

Câu 1 (1,0 điểm). Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-3}$.

Câu 2 (1,0 điểm). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$, biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x + 9y - 3 = 0$.

Câu 3 (1,0 điểm).

a) Giải bất phương trình $\log_2(x-3) - \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \leq 1$.

b) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1+2i)z + (1-2\bar{z})i = 1+3i$. Tính môđun của z .

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{3+4\sin x - \cos 2x} dx$.

Câu 5 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$. Tìm tọa độ giao điểm A của d với (P) và lập phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm A , vuông góc với đường thẳng d và nằm trong mặt phẳng (P) .

Câu 6 (1,0 điểm).

a) Giải phương trình $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}\cos 2x = -2$.

b) Giải U21 Quốc tế báo Thanh Niên – Cúp Clear Men 2015 quy tụ 6 đội bóng gồm: ĐKVĐ U21 HA.GL, U21 Singapore, U21 Thái Lan, U21 Báo Thanh niên Việt Nam, U21 Myanmar và U19 Hàn Quốc. Các đội chia thành 2 bảng A, B, mỗi bảng 3 đội. Việc chia bảng được thực hiện bằng cách bốc thăm ngẫu nhiên. Tính xác suất để hai đội tuyển U21 HA.GL và U21 Thái Lan nằm ở hai bảng khác nhau.

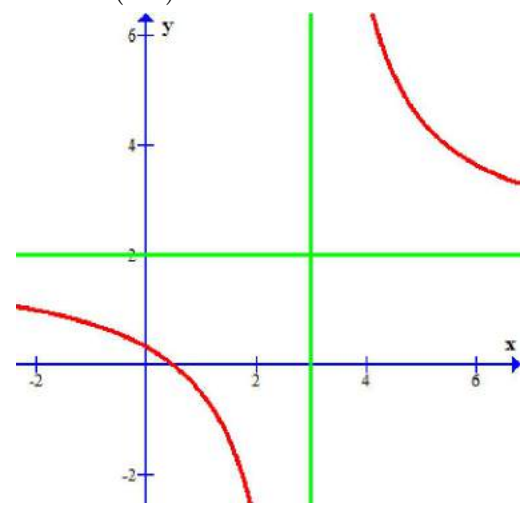
Câu 7 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=2a$, $AD=a$, K là hình chiếu vuông góc của B lên đường chéo AC , các điểm H, M lần lượt là trung điểm của AK và DC , SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và MH .

Câu 8 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC , các điểm $M(2; -1)$, N lần lượt là trung điểm của HB và HC ; điểm $K\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ là trực tâm tam giác AMN . Tìm tọa độ điểm C , biết rằng điểm A có tung độ âm và thuộc đường thẳng $d: x+2y+4=0$.

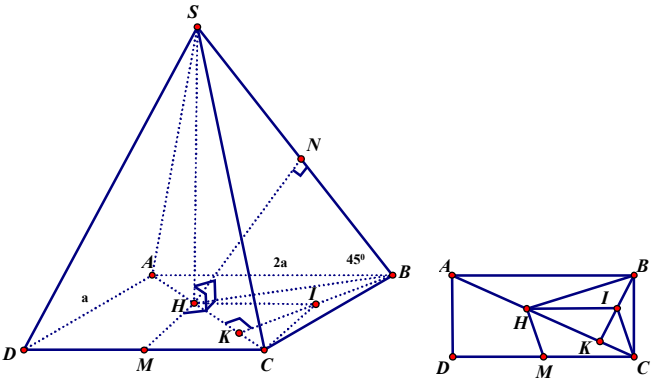
Câu 9 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 2y = 0 \\ 5x^2 + 2xy + 5y^2 - 3x - 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

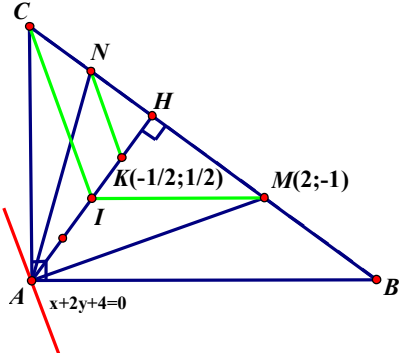
Câu 10 (1,0 điểm). Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z \leq \frac{1}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{z(xy+1)^2}{y^2(yz+1)} + \frac{x(yz+1)^2}{z^2(zx+1)} + \frac{y(zx+1)^2}{x^2(xy+1)}$$

