NGUYỄN QUANG SƠN

Chuyên đề trọng điểm

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

- Dành cho học sinh khối 12 chương trình chuẩn và nâng cao
- Ôn tập và nâng cao kĩ năng làm bài
- Biên soạn theo nội dung và cấu trúc đề thi của Bộ GD&ĐT

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách HÌNH HỌC KHÔNG GIAN , được biên soạn nhằm mục đích HÌNH KHÔNG GIAN KHÔNG CÒN LÀ MỐI LO LẮNG CHO CÁC BẠN HỌC SINH PHỔ THÔNG .

Cuốn HÌNH KHÔNG GIAN được hệ thống hóa toàn bộ kiến thức từ cơ bản đến nâng cao HÌNH KHÔNG GIAN LỚP 11, HÌNH KHÔNG GIAN LỚP 12 và đặc biệt LUYỆN THI ĐẠI HỌC .

Nội dung cuốn sách gồm :

Chương I : Đại cương hình học không gian.

Chương II : Quan hệ song song trong không gian.

Chương III : Quan hệ vuông góc trong không gian.

Chương IV : Thể tích khối trụ, thể tích khối chóp.

Chương V : Mặt cầu, mặt trụ, mặt nón.

Chương VI : Bài tập tổng hợp lớp 12 học kỳ I.

Chương VII: Bài tập tổng hợp luyện thi Đại Học.

Cuốn sách được trình bày ngắn gọn, rõ ràng, với một lượng bài tập rất lớn và rất đầy đủ, các bài tập được giải chi tiết, chặt chẽ, dễ hiểu. Nhằm giúp các em có một định hướng để giải quyết vấn đề của bài tập đó.

Cuốn sách được phân bố 6 chương, mỗi chương được tóm tắt lý thuyết đầy đủ. Bài tập trong mỗi chương được phân dạng rõ ràng , mỗi dạng có tóm tắt phương pháp giải bài tập. Bài tập phân bố trong mỗi chương hoặc mỗi phần là từ dễ đến khó, trong mỗi dạng đều có lòng vào những bài tập của dạng thi Đại Học. Những bài tập dễ nhằm mục đích giúp các bạn nắm rõ lý thuyết và phương pháp để chứng minh hoặc giải quyết một vấn đề cụ thể, và từ đó các bạn có kỹ năng để giải quyết những bài tập khó hơn. Tác giả rất hy vọng quyển sách này là người bạn đồng hành tốt cho các em trong quá trình học và trong những kỳ thi.

Tuy cố gắng nhiều trong quá trình biên soạn, nhưng cuốn sách không thể tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được ý kiến đóng góp chân thành quí báu từ phía bạn đọc, các em học sinh và các bạn đồng nghiệp gần xa để những tái bản lần sau sách sẽ hoàn thiện hơn.

Xin chân thành cảm ơn !

Tác giả NGUYỄN QUANG SƠN

CHƯƠNG I. ĐẠI CƯƠNG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Bước đầu tiên làm quen với Hình học không gian, các bạn các bạn phải nhớ kỹ các khái niệm và những tính chất sau sau:

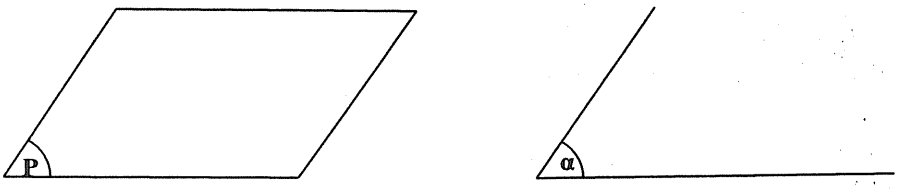
I. KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

1. Mặt phẳng:

Mặt bảng, mặt bàn, mặt nước hồ yên lặng, mặt sàn nhà,... cho ta hình ảnh một phần của mặt phẳng. Mặt phẳng không có bề dày và không có giới hạn.

Để biểu diễn mặt phẳng ta thường dùng hình bình hành hay một miền góc và ghi tên của mặt phẳng đó vào một góc của hình biểu diễn (như hình 1) .

Để kí hiệu mặt phẳng , ta thường dùng chữ cái in hoa hoặc chữ cái Hi Lạp đặt trong dấu ( ). Ví dụ: mặt phẳng (P), mặt phẳng (Q), mặt phẳng (α), mặt phẳng (β) hoặc viết tắt là mp(P), mp(Q), mp(α), mp(β), hoặc (P), (Q), (α), (β) .

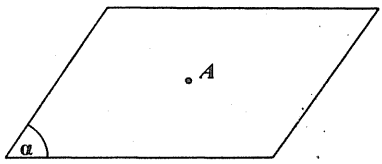


Hình 1

2. Điểm thuộc mặt phẳng:

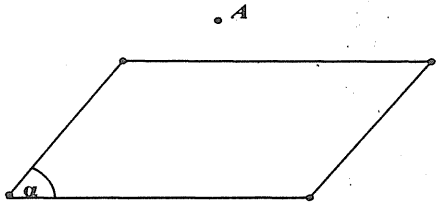
Cho điểm A và mặt phẳng (α).

Khi điểm A thuộc mặt phẳng (α), ta nói A nằm trên (α) hay mặt phẳng (α) chứa A, hay mặt phẳng (α) đi qua điểm A và kí hiệu $A \in (\alpha)$, được biểu diễn ở hình 2 .



Hình 2

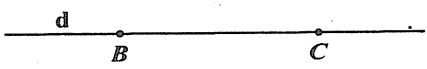
Khi điểm A không thuộc mặt phẳng (α) ta nói điểm A nằm ngoài mặt phẳng (α) hay mặt phẳng (α) không chứa điểm A và kí hiệu là $A \notin (\alpha)$, được biểu diễn ở hình 3 .



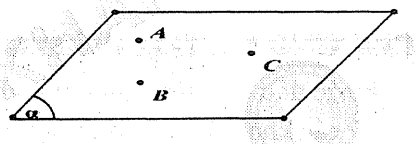
Hình 3

II. CÁC TÍNH CHẤT ĐƯỢC THỪA NHẬN

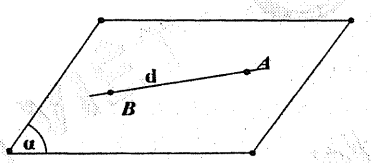
Tính chất 1: Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.



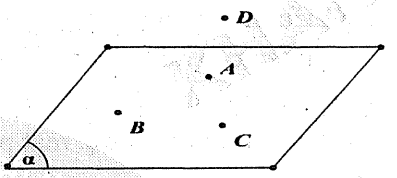
Tính chất 2: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.



Tính chất 3: Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

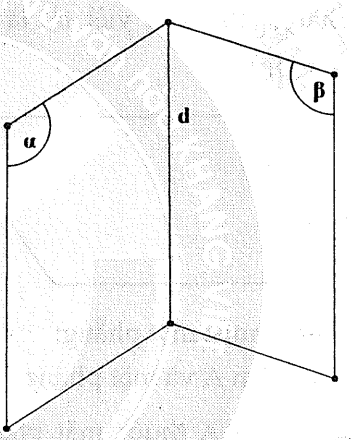


Tính chất 4: Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng .



Tính chất 5: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa .

Từ tính chất này suy ra: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng sẽ có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy. Đường thẳng chung là duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó . Đường thẳng chung đó được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.



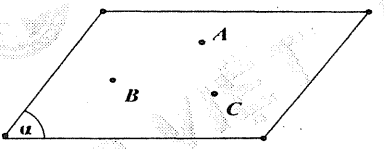
Ví dụ: Đường thẳng chung d của hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) được gọi là GIAO TUYẾN của hai mặt phẳng (α) và (β) và kí hiệu là $d=(\alpha)\cap(\beta)$.

Tính chất 6: Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

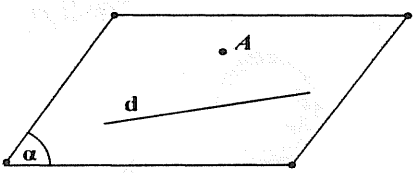
III. CÁCH XÁC ĐỊNH MỘT MẶT PHẲNG

Có ba cách xác định một mặt phẳng:

- Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.

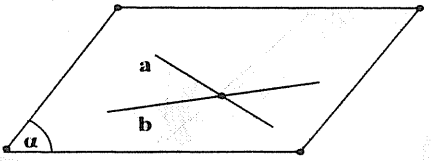


– Cho đường thẳng d và điểm A không thuộc d. Khi đó điểm A và đường thẳng d xác định một mặt phẳng, kí hiệu là mp (A , d), hoặc mp (d, A) hay (d, A) .



Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau:

Cho hai đường thẳng cắt nhau a và b . Khi đó hai đường thẳng a và b xác định một mặt phẳng và kí hiệu là mp(a, b) hay (a , b) , hoặc mp (b , a) hay (b, a) .



HÌNH CHÓP VÀ TỨ DIỆN

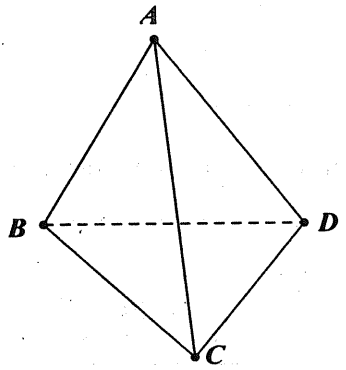
1. Khái niệm:

Trong mặt phẳng (α) cho đa giác lồi $A_1A_2A_3...A_n$. Lấy một điểm S không thuộc mặt phẳng (α). Lần lượt nối điểm S với các đỉnh $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ ta được n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3,..., SA_nA_1. Hình gồm đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ và n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3 ,..., SA_nA_1 được gọi là *hình chóp*, kí hiệu là $S.A_1A_2A_3...A_n$. Ta gọi S là *đỉnh của hình chóp*, còn đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ là *mặt đáy của hình chóp*, các tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, …, SA_nA_1 được gọi là *các mặt bên của hình chóp*, các đoạn thẳng SA_1, SA_2, SA_3,..., SA_n được gọi là *các cạnh bên của hình chóp* .

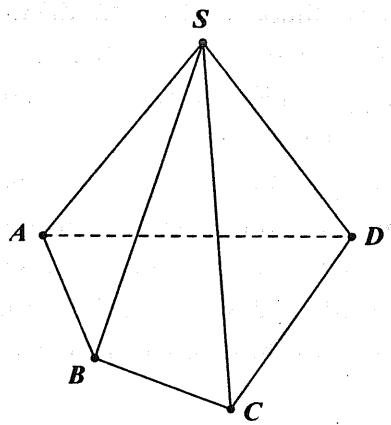
Ta gọi hình chóp có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác,..., lần lượt là *hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác* , ...

Cho bốn điểm A , B , C , D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD và BCD gọi là *hình tứ diện* (hay ngắn gọn gọi là *tứ diện*) và được kí hiệu là ABCD. Các điểm A, B, C, D gọi là các *đỉnh của tứ diện*. Các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, CA, BD gọi là các *cạnh của tứ diện* . Hai cạnh không đi qua một đỉnh gọi là *hai cạnh đối diện của tứ diện*. Các tam giác ABC, ACD, ABD, BCD gọi là *các mặt của tứ diện* . Đỉnh không nằm trên mặt gọi là *đỉnh đối diện của mặt đó* .

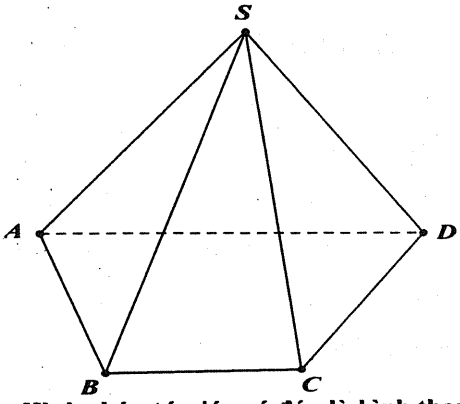
Hình tứ diện có bốn mặt là *các tam giác đều* gọi là hình ***tứ diện đều*** .



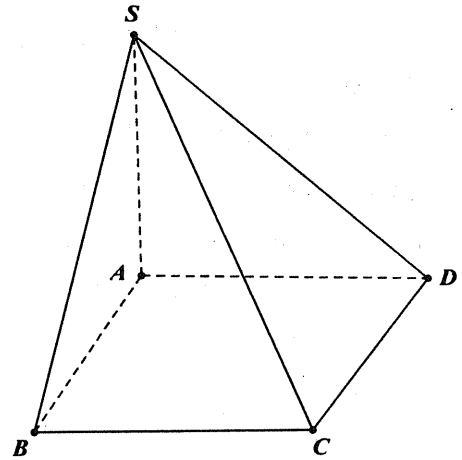
Hình chóp tam giác (tứ diện)



Hình chóp tứ giác



Hình chóp tứ giác có đáy là hình thang



Hình chóp tứ giác có đáy là hình bình hành

BÀI TẬP GIẢI CHI TIẾT

Có bốn dạng toán chính là: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng. Tìm thiết diện của hình chóp. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, ba đường thẳng đồng qui ... Ta lần lượt xét từng dạng một như sau:

DẠNG 1: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.

Phương pháp:

Muốn tìm giao tuyến của hai mặt phẳng? Ta tìm hai điểm chung thuộc cả hai mặt phẳng. Nối hai điểm chung đó được giao tuyến cần tìm.

Về dạng này điểm chung thứ nhất thường dễ tìm. Điểm chung còn lại các bạn phải tìm hai đường thẳng lần lượt thuộc hai mặt phẳng, đồng thời chúng lại thuộc mặt phẳng thứ ba và chúng không song song. Giao điểm của hai đường thẳng đó là điểm chung thứ hai.

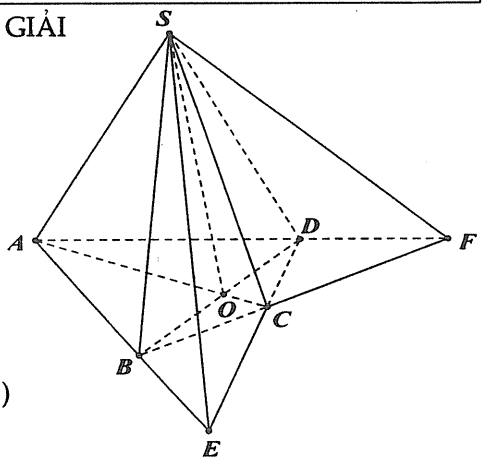
Các bạn phải nhớ kỹ: Giao tuyến là đường thẳng chung của hai mặt phẳng, có nghĩa là giao tuyến là đường thẳng vừa thuộc mặt phẳng này vừa thuộc mặt phẳng kia.

Dạng toán tìm giao tuyến, thường giao tuyến của những câu hỏi đầu hay được sử dụng để tìm giao điểm để làm bài tập ở những câu sau. Ta xét cụ thể những bài toán sau:

Cho tứ giác *ABCD* sao cho các cạnh đối không song song với nhau. Lấy một điểm *S* không thuộc mặt phẳng *(ABCD)*. Xác định giao tuyến của :

a) Mp (SAC) và mp (SBD).
b) Mp (SAB) và mp (SCD).
c) Mp (SAD) và mp (SBC).

LỜI GIẢI



a) Nhìn hình ta dễ dàng thấy S là điểm chung thứ nhất, nối AC và BD lại chúng cắt nhau tại O, thì O là điểm chung thứ hai, AC và BD cắt nhau là vì chúng cùng thuộc mặt phẳng đáy (ABCD). Cách trình bày giao tuyến của (SAC) và (SBD) như sau:

Ta có $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (1)

Trong mp(ABCD) gọi $O = AC \cap BD$.

Vì $\begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(SAC) \cap (SBD) = SO$.

b) Câu b cũng tương tự (SAB) và (SCD) có điểm chung thứ nhất là S, điểm chung thứ hai là E, với E là giao điểm của AB và CD vì hai đường thẳng này cũng thuộc mặt phẳng (ABCD) và chúng không song song với nhau. Cách trình bày cũng như câu a):

Ta có $S \in (SAB) \cap (SCD)$ (3)

Trong mp(ABCD) gọi $E = AB \cap CD$, vì:

$\begin{cases} E \in AB, AB \subset (SAB) \\ E \in CD, CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow E \in (SAB) \cap (SCD)$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $(SAB) \cap (SCD) = SE$

c) Câu này cũng vậy S là điểm chung thứ nhất, điểm chung thứ hai là giao điểm của AD và BC, vì hai đường thẳng này cũng thuộc mp (ABCD) và chúng không song song, ta trình bày như sau:

Ta có $S \in (SAD) \cap (SBC)$ (5)

$(AB, CD \subset (ABCD))$ Gọi $F = AD \cap BC$, vì:

$\begin{cases} F \in AD, AD \subset (SAD) \\ F \in BC, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow F \in (SAD) \cap (SBC)$ (6)

Từ (5) (6) suy ra $(SAD) \cap (SBC) = SF$.

Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm các cạnh AD, BC.

a) Tìm giao tuyến của 2 mp (IBC) và mp (JAD).

b) Lấy điểm M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC sao cho M, N không là trung điểm. Tìm giao tuyến của mp (IBC) và mp (DMN).

LỜI GIẢI

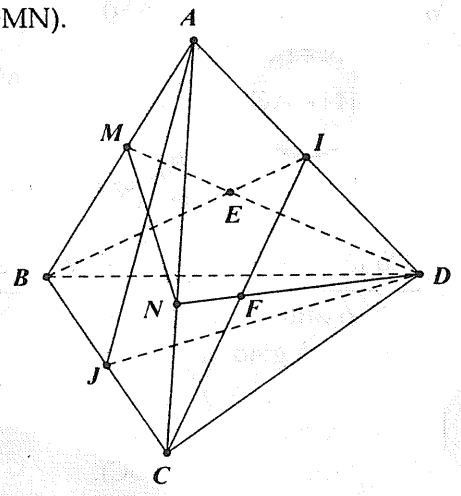
a) Tìm giao tuyến của 2 mp *(IBC)* và mp *(JAD)*.

Có $\begin{cases} I \in (IBC) \\ I \in AD, AD \subset (JAD) \end{cases} \Rightarrow I \in (IBC) \cap (JAD)$ (1)

Và $\begin{cases} J \in (JAD) \\ J \in BC, BC \subset (IBC) \end{cases} \Rightarrow J \in (IBC) \cap (JAD)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (IBC) \cap (JAD) = IJ$

b) Tìm giao tuyến của mp (IBC) và mp (DMN).



Trong mp(ABD) gọi $E = BI \cap DM$, vì:

$$\begin{cases} E \in BI, BI \subset (IBC) \\ E \in DM, DM \subset (DMN) \end{cases}$$

$$\Rightarrow E \subset (IBC) \cap (DMN) \quad (1)$$

Trong mp(ACD) gọi $F = CI \cap DN$, vì:

$$\begin{cases} F \in CI, CI \subset (IBC) \\ F \in DN, DN \subset (DMN) \end{cases}$$

$$\Rightarrow F \subset (IBC) \cap (DMN) \quad (2)$$

Từ (1) và (1) : $(IBC) \cap (DMN) = EF$

Cho tứ diện ABCD. Lấy các điểm M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC sao cho MN cắt BC. Gọi I là điểm bên trong tam giác BCD. Tìm giao tuyến của:

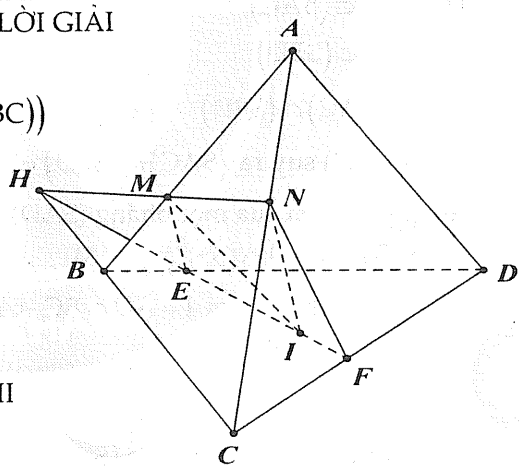
a) Mp (MNI) và mp (BCD).

b) Mp (MNI) và mp (ABD).

c) Mp (MNI) và mp (ACD).

LỜI GIẢI

a) Mp (MNI) và mp (BCD).



Gọi $H = MN \cap BC (MN, BC \subset (ABC))$

Ta có: $I \in (IMN) \cap (BCD)$ (1)

và $\begin{cases} H \in MN, MN \subset (IMN) \\ H \in BC, BC \subset (BCD) \end{cases}$

$$\Rightarrow H \in (IMN) \cap (BCD) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) : $(IMN) \cap (BCD) = HI$

b) Mp (MNI) và mp (ABD).

Trong mp (BCD) gọi E và F lần lượt là giao điểm của HI với BD và CD .

Có $\begin{cases} M \in (MNI) \\ M \in AB \subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow M \in (MNI) \cap (ABD)$ (3)

Và $\begin{cases} E \in HI \subset (MNI) \\ E \in BD \subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow E \in (MNI) \cap (ABD)$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $(MNI) \cap (ABD) = ME$.

c) Mp (MNI) và mp (ACD).

Có $\begin{cases} N \in (MNI) \\ N \in AC \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow N \in (MNI) \cap (ACD)$ (5).

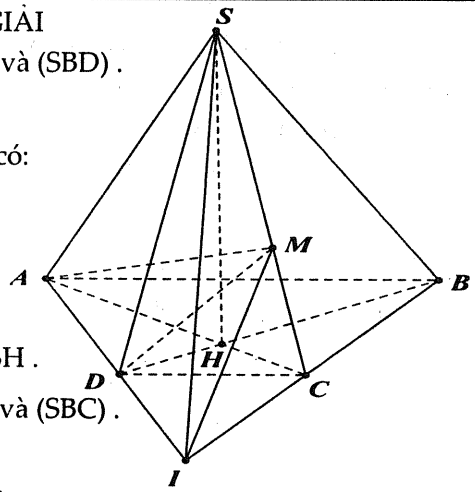
Và $\begin{cases} F \in HI \subset (MNI) \\ F \in CD \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow F \in (MNI) \cap (ACD)$ (6).

Từ (5) và (6) suy ra $(MNI) \cap (ACD) = NF$

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang có AB song song CD. Gọi I là giao điểm của AD và BC. Lấy M thuộc cạnh SC. Tìm giao tuyến của:

a) Mp (SAC) và mp (SBD).
b) Mp (SAD) và mp (SBC).
c) Mp (ADM) và mp (SBC).

LỜI GIẢI



a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Ta có $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (1)

Trong mp(ABCD) gọi $H = AC \cap BD$, có:

$\begin{cases} H \in AC \subset (SAC) \\ H \in BD \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow H \in (SAC) \cap (SBD)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(SAC) \cap (SBD) = SH$.

b) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Ta có: $S \in (SAD) \cap (SBC)$ (3)

Trong mp(ABCD) gọi $I = AD \cap BC$, có:

$\begin{cases} I \in AD \subset (SAD) \\ I \in BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAD) \cap (SBC)$ (4)

Từ (1) và (2) suy ra $(SAD) \cap (SBC) = SI$.

c) Tìm giao tuyến mp (ADM) và mp (SBC).

$\begin{cases} M \in (ADM) \\ M \in SC, SC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow M \in (ADM) \cap (SBC)$ (5)

$\begin{cases} I \in AD, AD \subset (ADM) \\ I \in BC, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow I \in (ADM) \cap (SBC)$ (6)

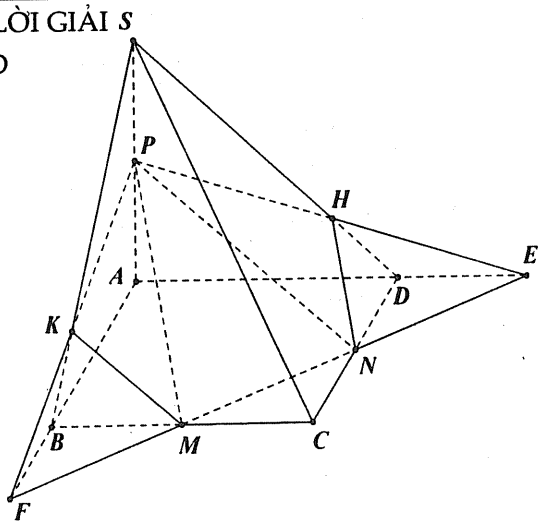
Từ (5) và (6) suy ra $(ADM) \cap (SBC) = MI$

Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CD, SA. Tìm giao tuyến của :

a) Mp (MNP) và mp (SAB). b) Mp (MNP) và mp (SAD).

c) Mp (MNP) và mp (SBC). d) Mp (MNP) và mp (SCD).

LỜI GIẢI



Gọi $F = MN \cap AB$, $E = MN \cap AD$

$(\text{vì } MN, AB, AD \subset (ABCD))$

a) Mp (MNP) và mp (SAB).

Có $\begin{cases} P \in (MNP) \\ P \in SA, SA \subset (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow P \in (MNP) \cap (SAB)$ (1)

Có $\begin{cases} F \in MN, MN \subset (MNP) \\ F \in AB, AB \subset (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow F \in (MNP) \cap (SAB)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(MNP) \cap (SAB) = PF$

b) Mp (MNP) và mp (SAD).

Ta có: $\begin{cases} P \in (MNP) \\ P \in SA, SA \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow P \in (MNP) \cap (SAD)$ (3)

Và có $\begin{cases} E \in MN, MN \subset (MNP) \\ E \in AD, AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow E \in (MNP) \cap (SAD)$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $(MNP) \cap (SAD) = PE$

c) Mp (MNP) và mp (SBC).

Trong mp(SAB) gọi $K = PF \cap SB$, có:

$\begin{cases} K \in PF, PF \subset (MNP) \\ K \in SB, SB \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow K \in (MNP) \cap (SBC)$ (5)

Và có $\begin{cases} M \in (MNP) \\ M \in BC, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow M \in (MNP) \cap (SBC)$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra $(MNP) \cap (SBC) = MK$

d) Mp (MNP) và mp (SCD).

Gọi $H = PE \cap SD (PE, SD \subset (SAD))$, có:

$$\begin{cases} H \in PE, PE \subset (MNP) \\ H \in SD, SD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow H \in (MNP) \cap (SCD) \qquad (7)$$

Và có $\begin{cases} N \in (MNP) \\ N \in CD, CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow N \in (MNP) \cap (SCD) \qquad (8)$

Từ (7) và (8) suy ra: $(MNP) \cap (SCD) = NH$

Cho tứ diện S.ABC. Lấy $M \in SB, N \in AC, I \in SC$ sao cho MI không song song với BC, NI không song song với SA. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNI) với các mặt (ABC) và (SAB).

LỜI GIẢI

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNI) và (ABC).

Vì $\begin{cases} N \in (MNI) \\ N \in AC, AC \subset (ABC) \end{cases}$

$\Rightarrow N \in (MNI) \cap (ABC) \qquad (1)$

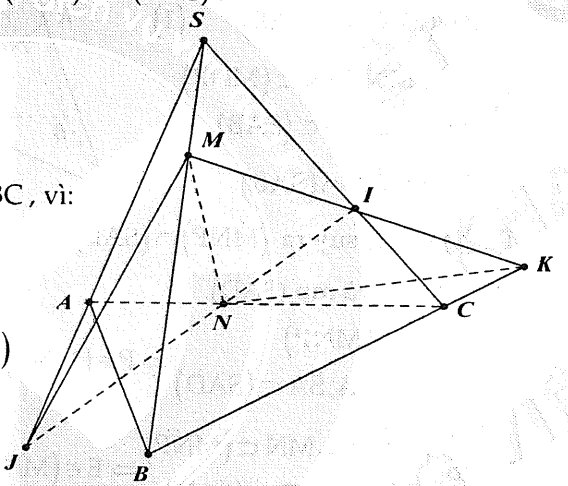
Trong mp(SBC) gọi $K = MI \cap BC$, vì:

$\begin{cases} K \in MI \subset (MNI) \\ K \in BC, BC \subset (ABC) \end{cases}$

$\Rightarrow K \in (MNI) \cap (ABC) \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra:

$(MNI) \cap (ABC) = NK$



b) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNI) với (SAB).

Gọi $J = NI \cap SA \left(NI, SA \subset (SAC)\right)$

Ta có: $\begin{cases} M \in (MNI) \\ M \in SB, SB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow M \in (MNI) \cap (SAB) \qquad (3)$

Và có $\begin{cases} J \in NI \subset (MNI) \\ J \in SA, SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow J \in (MNI) \cap (SAB) \qquad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra: $(MNI) \cap (SAB) = MJ$.

Cho tứ diện ABCD, M là một điểm bên trong tam giác ABD, N là một điểm bên trong tam giác ACD. Tìm giao tuyến của các cặp mp sau :

a) (AMN) và (BCD)

b) (DMN) và (ABC)

LỜI GIẢI

a). Tìm giao tuyến của (AMN) và (BCD)

Trong (ABD) gọi E = AM ∩ BD, có: $\begin{cases} E \in AM, AM \subset (AMN) \\ E \in BD, BD \subset (BCD) \end{cases}$

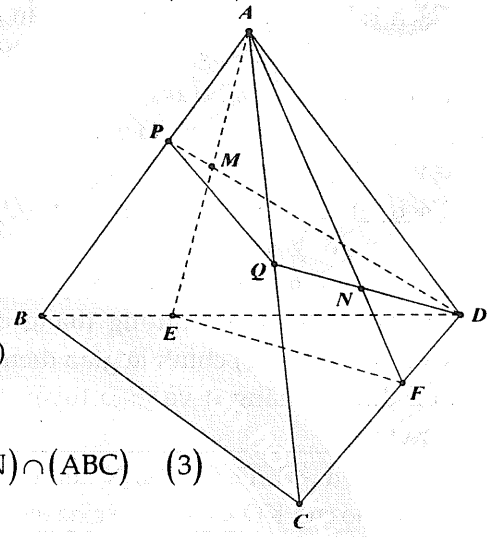
$\Rightarrow E \in (AMN) \cap (BCD)$ (1)

Trong (ACD) gọi F = AN ∩ CD, có:

$\begin{cases} F \in AN, AN \subset (AMN) \\ F \in CD, CD \subset (BCD) \end{cases}$

$\Rightarrow F \in (AMN) \cap (BCD)$ (2)

Từ (1) và (2): $(AMN) \cap (BCD) = EF$



b. Tìm giao tuyến của (DMN) và (ABC)

Trong (ABD) gọi P = DM ∩ AB , có:

$\begin{cases} P \in DM, DM \subset (DMN) \\ P \in AB, AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow P \in (DMN) \cap (ABC)$ (3)

Trong (ACD) gọi Q = DN ∩ AC , có:

$\begin{cases} Q \in DN, DN \subset (DMN) \\ Q \in AC, AC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow Q \in (DMN) \cap (ABC)$ (4)

Từ (3) và (4) : $(DMN) \cap (ABC) = PQ$

Cho tứ diện ABCD. Lấy I ∈ AB, J là điểm trong tam giác BCD, K là điểm trong tam giác ACD. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (IJK) với các mặt của tứ diện

LỜI GIẢI

Gọi $M = DK \cap AC\left(DK, AC \subset (ACD)\right)$; $N = DJ \cap BC\left(DJ, BC \subset (BCD)\right)$

Và: $H = MN \cap KJ\left(MN, KJ \subset (DMN)\right)$.

Vì $H \in MN, MN \subset (ABC) \Rightarrow H \in (ABC)$

Gọi $P = HI \cap BC\left(HI, BC \subset (ABC)\right)$,

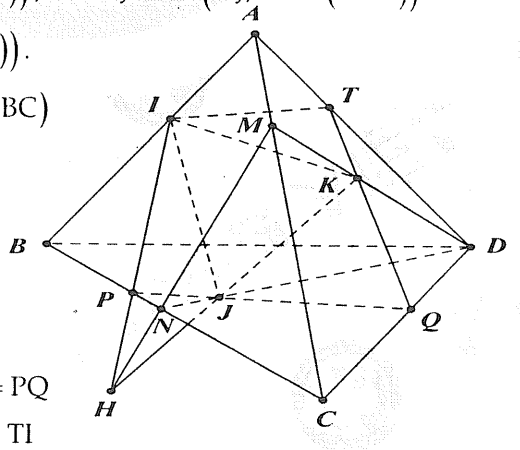
$Q = PJ \cap CD\left(PJ, CD \subset (BCD)\right)$

$T = QK \cap AD\left(QK, AD \subset (ACD)\right)$

Theo cách dựng điểm ở trên ta có:

$(IJK) \cap (ABC) = IP$; $(IJK) \cap (BCD) = PQ$

$(IJK) \cap (ACD) = QT$; $(IJK) \cap (AB) = TI$

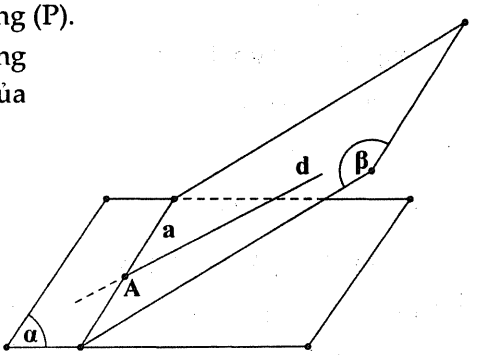


DẠNG 2: Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng.

Phương pháp: Muốn tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P), có hai cách làm như sau:

Cách 1: Những bài đơn giản, có sẵn một mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và một đường thẳng a thuộc mặt phẳng (P).

Giao điểm của hai đường thẳng không song song d và a chính là giao điểm của d và mặt phẳng (P).



Cách 2: Tìm một mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d, sao cho dễ dàng tìm giao tuyến với mặt phẳng (P). Giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) chính là giao điểm của đường thẳng d và giao tuyến a vừa tìm.

Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. K là điểm trên BD sao cho KD < KB . Tìm giao điểm của CD và AD với mp (MNK).

LỜI GIẢI

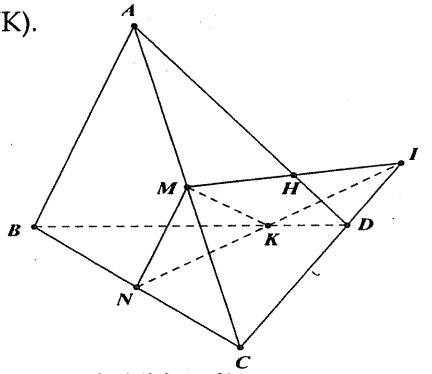
Tìm giao điểm của CD với mp (MNK).

Các bạn để ý NK và CD cùng thuộc mặt phẳng (BCD) và chúng không song song nên hai đường thẳng này sẽ cắt nhau tại một điểm I, nhưng NK lại thuộc mặt phẳng (MNK) suy ra I thuộc mặt phẳng (MNK).

Vậy I chính là giao điểm của CD và (MNK).

Ta có thể trình bày như sau :

Trong mp (BCD) gọi $I = CD \cap NK$.



Vì $\begin{cases} I \in CD \\ I \in NK,\ NK \subset (MNK) \end{cases}$

$\Rightarrow I = CD \cap (MNK)$

Tìm giao điểm của AD với mp (MNK).

Chọn mặt phẳng (ACD) chứa AD .

Sau đó tìm giao tuyến của (ACD) và (MNK), ta trình bày như sau :

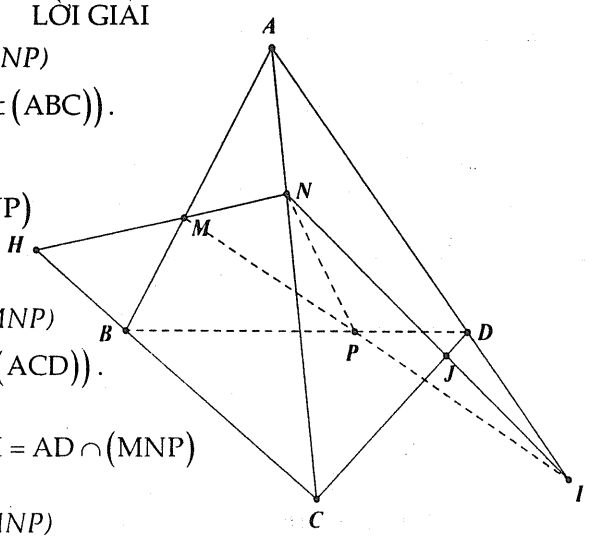
Ta có: $\begin{cases} M \in (MNK) \\ M \in AC,\ AC \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow M \in (MNK) \cap (ACD) \quad (1)$

Ta có $\begin{cases} I \in NK, NK \subset (MNK) \\ I \in CD, CD \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow I \in (MNK) \cap (ACD) \quad (2)$

Vậy $(NMK) \cap (ACD) = MI$. Gọi $H = MI \cap AD \Rightarrow H = AD \cap (NMK)$.

Cho tứ diện ABCD. Trên AB , AC , BD lần lượt lấy 3 điểm M , N , P sao cho MN không song song với BC, MP không song song với AD. Xác định giao điểm của các đường thẳng BC , AD , CD với mp (MNP).

LỜI GIẢI



Tìm giao điểm của BC và mp(MNP)

Gọi $H = MN \cap BC \left(MN, BC \subset (ABC)\right)$.

Ta có: $\begin{cases} H \in BC \\ H \in MN,\ MN \subset (MNP) \end{cases}$

$\Rightarrow H = BC \cap (MNP)$

Tìm giao điểm của AD và mp(MNP)

Gọi $I = MP \cap AD \left(MP, AD \subset (ACD)\right)$.

Vì $\begin{cases} I \in AD \\ I \in MP, MP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow I = AD \cap (MNP)$

Tìm giao điểm của CD và mp(MNP)

Ta có $\begin{cases} I \in AD, AD \subset (ACD) \\ N \in AC, AC \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow IN \subset (ACD)$

Gọi $J = NI \cap CD$ (Với $NI, CD \subset (ACD)$).

Ta có $\begin{cases} J \in CD \\ J \in NI, NI \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow J = CD \cap (MNP)$.

Cho tứ diện ABCD . Trên AC và AD lấy hai điểm M, N sao cho MN không song song với CD. Gọi O là điểm bên trong tam giác BCD.

a) Tìm giao tuyến của (OMN) và (BCD)

b) Tìm giao điểm của BC với (OMN)

c) Tìm giao điểm của BD với (OMN)

LỜI GIẢI

a). Tìm giao tuyến của (OMN) và (BCD):

Ta có : $O \in (OMN) \cap (BCD)$ (1)

Trong (ACD) , gọi $I = MN \cap CD$.

Có $\begin{cases} I \in MN \subset (MNO) \\ I \in CD \subset (BCD) \end{cases}$

$\Rightarrow I \in (MNO) \cap (BCD) (2)$

Từ (1) và (2): OI = (OMN) ∩ (BCD)

b). Tìm giao điểm của BC với (OMN):

Gọi $P = BC \cap OI \left(BC, OI \subset (BCD)\right)$.

Vậy : P = BC ∩ (OMN)

c). Tìm giao điểm của BD với (OMN):

Trong (BCD), gọi Q = BD ∩ OI.

Vậy : Q = BD ∩ (OMN).

Cho tứ diện ABCD, lấy M thuộc AB, N thuộc AC, I là điểm thuộc miền trong của tam giác BCD. Xác định giao điểm của các đường thẳng BC, BD, AD, CD với mp (IMN).

LỜI GIẢI

Tìm giao điểm của BC và mp(MNI)

Gọi $H = MN \cap BC \left(MN, BC \subset (ABC)\right)$, có: $\begin{cases} H \in BC \\ H \in MN, MN \subset (MNI) \end{cases}$

$\Rightarrow H = BC \cap (MNI)$

Tìm giao tuyến của (BCD) và (MNI)

Ta có: $\begin{cases} H \in MN, MN \subset (MNI) \\ H \in BC, BC \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow H \in (MNI) \cap (ACD) \quad (1)$

Và $I \in (MNI) \cap (ACD) \quad (2)$.

Từ (1) và (2): $HI = (MNI) \cap (ACD)$

Tìm giao điểm của BD và mp(MNI)

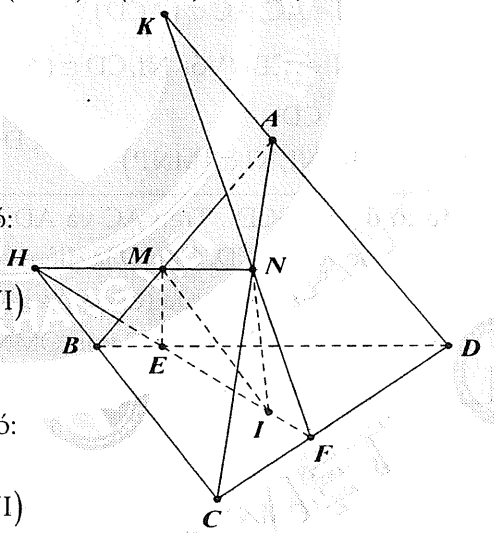
Gọi $E = HI \cap BD \left(HI, BD \subset (BCD)\right)$, có:

$\begin{cases} E \in BD \\ E \in HI, HI \subset (MNI) \end{cases} \Rightarrow E = BD \cap (MNI)$

Tìm giao điểm của CD và mp(MNI)

Gọi $F = HI \cap CD \left(HI, CD \subset (BCD)\right)$, có:

$\begin{cases} F \in CD \\ F \in HI, HI \subset (MNI) \end{cases} \Rightarrow F = CD \cap (MNI)$



Tìm giao điểm của AD và mp(MNI)

Gọi $K = FN \cap AD \left(FN, AD \subset (ACD)\right)$, có: $\begin{cases} K \in AD \\ K \in FN, FN \subset (MNI) \end{cases}$

$\Rightarrow K = AD \cap (MNI)$

Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC. Trên cạnh BD lấy điểm P sao cho BP = 2PD. Lấy Q thuộc AB sao cho QM cắt BC. Tìm:

a). Giao điểm của CD và mp (MNP).

b). Giao điểm của AD và mp (MNP).

c). Giao tuyến của mp (MPQ) và mp (BCD).

d). Giao điểm của CD và mp (MPQ).

d). Giao điểm của AD và mp (MPQ).

LỜI GIẢI

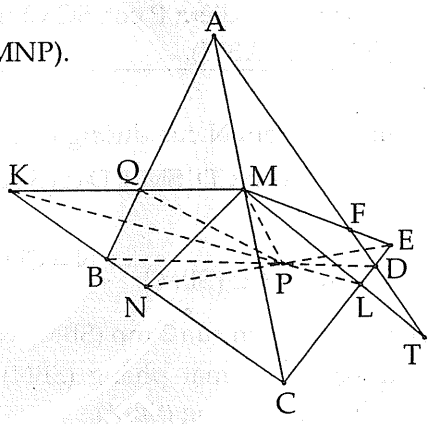
a). Giao điểm của CD và mp (MNP).

Gọi $E = CD \cap NP\left(CD, NP \subset mp(BCD)\right)$.

Có: $\begin{cases} E \in CD \\ E \in NP, NP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow E = CD \cap (MNP)$

b). Giao điểm của AD và mp (MNP).

Tìm giao tuyến của mp(ACD) và mp(MNP).



Có $\begin{cases} M \in (MNP) \\ M \in AC, AC \subset (ACD) \end{cases}$

$\Rightarrow M \in (MNP) \cap (ACD)$ (1)

Có $\begin{cases} E \in NP, NP \subset (MNP) \\ E \in CD, CD \subset (ACD) \end{cases}$

$\Rightarrow E \in (MNP) \cap (ACD)$ (2)

Từ (1) và (2) : $EM = (MNP) \cap (ACD)$

Gọi $F = AD \cap EM\left(AD, EM \subset (ACD)\right) \Rightarrow F = AD \cap (MNP)\left(\text{vì } EM \subset (MNP)\right)$

c). Tìm giao tuyến của mp (MPQ) và mp (BCD).

Gọi $K = QM \cap BC\left(QM, BC \subset mp(ABC)\right)$

Có $\begin{cases} K \in BC, BC \subset (BCD) \\ K \in QM, QM \subset (MPQ) \end{cases} \Rightarrow K \in (MPQ) \cap (BCD)$ (3)

Có $\begin{cases} P \in (MNQ) \\ P \in BD, BD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow P \in (MPQ) \cap (BCD)$ (4)

Từ (3) và (4) : $KP = (MPQ) \cap (BCD)$.

d). Tìm giao điểm của CD và mp (MPQ).

Gọi $L = KP \cap CD \left(KP, CD \subset (BCD)\right)$, có:

$$\begin{cases} L \in CD \\ L \in KP, KP \subset (MPQ) \end{cases} \Rightarrow L = CD \cap (MPQ).$$

e). Tìm giao điểm của AD và mp (MPQ).

Đầu tiên tìm giao tuyến của mp(ACD) và mp(MPQ).

Có M, L là hai điểm chung của (ACD) và (MNP).

Suy ra $ML = (MPQ) \cap (ACD)$

Gọi $T = AD \cap ML \left(AD, ML \subset (ACD)\right) \Rightarrow T = AD \cap (MPQ) \left(\text{vì } ML \subset (MPQ)\right)$

Cho hình chóp S.ABCD có AB và CD không song song. Gọi M là một điểm thuộc miền trong của tam giác SCD.

a). Tìm giao điểm N của đường thẳng CD và mp (SBM).

b). Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng (SBM) và (SAC).

c). Tìm giao điểm I của đường thẳng BM và mặt phẳng (SAC).

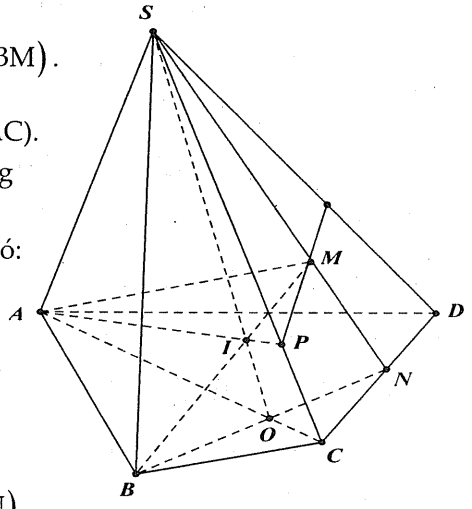
d). Tìm giao điểm P của SC và mp(ABM), từ đó suy ra giao tuyến của hai mp (SCD) và (ABM).

LỜI GIẢI

a) Tìm giao điểm N của đường thẳng CD và mp (SBM).

Gọi $N = SM \cap CD \left(SM, CD \subset (SCD)\right)$, có:

$$\begin{cases} N \in CD \\ N \in SM, SM \subset (SBM) \end{cases} \Rightarrow N = CD \cap (SBM).$$



b) Tìm giao tuyến của 2 mp (SBM) và (SAC).

Các bạn để ý mặt phẳng (SBN) cũng chính là mặt phẳng (SBM).

Trong mp(ABCD) gọi $O = AC \cap BN$, có:

$$\begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \\ O \in BN, BN \subset (SBN) \end{cases}$$

$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBN)$ (1)

Và $S \in (SAC) \cap (SBN)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SO = (SAC) \cap (SBN)$.

c) Tìm giao điểm I của đường thẳng BM và mặt phẳng (SAC).

Gọi $I = BM \cap SO \left(BM, SO \subset (SBN)\right)$.

Có: $\begin{cases} I \in BM \\ I \in SO, SO \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow I = BM \cap (SAC).$

d). Tìm giao điểm P của SC và mp (ABM), suy ra giao tuyến của hai mp (SCD) và (ABM).

Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AMB) và (SAC).

Ta có A và I là hai điểm chung của hai mặt phẳng (ABM) và (SAC).

Vậy: $(ABM)\cap(SAC)=AI$.

Gọi P là giao điểm của AI và SC, thì P là giao điểm của SC và mp(ABM) .

Hai mp (SCD) và (ABM) có M và P là hai điểm chung, vậy giao tuyến của chúng là PM.

Cho tứ giác ABCD và một điểm S không thuộc mp (ABCD). Trên đoạn AB lấy một điểm M ,trên đoạn SC lấy một điểm N (M , N không trùng với các đầu mút) .

a) Tìm giao điểm của đường thẳng AN với mặt phẳng (SBD).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SBD).

LỜI GIẢI

a) Tìm giao điểm của đường thẳng AN với mặt phẳng (SBD)

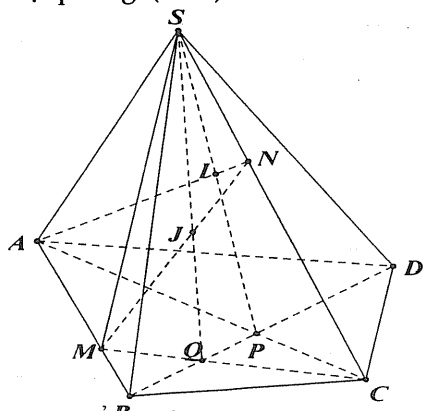
- Chọn mp phụ (SAC) $\supset$ AN.

Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD)

Trong (ABCD) gọi P = AC $\cap$ BD .

Vậy S và P là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Suy ra $mp(SAC)\cap mp(SBD)=SP$



- Trong (SAC) gọi I = AN $\cap$ SP , có:

$$\begin{cases} I\in AN \\ I\in SP\subset(SBD)\end{cases}\Rightarrow I=AN\cap(SBD)$$

b) Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SBD).

- Chọn mp phụ (SMC) $\supset$ MN
- Tìm giao tuyến của (SMC) và (SBD)

Trong (ABCD), gọi Q = MC $\cap$ BD, hai mặt phẳng (SMC) và (SBD) có S và Q là hai điểm chung nên (SMC) $\cap$ (SBD) = SQ.

