)**
(Không kể thời gian giao đề)

Họ tên thí sinh: Số báo danh:

Mã đề thi 101

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một chất điểm chuyển động trên một hình vuông $ABCD$ kích thước 8×8 (cm). Chất điểm di chuyển từ A đến C theo nguyên tắc: mỗi lần di chuyển là một bước nhảy 1 cm sang phải hoặc lên trên theo các đường kẻ ngang hoặc thẳng đứng trong hình. Số cách để chất điểm đi qua vị trí M được đánh dấu trong hình vẽ bằng bao nhiêu?



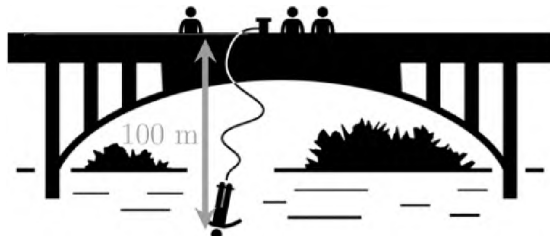
A. 4410

B. 1820

C. 8460

D. 12870

Câu 2: Một người nhảy Bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây dai đàn hồi an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài 100 m. Sau mỗi lần rơi xuống, nhờ sự đàn hồi của dây thì người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên. Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 8 lần kéo lên và lại rơi xuống (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét)?



A. 370

B. 640

C. 270

D. 540

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Một lục giác $MNPQEF$ thỏa mãn các đỉnh M, N, P, Q, E, F lần lượt thuộc các cạnh $AD, AB, BB', B'C', C'D', D'D$ và $MN \parallel BD, NP \parallel AB'$. Chu vi của lục giác $MNPQEF$ nhỏ nhất bằng

A. $4\sqrt{2}$.

B. $6\sqrt{2}$.

C. $3\sqrt{2}$.

D. $2\sqrt{2}$.

Câu 4: Năm 2025 là một năm đặc biệt đối với người yêu toán học, vì 2025 là một số chính phương (tạm gọi là “**năm chính phương**”), và đây cũng là năm chính phương duy nhất của thế kỷ 21; muốn có được **năm chính phương** tiếp theo, ta phải chờ thêm 91 năm nữa, tức là năm 2116. Để chào đón **năm chính phương** đặc biệt này, một thầy giáo dạy toán đã gọi hai em học sinh lên bảng và cho mỗi em viết ngẫu nhiên một số chính phương mà em biết từ 1 đến 2025. Xác suất để hai em viết ra hai số chính phương giống nhau và đều là số chia hết cho cả 3 và 5 bằng $\frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{N}$ và $\frac{m}{n}$ tối giản (biết cả hai em học sinh đều viết đúng số chính phương của mình và khả năng xuất hiện mỗi số chính phương là như nhau). Tính $2m + n$?



A. 826

B. 327

C. 282

D. 677

Câu 5: Khi Mặt Trăng quay quanh trái đất, mặt đối diện với trái đất thường chỉ được Mặt Trời chiếu sáng một phần. Các pha của Mặt Trăng mô tả mức độ phần bề mặt của nó được Mặt Trời chiếu sáng. Khi góc giữa Mặt Trời, Trái Đất và Mặt Trăng là α thì tỷ lệ F của phần Mặt Trăng được chiếu sáng cho bởi công thức $F = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)$.



Nếu ta chỉ lấy góc α nhọn thì khi trăng lưỡi liềm ($F = 0,25$) giá trị góc α là:

A. 60°

B. 0°

C. 45°

D. 30°

Câu 6: Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

Tính tổng $S = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \dots + \frac{u_{10}}{10}$

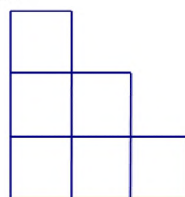
A. $\frac{4502}{6561}$

B. $\frac{29524}{59049}$

C. $\frac{8195}{6561}$

D. $\frac{351}{1024}$

Câu 7: An đã tạo ra một cầu thang 3 bậc bằng 18 que tăm như hình minh họa. Vậy An cần thêm bao nhiêu que tăm để hoàn thành một cầu thang 5 bậc?



A. 32

B. 18

C. 26

D. 22

Câu 8: Cho $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 1} = \frac{-1}{2}$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Tính tổng $S = a^3 + b^2$

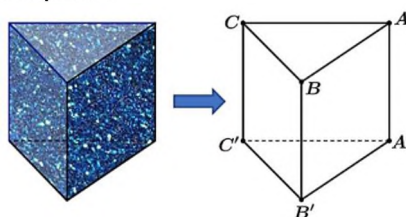
A. $S = -30$

B. $S = -23$

C. $S = 1$

D. $S = 19$

Câu 9: Một khối đá có dạng hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ với cạnh đáy bằng 2 dm , khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng $\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ dm}$. Tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy của khối đá hình lăng trụ đã cho theo đơn vị dm .



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. 2

C. $\sqrt{3}$

D. 1

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = e^{e^x}$. Giá trị $f'(0) = ?$

A. e^e

B. e^{e+1}

C. e

D. e^{2e}

Câu 11: Vị trí của một vật chuyển động thẳng được cho bởi phương trình $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$

Trong đó s tính bằng mét và t tính bằng giây. Tại thời điểm nào vật đứng yên?

A. $t = 5$

B. $t = 2$

C. $t = 4$

D. $t = 3$

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = \ln|x|$. Điểm A thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn tiếp

tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm A có hệ số góc bằng $-\frac{1}{8}$. Tung độ

của điểm A bằng

A. $3\ln 2$

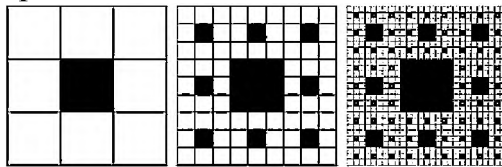
B. $3\ln 3$

C. $2\ln 2$

D. $2\ln 3$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Một hình vuông có diện tích bằng 1 dm^2 . Chia hình vuông đó thành 9 hình vuông bằng nhau và tô màu hình vuông ở chính giữa. Với mỗi hình vuông nhỏ chưa được tô màu, lại chia thành 9 hình vuông bằng nhau và tô màu hình vuông ở chính giữa. Cứ như thế, quá trình trên được lặp lại.



a) Diện tích phần được tô màu ở hình thứ nhất bằng $\frac{1}{9} \text{ dm}^2$.

b) Diện tích phần được tô màu ở hình thứ hai, thứ ba lần lượt bằng $\frac{17}{9} \text{ dm}^2$ và $\frac{207}{729} \text{ dm}^2$.

c) Công thức tính tổng diện tích phần được tô màu ở hình thứ n là $\left(\frac{1}{9}\right)^n$.

d) Nếu diện tích phần được tô màu bằng $\frac{26281}{59049}$ thì hình tương ứng là hình thứ 6.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = 2\cos x + x$.

a) $f(0) = 2; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = 2\sin x + 1$.

c) Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{\pi}{6}$.

d) Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$.