Câu	Đáp án	Điểm											
1 (1,0đ)	Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2x-1}{x-3}$.	1,00											
	♥ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ ♥ Sự biến thiên: – Chiều biến thiên: $y' = \frac{-5}{(x-3)^2}$; $y' < 0, \forall x \in D$. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.	0,25											
	♥ – Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2 \Rightarrow$ tiệm cận ngang: $y = 2$ $\lim_{x \rightarrow 3^-} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} y = +\infty \Rightarrow$ tiệm cận đứng: $x = 3$	0,25											
	– Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>y</td><td>2</td><td>$+\infty$</td><td>2</td></tr></table>	x	$-\infty$	3	$+\infty$	y'				y	2	$+\infty$	2
x	$-\infty$	3	$+\infty$										
y'													
y	2	$+\infty$	2										
	♥ Đồ thị: + Giao điểm với các trục: $Oy : x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3} : \left(0; \frac{1}{3}\right)$ và $Ox : y = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} : \left(\frac{1}{2}; 0\right)$ Đồ thị cắt các trục tọa độ tại $\left(0; \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{2}; 0\right)$. + Tính đối xứng: Đồ thị nhận giao điểm $I(3; 2)$ của hai tiệm cận làm tâm đối xứng. 	0,25											
	2	Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$, biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d : x + 9y - 3 = 0$.	1,00										

(1,0đ)	♥ Đường thẳng d có hệ số góc là $k_d = -\frac{1}{9}$. Do tiếp tuyến vuông góc với d nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k_{tt} = -\frac{1}{k_d} = 9$.	0,25
	♥ Khi đó hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $y' = k_{tt} \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 9 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$	0,25
	♥ Với $x = 1 \Rightarrow y = 2$, tiếp điểm $(1; 2)$. Phương trình tiếp tuyến là $y = 9x - 7$.	0,25
	♥ Với $x = -3 \Rightarrow y = -2$, tiếp điểm $(-3; -2)$. Phương trình tiếp tuyến là $y = 9x + 25$.	0,25
3 (1,0đ)	a) Giải bất phương trình $\log_2(x-3) - \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \leq 1$ (1)	0,50
	♥ Điều kiện: $x > 3$. Khi đó: $(1) \Leftrightarrow \log_2[(x-3)(x-2)] \leq 1 \Leftrightarrow (x-3)(x-2) \leq 2$	0,25
	$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$	0,25
	♥ Kết hợp với điều kiện $x > 3$ ta có nghiệm của bất phương trình (1) là $3 < x \leq 4$.	
	b) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $(1+2i)z + (1-2\bar{z})i = 1+3i$. Tính môđun của z .	0,50
	♥ Đặt $z = a+bi$, $(a, b \in \mathbb{R})$ ta có: $(1+2i)z + (1-2\bar{z})i = 1+3i \Leftrightarrow a-4b + (b+1)i = 1+3i \Leftrightarrow \begin{cases} a-4b = 1 \\ b+1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 2 \end{cases}$	0,25
4 (1,0đ)	♥ Vậy môđun của z là $ z = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9^2 + 2^2} = \sqrt{85}$.	0,25
	Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{3+4\sin x - \cos 2x} dx$.	1,00
	♥ Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{3+4\sin x - \cos 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x + 2\sin x + 1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{(\sin x + 1)^2} dx$	0,25
	♥ Đặt $t = \sin x + 1 \Rightarrow dt = \cos x dx$, $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 2$	0,25
	♥ Suy ra: $I = \int_1^2 \frac{t-1}{t^2} dt = \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt$	0,25
5 (1,0đ)	$= \left(\ln t + \frac{1}{t} \right) \Big _1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2}$	0,25
	Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$. Tìm tọa độ giao điểm A của d với (P) và lập phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm A , vuông góc với đường thẳng d và nằm trong mặt phẳng (P) .	1,00
	♥ Tọa độ của điểm A là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ x+y=1 \\ y-z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=4 \\ z=2 \end{cases}$	0,25
	♥ Suy ra $A(-3; 4; 2)$.	0,25
	♥ Mặt phẳng (P) có VTPT là $\vec{n}_{(P)} = (1; 1; 1)$; đường thẳng d có VTCP là $\vec{u}_d = (-1; 1; 1)$	0,25

	Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng $d \Rightarrow \Delta = (P) \cap (Q)$ Khi đó VTCP của Δ là $\vec{u} = [\vec{n}_{(P)}; \vec{u}_d] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0; -2; 2)$.	
	♥ Vậy phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = - \\ y = -t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.	0,25
6 (1,0đ)	a) Giải phương trình $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}\cos 2x = -2 \quad (1)$	0,50
	♥ Ta có: $(1) \Leftrightarrow 2\sin 2x \cos \frac{\pi}{3} + 2\cos 2x \sin \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\cos 2x = -2$ $\Leftrightarrow \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x - \sqrt{3}\cos 2x = -2 \Leftrightarrow \sin 2x = -2 \quad (2)$	0,25
	Do $\sin 2x \leq 1$ nên phương trình (2) vô nghiệm	0,25
	Giải U21 Quốc tế báo Thanh Niên – Cúp Clear Men 2015 quy tụ 6 đội bóng gồm: ĐKVĐ U21 HA.GL, U21 Singapore, U21 Thái Lan, U21 Báo Thanh niên Việt Nam, U21 Myanmar và U19 Hàn Quốc. Các đội chia thành 2 bảng A, B, mỗi bảng 3 đội. Việc chia bảng được thực hiện bằng cách bốc thăm ngẫu nhiên. Tính xác suất để hai đội tuyển U21 HA.GL và U21 Thái Lan nằm ở hai bảng khác nhau.	0,50
	♥ Số phần tử của không gian mẫu là: $\Omega = C_6^3 C_3^3 = 20$.	0,25
	Gọi A là biến cố: “đội tuyển U21 HA.GL và U21 Thái Lan nằm ở hai bảng khác nhau”. Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $\Omega_A = 2!C_4^2 C_2^2 = 12$ ♥ Vậy xác suất cần tính là $P(A) = \frac{ \Omega_A }{ \Omega } = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.	0,25
7 (1,0đ)	Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $AD = a$, K là hình chiếu vuông góc của B lên đường chéo AC, các điểm H, M lần lượt là trung điểm của AK và DC, SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và MH.	1,00
		0,25
	♥ Do $\perp (AI \quad)$ nên HB là hình chiếu của SB lên $(ABCD)$ Suy ra $[SB; (ABCD)] = SB; HB) = SBH = 45^\circ \Rightarrow SH = BH$ Xét tam giác vuông ABC ta có: $AC = a\sqrt{5}$, $HK = \frac{1}{2} AK = \frac{2a}{\sqrt{5}}$, $BK = \frac{2a}{\sqrt{5}}$ Xét tam giác vuông BKH	0,25

	$BH^2 = BK^2 + HK^2 = \frac{4a^2}{5} + \frac{4a^2}{5} = \frac{8a^2}{5} \Rightarrow SH = BH = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{10}}{5}$	
	♥ Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3} S_{ABCD} . SH = \frac{1}{3} AB . AD . SH = \frac{1}{3} . 2a . a . \frac{2a\sqrt{10}}{5} = \frac{4a^3\sqrt{10}}{15} .$	0,25
	♥ Gọi I là trung điểm của BK, suy ra tứ giác $HICM$ là hình bình hành Suy ra: $HI \perp BC \Rightarrow I$ là trực tâm tam giác $BHC \Rightarrow CI \perp HB \Rightarrow MH \perp HB$ Mà HB là hình chiếu của SB lên $(ABCD)$ nên $MH \perp SB$.	0,25
	♥ Trong (SHB), kẻ $HN \perp SB$ ($N \in SB$), ta có: $\begin{cases} MH \perp HB \\ MH \perp SH \end{cases} \Rightarrow MH \perp HN$ Suy ra HN là đoạn vuông góc chung của SB và MH. Suy ra: $d(SB, MH) = HN$ Xét tam giác vuông SHB ta có: $HN = \frac{1}{2} SB = \frac{1}{2} HB . \sqrt{2} = \frac{1}{2} \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{5}} . \sqrt{2} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$ Vậy $d(SB, MH) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.	0,25
8 (1,0đ)	Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC, các điểm $M(2;-1)$, N lần lượt là trung điểm của HB và HC; điểm $K\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là trực tâm tam giác AMN. Tìm tọa độ điểm C, biết rằng điểm A có tung độ âm và thuộc đường thẳng $d: x + 2y + 4 = 0$. 	1,00
	♥ Gọi I là trung điểm của AH, ta có $MI \parallel AB \Rightarrow MI \perp AC$ Suy ra: I là trực tâm tam giác $AMC \Rightarrow CI \perp AM$ Mà $NK \perp AM \Rightarrow NK \parallel CI \Rightarrow K$ là trung điểm HI.	0,25
	♥ Đặt $A(-2a-4; a) \in d$, từ hệ thức $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KH} \Rightarrow H\left(\frac{2a+2}{3}; \frac{2-a}{3}\right)$ Suy ra: $\overrightarrow{AK} = \left(\frac{7}{2} + 2a; \frac{1}{2} - a\right)$ và $\overrightarrow{MH} = \left(\frac{2a-4}{3}; \frac{5-a}{3}\right)$ Khi đó: $\overrightarrow{AK} . \overrightarrow{MH} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{2} + 2a\right)\left(\frac{2a-4}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - a\right)\left(\frac{5-a}{3}\right) = 0$ $\Leftrightarrow 10a^2 - 13a - 23 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{23}{10} \end{cases} \Rightarrow A(-2; -1).$	0,25
	♥ Suy ra tọa độ $H(0;1)$ và $B(4;-3)$ Phương trình $AB: x + 3y + 5 = 0$ và $BC: x + y - 1 = 0$.	0,25
	♥ Tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình:	0,25