- Trong (SMC), gọi J = MN $\cap$ SQ , có:

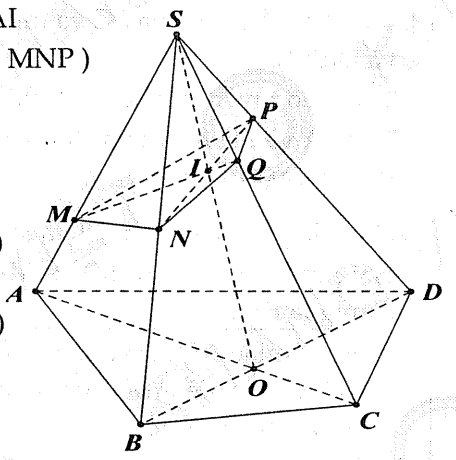
$$\begin{cases} J\in MN \\ J\in SQ\subset(SBD)\end{cases}\Rightarrow J=MN\cap(SBD)$$

Cho hình chóp S.ABCD .Gọi O là giao điểm của AC và BD . M, N, P lần lượt là các điểm trên SA , SB , SD.

a). Tìm giao điểm I của SO với mặt phẳng (MNP)

b). Tìm giao điểm Q của SC với mặt phẳng (MNP)

LỜI GIẢI



a) Tìm giao điểm I của SO với mặt phẳng (MNP)

Trong mp(SBD) gọi : $I = SO \cap NP$, có:

$$\begin{cases} I \in SO \\ I \in NP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow I = SO \cap (MNP)$$

b). Tìm giao điểm Q của SC với mp (MNP)

- Chọn mp phụ (SAC) $\supset$ SC
- Tìm giao tuyến của (SAC) và (MNP)

Ta có: $\begin{cases} M \in (MNP) \\ M \in SA, SA \subset (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow M \in (MNP) \cap (SAC)$ (1)

Và $\begin{cases} I \in SP, SP \subset (MNP) \\ I \in SO, SO \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow I \in (MNP) \cap (SAC)$ (2)

Từ (1) và (2) có $(MNP) \cap (SAC) = MI$

- Trong (SAC) gọi $Q = SC \cap MI$, có: $\begin{cases} Q \in SC \\ Q \in MI, MI \subset (MNP) \end{cases}$

$\Rightarrow Q = SC \cap (MNP)$

Cho tứ diện ABCD. Gọi M,N là hai điểm trên AC và AD. O là điểm bên trong tam giác BCD. Tìm giao điểm của :

a). MN và (ABO)

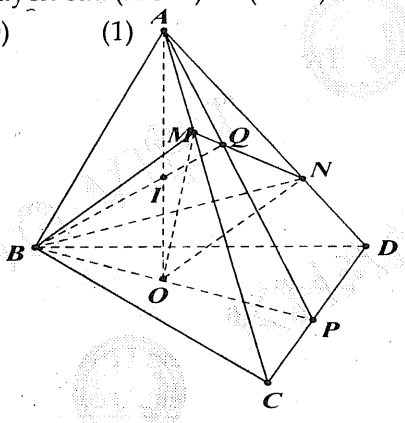
b). AO và (BMN)

LỜI GIẢI

a) Tìm giao điểm của MN và (ABO):

- Chọn mp phụ (ACD) $\supset$ MN . Tìm giao tuyến của (ACD) và (ABO)

Ta có: A là điểm chung của (ACD) và (ABO) (1)



Trong (BCD) gọi $P = BO \cap DC$.

$$\begin{cases} P \in BO, BO \subset (ABO) \\ P \in CD, CD \subset (ACD) \end{cases}$$

$\Rightarrow P \in (ABO) \cap (ACD)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $(ACD) \cap (ABO) = AP$

- Trong (ACD), gọi $Q = AP \cap MN$, có:

$$\begin{cases} Q \in MN \\ Q \in AP, AP \subset ABO \end{cases} \Rightarrow MN \cap (ABO) = Q$$

b) Tìm giao điểm của AO và (BMN):

- Chọn mp (ABP) $\supset$ AO.

Tìm giao tuyến của (ABP) và (BMN)

Ta có: B là điểm chung của (ABP) và (BMN) (3)

$$\begin{cases} Q \in MN, MN \subset (BMN) \\ Q \in AP,\ AP \subset (ABP) \end{cases} \Rightarrow Q \in (ABP) \cap (BMN) \quad (4).$$

Từ (3) và (4) $(ABP) \cap (BMN) = BQ$

Gọi $I = BQ \cap AO$ $(\text{vì } BQ, AO \subset mp(ABP))$, có:

$$\begin{cases} I \in AO \\ I \in BQ, BQ \subset (BMN) \end{cases} \Rightarrow I = AO \cap (BMN)$$

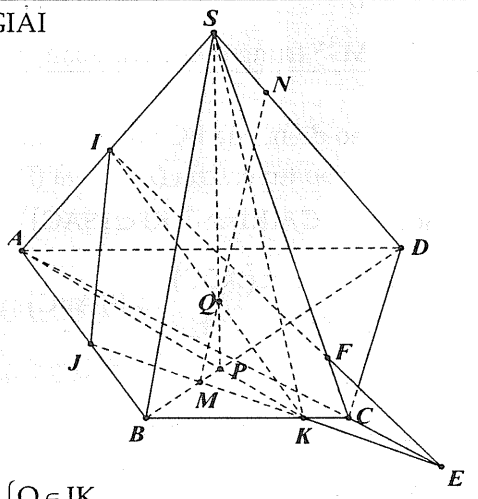
Trong mp (α) cho hình thang ABCD, đáy lớn AD. Gọi I, J, K lần lượt là các điểm trên SA, AB, BC (K không là trung điểm BC). Tìm giao điểm của:

a) IK và (SBD).

b) SD và (IJK).

c) SC và (IJK).

LỜI GIẢI



a). Tìm giao điểm của IK và (SBD)

- Chọn mp phụ (SAK) chứa IK .

Tìm giao tuyến của (SAK) và (SBD)

Ta có: $S \in (SAK) \cap (SBD)$ (1)

Trong (ABCD) gọi $P = AK \cap BD$.

Có $\begin{cases} P \in AK \subset (SAK) \\ P \in BD \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow P \in (SAK) \cap (SBD)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ (SAK) $\cap$ (SBD) = SP

- Trong (SAK), gọi $Q = IK \cap SP$, có: $\begin{cases} Q \in IK \\ Q \in SP \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow Q = IK \cap (SBD)$

b). Tìm giao điểm của SD và (IJK) :

- Chọn mặt phẳng phụ (SBD) chứa SD. Tìm giao tuyến của (SBD) và (IJK).

Theo câu a) ta có: $Q \in (SBD) \cap (IJK)$ (3)

Trong (ABCD), gọi $M = JK \cap BD \Rightarrow$ M là điểm chung của (IJK) và (SBD) (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ (IJK) $\cap$ (SBD) = QM.

- Trong (SBD) gọi $N = QM \cap SD$.

Ta có: $\begin{cases} N \in SD \\ N \in QM, QM \subset (IJK) \end{cases} \Rightarrow N = SD \cap (IJK)$.

c). Tìm giao điểm của SC và (IJK) :

- Chọn mp phụ (SAC) $\supset$ SC. Tìm giao tuyến của (SAC) và (IJK).

Có $\begin{cases} I \in (IJK) \\ I \in SA, SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow I \in (IJK) \cap (SAC)$ (5)

Gọi $E = AC \cap JK \left(\text{vì } AC, JK \subset (ABCD)\right)$. Vậy $E \in (IJK) \cap (SAC)$ (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow$ (IJK) $\cap$ (SAC) = IE

- Trong (SAC), gọi $F = IE \cap SC$.

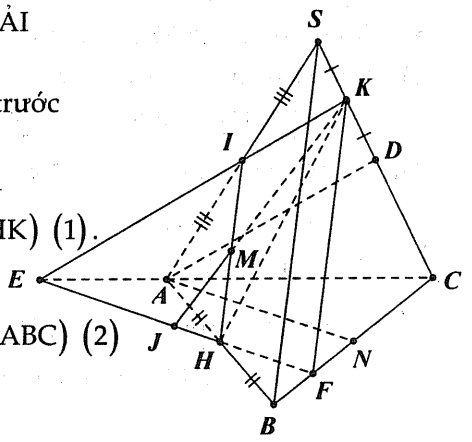
Ta có: $\begin{cases} F \in SC \\ F \in IE, IE \subset (IJK) \end{cases} \Rightarrow F = SC \cap (IJK)$.

Cho tứ diện S.ABC. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của SA, AB. Trên cạnh SC lấy điểm K sao cho $CK = 3SK$.

a). Tìm giao điểm F của BC với mp (IHK). Tính tỉ số $\frac{FB}{FC}$.

b). Gọi M là trung điểm của đoạn IH. Tìm giao điểm của KM và mp (ABC).

LỜI GIẢI



a). Tìm giao điểm của BC với mp (IHK).

Ta tìm giao tuyến của (ABC) và (IHK) trước

Gọi $E = AC \cap KI \left(AC, KI \subset (SAC)\right)$, có:

$\begin{cases} E \in AC, AC \subset (ABC) \\ E \in KI, KI \subset (IHK) \end{cases} \Rightarrow E(ABC) \cap (IHK)$ (1).

$\begin{cases} H \in (IHK) \\ H \in AB, AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow H \in (IHK) \cap (ABC)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow EH = (ABC) \cap (IHK)$

Gọi $F = EH \cap BC \left(EH, BC \subset (ABC)\right)$, có:

$\begin{cases} F \in BC \\ F \in EH, EH \subset (IHK) \end{cases} \Rightarrow F = BC \cap (IHK)$.

Gọi D trung điểm của SC , ta có IK là đường trung bình của ΔSAD.

Trong ΔCEK có: $\frac{CA}{AE} = \frac{CD}{DK} = 2 \Rightarrow CA = 2CK$.

Trong mặt phẳng đáy (ABC) kẻ $AN \parallel EF (N \in BC)$.

Ta có: $HF \parallel AN \Rightarrow \dfrac{BH}{HA} = \dfrac{BF}{FN} = 1 \Rightarrow BF = FN$.

Ta có: $EF \parallel AN \Rightarrow \dfrac{CA}{AE} = \dfrac{CN}{NF} = 2 \Rightarrow CN = 2NF$.

Kết luận: $\dfrac{FB}{FC} = \dfrac{FB}{FN + NC} = \dfrac{FB}{3FB} = \dfrac{1}{3}$.

b). Tìm giao điểm của KM và mp (ABC).

Ta có $KM \subset (IHK)$. Gọi $J = KM \cap EH (EH, KM \subset (IHK))$.

Ta có: $\begin{cases} J \in KM \\ J \in EH, EH \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow J = KM \cap (ABC)$

DẠNG 3: Tìm thiết diện của hình (H) khi cắt bởi mặt phẳng (P).

Thiết diện là phần chung của mặt phẳng (P) và hình (H).

Xác định thiết diện là **xác định giao tuyến của mp (P) với các mặt của hình (H).**

Thường ta tìm **giao tuyến đầu tiên** của mặt phẳng (P) với một mặt phẳng (α) nào đó thuộc hình (H), giao tuyến này dễ tìm được. Sau đó kéo dài giao tuyến này cắt các cạnh khác của hình (H), từ đó ta tìm được các giao tuyến tiếp theo. Đa giác giới hạn bởi các đoạn giao tuyến này khép kín thành một thiết diện cần tìm.

Thông qua cụ thể những bài tập sau thì các bạn sẽ hiểu rõ hơn.

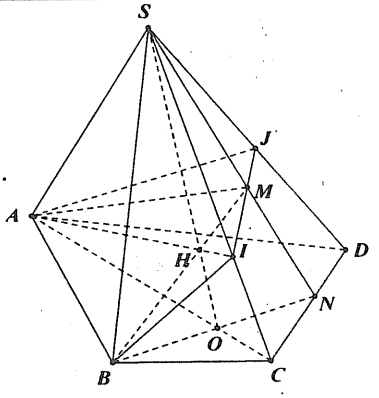
Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M là một điểm trong tam giác SCD.

a). Tìm giao tuyến của hai mp (SBM) và (SAC).

b). Tìm giao điểm của đường thẳng BM và mp (SAC).

c). Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp (ABM).

LỜI GIẢI



a). Tìm giao tuyến của hai mp (SBM) và (SAC).

Gọi $N = SM \cap CD (\text{vì } SM, CD \subset (SCD))$.

Vậy mặt phẳng (SBN) cũng là mặt phẳng (SBM).

Gọi $O = AC \cap BN (\text{vì } AC, BN \subset (ABCD))$.

Ta có: $\begin{cases} O \in BN, BN \subset (SBN) \\ O \in AC, AC \subset (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBN)$ (1)

Và $S \in (SAC) \cap (SBN)$ (2)

Từ (1) và (2) : $(SAC) \cap (SBN) = SO$.

b). Tìm giao điểm của đường thẳng BM và mp (SAC).

Gọi $H = BM \cap SO$ (vì $BM, SO \subset (SBN)$), có:

$$\begin{cases} H \in BM \\ H \in SO, SO \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow H = BM \cap (SAC)$$

c). Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp (ABM).

Gọi $I = AH \cap SC$ (vì $AH, SC \subset (SAC)$).

Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABM) và (SCD).

$$\begin{cases} I \in AH, AH \subset (ABM) \\ I \in SC, SC \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SCD) \cap (ABM) \quad (3)$$

Và $M \in (SCD) \cap (ABM)$ (4)

Từ (3) và (4): $(SCD) \cap (ABM) = IM$.

Gọi $J = IM \cap SD$ (vì $IM, SD \subset (SCD)$).

Vậy $(SAD) \cap (ABM) = AJ$, và $(SBC) \cap (ABM) = BI$

Kết luận : thiết diện cần tìm là tứ giác ABIJ.

Cho tứ diện ABCD. Trên AB, AC lấy 2 điểm M, N sao cho MN không song song BC. Gọi O là 1 điểm trong tam giác BCD.

a). Tìm giao tuyến (OMN) và (BCD).

b). Tìm giao điểm của DC, BD với (OMN).

c). Tìm thiết diện của mp(OMN) với hình chóp.

LỜI GIẢI

a). Tìm giao tuyến (OMN) và (BCD).

Trong mp (ABC), gọi $H = MN \cap BC$, có: $\begin{cases} H \in MN, MN \subset (MNO) \\ H \in BC, BC \subset (BCD) \end{cases}$

$\Rightarrow H \in (BCD) \cap (MNO)$ (1)

Và có $O \in (BCD) \cap (MNO)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(BCD) \cap (MNO) = HO$

b) Tìm giao điểm của DC, BD với (OMN).

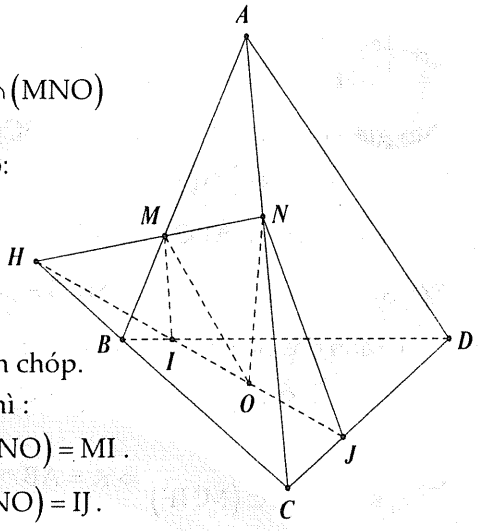
Trong mp (BCD), gọi $I = BD \cap HO$.

Có: $\begin{cases} I \in BD \\ I \in HO, HO \subset (MNO) \end{cases} \Rightarrow I = BD \cap (MNO)$

Trong mp(BCD) gọi $J = CD \cap HO$, có:

$\begin{cases} J \in CD \\ J \in HO,\ HO \subset (MNO) \end{cases}$

$\Rightarrow J = CD \cap (MNO)$.



c). Tìm thiết diện của mp(OMN) với hình chóp.

Theo cách dựng điểm ở câu a) và b) thì :

$(ABC) \cap (MNO) = MN$, $(ABD) \cap (MNO) = MI$.

$(ACD) \cap (MNO) = NJ$, $(BCD) \cap (MNO) = IJ$.

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác MNJI.

Cho tứ diện S.ABC. Gọi $M \in AS, N \in (SBC), P \in (ABC)$, không có đường thẳng nào song song.

a) Tìm giao điểm của MN với (ABC), suy ra giao tuyến của (MNP) và (ABC).

b) Tìm giao điểm của AB với (MNP).

c) Tìm giao điểm của NP với (SAB).

d) Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNP).

LỜI GIẢI

a). Tìm giao điểm của MN với (ABC)

Chọn mặt phẳng phụ (SAH) chứa MN.

Tìm giao tuyến của mp(SAH) và mp(ABC).

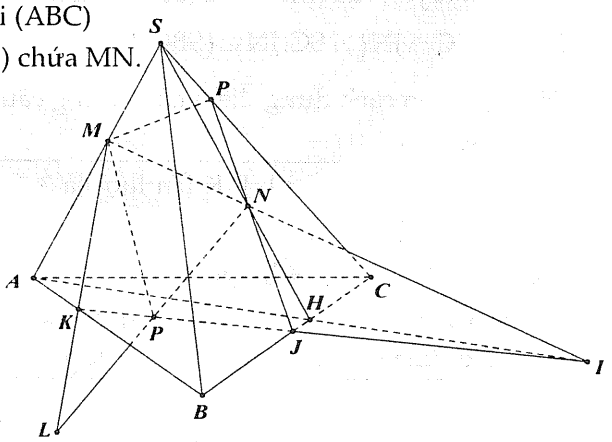
$A \in (ABC) \cap (SAH)$ (1)

Trong mp(SBC), gọi:

$H = SN \cap BC$.

Có: $\begin{cases} H \in SN, SN \subset (SAH) \\ H \in BC, BC \subset (ABC) \end{cases}$

$\Rightarrow H \in (SAH) \cap (ABC)$ (2)



Từ (1) và (2) $\Rightarrow (SAH) \cap (ABC) = AH$.

Gọi $I = MN \cap AH$ (vì $MN, AH \subset (SAH)$).

Có: $\begin{cases} I \in MN \\ I \in AH, AH \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow I = MN \cap (ABC)$

Tìm giao tuyến của (MNP) và (ABC).

Ta có: $P \in (MNP) \cap (ABC)$ (3)

Và $I \in (MNP) \cap (ABC)$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow (MNP) \cap (ABC) = PI$.

b). Tìm giao điểm của AB với (MNP).

Gọi $K = AB \cap PI (\text{vì } AB, PI \subset (ABC))$.

Có $\begin{cases} K \in AB \\ K \in PI, PI \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow K = AB \cap (MNP)$.

c). Tìm giao điểm của NP với (SAB).

Gọi $L = PN \cap MK (\text{vì } PN, MK \subset (MNK))$.

Có $\begin{cases} L \in PN \\ L \in MK, MK \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow L = PN \cap (SAB)$.

d). Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Gọi $J = BC \cap PI (\text{vì } BC, PI \subset (ABC))$.

Vậy giao tuyến của (MNP) và (SBC) là JN.

Gọi $P = SC \cap JN (\text{vì } SC, JN \subset (SBC))$.

Kết luận theo cách dựng điểm của những câu ở trên ta có thiết diện cần tìm là tứ giác MPJK.

Cho tứ diện S.ABC. Gọi I, J, K lần lượt là 3 điểm nằm trong ba mặt phẳng (SAB), (SBC), (ABC).

a) Tìm giao điểm của IJ với mp (ABC).

b) Tìm giao tuyến của mp (IJK) với các mặt của hình chóp. Từ đó suy ra thiết diện của mp(IJK) cắt bởi hình chóp.

LỜI GIẢI

a). Tìm giao điểm của IJ với mp (ABC).

Gọi $M = SI \cap AB (SI, AB \subset (SAB))$, $N = SJ \cap BC (SJ, BC \subset (SBC))$

Từ đó suy ra MN là giao tuyến của mp (SIJ) và mp (ABC).

Gọi $H = IJ \cap MN (IJ, MN \subset (SIJ))$,

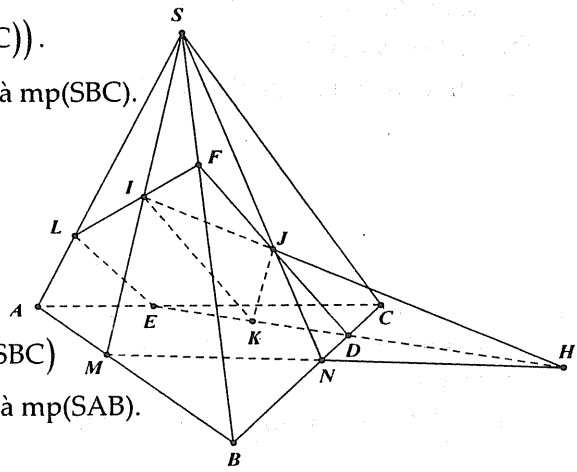
Có: $\begin{cases} H \in IJ \\ H \in MN, MN \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow H = IJ \cap (ABC)$

b. Tìm giao tuyến của mp(IJK) và mp(ABC).

$\begin{cases} K \in (IJK) \cap (ABC) \\ H \in (IJK) \cap (ABC) \end{cases} \Rightarrow HK = (IJK) \cap (ABC)$

Gọi $D = HK \cap BC (HK, BC \subset (ABC))$;

$E = HK \cap AC (HK, AC \subset (ABC))$.



Tìm giao tuyến của mp(IJK) và mp(SBC).

Có $J \in (IJK) \cap (SBC)$ (1)

Và $\begin{cases} D \in HK, HK \subset (IJK) \\ D \in BC, BC \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow D \in (IJK) \cap (SBC)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow DJ = (IJK) \cap (SBC)$

Tìm giao tuyến của mp(IJK) và mp(SAB).

Có $I \in (IJK) \cap (SAB)$ (3)

Gọi $F = DJ \cap SB (DJ, SB \subset (SBC))$, có:

$\begin{cases} F \in DJ, DJ \subset (IJK) \\ F \in SB, SB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow F \in (IJK) \cap (SAB)$ (4)

Từ (3) và (4): $FI = (IJK) \cap (SAB)$

Tìm giao tuyến của mp(IJK) và mp(SAC).

Gọi $L = FI \cap SA (FI, SA \subset (SAB))$, có:

$\begin{cases} L \in FI, FI \subset (IJK) \\ L \in SA, SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow L \in (IJK) \cap (SAC)$ (5)

$E = HK \cap AC (HK, AC \subset (ABC))$, có:

$\begin{cases} E \in HK, HK \subset (IJK) \\ E \in AC, AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow E \in (IJK) \cap (SAC)$ (6)

Từ (5) và (6): $LE = (IJK) \cap (SAC)$

Kết luận: Từ cách tìm giao điểm của mặt phẳng (IJK) với các cạnh của hình chóp S.ABC, suy ra thiết diện của mp(IJK) cắt bởi hình chóp là tứ giác DFLE.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, I lần lượt nằm trên ba cạnh AD, CD, SO. Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNI).

LỜI GIẢI

Trong (ABCD), gọi: J = BD ∩ MN,

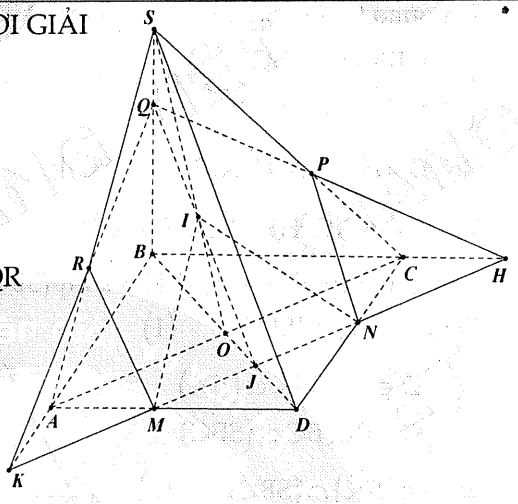
K = MN ∩ AB, H = MN ∩ BC

Trong (SBD), gọi Q = IJ ∩ SB

Trong (SAB), gọi R = KQ ∩ SA

Trong (SBC), gọi P = QH ∩ SC

Vậy : thiết diện là ngũ giác MNPQR



Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M, N , P lần lượt là trung điểm lấy trên AB , AD và SC .

Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP)

LỜI GIẢI

Trong (ABCD), gọi:

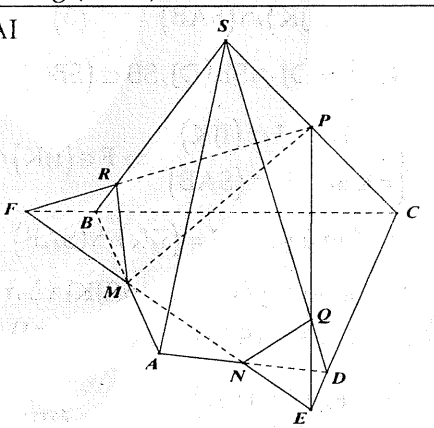
E = MN ∩ DC,

F = MN ∩ BC

Trong (SCD), gọi Q = EP ∩ SD

Trong (SBC), gọi R = FP ∩ SB

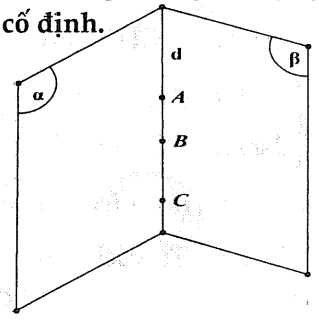
Vậy : thiết diện là ngũ giác MNPQR



<u>DẠNG 4</u>: Chứng minh ba điểm thẳng hàng, ba đường thẳng đồng qui, chứng minh một điểm thuộc một đường thẳng cố định.

<u>Phương pháp:</u>

Muốn chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, ta chứng minh ba điểm đó lần lượt thuộc hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β), thì suy ra ba điểm A, B, C nằm trên giao tuyến của (α) và (β), nên chúng thẳng hàng.



PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY:

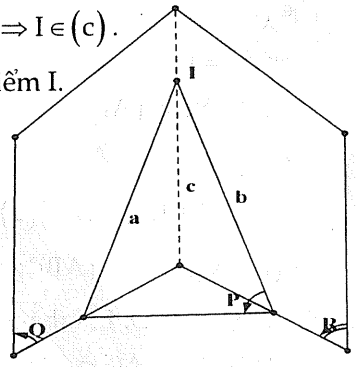
Ta tìm giao điểm của hai đường thẳng trong ba đường thẳng đã cho, rồi chứng minh giao điểm đó nằm trên đường thẳng thứ ba. Cụ thể như sau:

Cách chứng minh 3 đường thẳng a, b, c **đồng quy tại một điểm.**

Chọn một mặt phẳng (P) chứa đường thẳng (a) và (b). Gọi $I=(a)\cap(b)$

Tìm một mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng (a), tìm một mặt phẳng (R) chứa đường thẳng (b), sao cho $(c)=(Q)\cap(R)\Rightarrow I\in(c)$.

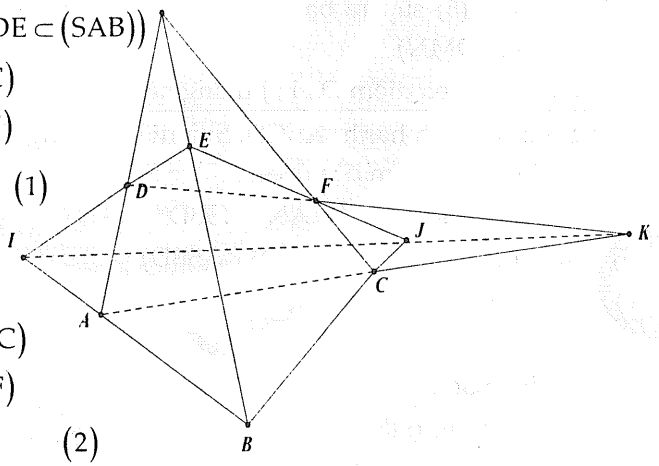
Vậy: 3 đường thẳng $(a),(b),(c)$ đồng quy tại điểm I.



$$\begin{cases}(a),(b)\subset mp(P)\\(a)\cap(b)=I\\mp(P)\cap mp(Q)=(a)\Rightarrow(a)\cap(b)\cap(c)=I\\mp(P)\cap mp(R)=(b)\\mp(Q)\cap mp(R)=(c)\end{cases}$$

Cho tứ diện S.ABC. Trên SA, SB, và SC lần lượt lấy các điểm D, E, F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K. Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

LỜI GIẢI



Có: $\begin{cases}I=AB\cap DE\left(AB,DE\subset(SAB)\right)\\I\in AB,AB\subset(ABC)\\I\in DE,DE\subset(DEF)\end{cases}$

$\Rightarrow I\in(ABC)\cap(DEF)$ (1)

Có $\begin{cases}K=AC\cap DF\\(AC,DF\subset(SAC))\\K\in AC,AC\subset(ABC)\\K\in DF,DF\subset(DEF)\end{cases}$

$\Rightarrow K\in(ABC)\cap(DEF)$ (2)

Có $\begin{cases}J=BC\cap EF\left(BC,EF\subset(SBC)\right)\\J\in BC,BC\subset(ABC)\\J\in EF,EF\subset(DEF)\end{cases}$ $\Rightarrow J\in(ABC)\cap(DEF)$ (3)

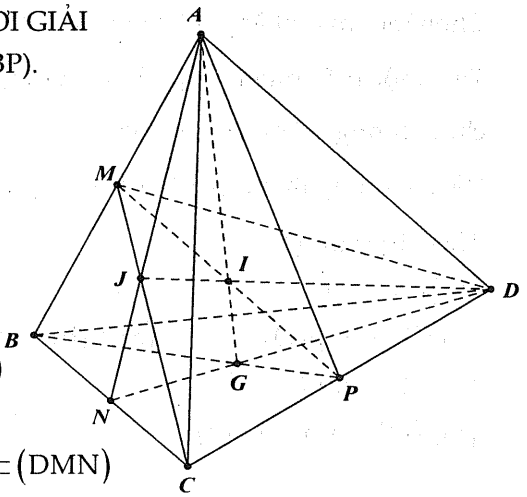
Từ (1) (2) và (3) suy ra 3 điểm I , J , K thẳng hàng.

Cho tứ diện ABCD có G là trọng tâm tam giác BCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD.

a) Tìm giao tuyến của (AND) và (ABP).

b) Gọi $I = AG \cap MP, J = CM \cap AN$. Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

LỜI GIẢI



a). Tìm giao tuyến của (AND) và (ABP).

$A \in (ABP) \cap (ADN) (1)$

Ta có $G = BP \cap DN$, có:

$\begin{cases} G \in BP, BP \subset (ABP) \\ G \in DN, DN \subset (ADN) \end{cases}$

$\Rightarrow G \in (ABP) \cap (ADN) (2)$

Từ (1) và (2) $AG = (ABP) \cap (ADN)$

b). Chứng minh D, I, J thẳng hàng

$I = AG \cap MP,\ AG \subset (ADG),\ MP \subset (DMN)$

$\Rightarrow I \in (ADG) \cap (DMN) \quad (3)$

$J = CM \cap AN,\ AN \subset (ADG),\ CM \subset (DMN) \Rightarrow J \in (ADG) \cap (DMN) \quad (4)$

$D \in (ADG) \cap (DMN) \quad (5)$

Từ (3), (4), (5) suy ra ba điểm D, I, J thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (ADG) và (DMN).

Kết luận vậy ba điểm D, I, J thẳng hàng.

Cho hình bình hành ABCD. S là điểm không thuộc (ABCD), M và N lần lượt là trung điểm của đoạn AB và SC.

a) Xác định giao điểm $I = AN \cap (SBD)$

b) Xác định giao điểm $J = MN \cap (SBD)$

c) Chứng minh I, J, B thẳng hàng.

LỜI GIẢI

a) Xác định giao điểm $I = AN \cap (SBD)$

- Chọn mp phụ (SAC) chứa AN.

Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD):

Trong mặt phẳng (ABCD) gọi O là giao điểm của AC và BD. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) có hai điểm chung là S và O.

Vậy: $(SAC) \cap (SBD) = SO$

- Trong (SAC) gọi $I = AN \cap SO$. Vậy: $I = AN \cap (SBD)$

b) Xác định giao điểm J = MN ∩ (SBD)

- Chọn mp phụ (SMC) chứa MN.

Tìm giao tuyến của (SMC) và (SBD):

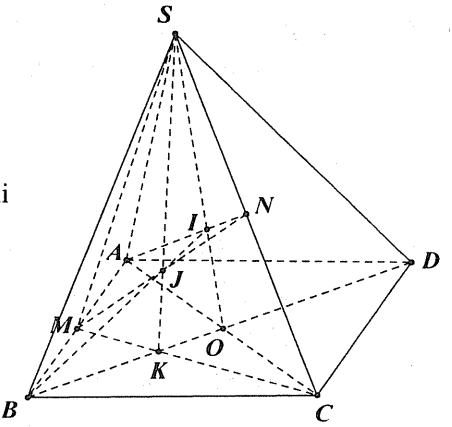
Trong (ABCD) gọi K = MC ∩ BD.

Hai mặt phẳng (SMC) và (SBD) có hai điểm chung là S và K.

Vậy: (SMC) ∩ (SBD) = SK

- Trong (SMC), gọi J = MN ∩ SK .

Vậy J = MN ∩ (SBD)



c) Chứng minh I , J , B thẳng hàng

Ta có : B là điểm chung của (ANB) và (SBD) (1)

$$\begin{cases} I \in SO, SO \subset (SBD) \\ I \in AN, AN \subset (ABN) \end{cases} \Rightarrow I \in (SBD) \cap (ABN) \qquad (2)$$

$$\begin{cases} J \in SE, SE \subset (SBD) \\ J \in MN, MN \subset (ABN) \end{cases} \Rightarrow J \in (SBD) \cap (ABN) \qquad (3)$$

Từ (1) (2) (3) suy ra ba điểm B , I , J thẳng hàng.

Cho tứ giác ABCD và S ∉ (ABCD). Gọi I, J là hai điểm trên AD và SB, AD cắt BC tại O và OJ cắt SC tại M.

a) Tìm giao điểm K = IJ ∩ (SAC)

b.) Xác định giao điểm L = DJ ∩ (SAC)

c) Chứng minh A , K , L , M thẳng hàng

LỜI GIẢI

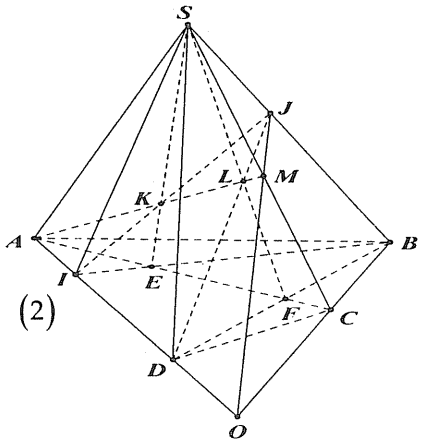
a) Tìm giao điểm K = IJ ∩ (SAC)

- Chọn mp phụ (SIB) chứa IJ
- Tìm giao tuyến của (SIB) và (SAC)

$S \in (SBI) \cap (SAC)$ (1)

Trong (ABCD) gọi E = AC ∩ BI , có:

$$\begin{cases} E \in AC \subset (SAC) \\ E \in BI \subset (SBI) \end{cases} \Rightarrow E \in (SAC) \cap (SBI) \quad (2)$$



Từ (1) và (2) $(SBI) \cap (SAC) = SE$.

Trong (SIB) gọi K = IJ ∩ SE .

Ta có $\begin{cases} K \in IJ \\ K \in SE, SE \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow K = IJ \cap (SAC)$

b) Xác định giao điểm L = DJ ∩ (SAC)

- Chọn mp phụ (SBD) chứa DJ . Tìm giao tuyến của (SBD) và (SAC)

$S \in (SBD) \cap (SAC)$ (3)

Trong (ABCD) gọi F = AC ∩ BD .

Vậy F là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (4)

Từ (3) và (4) : (SBD) ∩ (SAC) = SF

Trong (SBD) gọi L = DJ ∩ SF .

Ta có : $\begin{cases} L \in DJ \\ L \in SF, SF \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow L = DJ \cap (SAC)$

c) Chứng minh A ,K ,L ,M thẳng hàng

Ta có $A \in (SAC) \cap (AJO)$ (3) , có:

$\begin{cases} K \in IJ, IJ \subset (AJO) \\ K \in SE, SE \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow K \in (SAC) \cap (AJO)$ (4)

Có $\begin{cases} L \in DJ \subset (AJO) \\ L \in SF \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow L \in (SAC) \cap (AJO)$ (5)

Có $\begin{cases} M \in JO \subset (AJO) \\ M \in SC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow M \in (SAC) \cap (AJO)$ (6)

Từ (3),(4),(5),(6) suy ra bốn điểm A, K, L, M cùng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (AJO).

Vậy: A, K, L, M thẳng hàng.

Cho tứ giác ABCD và S ∉ (ABCD). Gọi M , N là hai điểm trên BC và SD.

a) Tìm giao điểm I = BN ∩ (SAC)

b) Tìm giao điểm J = MN ∩ (SAC)

c) Chứng minh C , I , J thẳng hàng

LỜI GIẢI

a) Tìm giao điểm I = BN ∩ (SAC)

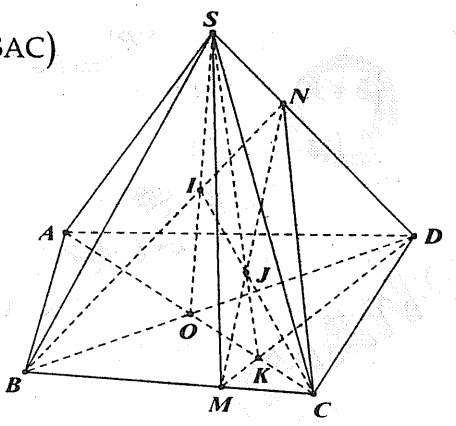
- Chọn mp phụ (SBD) chứa BN
- Tìm giao tuyến của (SBD) và (SAC)

Trong (ABCD) gọi O = AC ∩ BD.

Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) có hai điểm chung là S và O. Vậy giao tuyến của chúng là SO.

- Trong (SBD), gọi I = BN ∩ SO.

Ta có: $\begin{cases} I \in BN \\ I \in SO, SO \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow I = BN \cap (SAC)$



b) Tìm giao điểm J = MN ∩ (SAC)

- Chọn mp phụ (SMD) chứa MN.

Tìm giao tuyến của (SMD) và (SAC)

Trong (ABCD), gọi K = AC ∩ DM.

Hai mặt phẳng (SAC) và (SMD) có hai điểm chung là S và K .

Vậy giao tuyến của chúng là SK .

- Trong (SMD), gọi J = MN ∩ SK.

Ta có: $\begin{cases} J \in MN \\ J \in SK, SK \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow J = MN \cap (SAC)$

c) Chứng minh C, I, J thẳng hàng

Theo cách tìm điểm ở những câu trên ta có ba điểm C, I, J là điểm chung của hai mặt phẳng (BCN) và (SAC) ⇒ Ba điểm C, I, J cùng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (BCN) và (SAC). Kết luận C, I, J thẳng hàng.

Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC. Gọi E = AB ∩ CD , K = AD ∩ BC .

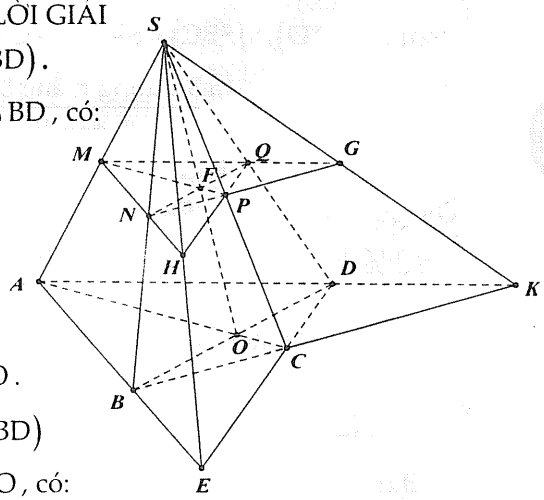
a) Tìm giao tuyến của $(SAC) \cap (SBD), (MNP) \cap (SBD)$.

b) Tìm giao điểm Q của đường thẳng SD với mặt phẳng (MNP).

c) Gọi H = NM ∩ PQ . Chứng minh 3 điểm S , H , E thẳng hàng.

d) Chứng minh 3 đường thẳng SK, QM, NP đồng qui.

LỜI GIẢI



a). Tìm giao tuyến của $(SAC) \cap (SBD)$.

Trong mp (ABCD) gọi O = AC ∩ BD , có:

$\begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SDB) \end{cases}$

$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD) \quad (1)$

$S \in (SAC) \cap (SBD) \quad (2)$

Từ (1) và (2) $(SAC) \cap (SBD) = SO$.

Tìm giao tuyến của $(MNP) \cap (SBD)$

Trong mp(SAC) gọi F = MP ∩ SO , có:

$$\begin{cases} F \in MP, MP \subset (MNP) \\ F \in SO, SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow F \in (MNP) \cap (SBD) \qquad (3)$$

Có: $\begin{cases} N \in (MNP) \\ N \in SB, SB \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow N \in (MNP) \cap (SBD) \qquad (4)$

Từ (3) và (4) $(MNP) \cap (SBD) = NF$.

b) Tìm giao điểm Q của đường thẳng SD với mặt phẳng (MNP).

Gọi $Q = NF \cap SD$ (vì $NF, SD \subset (SBD)$).

$$\begin{cases} Q \in SD \\ Q \in NF, NF \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow Q = SD \cap (MNP)$$

c) Gọi $H = NM \cap PQ$. Chứng minh 3 điểm S, H, E thẳng hàng.

$$\begin{cases} H = MN \cap PQ, MN \subset (SAB), PQ \subset (SCD) \Rightarrow H \in (SAB) \cap (SCD) \quad (*) \\ E = AB \cap CD, AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \Rightarrow E \in (SAB) \cap (SCD) \quad (**) \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \quad (***) \end{cases}$$

Từ $(*), (**), (***)$ suy ra ba điểm S, H, E thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) nên ba điểm S, H, E thẳng hàng.

d) Chứng minh 3 đường thẳng SK, QM, NP đồng qui.

Gọi $G = MQ \cap NP$ (vì $MQ, NP \subset (MNP)$) (5)

$$\begin{cases} G \in MQ, MQ \subset (SAD) \\ G \in NP, NP \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow G \in (SAD) \cap (SBC) \qquad (6)$$

Ngoài ra $(SAD) \cap (SBC) = SK \Rightarrow G \in SK$ (7)

Từ (5), (6), (7) suy ra 3 đường thẳng SK, QM, NP đồng qui.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SD, I là điểm trên cạnh SA sao cho AI = 2IS.

Gọi giao điểm K của IM với mặt phẳng (ABCD). Tính tỉ số KD/KA. Gọi N là trung điểm BC. Tìm thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt (AMN).

LỜI GIẢI

Trong mp(SAD) gọi $K = IM \cap AD$.

Vì $\begin{cases} K \in IM \\ K \in AD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow K = IM \cap (ABCD)$.

ΔSAD được vẽ lại ở hình 2.

Dựng $DF \,//\, KI (F \in SA)$.

Trong ΔSDF có IM là đường trung bình của tam giác.

$\Rightarrow SI = I = FA$.

Từ đó suy ra FD là đường trung bình của tam giác AIK.

$\Rightarrow$ D trung điểm của AK.

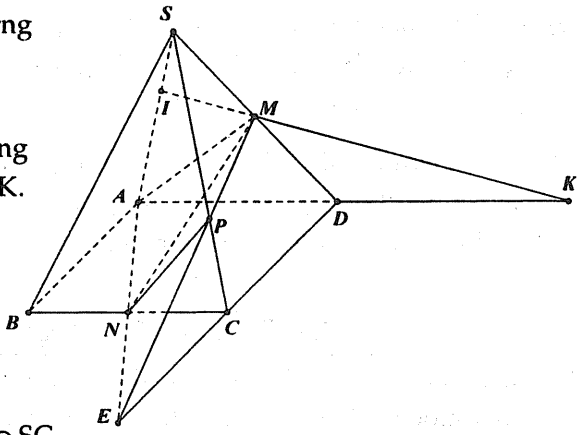
Kết luận $\dfrac{KD}{KA} = \dfrac{1}{2}$.

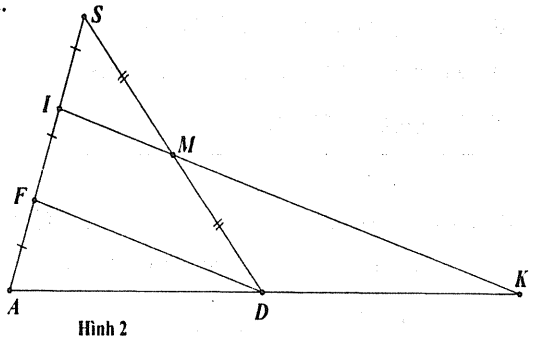
Trong mp (ABCD),

gọi $E = AN \cap CD$.

Trong mp (SCD) gọi: $P = EM \cap SC$.

Từ đó suy ra thiết diện của hình chóp S.ABCD bị cắt bởi mặt (AMN) là tứ giác AMPN.





Hình 2

Cho tứ diện ABCD. Gọi P và Q lần lượt là những điểm trên hai đoạn thẳng BC và BD, M là điểm trên đoạn AC. Giả sử không tồn tại song song trong hình vẽ của bài toán.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (MPQ). Suy ra giao điểm N của đường thẳng AD và mặt phẳng (MPQ).

b) PQ cắt CD tại I. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MPQ) với mặt phẳng (ACD). Nhận xét gì về vị trí của M, N, I?

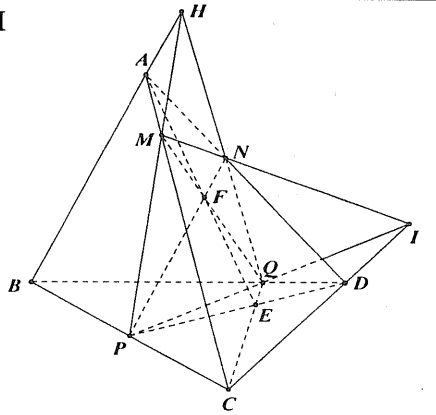
c) DP và CQ cắt nhau tại E, MQ và NP cắt nhau tại F. Chứng tỏ A, E, F thẳng hàng.

LỜI GIẢI

a) Trong mp(ABC) gọi $H = AB \cap MP$, có:

$$\begin{cases} H \in AB \\ H \in PM \subset (MPQ) \end{cases} \Rightarrow H = AB \cap (MPQ).$$

Ta có: H và Q là hai điểm chung của hai mặt phẳng (MPQ) và (ABD), nên giao tuyến của chúng là đường thẳng HQ. HQ cắt AD tại điểm N, thì N là giao điểm của AD và (MPQ).



b) M và I là hai điểm chung của hai mặt phẳng (MPQ) và (ACD).
Vậy giao tuyến của (ACD) và (MPQ) là đường thẳng MI.
Vì $N \in (MQP) \cap (ACD) \Rightarrow N \in MI$. Vậy ba điểm M , N , I thẳng hàng .

c) Vì ba điểm A , E , F là ba điểm chung của hai mặt phẳng (ADP) và (ACQ).
Nên chúng thuộc giao tuyến của (ADP) và (ACQ).
Kết luận ba điểm A , E , F thẳng hàng .

BÀI TẬP TỔNG HỢP CHƯƠNG I

Cho hình chóp S.ABCD với ABCD là hình bình hành. Gọi M là điểm bất kỳ thuộc SB, N thuộc miền trong tam giác SCD.

a) Tìm giao điểm của MN và mp (ABCD).

b) Tìm $SC \cap (AMN)$, $SD \cap (AMN)$.

c) Tìm $SA \cap (CMN)$.

LỜI GIẢI

a) Tìm giao điểm của MN và mp (ABCD).

Gọi $I = SN \cap CD \left(\text{vì } SN, CD \subset (SCD)\right)$. Chọn mặt phẳng (SBI) chứa MN.

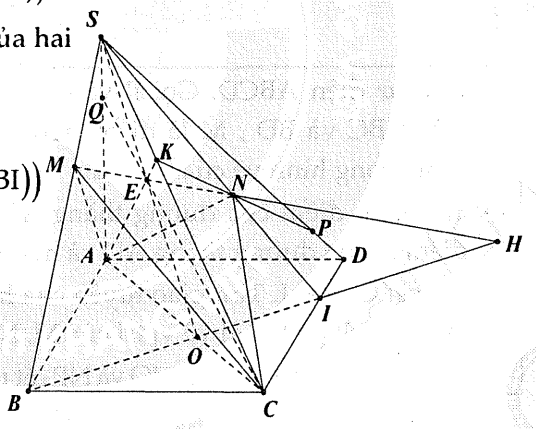
Ta có B và I là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SBI) và (ABCD) .

Vậy: $(SBI) \cap (ABCD) = BI$

Gọi $H = MN \cap BI \left(\text{vì } MN, BI \subset (SBI)\right)$

Ta có $\begin{cases} H \in MN \\ H \in BI, BI \subset (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow H = MN \cap (ABCD)$.



b) Tìm $SC \cap (MAN)$.

Đầu tiên ta tìm giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và (SBI)

Gọi $O = AC \cap BI \left(\text{vì } AC, BI \subset (ABCD)\right)$.

Ta có: S và O là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBI).

Vậy: $(SBI) \cap (SAC) = SO$.

Gọi $E = SO \cap MN \left(\text{vì } SO, MN \subset (SBI)\right)$.

Chọn mặt phẳng (SAC) chứa SC.

Tìm giao tuyến của (SAC) và (AMN).

$A \in (SAC) \cap (AMN)$ (1)

và $\begin{cases} E \in SO, SO \subset (SAC) \\ E \in MN, MN \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow E \in (SAC) \cap (AMN)$ (2)

Từ (1) và (2) : $(SAC) \cap (AMN) = AE$.

Gọi $K = SC \cap AE$ (vì $AE, SC \subset (SAC)$), có:

$\begin{cases} K \in SC \\ K \in AE, AE \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow K = SC \cap (AMN)$.

Tìm giao điểm của SD và mặt phẳng (AMN):

Ta có K và N là hai điểm chung của hai mặt phẳng (AMN) và (SCD) .

Vậy $(AMN) \cap (SCD) = KN$

Gọi P là giao điểm của KN và SD .

Suy ra P cũng là giao điểm của SD và mp(AMN).

c) Tìm giao điểm của SA và mặt phẳng (CMN).

Chọn mặt phẳng (SAC) chứa SA. Tìm $(SAC) \cap (CMN)$

Ta có $C \in (SAC) \cap (CMN)$ (3)

Theo câu b) $E = SO \cap MN$ ($SO, MN \subset (SBI)$), có:

$\begin{cases} E \in SO \subset (SAC) \\ E \in MN \subset (CMN) \end{cases} \Rightarrow E \in (SAC) \cap (CMN)$ (4)

Từ (3) và (4) $(SAC) \cap (CMN) = CE$

Gọi $Q = SA \cap CE$ (vì $SA, CE \subset (SAC)$).

Ta có: $\begin{cases} Q \in SA \\ Q \in CE, CE \subset (CMN) \end{cases} \Rightarrow Q = SA \cap (CMN)$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với AB song song CD. O là giao điểm của 2 đường chéo, M thuộc SB.

a) Xác định giao tuyến của $(SAC) \cap (SBD)$; $(SAD) \cap (SBC)$.

b) Tìm giao điểm của $SA \cap (MDC)$; $SO \cap (MDC)$.

LỜI GIẢI

a) Xác định giao tuyến của $(SAC) \cap (SBD)$.

Ta có S là điểm chung thứ nhất và O là điểm chung thứ hai của 2 mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Vậy $(SAC)\cap(SBD)=SO$

Xác định giao tuyến của $(SAD)\cap(SBC)$.

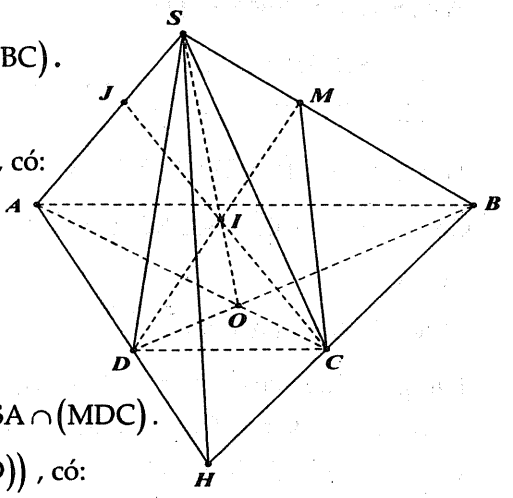
$S\in(SAD)\cap(SBC)$ (1).

Trong mp(ABCD) gọi $H=AD\cap BC$, có:

$\begin{cases}H\in AD, AD\subset(SAD)\\ H\in BC, BC\subset(SBC)\end{cases}$

$\Rightarrow H\in(SAD)\cap(SBC)$ (2)

Từ (1) và (2): $(SAD)\cap(SBC)=SH$.



b) Tìm giao điểm của $SO\cap(MDC)$; $SA\cap(MDC)$.