Câu 3: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ điểm A' đến $(AB'C')$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Khi đó:

a) $AA' = \frac{a}{2}$

b) $(AC', (ABB'A')) \approx 50^\circ$ (kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị).

c) Một mặt phẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng BC, cắt các cạnh CC' và BB' lần lượt tại

I và J. Với tỷ số $\frac{CI}{CC'} = \frac{x}{y}$ ($\frac{x}{y}$ là phân số tối giản), nếu $\frac{V_{A.BCIJ}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{6}$ thì ta có $x + y = 5$.

d) Với $CI = \frac{a}{4}$ thì $\cos((AIJ), (ABB'A')) = \frac{1}{10}$.

Câu 4: Một công ty phát triển giáo dục dự định in $a(a \in \mathbb{N})$ cuốn sách luyện đề minh họa cho học sinh. Công ty đã khảo sát và tính được chi phí để xuất bản a cuốn sách này được biểu diễn bởi hàm số: $C(a) = a^2 - 2000a + 25\,000\,000$ (đồng) và chi phí phát hành cho mỗi cuốn sách là 5000 đồng.

a) Chi phí xuất bản và phát hành cho 2000 cuốn sách luyện đề là 35 triệu đồng.

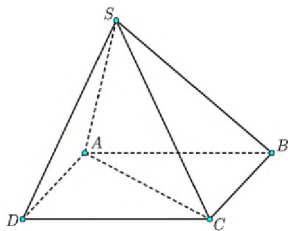
b) Chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn sách là: $T(a) = \frac{a^2 - 2000a + 25\,000\,000}{a}$.

c) Nếu công ty xuất bản số sách luyện đề lớn hơn 5000 cuốn thì chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn sách sẽ giảm.

d) Chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn sách luyện đề thấp nhất là 13000 đồng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2.

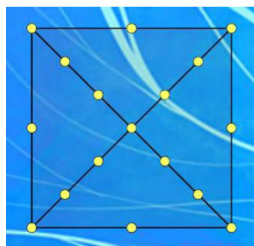
Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $3a^3$ và mặt đáy $ABCD$ là hình bình hành. Biết diện tích tam giác SAB bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Biết khoảng cách giữa SB và CD bằng $m \times a$ với $m \in \mathbb{R}$. Tính giá trị m và làm tròn đến hàng phần chục.



Câu 2: Trên một banner quảng cáo, người ta gắn 17 chiếc bóng đèn vào một khung hình vuông cũng như hai đường chéo của hình vuông đó. Biết rằng các bóng đèn trên một cạnh hoặc đường chéo thì chia cạnh hoặc đường chéo đó làm các đoạn bằng nhau (xem hình vẽ). Các bóng đèn sẽ sáng lên theo quy luật sau:

- Vào phút thứ nhất sẽ có ngẫu nhiên 1 bóng đèn sáng lên, đến cuối phút thứ nhất nó sẽ tắt.
- Vào phút thứ 2 sẽ có ngẫu nhiên 2 bóng đèn sáng lên, đến cuối phút thứ hai chúng sẽ tắt.
- Vào phút thứ 3 sẽ có ngẫu nhiên 3 bóng đèn sáng lên, đến cuối phút thứ ba chúng sẽ tắt.

Quy luật này cứ tiếp diễn cho đến phút thứ 17 và một chu trình mới sẽ được lặp lại. Tính xác suất để từ phút thứ 3 cho đến phút thứ 17, luôn có ít nhất 3 bóng đèn sáng lên ở 3 đỉnh của một tam giác (làm tròn đến hàng phần trăm).



----- HẾT -----

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề có 4 trang)

Họ tên thí sinh: Số báo danh:

Mã đề thi 102

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 4} = \frac{-3}{4}$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Tính tổng $S = a^2 - b^3$

A. $S = -951$

B. $S = 211$

C. $S = 1049$

D. $S = -49$

Câu 2: Vị trí của một vật chuyển động thẳng được cho bởi phương trình $s = f(t) = 2t^3 - 4t^2 + 2t$

Trong đó s tính bằng mét và t tính bằng giây. Tại thời điểm nào vật đứng yên?

A. $t = 3$

B. $t = \frac{1}{2}$

C. $t = 1$

D. $t = 2$

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = e^{e^x}$. Giá trị $f'(0) = ?$

A. e^e

B. e^{2e}

C. e^{e+1}

D. e

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \ln|x|$. Điểm A thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn tiếp

tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm A có hệ số góc bằng $-\frac{1}{8}$. Tung độ

của điểm A bằng

A. $2\ln 3$

B. $3\ln 3$

C. $3\ln 2$

D. $2\ln 2$

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Một lục giác $MNPQEF$ thỏa mãn các đỉnh M, N, P, Q, E, F lần lượt thuộc các cạnh $AD, AB, BB', B'C', C'D', D'D$ và $MN \parallel BD, NP \parallel AB'$. Chu vi của lục giác $MNPQEF$ nhỏ nhất bằng

A. $3\sqrt{2}$.

B. $2\sqrt{2}$.

C. $4\sqrt{2}$.

D. $6\sqrt{2}$.

Câu 6: Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

Tính tổng $S = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \dots + \frac{u_{10}}{10}$

A. $\frac{351}{1024}$

B. $\frac{8195}{6561}$

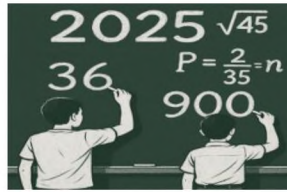
C. $\frac{4502}{6561}$

D. $\frac{29524}{59049}$

Câu 7: Năm 2025 là một năm đặc biệt đối với người yêu toán học, vì 2025 là một số chính phương (tạm gọi là “**năm chính phương**”), và đây cũng là năm chính phương duy nhất của thế kỷ 21; muốn có được **năm chính phương** tiếp theo, ta phải chờ thêm 91 năm nữa, tức là năm 2116. Để chào đón **năm chính phương** đặc biệt này, một thầy giáo dạy toán đã gọi hai em học sinh lên bảng và cho mỗi em viết ngẫu nhiên một số chính phương mà em biết từ 1 đến 2025. Xác suất để hai em viết ra hai số

chính phương giống nhau và đều là số chia hết cho cả 3 và 5 bằng $\frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{N}$ và $\frac{m}{n}$ tối giản

(biết cả hai em học sinh đều viết đúng số chính phương của mình và khả năng xuất hiện mỗi số chính phương là như nhau). Tính $2m + n$?



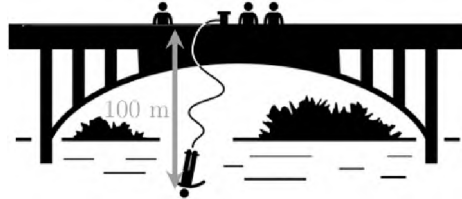
A. 327

B. 677

C. 826

D. 282

Câu 8: Một người nhảy Bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây dai đàn hồi an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài 100 m. Sau mỗi lần rơi xuống, nhờ sự đàn hồi của dây thì người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên. Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 8 lần kéo lên và lại rơi xuống (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét)?