	$\begin{cases} x+3y=-5 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases} \Rightarrow C(4;-3).$	
9 (1,0đ)	Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2+2xy+2y^2-3x-2y=0 & (1) \\ 5x^2+2xy+5y^2-3x-3y-2=0 & (2) \end{cases}$	1,00
	♥ Nhân hai vế của phương trình (1) với 3 rồi trừ theo vế cho (2), ta được phương trình: $4x^2+4xy+y^2-6x+3y+2=0$	0,25
	♥ $\Leftrightarrow (2x+y)^2-3(2x+y)+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x+y=2 \end{cases}$	0,25
	♥ Nếu $2x+y=1$ thì $y=1-2x$, thay vào (1) ta được: $7x^2-5x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=1 \\ x=\frac{5}{7} \Rightarrow y=-\frac{3}{7} \end{cases}$	0,25
	♥ Nếu $2x+y=2$ thì $y=2-2x$, thay vào (1) ta được: $7x^2-11x+4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=0 \\ x=\frac{4}{7} \Rightarrow y=\frac{6}{7} \end{cases}$ Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm là $(0;1);(1;0);\left(\frac{5}{7};-\frac{3}{7}\right);\left(\frac{4}{7};\frac{6}{7}\right)$.	0,25
10 (1,0đ)	Cho ba số thực dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z \leq \frac{1}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{z(xy+1)^2}{y^2(yz+1)} + \frac{x(yz+1)^2}{z^2(zx+1)} + \frac{y(zx+1)^2}{x^2(xy+1)}.$	1,00
	♥ Biến đổi biểu thức P , ta có: $P = \frac{\left(x+\frac{1}{y}\right)^2}{y+\frac{1}{z}} + \frac{\left(y+\frac{1}{z}\right)^2}{z+\frac{1}{x}} + \frac{\left(z+\frac{1}{x}\right)^2}{x+\frac{1}{y}}$	0,25
	♥ Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a+b+c \quad (a,b,c > 0) \quad (1)$ Theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $\frac{a^2}{b} + b \geq 2a, \frac{b^2}{c} + c \geq 2b, \frac{c^2}{a} + a \geq 2c \Rightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a+b+c.$ Sử dụng (1) ta suy ra: $P \geq \left(x+\frac{1}{y}\right) + \left(y+\frac{1}{z}\right) + \left(z+\frac{1}{x}\right) = x+y+z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = Q$	0,25
	♥ Tiếp tục đánh giá Q , ta có: $Q \geq 3\sqrt[3]{xyz} + \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}$ Đặt $t = \sqrt[3]{xyz}$, ta có: $0 < t = \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3} \leq \frac{1}{2}$	0,25
	♥ Khi đó: $Q \geq 3t + \frac{3}{t} = 12t + \frac{3}{t} - 9t \geq 2\sqrt{36} - \frac{9}{2} = \frac{15}{2}$ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{2}$ Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{15}{2}$, đạt khi $x=y=z=\frac{1}{2}$.	0,25