Gọi $I=SO\cap DM\left(\text{vì } SO, DM\subset(SBD)\right)$, có:

$\begin{cases}I\in SO\\ I\in DM, DM\subset(MCD)\end{cases}\Rightarrow I=SO\cap(MCD)$

Gọi $J=SA\cap CI\left(\text{vì } SA, CI\subset(SAC)\right)$, có:

$\begin{cases}J\in SA\\ J\in CI, CI\subset(MCD)\end{cases}\Rightarrow J=SA\cap(MCD)$.

Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, SC.

a) Tìm $I=AN\cap(SBD)$.

b) Tìm $K=MN\cap(SBD)$.

c) Tính tỉ số $\frac{KM}{KN}$.

d) Chứng minh B, I, K thẳng hàng. Tính tỉ số $\frac{IB}{IK}$.

LỜI GIẢI

a) Tìm giao tuyến của mp(SAC) và mp(SBD).

$S\in(SAC)\cap(SBD)$ (1)

$\begin{cases}O\in AC, AC\subset(SAC)\\ O\in BD, BD\subset(SBD)\end{cases}\Rightarrow O\in(SAC)\cap(SBD)$ (2)

Từ (1) và (2) $SO=(SAC)\cap(SBD)$

Gọi $I=SO\cap AN\left(SO, AN\subset(SAC)\right)$.

Suy ra $N=AN\cap(SBD)$

b) Tìm giao điểm K của NM và mp(SBD).

Chọn mp (ABN) chứa MN.

Tìm giao tuyến của mp (ABN) và mp (SBD).

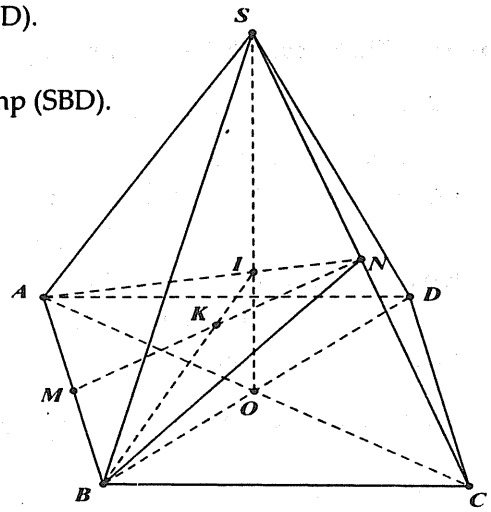
$\begin{cases} I \in SO, SO \subset (SBD) \\ I \in AN, AN \subset (ABN) \end{cases}$;

$\Rightarrow I \in (ABN) \cap (SBD)$ (3)

$B \in (ABN) \cap (SBD)$ (4)

Từ (3) và (4) $BI = (ABN) \cap (SBD)$;

$K = BI \cap MN$.



c) Tính tỉ số $\frac{KM}{KN}$

Gọi Q trung điểm của AI.

Ta có $AQ = QI = IN$ (Vì I là trọng tâm của tam giác SAC).

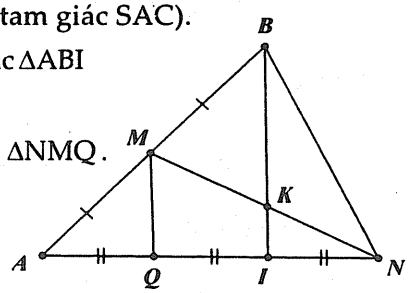
Ta có: MQ là đường trung bình của tam giác ΔABI

$\Rightarrow MQ // BI$.

Ta có: IK là đường trung bình của tam giác ΔNMQ.

Vậy K là trung điểm của MN.

Suy ra $\frac{KM}{KN} = 1$.



d) Theo cách tìm giao tuyến của câu b) thì 3 điểm B, K, I thẳng hàng.

Ta có: trong $\Delta NMQ : IK = \frac{1}{2}QM$

Và trong $\Delta ABI : QM = \frac{1}{2}BI \Rightarrow IB = 4IK \Leftrightarrow \frac{IB}{IK} = 4$.

Cho hình chóp SABC. Gọi K, N là trung điểm của SA, BC. Điểm M thuộc SC, $SM = \frac{2}{3}MC$.

a) Tìm thiết diện của hình chóp với mp (KMN).

b) Mp (KMN) cắt AB tại L. Tính tỉ số $\frac{LA}{LB}$.

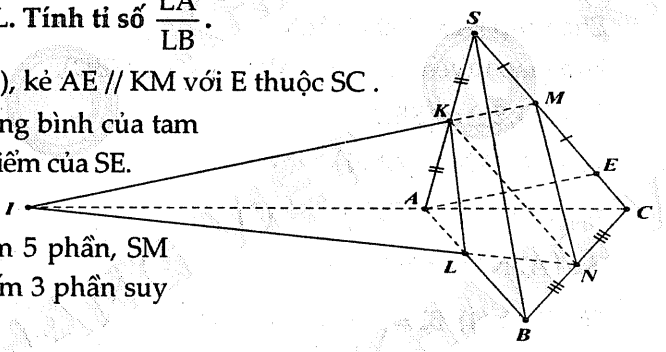
LỜI GIẢI

a) Tìm thiết diện của hình chóp với mp (KMN).

Trong mặt phẳng (SAC), gọi I là giao điểm của KM và AC.

Trong mặt phẳng (ABC), gọi L là giao điểm của IN và AB. Kết luận thiết diện cần tìm là MNLK.

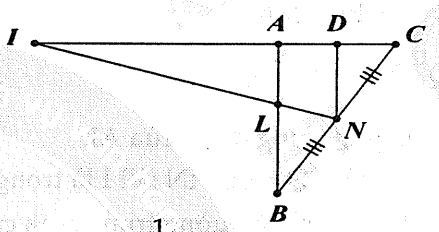
b) Mp (KMN) cắt AB tại L. Tính tỉ số $\frac{LA}{LB}$.



Trong mặt phẳng (SAC), kẻ AE // KM với E thuộc SC.
Ta có KM là đường trung bình của tam giác SAE nên M trung điểm của SE.

Đoạn SC được chia làm 5 phần, SM chiếm 2 phần, MC chiếm 3 phần suy ra CE chiếm 1 phần.

Trong tam giác CIM có $\frac{CE}{EM}=\frac{CA}{AI}=\frac{1}{2}$



$\Rightarrow CA=\frac{1}{2}AI$.

Trong ΔABC kẻ $DN // AB\left(D\in AC\right)$.

Vậy: DN là đường trung bình của ΔABC nên $DN=\frac{1}{2}AB$ (1)

Trong tam giác IDN có $\frac{IA}{ID}=\frac{AL}{DN}=\frac{4}{5}\Rightarrow DN=\frac{5}{4}AL$ (2)

Từ (1) và (2) có:

$\frac{1}{2}AB=\frac{5}{4}AL\Leftrightarrow 2AB=5AL\Leftrightarrow 2\left(LA+LB\right)=5LA\Leftrightarrow 2LB=3LA\Rightarrow\frac{LA}{LB}=\frac{2}{3}$

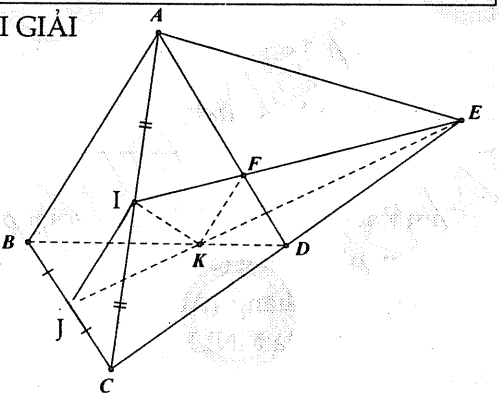
Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là trung điểm của AC, BC. Lấy K thuộc cạnh BD sao cho $BK=2KD$.

a) Tìm $E=CD\cap\left(IJK\right)$. Chứng minh $DE=DC$.

b) Tìm giao điểm $F=AD\cap\left(IJK\right)$. Chứng minh $FA=2FD$.

c) Tìm thiết diện của tứ diện ABCD với mp (IJK). Xác định hình tính của thiết diện.

LỜI GIẢI



a) Tìm $E=CD\cap\left(IJK\right)$.

$E=CD\cap JK\left(CD,JK\subset\left(BCD\right)\right)$, có:

$\begin{cases}E\in CD\\E\in JK,JK\subset\left(IJK\right)\end{cases}\Rightarrow E=CD\cap\left(IJK\right)$

Chứng minh $DE=DC$.

Trong ΔBCE kẻ $DP // EJ$.

Trong ΔBDP có $JK // PD$ nên:

$\frac{BJ}{JP}=\frac{BK}{KD}=2 \Rightarrow BJ=2JP \Rightarrow CI=2JP$.

Từ đó suy ra DP là đường trung bình của tam giác CEJ.

Suy ra D trung điểm của CE.

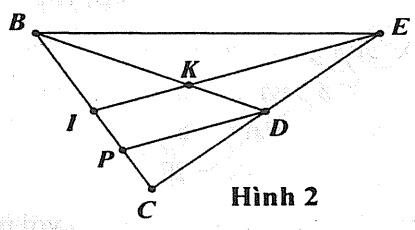
b) Tìm giao điểm $F=AD\cap(IJK)$. Chứng minh $FA=2FD$.

Vì $IE, AD\subset(ACD)$. Gọi $F=IE\cap AD$.

Mà $IE\subset(IJK)\Rightarrow F=AD\cap(IJK)$.

Xét trong tam giác ACE có F là giao điểm của 2 đường trung tuyến AD và EI. Suy ra F là trọng tâm của ΔACE.

Vậy $FA=2FD$



Hình 2

c) Tìm thiết diện của tứ diện ABCD với mp (IJK). Xác định hình tính của thiết diện.

Ta có: $\begin{cases}(IJK)\cap(ABC)=IJ;(IJK)\cap(BCD)=JK\\(IJK)\cap(ABD)=KF;(IJK)\cap(ACD)=FI\end{cases}$

Thiết diện cần tìm là tứ giác IJKF.

Trong $\Delta DAB: \frac{DK}{DB}=\frac{DF}{DA}=\frac{1}{3}\Rightarrow KF \,//\, AB$ (1)

Trong ΔCAB, IJ là đường trung bình $\Rightarrow IJ \,//\, AB$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác IJKF là hình thang.

Cho tứ diện S.ABC. Trên SB, SC lần lượt lấy 2 điểm I, J sao cho IJ không song song với BC. Trong tam giác ABC lấy một điểm K.

a). Xác định giao tuyến của 2 mp (ABC) và (IJK).

b). Xác định giao điểm của AB, AC và (IJK).

c). Tìm giao tuyến của (SAB) và (IJK).

d). Tìm giao điểm của BC, IJ với mp (SAK).

e). Xác định thiết diện của mp (IJK) với tứ diện S.ABC.

LỜI GIẢI

a). Xác định giao tuyến của 2 mp (ABC) và (IJK).

Gọi $D=IJ\cap BC\left(\text{vì } IJ, BC\subset(SBC)\right)$, có: $\begin{cases}D\in IJ, IJ\subset(IJK)\\D\in BC, BC\subset(ABC)\end{cases}$

$\Rightarrow D\in(IJK)\cap(ABC)$ (1)

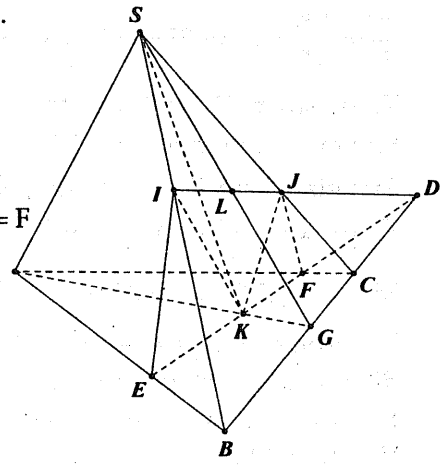
$K\in(IJK)\cap(ABC)$ (2).

Từ (1) và (2) $(IJK)\cap(ABC)=DK$.

b). Xác định giao điểm của AB, AC và (IJK).

Gọi E và F lần lượt là giao điểm của AB, AC với DK (vì AB , AC , DK cùng thuộc mặt phẳng (ABC)). Ngoài ra DK lại thuộc mặt phẳng (IJK) :

Vậy: $AB \cap mp(IJK) = E$; $AC \cap mp(IJK) = F$



c). Tìm giao tuyến của (SAB) và (IJK).

Ta có I và E là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (IJK) nên: $(SAB) \cap (IJK) = IE$.

d). Tìm giao điểm của BC, IJ với mp (SAK).

Gọi $G = AK \cap BC (\text{vì } AK, BC \subset (ABC))$, có:

$$\begin{cases} G \in BC \\ G \in AK,\ AK \subset (SAK) \end{cases} \Rightarrow G = BC \cap (SAK).$$

Gọi $L = SG \cap IJ (\text{vì } SG, IJ \subset (SBC))$, có:

$$\begin{cases} L \in IJ \\ L \in SG,\ SG \subset (SAK) \end{cases} \Rightarrow L = IJ \cap (SAK).$$

e). Xác định thiết diện của mp (IJK) với tứ diện S.ABC.

Theo cách dựng điểm ở những câu trên ta có:

$$\begin{cases} (IJK) \cap (ABC) = EF;\ (IJK) \cap (SAC) = FJ \\ (IJK) \cap (SAB) = IE;\ (IJK) \cap (SBC) = JI \end{cases}$$

Vậy: thiết diện cần tìm là tứ giác IJFE.

Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang, đáy lớn là AB. Trên SA, SB lần lượt lấy 2 điểm M, N sao cho MN không song song với AB. Gọi $O = AC \cap DB$.

a). Tìm giao điểm của đường thẳng AB với mp (MNO).

b). Tìm giao tuyến của mp (MNO) với các mặt (SBC) và (SAD).

c). Xác định thiết diện của (MNO) với hình chóp S.ABCD.

d). Gọi K là giao điểm của hai giao tuyến ở câu b, $E = AD \cap BC$. Chứng minh 3 điểm S, K, E thẳng hàng.

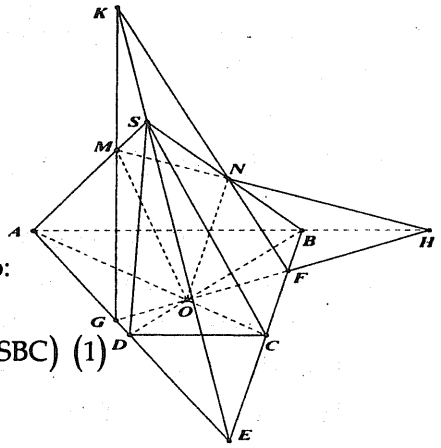
LỜI GIẢI

a). Tìm giao điểm của đường thẳng AB với mp (MNO).

Gọi $H = AB \cap MN (\text{vì } AB, MN \subset (SAB))$.

Vậy: $\begin{cases} H \in A\beta \\ H \in MN,\ MN \subset (MNO) \end{cases}$

$\Rightarrow H = AB \cap (MNO)$.



b). Tìm giao tuyến của mp (MNO) với các mặt phẳng (SBC) và (SAD).

Gọi $F = BC \cap HO (BC, HO \subset (ABCD))$, có:

$\begin{cases} F \in BC, BC \subset (SBC) \\ F \in HO, HO \subset (MNO) \end{cases} \Rightarrow F \in (MNO) \cap (SBC)$ (1)

$N \in (MNO) \cap (SBC)$ (2).

Từ (1) và (2) $(MNO) \cap (SBC) = FN$.

Trong mp(ABCD), gọi $G = AD \cap HO$,có:

$\begin{cases} G \in AD, AD \subset (SAD) \\ G \in HO, HO \subset (MNO) \end{cases} \Rightarrow G \in (MNO) \cap (SAD)$ (3)

Có: $M \in (MNO) \cap (SAD)$ (4).

Từ (3) và (4) $(MNO) \cap (SAD) = MG$.

c). Xác định thiết diện của (MNO) với hình chóp S.ABCD.

Theo cách dựng điểm ở những câu trên, ta có:

$\begin{cases} (MNO) \cap (ABCD) = GF;\ (MNO) \cap (SBC) = FN \\ (MNO) \cap (SAB) = NM;\ (MNO) \cap (SAD) = MG \end{cases}$

Vậy: thiết diện cần tìm là tứ giác MNFG.

d). Chứng minh 3 điểm S, K, E thẳng hàng.

$E = AD \cap BC,\ AD \subset (SAD),\ BC \subset (SBC)$

$\Rightarrow E \in (SAD) \cap (SBC)$ (*)

$K = GM \cap FN,\ GM \subset (SAD),\ FN \subset (SBC)$

$\Rightarrow K \in (SAD) \cap (SBC)$ (**)

$S \in (SAD) \cap (SBC)$ (***)

Từ (*)(**)(***) suy ra ba điểm E, K, S thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) nên ba điểm E, K, S thẳng hàng.

Cho tứ diện ABCD. Gọi M là trung điểm AB, K là trọng tâm của tam giác ACD.

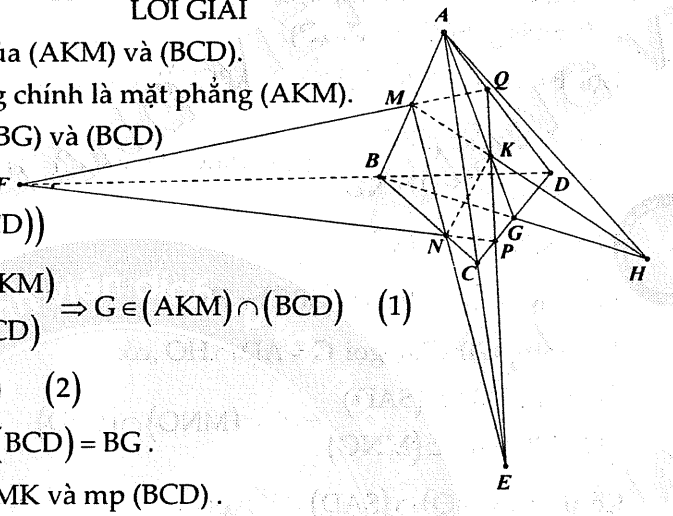
a). Xác định giao tuyến của (AKM) và (BCD).

b). Tìm giao điểm H của MK và mp (BCD). Chứng minh K là trọng tâm của tam giác ABH.

c). Trên BC lấy điểm N, tìm giao điểm P, Q của CD và AD với mp (MNK).

d). Chứng minh 3 đường thẳng MQ , NP , BD đồng qui.

LỜI GIẢI



a). Xác định giao tuyến của (AKM) và (BCD).

Mặt phẳng (ABG) cũng chính là mặt phẳng (AKM).

Tìm giao tuyến của (ABG) và (BCD)

Gọi $G = AK \cap CD$

$(\text{vì } AK, CD \subset (ACD))$

Có: $\begin{cases} G \in AK, AK \subset (AKM) \\ G \in CD, CD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow G \in (AKM) \cap (BCD) \quad (1)$

Và $B \in (ABG) \cap (BCD) \quad (2)$

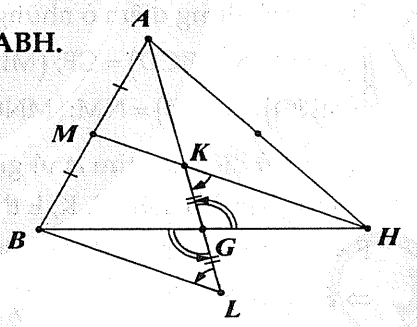
Từ (1) và (2) $(ABG) \cap (BCD) = BG$.

b). Tìm giao điểm H của MK và mp (BCD) .

Trong mp(ABG) gọi $H = MK \cap BG$, có:

$\begin{cases} H \in MK, \\ H \in BG, BG \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow H = MK \cap (BCD)$

Chứng minh K là trọng tâm của tam giác ABH.



Vì K là trọng tâm của tam giác ACD nên K chia đoạn AG thành ba phần bằng nhau.

Gọi L là điểm đối xứng của K qua G.

Vậy K là trung điểm của AL.

Trong Δ ABL, MK là đường trung bình của tam giác .

Ta có: $\Delta BGL = \Delta HGK \ (g.c.g) \Rightarrow BG = HG$.

Vậy K là trọng tâm của tam giác ABH.

c) Tìm giao điểm P, Q của CD và AD với mp (MNK).

Trong mp(ABC) gọi $E = MN \cap AC$.

Trong mp(ACD) đường thẳng EK cắt CD và AD lần lượt tại P và Q , thì P và Q chính là giao điểm của CD và AD với mp(MNK) .

d). Chứng minh 3 đường thẳng MQ , NP , BD đồng qui.

Trong mp(MNK) gọi $F = MQ \cap NP$, vì:

$$\begin{cases} F \in MQ \subset (ABD) \\ F \in NP \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow F \in (ABD) \cap (BCD)$$

Từ đó suy ra F thuộc giao tuyến BD của hai mặt phẳng (ABD) và (BCD).

Kết luận ba đường thẳng MQ , NP , BD đồng qui tại điểm F.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAD, M trung điểm của SB

a) Tìm giao điểm N của MG và mặt phẳng (ABCD).

b) Chứng minh ba điểm C, D, N thẳng hàng. và D trung điểm của CN.

LỜI GIẢI

Trong mặt phẳng (SBE) chứa MG , gọi N là giao điểm của MG và BE .

Vì BE thuộc mặt phẳng (ABCD), nên N thuộc mặt phẳng (ABCD) .

Trong mặt phẳng (SBN) kẻ EF // MN (F thuộc SB) .

Trong tam giác SEF có MG // EF nên có:

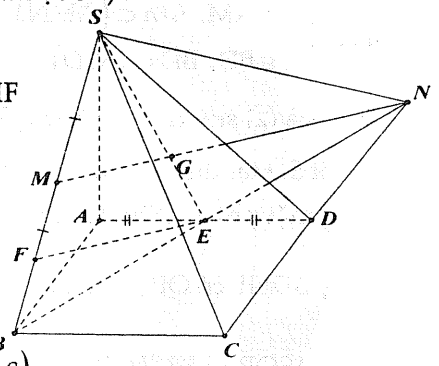
$\frac{SM}{MF} = \frac{SG}{GE} = 2 \Rightarrow SM = 2MF \Leftrightarrow BM = 2MF$

Vậy F trung điểm của BM .

Trong Δ BMN có EF // MN nên có:

$\frac{BF}{FM} = \frac{BE}{EN} = 1 \Rightarrow BE = EN$,

Vậy E là trung điểm của BN .



Dễ dàng chứng minh $\Delta AEB = \Delta DEN (c.g.c)$

$\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{END}$. Hai góc này bằng nhau theo trường hợp so le trong nên AB // DN, mà AB // CD . Vậy ba điểm C , D , N thẳng hàng .

ED là đường trung bình của tam giác NBC suy ra D là trung điểm của CN .

Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình bình hành ABCD có tâm là O. Gọi M là trung điểm của SC.

a). Xác định giao tuyến của (ABM) và (SCD).

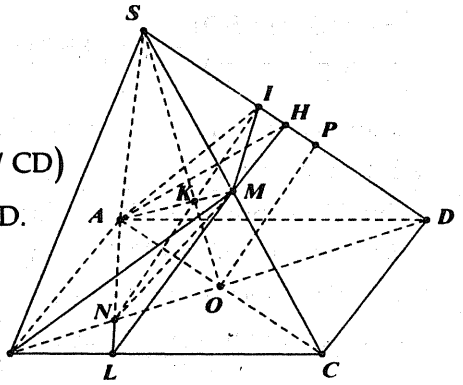
b). Gọi N là trung điểm của BO. Hãy xác định giao điểm I của (AMN) với SD. Chứng minh rằng $\frac{SI}{ID} = \frac{2}{3}$. Tìm thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt phẳng (AMN).

LỜI GIẢI

a). Xác định giao tuyến của (ABM) và (SCD).

$$\begin{cases} M \in (ABM) \cap (SCD) \\ AB \,//\, CD \\ AB \subset (ABM), CD \subset (SCD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (ABM) \cap (SCD) = MH \,(MH \,//\, AB \,//\, CD)$$



b). Xác định giao điểm I của (AMN) với SD.

Ta có $(SAC) \cap (SBD) = SO$.

Gọi $K = AM \cap SO \,(AM, SO \subset (SAC))$.

Tìm giao tuyến của (AMN) và (SBD) ?

Ta có: $\begin{cases} N \in (AMN) \\ N \in BD, BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow N \in (AMN) \cap (SBD) \qquad (1)$

Ta có $\begin{cases} K \in AM,\ AM \subset (AMN) \\ K \in BD,\ BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow K \in (AMN) \cap (SBD) \qquad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $(AMN) \cap (SBD) = NK$.

NK cắt SD tại điểm I, thì I chính là giao điểm của mặt phẳng (AMN) với SD.

Trong mặt phẳng (SBD), từ O dựng OP // NI $(P \in SD)$.

Trong ΔDNI có OP // DI, nên có $\dfrac{DO}{ON} = \dfrac{DP}{PI} = \dfrac{2}{1} = 2 \Rightarrow DP = 2PI \qquad (1)$

Trong ΔSOP có KI // OP, nên có: $\dfrac{SK}{KO} = \dfrac{SI}{PI} = \dfrac{2}{1} = 2 \Rightarrow SI = 2PI \qquad (2)$

(K là trọng tâm ΔSAC).

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{IS}{ID} = \dfrac{2}{3}$

Thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt phẳng (AMN).

Gọi L là giao điểm của AN và BC. Kết luận thiết diện cần tìm là tứ giác ALMI.

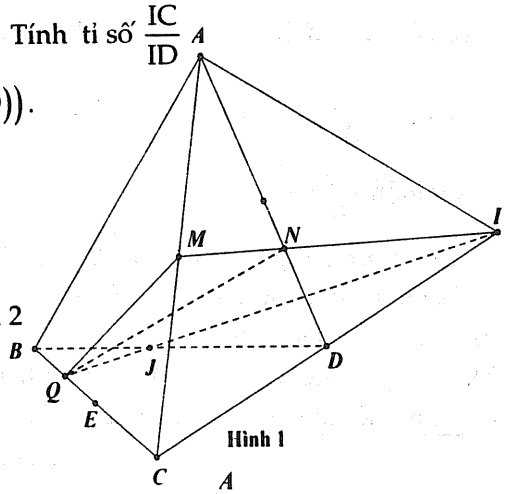
Cho tứ diện ABCD. Trên AD lấy N sao cho AN = 2ND, M là trung điểm của AC, trên BC lấy Q sao cho $BQ = \dfrac{1}{4}BC$.

a) Tìm giao điểm I của MN với (BCD). Tính tỉ số $\dfrac{IC}{ID}$.

b) Tìm giao điểm J của BD với (MNQ). Tính tỉ số $\dfrac{JB}{JD}$, $\dfrac{JQ}{JI}$.

LỜI GIẢI

a) Tìm giao điểm I của MN với (BCD). Tính tỉ số $\frac{IC}{ID}$



Hình 1

Gọi $I = MN \cap CD \left(MN, CD \subset (ACD)\right)$.

Vì $\begin{cases} I \in MN \\ I \in CD \ , \ CD \subset (BCD) \end{cases}$

$\Rightarrow I = MN \cap (BCD)$

Tam giác ACI được vẽ lại như hình 2

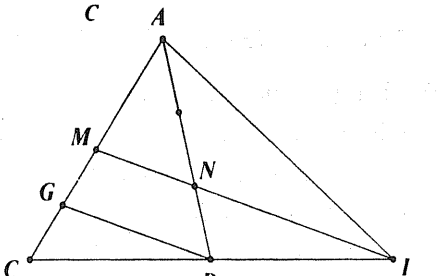
Từ D kẻ DG // IM (G ∈ AC).

Trong ΔAGD có: $\frac{AM}{MG} = \frac{AN}{ND} = 2$

$\Rightarrow AM = 2MG$.

Vậy: G trung điểm của CM suy ra DG là đường trung bình của tam giác CMI, suy ra D là trung điểm của CI

Kết luận: $\frac{IC}{ID} = 2$.



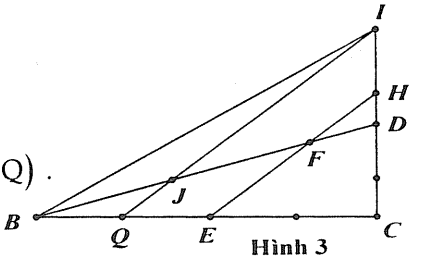
Hình 2

b) Tìm giao điểm J của BD với (MNQ).

Tính tỉ số $\frac{JB}{JD}$, $\frac{JQ}{JI}$.

Gọi $J = QI \cap BD \left(QI, BD \subset (BCD)\right)$.

Vì $\begin{cases} J \in BD \\ J \in QI \ , \ QI \subset (MNQ) \end{cases} \Rightarrow J = BD \cap (MNQ)$.



Hình 3

Tam giác BCI được vẻ lại như hình 3.

Gọi E trung điểm của BC, từ E kẻ đường thẳng song song với QI cắt BD, IC lần lượt tại F và H.

Ta có QJ là đường trung bình của tam giác BEF $\Rightarrow$ BJ = JF (1).

Trong ΔCQI có: $\frac{CE}{EQ} = \frac{CH}{HI} = 2 \Rightarrow CH = 2HI$

$\Leftrightarrow CD + DH = 2HI \Leftrightarrow DI + DH = 2HI$

$\Leftrightarrow DH + HI + DH = 2HI \Leftrightarrow HI = 2DH$.

Trong ΔDIJ có : $\frac{DF}{FJ} = \frac{DH}{HI} = \frac{1}{2} \Rightarrow DF = \frac{1}{2}FJ$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{JB}{JD} = \frac{2}{3}$.

Ta có: $EF = 2QJ$, $FH = \frac{1}{3}IJ$ và $EH = \frac{2}{3}IQ \Leftrightarrow EF + FH = \frac{2}{3}(IJ + JQ)$

$\Leftrightarrow 2JQ + \frac{1}{3}IJ = \frac{2}{3}(IJ + JQ) \Leftrightarrow IJ = 4JQ$.

Kết luận $\frac{JQ}{JI} = \frac{1}{4}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O . Gọi M , N lần lượt trung điểm của SC và SA , E trọng tâm của tam giác ABC .

a). Tìm giao điểm I của SD và mặt phẳng (AME). Chứng minh EI // SB .

b). Tìm giao điểm H của SD và mặt phẳng (MNE) .

c). Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNE) .

LỜI GIẢI

Ta có $SO = (SAC) \cap (SBD)$. Gọi $J = AM \cap SO$ $(AM, SO \subset (SAC))$.

a). Tìm giao điểm của I của SD và mặt phẳng (AME).

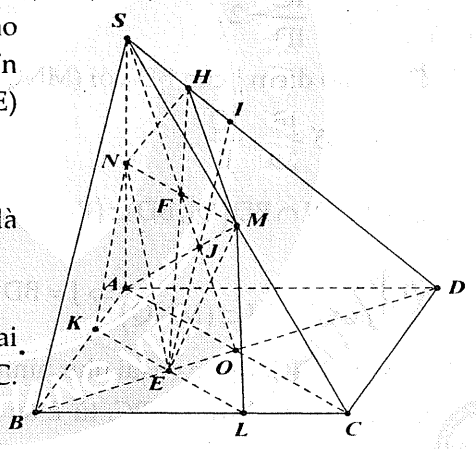
Chọn mặt phẳng (SBD) chứa SD.

Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AME) và (SBD).

Có E là điểm chung thứ nhất, J là giao điểm của AM và SO. Mà AM, SO lần lượt thuộc trong hai mặt phẳng (AME) và (SBD).

Vậy giao tuyến của chúng là EJ.

Kéo dài EJ cắt SD tại một điểm thì đó là điểm I cần tìm.



Chứng minh EI // SB:

Vì J là giao điểm của AM, SO là hai đường trung tuyến của tam giác SAC.

Nên J là trọng tâm của tam giác SAC.

Ta có $\frac{OJ}{OS} = \frac{OE}{OB} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ EJ // SB (theo định lý đảo Talet), hay EI // SB.

b). Tìm giao điểm H của SD và mặt phẳng (MNE) .

Chọn mặt phẳng (SBD) chứa SD.

Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (NME) và (SBD).

Gọi $F = MN \cap SO$ $(MN, SO \subset (SAC))$.

Ta có $\begin{cases} F \in MN, MN \subset (MNE) \\ F \in SO, SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow F \in (MNE) \cap (SBD)$ (1)

Ngoài ra $E \in (MNE) \cap (SBD)$ (2)

Từ (1) và (2) thì $EF = (MNE) \cap (SBD)$.

Gọi $H = EF \cap SD \left(EF, SD \subset (SBD)\right) \Rightarrow H = SD \cap (MNE)$.

c). Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNE).

Đầu tiên tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNE) và (ABCD).

Ta có: E là điểm chung thứ nhất, có MN // AC, mà hai đường thẳng MN, AC lần lượt thuộc hai mặt phẳng (MNE) và (ABCD).

Vậy giao tuyến của chúng qua E và // với AC cắt AB, BC lần lượt tại K và L.

Kết luận thiết diện cần tìm là đa giác KLMHN.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và SC.

a) Tìm giao điểm K của đường thẳng MN với mặt phẳng (SBD). Tính tỉ số $\frac{KM}{KN}$.

b) Gọi E trung điểm của SA. Tìm giao điểm F của SD và mặt phẳng (EMN). Chứng minh tứ giác MEFN là hình thang.

c) Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (EMN).

LỜI GIẢI

a) Tìm giao điểm K của đường thẳng MN với mặt phẳng (SBD).

Chọn mặt phẳng (SMC) chứa MN. Tìm giao tuyến của (SMC) và (SBD).

Ta có $S \in (SMC) \cap (SBD)$ (1)

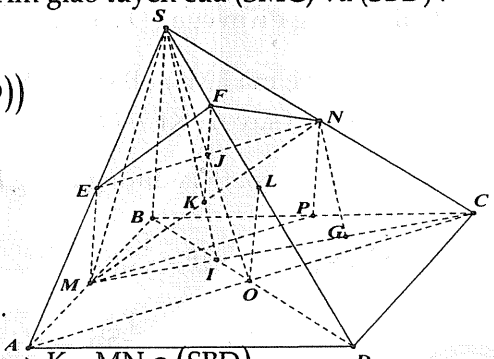
Gọi $I = MC \cap BD \left(MC, BD \subset (ABCD)\right)$

$\begin{cases} I \in MC,\ MC \subset (SMC) \\ I \in BD,\ BD \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow I \in (SMC) \cap (SBD)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (SMC) \cap (SBD) = SI$.

Gọi $K = MN \cap SI \left(MN, SI \subset (SMC)\right) \Rightarrow K = MN \cap (SBD)$.



Tính tỉ số $\frac{KM}{KN}$.

Trong tam giác SMC kẻ NG // SI (G ∈ CM).

Trong ΔCIS có NG // SI $\Rightarrow \frac{CN}{NS} = \frac{CG}{GI} = 1 \Rightarrow CG = GI$.

Vì I là trọng tâm của tam giác ABC nên suy ra $MI = IG = GC$.

Trong ΔMNG có: IK // NG $\Rightarrow \frac{MK}{KN} = \frac{MI}{IG} = 1 \Rightarrow MK = KN$.

Vậy $\frac{KM}{KN} = 1$.

b). Tìm giao điểm F của SD và mặt phẳng (EMN).

Chọn mặt phẳng (SBD) chứa SD, tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBD) và (MNE)

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$.

Gọi $J = EN \cap SO (EN, SO \subset (SAC))$.

$$\begin{cases} J \in EN, EN \subset (MNE) \\ J \in SO, SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow J \in (MNE) \cap (SBD) \qquad (1)$$

Theo câu a) thì K là điểm chung thứ 2. (2)

Từ (1) và (2) thì $(MNE) \cap (SBD) = KJ$.

Gọi $F = KJ \cap SD \Rightarrow K = SD \cap (MNE)$.

Chứng minh tứ giác MEFN là hình thang.

Vì EN là đường trung bình của tam giác SAC.

Dễ dàng chứng minh J trung điểm của EN.

Trong tam giác MNE, KJ là đường trung bình của tam giác nên:

$KJ = \frac{1}{2}EM$, $KJ \,//\, EM$.

Gọi L trung điểm của SD có $OL = \frac{1}{2}SB$, $OL \,//\, SB$. (3)

Vì $KF \,//\, EM$, mà $EM \,//\, SB$ suy ra $KF \,//\, SB$. (4).

Từ (3) và (4) suy ra $KF \,//\, O$.

Trong ΔSOL có: JF là đường trung bình nên $JF = \frac{1}{2}OL$.

Mà $OL = \frac{1}{2}SB \Rightarrow JF = \frac{1}{4}SB$. (5)

Và $KJ = \frac{1}{2}ME$ mà $ME = \frac{1}{2}SB \Rightarrow KJ = \frac{1}{4}SB$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra: $KF = \frac{1}{2}SB \Rightarrow KF = EM$.

Vậy: tứ giác EMKF là hình bình hành .

Kết luận tứ giác MNFE là hình thang vì có $EF \,//\, MN$.

c). Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (EMN).

Tìm giao tuyến của (MNE) và (ABCD) có :

$$\begin{cases} M \in (MNE) \cap (ABCD) \\ EN \,//\, AC \end{cases} \Rightarrow (MNE) \cap (ABCD) = MP \; (MP \,//\, AC \,//\, EN, P \in BD)$$

Thiết diện cần tìm là ngũ giác MPNFE .

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành M là điểm trên cạnh AD sao cho AM = 2MD, K là trung điểm cạnh SB.

a). Tìm giao điểm F của DK và mp(SMC). Tính tỉ số $\frac{DF}{DK}$.

b). Gọi E là điểm trên SC sao cho $\frac{SE}{SC}=\frac{1}{3}$, gọi H là giao điểm của KE và mp(SAD). Tính tỉ số $\frac{HE}{HK}$?

c) Gọi I là điểm trên cạnh SD (DI > SI), P là giao điểm của AK và (SDC), Q là giao điểm CI và (SAB). Chứng minh P , Q , S thẳng hàng .

LỜI GIẢI

a). Tìm giao điểm F của DK và mp(SMC). Tính tỉ số $\frac{DF}{DK}$.

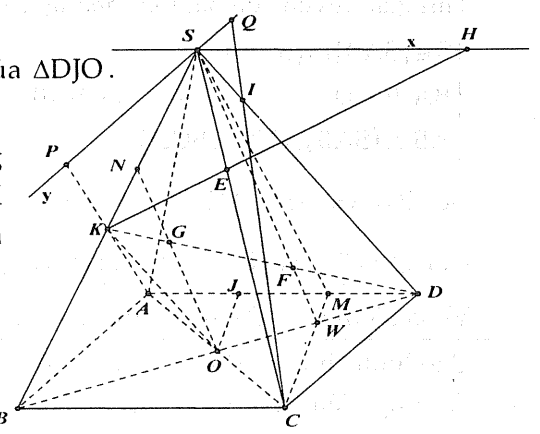
Gọi J trung điểm của AM.

Ta có MW là đường trung bình của ΔDJO.

$\Rightarrow$ W là trung điểm của OD.

Trong mặt phẳng (SBD) dựng đường thẳng d // SW. d cắt DK và SB lần lượt tại G và N . WF là đường trung bình của ΔDGO

$\Rightarrow$ F trung điểm của DG .



Trong ΔBSW có: ON // WS :

$$\frac{BN}{BS}=\frac{BO}{BW}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{BK+KN}{2KS}=\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{BK}{2KS}+\frac{KN}{2KS}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{2}+\frac{KN}{2KS}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{KN}{KS}=\frac{1}{3}.$$

Trong ΔKSF có GN // FS: $\frac{KN}{KS}=\frac{KG}{KF}=\frac{1}{3}\Rightarrow KF=3KG\Rightarrow GF=2KG$

Kết luận: $\frac{DF}{DK}=\frac{2KG}{5KG}=\frac{2}{5}$.

b). Tính tỉ số $\frac{HE}{HK}$

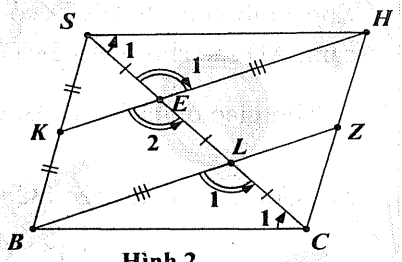
Có: $\begin{cases}S\in(SBC)\cap(SAD)\\BC\ //\ AD\\BC\subset(SBC),AD\subset(SAD)\end{cases}\Rightarrow(SBC)\cap(SAD)=Sx$ (Sx // BC // AD).

Gọi $H=KE\cap Sx\left(KE,Sx\subset(SBC)\right)\Rightarrow H=KE\cap(SAD)$.

Vẽ lại mặt phẳng (SBC) như hình 2 .

Gọi L trung điểm của EC, KE đường trung bình của tam giác SBL nên

$KE = \frac{1}{2}BL$ (1)



Hình 2

Ta có: $\widehat{S_1} = \widehat{C_1}$ (so le trong);

$\widehat{E_1} = \widehat{E_2}$ (đối đỉnh), $\widehat{E_2} = \widehat{L_1}$ (đồng vị) $\Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{L_2}$.

Từ đó suy ra: $\Delta SEH = \Delta CLB(g.c.g) \Rightarrow BL = HE$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $\frac{HE}{HK} = \frac{2}{3}$.

c). Chứng minh P , Q , S thẳng hàng .

Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) có :

$$\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ BA \;//\; CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sy \text{ (Sy // AB // CD).}$$

Gọi $P = AK \cap Sy(AK, Sy \subset (SAB)) \Rightarrow P = AK \cap (SCD)$;

Gọi $Q = CI \cap Sy(CI, Sy \subset (SCD)) \Rightarrow Q = CI \cap (SAB)$;

Vì ba điểm P, S, Q cùng nằm trên giao tuyến Sy nên chúng thẳng hàng.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SC.

a). Tìm giao điểm I của AN và (SBD). Tính $\frac{IA}{IN}$.

b). Tìm giao điểm K của MN và (SBD). Tính $\frac{KM}{KN}$.

c). Chứng tỏ B, I, K thẳng hàng. Tính $\frac{IB}{IK}$. Gọi E là trung điểm của SA. Tìm thiết diện của (MNE) và hình chóp.

LỜI GIẢI

a) Tìm giao tuyến của mp(SAC) và mp(SBD).

$S \in (SAC) \cap (SBD)$ (1)

$$\begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$.

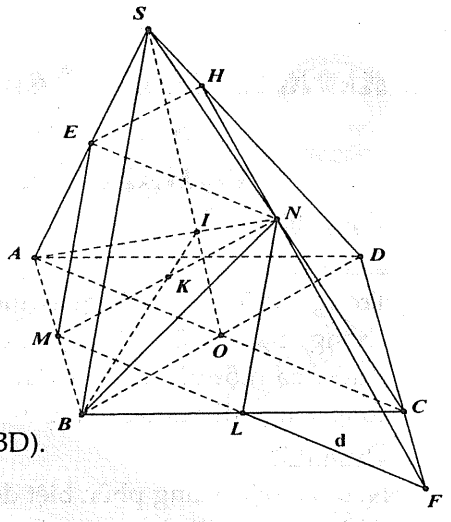
Gọi $I = SO \cap AN\left(SO,\ AN \subset (SAC)\right)$

Suy ra $I = AN \cap (SBD)$.

Vì SO, AN là hai trung tuyến của tam giác của tam giác SAC.

$\Rightarrow$ I trọng tâm của tam giác SAC.

Nên $\dfrac{IA}{IN} = 2$.



b) Tìm giao điểm K của NM và mp(SBD).

Chọn mp(ABN) chứa MN.

Tìm giao tuyến của mp (ABN) và mp (SBD).

$\begin{cases} I \in SO\ ,\ SO \subset (SBD) \\ I \in AN\ ,\ AN \subset (ABN) \end{cases}$

$\Rightarrow I \in (ABN) \cap (SBD)$ (3)

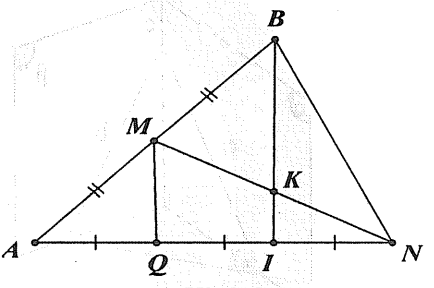
$B \in (ABN) \cap (SBD)$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ $BI = (ABN) \cap (SBD)$.

Vẽ lại tam giác ABN như hình 2.

Gọi Q trung điểm của AI.

Ta có $AQ = QI = IN$.



Hình 2

Xét ΔNMQ, ta có: IK là đường trung bình của tam giác.

Vậy: K là trung điểm của MN. Suy ra: $\dfrac{KM}{KN} = 1$

c) Theo cách tìm giao tuyến của câu b) thì 3 điểm B, K, I thẳng hàng.

Trong ΔNMQ, ta có: $IK = \dfrac{1}{2}QM$

Và trong ΔABI: $QM = \dfrac{1}{2}BI \Rightarrow IB = 4IK \Leftrightarrow \dfrac{IB}{IK} = 4$.

Hai mặt phẳng (MNE) và (ABCD) có M là điểm chung và có NE // AC, nên: giao tuyến d của chúng qua M và d // AC // NE.

Gọi $F = d \cap CD\left(d,\ CD \subset (ABCD)\right)$; gọi $H = FN \cap SD$ $\left(FN, SD \subset (SCD)\right)$.

Kết luận thiết diện của mặt phẳng (MNE) cắt hình chóp S.ABCD là đa giác EMLNH.

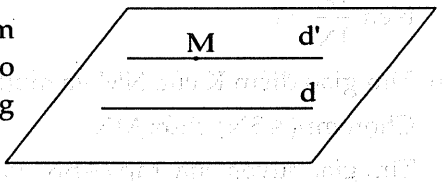
CHƯƠNG II: QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Tính chất:

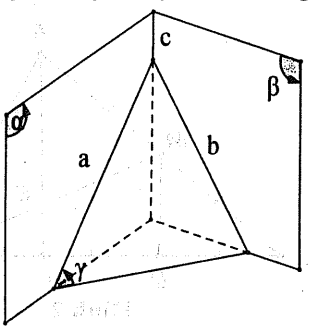
Định lí 1:

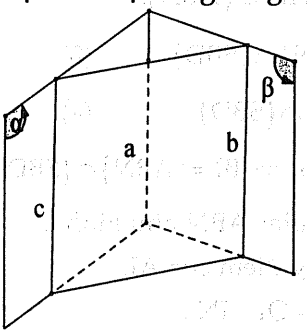
Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.



Định lí 2:

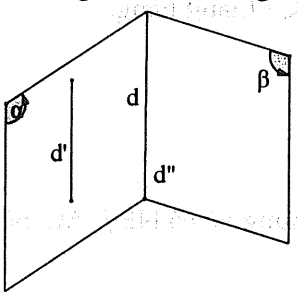
Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

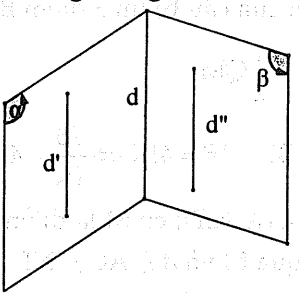


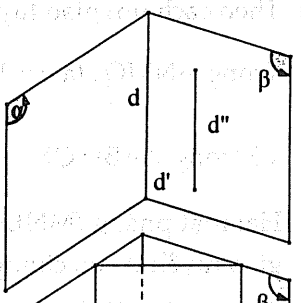


Hệ quả:

Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

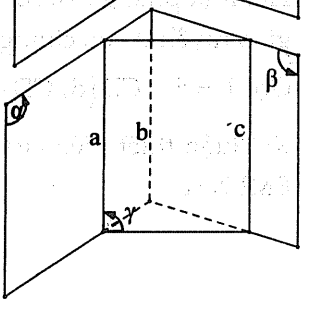






Định lí 3:

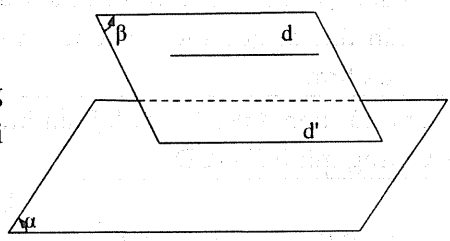
Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.



ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

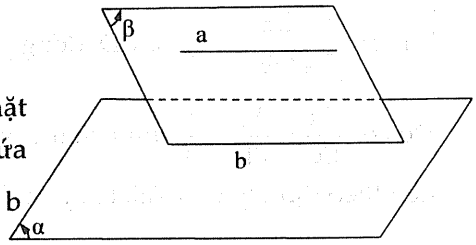
Định lí 1:

Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với (α) .



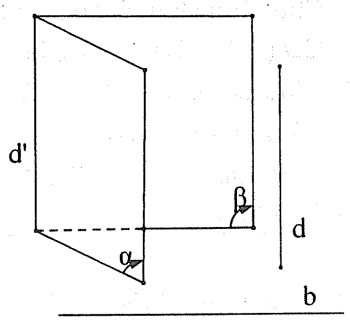
Định lí 2:

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a .



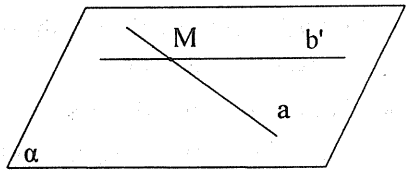
Hệ quả:

Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.



Định lí 3:

Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.



DẠNG 1: Chứng minh đường thẳng song song với đường thẳng, đường thẳng song song với một mặt phẳng ...

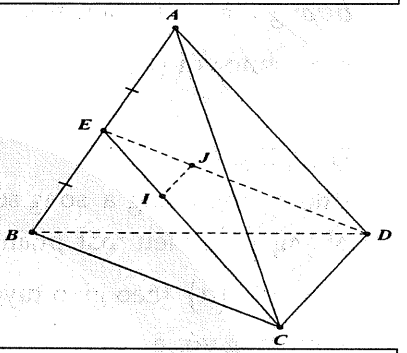
Chứng minh hai đường thẳng song song thì dựa vào hình học phẳng: Định lý Talet đảo, đường trung bình...

Muốn chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng (P), ta phải chứng minh đường thẳng d song song với một đường thẳng thuộc mp (P).

Tìm giao tuyến cách 2: Tìm một điểm chung của hai mặt phẳng, tìm trong hai mặt phẳng lần lượt có hai đường thẳng song song với nhau. Giao tuyến cần tìm đi qua điểm chung và song song với hai đường thẳng song song vừa tìm.

Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD. Chứng minh IJ // CD.

LỜI GIẢI



Gọi E là trung điểm AB.

Ta có: $\begin{cases} I \in CE \\ J \in DE \end{cases} \Rightarrow$ IJ và CD đồng phẳng

Do có: $\frac{EI}{EC} = \frac{EJ}{ED} = \frac{1}{3}$ (tính chất trọng tâm),

nên theo định lý đảo Talet suy ra IJ // CD.

Cho hình chóp S.ABCD với đáy ABCD là hình thang với cạnh đáy AB và CD (AB >CD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB.

a) Chứng minh: MN // CD

b) Tìm $P = SC \cap (ADN)$

c) Kéo dài AN và DP cắt nhau tại I. Chứng minh: SI // AB // CD. Tứ giác SABI là hình gì?

LỜI GIẢI

a) Chứng minh: MN // CD:

Trong tam giác SAB, ta có MN // AB (vì MN là đường trung bình)

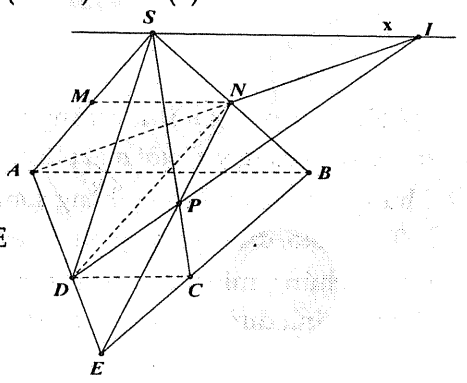
Mà AB // CD (ABCD là hình thang). Vậy: MN // CD.

b) Tìm $P = SC \cap (ADN)$:

- Chọn mp phụ (SBC) chứa SC. Tìm giao tuyến của (SBC) và (ADN).