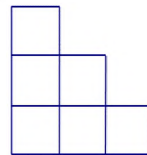
A. 640

B. 270

C. 370

D. 540

Câu 9: An đã tạo ra một cầu thang 3 bậc bằng 18 que tăm như hình minh họa. Vậy An cần thêm bao nhiêu que tăm để hoàn thành một cầu thang 5 bậc?



A. 32

B. 22

C. 18

D. 26

Câu 10: Khi Mặt Trăng quay quanh trái đất, mặt đối diện với trái đất thường chỉ được Mặt Trời chiếu sáng một phần. Các pha của Mặt Trăng mô tả mức độ phần bề mặt của nó được Mặt Trời chiếu sáng. Khi góc giữa Mặt Trời, Trái Đất và Mặt Trăng là α thì tỷ lệ F của phần Mặt Trăng được chiếu sáng cho bởi công thức $F = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)$.



Nếu ta chỉ lấy góc α nhọn thì khi trăng lưỡi liềm ($F = 0,25$) giá trị góc α là:

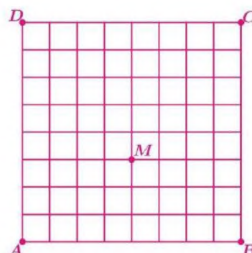
A. 0°

B. 45°

C. 30°

D. 60°

Câu 11: Một chất điểm chuyển động trên một hình vuông $ABCD$ kích thước 8×8 (cm). Chất điểm di chuyển từ A đến C theo nguyên tắc: mỗi lần di chuyển là một bước nhảy 1 cm sang phải hoặc lên trên theo các đường kẻ ngang hoặc thẳng đứng trong hình. Số cách để chất điểm đi qua vị trí M được đánh dấu trong hình vẽ bằng bao nhiêu?



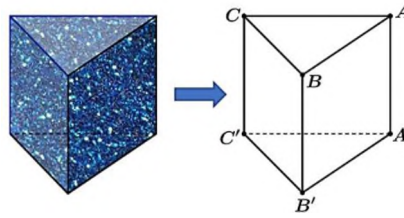
A. 12870

B. 1820

C. 4410

D. 8460

Câu 12: Một khối đá có dạng hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ với cạnh đáy bằng 2 dm , khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ dm}$. Tìm khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy của khối đá hình lăng trụ đã cho theo đơn vị dm .



A. 1

B. 2

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\sqrt{3}$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 2\sin x - x$.

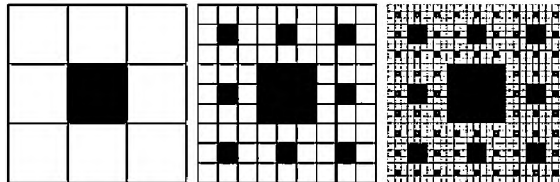
a) $f(0) = 0; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \frac{\pi}{2}$

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = -2\cos x - 1$.

c) Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{\pi}{3}$.

d) Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$.

Câu 2: Một hình vuông có diện tích bằng 1 dm^2 . Chia hình vuông đó thành 9 hình vuông bằng nhau và tô màu hình vuông ở chính giữa. Với mỗi hình vuông nhỏ chưa được tô màu, lại chia thành 9 hình vuông bằng nhau và tô màu hình vuông ở chính giữa. Cứ như thế, quá trình trên được lặp lại.



a) Diện tích phần được tô màu ở hình thứ nhất bằng $\frac{1}{9}\text{ dm}^2$.

b) Diện tích phần được tô màu ở hình thứ hai, thứ ba lần lượt bằng $\frac{17}{9}\text{ dm}^2$ và $\frac{207}{729}\text{ dm}^2$.

c) Công thức tính tổng diện tích phần được tô màu ở hình thứ n là $\left(\frac{1}{9}\right)^n$.

d) Nếu diện tích phần được tô màu bằng $\frac{26281}{59049}$ thì hình tương ứng là hình thứ 6.

Câu 3: Một công ty phát triển giáo dục dự định in $a(a \in \mathbb{N})$ cuốn sách luyện đề minh họa cho học sinh. Công ty đã khảo sát và tính được chi phí để xuất bản a cuốn sách này được biểu diễn bởi hàm số: $C(a) = a^2 - 2000a + 25000000$ (đồng) và chi phí phát hành cho mỗi cuốn sách là 5000 đồng.

a) Chi phí xuất bản và phát hành cho 2000 cuốn sách luyện đề là 35 triệu đồng.

b) Chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn sách là: $T(a) = \frac{a^2 - 2000a + 25000000}{a}$.

c) Nếu công ty xuất bản số sách luyện đề lớn hơn 5000 cuốn thì chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn sách sẽ giảm.

d) Chi phí xuất bản và phát hành cho mỗi cuốn sách luyện đề thấp nhất là 13000 đồng.

Câu 4: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ điểm A' đến $(AB'C')$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Khi đó:

a) $AA' = \frac{a}{2}$

b) $(AC', (ABB'A')) \approx 50^\circ$ (kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị).

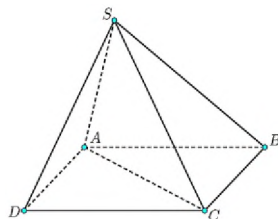
c) Một mặt phẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng BC , cắt các cạnh CC' và BB' lần lượt tại

I và J . Với tỷ số $\frac{CI}{CC'} = \frac{x}{y}$ ($\frac{x}{y}$ là phân số tối giản), nếu $\frac{V_{A.BCIJ}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{6}$ thì ta có $x+y=5$.

d) Với $CI = \frac{a}{4}$ thì $\cos((AIJ), (ABB'A')) = \frac{1}{10}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 2.

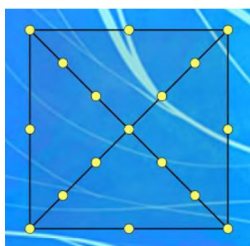
Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $4a^3$ và mặt đáy $ABCD$ là hình bình hành. Biết diện tích tam giác SAB bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Biết khoảng cách giữa SA và CD bằng $m \times a$ với $m \in \mathbb{R}$. Tính giá trị m và làm tròn đến hàng phần chục.



Câu 2: Trên một banner quảng cáo, người ta gắn 17 chiếc bóng đèn vào một khung hình vuông cũng như hai đường chéo của hình vuông đó. Biết rằng các bóng đèn trên một cạnh hoặc đường chéo thì chia cạnh hoặc đường chéo đó làm các đoạn bằng nhau (xem hình vẽ). Các bóng đèn sẽ sáng lên theo quy luật sau:

- Vào phút thứ nhất sẽ có ngẫu nhiên 1 bóng đèn sáng lên, đến cuối phút thứ nhất nó sẽ tắt.
- Vào phút thứ 2 sẽ có ngẫu nhiên 2 bóng đèn sáng lên, đến cuối phút thứ hai chúng sẽ tắt.
- Vào phút thứ 3 sẽ có ngẫu nhiên 3 bóng đèn sáng lên, đến cuối phút thứ ba chúng sẽ tắt.