Ta có: N là điểm chung của (SBC) và (ADN). (1)

Trong (ABCD), gọi $E = AD \cap BC$.



Có: $\begin{cases} E \in AD \subset (ADN) \\ E \in BC \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow E \in (ADN) \cap (SBC)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (SBC) \cap (ADN) = NE$

- Trong (SBC) gọi $P = SC \cap NE$.

Có: $\begin{cases} P \in SC \\ P \in NE \subset (ADN) \end{cases} \Rightarrow P = SC \cap (ADN)$.

c) Chứng minh: SI // AB // CD. Tứ giác SABI là hình gì?

$S \in (SAB) \cap (SCD)$ (3)

Và $\begin{cases} I \in AN \subset (SAB) \\ I \in DP \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD)$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $SI = (SAB) \cap (SCD)$

Ta có: $\begin{cases} SI = (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB),\ CD \subset (SCD) \Rightarrow SI \text{ // } AB \text{ // } CD. \\ AB \text{ // } CD \end{cases}$

Xét ΔASI, ta có: SI // MN (vì cùng song song AB) và M là trung điểm AB. Vậy MN là đường trung bình của tam giác. Suy ra: SI = 2MN .

Ta có: $\begin{cases} SI \text{ // } AB \\ SI = 2\ MN,\ AB = 2MN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SI \text{ // } AB \\ SI = AB \end{cases}$

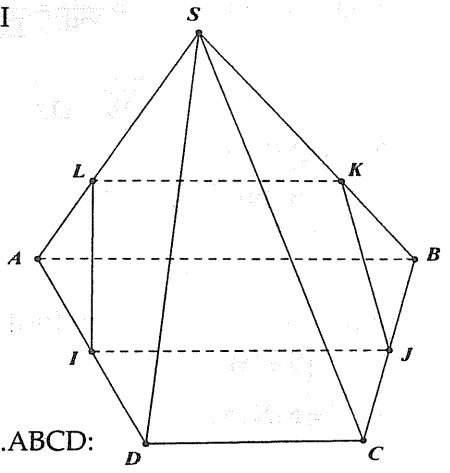
Vậy tứ giác SABI là hình bình hành.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang (đáy lớn AB). Gọi I, J lần lượt là trung điểm AD và BC, K là điểm trên cạnh SB sao cho SK = $\frac{2}{3}$SB.

a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (IJK).

b) Tìm thiết diện của (IJK) với hình chóp S.ABCD. Tìm điều kiện để thiết diện là hình bình hành.

LỜI GIẢI



a). Tìm giao tuyến của (SAB) và (IJK):

Từ K kẻ KL // AB (L ∈ SA).

$\begin{cases} K \in (SAB) \cap (IJK) \\ AB \text{ // } IJ \\ AB \subset (SAB), IJ \subset (IJK) \end{cases}$

(vì IJ là đường trung bình hình thang)

$\Rightarrow (SAB) \cap (IJK) = KL$

(Vì KL // AB // IJ, K ∈ SA)

b). Tìm thiết diện của (IJK) với hình chóp S.ABCD:

Ta có: $\begin{cases}(IJK)\cap(ABCD)=IJ\ ,\ (IJK)\cap(SBC)=JK\\(IJK)\cap(SAB)=KL\ ,\ (IJK)\cap(SAD)=LI\end{cases}$

Thiết diện cần tìm là hình thang IJKL (Vì IJ // LK // AB)

Do IJ là đường trung bình của hình thang ABCD $\Rightarrow$ $IJ=\frac{1}{2}(AB+CD)$.

Xét ΔSAB có : $\frac{LK}{AB}=\frac{SK}{SB}=\frac{2}{3}\Rightarrow LK=\frac{2}{3}AB$.

Để IJKL là hình bình hành $\Leftrightarrow$ IJ = KL

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(AB+CD)=\frac{2}{3}.AB \Leftrightarrow AB=3.CD$

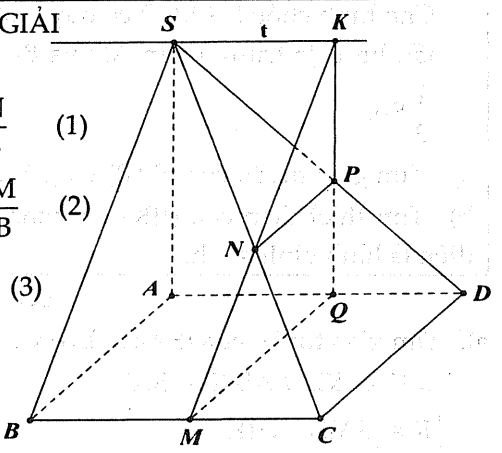
Vậy: thiết diện IJKL là hình bình hành $\Leftrightarrow$ AB = 3CD.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M,N,P, Q lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh BC, SC, SD,AD sao cho MN // BS, NP // CD, MQ // CD.

a) Chứng minh: PQ // SA.

b) Gọi $K=MN\cap PQ$. Chứng minh điểm K nằm trên đường thẳng cố định khi M di động trên cạnh BC.

LỜI GIẢI



a) Chứng minh: PQ // SA.

Xét ΔSCD có: NP // CD $\Rightarrow \frac{DP}{DS}=\frac{CN}{CS}$ (1)

Xét ΔCBS có: MN // SB $\Rightarrow \frac{CN}{CS}=\frac{CM}{CB}$ (2)

Tương tự MQ // CD $\Rightarrow \frac{CM}{CB}=\frac{DQ}{DA}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \frac{DP}{DS}=\frac{DQ}{DA}$.

Vậy : PQ // SA

b) Chứng minh điểm K nằm trên đường thẳng cố định khi M di động trên cạnh BC.

Ta có : $\begin{cases}BC\ //\ AD\\BC\subset(SBC)\ ,\ AD\subset(SAD)\\S\in(SBC)\cap(SAD)\end{cases}\Rightarrow(SBC)\cap(SAD)=St\left(St\ //\ BC\ //\ AD\right)$

Mà $K=MN\cap PQ$.

Có: $\begin{cases} MN \subset (SBC) \\ PQ \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow K \in (SBC) \cap (SAD) \Rightarrow K \in St$.

Vậy : $K \in St$ cố định khi M di động trên cạnh BC.

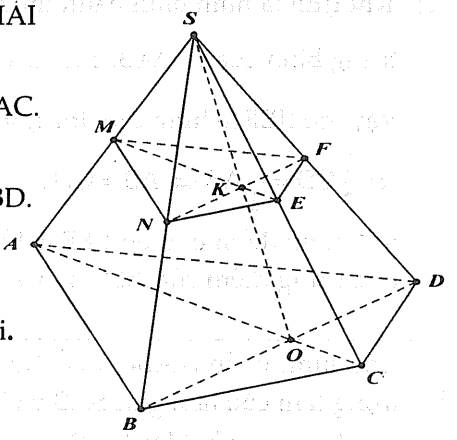
Cho hình chóp tứ giác S.ABCD. Gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Chứng minh rằng:

a) ME // AC, NF // BD.

b) Ba đường thẳng ME, NF, SO (O là giao điểm của AC và BD, đồng qui).

c) Bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng.

LỜI GIẢI



a). Chứng minh ME // AC, NF // BD.

ME là đường trung bình của tam giác SAC.

$\Rightarrow$ ME // AC.

NF là đường trung bình của tam giác SBD.

$\Rightarrow$ NF // BD.

b). Ba đường thẳng ME, NF, SO

(O là giao điểm của AC và BD) đồng qui.

Trong tam giác SAC, gọi $K = ME \cap AC$.

Suy ra K là trung điểm của SO.

Trong tam giác SDO có FK là đường trung bình của tam giác

$\Rightarrow$ FK // DO $\Leftrightarrow$ FK // BD (1)

Trong tam giác SBD có FN là đường trung bình của tam giác

$\Rightarrow$ FN // BD (2)

Từ (1) và (2) thì K thuộc NF.

Kết luận: ba đường thẳng ME, NF, SO đồng quy tại điểm K.

c). Từ chứng minh ở câu b) thì ME và NF cắt nhau tại K.

Suy ra bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng.

Cho tứ diện ABCD, gọi I và J lần lượt là trung điểm của BC và BD, E là một điểm thuộc cạnh AD.

a). Xác định thiết diện của tứ diện khi cắt bởi mp (IJE).

b). Tìm vị trí của E trên AD để thiết diện là hình bình hành.

c). Tìm điều kiện của tứ diện ABCD và vị trí của điểm E trên AD để thiết diện là hình thoi.

LỜI GIẢI

a). Xác định thiết diện của tứ diện khi cắt bởi mp (IJE).

Ta có IJ là đường trung bình của ΔBCD nên IJ // CD .

$$\begin{cases}(IJE)\cap(ACD)=E\\ IJ\subset(IJE),CD\subset(ACD)\end{cases}\Rightarrow(IJE)\cap(ACD)=Ex$$

Với Ex // CD // IJ . Gọi $F=Ex\cap AC$.

Vậy: thiết diện cần tìm là hình thang IJEF.

b). Để IJEF là hình bình hành thì IJ = EF.

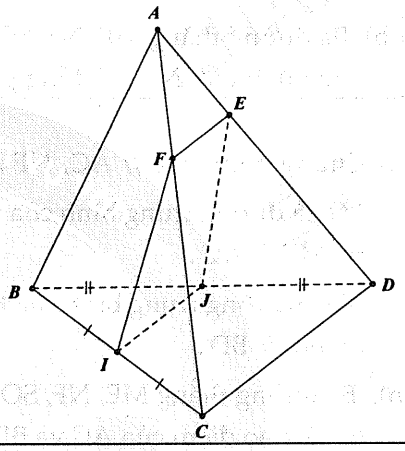
Vậy E phải là trung điểm của AD.

c). Khi IJEF là hình bình hành thì EJ là đường trung bình của Δ DAB, suy ra $EJ=\frac{1}{2}AB$.

Vậy: để IJEF là hình thoi thì IJ = EJ

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}AB\Leftrightarrow AB=CD$.

Kết luận: để thiết diện IJEF là hình thoi thì E là trung điểm của AD và AB = CD .



Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là tứ giác lồi. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và SAD, E là trung điểm của CB.

a) Chứng minh MN // BD .

b) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp (MNE).

c) Gọi H và L lần lượt là các giao điểm của mp (MNE) với các cạnh SB và SD. Chứng minh LH // BD .

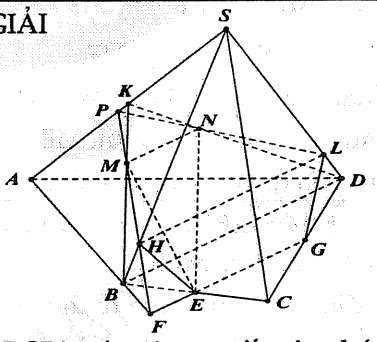
LỜI GIẢI

a). Chứng minh MN // BD .

Gọi K trung điểm của SA.

Theo tính chất trọng tâm, có:

$$\frac{KM}{KB}=\frac{KN}{KD}=\frac{1}{3}\Rightarrow MN\parallel BD.$$



b). Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp (MNE).

E là điểm chung của mp (MNE) và (ABCD), nên giao tuyến của chúng qua E và song song với MN và song song với BD. Giao tuyến này cắt AB và CD lần lượt tại F và G .

Trong mp (SAB) đường thẳng FM cắt SA và SB lần lượt tại P và H. Còn trong mp (SAD) đường thẳng PN cắt SD tại L. Từ đó suy ra thiết diện cần tìm là ngũ giác EHPLG.

c). Chứng minh LH // BD.

Có: $\begin{cases} HL = (MNE) \cap (SBD) \\ MN \,//\, BD \\ MN \subset (MNE),\ BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow HL \,//\, MN \,//\, BD$

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD.

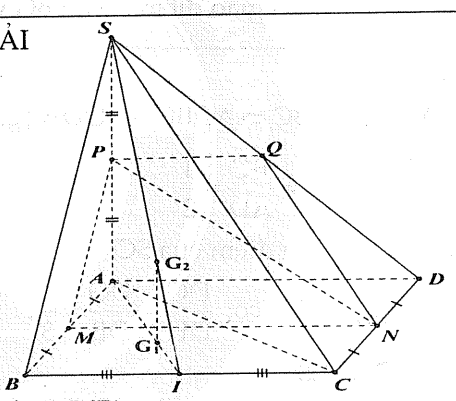
a) Chứng minh MN // (SBC), MN // (SAD).

b) Gọi P là trung điểm cạnh SA. Chứng minh SB và SC đều song song với (MNP).

c) Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của ΔABC và ΔSBC.

Chứng minh G_1G_2 // (SAB)

LỜI GIẢI



a) Chứng minh MN // (SBC):

Ta có: $\begin{cases} MN \,//\, BC,\ MN \not\subset (SBC) \\ BC \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow MN \,//\, (SBC)$

Ta có: $\begin{cases} MN \not\subset (SAD),\ MN \,//\, AD \\ AD \subset (SAD) \end{cases}$

$\Rightarrow MN \,//\, (SAD)$

b) Chứng minh SB và SC đều song song với (MNP)

Tìm giao tuyến của mặt phẳng (SAD) và (PMN).

Ta có: $\begin{cases} P \in (PMN) \cap (SAD) \\ MN \parallel AD \\ NM \subset (PMN),\ AD \subset (SAD) \end{cases}$

$\Rightarrow (PMN) \cap (SAD) = PQ\ (PQ \,//\, MN \,//\, AD,\ Q \in SD)$

Xét Δ SAD, ta có: PQ // AD và P là trung điểm SA $\Rightarrow$ Q là trung điểm SD.

Xét Δ SCD, ta có: QN // SC (QN là đường trung bình của tam giác SCD).

Ta có: $\begin{cases} SC \not\subset (PMN),\ SC \,//\, QN \\ QN \subset (PMN) \end{cases} \Rightarrow SC \,//\, (PMN).$

$SB \,//\, PM,\ PM \subset (PMN) \Rightarrow SB \,//\, mp(PMN)$

c) Chứng minh G_1G_2 // (SAB):

Xét Δ SAI ta có: $\frac{IG_1}{IA}=\frac{IG_2}{IS}=\frac{1}{3}$ (Tính chất trọng tâm) $\Rightarrow G_1G_2$ // SA.

Có: $\begin{cases}G_1G_2 \not\subset (SAB),\ G_1G_2 \text{ // } SA\\ SA \subset (SAB)\end{cases} \Rightarrow G_1G_2 \text{ // } (SAB)$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy (ABCD) là hình thang. AD là đáy lớn và AD = 2BC. Gọi O là giao điểm của AC và BD, G trọng tâm của tam giác SCD.

a) Chứng minh OG // mp (SBC).

b) Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Chứng minh CM // mp (SAB).

c) Giả sử điểm I trên đoạn SC sao cho $SC=\frac{3}{2}SI$.

Chứng minh: SA // mp (BID).

d) Xác định giao điểm K của BG và mặt phẳng (SAC). Tính $\frac{KB}{KG}$

LỜI GIẢI

Vì AD // BC $\Rightarrow \Delta OBC \sim \Delta ODA\ (g.g)$

$\frac{OB}{OD}=\frac{OC}{OA}=\frac{BC}{AD}=\frac{1}{2}$

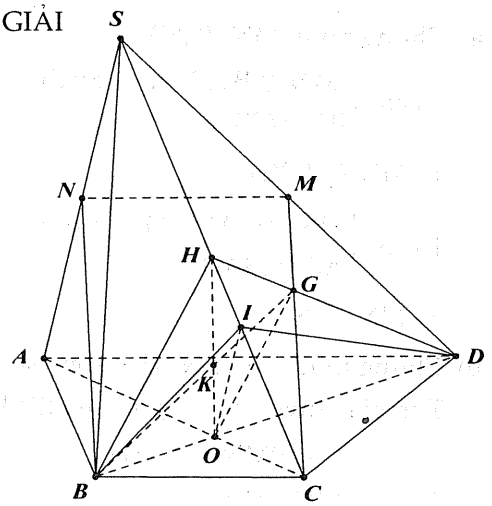
a) Gọi H trung điểm của SC.

Trong ΔDHB có: $\frac{DG}{DH}=\frac{DO}{DB}=\frac{2}{3}$.

$\Rightarrow$ OG // BH.

Ta có $\begin{cases}OG \text{ // } BH\\ BH \subset (SBC), OG \not\in (SBC)\end{cases}$

$\Rightarrow$ OG // mp (SBC).



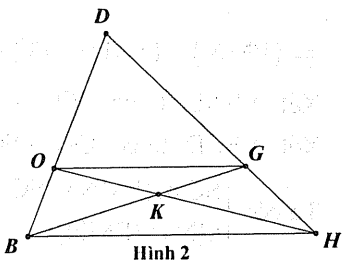
b) Gọi N trung điểm của SA. Ta có MN là đường trung bình của ΔSAD.

Nên MN // AD và $MN=\frac{1}{2}AD$ (1)

Theo đề bài, có: BC // AD và $BC=\frac{1}{2}AD$ (2)

Từ (1) và (2) có BC // MN và BC = MN.

Vậy tứ giác BCMN là hình bình hành.



Hình 2

Ta có: $\begin{cases} CM \,//\, BN \\ BN \subset (SAB), CM \notin (SAB) \end{cases} \Rightarrow CM \,//\, mp(SAB)$.

c). Trong ΔSAC có: $\frac{CO}{CA} = \frac{CI}{CS} = \frac{1}{3} \Rightarrow OI \,//\, SA$.

Có: $\begin{cases} SA \,//\, OI \\ OI \subset (BID), SA \notin (BID) \end{cases} \Rightarrow SA \,//\, mp(BID)$.

d). Ta có O và H là hai điểm chung của hai mặt phẳng (BDH) và (SAC).

Vậy $(SAC) \cap (BDH) = OH$.

Trong mp (BDH), gọi $K = BG \cap OH \Rightarrow K = BG \cap (SAC)$.

Ta có: $\Delta KOG \sim \Delta KHB (g.g) \Rightarrow \frac{KG}{KB} = \frac{OG}{HB} = \frac{2}{3}$ (vì $\frac{OG}{BH} = \frac{DG}{DH} = \frac{2}{3}$)

Kết luận: $\frac{KB}{KG} = \frac{3}{2}$.

Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Gọi O và O' lần lượt là tâm của ABCD và ABEF. Chứng minh rằng OO' song song với (ADF) và (BCE).

b) Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của ΔABD và ΔABE. Chứng minh rằng: MN // (CEF).

LỜI GIẢI

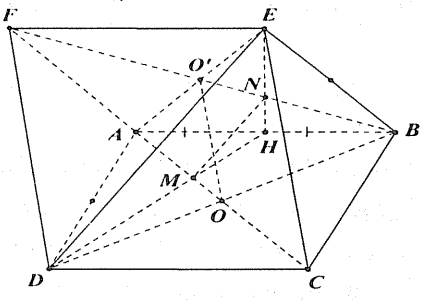
a) Chứng minh rằng OO' song song với (ADF) và (BCE).

Ta có: OO' // DF (OO' là đường trung bình ΔBDF).

Mà $DF \subset (ADF) \Rightarrow OO' \,//\, (ADF)$.

Ta có: OO' // CE (OO' là đường trung bình ΔACE).

Mà $CE \subset (BCE) \Rightarrow OO' \,//\, (BCE)$.



b) Chứng minh rằng: MN // (CEF).

Gọi H là trung điểm của AB.

Trong ΔHDE có: $\frac{HM}{HD} = \frac{HN}{HE} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow MN \,//\, DE$ mà $DE \subset (CEFD) \equiv (CEF)$.

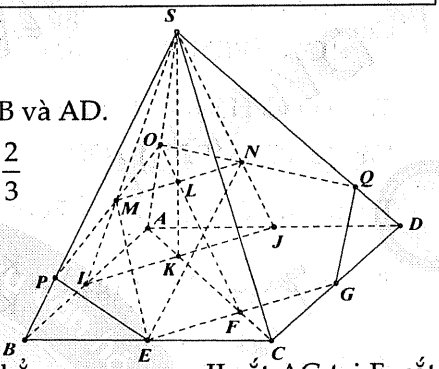
Vậy MN // (CEF).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M , N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác SAB và SAD.

a) Chứng minh MN // mp(ABCD).

b) Gọi E là trung điểm của BC. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD khi cắt bởi mặt phẳng (MNE).

LỜI GIẢI



a) Chứng minh MN // mp(ABCD).

Gọi I , J lần lượt là trung điểm của của AB và AD.

Theo tính chất trọng tâm, có: $\frac{SM}{SI}=\frac{SN}{SJ}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ MN // IJ (theo tính chất Talet đảo).

Mà IJ thuộc mặt phẳng (ABCD).

$\Rightarrow$ MN // $(ABCD)$.

b) Trong mặt phẳng đáy, qua E kẻ đường thẳng song song IJ cắt AC tại F, cắt CD tại G. EG là giao tuyến của (MNE) và đáy (ABCD).

Gọi $K = IJ \cap AC\left(IJ, AC \subset (ABCD)\right)$.

Ta có: $SK = (SIJ) \cap (SAC)$, gọi $L = MN \cap SK$.

Suy ra: $FL = (MNE) \cap (SAC)$, gọi $O = SA \cap FL\left(SA, FL \subset (SAC)\right)$.

Vậy $OM = (MNE) \cap (SAB)$, $ON = (MNE) \cap (SAD)$.

Gọi $P = OM \cap AB$, $Q = ON \cap SD$.

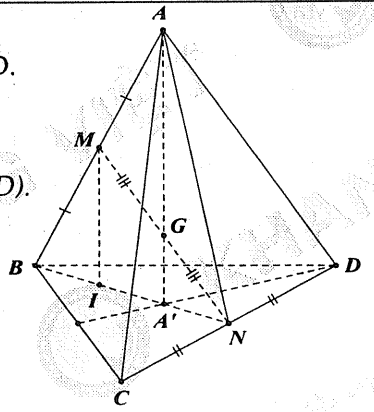
Kết luận: thiết diện cần tìm là đa giác OPEGQ .

Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD.

a) Chứng minh rằng đường thẳng d đi qua G và một đỉnh của tứ diện sẽ đi qua trọng tâm của mặt đối diện với đỉnh ấy.

b) Gọi A' là trọng tâm của mặt phẳng BCD. Chứng minh GA = 3GA'.

LỜI GIẢI



Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Gọi G trung điểm của MN.

Suy ra G là trọng tâm của tứ diện .

a) <u>Bước 1:</u> *Tìm giao điểm của AG và mặt phẳng (BCD).*

Chọn mặt phẳng (ABN) chứa AG và BN.

Trong mp(ABN) gọi $A' = AG \cap BN$.

Có: $\begin{cases} A' \in AG \\ A' \in BN, \left(BN \subset mp(BCD)\right) \end{cases}$

$\Rightarrow A' = AG \cap (BCD)$.

Bước 2: *Chứng minh A' là trọng tâm của tam giác BCD.*

Trong mặt phẳng (ABN) kẻ MI song song với AA' (Với I thuộc BN).

Xét $\Delta ABA'$ có MI là đường trung bình của tam giác, nên I trung điểm của BA'. Suy ra $BI = IA'$ (1)

Xét ΔIMN có GA' là đường trung bình của tam giác, nên A' trung điểm của IN. Suy ra $A'N = IA'$ (2)

Ngoài ra trong ΔBCD có BN là đường trung tuyến, kết hợp với (1) và (2) là $BA' = \frac{2}{3}BN$.

Suy ra A' là trọng tâm của ΔBCD.

b) Vì MI là đường trung bình của tam giác $\Delta ABA'$ nên $MI = \frac{1}{2}AA'$ (3)

Vì GA' là đường trung bình của tam giác ΔIMN nên $GA' = \frac{1}{2}MI$ (4)

Từ (3) và (4): $GA' = \frac{1}{4}AA' \Leftrightarrow AA' = 4GA'$.

Mà $AA' = AG + GA' \Rightarrow AG = 3GA'$.

Kết luận $GA = 3GA'$.

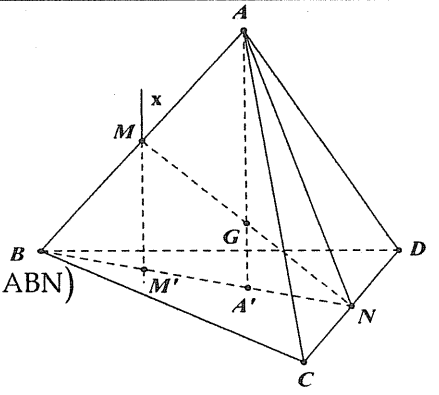
Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và G là trung điểm của đoạn NM.

a) Tìm giao điểm A' của đường thẳng AG và mặt phẳng (BCD).

b) Qua M kẻ đường thẳng Mx song song với AA' và Mx cắt mp (BCD) tại M'. Chứng minh B, M', A' thẳng hàng và BM' = M'A' = A'N.

c) Chứng minh GA=3GA'.

LỜI GIẢI



a) Chọn mp (ABM) chứa AG.

Hai mặt phẳng (ABN) và (BCD) có hai điểm chung là B và N. Suy ra giao tuyến của chúng là BN, BN cắt AG tại A', thì $A' = AG \cap (BCD)$.

b) Vì $Mx \,//\, AA'$, mà $AA' \subset (ABN)$ và $M \in (ABN)$

$\Rightarrow Mx \subset (ABN)$.

Gọi $M' = Mx \cap BN \Rightarrow M' = Mx \cap (BCD)$.

Từ đó suy ra ba điểm B, M', A' thẳng hàng.

Có MM' đường trung bình của $\Delta BAA' \Rightarrow BM' = M'A'$ (1)

Và GA' là đường turng bình của $\Delta NMM' \Rightarrow M'A' = A'N$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BM' = M'A' = A'N$.

c) Từ chứng minh câu b) có:

$$GA' = \frac{1}{2}MM' \text{ và } MM' = \frac{1}{2}AA' \Rightarrow GA' = \frac{1}{4}AA' \Rightarrow AG = 3GA'.$$

<u>DẠNG 2:</u> Thiết diện cùaa hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (α) và song song với một dường thẳng cho trước. Tính diện tích thiết diện.

Dạng toán này các bạn phải nhớ kỹ tính chất:

$$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (P) \\ (\alpha) \,//\, d \,,\, d \subset (P) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (P) = Mx \,(Mx \,//\, d)$$

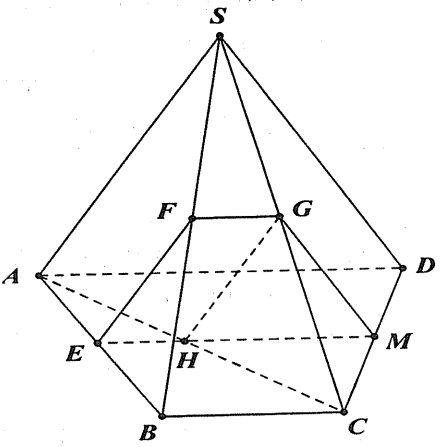
Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang có AD đáy lớn. Gọi M trung điểm của CD, (α) là mặt phẳng qua M và song song với SA và BC.

a) Hãy xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng (α).

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (SAC). Chứng minh giao tuyến vừa tìm được song song với mặt phẳng (SAD).

LỜI GIẢI

a) Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng (α).



M là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (ABCD), có $(\alpha) \,//$ BC nên giao tuyến của chúng qua M và song song với BC, giao tuyến này cắt AB tại E.

E là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (SAB), có $(\alpha) \,//$ SA nên giao tuyến của chúng qua E và song song với SA, giao tuyến này cắt SB tại F.

F là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (SBC), có $(\alpha) \,//$ BC nên giao tuyến của chúng qua F và song song với BC, giao tuyến này cắt SC tại G.

Kết luận mặt phẳng (α) cắt hình chóp S.ABCD theo một thiết diện là hình thang MEFG, vì có ME và FG cùng song song với BC.

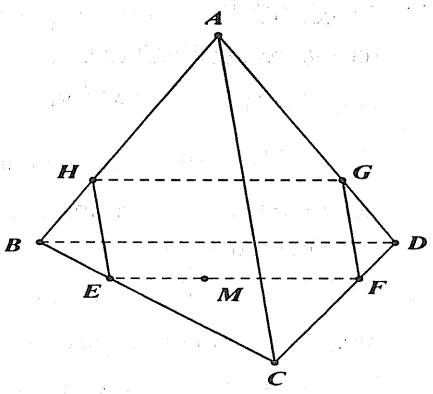
b) Gọi H là giao điểm của ME và AC, ta có H và G là hai điểm chung của hai mặt phẳng (α) và mặt phẳng (SAC). Vậy $(\alpha)\cap(SAC)=HG$. Vì (α) // SA nên giao tuyến HG // SA, mà SA thuộc mặt phẳng (SAD) nên giao tuyến HG // mp(SAD).

Cho tứ diện ABCD , lấy điểm M là một điểm thuộc miền trong của tam giác BCD . Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với AC và BD . Hãy xác định thiết diện của mặt phẳng (α) với tứ diện ABCD . Thiết diện là hình gì?

LỜI GIẢI

M là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (BCD), có (α) // BD nên giao tuyến của chúng qua M và song song với BD, giao tuyến này cắt BC tại E và cắt CD tại F.

E là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (ABC), có (α) // AC nên giao tuyến của chúng qua E và song song với AC, giao tuyến này cắt AB tại H.



H là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (ABD), có (α) // BD nên giao tuyến của chúng qua H và song song với BD, giao tuyến này cắt AD tại G.

G và F là hai điểm chung của hai mặt phẳng (α) và mặt phẳng (ACD).

Vậy giao tuyến của chúng là FG.

Vì mặt phẳng (α) // AC, nên giao tuyến FG // AC.

Kết luận: thiết diện cần tìm là hình bình hành EFGH, vì có EF // HG // BD và HE // FG // AC.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Lấy một điểm M di động trên cạnh SC. Gọi (α) là mặt phẳng chứa AM và song song với BD.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng (α) luôn đi qua một đường thẳng cố định khi M thay đổi.

b) Mặt phẳng (α) cắt SB và SD tại E và F. Hãy nêu cách dựng E và F.

c) Gọi I là giao điểm của ME và CB, J là giao điểm của MF và CD. Chứng minh ba điểm I, J, A thẳng hàng.

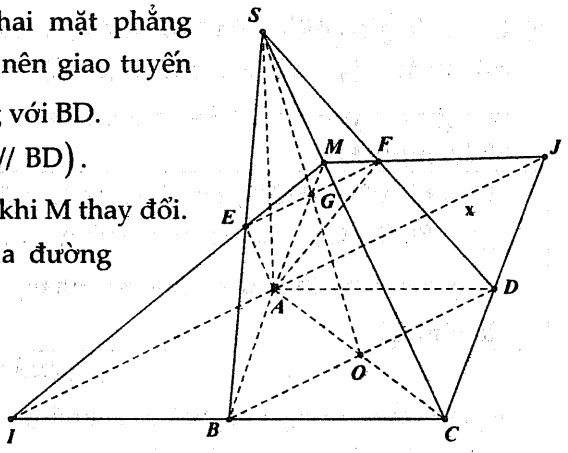
LỜI GIẢI

a) A là một điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (ABCD), có (α) // BD, nên giao tuyến của chúng qua A và song song với BD.

Vậy: $(\alpha)\cap(ABCD)=Ax$ $(Ax \,//\, BD)$.

Vì Ax là đường thẳng cố định khi M thay đổi.

Kết luận: mp(α) luôn đi qua đường thẳng cố định Ax.



b) Gọi $O=AC\cap BD$.

Ta có: SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Gọi $G=AM\cap SO$ $(AM,SO\subset(SAC))$.

Ta có: G là điểm chung của mặt phẳng (α) và mặt phẳng (SBD), có (α) // BD nên giao tuyến của chúng qua G và song song với BD, giao tuyến này cắt SB và SD lần lượt tại E và F.

c). I và F là hai điểm chung của mặt phẳng (α) và mặt phẳng đáy (ABCD), nên I và F phải thuộc giao tuyến Ax của hai mặt phẳng.

Vậy ba điểm I , J ,A thẳng hàng .

Cho hình bình hành ABCD và điểm S không nằm trong mặt phẳng chứa ABCD .

a) Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau (SAC) và (SBD), (SAB) và (SCD).

b) Một mặt phẳng (α) qua BC, cắt SA tại N và cắt SD tại M.

Chứng minh MN // BC.

c) Chứng tỏ giao điểm của BN và CM luôn luôn ở trên một đường thẳng cố định khi M di động trên SA.

d) Gọi G là trọng tâm tam giác SAB, K là điểm trên cạnh AC sao cho $\frac{AK}{AC}=\frac{1}{3}$. Chứng minh GK song song với mặt phẳng (SCD).

LỜI GIẢI

a) Ta có $S\in(SAC)\cap(SBD)$ (1)

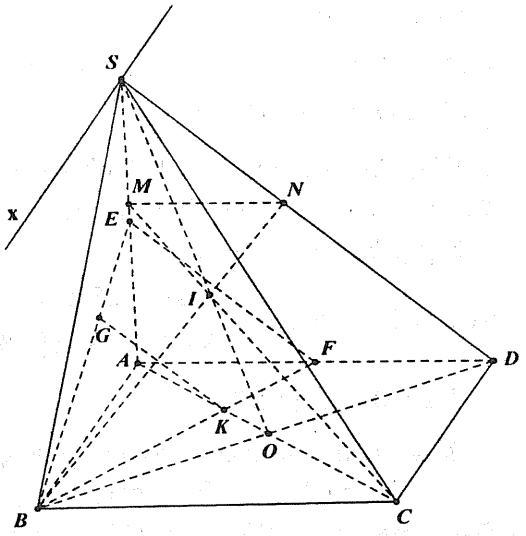
Gọi $O=AC\cap BD\Rightarrow O\in(SAC)\cap(SBD)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $(SAC)\cap(SBD)=SO$.

Ta có $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \,//\, CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx$

$(Sx \,//\, AB \,//\, CD)$.



b) Vì $\begin{cases} (\alpha) \cap (SAD) = MN \\ BC \,//\, AD \\ BC \subset (\alpha),\ AD \subset (SAD) \end{cases}$

$\Rightarrow MN \,//\, AD \,//\, BC$.

c) Gọi $I = BN \cap CM (BN, CM \subset (\alpha))$

Vì: $\begin{cases} I \in BN, BN \subset (SBD) \\ I \in CM, CM \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD)$.

Suy ra I thuộc giao tuyến SO cố định của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

d) Gọi E và F lần lượt là trung điểm của SA và AD .

Vì K chia đoạn AC thành ba phần bằng nhau và AK chiếm 1 phần, dễ dàng chứng minh K là trọng tâm của tam giác ABD .

Theo tính chất trọng tâm có: $\frac{BG}{BE} = \frac{BK}{BF} = \frac{2}{3} \Rightarrow GK \,//\, EF$ (3)

Mà EF là đường trung bình của tam giác ADS $\Rightarrow EF \,//\, SD$ (4).

Từ (3) và (4) có $GK \,//\, SD \subset (SCD) \Rightarrow GK \,//\, (SCD)$.

Cho tứ diện ABCD, gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và BD.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (ACD).

b) Một mặt phẳng (P) qua CD và cắt AM, AN lần lượt tại F và E.Tứ giác CDEF là hình gì?

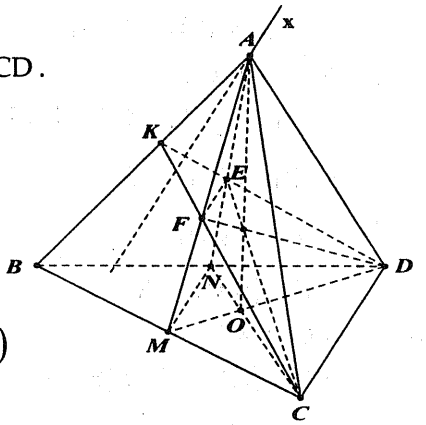
c) CF và DE cắt nhau tại K. Chứng tỏ A , B , K thẳng hàng.

d) Chứng tỏ giao điểm I của CE và DF luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi (P) thay đổi.

LỜI GIẢI

a) $\left.\begin{array}{l} M \in (AMN) \cap (ACD) \\ MN \,//\, CD \\ MN \subset (AMN), CD \subset (ACD) \end{array}\right\} \Rightarrow (AMN) \cap (ACD) = Mx (Mx \,//\, MN \,//\, CD)$

b) $\begin{cases}(P)\cap(AMN)=EF\\ MN\ //\ CD\\ MN\subset(AMN),CD\subset(P)\end{cases}\Rightarrow EF\ //\ MN\ //\ CD.$



Vì CD // MN suy ra CDEF là hình thang.

c) Ta có AB là giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (ABD).

Vì $K=CF\cap DE$, mà $\begin{cases}K\in CF,CF\subset(ABC)\\ K\in DE,DE\subset(ABD)\end{cases}$

$\Rightarrow K\in(ABC)\cap(ABD)$.

Vì K là điểm chung của hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) nên K thuộc giao tuyến. Vậy ba điểm A, B, K thẳng hàng.

d) Trong mặt phẳng (BCD) gọi O là giao điểm của CN và DM.

Ta có A và O là hai điểm chung của hai mặt phẳng (ANC) và (AMD), nên giao tuyến của chúng là AO.

Gọi I là giao điểm của CE và DF.

Ta có: $\begin{cases}I\in CE,CE\subset(ANC)\\ I\in DF,DF\subset(AMD)\end{cases}\Rightarrow I\in(ANC)\cap(AMD).$

Suy ra I thuộc giao tuyến AO của hai mặt phẳng.

Vì hai điểm A và O cố định nên điểm I thuộc đoạn AO cố định.

Cho hình chóp S.ABCD. M, N là hai điểm trên AB, CD. Mặt phẳng (α) qua MN và song song với SA.

a) Tìm các giao tuyến của (α) với (SAB) và (SAC).

b) Xác định thiết diện của hình chóp với (α)

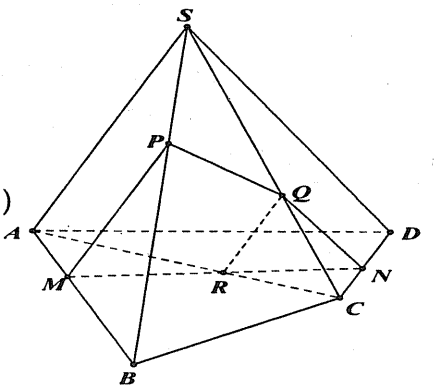
c) Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang.

LỜI GIẢI

a) Tìm các giao tuyến của (α) với (SAB):

Ta có: $\begin{cases}M\in(\alpha)\cap(SAB)\\ (\alpha)\ //\ SA,\ SA\subset(SAB)\end{cases}$

$\Rightarrow(\alpha)\cap(SAB)=MP$ (với $MP\ //\ SA, P\in SB$)



Tìm các giao tuyến của (α) với (SAC).

Gọi $R=MN\cap AC\left(MN,AC\subset(ABCD)\right)$

Ta có: $\begin{cases} R \in (\alpha) \cap (SAC) \\ (\alpha) \,//\, SA \,,\, SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = RQ$ (với $RQ \,//\, SA, Q \in SC$)

b) Xác định thiết diện của hình chóp với (α):

Theo câu a) thiết diện là tứ giác MPQN

c) Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang:

Ta có : MPQN là hình thang $\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} MP \,//\, QN & (1) \\ MN \,//\, PQ & (2) \end{array}\right.$

Xét (1), ta có $\begin{cases} SA \,//\, MP \\ MP \,//\, QN \end{cases} \Rightarrow SA \,//\, QN$.

Do đó: $\begin{cases} SA \,//\, QN \\ QN \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow SA \,//\, (SCD)$ (vô lí)

Xét (2), ta có $\begin{cases} BC = (ABCD) \cap (SBC) \\ MN \subset (ABCD),\ PQ \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN \,//\, BC$

Ngược lại, nếu MN // BC thì $\begin{cases} PQ = \alpha \cap (SBC) \\ MB \subset (\alpha)\,,\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN \,//\, PQ$

Vậy để thiết diện là hình thang thì MN // BC.

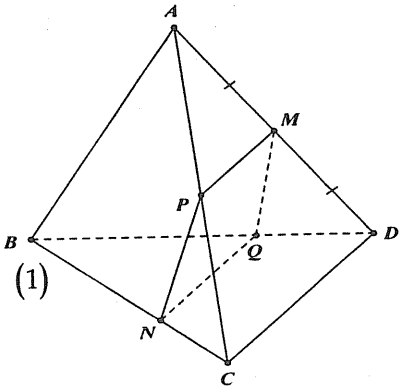
Cho tứ diện ABCD. Trên cạnh AD lấy trung điểm M, trên cạnh BC lấy điểm N bất kỳ. Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng MN và song song với CD.

a) Hãy xác định thiết diện của mặt phẳng (α) với tứ diện ABCD.

b) Xác định vị trí của N trên BC sao cho thiết diện là hình bình hành.

LỜI GIẢI

a). Xác định thiết diện của mặt phẳng (α) với tứ diện ABCD.



Ta có: $\begin{cases} (\alpha) \,//\, CD \\ CD \subset (ACD) \\ M \in (\alpha) \cap (ACD) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ACD) = MP \left(MP \,//\, CD, P \in AC\right)$ (1)

Ta có: $\begin{cases} (\alpha) \,//\, CD \\ CD \subset (BCD) \\ N \in (\alpha) \cap (BCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (BCD) = NQ \left(NQ \,//\, CD, Q \in BD\right)$ (2)

Và $(\alpha) \cap (ABD) = MQ$ (3);

$(\alpha) \cap (ABC) = PN$ (4)

Từ (1) và (2), ta được : MP // NQ. Vậy thiết diện là hình thang MPNQ.

b) Xác định vị trí của N trên BC sao cho thiết diện là hình bình hành.

Ta có: MP // NQ; $MP = \frac{1}{2}CD$ (MP là đường trung bình ΔACD)

MPNQ là hình bình hành $\Leftrightarrow \begin{cases} MP // NQ \\ MP = NQ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} MP // NQ \\ MP = NQ = \frac{1}{2}CD \end{cases}$

Do đó N là trung điểm BC.

Vậy: N là trung điểm BC thì MPNQ là hình bình hành.

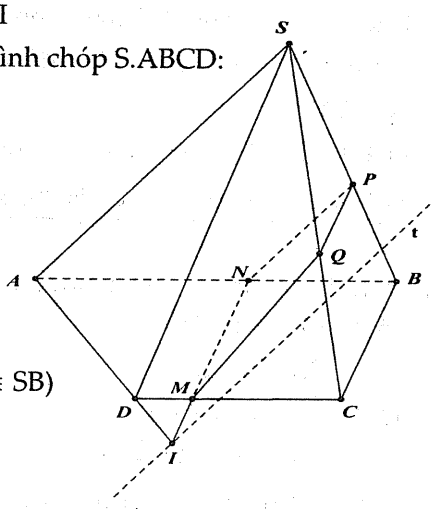
Cho hình thang ABCD có đáy lớn AB và S là một điểm ở ngoài mặt phẳng của hình thang. Gọi M là một điểm của CD; (α) là mặt phẳng qua M và song song với SA và BC.

a) Hãy tìm thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp S.ABCD. Thiết diện là hình gì?

b) Tìm giao tuyến của (α) với mặt phẳng (SAD).

LỜI GIẢI

a). Tìm thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp S.ABCD:



Ta có: $\begin{cases} (\alpha) // BC, BC \subset (ABCD) \\ M \in (\alpha) \cap (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MN$

(Với MN // BC, và $N \in AB$) (1)

Ta có: $\begin{cases} (\alpha) // SA, SA \subset (SAB) \\ N \in (\alpha) \cap (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = NP$ (Với NP // SA, và $P \in SB$)

Có: $\begin{cases} (\alpha) // BC, BC \subset (SBC) \\ P \in (\alpha) \cap (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = PQ$ (Với PQ // BC, và $Q \in SC$) (2)

Từ (1) và (2), ta được MN // PQ. Vậy thiết diện là hình thang MNPQ.

b. Tìm giao tuyến của (α) với mặt phẳng (SAD).

Trong (ABCD), gọi $I = AD \cap MN \Rightarrow$ I là điểm chung của (α) và (SAD).

Ta có: $\begin{cases} (\alpha) // SA, SA \subset (SAD) \\ I \in (\alpha) \cap (SAD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAD) = It$ (Với It // SA).

Trong mặt phẳng (α) cho tam giác ABC vuông tại A, $\widehat{ABC} = 60^0$, AB = a. Gọi O là trung điểm của BC. Lấy điểm S ở ngoài mặt phẳng (α) sao cho SB = a và SB $\perp$ OA. Gọi M là một điểm trên cạnh AB, mặt phẳng (β) qua M song song với SB và OA, cắt BC, SC, SA lần lượt tại N, P, Q. Đặt x = BM ($0 < x < a$).

a) Chứng minh MNPQ là hình thang vuông.

b) Tính diện tích của hình thang theo a và x. Tính x để diện tích này lớn nhất.

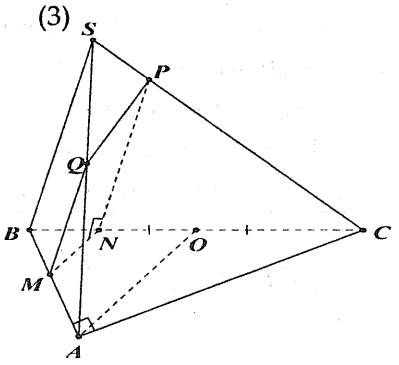
LỜI GIẢI

a) Chứng minh MNPQ là hình thang vuông:

Có: $\begin{cases}(\beta) \,//\, OA\,,\, OA \subset (ABC)\\ MN = (\beta) \cap (ABC)\end{cases} \Rightarrow MN \,//\, OA \qquad (1)$

Và $\begin{cases}(\beta) \,//\, SB\,,\, SB \subset (SAB)\\ MQ = (\beta) \cap (SAB)\end{cases} \Rightarrow MQ \,//\, SB \qquad (2)$

Ta có: $\begin{cases}(\beta) \,//\, SB,\, SB \subset (SBC)\\ NP = (\beta) \cap (SBC)\end{cases} \Rightarrow NP \,//\, SB \qquad (3)$



Từ (2) và (3) suy ra MQ // NP // SB: (4)

$\Rightarrow$ MNPQ là hình thang.

Từ (1) và (4), ta có: $\begin{cases}OA \perp SB\\ MN \,//\, OA\\ MQ \,//\, NP \,//\, SB\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}MN \perp MQ\\ MN \perp NP\end{cases}$

Vậy: MNPQ là hình thang vuông, đường cao MN.

b) Tính diện tích của hình thang theo a và x.

Ta có: $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MQ + NP).MN$.

Tính MN:

Xét tam giác ABC, ta có: $\cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\cos B}$

$\Rightarrow BC = 2a \Rightarrow BO = \frac{1}{2}BC = a$.

Do $\hat{B} = 60^0$ và BA = BO $\Rightarrow \Delta ABO$ đều.

Trong ΔABO có: MN // AO $\Rightarrow \frac{MN}{AO} = \frac{BM}{AB} = \frac{BN}{BO} \Rightarrow MN = MB = BN = x$.

Tính MQ: Xét tam giác SAB, ta có: MQ // SB.

$\Rightarrow \dfrac{MQ}{SB} = \dfrac{AM}{AB} \Rightarrow MQ = AM.\dfrac{SB}{AB} = (a-x).\dfrac{a}{a} = a - x$

Tính NP: Xét tam giác SBC, ta có: NP // SB.

Nên $\Rightarrow \dfrac{NP}{SB} = \dfrac{CN}{CB} \Rightarrow NP = CN.\dfrac{SB}{CB} = (2a-x).\dfrac{a}{2a} = \dfrac{2a-x}{2}$.

Do đó: $S_{MNPQ} = \dfrac{x(4a-3x)}{4} = \dfrac{1}{12}.3x.(4a-3x)$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương $3x$ và $(4a-3x)$

$$3x(4a-3x) \le \left(\frac{3x+4a-3x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 3x(4a-3x) \le 4a^2 \Leftrightarrow S_{MNPQ} \le \frac{a^2}{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi $3x = 4a - 3x \Leftrightarrow x = \dfrac{2a}{3}$.

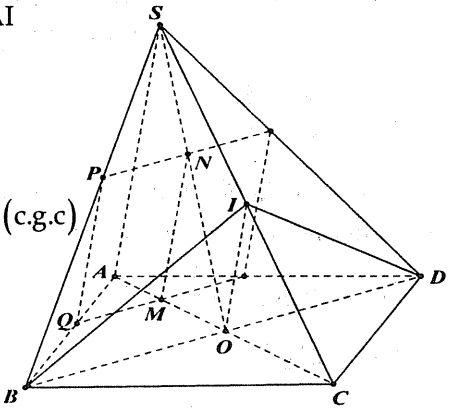
Kết luận: khi $x = \dfrac{2a}{3}$ thì S_{MNPQ} đạt giá trị lớn nhất.

Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Gọi S là một điểm ở ngoài mặt phẳng (ABCD) sao cho SB = SD. Gọi M là điểm tùy ý trên AO với AM = x. Mặt phẳng (α) qua M song song với SA và BD cắt SO , SB , AB tại N, P , Q .

a) Tứ giác MNPQ là hình gì?

b) Cho SA = a. Tính diện tích MNPQ theo a và x. Tính x để diện tích lớn nhất.

LỜI GIẢI



a) Tứ giác MNPQ là hình gì?

Ta có: SB = SD $\Rightarrow \Delta SBC = \Delta SDC(c.c.c)$

$\Rightarrow \widehat{SCB} = \widehat{SCD}$

Gọi I là trung điểm SC thì $\Delta IBC = \Delta IDC(c.g.c)$

$\Rightarrow IB = ID$.

Vậy ΔIBD cân tại I $\Rightarrow IO \perp BD$.

Mà $OI // SA \Rightarrow SA \perp BD$ (*)

Ta có: $\begin{cases} (\alpha) // BD \\ BD \subset (ABO) \\ (\alpha) \cap (ABO) = MQ \end{cases} \Rightarrow MQ // BD$ (1)

Tương tự: $\begin{cases} (\alpha) // BD \\ BD \subset (SBO) \\ (\alpha) \cap (SBO) = NP \end{cases} \Rightarrow NP // BD$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra MQ // NP // BD (3)

Ta có: $\begin{cases}(\alpha)\ //\ SA\\ SA\subset(SAO)\\ (\alpha)\cap(SAO)=MN\end{cases}\Rightarrow MN\ //\ SA$ (4)

Tương tự: $\begin{cases}(\alpha)\ //\ SA\\ SA\subset(SAB)\\ (\alpha)\cap(SAB)=PQ\end{cases}\Rightarrow PQ\ //\ SA$ (5)

Từ (4) và (5), suy ra MN // PQ // SA (6)

Từ (3), (6) và (*), suy ra MNPQ là hình chữ nhật.

b) Tính diện tích MNPQ theo a và x:

Ta có: $S_{MNPQ} = MQ.MN$.

Tính MQ: Xét tam giác AQM:

Ta có: $\widehat{A} = 45^0$, $\widehat{Q} = 45^0$, $\widehat{M} = 90^0 \Rightarrow \Delta AQM$ cân tại M. Vậy MQ = AM = x.

Tính MQ: Xét tam giác SAO:

Ta có: MN // SA $\Rightarrow \dfrac{MN}{AS} = \dfrac{OM}{OA} \Rightarrow MN = AS.\dfrac{OM}{OA} = a.\dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2} - x}{\frac{a.\sqrt{2}}{2}} = a - x.\sqrt{2}$

$\Rightarrow S_{MNPQ} = MQ.MN = x.(a - x.\sqrt{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x.\sqrt{2}(a - x.\sqrt{2})$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương $x.\sqrt{2}$ và $(a - x.\sqrt{2})$:

$$x\sqrt{2}\left(a - x\sqrt{2}\right) \le \left(\frac{x\sqrt{2} + a - x\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x\sqrt{2}\left(a - x\sqrt{2}\right) \le \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow S_{MNPQ} \le \frac{a^2}{4\sqrt{2}}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x.\sqrt{2} = a - x.\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2.\sqrt{2}} = \dfrac{a.\sqrt{2}}{4}$

$\Leftrightarrow$ M là trung điểm AO

Vậy: $x = \dfrac{a.\sqrt{2}}{4}$ thì S_{MNPQ} đạt giá trị lớn nhất.

Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Trên cạnh AB lấy một điểm M với AM = x. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (SAD) cắt SB, SC, và CD lần lượt tại N, P, Q.

a) Tìm thiết diện của (α) với mặt phẳng hình chóp. Thiết diện là hình gì?

b) Tìm quĩ tích giao điểm I của MN và PQ khi M di động trên đoạn AB.

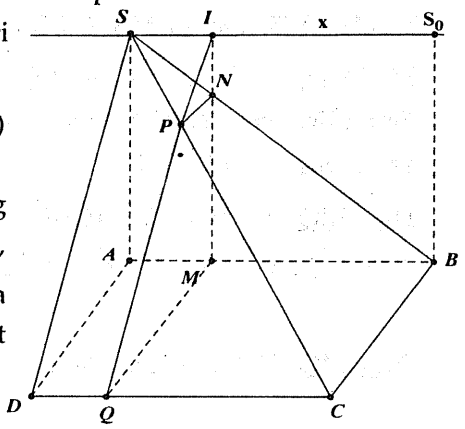
c) Cho $\widehat{SAD} = 90^0$ và SA = a. Tính diện tích của thiết diện theo a và x.

Tìm x để diện tích của thiết diện bằng $\frac{3a^2}{8}$.

LỜI GIẢI

a) Tìm thiết diện của (α) với mặt phẳng hình chóp:

Vì mp $(\alpha) // (SAD) \Rightarrow$ mp (α) // với mọi đường thuộc mặt phẳng (SAD).



• Tìm giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt phẳng (ABCD).

Có M là điểm chung của hai mặt phẳng mp(α) và mp (ABCD), vì mp(α) // AD, nên giao tuyến của chúng qua M và song song với AD, giao tuyến này cắt CD tại điểm Q.

Tương tự:

• Mặt phẳng (α) và mặt phẳng (SAB) có M là điểm chung và $(\alpha) // SA$, nên giao tuyến của chúng là MN với MN // SA và $N \in SB$.

• Mặt phẳng (α) và mặt phẳng (SBC) có N là điểm chung và $(\alpha) // AD // BC$, nên giao tuyến của chúng là NP với NP // BC và $P \in SC$ (2)

• Mặt phẳng (α) và mặt phẳng (SCD) có 2 là điểm chung là P, Q.

Vậy: giao tuyến của chúng là PQ.

Suy ra: thiết diện cần tìm là MNPQ.

Từ (1) và (2) thì MQ // PN. Vậy MNPQ là hình thang.

b) Tìm quĩ tích giao điểm I của MN và PQ khi M di động trên đoạn AB:

Ta có: $\begin{cases} AB // DC \\ AB \subset (SAB),\ DC \subset (SCD) \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \left(Sx // AB // CD \right)$

Mà: $\begin{cases} I \in PQ \subset (SCD) \\ I \in MN \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAB) \cap (SDC)$. Vậy $I \in Sx$.

Giới hạn quĩ tích : Khi $M \equiv A$ thì $I \equiv S$. Còn khi $M \equiv B$ thì $I \equiv S_0$

c) Tính diện tích của thiết diện theo a và x:

Ta có: $S_{MNPQ} = S_{\Delta IMQ} - S_{\Delta INP} = S_{\Delta SAD} - S_{\Delta INP}$ (Vì $\Delta IMQ = \Delta$ SAD (c.g.c))

Tính $S_{\Delta SAD}$: Ta có ΔSAD vuông cân tại A, do đó: $S_{SAD} = \frac{1}{2}.a^2$.

Tính $S_{\Delta INP}$: Xét tam giác SBC, tam giác SBS_0 và tam giác SAB có:

$NI // S_0B \Rightarrow \frac{NI}{S_0B} = \frac{SN}{SB}$ (1)

$PN // BC \Rightarrow \frac{PN}{BC} = \frac{SN}{SB}$ (2)

$MN // SA \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{SN}{SB}$ (3)

Từ (1), (2) và (3), ta được: $\frac{NI}{S_0B} = \frac{PN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow NI = PN = AM = x$.

$\Rightarrow \Delta INP$ vuông cân tại N, vì NI // SA, PN // AD và $SA \perp AD$.

Do đó: $S_{INP} = \frac{1}{2}.x^2$.

Vậy: diện tích thiết diện: $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}.a^2 - \frac{1}{2}.x^2 = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)$

Để $S_{MNPQ} = \frac{3.a^2}{8} \Rightarrow \frac{1}{2}(a^2 - x^2) = \frac{3.a^2}{8} \Leftrightarrow x^2 = a^2 - \frac{3.a^2}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$.

Cho tứ diện ABCD có AB = AC = CD = a và AB vuông góc với CD. Lấy M thuộc đoạn AC với $AM = x(0 < x < a)$. Mặt phẳng (α) qua M và song song với AB, CD cắt BC, BD, AD lần lượt tại N, P, Q.

a) Chứng minh MNPQ là hình chữ nhật.

b) Tính diện tích MNPQ theo a và x.

c) Tính x để diện tích MNPQ lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó.

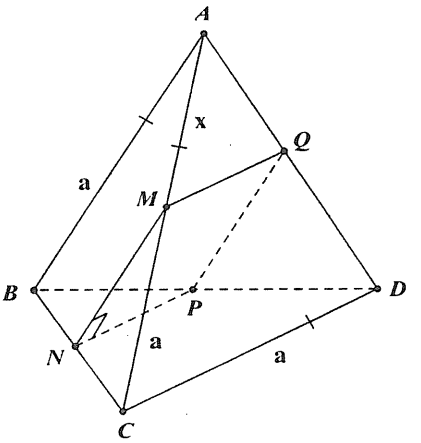
d) Định x để MNPQ là hình vuông.

LỜI GIẢI

a) Ta có: $\begin{cases} MN = (\alpha) \cap (ABC) \\ (\alpha) // AB \end{cases} \Rightarrow MN // AB$.

Ta có: $\begin{cases} MQ = (\alpha) \cap (ACD) \\ (\alpha) // CD \end{cases} \Rightarrow MQ // CD$

Ta có: $\begin{cases} NP = (\alpha) \cap (BCD) \\ (\alpha) // CD \end{cases} \Rightarrow NP // CD$.



Ta có $\begin{cases} PQ = (\alpha) \cap (ABD) \\ (\alpha) \,//\, AB \end{cases} \Rightarrow PQ \,//\, AB$

Tứ giác MNPQ có hai cặp cạnh đối song song với nhau nên MNPQ là hình bình hành, vì: $\begin{cases} AB \,//\, MN, CD \,//\, NP \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow MN \perp NP$.

Vậy: MNPQ là hình chữ nhật.

b) Trong ΔACD có: $MQ \,//\, CD \Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{MQ}{CD} \Rightarrow MQ = x$.

Trong ΔABC có: $MN \,//\, AB$.

Suy ra: $\dfrac{CM}{CA} = \dfrac{MN}{AB} \Rightarrow MN = \dfrac{CM}{CA}.AB = \dfrac{a-x}{a}.a = a - x$

$S_{MNPQ} = MN.MQ = (a-x).x$

c) Ta có: $(a-x) + x = a =$ (hằng số).

Nên để diện tích này lớn nhất khi $a - x = x \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$.

d) Để MNPQ là hình vuông thì $MN = MQ \Leftrightarrow a - x = x \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành với AB = a, AD = 2a. Mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại A. Trên cạnh AD lấy điểm M với $AM = x(0 < x < 2a)$, mặt phẳng (α) qua M và song song với SA và CD cắt BC , SC , SD lần lượt tại N, P, Q.

a) Chứng minh MNPQ là hình thang vuông.

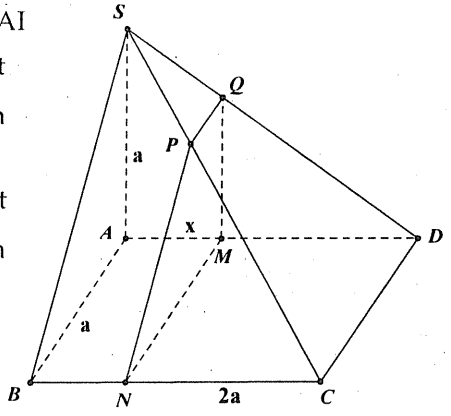
b) Tính diện tích hình thang MNPQ theo a và x.

c) Tìm tập hợp giao điểm I của MQ và NP khi M chạy từ A đến D.

LỜI GIẢI

a) Vì mặt phẳng $(\alpha) \,//\, AB$, nên (α) cắt mặt phẳng (ABCD) theo giao tuyến $MN \,//\, AB \,//\, CD$.

Vì mặt phẳng $(\alpha) \,//\, SA$, nên (α) cắt mặt phẳng (SAD) theo giao tuyến $MQ \,//\, SA$.



Vì mặt phẳng (α) // CD, nên (α) cắt mặt phẳng (SCD) theo giao tuyến QP // CD.

Kết luận: thiết diện mặt phẳng (α) cắt hình chóp S.ABCD là hình thang MNPQ (1)

Có $AB \perp AS$, mà MN // AB và MQ // SA suy ra $MN \perp MQ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra MNPQ là hình thang vuông.

b) Trong mặt (SAD) có MQ // AS:

$$\frac{DM}{DA}=\frac{DQ}{DS}=\frac{MQ}{AS}=\frac{2a-x}{2a}\Rightarrow MQ=\frac{2a-x}{2a}.a=\frac{2a-x}{2}$$

Trong mặt (SCD) có PQ // CD:

$$\frac{PQ}{CD}=\frac{SQ}{SD}=\frac{SD-DQ}{SD}=1-\frac{DQ}{SD}=1-\frac{2a-x}{2a}=\frac{x}{2a}\Rightarrow PQ=\frac{x}{2}.$$

Vì MN // AB, mà ABCD là hình bình hành nên MN = AB = a.

Diện tích hình thang vuông MNPQ:

$$S_{MNPQ}=\frac{(MN+PQ).MQ}{2}=\frac{\left(a+\frac{x}{2}\right).\frac{2a-x}{2}}{2}=\frac{(2a+x)(2a-x)}{8}=\frac{4a^2-x^2}{8}.$$

c) Ta có $(SBC)\cap(SAD)=St$ (với St // AD // BC)

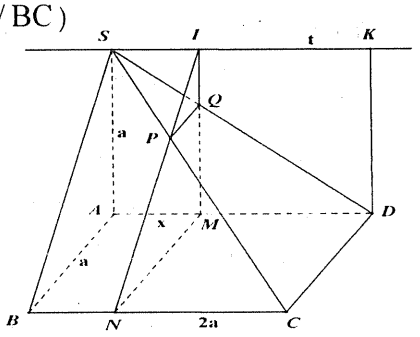
Vì $I=MQ\cap NP$, mà $\begin{cases} I\in MQ\subset(SAD) \\ I\in NP\subset(SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow I\in(SAD)\cap(SBC)$.

Từ đó suy ra I thuộc giao tuyến St cố định.

Giới hạn: Nếu $M\equiv A$ thì $I\equiv S$.

Nếu $M\equiv D$ thì $I\equiv K$ (Với DK // SA).



Kết luận: khi M chạy trên đoạn AD thì giao điểm I chạy trên đoạn SK.

Cho tứ diện ABCD có AB = a, CD = b. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD. Giả sử $AB \perp CD$, mặt phẳng (α) qua M nằm trên đoạn IJ và song song với AB và CD.

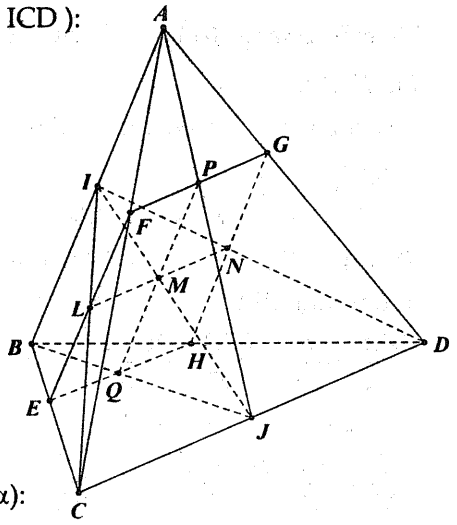
a) Tìm giao tuyến của (α) với (ICD) và (JAB).

b) Xác định thiết diện của A.BCD với mặt phẳng (α). Chứng minh thiết diện là hình chữ nhật.

c) Tính diện tích thiết diện của hình chữ nhật biết $IM=\frac{1}{3}IJ$.

LỜI GIẢI

a) Tìm giao tuyến của (α) với mặt phẳng (ICD):



Ta có: $\begin{cases}(\alpha) \,//\, CD\,, CD \subset (ICD)\\ M \in (\alpha) \cap (ICD)\end{cases}$

⇒ Giao tuyến là đường thẳng qua M và song song với CD cắt IC tại L và ID tại N.

Tương tự: $\begin{cases}(\alpha) \,//\, AB\,, AB \subset (JAB)\\ M \in (\alpha) \cap (JAB)\end{cases}$

⇒ Giao tuyến là đường thẳng qua M và song song với AB cắt JA tại P và JB tại Q.

b) Xác định thiết diện của ABCD với mp (α):

Ta có: $\begin{cases}(\alpha) \,//\, AB\\ AB \subset (ABC)\\ L \in (\alpha) \cap (ABC)\end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = EF \qquad (1)$

(với EF đi qua L và EF // AB, E ∈ BC, F ∈ AC)

Ta có: $\begin{cases}(\alpha) // AB\\ AB \subset (ABD)\\ N \in (\alpha) \cap (ABD)\end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABD) = HG \qquad (2)$

Với N ∈ HG và HG // AB, H ∈ BD, G ∈ AD.

Từ (1) và (2), suy ra EF // HG // AB (3)

Có: $\begin{cases}(\alpha) \,//\, CD\,, CD \subset (ACD)\\ FG = (\alpha) \cap (ACD)\end{cases} \Rightarrow FG \,//\, CD \qquad (4)$

Và $\begin{cases}(\alpha) \,//\, CD, CD \subset (BCD)\\ EH = (\alpha) \cap (BCD)\end{cases} \Rightarrow EH \,//\, CD \qquad (5)$

Từ (4) và (5), suy ra FG // EH // CD (6)

Từ (3) và (6), suy ra EFGH là hình bình hành. Mà AB ⊥ CD. (*)

Từ (3), (6) và (*), suy ra EFGH là hình chữ nhật .

c). Tính diện tích thiết diện của hình chữ nhật, biết IM = $\frac{1}{3}$ IJ:

Ta có: $S_{EFGH} = EF.FG = PQ.LN$

Tính LN:

Xét tam giác ICD, ta có: LN // CD ⇒ $\frac{LN}{CD} = \frac{IN}{ID}$ (7)

Xét tam giác IJD, ta có: MN // JD $\Rightarrow \dfrac{IN}{ID}=\dfrac{IM}{IJ}$ (8)

Từ (7) và (8), suy ra: $\dfrac{LN}{CD}=\dfrac{IM}{IJ}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow LN=\dfrac{CD}{3}=\dfrac{b}{3}$

Tương tự: $\dfrac{PQ}{AB}=\dfrac{JM}{JI}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow PQ=\dfrac{2}{3}.AB=\dfrac{2}{3}.a$

Vậy: $S_{EFGH}=\dfrac{2ab}{9}$.

Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC, (P) là mặt phẳng qua AM và song song với BD.

a) Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P).

b) Gọi E, F lần lượt là giao điểm của (P) với các cạnh SB và SD. Hãy tìm tỉ số diện tích của tam giác SME với tam giác SBC và tỉ số diện tích của tam giác SMF và tam giác SCD.

c) Gọi K là giao điểm của ME và CB, J là giao điểm của MF và CD. Hãy chứng minh 3 điểm K, A, J nằm trên một đường thẳng song song với EF và tìm tỉ số $\dfrac{EF}{KJ}$.

LỜI GIẢI

a) Gọi $O=AC\cap BD\Rightarrow mp(SAC)\cap mp(SBD)=SO$.

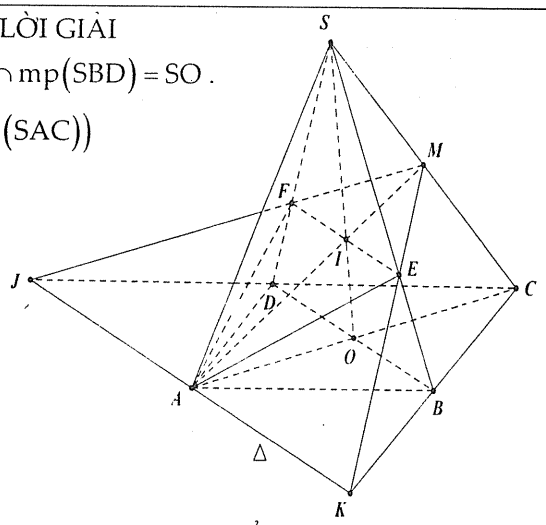
Gọi $I=AM\cap SO\left(AM,SO\subset mp(SAC)\right)$

$\Rightarrow I\in mp(SBD)$.

$\begin{cases} I\in(P)\cap(SBD) \\ BD\ //\ mp(P) \\ BD\subset(SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow (SBD)\cap(P)=Ix\left(Ix\ //\ BD\right)$

Gọi $E=Ix\cap SB, F=Ix\cap SD$.



Suy ra: E, F cũng là giao điểm của SB, SD với mặt phẳng (P).

Vậy: Thiết diện cần tìm là tứ giác AEMF.

b) Để ý ta có: I là trọng tâm của tam giác SAC nên: $\dfrac{SI}{SO}=\dfrac{2}{3}$.

Xét tam giác SBD có EF song song với BD ta có: $\frac{SE}{SB}=\frac{SF}{SD}=\frac{SI}{SO}=\frac{2}{3}$.

$$\frac{S_{SME}}{S_{SBC}}=\frac{\frac{1}{2}SM.SE.\sin\widehat{BSC}}{\frac{1}{2}SC.SB.\sin\widehat{BSC}}=\frac{SE}{SB}.\frac{SM}{SC}=\frac{1}{3};\ \frac{S_{SMF}}{S_{SCD}}=\frac{\frac{1}{2}SM.SF.\sin\widehat{DSC}}{\frac{1}{2}SC.SD.\sin\widehat{DSC}}=\frac{SF}{SD}.\frac{SM}{SC}=\frac{1}{3}$$

c) $K=EM\cap BC\Rightarrow K\in mp(P)\cap(ABCD)$ (1)

$J=FM\cap CD\Rightarrow J\in mp(P)\cap(ABCD)$ (2)

$A\in mp(P)\cap(ABCD)$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra ba điểm K, J, K thuộc giao tuyến (Δ) của mp (P) và mp (ABCD).

Ta có: $\begin{cases}mp(P)\cap mp(ABCD)=(\Delta)\\ BD\ //\ mp(P)\end{cases}\Rightarrow(\Delta)\ //\ BD$.

Xét tam giác MJK có: EF // JK(vì JK // BD, EF // BD):

$\frac{ME}{MK}=\frac{MF}{MJ}=\frac{MI}{MA}=\frac{EF}{JK}=\frac{1}{3}$. Vậy $\frac{EF}{KJ}=\frac{1}{3}$.

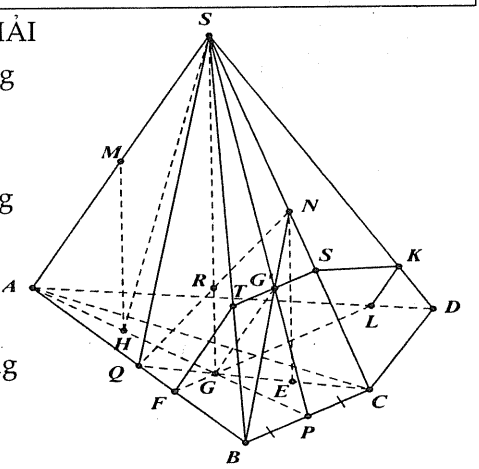
Cho hình chóp S.ABCD có G là trọng tâm Δ ABC. Gọi M, N, P, Q, R, H lần lượt là trung điểm của SA, SC, CB, BA, QN, AG.

a). Chứng minh rằng: S, R, G thẳng hàng và SG = 2MH = 4RG.

b). G' là trọng tâm Δ SBC. Chứng minh rằng GG' // (SAB), GG' // (SAC).

c). Mặt phẳng (α) qua GG' và song song BC. Xác định thiết diện của hình chóp tạo bởi mặt phẳng (α).

LỜI GIẢI



a) Chứng minh rằng: S , R , G thẳng hàng và SG = 2MH = 4RG.

Gọi E trung điểm của GC .

Trong ΔQNE có RG là đường trung bình của tam giác nên có:

$GR\ //\ NE,\ GR=\frac{1}{2}NE$ (1)

Trong ΔSCG có: NE là đường trung bình của tam giác nên có:

$GS\ //\ NE,\ GS=2NE$ (2)

Từ (1) và (2) suy rs ba điểm G, R, S thẳng hàng và GS = 4GR.

Trong ΔSAG có HM là đường trung bình của tam giác nên có $GS = 2HM$.

b). Chứng minh rằng: GG' // (SAB); GG' // (SAC).

Trong tam giác SAP có: $\frac{PG}{PA} = \frac{PG'}{PS} = \frac{1}{3} \Rightarrow GG' // SA$.

Hai mặt (SAB) và (SAC) cùng chứa SA.

Suy ra GG' // (SAB), GG' // (SAC).

c). Xác định thiết diện của hình chóp tạo bởi mặt phẳng (α)

Vì $(\alpha) // BC$, nên (α) cắt mặt phẳng đáy (ABCD) theo giao tuyến qua G và song song với BC. Giao tuyến này cắt AB tại F, cắt AD tại L.

Vì GG' // SA nên (α) cắt mặt phẳng (SAB) theo giao tuyến qua F và song song với SA. Giao tuyến này cắt SB tại T.

Vì GG' // SA nên (α) cắt mặt phẳng (SAD) theo giao tuyến qua F và song song với SA. Giao tuyến này cắt SB tại T.

TG' là giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (SBC), giao tuyến này cắt SC tại S.

Thiết diện cần tìm là ngũ giác FLKST.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O, có AC = a, BD = b, tam giác SBD đều.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

b) Gọi G_1, G_2, lần lượt là trọng tâm của tam giác ACD, SCD. Chứng minh G_1G_2 song song với mặt phẳng (SCA).

c) Gọi M là điểm di động trên đoạn AO với AM = x ($0 < x < a/2$). Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mp(SBD), tìm thiết diện tạo bởi mp(P) và hình chóp S.ABCD. Tính diện tích thiết diện theo a, b, x.

LỜI GIẢI

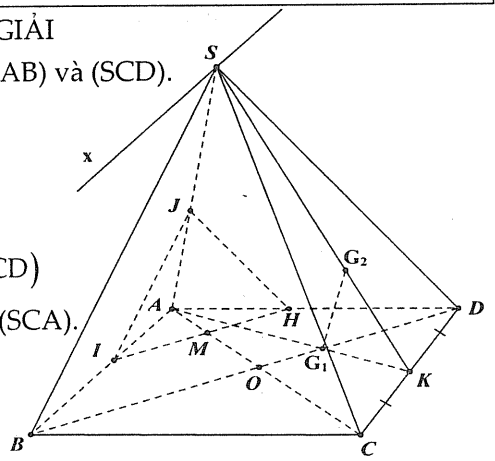
a). Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Ta có: $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB // CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \ (Sx // AB // CD)$

b) Chứng minh G_1G_2 // với mặt phẳng (SCA).

Gọi K trung điểm của CD.



Vì G_1, G_2 là trọng tâm của hai ΔACD và SCD nên có:

$\frac{KG_1}{KA}=\frac{KG_2}{KS}=\frac{1}{3}\Rightarrow G_1G_2 \,//\, SA$.

Mà $SA\subset(SAC)\Rightarrow G_1G_2 \,//\,(SAC)$.

c) Tìm thiết diện tạo bởi mp(P) và hình chóp S.ABCD

Vì $(P)\,//\,(SBD)\Rightarrow (P)\,//\,SB$, $(P)\,//\,SD$, $(P)\,//\,BD$.

Vì $(P)\,//\,BD$, nên (P) cắt mặt phẳng (ABCD) theo giao tuyến qua M và song song với BD. Giao tuyến này cắt AB, AD lần lượt tại I và H.

Vì $(P)\,//\,SB$, nên (P) cắt mặt phẳng (SAB) theo giao tuyến qua I và song song với SB. Giao tuyến này cắt SA tại J.

Thiết diện cần tìm là tam giác IJH.

Vì ba cạnh của tam giác IJH lần lượt song song với ba cạnh của tam giác SBD, mà tam giác SBD đều nên tam giác IJH đều.

Ta có: $\frac{AM}{AO}=\frac{AJ}{AB}=\frac{AH}{AD}=\frac{JH}{BD}\Rightarrow JH=\frac{AM}{AO}.BD=\frac{x}{\frac{a}{2}}.b=\frac{2bx}{a}$

Kết luận: $S_{\Delta IJH}=\frac{JH^2\sqrt{3}}{4}=\frac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2}$.

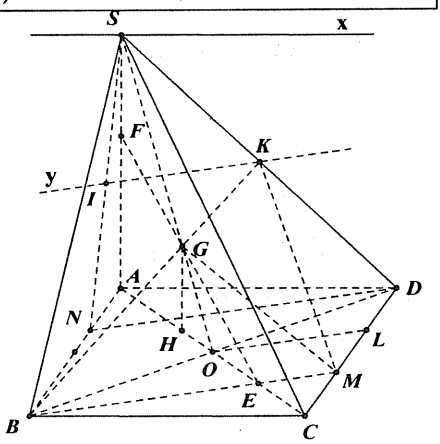
Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành.

a). Tìm giao tuyến của (SBC) và (SAD).

b). Gọi G là trọng tâm tam giác SBD, trên các cạnh CD và AB lần lượt lấy các điểm M, N thỏa MD = 2MC, NB = 2NA. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SND) và (BGM). Tìm giao điểm I của SN và (BGM).

c). Gọi F là giao điểm của SA và mp(BGM). Tính tỉ số FS/FA.

LỜI GIẢI



a) Ta có $\begin{cases} S\in(SBC)\cap(SAD) \\ BC \,//\, AD \\ BC\subset(SBC), AD\subset(SAD) \end{cases}$

$\Rightarrow (SBC)\cap(SAD)=Sx\,(Sx \,//\, BC \,//\, AD)$.

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SND) và (BGM).

Gọi K trung điểm của SD $\Rightarrow K\in BG$.

Ta có: $\begin{cases} K \in (SND) \cap (BMG) \\ ND \;//\; BM \\ ND \subset (SND), BM \subset (BMG) \end{cases}$

$\Rightarrow (SND) \cap (BMG) = Ky (Ky \;//\; ND \;//\; BM)$.

Trong mặt phẳng (SND), gọi $I = SN \cap Ky$

$\Rightarrow \begin{cases} I \in SN \\ I \in Ky, Ky \subset (BMG) \end{cases} \Rightarrow I = SN \cap (BMG)$

c) Trong mặt phẳng (ABCD) gọi $E = AC \cap BM$.

Ta có EG là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (BMG).

Gọi $F = SA \cap EG$, thì F chính là giao điểm của SA và mặt phẳng (BMG).

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$, vì G là trọng tâm tam giác SBD

$\Rightarrow SG = \frac{2}{3}SO$, mà SO là đường trung tuyến của ΔSAC.

$\Rightarrow$ G là trọng tâm của tam giác SAC.

Dựng OL // BM $(L \in CD)$, thì OL đường trung bình của $\Delta DBM \Rightarrow DL = LM$.

Theo đề bài suy ra $DL = LM = MC$, suy ra EM là đường trung bình của tam giác COL.

Trong mp(SAC), kẻ GH // $SA (H \in AC)$.

Áp dụng định lý Talet cho các tam giác SAO và FAE có:

$\frac{OG}{OS} = \frac{OH}{OA} = \frac{GH}{AS} = \frac{1}{3} \Rightarrow OH = \frac{1}{3}OA,\; GH = \frac{1}{3}AS$ (*)

$\frac{HG}{AF} = \frac{EH}{EA}$, mà $\frac{EH}{EA} = \frac{EO + OH}{EO + OA} = \frac{1,5.OH + OH}{1,5.OH + 3OH} = \frac{2,5.OH}{4,5.OH} = \frac{5}{9}$

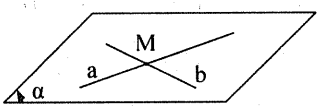
$\Rightarrow HG = \frac{5}{9}AF$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra: $\frac{1}{3}SA = \frac{5}{9}AF \Rightarrow AF = \frac{3}{5}SA \Rightarrow \frac{FS}{FA} = \frac{2}{3}$.

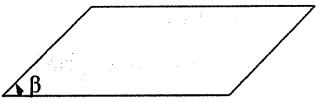
HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Định lí 1:

Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a,b và a,b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).

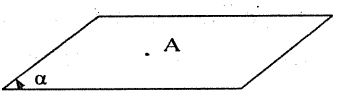


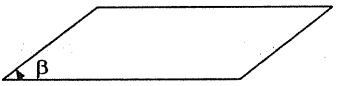
Phương pháp chứng minh hai mặt phẳng song song:
Ta phải chứng minh có hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng này lần lượt song song với mặt phẳng kia.



Định lí 2:

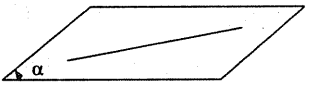
Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.



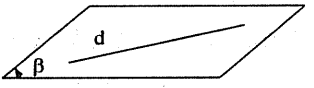


Hệ quả:

Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì trong (α) có một đường thẳng song song với d và qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α).



Phương pháp chứng minh đường thẳng d song song với (α): Ta phải chứng minh d thuộc (β) và $(\beta) \,//\, (\alpha) \Rightarrow d \,//\, (\alpha)$.



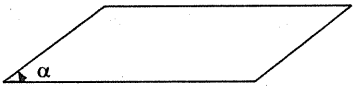
Hệ quả 2:

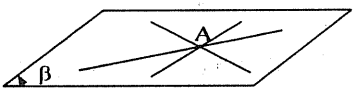
Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Hệ quả 3:

Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α).

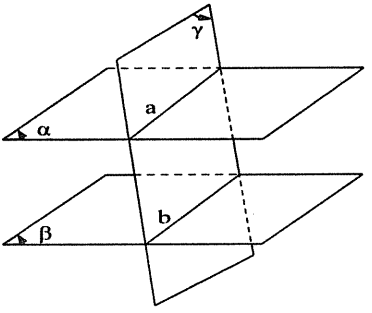
Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng đi qua A và song song với (α).





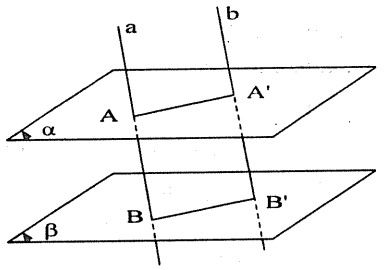
Định lí 3:

Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.



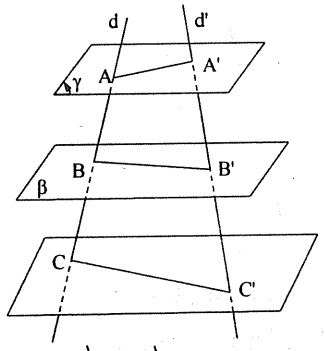
Hệ quả:

Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.



Định lí Ta-lét:

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

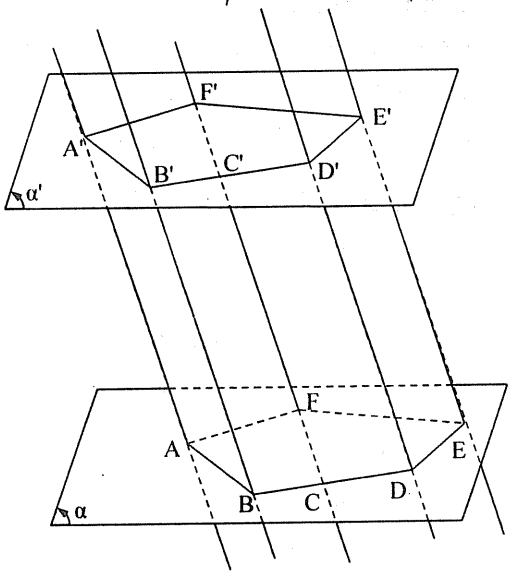


Hình lăng trụ và hình hộp.

Cho hai mặt phẳng song song (α) và (α'). Trên (α) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$.

Qua các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt (α') lần lượt tại $A'_1, A'_2, ..., A'_n$.

Hình gồm hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $A'_1A'_2...A'_n$ và các hình bình hành $A_1A'_1A'_2A_2$, $A_2A'_2A'_3A_3$, ..., $A_nA'_nA'_1A_1$ được gọi là hình lăng trụ và được kí hiệu là $A_1A_2...A_n.A'_1A'_2...A'_n$.



Hai đa giác $A_1A_2...A_n$ và $A'_1A'_2...A'_n$ được gọi là hai mặt đáy của hình lăng trụ.

Các đoạn thẳng $A_1A'_1, A_2A'_2, ..., A_nA'_n$ được gọi là các cạnh bên của hình lăng trụ.

Các hình bình hành $A_1A'_1A'_2A_2, A_2A'_2A'_3A_3, ..., A_nA'_nA'_1A_1$ được gọi là các mặt bên của hình lăng trụ.

Các đỉnh của hai đa giác được gọi là các đỉnh của hình lăng trụ.

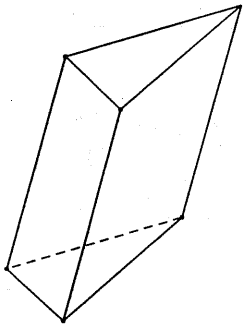
Nhận xét:

Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.

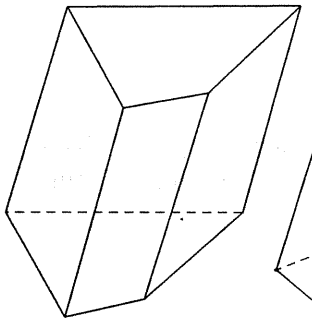
Các mặt bên của hình lăng trụ là hình bình hành.

Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

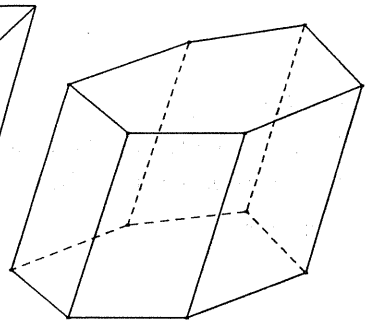
Người ta gọi tên của hình lăng trụ dựa vào tên của đa giác đáy.



Hình lăng trụ tam giác



Hình lăng trụ tứ giác



Hình lăng trụ lục giác

Hình chóp cụt

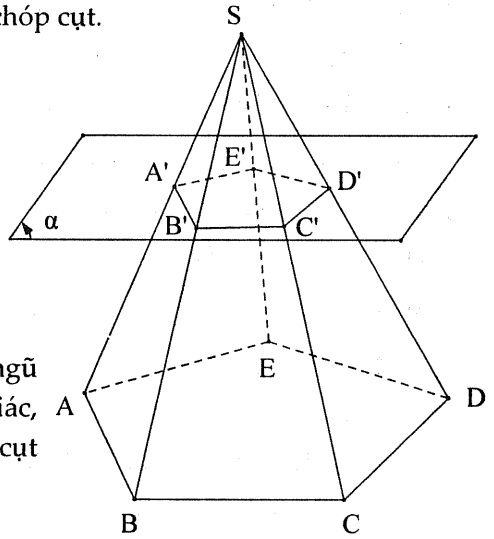
Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$, một mặt phẳng (P) không qua đỉnh, song song với mặt phẳng đáy của hình chóp cắt các cạnh $SA_1, SA_2, SA_3, ..., SA_n$ lần lượt tại $A_1', A_2', ...A_n'$. Hình tạo bởi thiết diện $A_1'A_2'...A_n'$ và đáy $A_1A_2...A_n$ của hình chóp cùng với các tứ giác $A_1'A_2'A_2A_1, A_2'A_3'A_3A_2, ..., A_n'A_1'A_1A_n$ gọi là hình chóp cụt.

Đáy của hình chóp gọi là đáy lớn của hình chóp cụt, còn thiết diện $A_1'A_2'...A_n'$ gọi là đáy nhỏ của hình chóp cụt.

Các tứ giác $A_1'A_2'A_2A_1$, $A_2'A_3'A_3A_2, ..., A_n'A_1'A_1A_n$ gọi là các mặt bên của hình chóp cụt.

Các đoạn thẳng A_1A_1', A_2A_2', A_nA_n' gọi là các cạnh bên của hình chóp cụt.

Tùy theo đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác ..., ta có hình chóp cụt tam giác, hình chóp cụt tứ giác, hình chóp cụt ngũ giác.



Vì hình chóp cụt được cắt ra từ một hình chóp nên ta dễ dàng suy ra các tính chất sau đây của hình chóp cụt.

Tính chất:

Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và các tỉ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.

Các mặt bên là những hình thang.

Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.

BÀI TẬP

Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD.

a) Chứng minh rằng: (OMN) // (SBC).

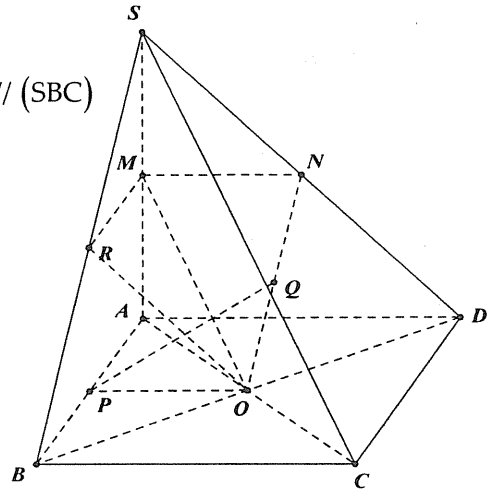
b) Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, ON, SB.
Chứng minh: PQ // (SBC), (MOR) // (SCD)

LỜI GIẢI

a) Chứng minh (OMN) // (SBC):

Trong hai tam giác SAC và SDB có OM // SC và ON // SB (đường trung bình của tam giác).

Có: $\begin{cases} OM, ON \subset (OMN) \\ SB,\ SC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (OMN) \,//\, (SBC)$



b). Chứng minh : PQ // (SBC)

Có: OP // AD mà AD // MN.

Suy ra OP // MN.

Suy ra $P \in (OMN) \Rightarrow PQ \subset (OMN)$.

Vì $(OMN) \,//\, (SBC) \Rightarrow PQ \,//\, (SBC)$.

Chứng minh: (MOR) // (SCD).

Ta có MR // AB mà AB // CD.

Suy ra MR // CD. Và có OM // SC

Vì $MR, OM \subset (OMR)$ và $CD, SC \subset (SCD)$.

Từ đó suy ra $(OMR) // (SCD)$.

Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF có chung cạnh AB và không đồng phẳng. I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, EF.

Chứng minh:

a) (ADF) // (BCE)

b) (DIK) // (JBE)

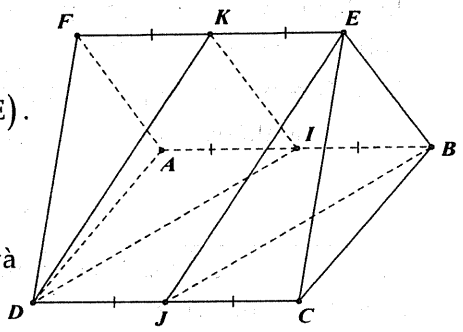
LỜI GIẢI

a) Mp (ADF) // mp (BCE):

Ta có: AF // BE và AD // BC.

Mà $AF, AD \subset (ADF)$ và $BE, BC \subset (BCE)$.

Từ đó suy ra $mp(ADF) // mp(BCE)$



b) Mp (DIK) // mp (JBE):

Dễ dàng chứng minh hai tứ giác BIDJ và BIKE là hình bình hành.

Từ đó suy ra DI // BJ và

IK // BE. Suy ra mp (DIK) // mp(JBE).

Cho các hình bình hành ABCD, ABEF nằm trên hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC, BF theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho MC = 2AM, NF = 2BN. Qua M, N lần lượt kẻ các đường thẳng song song với cạnh AB, cắt các cạnh AD, AF theo thứ tự tại M_1, N_1.

Chứng minh rằng:

a) $MN // /DE$.

b) $M_1N_1 \| (DEF)$.

c) $(MNM_1N_1) // /(DEF)$.

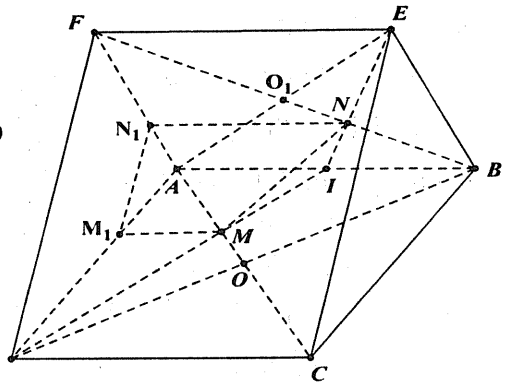
LỜI GIẢI

a) Chứng minh MN // DE:

Gọi I trung điểm của AB.

Ta có: $\begin{cases} AC = 3AM \\ AC = 2AO \end{cases} \Rightarrow 3AM = 2AO$

$\Rightarrow AM = \frac{2}{3}AO$.



Ngoài ra AM là đường trung tuyến của tam giác ABD. Từ đó suy ra M làtrọng tâm của ΔABD.

Chứng minh hoàn toàn tương tự N là trọng tâm của tam giác EAB. Suy ra ba đường thẳng DM, EN, AB đồng qui tại điểm I.

Trong ΔIDE, theo tính chất trọng tâm có: $\frac{IM}{ID} = \frac{IN}{IE} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN // DE$.

b) Chứng minh M_1N_1 // (DEF):

Ta có: NN_1 // AI $\Rightarrow \dfrac{AN_1}{N_1F} = \dfrac{IN}{NE} = \dfrac{1}{2}$ (3)

Tương tự có: $MM_1 \parallel AI \Rightarrow \dfrac{AM_1}{M_1D} = \dfrac{IM}{MD} = \dfrac{1}{2}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $\dfrac{AN_1}{N_1F} = \dfrac{AM_1}{M_1D} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow M_1N_1$ // DF.

Vì $DF \subset (DEF) \Rightarrow M_1N_1$ // (DEF)

c) Chứng minh: (MNN_1M_1) // (DEF):

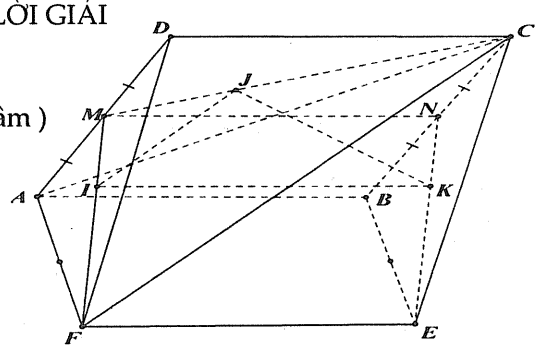
Có MN // DE và M_1N_1 // DF.

Mà $MN, M_1N_1 \subset (MNN_1M_1)$ và $DE, DF \subset (DEF)$.

Từ đó suy ra (MNN_1M_1) // (DEF).

Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của AB, BC và I, J, K theo thứ tự là trọng tâm các tam giác ADF, ADC, BCE.
Chứng minh: (IJK) // (CDFE).

LỜI GIẢI



Xét tam giác MFC ta có:

$\dfrac{MI}{MF} = \dfrac{MJ}{MC} = \dfrac{1}{3}$ (tính chất trọng tâm)

$\Rightarrow$ IJ // FC (1)

Xét hình bình hành MNEF có:

$\dfrac{MI}{MF} = \dfrac{NK}{NE} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$ IK // FE (2)

Từ (1) và (2) ta được:

$$\begin{cases} IJ \parallel FC,\ IK \parallel FE \\ IJ, IK \subset (IJK),\ IJ \cap IK = I \\ FC,\ FE \subset (CDFE) \end{cases} \Rightarrow mp(IJK) \parallel mp(CDFE).$$

Kết luận: (IJK) // (CDFE).

Cho tứ diện ABCD. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ADB

a) Chứng minh: $(G_1G_2G_3)$ // (BCD)

b) Tìm thiết diện của tứ diện ABCD với mặt phẳng $(G_1G_2G_3)$. Tính diện tích thiết diện theo diện tích của tam giác BCD là S.

LỜI GIẢI

a) Chứng minh: $(G_1G_2G_3)$ // (BCD)

Gọi M, N, L lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD và BD.

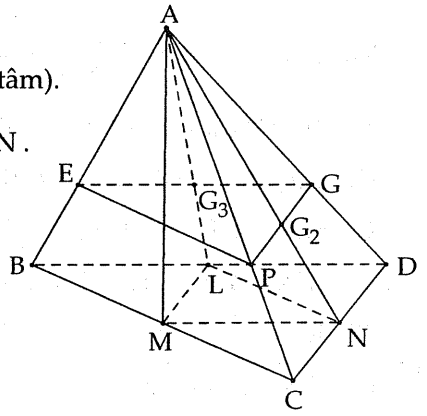
Trong ΔAMN ta có:

$\frac{AG_1}{AM}=\frac{AG_2}{AN}=\frac{G_1G_2}{MN}=\frac{2}{3}$ (tính chất trọng tâm).

Theo định lý đảo Talet suy ra: G_1G_2 // MN.

Chứng minh tương tự, ta có:

G_2G_3 // NL, G_3G_1 // LM.



Từ đó suy ra: $\begin{cases} G_1G_2 \text{ // } MN,\ G_2G_3 \text{ // } NL \\ MN, NL \subset (BCD) \\ G_1G_2, G_2G_3 \subset (G_1G_2G_3) \end{cases}$

$\Rightarrow mp(G_1G_2G_3)$ // mp(BCD).

Kết luận: $mp(G_1G_2G_3)$ // mp(BCD)

b) Tìm thiết diện của tứ diện ABCD với mặt phẳng $(G_1G_2G_3)$:

Ta có: $\begin{cases} BC \text{ // } (G_1G_2G_3) \\ BC \subset (ABC) \\ G_1 \in (G_1G_2G_3) \cap (ABC) \end{cases}$.

Vậy: giao tuyến của $mp(G_1G_2G_3)$ với mp(ABC) qua G_1 và song song với BC, cắt AB, AC lần lượt tại E và F.

Tương tự: $(G_1G_2G_3)$ cắt (ACD) theo giao tuyến FG // CD.

$(G_1G_2G_3)$ cắt (ABD) theo giao tuyến GE // BD.

Xét tam giác AMC và tam giác ABC.

Ta có: G_1F // $MC \Rightarrow \frac{AG_1}{AM}=\frac{AF}{AC}=\frac{2}{3}$ (1)

EF // $BC \Rightarrow \frac{EF}{BC}=\frac{AF}{AC}=\frac{2}{3}$ (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra: $\frac{AG_1}{AM}=\frac{EF}{BC}=\frac{2}{3} \Rightarrow EF=\frac{2}{3}BC$.

Tương tự có $FG=\frac{2}{3}CD$, $GE=\frac{2}{3}BD$

$\Rightarrow EF+FG+GE=\frac{2}{3}BC+\frac{2}{3}CD+\frac{2}{3}GE=\frac{2}{3}(BC+CD+GE)$

Diện tích thiết diện:

$$S_{EFG}=\frac{1}{4}.\sqrt{(EF+FG+GE).(EF+FG-GE).(EF+GE-FG).(FG+GE-EF)}.$$

$$.\frac{1}{4}.\frac{4}{9}.\sqrt{(BC+CD+DB).(BC+CD-DB).(BC+DB-CD).(CD+DB-BC)}$$

$$=\frac{4}{9}.S_{BCD}$$

Kết luận: $S_{EFG}=\frac{4}{9}.S$.

Từ bốn đỉnh của hình bình hành ABCD vẽ bốn nửa đường thẳng song song cùng chiều Ax, By, Cz, Dt sao cho chúng cắt mặt phẳng ABCD. Một mặt phẳng (α) cắt bốn nửa đường thẳng theo thứ tự nói trên tại A', B', C', D'.

a) Chứng minh $(Ax,By)\ //\ (Cz,Dt)$ và $(Ax,Dt)\ //\ (By,Cz)$.

b) Tứ giác A'B'C'D' là hình gì?

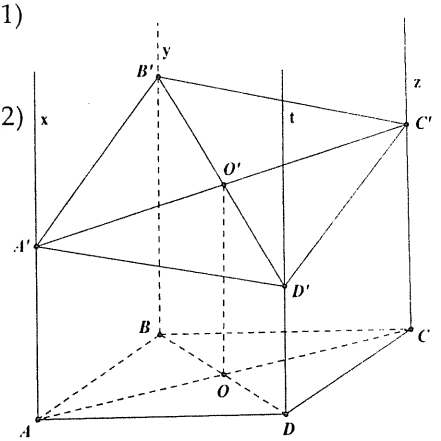
c) Chứng minh $AA'+CC'=BB'+DD'$.

LỜI GIẢI

a). Chứng minh $(Ax,By)\ //\ (Cz,Dt)$ và $(Ax,Dt)\ //\ (By,Cz)$

Có $\left.\begin{matrix}Ax\ //\ Dt\\ Dt\subset(Cz,Dt)\end{matrix}\right\}\Rightarrow Ax\ //\ (Cz,Dt)$ (1)

Và $\left.\begin{matrix}AB\ //\ CD\\ CD\subset(Cz,Dt)\end{matrix}\right\}\Rightarrow AB\ //\ (Cz,Dt)$ (2)



Từ (1) và (2) và $Ax, AB\subset(Ax,By)$

$\Rightarrow (Ax,By)\ //\ (Cz,Dt)$.

Chứng minh tương tự suy ra:

$(Ax,Dt)\ //\ (By,Cz)$.

b). Tứ giác A'B'C'D' là hình gì?

Có: $\begin{cases}(\alpha)\cap(Ax,By)=A'B'\\ (\alpha)\cap(Cz,Dt)=C'D'\Rightarrow A'B'\ //\ C'D'\\ (Ax,By)\ //\ (Cz,Dt)\end{cases}$ (1)

Và: $\begin{cases}(\alpha)\cap(Ax,Dt)=A'D'\\(\alpha)\cap(By,Cz)=B'C'\\(Ax,Dt)\ //\ (By,Cz)\end{cases}\Rightarrow A'D'\ //\ B'C'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành.

c) Gọi $O=AC\cap BD$, $O'=A'C'\cap B'D'$.