Quy luật này cứ tiếp diễn cho đến phút thứ 17 và một chu trình mới sẽ được lặp lại. Tính xác suất để từ phút thứ 3 cho đến phút thứ 17, luôn có ít nhất 3 bóng đèn sáng lên ở 3 đỉnh của một tam giác (làm tròn đến hàng phần trăm).



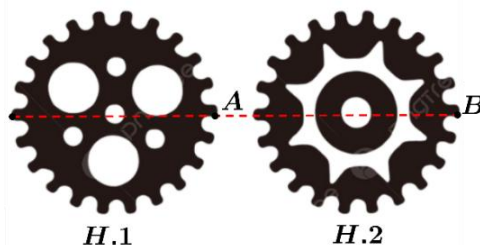
----- HẾT -----

(Đề thi có 01 trang)

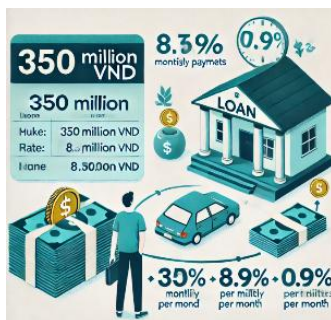
Họ và tên: Số báo danh:

Câu 1.(2.0 đ) Cho hình chóp SABCD có 2 mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với (ABCD). Đáy ABCD là hình thoi có cạnh a , $BAD = 120^\circ$, Góc giữa 2 đường thẳng SB và CD bằng 30° . Tính giá trị tan của góc phẳng nhị diện $[A, SD, C]$.

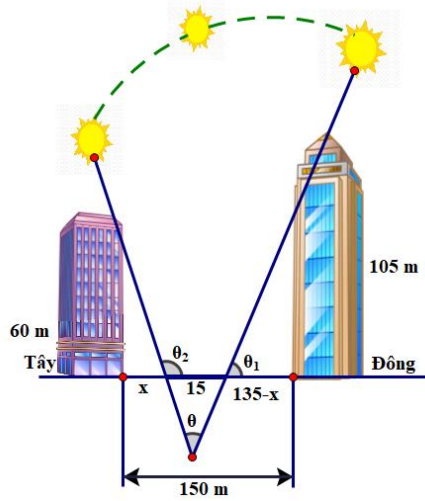
Câu 2. (2.5 đ) Hình vẽ dưới đây là hai bánh răng của một động cơ, chúng có cùng kích thước. Khi động cơ hoạt động, hai bánh răng quay đều cùng chiều. Biết tốc độ quay của bánh răng ở hình 2 gấp đôi tốc độ quay của bánh răng ở hình 1 và phương trình biểu thị độ cao của điểm A ở bánh răng thứ nhất là $h = 2R + R\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)$ (trong đó R là bán kính bánh răng, t là thời gian tính bằng giây, h là độ cao của điểm A). Giả sử tại thời điểm bắt đầu khởi động, hai điểm A và B có độ cao bằng nhau. Sau bao nhiêu giây kể từ thời điểm đầu tiên sau khi động cơ hoạt động hai điểm A, B có độ cao bằng nhau. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



Câu 3. (2.5 đ) Một người vay ngân hàng số tiền 350 triệu đồng, vào mỗi cuối tháng tính từ ngày gửi người đó trả góp 8 triệu đồng. Lãi suất cho số tiền chưa trả là 0,79% một tháng. Biết số tiền phải trả ở kỳ cuối là m (triệu đồng) thì người đó trả hết nợ ngân hàng. Tính giá trị m (làm tròn đến hàng phần trăm).

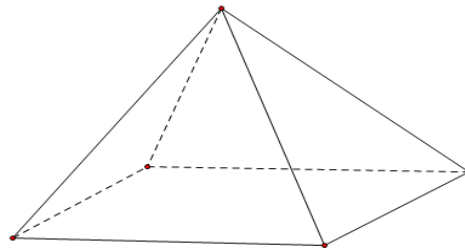


Câu 4. (2.0 đ) Một vườn hoa có chiều dài 15 mét được xây dựng giữa 2 tòa nhà ở 2 hướng Đông và Tây. Biết rằng 2 tòa nhà cách nhau 150 mét và độ cao của tòa nhà hướng Đông là 105 mét, độ cao của tòa nhà hướng Tây là 60 mét. Người ta tìm địa điểm trồng hoa cách tòa nhà ở hướng Tây x (mét) để thời gian chiếu sáng vào vườn hoa là lớn nhất. Giá trị của x bằng bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị). Biết thời gian ánh sáng mặt trời chiếu vào vườn hoa đạt lớn nhất khi góc θ lớn nhất (như hình vẽ).



Câu 5. (3.0 đ)

a. Một túp lều có dạng hình chóp với đáy là hình thoi cạnh bằng $4m$. Trong bốn mặt bên thì có hai mặt bên kề nhau là hai tam giác đều (như hình vẽ). Tính chiều cao của túp lều để khoảng không gian bên trong nó là lớn nhất.



b. Gieo 4 con xúc sắc cân đối, đồng chất. Ký hiệu a_i ($1 \leq a_i \leq 6$) là số chấm xuất hiện trên con xúc sắc thứ i ($i = 1, 2, 3, 4$). Tính xác suất để có thể chia $a_1; a_2; a_3; a_4$ thành 2 nhóm có tổng bằng nhau?

----- HẾT -----

Câu\Mã đề	101	103	105	107	102	104	106	108
1	A	B	D	B	A	B	A	C
2	B	C	B	B	C	C	C	C
3	C	B	C	C	D	A	D	A
4	D	D	A	B	C	B	A	C
5	A	D	A	B	A	A	A	B
6	B	A	D	A	D	A	A	A
7	D	B	C	D	B	C	A	C
8	B	C	D	A	A	A	A	C
9	D	C	A	B	B	D	D	B
10	C	B	A	D	D	B	B	D
11	D	C	A	A	C	A	C	B
12	A	A	C	C	A	C	A	B
13	DSSS	DSDD	DSSD	DSDD	DSDD	DSDD	DSDD	DSSS
14	DSDD	DSSD	DSDD	DSSS	DSSS	DSSD	DSSD	DSSD
15	SSDS	SSDS	SSDS	SSDS	DSSD	SSDS	SSDS	SSDS
16	DSSD	DSSS	DSSS	DSSD	SSDS	DSSS	DSSS	DSDD
17	10,4	0,84	0,84	0,84	6,9	6,9	0,84	0,84
18	0,84	10,4	10,4	10,4	0,84	0,84	6,9	6,9

*** Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ điểm A' đến

$(AB'C')$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Khi đó:

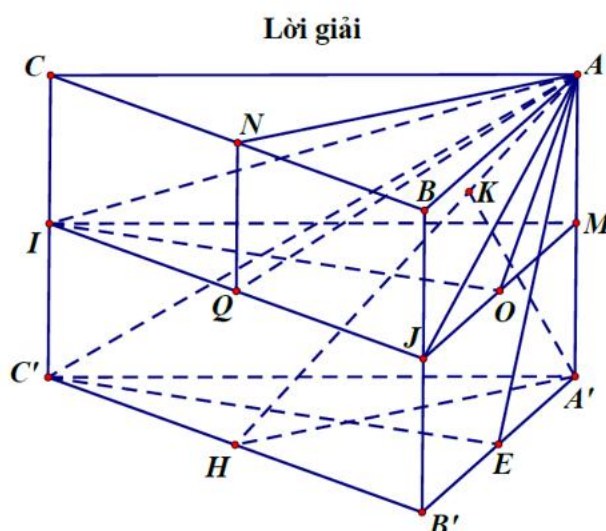
a) $AA' = \frac{a}{2}$.

b) $(AC', (ABB'A')) \approx 50^\circ$ (kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị).

c) Một mặt phẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng BC , cắt các cạnh CC' và BB' lần lượt tại

I và J . Với tỷ số $\frac{CI}{CC'} = \frac{x}{y}$ ($\frac{x}{y}$ là phân số tối giản), nếu $\frac{V_{A.BCII}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{6}$ thì ta có $x + y = 5$.

d) Với $CI = \frac{a}{4}$ thì $\cos((AIJ), (ABB'A')) = \frac{1}{10}$.



a) Trong mặt phẳng $(A'B'C')$, kẻ $A'H \perp B'C'$ tại H .

Trong mặt phẳng $(AA'H)$, kẻ $A'K \perp AH$ tại K . (1)

Ta có: $\begin{cases} B'C' \perp A'H \\ B'C' \perp AA' (\text{do } AA' \perp (A'B'C')) \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AA'H) \Rightarrow A'K \perp B'C' (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $A'K \perp (AB'C')$ hay $d(A', (AB'C')) = A'K = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $\begin{cases} B'C' \perp A'H \\ B'C' \perp AA' (\text{do } AA' \perp (A'B'C')) \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AA'H) \Rightarrow A'K \perp B'C' (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $A'K \perp (AB'C')$ hay $d(A', (AB'C')) = A'K = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác $A'B'C'$ đều có đường cao $A'H = \frac{2a \cdot \sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Tam giác $AA'H$ vuông tại A' có đường cao $A'K$ nên

$$\frac{1}{A'K^2} = \frac{1}{A'H^2} + \frac{1}{A'A^2} \Rightarrow \frac{1}{\frac{3a^2}{4}} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{A'A^2} \Rightarrow A'A = a.$$

Vậy a) **sai**.

b) Gọi E là trung điểm của $A'B' \Rightarrow \tan(\angle AC', (\angle ABB'A')) = \tan \angle C'AE = \frac{C'E}{AE} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\angle AC', (\angle ABB'A')) \approx 51^\circ$

Vậy b) **sai**.

c) Thể tích khối lăng trụ là: $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\Delta ABC} = a \cdot a^2 \sqrt{3} = a^3 \sqrt{3}$ (đơn vị thể tích).

Mà $V_{A.BC.IJ} = \frac{1}{3} \cdot AN \cdot BC \cdot CI = \frac{1}{3} \cdot a \sqrt{3} \cdot 2a \cdot CI = \frac{1}{6} a^3 \sqrt{3} \Rightarrow CI = \frac{a}{4} \Rightarrow \frac{CI}{CC'} = \frac{1}{4} \Rightarrow x + y = 5$

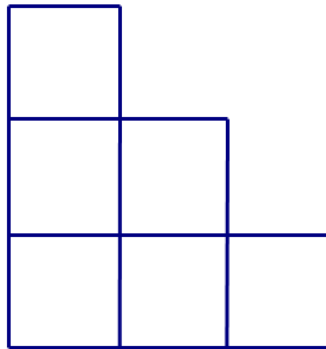
Vậy c) **đúng**.

d) Qua I kẻ đường thẳng song song với AC , cắt AA' tại M . Gọi O, Q lần lượt là trung điểm của JM và IJ , suy ra O là hình chiếu của I lên mặt phẳng $(ABB'A')$.

Ta có: Với $CI = \frac{a}{4}$ thì $\cos(\angle AIJ, (\angle ABB'A')) = \frac{S_{\Delta AOJ}}{S_{\Delta AIJ}} = \frac{\frac{1}{2} AM \cdot JO}{\frac{1}{2} AQ \cdot JI} = \frac{1}{14}$

Vậy d) **sai**.

* An đã tạo ra một cầu thang 3 bậc bằng 18 que tăm như hình minh họa. Vậy An cần thêm bao nhiêu que tăm để hoàn thành một cầu thang 5 bậc?



Lời giải

Trả lời: 22.

Cách 1:

Chúng ta có thể thấy rằng cầu thang 1 bậc cần 4 tăm và cầu thang 2 bậc cần 10 tăm.

Do đó, để đi từ cầu thang 1 bậc đến 2 bậc cần thêm 6 tăm và để đi từ cầu thang 2 bậc đến 3 bậc cần thêm 8 tăm.

Áp dụng mô hình này, để đi từ cầu thang 3 bậc đến 4 bậc cần thêm 10 tăm và để đi từ cầu thang 4 bậc đến 5 bậc cần thêm 12 tăm.

Vậy bạn An cần thêm là $10 + 12 = 22$ tăm.

Cách 2:

Ngoài ra, chúng ta có thể thấy với cầu thang 3 bậc có $2[2(3) + 2 + 1] = 18$ tăm.

Tổng quát, chúng ta thấy rằng cầu thang có x bậc có $2[2x + (x-1) + (x-2) + \dots + 1]$ tăm.

Vì vậy, đối với $x = 5$ bậc, chúng ta có $2[2(5) + 4 + 3 + 2 + 1] = 40$ tăm.

Vậy bạn An cần thêm là $40 - 18 = 22$ tăm.

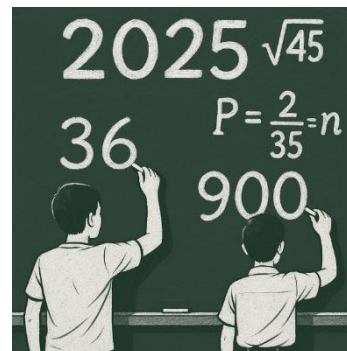
Cách 3:

Nếu quá lười để đưa ra công thức tính số lượng que cần thiết cho một số bước nhất định, ta có thể thấy rằng để đến được 4 các bước, ta thêm hai khối có ba que (phía trên và bên phải) và hai khối nữa có hai que để tạo thành các bước. Điều này sẽ thêm $2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 10$ que.

Sau đó, để đến được 5 các bước, ta thêm hai khối cạnh nữa có 3 que và 3 nhiều khối nữa có hai que. Ta thêm $2.3 + 3.2 = 12$ nhiều hơn nữa để tăng tổng cộng $10 + 12 = 22$.

* Năm 2025 là một năm đặc biệt đối với người yêu toán học, vì 2025 là một số chính phương (tạm gọi là “**năm chính phương**”), và đây cũng là năm chính phương duy nhất của thế kỷ 21; muốn có được **năm chính phương** tiếp theo, ta phải chờ thêm 91 năm nữa, tức là năm 2116. Để chào đón **năm chính phương** đặc biệt này, một thầy giáo dạy toán đã gọi hai em học sinh lên bảng và cho mỗi em viết ngẫu nhiên một số chính phương mà em biết từ 1 đến 2025. Xác suất để hai em viết ra hai số chính phương giống nhau và đều là số chia

hết cho cả 3 và 5 bằng $\frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{N}$ và $\frac{m}{n}$ tối giản (biết cả hai em học sinh đều viết đúng số chính phương của mình và khả năng xuất hiện mỗi số chính phương là như nhau). Tính $2m + n$.



Hướng dẫn giải

Các năm chính phương cho đến 2025 là: $1^2; 2^2; 3^2; \dots; 45^2$, có 45 số như thế.

Mỗi em học sinh có 45 lựa chọn để viết một số chính phương nên $n(\Omega) = 45^2$.

Các số chính phương chia hết cho cả 3 và 5 là $15^2 = 225; 30^2 = 900; 45^2 = 2025$.

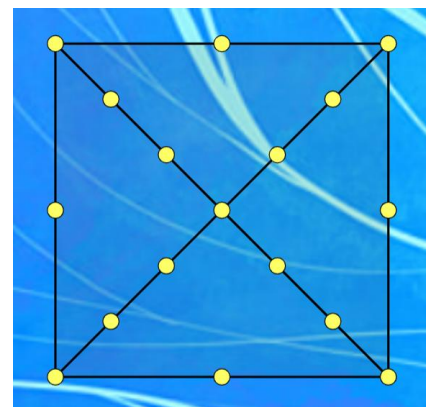
Số cách để cả hai em viết ra cùng một số chính phương chia hết cho 3 và 5 là $n(A) = 3 \cdot 1 = 3$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{45^2} = \frac{1}{675} = \frac{m}{n} \Rightarrow \boxed{2m + n = 677}$$

Xác suất cần tính là

** Trên một banner quảng cáo, người ta gắn 17 chiếc bóng đèn vào một khung hình vuông cũng như hai đường chéo của hình vuông đó. Biết rằng các bóng đèn trên một cạnh hoặc đường chéo thì chia cạnh hoặc đường chéo đó làm các đoạn bằng nhau (xem hình vẽ). Các bóng đèn sẽ sáng lên theo quy luật sau:

- Vào phút thứ nhất sẽ có ngẫu nhiên 1 bóng đèn sáng lên, đến cuối phút thứ nhất nó sẽ tắt.
- Vào phút thứ 2 sẽ có ngẫu nhiên 2 bóng đèn sáng lên, đến cuối phút thứ hai chúng sẽ tắt.
- Vào phút thứ 3 sẽ có ngẫu nhiên 3 bóng đèn sáng lên, đến cuối phút thứ ba chúng sẽ tắt.



Quy luật này cứ tiếp diễn cho đến phút thứ 17 và một chu trình mới sẽ được lặp lại. Tính xác suất để từ phút thứ 3 cho đến phút thứ 17, luôn có ít nhất 3 bóng đèn sáng lên ở 3 đỉnh của một tam giác (làm tròn đến hàng phần trăm).

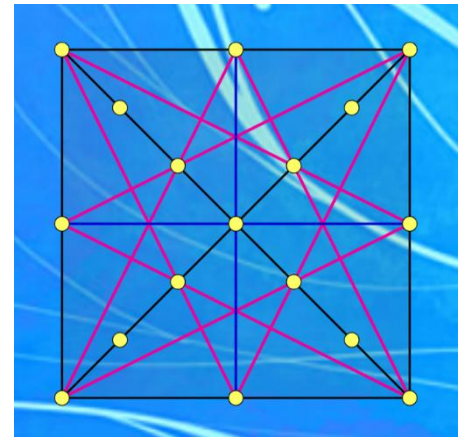
Hướng dẫn giải

Gọi A_i là biến cố: “Tại phút thứ i thì có ít nhất 3 bóng đèn sáng lên ở 3 đỉnh của tam giác”; khi đó $i \in \{3; 4; \dots; 17\}$.

Phút thứ 3:

- Số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega_3) = C_{17}^3$.
- Số khả năng để 3 bóng đèn sáng lên là 3 đỉnh tam giác: $n(A_3) = C_{17}^3 - 2C_7^3 - 4 - 10 = 596$.

(Ta loại trừ các trường hợp 3 điểm thẳng hàng gồm: 2 trường hợp 3 điểm thuộc các đường chéo, 4 trường hợp 3 điểm thuộc các cạnh, 10 trường hợp 3 điểm thẳng hàng khi vẽ thêm hình).



- Xác suất tương ứng là $P(A_3) = \frac{n(A_3)}{n(\Omega_3)} = \frac{596}{C_{17}^3} = \frac{299}{340}$.

Phút thứ 4: Xác suất tương ứng là $P(A_4) = \frac{C_{17}^4 - 2C_7^4}{C_{17}^4} = \frac{33}{34}$.

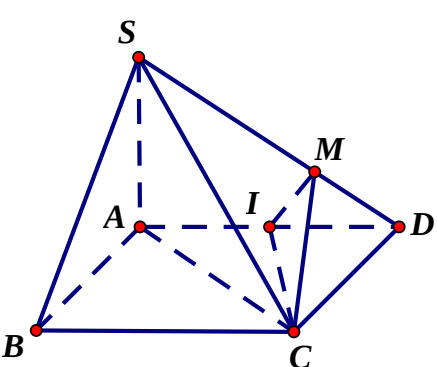
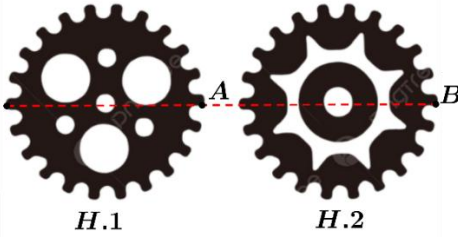
Phút thứ 5: Xác suất tương ứng là $P(A_5) = \frac{C_{17}^5 - 2C_7^5}{C_{17}^5} = \frac{439}{442}$.

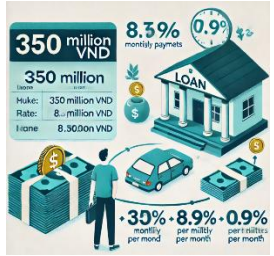
Phút thứ 6: Xác suất tương ứng là $P(A_6) = \frac{C_{17}^6 - 2C_7^6}{C_{17}^6} = \frac{883}{884}$.

Phút thứ 7: Xác suất tương ứng là $P(A_7) = \frac{C_{17}^7 - 2}{C_{17}^7} = \frac{9723}{9724}$.