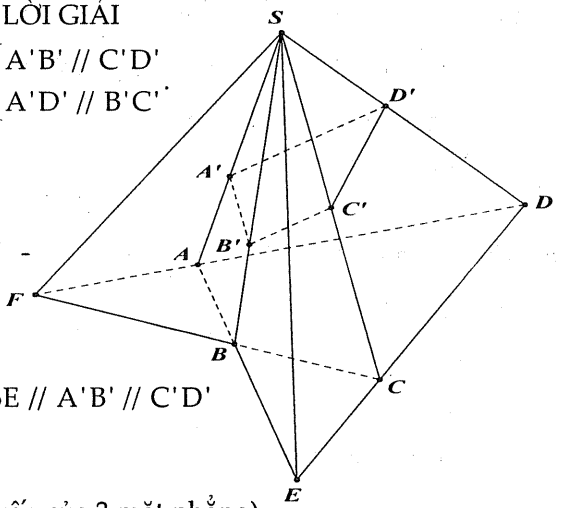
Vì O, O' là tâm của hai bình bình hành ABCD và A'B'C'D', nên có OO' là đường trung bình của hai hình thang ACC'A' và BDD'B'.

Theo tính chất đường trung bình của hình thang suy ra :

$$OO'=\frac{AA'+CC'}{2}=\frac{BB'+DD'}{2}\Rightarrow AA'+CC'=BB'+DD'.$$

Cho hình chóp S.ABCD, mp(P) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'. Tìm điều kiện của mặt phẳng (P) để A'B'C'D' là hình bình hành.

LỜI GIẢI



A'B'C'D' là hình bình hành $\Leftrightarrow\begin{cases}A'B'\ //\ C'D'\\A'D'\ //\ B'C'\end{cases}$.

Trong mp(ABCD), gọi:

$E=AB\cap CD$ và $F=AD\cap BC$

Ta có: $SE=(SAB)\cap(SCD)$

Và $SF=(SAD)\cap(SBC)$.

Ta có: $\begin{cases}A'B'=(P)\cap(SAB)\\C'D'=(P)\cap(SCD)\\SE=(SAB)\cap(SCD)\\A'B'\ //\ C'D'\end{cases}\Rightarrow SE\ //\ A'B'\ //\ C'D'$

$\Rightarrow SE\ //\ (P)$ (Định lí về giao tuyến của 3 mặt phẳng).

Tương tự, SF//(P).

Vậy: nếu (P) // SE và (P) // SF thì A'B'C'D' là hình bình hành.

Cho tứ diện ABCD có AB = CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và BD, E là điểm thuộc AD khác A và D. Tìm vị trí của E để thiết diện của tứ diện khi cắt bởi mp (JEI) là hình thoi.

LỜI GIẢI

Có IJ là đường trung bình của tam giác BCD.

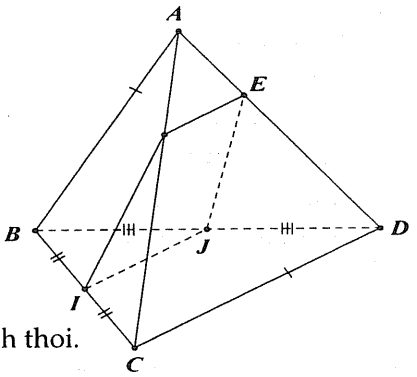
Do đó, IJ // CD $\Rightarrow$ CD // mp (IJEF) $\Rightarrow$ CD // EF (do CD, EF đồng phẳng).

Do đó, thiết diện IJEF là hình thang.

Để thiết diện là hình thoi thì $\begin{cases} EF = JI \\ EF = JE \end{cases}$

$\Rightarrow$ E là trung điểm của AD.

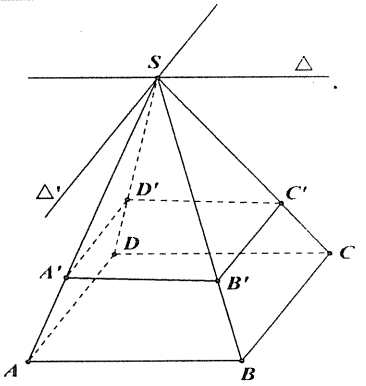
Ngược lại, khi E là trung điểm của AD thì:



$$\begin{cases} EF \,//\, JI \,//\, CD,\ FE = JI = \dfrac{CD}{2} \\ JE \,//\, FI \,//\, AB,\ JE = FI = \dfrac{AB}{2} \\ CD = AB \end{cases} \Rightarrow IJEF \text{ là hình thoi.}$$

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Mặt phẳng (P) cắt các đoạn SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'. Chứng minh rằng tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành khi và chỉ khi mặt phẳng (P) song song với mp(ABCD).

LỜI GIẢI



Giả sử mp(P) // mp(ABCD).

Khi đó mp(P) và (ABCD) bị mp(SAB) cắt theo hai giao tuyến A'B' và AB song song.

Tương tự, C'D' // CD , B'C' // BC , A'D' // AD.

$\Rightarrow$ A'B' // C'D' và A'D' // B'C'

$\Rightarrow$ A'B'C'D' là hình bình hành.

Giả sử A'B'C'D' là hình bình hành:

Ta có: $\begin{cases} A'B' \,//\, C'D' \\ A'B' \subset (SAB) \\ C'D' \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow \Delta = (SAB) \cap (SCD) \Rightarrow \Delta \,//\, A'B',\ \Delta \,//\, C'D'.$

Mặt khác: $\begin{cases} AB \,//\, CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow \Delta = (SAB) \cap (SCD),\ \Delta \,//\, AB,\ \Delta \,//\, CD.$

Do đó, A'B'// AB $\Rightarrow$ A'B' // (ABCD) (1)

Tương tự A'D' // (ABCD). (2)

Từ (1) và (2) suy ra mp (P) // mp(ABCD).

Cho hai hình vuông ABCD và ABEF ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M và N sao cho AM = BN. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M và N lần lượt cắt AD và AF tại M′ và N′. Chứng minh rằng:

a) mp(ADF) // mp(BCE).

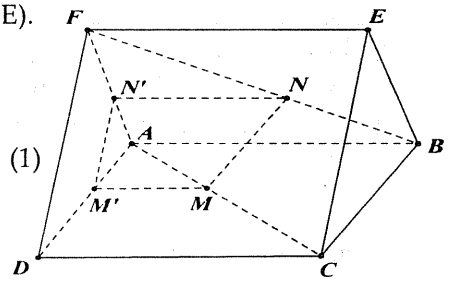
b) mp(DEF) // mp(MM′N′N).

LỜI GIẢI

a) Ta có: AF // BE, BE ⊂ (BCE) và AD // BC, BC⊂ (BCE).

⇒ AF và AD cùng song song với mp(BCE).

Mà AF, AD ⊂ (ADF). Vậy : (ADF) // (BCE).



b) Ta có: MM′ // AB mà AB // EF

⇒ MM′ // EF ⊂ (DEF). (*)

Mặt khác: MM' // CD $\Rightarrow \frac{AM'}{AD} = \frac{AM}{AC}$ (1)

NN' // AB $\Rightarrow \frac{AN'}{AF} = \frac{BN}{BF}$ (2)

Mà AM = BN, AC = BF $\Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \frac{AM'}{AD} = \frac{AN'}{AF} \Rightarrow$ M'N' // DF ⊂ (DEF) (**)

Mà MM', M'N' ⊂ (MM'N'N) (***).

Từ (*), (**), (***) ⇒ (DEF) // (MM'N'N).

KHỐI TRỤ

Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C').

b) Gọi M, N lần lượt là hai điểm bất kỳ trên trên AA' và BC. Tìm giao điểm của B'C' với mặt phẳng (AA'N) và giao điểm của MN với (AB'C').

LỜI GIẢI

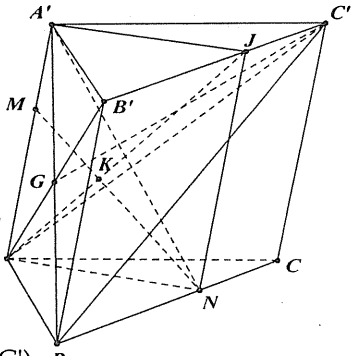
C' là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C').

Trong mặt phẳng (ABB'A') gọi G là giao điểm của AB' và BA'.

Suy ra G là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C').

Kết luận $(AB'C') \cap (BA'C') = GC'$.

Chọn mặt phẳng (BCC'B') chứa B'C'.



Ta có: $\begin{cases} N \in (AA'N) \cap (BCC'B') \\ AA' \,//\, BB' \\ AA' \subset (AA'N), BB' \subset (BCC'B') \end{cases}$

$\Rightarrow (AA'N) \cap (BCC'B') = Nx (Nx \,//\, AA' \,//\, BB')$.

Gọi $J = Nx \cap B'C' \Rightarrow J = B'C' \cap (AA'N)$.

Chọn mặt phẳng (ANJA') chứa MN.

Tìm giao tuyến của mặt phẳng (ANJA') và (AB'C').

Ta có $A \in (ANJA') \cap (AB'C')$ (1)

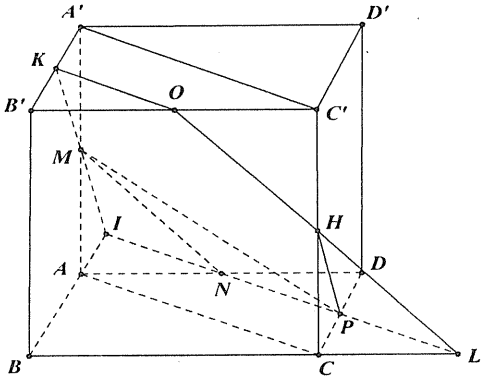
Và $\begin{cases} J \in (ANJA') \\ J \in B'C' \subset (AB'C') \end{cases} \Rightarrow J \in (ANJA') \cap (AB'C')$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AJ = (ANJA') \cap (AB'C')$.

Trong mp(ANJA') gọi $K = MN \cap AJ \Rightarrow K = MN \cap (AB'C')$.

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AA', AD, DC. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng đi qua ba điểm M, N, P với hình lập phương.

LỜI GIẢI



Trong mặt phẳng đáy ABCD gọi I và L là giao điểm của đường thẳng NP với AB và BC.

MI là giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ABB'A'). MI cắt A'B' tại điểm K.

K là điểm chung của mặt phẳng (MNP) với mặt phẳng (A'B'C'D') và có NP // AC // A'C', nên giao tuyến của chúng qua K và song song với A'C', giao tuyến này cắt B'C' tại điểm O.

O và L là hai điểm chung của (MNP) và (BCC'B') nên $(MNP) \cap (BCC'B') = OL$, giao tuyến OL cắt CC' tại H.

Kết luận thiết diện của hình lập phương khi bị cắt bởi mặt phẳng (MNP) là lục giác MNPHOK, có các cặp cạnh đối song song.

Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm DC, AD, BB'. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) với hình hộp và giao tuyến của (MNP) với mặt phẳng (A'B'C'D').

LỜI GIẢI

Trong mặt phẳng đáy ABCD gọi F và E là giao điểm của đường thẳng MN với AB và BC.

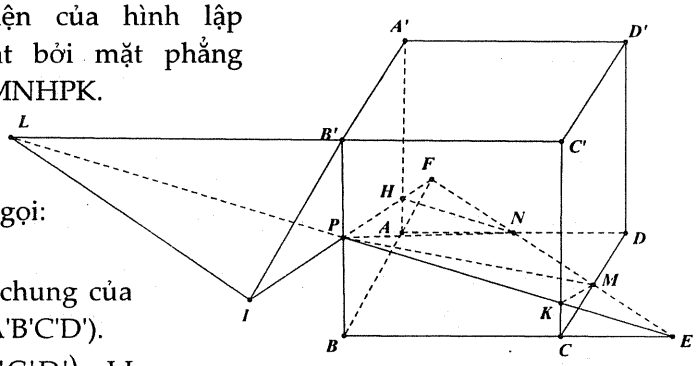
PF là giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với (ABB'A').

Gọi H là giao điểm của AA' và PF.

PE là giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với (BCC'B').

Gọi K là giao điểm của CC' và PE.

Kết luận thiết diện của hình lập phương khi bị cắt bởi mặt phẳng (MNP) là ngũ giác MNHPK.



Trong mp (ABB'A'), gọi: $I = HP \cap A'B'$.

Trong mp (BCC'B'), gọi: $L = KP \cap C'B'$.

L và I là hai điểm chung của hai mp (MNP) và (A'B'C'D').

Nên $(MNP) \cap (A'B'C'D') = LI$.

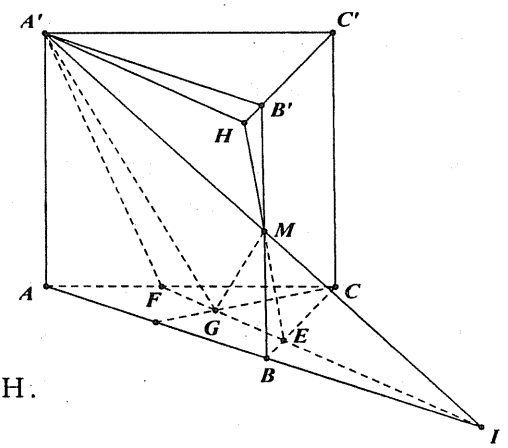
Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi M là trung điểm của BB', G là trọng tâm tam giác ABC. Tìm thiết diện tạo bởi (A'MG) cắt hình lăng trụ ABC.A'B'C', và giao tuyến của mặt phẳng (A'MG) với (A'B'C').

LỜI GIẢI

Trong mặt phẳng (ABB'A') gọi $I = A'M \cap AB$.

Ta có I và G là hai điểm chung của (ABC) và (A'MG).

Vậy $(A'MG) \cap (ABC) = IG$.



Trong mặt phẳng đáy (ABC) gọi E, F lần lượt là giao điểm của IG với BC và AC. Từ đó suy ra thiết diện cần tìm là A'FEM.

Trong mặt phẳng (BCC'B'), gọi: $H = EM \cap B'C'$.

Suy ra A' và H là hai điểm chung của (A'MG) với (A'B'C').

Kết luận $(A'MG) \cap (A'B'C') = A'H$.

Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) song song với (AB'D') và đi qua M cắt hình hộp.

LỜI GIẢI

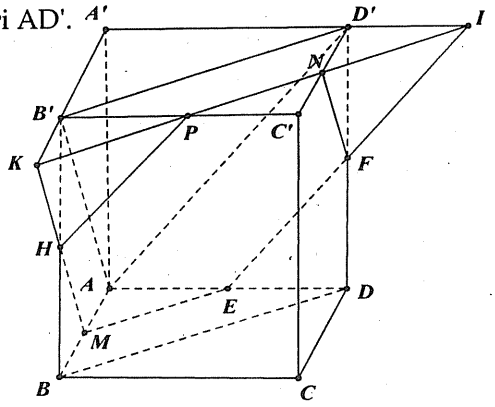
Vì mặt phẳng (P) song song với mp(AB'D') suy ra mặt phẳng (P) song song với mọi đường thuộc mặt phẳng (AB'D').

M là điểm chung của (P) và (ABCD), có (P) //BD // B'D', suy ra giao tuyến qua M và song song với BD. Giao tuyến này cắt AD tại E.

E là điểm chung của (P) và (ADD'A'), có (P) // AD'.

⇒ Giao tuyến qua E và song song với AD'. Giao tuyến này cắt DD' tại F.

M là điểm chung của (P) và (ABB'A'), có (P) // AB', suy ra giao tuyến qua M và song song với AB'. Giao tuyến này cắt BB' tại H .



Trong mặt phẳng (ABB'A'), gọi:

$K = MH \cap A'B'$ (1)

Trong mặt phẳng (ADD'A'), gọi:

$I = EF \cap A'D'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $KI = (P) \cap (A'B'C'D')$.

Trong mặt (A'B'C'D') gọi $P = KI \cap B'C'$, $N = KI \cap C'D'$.

Thiết diện cần tìm là lục giác MEFNPH .

Cho hình lăng trụ tam giác ACB.A'B'C'. Gọi H là trung điểm của A'B'.

a) Tìm giao tuyến của hai mp(AB'C') và (ABC).

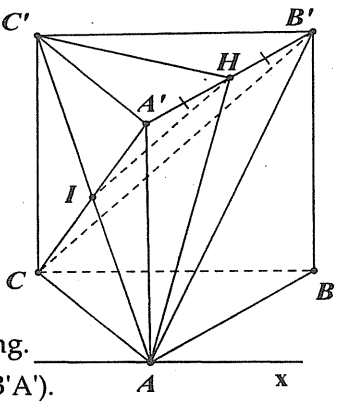
b) Chứng minh rằng CB' // (AHC')

LỜI GIẢI

a) Ta có A là điểm chung của (AB'C') và (ABC).

$$\text{Mà } \begin{cases} B'C' \,//\, BC \\ B'C' \subset (AB'C') \\ BC \subset (ABC) \end{cases}$$

$\Rightarrow (AB'C') \cap (ABC) = Ax \,(Ax \,//\, B'C' \,//\, BC)$



b) Ta có tứ giác AA'C'C là hình bình hành.

Suy ra A'C cắt AC' tại trung điểm I của mỗi đường.

Do đó IH // CB' (IH là đường trung bình của ΔCB'A').

Mặt khác IH ⊂ (AHC') nên CB' // (AHC').

Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi H là trung điểm của cạnh A'B'.

a) CMR đường thẳng CB' song song với mp(AHC').

b) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (AB'C') và (A'BC). Chứng minh rằng d song song với mp(BB'C'C).

c) Xác định thiết diện của hình lăng trụ ABC.A'B'C' khi cắt bởi mặt phẳng (H, d).

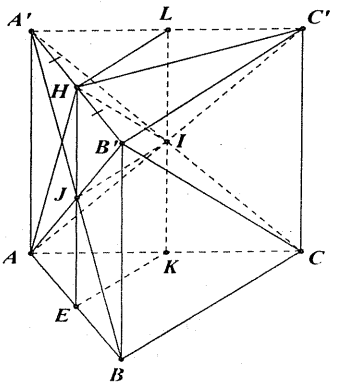
LỜI GIẢI

a) Gọi I là tâm của hình bình hành AA'C'C.

Có HI là đường trung bình của tam giác A'B'C, nên CB' // HI.

Mặt khác HI nằm trong mặt phẳng (AHC').

Vậy CB' // mp(AHC')



b) Gọi J là tâm của hình bình hành AA'B'B.

Rõ ràng I, J là là hai điểm chung của hai mặt phẳng (AB'C') và (A'BC).

Vậy giao tuyến d của chúng là đường thẳng IJ.

Ta có IJ là đường trung bình của tam giác A'BC

$\Rightarrow$ d // BC, mà $BC \subset (BCC'B') \Rightarrow$ d // (BB'C'C).

c) Trong mp(ABB'A') gọi $E = AB \cap HJ$.

Có E là điểm chung của hai mặt phẳng (H,d) và (ABC), nên giao tuyến của chúng qua E và song song với BC // d, giao tuyến này cắt AC tại K.

KI là giao tuyến của (H,d) và (ACC'A'), KI cắt A'C' tại L.

Kết luận thiết diện cần tìm là hình bình hành HEKL. Vì dễ dàng chứng minh E, K, L lần lượt trung điểm của AB, AC, A'C'.

Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi Q, R, lần lượt là tâm các mặt (BCC'B'), (CDD'C').

a). Chứng minh RQ // (ABCD).

b). Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi (AQR).

c). Gọi M là giao điểm của CC' với (AQR). Tính tỉ số MC'/MC.

LỜI GIẢI

a). Chứng minh RQ // (ABCD).

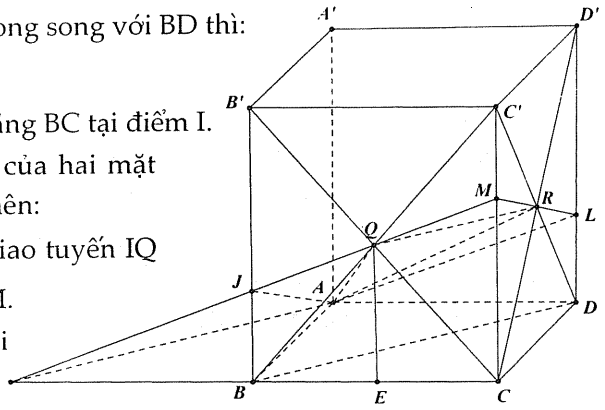
Vì QR là đường trung bình của tam giác C'BD, nên QR // BD.

Do BD ⊂ (ABCD) nên RQ // (ABCD).

b) Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi (AQR).

A là điểm chung của mặt phẳng (AQR) và mặt đáy (ABCD).

Qua A kẻ đường thẳng d song song với BD thì:
$d = (AQR) \cap (ABCD)$.



Giao tuyến d cắt đường thẳng BC tại điểm I.
I và Q là hai điểm chung của hai mặt phẳng (AQR) và (BCC'B') nên:
$(AQR) \cap (BCC'B') = IQ$, giao tuyến IQ cắt BB' tại J và cắt CC' tại M.
MR là giao tuyến của hai mp (AQR) và (CDD'C').
Gọi L là giao điểm của MR và DD'.
Kết luận thiết diện cần tìm là hình bình hành AJML.

Vì: $\begin{cases} (AQR) \cap (ADD'A') = AL \\ (AQR) \cap (BCC'B') = JM \Rightarrow AL \,//\, JM; \\ (ADD'A') \,//\, (BCC'B') \end{cases}$

$\begin{cases} (AQR) \cap (ABB'A') = AJ \\ (AQR) \cap (CDD'C') = LM \Rightarrow AJ \,//\, LM. \\ (ADD'A') \,//\, (BCC'B') \end{cases}$

c) Trong mặt phẳng đáy (ABCD) có AI // BD và AD // IB, nên tứ giác ADBI là hình bình hành.

BI là đường trung bình của tam giác ICM có: $BJ = \frac{1}{2}CM$ (1)

Dựng QE // BJ $(E \in BC)$, trong ΔIQE có: $\frac{IB}{IE} = \frac{JB}{QE} = \frac{2}{3} \Rightarrow JB = \frac{2}{3}QE$ (2)

QE là đường trung bình của $\Delta BCC' \Rightarrow QE = \frac{1}{2}CC'$ (3)

Từ (1), (2) và (3), ta có: $\frac{1}{2}CM = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}CC' \Leftrightarrow CM = \frac{2}{3}CC' \Rightarrow \frac{MC'}{MC} = \frac{1}{2}$.

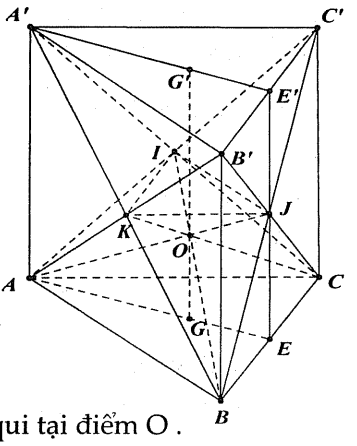
Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C', gọi I, J, K lần lượt là tâm của hình bình hành ACC'A', BCC'B', ABB'A'.

a) Chứng minh :IJ // (ABB'A'), JK // (ACC'A'), IK // (BCC'B'), mp (IJK) song song với mặt đáy của lăng trụ.

b) Ba đường thẳng AJ, CK, BI đồng qui tại điểm O.

c) Gọi G, G' là trọng tâm của tam giác ABC và A'B'C'. Chứng minh G, O, G' thẳng hàng.

LỜI GIẢI



a). KI là đường trung bình của $\Delta A'BC \Rightarrow KI // BC$.
Suy ra KI // (BCC'B').
IJ là đường trung bình của tam giác C'AB, suy ra IJ // AB. Suy ra IJ // (ABB'A').
KJ là đường trung bình của tam giác B'AC, suy ra KJ // AC. Suy ra KJ // (ACC'A').
Suy ra (IJK) // (ABC) vì (ABC) // (A'B'C') nên (IJK) // (A'B'C').

b) Chứng minh ba đường thẳng AJ, CK, BI đồng qui tại điểm O .
Trong mặt phẳng (C'AB) có AJ và BI là hai đường trung tuyến.
Gọi $O = AJ \cap BI$.

Suy ra O là trọng tâm của tam giác (C'AB) có $BO = \frac{2}{3}BI$ (1)

Trong mặt phẳng (A'BC) có BI và CK là hai đường trung tuyến.
Gọi $O' = BI \cap CK$.

Suy ra O' là trọng tâm của tam giác (A'BC) có $BO' = \frac{2}{3}BI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra O và O' trùng nhau.
Kết luận ba đường thẳng AJ , BI , CK đồng qui tại điểm O .

c). Chứng minh G , O , G' thẳng hàng.
Gọi E, E' lần lượt là trung điểm của BC và B'C'.
Suy ra EE' là đường trung bình của hình bình hành BCC'B' nên BB' // EE'.
Mà BB' // AA' $\Rightarrow$ AA' // EE' $\Rightarrow$ AEE'A' là hình bình hành.
Vì G, G' lần lượt là trọng tâm của hai Δ ABC và Δ A'B'C'.

Ta có: $\frac{A'G'}{A'E'} = \frac{AG}{AE} = \frac{2}{3} \Rightarrow GG' // EE'$ (3)

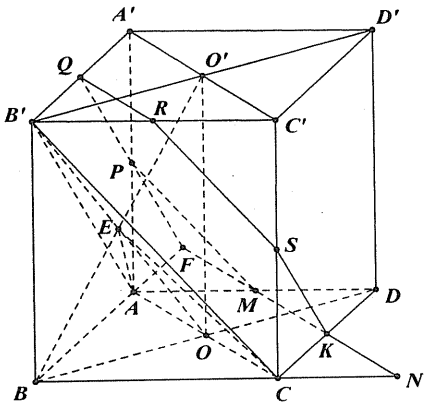
Trong Δ AEI có: $\frac{AO}{AJ} = \frac{AG}{AE} = \frac{2}{3} \Rightarrow GO // EJ$ (4)

Ta có ba điểm E, J, E' thẳng hàng.
Từ (3) và (4) suy ra ba điểm G, O, G' thẳng hàng.

Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D', gọi O' là tâm hình bình hành A'B'C'D', K là trung điểm của CD, E là trung điểm của BO'. Chứng minh E thuộc (ACB').

Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng (P) qua K và song song với (EAC).

LỜI GIAI



Gọi O là tâm của hình bình hành ABCD.

Ta có BOO'B' là hình bình hành, nên hai đường chéo BO' và B'O cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Suy ra E trung điểm của B'O. Mà B'O nằm trong mặt phẳng (ACB') suy ra E thuộc (ACB').

Ta có: mp (ACB') cũng là mp (ACE).

Vì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (ACB') nên mặt phăng (P) song song với mọi đường thuộc mặt phẳng (ACB').

Trong mp(ABCD) có: K là điểm chung và AC // (P) nên giao tuyến của chúng qua K và song song với AC. Giao tuyến này cắt AB, AD, BC lần lượt tại F, M, N.

F là điểm chung của hai mặt phẳng (ABB'A') và mặt phẳng (P), có AB' // (P).

Nên giao tuyến của chúng qua F và song song với AB', giao tuyến này cắt AA', A'B' lần lượt tại P và Q.

Giao tuyến của (P) và mp(A'B'C'D') qua Q và song song với A'C', giao tuyến này cắt B'C' tại R.

Giao tuyến của (P) và mp(BCC'B') qua R và song song với B'C, giao tuyến này cắt CC' tại S.

Kết luận: thiết diện cần tìm là lục giác KMPQRS. Lục giác có tính chất các cặp cạnh đối song song.

Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C', trên cạnh BA kéo dài về phía A ta lấy điểm M sao cho AB = 2AM.

Xác định thiết diện của hình lăng trụ tạo với (P) qua M và B' và trung điểm E của AC.

Tìm giao điểm D của BC với (MB'E). Tính tỉ số DB/DC .

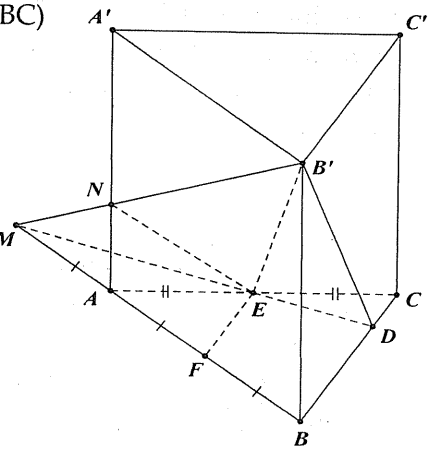
LỜI GIẢI

M, E là hai điểm chung của (MEB') và (ABC)
$\Rightarrow (MEB') \cap (ABC) = ME$.

Gọi D là giao điểm của ME và BC
Suy ra $(MEB') \cap (BCC'B') = DB'$.

M, B' là hai điểm chung của (MEB') và (ABB'A') $\Rightarrow (MEB') \cap (ABB'A') = MB'$.

Gọi N là giao điểm của AA' với MB'.
Suy ra thiết diện của hình lăng trụ ABC.A'B'C' với mặt phẳng (MEB') là tứ giác EDB'N.



Trong mặt phẳng đáy (ABC) kẻ EF // $BC (F \in AB)$.

EF là đường trung bình của tam giác ABC có $EF = \frac{1}{2}BC$ (1)

Trong ΔMBD có $\frac{MF}{MB} = \frac{EF}{BD} = \frac{2}{3} \Rightarrow EF = \frac{2}{3}BD$ (2)

Từ (1) và (2) có: $\frac{2}{3}BD = \frac{1}{2}BC \Leftrightarrow BD = \frac{3}{4}BC \Rightarrow \frac{DB}{DC} = 3$.

Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, ACC', A'B'C'. Chứng minh" (IJK) // (BCC'B') và (A'JK) // (AIB').

LỜI GIẢI

Gọi E , E' lần lượt là trung điểm của BC và B'C'.

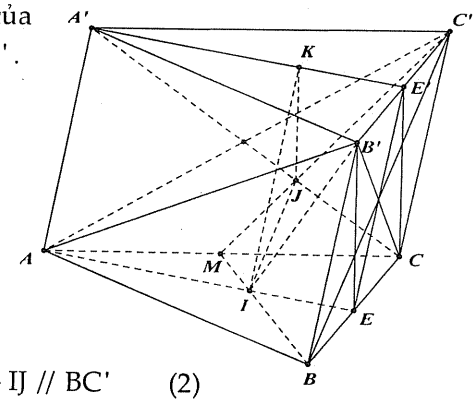
Suy ra EE' là đường trung bình của hình bình hành BCC'B' nên BB' // EE'.

Mà BB' // AA' $\Rightarrow$ AA' // EE'

$\Rightarrow$ AEE'A' là hình bình hành .

Trong hình bình hành AEE'A' có:

$\frac{A'K}{AI} = \frac{A'E'}{AE} \Rightarrow IK // EE'$ (1)



Gọi M trung điểm của AC.

Trong $\Delta MBC'$ có: $\frac{MI}{MB} = \frac{MJ}{MC'} = \frac{1}{3} \Rightarrow IJ // BC'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(IJK) // (BCC'B')$.

Mặt phẳng (A'CE') cũng là mặt phẳng (A'JK).

Mặt phẳng (AEB') cũng là mặt phẳng (AIB').

Trong mp(BCC'B') có $EB' // CE'$.

Vì AEE'A' là hình bình hành $A'E' // AE$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $(A'JK) // (AIB')$.

Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, B'C'.

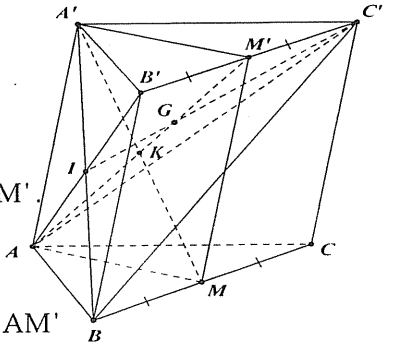
a) Chứng minh AM song song với A'M'.

b) Tìm giao điểm của đường thẳng A'M và mặt phẳng (AB'C').

c) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C').

d) Tìm giao điểm G của đường thẳng của đường thẳng d với mặt phẳng (AM'M). Chứng minh G là trọng tâm của tam giác AB'C'.

LỜI GIẢI



a) Vì MM' là đường trung bình của hình bình hành BCC'B' nên $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{BB'}$.

Mà $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'}$. Từ đó suy ra: $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$.

Vậy: AMM'A' là hình bình hành $\Rightarrow AM // A'M'$.

b). Tìm giao điểm của đường thẳng A'M và mặt phẳng (AB'C').

Trong mặt phẳng (AMM'A'), gọi: $K = A'M \cap AM'$

Có: $\begin{cases} K \in A'M \\ K \in AM', AM' \subset (AB'C') \end{cases} \Rightarrow K = A'M \cap (AB'C')$.

c) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C').

Trong mặt phẳng (ABB'A'), gọi: $I = BA' \cap AB'$.

Có: $\begin{cases} I \in BA', BA' \subset (BA'C') \\ I \in AB', AB' \subset (AB'C') \end{cases} \Rightarrow I \in (BA'C') \cap (AB'C')$

Và $C' \in (BA'C') \cap (AB'C')$.

Vậy giao tuyến d của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C') là IC'.

Trong mặt phẳng (AB'C') gọi $G = C'I \cap AM'$

Có $\begin{cases} G \in C'I \\ G \in AM', AM' \subset (AMM') \end{cases} \Rightarrow G = C'I \cap (AMM')$.

G là giao điểm của hai đường trung tuyến C'I và AM' của tam giác AB'C'.

Vậy: G là trọng tâm của tam giác AB'C'.

Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a. Các mặt bên ABB'A', ACC'A' là hình vuông có tâm lần lượt là I và J. Gọi O là tâm đường tròn tam giác ABC.

a) Chứng minh IJ song song với mặt phẳng (ABC) .

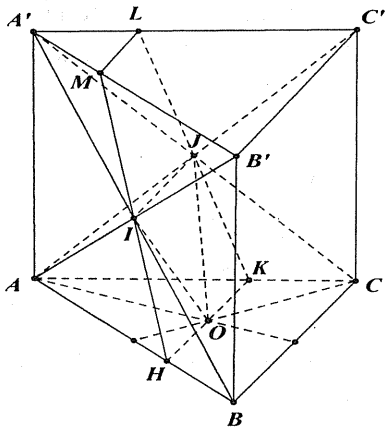
b) Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (IJO). Tính diện tích thiết diện đó theo a.

LỜI GIẢI

a) Chứng minh IJ song song với mặt phẳng (ABC).

Ta có IJ là đường trung bình của tam giác A'BC nên IJ // BC.

Mà $BC \subset (ABC)$. Suy ra $IJ \parallel (ABC)$.



b) Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (IJO).

O là điểm chung của hai mặt phẳng (IJO) và (ABC), nên giao tuyến của chúng đi qua O và song song với BC, giao tuyến này cắt AB, AC lần lượt tại H và K.

HI là giao tuyến của (IJO) với (ABB'A'), gọi $M = HI \cap A'B'$.

KJ là giao tuyến của (IJO) với (ACC'A'), gọi $L = KJ \cap A'C'$.

Từ đó suy ra ML là giao tuyến của (IJO) và (A'B'C'), vì IJ // B'C' suy ra ML // B'C' // IJ.

Kết luận thiết diện cần tìm là hình thang HKLM (vì HK // LM // BC) (1)

Ta có ABB'A', ACC'A' là hình vuông và AH = AK , A'M = A'L.

Suy ra MH = LK (2)

Từ (1) và (2) suy ra: HKLM là hình thang cân

Trong ΔABC có HK // BC nên:

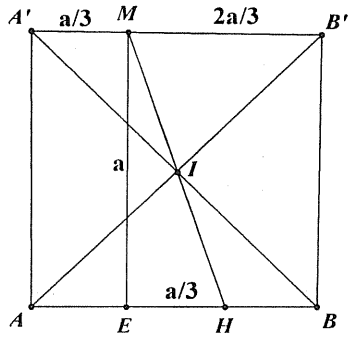
$$\frac{AH}{AB} = \frac{HK}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow HK = \frac{2a}{3}.$$

IJ là đường trung bình của HKLM, có:

$$IJ = \frac{HK + LM}{2}$$

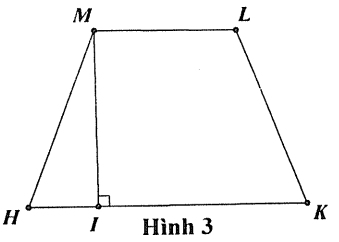
$$\Rightarrow LM = 2IJ - HK = BC - HK = a - \frac{2a}{3} = \frac{a}{3}$$

Vẽ lại mặt bên ABB'A' như hình 2.



Hình 2

Ta có: $MH = \sqrt{ME^2 + EH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$.



Hình 3

Vẽ lại thiết diện như hình 3.

Ta có $2HI = HK - ML = \frac{2a}{3} - \frac{a}{3} = \frac{a}{3} \Rightarrow HI = \frac{a}{6}$.

Và $MI = \sqrt{MH^2 - HI^2} = \sqrt{\frac{10.a^2}{9} - \frac{a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{39}}{6}$

Diện tích hình thang cân HKLM:

$$S_{HKLM} = \frac{1}{2}(HK + LM).MI = \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{3} + \frac{a}{3}\right).\frac{a\sqrt{39}}{6} = \frac{a^2\sqrt{39}}{12}.$$

Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C').

b) Gọi M, N lần lượt là hai điểm bất kỳ trên AA' và BC. Tìm giao điểm của B'C' với mặt phẳng (AA'N) và giao điểm của MN với (AB'C').

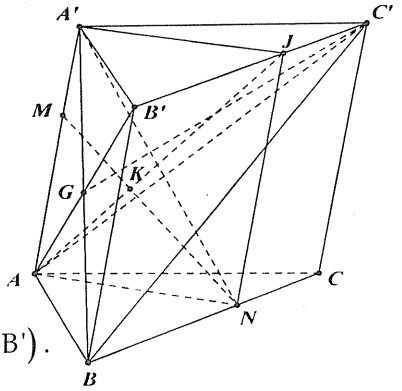
LỜI GIẢI

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C')

C' là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C').

Trong mặt phẳng (ABB'A') gọi G là giao điểm của AB' và BA'. Suy ra G là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C') .

Kết luận $(AB'C') \cap (BA'C') = GC'$.



b) Tìm giao điểm của B'C' với mặt phẳng (AA'N) và giao điểm của MN với (AB'C').

Chọn mặt phẳng (BCC'B') chứa B'C'.

Ta có : $\begin{cases} N \in (AA'N) \cap (BCC'B') \\ AA' // BB' \\ AA' \subset (AA'N), BB' \subset (BCC'B') \end{cases}$

$\Rightarrow (AA'N) \cap (BCC'B') = Nx (Nx // AA' // BB')$.

Gọi $J = Nx \cap B'C' \Rightarrow J = B'C' \cap (AA'N)$.

Chọn mặt phẳng (ANJA') chứa MN.

Tìm giao tuyến của mặt phẳng (ANJA') và (AB'C').

Ta có: $A \in (ANJA') \cap (AB'C')$ (1)

Và: $\begin{cases} J \in (ANJA') \\ J \in B'C' \subset (AB'C') \end{cases} \Rightarrow J \in (ANJA') \cap (AB'C')$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AJ = (ANJA') \cap (AB'C')$.

Trong mp(ANJA') gọi $K = MN \cap AJ \Rightarrow K = MN \cap (AB'C')$.

Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, B'C'.

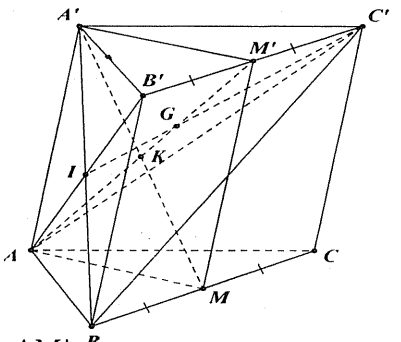
a) Chứng minh AM song song với A'M'.

b) Tìm giao điểm của đường thẳng A'M và mặt phẳng (AB'C').

c) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C').

d) Tìm giao điểm G của đường thẳng d với mặt phẳng (AM'M). Chứng minh G là trọng tâm của tam giác AB'C'.

LỜI GIẢI



a) Vì MM' là đường trung bình của hình bình hành BCC'B' nên $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{BB'}$, mà $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'}$ từ đó suy ra $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$, vậy AMM'A' là hình bình hành, suy ra AM // A'M'.

b) Tìm giao điểm của đường thẳng A'M và mặt phẳng (AB'C').

Trong mặt phẳng (AMM'A'), gọi: $K = A'M \cap AM'$

Có: $\begin{cases} K \in A'M \\ K \in AM', AM' \subset (AB'C') \end{cases} \Rightarrow K = A'M \cap (AB'C')$.

c). Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C').

Trong mặt phẳng (ABB'A') gọi $I = BA' \cap AB'$

Có: $\begin{cases} I \in BA', BA' \subset (BA'C') \\ I \in AB', AB' \subset (AB'C') \end{cases} \Rightarrow I \in (BA'C') \cap (AB'C')$

Và $C' \in (BA'C') \cap (AB'C')$

Vậy giao tuyến d của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C') là IC'.

d) Trong mặt phẳng (AB'C') gọi $G = C'I \cap AM'$

Có: $\begin{cases} G \in C'I \\ G \in AM', AM' \subset (AMM') \end{cases} \Rightarrow G = C'I \cap (AMM')$.

G là giao điểm của hai đường trung tuyến C'I và AM' của tam giác AB'C'. Vậy G là trọng tâm của tam giác AB'C'.

Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh bên AA' và CC'. Một điểm P nằm trên cạnh bên DD'.

a) Xác định giao điểm Q của đường thẳng BB' với mặt phẳng (MNP).

b) Mặt phẳng (MNP) cắt hình hộp theo một thiết diện. Thiết diện đó có tính chất gì?

c) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với mặt phẳng (ABCD) của hình hộp.

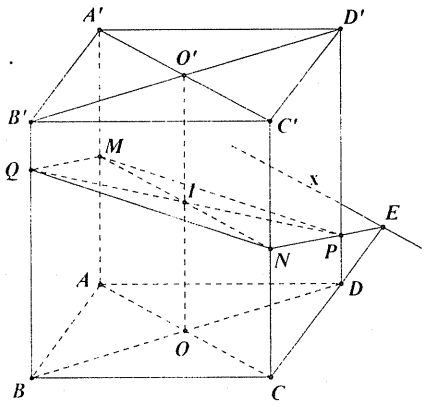
LỜI GIẢI

a) Xác định giao điểm Q của đường thẳng BB' với mặt phẳng (MNP).

Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai đáy (ABCD) và (A'B'C'D').

Suy ra: $OO' = (BDD'B') \cap (ACC'A')$.

Gọi $I = MN \cap OO' \left(MN, OO' \subset (ACC'A')\right)$.



Ta có: $\begin{cases} I \in MN, MN \subset (MNP) \\ I \in OO', OO' \subset (BDD'B') \end{cases}$

$\Rightarrow I \in (MNP) \cap (BDD'B')$ (1)

Ta có: $\begin{cases} P \in (MNP) \\ P \in DD', DD' \subset (BDD'B') \end{cases}$

$\Rightarrow P \in (MNP) \cap (BDD'B')$

Từ (1) và (2) suy ra: $(MNP) \cap (BDD'B') = PI$.

Gọi $Q = PI \cap BB' \Rightarrow Q = BB' \cap (MNP)$.

b) Mặt phẳng (MNP) cắt hình hộp theo một thiết diện là tứ giác MNPQ.

NP và QM là giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với hai mặt phẳng song song với nhau là (ABB'A') và (CDD'C'). Nên suy ra NP // QM (3)

Lý luận tương tự thì MP // QN (4)

Từ (3) và (4) suy ra: Thiết diện MNPQ là hình bình hành.

c) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với mặt phẳng (ABCD)

Trong mặt phẳng bên (CDD'C') gọi $E = CD \cap NP$.

Vì MN là đường trung bình của hình bình hành ACC'A', suy ra MN // AC.

Từ đó suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và mặt phẳng (ABCD) qua E và song song với MN // AC.

Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của ABC và A'B'C'. Một mặt phẳng P cắt các cạnh AA', BB', CC', GG' lần lượt tại A_1, B_1, C_1, G_1. Chứng minh :

a) GG' song song và bằng cạnh bên của lăng trụ.

b) G_1 là trọng tâm của $\Delta A_1B_1C_1$.

c) $G_1G' = \frac{1}{3}\left(A_1A' + B_1B' + C_1C'\right)$; $G_1G = \frac{1}{3}\left(A_1A + B_1B + C_1C\right)$.

LỜI GIẢI

a) GG' song song và bằng cạnh bên của lăng trụ.

Gọi M và M' theo thứ tự là trung điểm của BC và B'C'. Nên MM' là đường trung bình của hình bình hành BCC'B'.

Suy ra: MM' // BB' // CC'

và MM' = BB' = CC' (1)

Vì ABC.A'B'C' là hình lăng trụ nên:

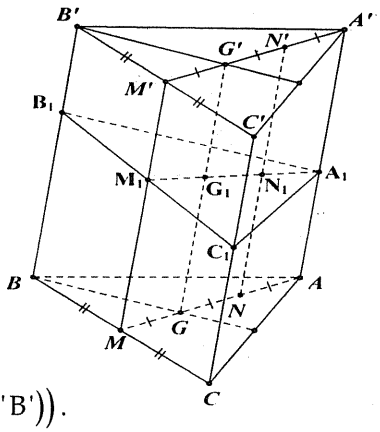
AA' // BB' và AA' = BB' (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

AMM'A' là hình bình hành và có:

$\frac{AG}{AM} = \frac{A'G'}{A'M'} = \frac{2}{3}$ (tính chất trọng tâm)

Nên GG' // AA' và GG' = AA'.



b) Gọi $M_1 = MM' \cap B_1C_1 \left(MM', B_1C_1 \subset \left(BCC'B'\right)\right)$.

Tính chất hình bình hành thì M_1 là trung điểm của B_1C_1 (3)

Ta có: $A_1M_1 = \left(A_1B_1C_1\right) \cap \left(AA'M'M\right)$.

G_1 chính là giao điểm của A_1M_1 với GG'.

Vì MM_1 // GG_1 // AA_1 suy ra $\frac{AG}{AM} = \frac{A_1G_1}{A_1M_1} = \frac{2}{3}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: G_1 là trọng tâm của tam giác $\Delta A_1B_1C_1$.

c) Gọi N , N' lần lượt trung điểm của AG và A'G'.

Dễ chứng minh được NN' // GG' //AA'

Gọi N_1 là giao điểm của NN' và A_1G_1 suy ra N_1 trung điểm của A_1G_1.

Ta có: G_1G' là đường trung bình của hình thang $M_1M'N'N_1$;

N_1N' là đường trung bình của hình thang $A_1A'G'G_1$;

M_1M' là đường trung bình của hình thang $B_1B'C'C_1$.

Nên: $G_1G' = \frac{1}{2}(M_1M' + N_1N')$ (1)

$N_1N' = \frac{1}{2}(A_1A' + G_1G')$ (2)

$M_1M' = \frac{1}{2}(B_1B' + C_1C')$ (3)

Từ (1) và (2): $G_1G' = \frac{1}{3}A_1A' + \frac{2}{3}M_1M'$ (4)

Thay (3) vào (4) ta được: $G_1G' = \frac{1}{3}(A_1A' + B_1B' + C_1C')$.

Chứng minh tương tự: $G_1G = \frac{1}{3}(A_1A + B_1B + C_1C)$.

Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' .

a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (BDA') và (B'D'C) song song với nhau.

b) Chứng minh rằng đường chéo AC' đi qua trọng tâm G' và G'' lần lượt của hai tam giác BDA' và B'D'C.

c) Chứng minh G' và G'' chia đoạn thẳng AC' thành ba phần bằng nhau.

d) Gọi E, F, G, H, K, L lần lượt là trung điểm của BC, CD, DD', D'A', A'B', B'B. Chứng minh sáu điểm ở trên đồng phẳng.

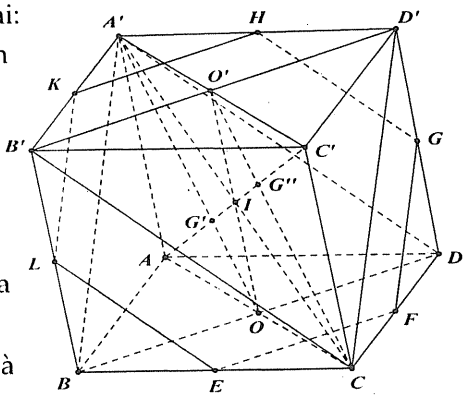
Lời giải:

a) CDA'B' là hình bình hành nên DA' // CB' (1)

BDD'B' là hình hành nên:

BD // B'D' (2)

Từ (1) và (2) suy ra (A'BD) / /(B'D'C).



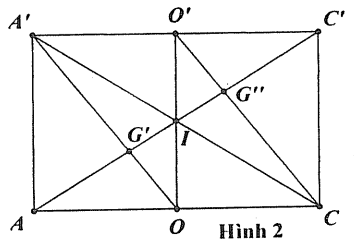
b) Gọi O và O' lần lượt là tâm của ABCD và A'B'C'D'.

Trong mp(ACC'A'), AC' cắt A'O và CO' tại G' và G'' (theo thứ tự).

O là trung điểm của BD nên A'O là trung tuyến của tam giác BDA' và $G' \in A'O$ (1)

A'C' // OA nên:

$\frac{G'O}{G'A'} = \frac{OA}{A'C'} = \frac{1}{2} \Rightarrow G'A' = 2G'O$ (2)



Hình 2

Từ (1) và (2) suy ra: G' là trọng tâm của tam giác A'BD

Tương tự, G" là trọng tâm của tam giác B'D'C.

c) Tam giác ACG", OG' là đường trung bình nên G' là trung điểm của AG"

$\Rightarrow AG' = G'G''$ (3)

Tương tự, ta có $C'G'' = G''G'$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $AG' = G'G'' = G''C'$

Vậy G' và G" chia AC' thành ba phần bằng nhau (*đpcm*).

d) Vì có FG // CD', HK // B'D', LE // B'C ba đường thẳng FG, HK, LE cùng song song với mp(CB'D').

Tương tự ba đường thẳng EF, GH, KL cùng song song với mp(A'BD).

Mà (A'BD) // (CB'D') suy ra sáu điểm E, F, G, H, K, L đồng phẳng.

Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và CC'.

a) Xác định đường thẳng Δ qua M cắt AN và cắt A'B.

b) Gọi I, J lần lượt là giao điểm của Δ với AN và A'B. Hãy tìm tỉ số $\frac{IM}{IJ}$.

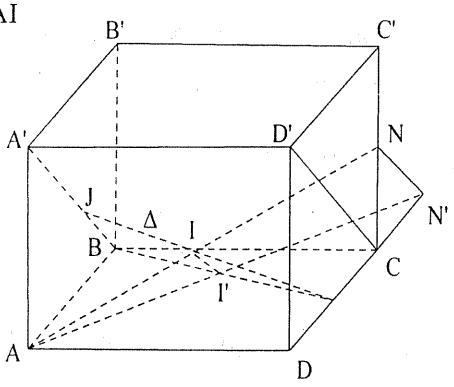
LỜI GIẢI

a). Giả sử đã dựng được đường thẳng Δ cần tìm cắt cả AN và A'B.