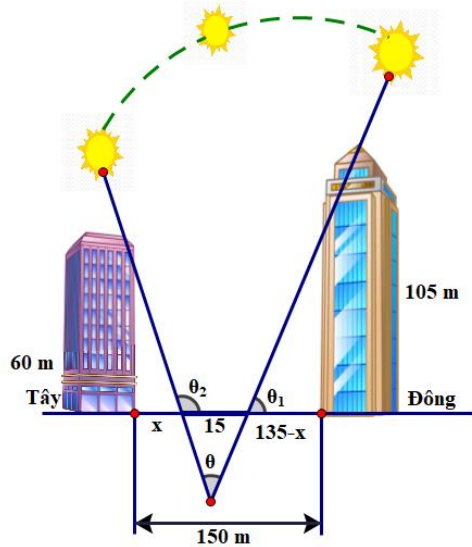
Từ phút thứ 8 trở đi thì chắc chắn luôn có ít nhất 3 bóng sáng lên ở 3 đỉnh của tam giác.

Xác suất cần tìm là $P(A) = P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_{17}) \approx \boxed{0,84}$.

CÂU	NỘI DUNG	ĐIỂM
1 2.0 đ	Cho hình chóp SABCD có 2 mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với (ABCD). Đáy ABCD là hình thoi có cạnh a, $\angle BAD = 120^\circ$, Góc giữa 2 đường thẳng SB và CD bằng 30°. Tính giá trị tan của góc phẳng nhị diện $[A, SD, C]$.  Ta có $SA \perp (ABCD)$; $(SB, CD) = \angle SBA = 30^\circ$; Tam giác ACD đều cạnh a. $SA = AB \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Gọi I là trung điểm AD, từ I hạ IM vuông góc với SD Dễ thấy $[A, SD, C] = \angle IMC$ $IC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $IM = \frac{SA \cdot ID}{SD} = \frac{\frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + a^2}} = \frac{a}{4}$ $\tan \angle IMC = \frac{IC}{IM} = 2\sqrt{3}$	0.5 0.5 0.5 0.5
2 2.5 đ	Hình vẽ dưới đây là hai bánh răng của một động cơ, chúng có cùng kích thước. Khi động cơ hoạt động, hai bánh răng quay đều cùng chiều. Biết tốc độ quay của bánh răng ở hình 2 gấp đôi tốc độ quay của bánh răng ở hình 1 và phương trình biểu thị độ cao của điểm A ở bánh răng thứ nhất là $h = 2R + R \sin\left(\frac{\pi t}{5}\right)$ (trong đó R là bán kính bánh răng, t là thời gian tính bằng giây, h là độ cao của điểm A). Giả sử tại thời điểm bắt đầu khởi động, hai điểm A và B có độ cao bằng nhau. Sau bao nhiêu giây kể từ thời điểm đầu tiên sau khi động cơ hoạt động hai điểm A, B có độ cao bằng nhau. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)  Vì hai bánh răng có cùng kích thước, tốc độ của bánh răng thứ hai gấp đôi tốc độ của bánh răng thứ nhất và tại thời điểm ban đầu, hai điểm A, B có độ cao bằng nhau nên phương trình biểu thị độ cao của điểm B là $h' = 2R + R \sin\left(\frac{2\pi t}{5}\right)$. Hai điểm A, B có độ cao bằng nhau khi $h = h'$. Ta có phương trình:	0.5 0.5

	$2R + R\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right) = 2R + R\sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{5}t = \frac{\pi}{5}t + k2\pi \\ \frac{2\pi}{5}t = \pi - \frac{\pi}{5}t + k2\pi \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \pi t = k10\pi \\ 3\pi t = 5\pi + k10\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10k \\ t = \frac{5}{3} + k\frac{10}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$ Họ nghiệm thứ nhất có nghiệm dương nhỏ nhất là $t = 10$. Họ nghiệm thứ hai có nghiệm dương nhỏ nhất là $t = \frac{5}{3}$. Vậy, thời điểm đầu tiên sau khi động cơ hoạt động, hai điểm A, B có độ cao bằng nhau là $t = \frac{5}{3} \approx 1,67$ giây.	0.5 0.5 0.5
3 2.5 đ	Một người vay ngân hàng số tiền 350 triệu đồng, vào mỗi cuối tháng tính từ ngày gửi người đó trả góp 8 triệu đồng. Lãi suất cho số tiền chưa trả là 0,79% một tháng. Biết số tiền phải trả ở kỳ cuối là m (triệu đồng) thì người đó trả hết nợ ngân hàng. Tính giá trị m (làm tròn đến hàng phần trăm).  Vay vốn rồi hàng tháng trả một số tiền cố định: Nếu khách hàng vay ngân hàng số tiền A (đồng) với lãi suất $r\%/tháng$. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi lần hoàn nợ đúng số tiền X (đồng). Số tiền khách hàng còn nợ sau n tháng là: $T_n = A(1+r)^n - \frac{X((1+r)^n - 1)}{r} \quad (\text{đồng}).$ 1. Gửi tiền vào ngân hàng rồi rút ra hàng tháng số tiền cố định: Nếu khách hàng gửi vào ngân hàng số tiền A (đồng) với lãi suất $r\%/tháng$. Vào ngày ngân hàng tính lãi mỗi tháng thì rút ra X đồng. Số tiền thu được sau n tháng là: $T_n = A(1+r)^n - \frac{X((1+r)^n - 1)}{r} \quad (\text{đồng}).$	
	Khách hàng vay số tiền ban đầu $A = 350$ (triệu đồng); lãi suất $r = 0,0079$; sau mỗi tháng tính từ ngày gửi khách hàng trả khoản tiền cố định $X = 8$ (triệu đồng). Số tiền khách hàng còn nợ được tính theo công thức $T_n = 350 \cdot 1,0079^n - \frac{8(1,0079^n - 1)}{0,0079}$. Xét $T_n = 0 \Rightarrow 350 \cdot 1,0079^n - \frac{8(1,0079^n - 1)}{0,0079} = 0 \Rightarrow n \approx 53,9$. Xét tháng gần cuối trước khi khách hàng trả hết nợ (tháng thứ 53). Số tiền còn nợ là $T_{53} = 350 \cdot 1,0079^{53} - \frac{8(1,0079^{53} - 1)}{0,0079} \approx 7,08$ (triệu). Lần tính lãi cuối cùng của ngân hàng cũng là số tiền cuối cùng mà khách hàng phải trả, khi đó $m = T_{53} \cdot (1 + 0,0079) \approx 7,14$ (triệu đồng).	0.5 0.5 0.5 0.5
4 2.0 đ	Một vườn hoa có chiều dài 15 mét được xây dựng giữa 2 tòa nhà ở 2 hướng Đông và Tây. Biết rằng 2 tòa nhà cách nhau 150 mét và độ cao của tòa nhà hướng Đông là 105 mét, độ cao của tòa nhà hướng Tây là 60 mét. Người ta tìm địa điểm trồng hoa cách tòa nhà ở	

hướng Tây x (mét) để thời gian chiếu sáng vào vườn hoa là lớn nhất. Giá trị của x bằng bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị). Biết thời gian ánh sáng mặt trời chiếu vào vườn hoa đạt lớn nhất khi góc θ lớn nhất (như hình vẽ).