Gọi I, J lần lượt là giao điểm của Δ với AN và A'B.

Xét phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương chiếu A'B.

Khi đó ba điểm J, I, M lần lượt có hình chiếu là B, I', M.



Do đó: ba điểm B, I', M thẳng hàng.

Gọi N' là hình chiếu của N thì AN' là hình chiếu của AN.

Vì I thuộc AN nên I' thuộc AN'. Vậy I' là giao điểm của BM và AN'.

Từ phân tích trên ta có thể dựng đường thẳng Δ theo các bước sau đây:

Lấy giao điểm I' của AN' và BM.

Trong mp(ANN') dựng II'//NN' (đã có NN'//CD') cắt AN tại I.

Vẽ đường thẳng MI, đó là đường thẳng Δ cần tìm.

b) Dễ chứng minh được, đường thẳng Δ nói trên cắt A'B.

Dễ thấy MC = CN' suy ra MN' = CD = AB.

Do đó I là trung điểm của BM.

Mặt khác: $II'//JB$, nên II' là đường trung bình của tam giác MBJ.

Suy ra: $IM = IJ \Rightarrow \dfrac{IM}{IJ} = 1$

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Hãy xác định đường thẳng Δ cắt cả hai đường thẳng AC' và BA' đồng thời song song với $B'D'$.

Gọi I, J lần lượt là giao điểm của Δ với AC' và BA'. Tính tỉ số $\dfrac{AI}{AC'}$.

LỜI GIẢI

a). Giả sử đã xác định được đường thẳng Δ cắt AC' và BA' lần lượt tại I và J.

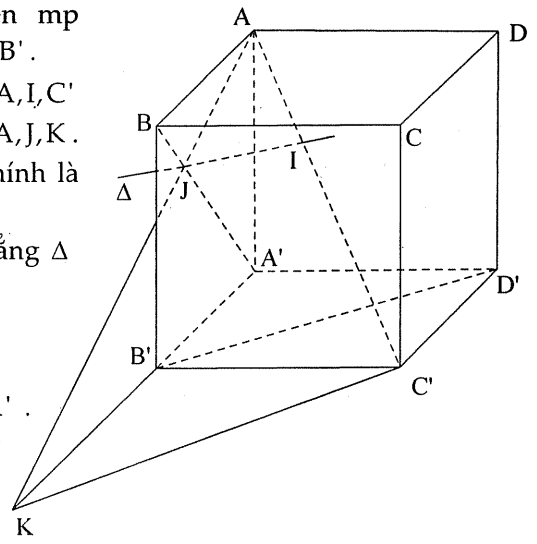
Xét phép chiếu song song lên mp $(ABB'A')$ theo phương chiếu $D'B'$.

Khi đó, hình chiếu của ba điểm A, I, C' lần lượt là ba điểm thẳng hàng A, J, K.

Mặt khác: J thuộc BA', nên J chính là giao điểm của AK và BA'.

Từ đó, ta có cách dựng đường thẳng Δ theo các bước sau đây:

* Dựng điểm K là hình chiếu của C' (theo phương chiếu D'B').
* Lấy giao điểm J của AK và BA'.
* Qua J dựng đường thẳng $\Delta // C'K$ (đã có $C'K // B'D'$), ta được đường thẳng Δ cần tìm.



b) Dễ thấy $A'B' = B'K \Rightarrow A'K = 2AB$ (do $A'B' = AB$).

Vì $AB//A'K \Rightarrow \dfrac{AI}{JK} = \dfrac{AB}{A'K} = \dfrac{1}{2}$.

Mặt khác: $IJ//C'K \Rightarrow \dfrac{AI}{IC'} = \dfrac{AJ}{JK} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{AI}{AC'} = \dfrac{1}{3}$.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh rằng đường chéo $B'D$ cắt mp$(A'BC')$ tại điểm G sao cho $BG = \dfrac{1}{2}GD$ và G là trọng tâm tam giác $A'BC'$.

b) Chứng minh rằng $(D'AC) // (BA'C')$ và trọng tâm G' của $\Delta D'AC$ cũng nằm trên $B'D$ và $B'G' = \dfrac{2}{3}B'D$.

c) Gọi P, Q, R lần lượt là các điểm đối xứng của điểm B' qua A, D', C. Chứng minh rằng $(PQR) // (BA'C')$.

d) Chứng minh rằng D là trọng tâm tứ diện $B'PQR$.

LỜI GIẢI

a). Gọi O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$.

Khi đó: $(A'BC') \cap (BDD'B') = BO'$.

Gọi G là giao điểm của $B'D$ và BO' thì G chính là giao điểm của $B'D$ với mp$(A'BC')$.

Dễ thấy $\Delta GBO \sim \Delta GO'B'$, tỉ số đồng dạng là 2 (do $\frac{BD}{B'O'} = 2$).

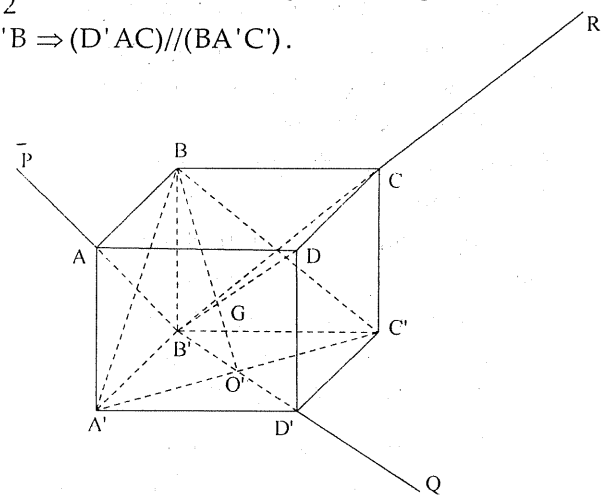
Vậy: $B'G = \frac{1}{2}GD$ và $GO' = \frac{1}{2}GB$, suy ra G là trọng tâm tam giác $A'BC'$.

b) Dễ thấy: $AC // A'C', D'A // C'B \Rightarrow (D'AC) // (BA'C')$.

Chứng minh tương tự như câu a), ta có trọng tâm G' của tam giác $D'AC$ nằm trên đường chéo DB' và $DG' = \frac{1}{2}G'B'$.

Từ đó và kết quả của câu a) $\Rightarrow$ G và G' chia đường chéo $B'D$ thành ba phần bằng nhau.

Vậy: $B'G' = \frac{2}{3}B'D$.



c) Do A, D', C lần lượt là trung điểm của PB', QB', RB' nên:

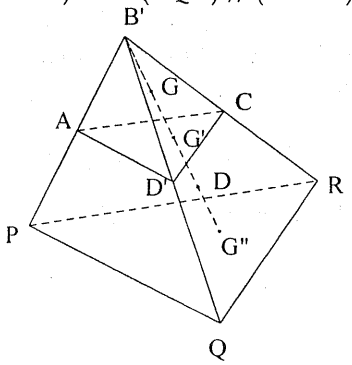
$PQ // AD', QR // D'C, RP // CA$. Từ đó, suy ra $(PQR) // (AD'C)$.

Mặt khác, theo câu b), ta có $(D'AC) // (BA'C')$ nên $(PQR) // (BA'C')$.

d) Vì A, D', C lần lượt là trung điểm của $B'P, B'Q, B'R$ nên trọng tâm G'' của tam giác PQR phải nằm trên đường thẳng $B'G''$ và $B'G'' = \frac{4}{3}B'D$

$\Rightarrow B'D = \frac{3}{4}B'G''$.

Vậy D là trọng tâm tứ diện $B'PQR$.



Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Điểm M thuộc cạnh AD, điểm N thuộc cạnh D'C' sao cho AM : MD = D'N : NC'.

Chứng minh rằng MN song song với (C'BD).

Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mp (P) qua MN và song song với mp(C'BD).

LỜI GIẢI

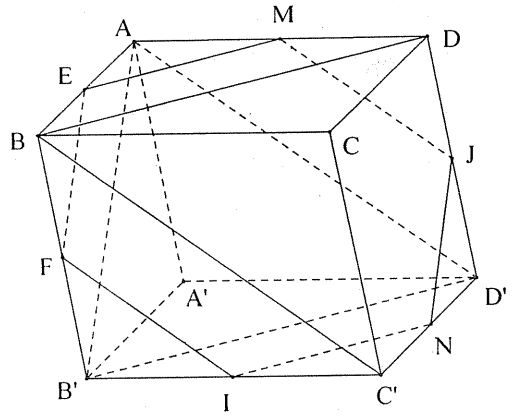
a) Theo giả thiết, ta có:

$$\frac{MN}{MD}=\frac{D'N}{NC'}\Rightarrow\frac{AM}{D'N}=\frac{MD}{NC'}=\frac{AD}{D'C'}$$

Theo định lý Ta-let đảo, ta có MN, AD', DC' cùng song song với một mặt phẳng (P).

Mặt phẳng (P) song song với AD' và DC'. Nhưng AD'//BC' nên mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (C'BD).

Từ đó, ta có MN//(C'BD).



b). Từ M kẻ ME//BD, cắt AB tại E;

Từ E kẻ đường thẳng EF//AB', cắt BB' tại F; từ F kẻ đường thẳng FI//BC', cắt B'C' tại I;

Từ N kẻ đường thẳng NJ//CD, cắt DD' tại J.

Dễ thấy thiết diện là lục giác MEFINJ có các cạnh đối lần lượt song song với ba cạnh của tam giác C'BD.

BÀI TẬP TỔNG HỢP CHƯƠNG II

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, AD là đáy lớn. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của SA, AB, CD.

a) Chứng minh EN // (SBC), (MNE) // (SBC).

b) Tìm giao điểm F của SD với mp(MNE). Chứng minh SC // (MNE). Đường thẳng DM song song với (SBC) hay không giải thích.

c) Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD với mp(MNE). Thiết diện đó là hình gì? tại sao?

LỜI GIẢI

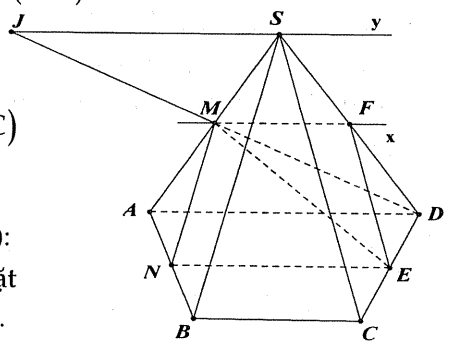
a) Chứng minh EN // (SBC):

Vì EN // BC, mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow EN \,//\, (SBC)$.

Chứng minh MNE // (SBC).

Có $\begin{cases} MN \,//\, SB, NE \,//\, BC \\ MN, NE \subset (MNE);\ SB, BC \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow (MNE) \,//\, (SBC)$.



b) Tìm giao điểm F của SD với mp(MNE):

Ta có M là điểm chung của hai mặt phẳng (MNE) và (SAD), và có NE // AD.

Suy ra giao tuyến của chúng qua M và song song với AD, giao tuyến này cắt SD tại F. F chính là giao điểm của SD với mp(MNE).

Chứng minh SC // (MNE):

Theo chứng minh câu b có $(MNE) \,||\, (SBC)$, mà $SC \subset (SBC) \Rightarrow SC \,||\, (MNE)$.

Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC):

Có: $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \,//\, BC \\ AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sy\,(Sy \,//\, AD \,//\, BC)$.

Trong mp(SAD), gọi: $J = DM \cap Sx \Rightarrow J = DM \cap (SBC)$.

Từ đó suy ra DM không song song với mp(SBC).

c) Xác định thiết diện của hình chóp S.ABCD với mp(MNE):

Từ cách dựng điểm ở câu b, suy ra thiết diện cần tìm là hình thang MNEF với NE // MF // AD.

Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, BC, CD.

Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD), (SAD) và (SBC).

Tìm giao điểm T của MP với mp(SBD) và tính tỉ số TM/TP.

Tìm giao điểm Q của SD với mp(MNP) và tính tỉ số QS/QD.

Tìm thiết diện của mp(MNP) với hình chóp S.BCD. Thiết diện này là hình gì?

LỜI GIẢI

Gọi $O = AC \cap BD$, ta có O và S là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) $\Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$.

Có S là điểm chung của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC), và có AD // BC, nên giao tuyến của chúng là Sx, với Sx // AD // BC.

Trong mp(ABCD) gọi $E = AP \cap BD$.

Ta có S và E là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SBD) và (SAP).

Vậy $(SBD)\cap(SAP)=SE$.

Trong mp(SAP), gọi: $T=MP\cap SE$

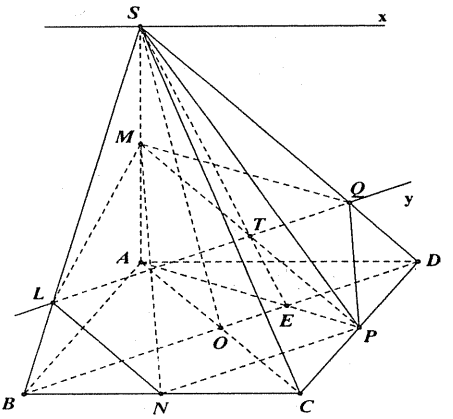
$\Rightarrow T=MP\cap(SBD)$.

Kẻ EG // MP ($G\in SA$), có:

$\frac{AE}{AP}=\frac{AG}{AM}=\frac{GE}{MP}=\frac{2}{3}\Rightarrow GE=\frac{2}{3}MP$

và $\frac{SM}{SG}=\frac{ST}{SE}=\frac{MT}{GE}=\frac{3}{4}\Rightarrow MT=\frac{3}{4}GE$.

Từ đó suy ra $\frac{TM}{TP}=2$.



Có T là điểm chung của hai mặt phẳng (MNP) và (SBD).

Suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SBD) qua T và song song với BD và song song với NP. Giao tuyến này cắt SB, SD lần lượt tại L và Q.

Suy ra L là giao điểm của (MNP) với SB và Q là giao điểm của (MNP) với SD.

Trong ΔSBD có LQ // BD nên có $\frac{ST}{SE}=\frac{SQ}{SD}=\frac{3}{4}$ (do chứng minh câu b).

Kết luận $\frac{QS}{QD}=3$.

Từ cách tìm giao điểm ở câu b, suy ra thiết diện của hình chóp S.ABCD bị cắt bởi mp(MNP) cần tìm là ngũ giác MLNPQ.

Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi E là trung điểm của SA.

a) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

b) SD cắt (BCE) tại F. Tứ giác BCEF là hình gì? Chứng minh ba đường thẳng d, BE, CF đồng qui.

c) Gọi M là điểm đối xứng của D qua E, H và K lần lượt là trung điểm của BM và AB. Gọi N là giao điểm của CD với (EHK). Tính tỉ số CD/CN.

LỜI GIẢI

a) Ta có: $\begin{cases}S\in(SAB)\cap(SCD)\\AB\ //\ CD\\AB\subset(SAB),CD\subset(SCD)\end{cases}\Rightarrow(SAB)\cap(SCD)=Sx\equiv d(d\ //\ AB\ //\ CD)$.

b) Vì có: $\begin{cases}EF=(BCE)\cap(SAD)\\BC\ //\ AD\\BC\subset(BCE),AD\subset(SAD)\end{cases}\Rightarrow EF\ //\ BC\ //\ AD$.

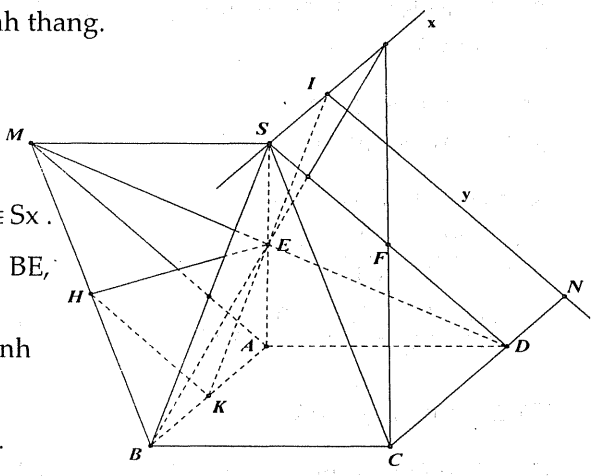
Từ đó $\Rightarrow$ tứ giác BCEF là hình thang.

Gọi $T = BE \cap CF$.

Vì $\begin{cases} T \in BE \subset (SAB) \\ T \in CF \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow T \in (SAB) \cap (SCD) \Rightarrow T \in Sx$.

Kết luận ba đường thẳng d, BE, CF đồng qui tại điểm T.



c) Ta có ADSM là hình bình hành

$\Rightarrow AM // SD$.

Mà $KH // AM \Rightarrow KH // SD$.

Trong mp(SAB) gọi $I = d \cap KE$, $\begin{cases} I \in d \subset (SCD) \\ I \in KE \subset (HKE) \end{cases} \Rightarrow I \in (HKE) \cap (SCD)$.

Suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (HKE) và (SCD) đi qua I và song song với SD, giao tuyến này cắt CD tại điểm N.

Kết luận N là giao điểm của CD và (HKE).

Ta có tứ giác BKIS là hình bình hành $\Rightarrow SI = BK$

Và tứ giác DNIS là hình bình hành $\Rightarrow DN = IS$.

Vậy $DN = BK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$. Suy ra $\frac{CD}{CN} = \frac{2}{3}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang có AD là đáy lớn và AD = 2BC. Gọi M, N, K, H lần lượt là trung điểm của AB, SB, AD, DC.

a) Tìm giao điểm T của SA với mp(NDC) và giao tuyến của mp(SAD) với mp (MNK).

b) Chứng minh HN // (SAD) và tính tỉ số ST/SA.

c) Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với hai đường thẳng BC và SD. Xác định thiết diện của (P) với hình chóp S.ABCD.

LỜI GIẢI

a) Tìm giao điểm T của SA với mp(NDC):

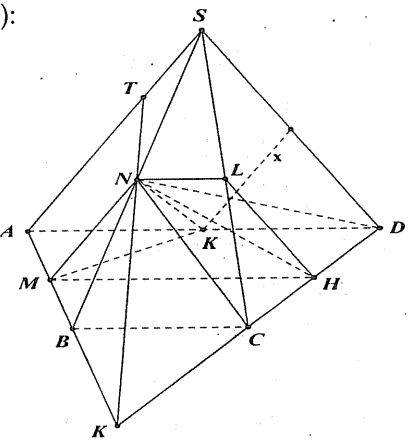
Trong mp(ABCD) gọi $K = AB \cap CD$.

Ta có K và N là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (NCD).

Vậy $(SAB) \cap (NCD) = KN$.

Trong mp(SAB) gọi $T = KN \cap SA \Rightarrow T = SA \cap (NCD)$

Tìm giao tuyến của mp(SAD) với mp(MNK):



Ta có: $\begin{cases} K \in (SAD) \cap (MNK) \\ SA \;//\; MN \\ SA \subset (SAD), MN \subset (MNK) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAD) \cap (MNK) = Kx (Kx \;//\; SA \;//\; MN)$.

b) Vì: $\begin{cases} MN \;//\; SA, MH \;//\; AD \\ MN, MH \subset (MNH) \\ SA, AD \subset (SAD) \end{cases}$

$\Rightarrow (MNH) \;//\; (SAD) \Rightarrow NH \;//\; (SAD)$.

Trong ΔKAD có AD // BC nên có: $\frac{KB}{KA} = \frac{KC}{KD} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ B trung điểm KA.

MN là đường trung bình của ΔBAS nên có $MN = \frac{1}{2}SA$ (1)

Trong ΔKAT có MN // AT nên có $\frac{KM}{KA} = \frac{MN}{TA} = \frac{3}{4} \Rightarrow MN = \frac{3}{4}TA$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{3}{4}TA = \frac{1}{2}SA \Leftrightarrow TA = \frac{2}{3}SA \Rightarrow \frac{ST}{SA} = \frac{1}{3}$.

c). Xác định thiết diện của (P) với hình chóp S.ABCD .

M là điểm chung của mp(P) và mp(ABCD), vì (P) // BC nên giao tuyến của chúng qua M và song song với BC. Giao tuyến này chính là MH.

H là điểm chung của mp(P) và mp(SCD), vì (P) // SD nên giao tuyến của chúng qua H và song song với SD, giao tuyến này cắt SC tại một điểm là L. Vì H là trung điểm của CD suy ra L là trung điểm của SC.

Ta có NL // BC và (P) // BC và N là điểm chung của hai mặt phẳng (SBC) và (P), nên suy ra LN là giao tuyến của (SBC) và (P).

Vậy thiết diện của mp(P) cắt hình chóp SABCD là hình thang MHLN, vì có MH // LN // BC.

Cho hình chóp S.ABC. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC.

a) Tìm giao tuyến mp(SAB) và mp(SEF).

b) Gọi M là trung điểm của SB và I là điểm trên cạnh SA thỏa AI = 3IS. Tìm giao điểm K của IM với mp(ABC) và giao điểm H của mp(EIM) với BC. Tính tỉ số BH/BC.

c) Gọi G là trọng tâm tam giác SBC. Tìm thiết diện của hình chóp S.ABC bị cắt bởi mp(IEG).

LỜI GIẢI

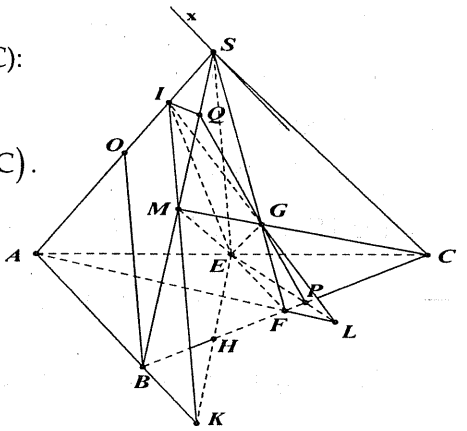
a). Tìm giao tuyến mp(SAB) và mp(SEF).

Có: $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SEF) \\ AB \,//\, EF \\ AB \subset (SAB), EF \subset (SEF) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SEF) = Sx (Sx \,//\, AB \,//\, EF)$.

b). Tìm giao điểm K của IM với mp(ABC):

Trong mp(SAB) gọi $K = IM \cap AB$.

Vì $\begin{cases} K \in IM \\ K \in AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow K = IM \cap (ABC)$.



Giao điểm H của mp(EIM) với BC.

Tính tỉ số BH/BC:

Ta có AE là giao tuyến của hai mặt phẳng (EIM) và (ABC).

Gọi $H = KE \cap BC \Rightarrow H = BC \cap (EIM)$.

Gọi O trung điểm của SA.

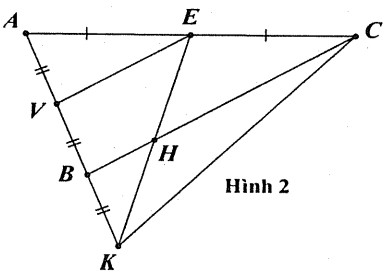
Vậy IM là đường trung bình của $\Delta SBO \Rightarrow IM \,//\, BO$.

Trong ΔAIK có $KI // BO \Rightarrow \dfrac{AB}{BK} = \dfrac{AO}{OI} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow AB = \dfrac{1}{2} BK$.

Mặt phẳng đáy (ABC) được vẽ lại ở hình 2.

Gọi V là trung điểm của AB, có VE là đường trung bình của ΔABC

$\Rightarrow VE = \dfrac{1}{2} BC$ (1)



Hình 2

Và có BH là đường trung bình của ΔKEV

$\Rightarrow BH = \dfrac{1}{2} VE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BH = \dfrac{1}{4} BC$.

c) Tìm thiết diện của hình chóp S.ABC bị cắt bởi mp(IEG):

Vì $IG \subset (SAF)$. Gọi $L = IG \cap AF \Rightarrow L \in (ABC)$.

Trong mp(ABC) gọi $P = EL \cap BC$. Trong mp(SBC) gọi $Q = PG \cap SB$.

Từ đó suy ra thiết diện của hình chóp S.ABC bị cắt bởi mp(IEG) là tứ giác IEPQ.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SC.

Tìm giao tuyến (SMN) và (SBD)

Tìm giao điểm I của MN và (SBD). Tính tỉ số MI/MN.

LỜI GIẢI

Trong mặt phẳng (ABCD) gọi $O = AC \cap BD$, $H = MC \cap BD$.

Mặt phẳng (SMC) chính là mp(SMN).

Có: $\begin{cases} H \in CM, CM \subset (SCM) \\ H \in BD, BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow H \in (SCM) \cap (SBD)$ (1)

Có $S \in (SCM) \cap (SBD)$ (2)

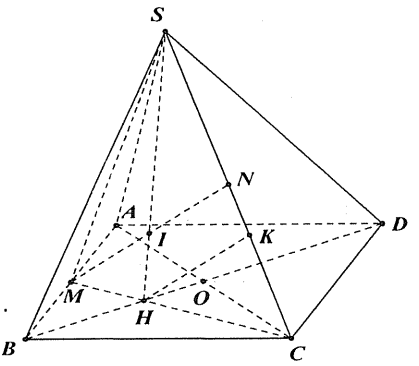
Từ (1) và (2) suy ra $SH = (SCM) \cap (SBD)$.

Gọi $I = MN \cap SH$

$\Rightarrow I = MN \cap (SBD)$ $(SH \subset (SBD))$.

Ta có H là trọng tạm giác ABC.

Trong tam giác SCM kẻ $HK \parallel MN (K \in SC)$.



Trong ΔCMN có MN // KH:

$\frac{CH}{CM} = \frac{CK}{CN} = \frac{HK}{MN} = \frac{2}{3} \Rightarrow HK = \frac{2}{3}MN$ (3)

Trong ΔSHK có IN // KH: $\frac{IN}{HK} = \frac{SN}{SK} = \frac{3}{4} \Rightarrow HK = \frac{4}{3}IN$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $\frac{2}{3}MN = \frac{4}{3}IN \Rightarrow MN = 2IN \Rightarrow \frac{MI}{MN} = \frac{1}{2}$.

Cho hình bình hành ABCD và điểm S không nằm trong mặt phẳng chứa ABCD.

a) Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau (SAC) và (SBD), (SAB) và (SCD).

b) Một mặt phẳng (α) qua BC, cắt SA tại N và cắt SD tại M.

Chứng minh MN // BC.

c) Chứng tỏ giao điểm của BN và CM luôn luôn ở trên một đường thẳng cố định khi M di động trên SA.

d) Gọi G là trọng tâm tam giác SAB, K là điểm trên cạnh AC sao cho $\frac{AK}{AC} = \frac{1}{3}$. Chứng minh GK song song với mặt phẳng (SCD).

LỜI GIẢI

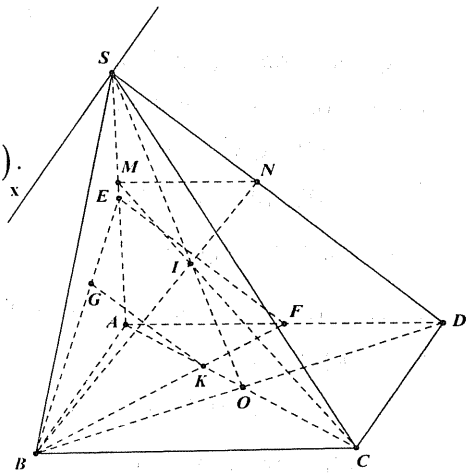
a) Ta có $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (1)

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(SAC) \cap (SBD) = SO$.

Ta có: $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \,//\, CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx (Sx \,//\, AB \,//\, CD)$.



b) Vì: $\begin{cases} (\alpha) \cap (SAD) = MN \\ BC \,//\, AD \\ BC \subset (\alpha),\ AD \subset (SAD) \end{cases}$

$\Rightarrow MN \,//\, AD \,//\, BC$.

Gọi $I = BN \cap CM (BN, CM \subset (\alpha))$.

c) Vì: $\begin{cases} I \in BN, BN \subset (SBD) \\ I \in CM, CM \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD)$.

Suy ra I thuộc giao tuyến SO cố định của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

d) Gọi E và F lần lượt là trung điểm của SA và AD .

Vì K chia đoạn AC thành ba phần bằng nhau và AK chiếm 1 phần, dễ dàng chứng minh K là trọng tâm của tam giác ABD.

Theo tính chất trọng tâm có $\frac{BG}{BE} = \frac{BK}{BF} = \frac{2}{3} \Rightarrow GK \,//\, EF$ (3)

Mà EF là đường trung bình của tam giác ADS $\Rightarrow EF \,//\, SD$ (4)

Từ (3) và (4) có $GK \,//\, SD \subset (SCD) \Rightarrow GK \,//\, (SCD)$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi I là trung điểm của SA và J, K là các điểm trên SB , SC và thỏa JS = 2JB , KS = 2KC . Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) , giao tuyến d' của (IJK) và (ACD) . Tìm giao điểm M của SD với (IJK) . Chứng minh M trung điểm của SD. Gọi E là giao điểm của IJ với KM, chứng minh E thuộc đường thẳng d và EI/EJ = EM/EK=3/4 .

LỜI GIẢI

Có: $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \,//\, CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \equiv d (Sx \,//\, AB \,//\, CD)$.

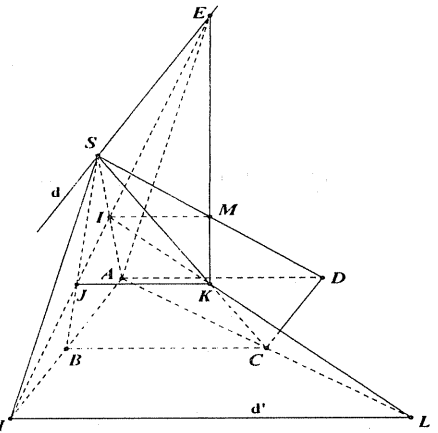
Trong mp(SAB) gọi $H = AB \cap IJ$; Trong mp(SAC) gọi $L = AC \cap IK$.

Ta có H và L là hai điểm chung của hai mặt phẳng (IJK) và (ABCD), nên:

$(IJK)\cap(ABCD)=HL\equiv d'$.

Vì có: $\dfrac{SJ}{SB}=\dfrac{SK}{SC}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow JK\ //\ BC$.

Từ đó suy ra giao tuyến HL // JK // BC.

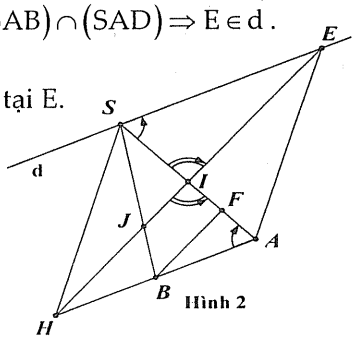


I là điểm chung của hai mặt phẳng (SAD) và (IJK) trong hai mặt phẳng này lần lượt có AD và IJ song song với nhau. Nên giao tuyến của chúng qua I và song song với AD, giao tuyến này cắt SD tại điểm M. Thì M là giao điểm của SD với mp (IJK). Từ đó suy ra IM là đường trung bình của ΔSAD vì có I trung điểm, suy ra M trung điểm của SD.

Vì $E=IJ\cap KM\Rightarrow\begin{cases}E\in IJ\subset(SAB)\\E\in KM\subset(SAD)\end{cases}\Rightarrow E\in(SAB)\cap(SAD)\Rightarrow E\in d$.

Kết luận ba đường thẳng d, IJ, KM đồng qui tại E.

Mặt phẳng (SAB) được vẽ lại ở hình 2.



Hình 2

Dựng $BF\parallel HI\left(F\in SA\right)$, từ đó ta có:

$\dfrac{SJ}{JB}=\dfrac{SI}{IF}=2\Rightarrow SI=2IF\Leftrightarrow AI=2IF$

Vậy F trung điểm của AI.

Từ đó suy ra BF là đường trung bình của tam giác AHI $\Rightarrow$ B trung điểm của AH.

HI và SB là hai đường trung tuyến của ΔSAH cắt nhau tại J.

Vậy J là trọng tâm ΔSAH.

Ta có $\Delta AIH=\Delta SIE(g.c.g)\Rightarrow SE=HA$. Suy ra AHSE là hình bình hành.

Từ đó suy ra $\dfrac{EI}{EJ}=\dfrac{3}{4}$.

Trong ΔEJK có: IM // JK $\Rightarrow\dfrac{EI}{EJ}=\dfrac{EM}{EK}=\dfrac{3}{4}$.

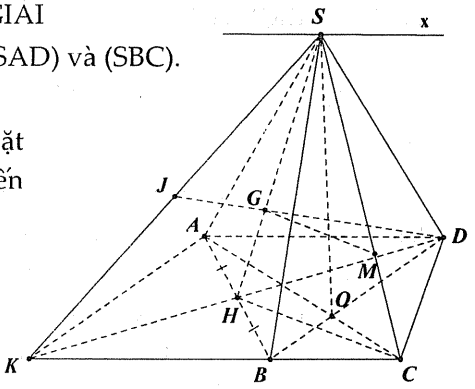
Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang đáy lớn AD.

a) Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD), (SAD) và (SBC).

b) Gọi G là trọng tâm tam giác SAB, M thuộc SC sao cho SM =2MC. Chứng minh GM // (ABCD).

c) Tìm giao điểm J của GD và (SBC). Tính GJ/GD.

LỜI GIẢI



a) Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD), (SAD) và (SBC).

Gọi $O = AC \cap BD$.

O và S là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) nên giao tuyến của chúng là SO.

Ta có: $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \,//\, BC \\ AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx (Sx \,//\, AD \,//\, BC)$.

b). Chứng minh GM // (ABCD)

Ta có: $\frac{SG}{SH} = \frac{SM}{SC} = \frac{2}{3} \Rightarrow GM \,//\, HC$. Mà $HC \subset (ABCD) \Rightarrow GM \,//\, (ABCD)$.

c). Tìm giao điểm J của GD và (SBC). Tính GJ/GD.

Trong mp(ABCD) gọi $K = DH \cap BC$.

Ta có K và S là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SDH) và (SBC).

Vậy $(SDH) \cap (SBC) = SK$.

Trong mp(SDH) gọi $J = DG \cap SK$. Suy ra $J = DG \cap (SBC)$.

Ta có: $\Delta HAD = \Delta HBK (g.c.g) \Rightarrow HD = HK$.

Trong ΔSDK có SH là đường trung tuyến và có $\frac{SG}{SH} = \frac{2}{3}$.

Từ đó suy ra G là trọng tâm của ΔSDK.

Vậy: $\frac{GJ}{GD} = \frac{1}{2}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang đáy lớn AD = 2BC, gọi O là giao điểm hai đường chéo đáy. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA và SD. G là trọng tâm tam giác SCD.

a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD), (SAD) và (SBC).

b) Mặt phẳng (P) qua E, F và (P) song song SB. Mặt phẳng (P) cắt cạnh CD, AB lần lượt tại P, Q. Chứng minh EQ // SB. Tứ giác EFPQ là hình gì? Chứng minh BE // (SCD) và GO // (SBC).

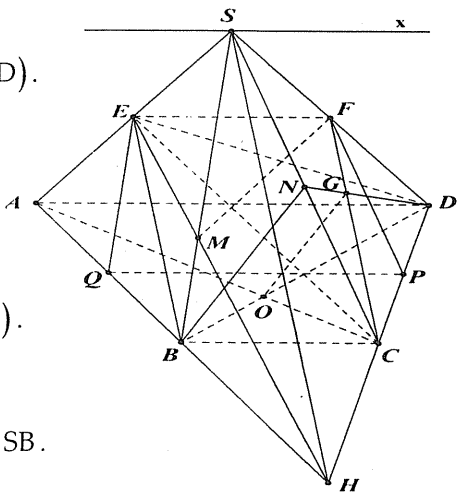
c) Tìm giao điểm M của SB và (CDE). Chứng minh $\frac{S_{\Delta SME}}{S_{\Delta SMF}} = \frac{S_{\Delta SAB}}{S_{\Delta SBD}}$, $SM.BD = SB.DO$.

LỜI GIẢI

a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD)

Trong mp(ABCD), gọi: $H = AB \cap CD \Rightarrow H \in (SAB) \cap (SCD)$ (1)

và $S \in (SAB) \cap (SCD)$ (2)



Từ (1) và (2) suy ra: $SH = (SAB) \cap (SCD)$.

Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC):

$$\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \,//\, BC \\ AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \end{cases}$$

$\Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx \,(Sx \,//\, AD \,//\, BC)$.

b) Chứng minh EQ // SB:

Ta có: $\begin{cases} EQ = (P) \cap (SAB) \\ SB \subset (SAB),\ SB \,//\, (P) \end{cases} \Rightarrow EQ \,//\, SB$.

Ta có: $\begin{cases} QP = (P) \cap (ABCD) \\ AD \parallel EF \\ AD \subset (ABCD), EF \subset (P) \end{cases} \Rightarrow QP \,//\, AD \,//\, EF$.

Từ đó suy ra tứ giác EFPQ là hình thang.

Chứng minh BE // (SCD):

Vì có: $\begin{cases} BC = \dfrac{1}{2} AD \\ BC \,//\, AD \end{cases}$ (1); Và $\begin{cases} EF = \dfrac{1}{2} AD \\ EF \,//\, AD \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} BC = EF \\ BC \,//\, EF \end{cases}$.

Vậy: tứ giác BCFE là hình bình hành $BE \,//\, CF$.

Mà $CF \subset (SCD) \Rightarrow BE \,//\, (SCD)$.

Chứng minh GO // (SBC):

Ta có $\Delta OAD \sim \Delta OCB \Rightarrow \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OD}{OB} = \dfrac{AD}{BC} = 2$.

Gọi N trung điểm SC.

Trong ΔBDN có: $\dfrac{SG}{SN} = \dfrac{DO}{DB} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow OG \,//\, BN$.

Mà $BN \subset (SBC) \Rightarrow OG \,//\, (SBC)$.

c) Tìm giao điểm M của SB và (CDE):

Vì H và E là 2 điểm chung của hai mp(SAB) và (ECD), nên: $(SAB) \cap (ECD) = EH$.

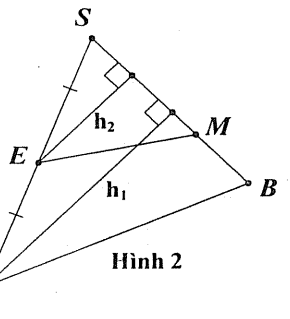
Gọi $M = EH \cap SB \Rightarrow M = SB \cap (CDE)$.

Trong ΔHAD có BC // AD, nên có: $\frac{HB}{HA} = \frac{HC}{HD} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ B trung điểm AH.

Từ đó ta có M là trọng tâm ΔSAH.

Tam giác SAB được vẽ lại ở hình 2



Hình 2

$$S_{\Delta SME} = \frac{1}{2} h_2 . SM = \frac{1}{2} . \frac{1}{2} h_1 . \frac{2}{3} SB = \frac{1}{3} . \frac{1}{2} h_1 . SB = \frac{1}{3} S_{\Delta SAB}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\Delta SME}}{S_{\Delta SAB}} = \frac{1}{3} \qquad (*)$$

Chứng minh hoàn tương tự: $\frac{S_{\Delta SMF}}{S_{\Delta SBD}} = \frac{1}{3}$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra: $\frac{S_{\Delta SME}}{S_{\Delta SAB}} = \frac{S_{\Delta SMF}}{S_{\Delta SBD}} \Leftrightarrow \frac{S_{\Delta SME}}{S_{\Delta SMF}} = \frac{S_{\Delta SAB}}{S_{\Delta SBD}}$.

Theo chứng minh trên, có $\frac{SM}{SB} = \frac{2}{3}$ và $\frac{DO}{DB} = \frac{2}{3}$.

Từ đó suy ra: $\frac{SM}{SB} = \frac{DO}{DB} \Leftrightarrow SM.BD = SB.DO$ (đpcm).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Điểm M thuộc cạnh SA sao cho SM = 2MA, N là trung điểm của AD. Tìm giao tuyến (SAD) và (MBC). Tìm giao điểm I của SB và (CMN), giao điểm J của SA và (ICD). Chứng minh ID, JC và SO đồng qui tại E. Tính tỉ số SE/SO.

LỜI GIẢI

Có: $\begin{cases} M \in (SAD) \cap (MBC) \\ AD \,//\, BC \\ AD \subset (SAD), BC \subset (MBC) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (MBC) = Mx \,(Mx \,//\, AD \,//\, BC)$.

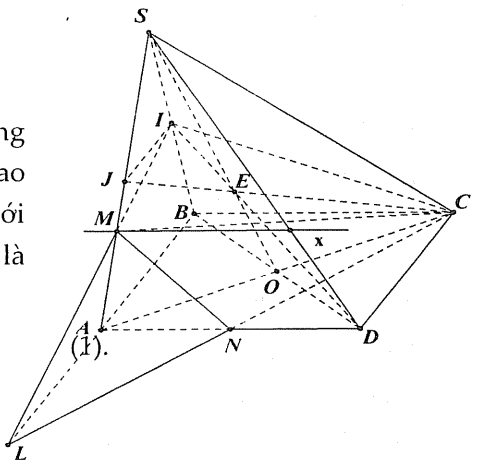
Trong mp(ABCD), gọi: $L = AB \cap CN$.

Ta có L và M là hai điểm chung của (SAB) và (CMN) nên:

$(SAB)\cap(CMN)=LM$.

Gọi $I=LM\cap SB\Rightarrow I=SB\cap(CMN)$.

I là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (ICD), vì AB // CD nên giao tuyến của chúng qua I và song song với AB, giao tuyến này cắt SA tại J thì J là giao điểm của SA với mp (ICD).



Gọi $E=CJ\cap DI\left(CJ,DI\subset(CDI)\right)$

Ta có $(SAC)\cap(SBD)=SO$

Vì: $\begin{cases}E\in CJ,CJ\subset(SAC)\\E\in DI,DI\subset(SBD)\end{cases}\Rightarrow E\in(SAC)\cap(SBD)\Rightarrow E\in SO$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: ba đường thẳng CJ, DI, SO đồng qui tại điểm E.

Trong ΔLBC có: $AN=\frac{1}{2}BC$ và AN // BC

$\Rightarrow$ AN là đường trung bình $\Delta LBC\Rightarrow$ A trung điểm của LB.

Trong ΔSBL có có SA là đường trung tuyến và $SM=\frac{2}{3}SA$

$\Rightarrow$ M trọng tâm $\Delta SBL\Rightarrow$ I trung điểm của SB.

Xét trong ΔSBD, E là giao điểm của hai đường trung tuyến SO và DI.

$\Rightarrow$ E trọng tâm của tam giác $\Rightarrow\frac{SE}{SO}=\frac{2}{3}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành, SAB là tam giác đều, SCD là tam giác cân. Gọi M là trung điểm của AD, mặt phẳng (α) qua M và song song với AB và SA cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q.

a) Chứng minh MNPQ là hình thang cân.

b) Tính tỉ số diện tích của hình thang cân MNPQ và tam giác đều SAB.

LỜI GIẢI

a) Ta có: $\begin{cases}(\alpha)\cap(ABCD)=MN\\AB\ //\ (\alpha),AB\subset(ABCD)\end{cases}\Rightarrow MN\ //\ AB\ //\ CD$.

Ta có: $\begin{cases}(\alpha)\cap(SAD)=MQ\\SA\ //\ (\alpha),SA\subset(SAD)\end{cases}\Rightarrow MQ\ //\ SA$.

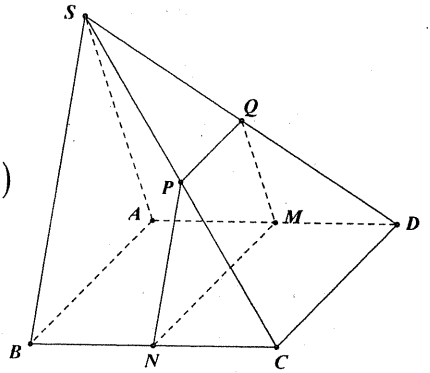
Ta có: $\begin{cases}(\alpha)\cap(SCD)=QP\\ CD\ //\ (\alpha), CD\subset(SCD)\end{cases}$

$\Rightarrow QP\ //\ CD$.

Vì $(\alpha)\ //\ AB, (\alpha)\ //\ SA \Rightarrow (\alpha)\ //\ mp(SAB)$

$\Rightarrow (\alpha)\ //\ SB$;

Và $(\alpha)\cap(SBC)=NP \Rightarrow NP\ //\ SB$.



Theo cách dựng điểm ở trên:

Q là trung điểm của SD, N là trung điểm BC, P là trung điểm của SC.

Có MN // PQ (vì cùng song song với CD). Suy ra MNPQ hình thang.

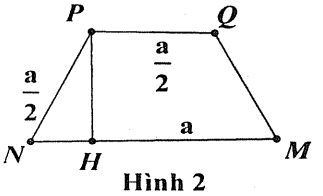
Và $NP=\frac{1}{2}SB,\ MQ=\frac{1}{2}SA \Rightarrow NP=MQ$ (vì ΔSAB đều nên SA = SB).

MNPQ là hình thang có hai cạnh bên không song song và bằng nhau.

Nên tứ giác MNPQ là hình thang cân.

b) Gọi a là độ dài cạnh AB. Hình thang cân được vẽ lại ở hình 2.

$$PH=\sqrt{PN^2-NH^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{4}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{4}.$$



Hình 2

$$S_{\Delta SAB}=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{MNPQ}=\frac{1}{2}(MN+PQ).PH=\frac{1}{2}\left(a+\frac{a}{2}\right).\frac{a\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}.$$

Tỉ số diện tích: $\frac{S_{MNPQ}}{S_{\Delta SAB}}=\frac{\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}=\frac{3}{4}$.

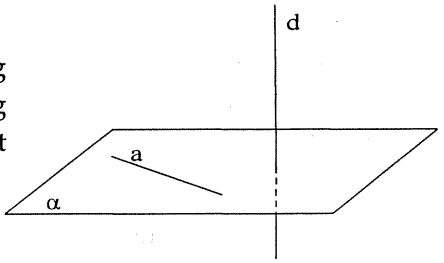
CHƯƠNG III: QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

I. <u>Định nghĩa:</u>

Một đường thẳng được gọi là vuông góc với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng đó:

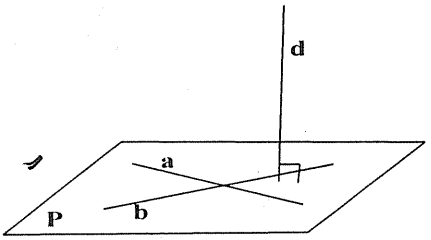
$d \perp mp(\alpha) \Leftrightarrow d \perp a, \forall a \subset (\alpha)$



II. <u>Các định lý:</u>

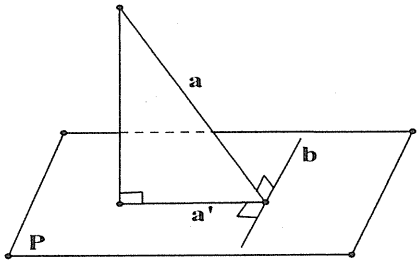
<u>Định lý 1</u>: Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mp(P) thì đường thẳng d vuông góc với mp(P):

$$\begin{cases} d \perp a, d \perp b \\ a, b \subset (P) \\ a, b \text{ cắt nhau} \end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$$



<u>Định lý 2</u>: (Ba đường vuông góc)

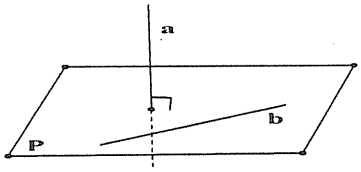
Cho đường thẳng a không vuông góc với mp(P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).



PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Để chứng minh $a \perp b$ ta thường sử dụng những phương pháp chứng minh sau:

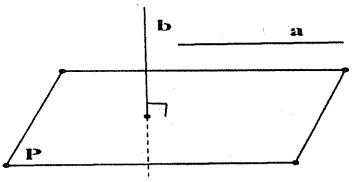
1. Sử dụng các phương pháp Hình học phẳng: Góc nội tiếp, Định lí Pitago đảo, . . .
3. Sử dụng phương pháp tích vô hướng của hai vécto: nếu $\vec{a}.\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow a \perp b$ ($\vec{a}, \vec{b}$ là hai vécto chỉ phương của hai đường thẳng a và b).
4. Sử dụng tính chất bắc cầu: $\begin{cases} c \perp b \\ c \,//\, a \end{cases} \Rightarrow \quad a \perp b$



5. Tìm một mặt phẳng (P) chứa đường thẳng b. Chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), thì $a \perp b$:

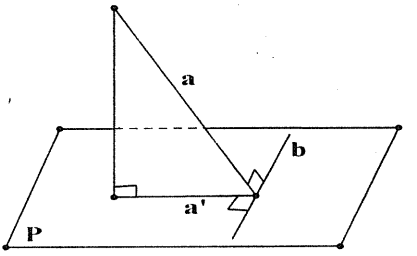
$$\begin{cases} a \perp (P) \\ b \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp b$$

6. Chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (P), đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (P), thì suy ra $a \perp b$:



$$\begin{cases} a \,//\, (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp b$$

7. Áp dụng định lí 3 đường vuông góc:



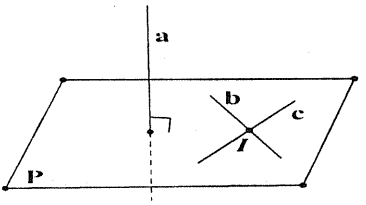
a' là hình chiếu vuông góc của a trên mặt phẳng (P) , $b \subset (P)$. *Đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b khi và chỉ khi b vuông góc với a'. Nói ngắn gọn b vuông góc với hình chiếu thì b vuông góc với đường xiên.*

ĐÂY LÀ PHƯƠNG PHÁP RẤT HAY SỬ DỤNG! Các bạn phải thành thạo phương pháp này.

PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

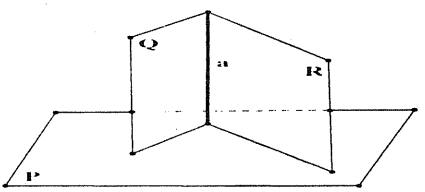
Để chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) ta thường sử dụng các phương pháp sau:

1). Muốn chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P). Ta phải chứng minh đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng (P).



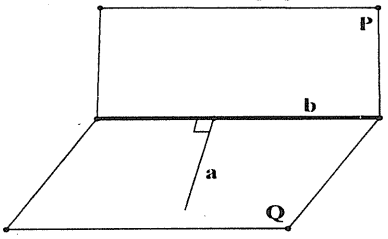
$$\begin{cases} a \perp b \text{ vaø } a \perp c \\ b \cap c \neq I \\ b; c \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (P)$$

2). Hai mặt phẳng (Q) và (R) có giao tuyến a cùng vuông góc với mặt phẳng (P), thì a vuông góc với (P).



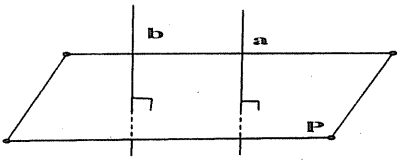
$$\begin{cases} (Q) \perp (P) \\ (R) \perp (P) \\ (Q) \cap (R) = a \end{cases} \Rightarrow a \perp (P)$$

3). Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến b. Một đường thẳng a thuộc mặt phẳng (Q) vuông góc với b, thì a vuông góc với mặt phẳng (P).