Ta có: $\theta = \pi - \angle CHK - \angle HKC = \pi - \angle AHD - \angle BKE$.

$$\tan \theta = \tan(\pi - \angle AHD - \angle BKE) = -\tan(\angle AHD + \angle BKE) = -\frac{\tan \angle AHD + \tan \angle BKE}{1 - \tan \angle AHD \cdot \tan \angle BKE}$$

$$= -\frac{\frac{60}{x} + \frac{105}{135-x}}{1 - \frac{60}{x} \cdot \frac{105}{135-x}} = -\frac{\frac{8100+45x}{x(135-x)}}{\frac{x(135-x) - 60 \cdot 105}{x(135-x)}} = -\frac{8100+45x}{x(135-x) - 60 \cdot 105} = \frac{8100+45x}{x^2 - 135x + 6300}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{8100+45x}{x^2 - 135x + 6300}$ với $x \in (0; 135)$.

Ta có: $f(x) = \frac{45x+8100}{x^2 - 135x + 6300}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{45(x^2 - 135x + 6300) - (45x + 8100)(2x - 135)}{(x^2 - 135x + 6300)^2}$$

$$= \frac{(45x^2 - 6075x + 283500) - (90x^2 + 10125 - 1093500)}{(x^2 - 135x + 6300)^2}$$

$$= \frac{-45x^2 - 16200x + 1377000}{(x^2 - 135x + 6300)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -45x^2 - 16200x + 1377000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 70,998 \\ x \approx -430,998(l) \end{cases}$$

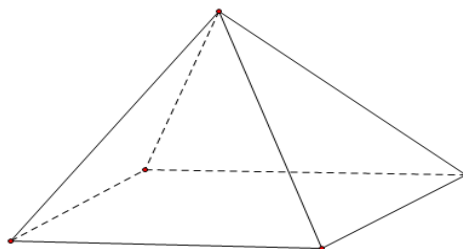
Bảng biến thiên:

x	0	70,998	135
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

Vậy giá trị của x là 71.

5
3.0 đ

a. Một túp lều có dạng hình chóp với đáy là hình thoi cạnh bằng 4m. Trong bốn mặt bên thì có hai mặt bên kề nhau là hai tam giác đều (như hình vẽ). Tính chiều cao của túp lều để khoảng không gian bên trong nó là lớn nhất.

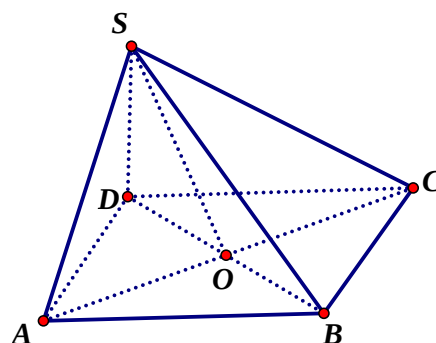


b. Gieo 4 con xúc sắc cân đối, đồng chất. Ký hiệu a_i ($1 \leq a_i \leq 6$) là số chấm xuất hiện trên con xúc sắc thứ i ($i = 1, 2, 3, 4$). Tính xác suất để có thể chia $a_1; a_2; a_3; a_4$ thành 2 nhóm có tổng bằng nhau?

a. Không mất tính tổng quát giả sử 2 tam giác mặt bên kề nhau đều là tam giác SCD và SCB. Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD, dễ thấy $SO = OA = OC$ nên tam giác SAC vuông tại S.

$$\text{Đặt } SA = x \Rightarrow h = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 16}} \Rightarrow V = \frac{2x\sqrt{48 - x^2}}{3}.$$

$$V_{\max} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{6} \Rightarrow h = \frac{4\sqrt{15}}{5} (m)$$



b.

Ta sẽ tính số bộ 4 số thoả mãn ta có thể chia 4 số đó thành 2 cặp số có tổng bằng nhau.

Gọi $A_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}$, $A_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_3 = x_2 + x_4\}$, $A_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_4 = x_3 + x_2\}$. Ta cần tính $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$.

Trước hết ta tính $|A_1|$, do vai trò các số hạng là tương đương nên $|A_1| = |A_2| = |A_3|$

- Với $k \in \{2, \dots, 7\}$, số bộ (x_1, x_2) (tương tự (x_3, x_4)) thoả mãn $x_1 + x_2 = k$ là $k - 1$ ($1 \leq x_1 \leq k - 1$ nên có $k - 1$ cách chọn x_1 , còn $x_2 = k - x_1$ có 1 cách chọn). Như vậy số bộ (x_1, x_2, x_3, x_4) thoả mãn $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = k$ là $(k - 1)^2$.
- Với $k \in \{8, \dots, 12\}$, số bộ (x_1, x_2) (tương tự (x_3, x_4)) thoả mãn $x_1 + x_2 = k$ là $13 - k$ bộ (do $k - 6 \leq x_1 \leq 6$ nên có $13 - k$ cách chọn x_1 , còn $x_2 = k - x_1$ có 1 cách chọn). Như vậy số bộ (x_1, x_2, x_3, x_4) thoả mãn $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = k$ là $(13 - k)^2$.

Như vậy

$$|A_1| = \sum_{k=2}^7 (k - 1)^2 + \sum_{k=8}^{12} (13 - k)^2 = 146 = |A_2| = |A_3|$$

Tiếp theo ta tính $|A_1 \cap A_2|$, số bộ (x_1, x_2, x_3, x_4) thoả mãn $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ và $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$. Do vai trò của các số hạng là tương đương nên $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_3 \cap A_2|$. Ta có $(x_1 + x_2) - (x_1 + x_3) = (x_3 + x_4) - (x_2 + x_4)$ hay $x_2 - x_3 = x_3 - x_2$. Từ đó ta suy ra $x_2 = x_3$ và $x_1 = x_4$. Có 6 cách chọn số x_1 và 6 cách chọn số x_2 , do $x_1 = x_4$ và $x_2 = x_3$ nên chỉ có 1 cách chọn số x_3 và 1 cách chọn số x_4 . Khi đó theo quy tắc nhân

$$|A_1 \cap A_2| = 6 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 = 36 = |A_1 \cap A_3| = |A_3 \cap A_2|$$

	Cuối cùng ta tính $A_1 \cap A_2 \cap A_3$, số bộ thỏa mãn $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$ và $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$. Lập luận tương tự ta suy ra $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Khi đó $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = 6$ (chỉ có 6 bộ từ $(1,1,1,1)$ đến $(6,6,6,6)$). Từ đó số bộ (x_1, x_2, x_3, x_4) thỏa mãn ta có thể chia 4 số này thành 2 cặp số có tổng bằng nhau là $ A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 + A_2 + A_3 - A_1 \cap A_2 - A_2 \cap A_3 - A_1 \cap A_3 + A_1 \cap A_2 \cap A_3 $ $= 3 \cdot 146 - 3 \cdot 36 + 6 = 336.$ Suy ra xác suất ta có thể chia 4 số thành 2 cặp số có tổng bằng nhau là $\frac{336}{6^4} = \frac{7}{27}$ Cộng thêm với xác suất ta có một số bằng tổng ba số còn lại, xác suất để ta có thể chia 4 số thành 2 phần có tổng bằng nhau là $\frac{5}{81} + \frac{7}{27} = \frac{26}{81}$ —	0.25 0.25 0.25
--	---	--