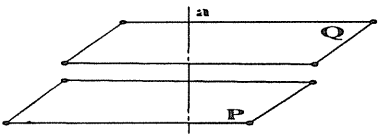
$$\begin{cases}(P) \perp (Q)\\ (P) \cap (Q) = b\\ a \subset (Q)\\ a \perp b\end{cases} \Rightarrow a \perp (P)$$

4). Chứng minh đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (P) , đường thẳng a song song với b ,suy ra a vuông góc với (P).



$$\begin{cases}a \,//\, b\\ b \perp (P)\end{cases} \Rightarrow a \perp (P)$$

5). Chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q), mặt phẳng (P) song song với (Q), nên a vuông góc với (P).



$$\begin{cases}a \perp (Q)\\ (Q) \,//\, (P)\end{cases} \Rightarrow a \perp (P)$$

Hai trụ cột để giải toán của dạng này :

- Muốn chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P), ta phải chứng minh đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng (P).
- Khi đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) thì đường thẳng d vuông góc với **mọi đường** thuộc mặt phẳng (P).

BÀI TẬP

Hai tam giác cân ABC và DBC nằm trong hai mặt phẳng khác nhau tạo nên tứ diện ABCD. Gọi I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh $BC \perp AD$.

b) Gọi AH là đường cao của tam giác ADI. Chứng minh $AH \perp (BCD)$.

LỜI GIẢI

a) Chứng minh $BC \perp AD$.

Vì tam giác ABC cân tại A nên $AI \perp BC$, và tam giác DBC cân tại D nên $DI \perp BC$.

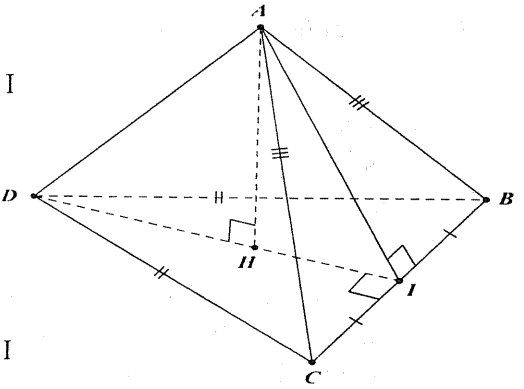
Ta có: $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp DI \\ AI, DI \subset (ADI), AI \cap DI = I \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp mp(ADI) \Rightarrow BC \perp AD$

b) Chứng minh $AH \perp (BCD)$.

Có: $\begin{cases} AH \perp DI\ (gt) \\ AH \perp BC\ (\text{vì } BC \perp (ADI)) \\ BC, DI \subset (BCD),\ BC \cap DI = I \end{cases}$

$\Rightarrow AH \perp mp(BCD)$.



Cho hình chóp S.ABC có SA $\perp$ đáy, tam giác ABC vuông cân tại B. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAC và N là điểm thuộc cạnh SB sao cho SN = 2NB. Chứng minh:

a) BC $\perp$ (SAB).

b) NG $\perp$ (SAC).

LỜI GIẢI

Gọi H trung điểm của AC.

ΔABC vuông cân tại B nên $BH \perp AC$.

a) Có $\begin{cases} BC \perp AB(gt) \\ BC \perp SA(\text{vì } SA \perp (ABC)) \end{cases}$

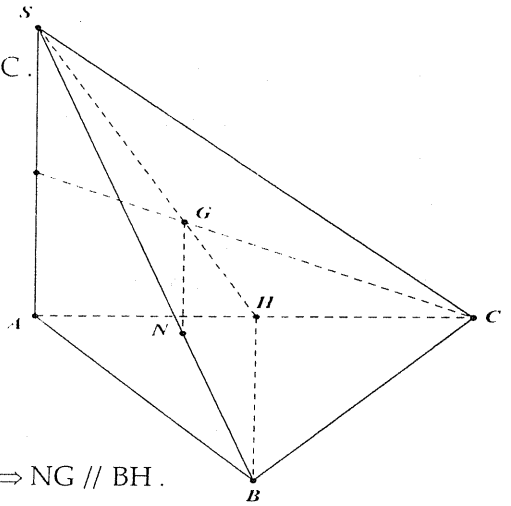
$\Rightarrow BC \perp (SAB)$.

b) Có $\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA(\text{vì } SA \perp (ABC)) \end{cases}$

$\Rightarrow BH \perp (SAC)$.

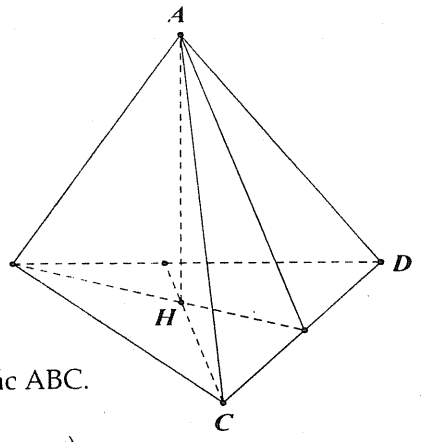
Xét tam giác SBH có: $\frac{SN}{SB} = \frac{SG}{SH} = \frac{2}{3} \Rightarrow NG \,//\, BH$.

Mà $BH \perp (SAC) \Rightarrow NG \perp (SAC)$



Cho tứ diện ABCD có $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống mặt phẳng (BCD). Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác BCD và $AD \perp BC$.

LỜI GIẢI



Có: $\begin{cases} CD \perp AB \text{ (Giả thiết)} \\ CD \perp AH \text{ (Vì } AH \perp (ABC)) \end{cases}$

$\Rightarrow CD \perp mp(ABH)$

$\Rightarrow CD \perp BH$ (Vì $BH \subset (ABH)$) (1)

Chứng minh tương tự: $BD \perp mp(ACH)$

$\Rightarrow BD \perp AH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra H trực tâm của tam giác ABC.

Vì $\begin{cases} BC \perp DH \text{ (H trực tâm)} \\ BC \perp AH \text{ (Giả thuyết)} \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(ADH)$

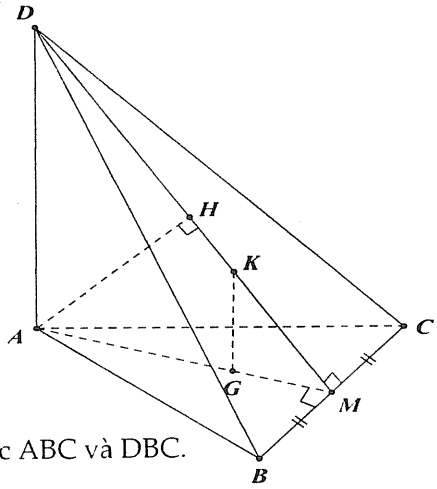
$\Rightarrow BC \perp AD$ (Vì $AD \subset (ADH)$)

Cho tứ diện ABCD có $DA \perp (ABC)$, ABC là tam giác cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ $AH \perp MD$ tại H.

a) Chứng minh $AH \perp (BCD)$.

b) Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và DBC. Chứng minh $GK \perp (ABC)$.

LỜI GIẢI



a) Chứng minh $AH \perp (BCD)$.

Vì ΔABC cân tại A có $BC \perp AM$

Và $BC \perp AD \Rightarrow BC \perp mp(DAM)$.

Ta có: $\begin{cases} AH \perp BC \left(BC \perp (DAM)\right) \\ AH \perp DM (gt) \\ BC, DM \subset (SBC),\ BC \cap DM = M \end{cases}$

$\Rightarrow AH \perp (DBC)$

b). Chứng minh $GK \perp (ABC)$.

Vì G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và DBC.

Theo tính chất trọng tâm:

$\begin{cases} \dfrac{AG}{AM} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{DK}{DM} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AG}{AM} = \dfrac{DK}{DM} \Rightarrow AD \text{ // } KG$ (theo định lý Talet đảo).

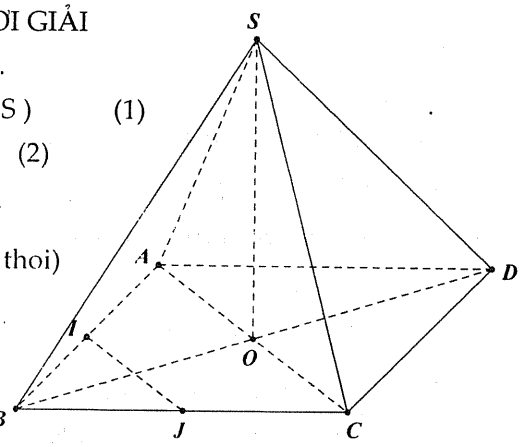
Mà $AD \perp (ABC) \Rightarrow KG \perp (ABC)$ (đpcm)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O. Biết SA = SC và SB = SD.

a) Chứng minh SO ⊥ (ABCD) và AC ⊥ SD.

b) Gọi I, J là trung điểm của BA, BC. Chứng minh IJ ⊥ (SBD).

LỜI GIẢI



a) Gọi O là giao điểm của AC và BD .

Ta có $SO \perp AC$ (vì ΔSAC cân tại S) (1)

$SO \perp BD$ (vì ΔSBD cân tại S) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Ta có: $\begin{cases} AC \perp BD \text{ (Tính chất hình thoi)} \\ AC \perp SO \\ BD, SO \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow AC \perp mp(SBD) \Rightarrow AC \perp SD$

b). Ta có IJ là đường trung bình của $\Delta BAC \Rightarrow IJ \,//\, AC$.

Mà $AC \perp (SBD) \Rightarrow IJ \perp (SBD)$.

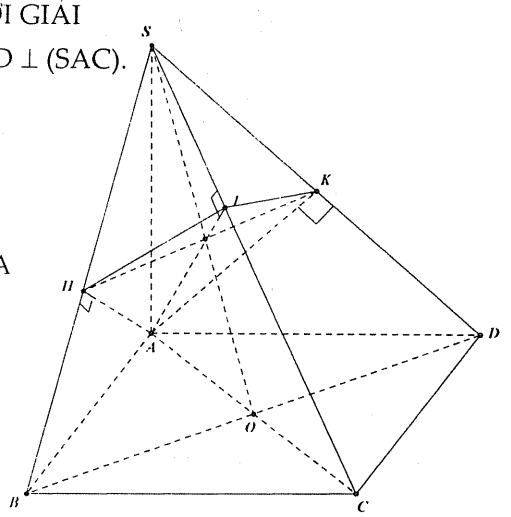
Cho hình chóp S.ABCD , có đáy là hình vuông tâm O. SA ⊥ (ABCD). Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC, SD.

a) CMR: BC ⊥ (SAB), CD ⊥ (SAD , BD ⊥ (SAC).

b) CMR: AH, AK cùng vuông góc với SC. Từ đó suy ra 3 đường thẳng AH, AI , AK cùng nằm trong một mặt phẳng.

c) CMR: HK ⊥ (SAC). Từ đó suy ra HK ⊥ AI.

LỜI GIẢI



a). CMR: BC ⊥ (SAB), CD ⊥ (SAD), BD ⊥ (SAC).

Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

Có: $\begin{cases} BC \perp SA \left(SA \perp (ABCD)\right) \\ BC \perp AB (gt) \\ SA, AB \subset (SAB) \text{ , } SA \cap AB = A \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Chứng minh $CD \perp (SAD)$:

$$\text{Vì } \begin{cases} CD \perp SA \left(SA \perp (ABCD)\right) \\ CD \perp AD (gt) \\ SA, AD \subset (SAD),\ SA \cap AD = A. \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD).$$

Chứng minh $BD \perp (SAC)$.

$$\text{Vì } \begin{cases} DB \perp SA \left(SA \perp (ABCD)\right) \\ BD \perp AC (gt) \\ SA, AC \subset (SAC),\ SA \cap AC = A \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$$

b) CMR: AH, AK cùng vuông góc với SC.

$$\text{Có } \begin{cases} AH \perp SB (gt),\ AH \perp BC \left(BC \perp (SAB)\right) \\ SB, BC \subset (SBC),\ SB \cap BC = B \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$$

$$\text{Có } \begin{cases} AK \perp SD (gt) \\ AK \perp CD \left(CD \perp (SAD)\right) \\ SD, CD \subset (SCD),\ SD \cap CD = D \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$$

Vì AH , AK và AI cùng vuông góc với SC. Nên AH , AK , AI đồng phẳng.

c) Ta có tam giác $\Delta SAB = \Delta SAD (c.g.c)$. Nên 2 đường cao xuất phát từ đỉnh A bằng nhau. Nên có $AH = AK$,suy ra $\Delta SHA = \Delta SKA$ (cạnh huyền cạnh góc vuông) $\Rightarrow SH = SK$

Nên có: $\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD}$, theo định lý đảo Talet $HK \,//\, BD$.

Mà $BD \perp (SAC) \Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow HK \perp AI \left(AI \subset (SAC)\right)$.

Cho tứ diện O.ABC có 3 cạnh OA , OB , OC đôi một vuông góc với nhau. Kẻ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H. Chứng minh :

a) $OA \perp BC$, $OB \perp CA$, $OC \perp AB$.

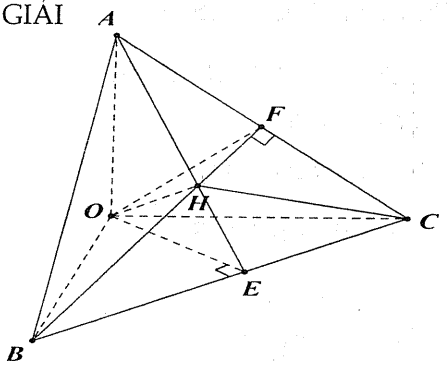
b) H là trực tâm của tam giác ABC.

c) $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

d) $S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC}$.

e) Các góc của tam giác ABC đều là góc nhọn.

LỜI GIẢI



a). Ta có: $\begin{cases} OA \perp OB, OA \perp OC \\ OB, OC \subset (OBC) \end{cases}$

$\Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$.

Ta có: $\begin{cases} OB \perp OA, OB \perp OC \\ OA, OC \subset (OAC) \end{cases}$

$\Rightarrow OB \perp (OAC) \Rightarrow OB \perp AC$.

Chứng minh tương tự ta được $OC \perp AB$.

b). H là trực tâm của tam giác ABC.

Gọi $E = AH \cap BC$, $F = BH \cap AC$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp OA (OA \perp (OBC)) \\ BC \perp OH (OH \perp (ABC)) \\ OA, OH \subset (OAE) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAE) \Rightarrow BC \perp AE$ (1)

Ta có: $\begin{cases} AC \perp OB, AC \perp OH \\ OB, OH \subset (OBF) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (OBF) \Rightarrow AC \perp BF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm của tam giác ABC.

c) Chứng minh $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Trong ΔOAE vuông tại O có OH là đường cao: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OE^2}$ (3)

Trong ΔOBC vuông tại O có OE là đường cao: $\frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ (4)

Thay (4) vào (3) được: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ (đpcm)

Công thức này được sử dụng trực tiếp để tính khoảng cách, các bạn nhớ công thức này nhé!

d). Chứng minh: $S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC}$.

Trong ΔOAE vuông tại O có OH là đường cao.

$OE^2 = EH.EA \Leftrightarrow OE^2.BC^2 = EH.BC.EA.BC$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}OE.BC\right)^2 = \frac{1}{2}.EH.BC.\frac{1}{2}EA.BC \Leftrightarrow S^2_{\Delta OBC} = S_{\Delta HBC}.S_{\Delta ABC}$ (*)

Chứng minh hoàn toàn tương tự, ta được:

$S^2_{\Delta OAC} = S_{\Delta HAC}.S_{\Delta ABC}$ (**)

$S^2_{\Delta OAB} = S_{\Delta HAB}.S_{\Delta ABC}$ (***)

Cộng từng vế (*), (**), (***):

$S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC} + S^2_{\Delta OAB} = S_{\Delta HBC}.S_{\Delta ABC} + S_{\Delta HAC}.S_{\Delta ABC} + S_{\Delta HAB}.S_{\Delta ABC}$

$\Leftrightarrow S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC} + S^2_{\Delta OAB} = S_{\Delta ABC}.\left(S_{\Delta HBC} + S_{\Delta HAC} + S_{\Delta HAB}\right)$

$\Leftrightarrow S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC} + S^2_{\Delta OAB} = S_{\Delta ABC}.S_{\Delta ABC}$

$\Leftrightarrow S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC} + S^2_{\Delta OAB} = S^2_{\Delta ABC}$.

Cách 2 :

$S^2_{\Delta ABC} = \frac{1}{4}AE^2BC^2 = \frac{1}{4}\left(OA^2 + OE^2\right)BC^2 = \frac{1}{4}OA^2.BC^2 + \frac{1}{4}OE^2.BC^2$

$= \frac{1}{4}OA^2\left(OB^2 + OC^2\right) + \frac{1}{4}OE^2.BC^2 = \frac{1}{4}OA^2.OB^2 + \frac{1}{4}OA^2.OC^2 + \frac{1}{4}OE^2.BC^2$

$\Leftrightarrow S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OAC} + S^2_{\Delta OBC} = S^2_{\Delta ABC}$

e) Các góc của tam giác ABC đều là góc nhọn.

Gọi độ dài ba cạnh OA = a , OB = b , OC = c .

Trong tam giác ABC áp dụng định lý cosin có:

$\cos\hat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC} = \frac{a^2 + b^2 + a^2 + c^2 - \left(b^2 + c^2\right)}{2.AB.AC} = \frac{a^2}{AB.AC} > 0$.

Kết luận: A là góc nhọn.

Chứng minh tương tự góc B và góc C nhọn.

Cho tứ diện ABCD, đáy là tam giác cân và $DA \perp mp(ABC)$, $AB = AC = a$, $BC = \frac{6a}{5}$. Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ AH vuông góc với MD (H thuộc MD).

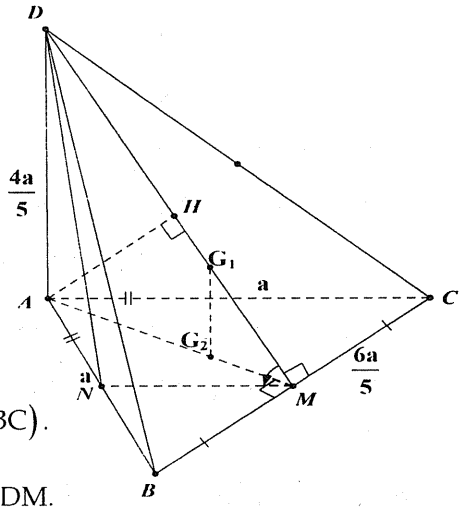
a). Chứng minh $AH \perp mp(BCD)$.

b). Cho $AD = \frac{4a}{5}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và DM.

c). Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của tam giác DBC và ABC. Chứng minh $G_1G_2 \perp mp(ABC)$

LỜI GIẢI

a) Chứng minh $AH \perp mp(BCD)$.



Vì M trung điểm của BC nên:

$BC \perp AM$ (1)

Mặt khác: $BC \perp AD$

(Vì $AD \perp (ABC)$) (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BC \perp mp(DAM)$

$\Rightarrow BC \perp AH$ (vì $AH \subset (DAM)$).

Vậy ta có : $\begin{cases} AH \perp DM \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp mp(DBC)$.

b). Tính góc giữa hai đường thẳng AC và DM.

Kẻ MN // $AC (N \in AB)$ thì góc giữa DM và AC bằng góc giữa DM và MN, đó là góc $\widehat{DMN}$ hoặc góc $180^0 - \widehat{DMN}$.

Xét ΔABC: $MN = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}$.

Xét ΔDAN vuông tại A: $DN = \sqrt{AD^2 + AN^2} = \frac{a\sqrt{89}}{10}$.

Xét ΔABM vuông tại M: $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \frac{4a}{5}$.

Xét ΔADM vuông tại A: $DM = \sqrt{AD^2 + AM^2} = \frac{4a\sqrt{2}}{5}$

Áp dụng định lý cosin ΔDMN:

$$\cos\widehat{DMN} = \frac{DM^2 + MN^2 - DN^2}{2.DM.MN} = \frac{2\sqrt{2}}{5} \Rightarrow \widehat{DMN} = \arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right).$$

c) Chứng minh $G_1G_2 \perp mp(ABC)$.

Vì G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của tam giác DBC và ABC, theo tính chất trọng tâm có:

$\frac{MG_1}{MD} = \frac{1}{3}$, $\frac{MG_2}{MA} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{MG_1}{MD} = \frac{MG_2}{MA} \Rightarrow G_1G_2$ // DA (theo định lý đảo Talet).

Mà $DA \perp (ABC) \Rightarrow G_1G_2 \perp (ABC)$

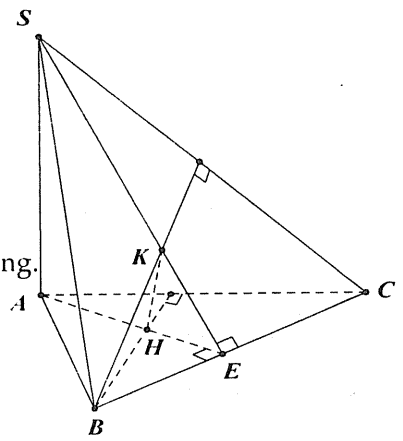
Cho tứ diện S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi H , K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và SBC . Chứng minh rằng :

a) AH , SK , BC đồng quy.

b) SC vuông góc với mặt phẳng (BHK).

c) HK vuông góc với mặt phẳng (SBC).

LỜI GIẢI



a) Gọi $E = AH \cap BC$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AE \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAE)$

$\Rightarrow BC \perp SE \left(SE \subset (SAE)\right)$.

Vì SK ⊥ BC , suy ra ba điểm S, K, E thẳng hàng.

Kết luận ba đường thẳng AH, BC, SK đồng qui tại điểm E.

b). SC vuông góc với mặt phẳng (BHK).

Có: $\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC \left(SC \subset (SAC)\right)$.

Có: $\begin{cases} SC \perp BH \left(BH \perp (SAC)\right) \\ SC \perp BK \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BHK)$

c) HK vuông góc với mặt phẳng (SBC).

Có $BC \perp (SAE) \Rightarrow BC \perp HK \left(KH \subset (SAE)\right)$ (1)

Có $SC \perp (BHK) \Rightarrow SC \perp HK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $HK \perp (SBC)$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. SAB là tam giác đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H , K là trung điểm của AB, AD.

a) Chứng minh SH ⊥ (ABCD).

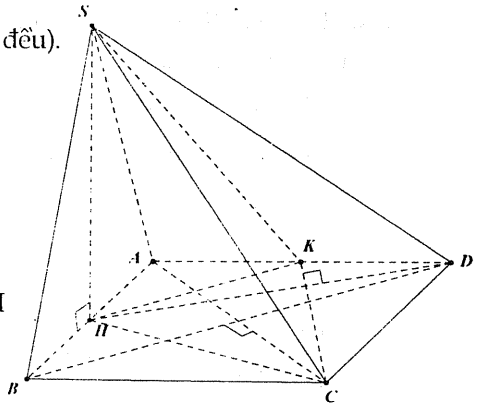
b) Chứng minh AC ⊥ SK và CK ⊥ SD.

LỜI GIẢI

a). Chứng minh SH ⊥ (ABCD).

Trong ΔBCH có: $HC^2 = BH^2 + BC^2 = \dfrac{5a^2}{4}$

Và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (SH đường cao của ΔSAB đều).



Trong tam giác SCH, ta có:

$SC^2 = SH^2 + HC^2 = 2a^2$.

Suy ra tam giác SHC vuông tại H.

Có: $\begin{cases} SH \perp AB(gt), SH \perp HC \\ AB, HC \subset (ABCD), AB \cap HC = H \end{cases}$

$\Rightarrow SH \perp (ABCD)$

b). Chứng minh AC ⊥ SK. Ta có: $\begin{cases} HK \,//\, BD \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp HK$.

Có: $\begin{cases} AC \perp SH, AC \perp HK \\ SH, HK \subset (SHK), SH \cap HK = H \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow AC \perp SK$.

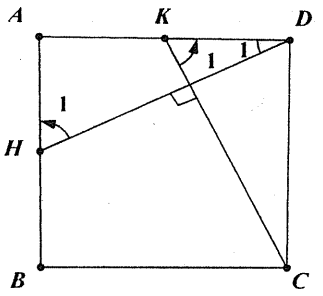
Chứng minh CK ⊥ SD:

Vì đáy ABCD hình vuông (hình 1).

Dễ dàng chứng minh $\Delta CDK = \Delta DAH$.

Suy ra : $\widehat{K_1} = \widehat{H_1}$, mà $\widehat{H_1} + \widehat{D_1} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{K_1} + \widehat{D_1} = 90^0 \Rightarrow CK \perp DH$



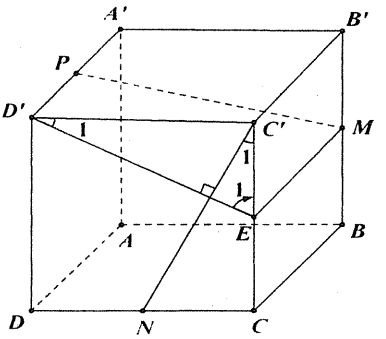
Hình 1

Ta có : $\begin{cases} CK \perp SH, CK \perp DH \\ SH, DH \subset (SHD), SH \cap DH = H \end{cases} \Rightarrow CK \perp (SHD) \Rightarrow CK \perp SD$ (đpcm)

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2002

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BB', CD, A'D'. Chứng minh: MP ⊥ C'N.

LỜI GIẢI



Gọi E trung điểm của CC'.

Ta có ME // A'D' nên ED và PD' đồng phẳng.

Vì có CDD'C' là hình vuông nên dễ dàng chứng minh hai tam giác D'C'E và C'CN bằng nhau, suy ra $\widehat{D'_1} = \widehat{C'_1}$.

Mà: $\widehat{D'_1} + \hat{E} = 90^0 \Rightarrow \widehat{C'_1} + \hat{E} = 90^0$

$\Rightarrow ED' \perp NC'$ (1)

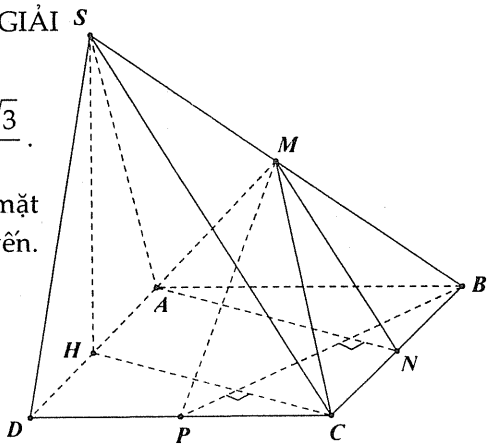
Ta có $BC \perp (CDD'C') \Rightarrow BC \perp NC'$, mà $ME \,//\, BC, \Rightarrow ME \perp NC'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $NC' \perp (MED'P) \Rightarrow NC' \perp PM (PM \subset mp(MED'P))$

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2007

Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAD là tam giác đều và ở trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC, CD. Chứng minh $AM \perp BP$.

LỜI GIẢI



Hạ $SH \perp AD$ tại H.

Vì SAD là tam giác đều nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

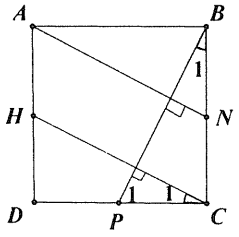
Vì mặt phẳng (SAD) vuông góc mặt phẳng (ABCD) có AD là giao tuyến. Suy ra $SH \perp mp(ABCD)$.

Ta có AN // HC và MN // SC.

Mà $AM, MN \subset (AMN)$;

Và $HC, SC \subset (SHC)$.

Suy ra: Mặt phẳng (AMN) song song với mặt phẳng (SHC).



Trong hình vuông ABCD có:

$\Delta BCP = \Delta CDH (c.g.c)$ nên $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$.

Mà $\widehat{B_1} + \widehat{P_1} = 90^0 \Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{P_1} = 90^0 \Rightarrow CH \perp PB$.

Ta có: $\begin{cases} BP \perp CH \\ BP \perp SH \end{cases} \Rightarrow BP \perp (SHC) \Rightarrow BP \perp (AMN) \Rightarrow BP \perp AM$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2007

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh đáy bằng a. Gọi E là điểm đối xứng của điểm D qua trung điểm của SA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE, BC. Chứng minh $MN \perp BD$.

LỜI GIẢI

Gọi O giao điểm của AC và BD. P là trung điểm của SA.

Trong Δ EAD có MP là đường trung bình của tam giác nên có:

$MP \,//\, AD, \; MP = \frac{1}{2} AD$ (1)

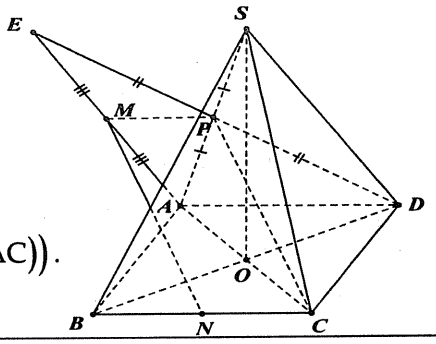
Vì N trung điểm của BC nên:

$NC \,//\, AD, NC = \frac{1}{2}AD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: tứ giác CPMN là hình bình hành nên MN // PC

Ta có: $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp CP (CP \subset (SAC))$.

Kết luận: $BD \perp MN$



Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và biết rằng $A'H \perp (ABC)$. Chứng minh rằng:

a) $AA' \perp BC$ và $AA' \perp B'C'$.

b) Gọi MM' là giao tuyến của hai mp(AHA') và (BCC'B') trong đó $M \in BC$ và $M' \in B'C'$. Chứng minh tứ giác BCC'B' là hình chữ nhật và MM' là đường cao của hình chữ nhật đó.

LỜI GIẢI

a) Chứng minh $BC \perp (A'AH)$.

$$\begin{cases} BC \perp AH (gt) \\ BC \perp A'H (\text{vì } A'H \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(A'AH) \Rightarrow BC \perp AA'.$$

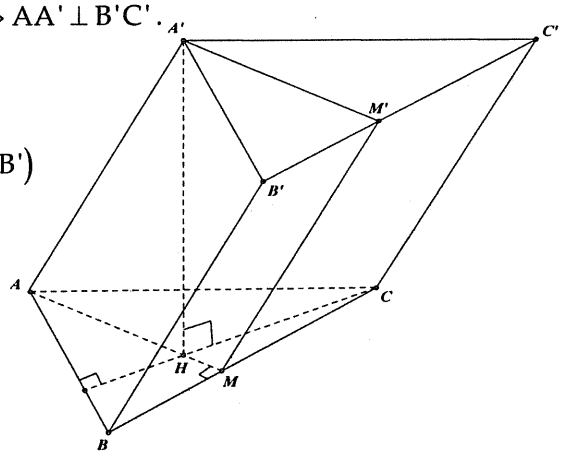
Vì $B'C' \,//\, BC$ mà $BC \perp AA' \Rightarrow AA' \perp B'C'$.

b. $\begin{cases} (AHA') \cap (BCC'B') = MM' \\ AA' \,//\, BB' \\ AA' \subset (AHA'), BB' \subset (BCC'B') \end{cases}$

$\Rightarrow MM' \,//\, AA' \,//\, BB'$

Mà: $AA' \perp BC \Rightarrow BB' \perp BC$.

Vậy BCC'B' là hình chữ nhật.



Cho hai hình chữ nhật ABCD, ABEF nằm trên hai mặt phẳng khác nhau sao cho $AC \perp BF$. Gọi CH và FK là hai đường cao của tam giác BCE và ADF. Chứng minh:

a) ACH và BFK là các tam giác vuông.

b) $BF \perp AH$ và $AC \perp BK$.

LỜI GIẢI

a) Ta có ABCD, ABEF là hình chữ nhật nên:

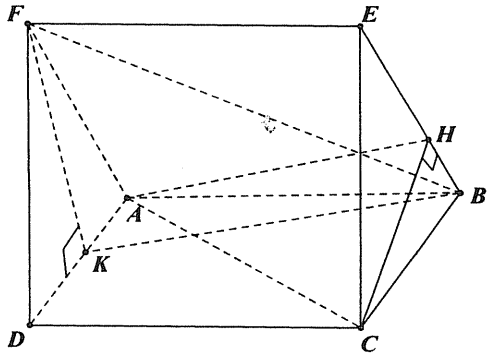
$\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BE \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCE)$

$\Rightarrow AB \perp CH$ (1)

$\begin{cases} CH \perp BE(gt) \\ CH \perp AB(\text{do } (1)) \end{cases} \Rightarrow CH \perp (ABEF)$

$\Rightarrow CH \perp AH$.

Vậy ΔACH vuông tại H.



Chứng minh tương tự $FK \perp (ABCD) \Rightarrow FK \perp BK$. Vậy ΔBFK vuông tại K.

b) Chứng minh: $BF \perp AH$ và $AC \perp BK$.

Có: $\begin{cases} BF \perp AC(gt) \\ BF \perp CH(\text{vì } CH \perp (ABEF)) \end{cases} \Rightarrow BF \perp (ACH) \Rightarrow BF \perp AH(AH \subset (ACH))$.

Có: $\begin{cases} AC \perp FB(gt) \\ AC \perp FK(\text{vì } FK \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BKF) \Rightarrow AC \perp BK$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SAB là tam giác đều, SCD là tam giác vuông cân đỉnh S. Gọi I, J là trung điểm của AB và CD.

a) Tính các cạnh của tam giác SIJ và chứng minh SI $\perp$ (SCD), SJ $\perp$ (SAB).

b) Gọi SH là đường cao của tam giác SIJ. Chứng minh $SH \perp (ABCD)$ và tính độ dài SH.

LỜI GIẢI

a) ΔSAB đều có $SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

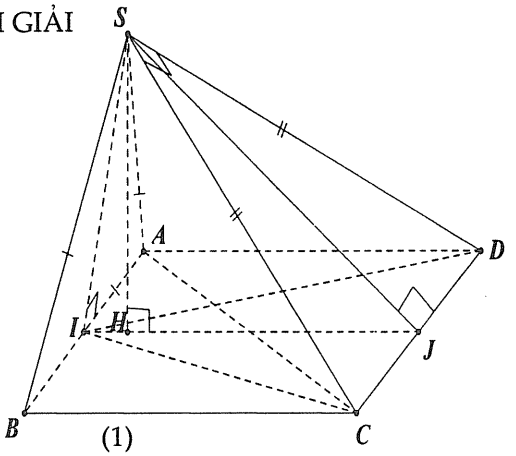
ΔSCD vuông cân tại S.

Suy ra $SI = CI = DI = \dfrac{a}{2}$;

$SC = SD = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ và $IJ = AD = BC = a$.

Xét ΔSIJ: $IJ^2 = SI^2 + SJ^2 = a^2$

$\Rightarrow \Delta SIJ$ vuông tại S, suy ra $SI \perp SJ$ (1)



Trong tam giác IBC vuông tại B có: $IC^2 = BI^2 + BC^2 = \frac{5a^2}{4}$.

Xét ΔSIC: $IC^2 = SI^2 + SC^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow \Delta SIC$ vuông tại S, suy ra $SI \perp SC$ (2)

Từ (1) và (2) có: $\begin{cases} SI \perp SJ,\ SI \perp SC \\ SJ, SC \subset mp(SCD) \end{cases} \Rightarrow SI \perp mp(SCD)$

Chứng minh tương tự $\begin{cases} SJ \perp SI,\ SJ \perp SB \\ SI, SB \subset mp(SAB) \end{cases} \Rightarrow SJ \perp mp(SAB)$

b) Đầu tiên ta chứng minh $CD \perp (SIJ)$.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp IJ \\ CD \perp SI (\text{vì } SI \perp (SCD)) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SIJ)$

$\Rightarrow CD \perp SH (\text{do } SH \subset (SIJ))$ (1)

Ta lại có: $\begin{cases} SH \perp IJ(gt),\ SH \perp CD(\text{do}(1)) \\ IJ, CD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp mp(ABCD)$.

Tính SH: Xét ΔSIJ vuông tại S có:

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{SJ^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Cho hình chóp S.ABC có SA $\perp$ đáy và SA = 2a, tam giác ABC vuông tại C với AB = 2a, $\widehat{BAC} = 30^0$. Gọi M là một điểm di động trên cạnh AC, H là hình chiếu của S trên BM.

a) Chứng minh AH $\perp$ BM.

b) Đặt AM = x, với $0 \le x \le a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ S tới BM theo a và x. Tìm x để khoảng cách này là lớn nhất, nhỏ nhất.

LỜI GIẢI

a) $\begin{cases} BM \perp SH \\ BM \perp SA (\text{vì } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BM \perp mp(SAM) \Rightarrow BM \perp AH$

b) Khoảng cách từ S tới BM chính là SH.

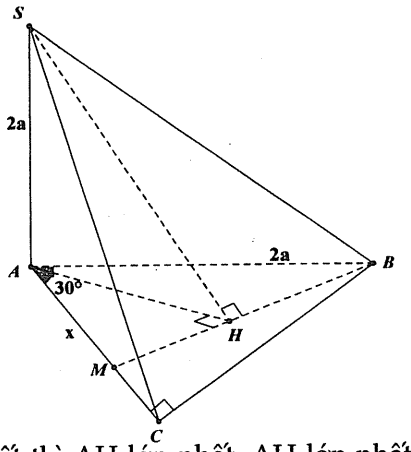
Trong tam giác ABC: $AC = AB.\cos 30^0 = a\sqrt{3}, BC = AB.\sin 30^0 = a$.

Xét ΔBCM: $BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = \sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{3} - x\right)^2}$.

Xét ΔABM:

$$S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}AH.BM = \frac{1}{2}AM.AB.\sin 30^0$$

$$\Rightarrow AH = \frac{a.x}{\sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{3} - x\right)^2}}.$$



Xét ΔSAH:

$$SH^2 = SA^2 + AH^2 = 4a^2 + \frac{a^2.x^2}{a^2 + \left(a\sqrt{3} - x\right)^2}$$

Vì độ dài SA không đổi nên để SH lớn nhất thì AH lớn nhất. AH lớn nhất khi M trùng với C khi đó AH là AC và SH chính là SC.

Để SH nhỏ nhất thì AH nhỏ nhất. AH nhỏ nhất khi M trùng với A khi đó AH bằng 0 và SH chính là SA.

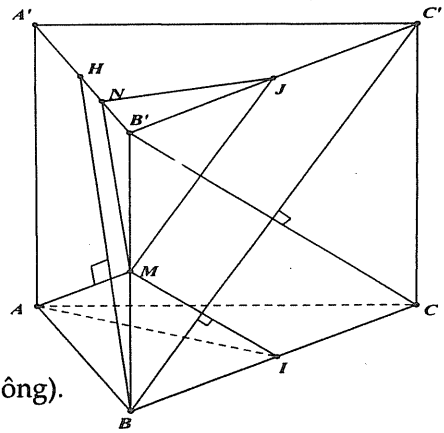
Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và CC' = a.

a). Gọi I trung điểm của BC. Chứng minh $AI \perp BC'$.

b). Gọi M trung điểm của BB'. Chứng minh $AM \perp BC'$.

c). Lấy điểm N thuộc A'B' sao cho $NB' = \frac{a}{4}$ và gọi J là trung điểm của B'C'. Chứng minh $AM \perp (MNJ)$.

LỜI GIẢI



Vì ABC.A'B'C' lăng trụ đứng và $AB = BC = CA = CC' = a$ nên các mặt bên là các hình vuông

a) Chứng minh $AI \perp BC'$.

$$\begin{cases} AI \perp BC \\ AI \perp CC' \end{cases} \Rightarrow AI \perp mp(BCC'B')$$

$\Rightarrow AI \perp BC'$

b) Chứng minh $AM \perp BC'$.

IM // CB', $CB' \perp BC'$ (tính chất hình vuông).

Suy ra $IM \perp BC'$.

Ta có $AI \perp BC'$ (câu a)) và $IM \perp BC'$.

Vậy $BC' \perp mp(AMI) \Rightarrow BC' \perp AM$ (đpcm).

c). Chứng minh $AM \perp (MNJ)$.

Gọi H trung điểm của A'B', suy ra N trung điểm của HB'.

Ta có MN // BH , $BH \perp AM$ (tính chất hình vuông).

Suy ra $MN \perp AM$ (1)

MJ // BC' , $AM \perp BC'$ (tính chất hình vuông). Suy ra $AM \perp MJ$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $AM \perp mp(MNJ)$

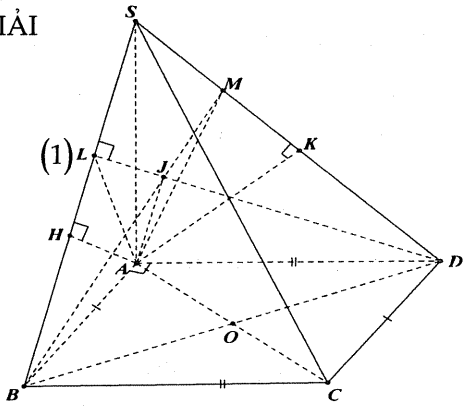
Nhận xét: *Bài này không có độ khó, chứng minh được nhờ số liệu bài cho đặc biệt cạnh bên bằng cạnh đáy, và các bạn phải nhớ 2 đường trung tuyến xuất phát từ hai đỉnh kề nhau của hình vuông thì vuông góc với nhau.*

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật tâm O, $SA \perp (ABCD)$.

a). Gọi H, K là hình chiếu của A trên SB, SD. Chứng minh $SC \perp (AHK)$.

b). Kẻ $AJ \perp (SBD)$. Chứng minh J là trực tâm của tam giác SBD.

LỜI GIẢI



a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \quad (1)$$

$$\begin{cases} AH \perp SB(gt) \\ AH \perp BC(do\ (1)) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$$

$\Rightarrow AH \perp SC$ (*)

Chứng minh $CD \perp (SAD)$:

$$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK \quad (2)$$

$$\begin{cases} AK \perp SD(gt) \\ AK \perp CD(do\ (2)) \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC \quad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra $SC \perp (AHK)$.

b) Gọi $L = DJ \cap SB(vì\ DJ, SB \subset (SBD))$. $M = BJ \cap SD(vì\ BJ, SD \subset (SBD))$.

Ta có $AD \perp mp(SAB) \Rightarrow AD \perp SB$ (3)

$\begin{cases} SB \perp AD\left(do\ (3)\right),\ SB \perp AJ\left(do\left(AJ \perp (SBD)\right)\right) \\ AD, AJ \subset (ADL) \end{cases}$

$\Rightarrow SB \perp (ADL) \Rightarrow SB \perp DL \qquad (I).$

Chứng minh tương tự thì $SD \perp BM \quad (II)$

Từ $(I), (II)$, xét trong tam giác SBD, J là giao điểm của hai đường cao.

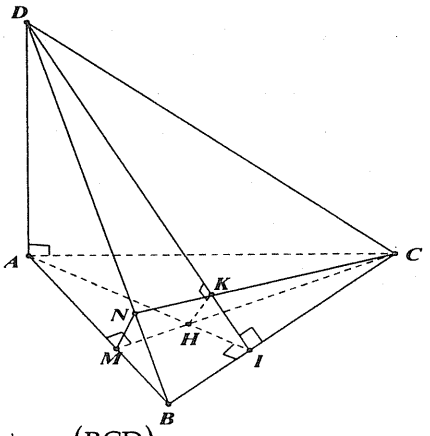
Suy ra: J là trực tâm của ΔSBD.

Cho tứ diện ABCD có DA $\perp$ (ABC). Gọi AI là đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC. Hạ HK vuông góc vớiDI tại K . Chứng minh:

a) HK $\perp$ BC.

b) K là trực tâm của tam giác DBC.

LỜI GIẢI



Trong tam giác ABC gọi $M = CH \cap AB$.

Trong tam giác BCD gọi $N = CK \cap BD$.

a) Ta có:

$\begin{cases} BC \perp AI,\ BC \perp DA \\ AI, DA \subset mp(DAI), DA \cap AI = A \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp mp(DAI) \Rightarrow \begin{cases} BC \perp HK \\ BC \perp DI \end{cases} \qquad (*)$

b) K là trực tâm của tam giác DBC.

$\begin{cases} HK \perp DI(gt),\ HK \perp BC \\ DI, BC \subset mp(BCD),\ DI \cap BC = I \end{cases} \Rightarrow HK \perp mp(BCD)$

$\begin{cases} CM \perp AB,\ CM \perp DA \\ AB, DA \subset (ABD), AB \cap DA = A \end{cases} \Rightarrow CM \perp mp\,(DAB) \Rightarrow CM \perp BD \qquad (1)$

$\begin{cases} BD \perp CM\left(do(1)\right) \\ BD \perp HK\left(do\, HK \perp (BCD)\right) \end{cases} \Rightarrow BD \perp mp(CMN) \Rightarrow BD \perp CN \qquad (**)$

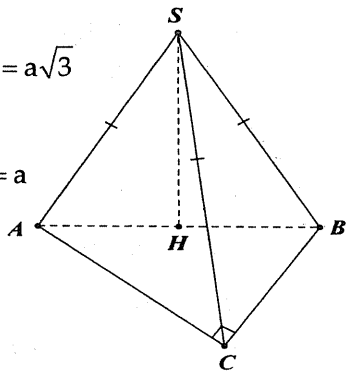
Từ $(*), (**) \Rightarrow$ K là trực tâm của tam giác BCD.

Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = a, $\widehat{ASB} = 120^0$, $\widehat{BSC} = 90^0$, $\widehat{CSA} = 60^0$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông.

b) Xác định hình chiếu H của S trên mp(ABC). Tính SH theo a.

LỜI GIẢI



a) $AB^2 = AS^2 + SB^2 - 2AS.BS.\cos\widehat{ASB} = 3a^2 \Rightarrow AB = a\sqrt{3}$

$BC^2 = SB^2 + SC^2 = 2a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$.

$AC^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA.SB.\cos\widehat{ASB} = a^2 \Rightarrow AC = a$

Ta có $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Vậy ABC là tam giác vuông tại C.

b) Vì $\left.\begin{array}{l} SH \perp mp(ABC) \\ SA = SB = SC \end{array}\right\} \Rightarrow HA = HB = HC$.

Vậy H là trung điểm của AB.

Vì tam giác ASH là nửa tam giác đều nên $SH = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a}{2}$

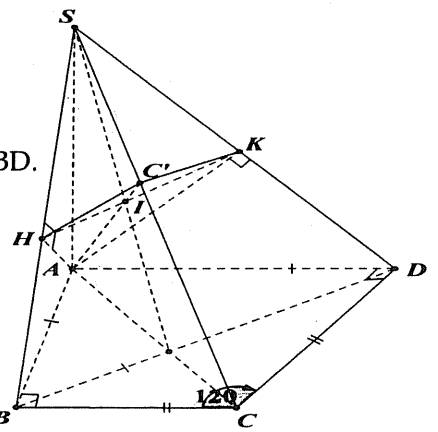
Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là tứ giác , có ABD là tam giác đều, BCD là tam giác cân tại C có $\widehat{BCD} = 120^0$. $SA \perp mp(ABCD)$.

a). Gọi H , K là hình chiếu vuông góc của A trên SB , SD.

Chứng minh $SC \perp (AHK)$.

b). Gọi C' là giao điểm của SC với mp(AHK). Tính diện tích tứ giác AHC'K khi $AB = SA = a$.

LỜI GIẢI



Vì $\begin{cases} AB = AD \\ CB = CD \end{cases}$

Suy ra AC là đường trung trực của đoạn BD.

Tam giác ABD đều, $\widehat{ABD} = \widehat{ADB} = 60^0$

Tam giác BCD cân tại C có $\widehat{BCD} = 120^0$

$\Rightarrow \widehat{CBD} = \widehat{CDB} = 30^0$.

Vậy $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^0$.

$\begin{cases} BC \perp AB,\ BC \perp SA\left(SA \perp (ABCD)\right) \\ AB, SA \subset mp(ABCD),\ AB \cap SA = A \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

a). $\begin{cases} DC \perp AD \\ DC \perp SA\left(SA \perp (ABCD)\right) \\ AD, SA \subset mp(SAD),\ AB \cap SA = A \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(SAD) \Rightarrow DC \perp AK$.

$\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp mp(SBC) \Rightarrow AH \perp SC$;

$\begin{cases} AK \perp SD \\ AK \perp CD \end{cases} \Rightarrow AK \perp mp(SCD) \Rightarrow AK \perp SC$

Vậy : $\begin{cases} SC \perp AH,\ SC \perp AK \\ AH, AK \subset mp(AHK),\ AH \cap AK = A \end{cases} \Rightarrow SC \perp mp(AHK)$

b) $BD \perp AC,\ BD \perp SA \Rightarrow BD \perp mp(SAC)$

Ta có: $\Delta SAB = \Delta SAD (c.g.c)$

$\Rightarrow AH = AK$ (đường cao xuất phát từ 2 góc tương ứng bằng nhau)

Nên $SH = SK$, mà $SB = SD$. Suy ra HK // BD (định lý đảo Talet).

Có $\begin{cases} BD \perp mp(SCA) \\ BD \text{ // } HK \end{cases} \Rightarrow HK \perp mp(SCA)$.

Vậy $HK \perp AC'$ (Vì $AC' \subset mp(SAC)$) (*)

Ta có $AB = SA \Rightarrow \Delta SAB$ vuông cân tại A nên H trung điểm của SB.

Xét ΔSBD có HK là đường trung bình nên $HK = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{2}$.

Xét ΔABC vuông tại B : $AC = \frac{AB}{\sin 60^0} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Vì $SC \perp (AHK) \Rightarrow SC \perp AC' \left(\text{vì } AC' \subset mp(AHK)\right)$

Xét ΔSAC vuông tại A: $\frac{1}{AC'^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4a^2} = \frac{7}{4a^2} \Rightarrow AC' = \frac{2a}{\sqrt{7}}$

Từ (*) thì tứ giác AHC'K có 2 đường chéo vuông góc nên:

$S_{AHC'K} = \frac{1}{2}HK.AC' = \frac{1}{2}\frac{a}{2}.\frac{2a}{\sqrt{7}} = \frac{a^2}{2\sqrt{7}}$

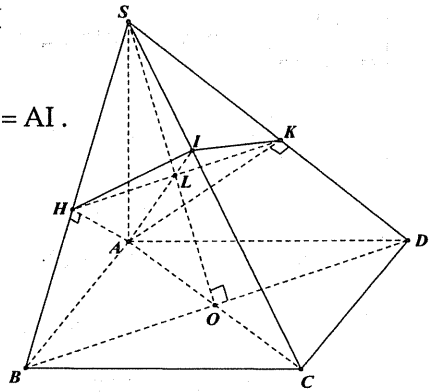
Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông tâm O, AB = SA = a, SA $\perp$ đáy. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC, (P) cắt SB , SC , SD tại H , I , K .

a). Chứng minh HK // BD.

b). Chứng minh AH $\perp$ SB , AK $\perp$ SD.

c). Chứng minh tứ giác AHIK có hai đường chéo vuông góc. Tính diện tích AHIK theo a.

LỜI GIẢI



a). Chứng minh HK // BD.

Ta có: $(SAC)\cap(ABD)=SO;(P)\cap(SAC)=AI$.

Gọi $L=AI\cap SO$.

Vì: $\begin{cases}BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp SC\\ mp(P)\perp SC\end{cases}$

$\Rightarrow BD\ //\ mp(P)$.

Có $\begin{cases}L\in(P)\cap(SBD)\\ BD\ //\ (P)\end{cases}\Rightarrow(P)\cap(SBD)=HK$, với HK đi qua L và $HK\ //\ BD$.

b). Chứng minh $AH\perp SB$, $AK\perp SD$.

Ta có: $\begin{cases}BC\perp AB\\ BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)$, $\begin{cases}CD\perp AD\\ CD\perp SA\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SAD)$.

Theo chứng minh trên có:

$$\begin{cases}AH\perp BC\left(BC\perp mp(SAB)\right)\\ AH\perp SC\left(SC\perp mp(P)\right)\end{cases}\Rightarrow AH\perp mp(SBC)\Rightarrow AH\perp SB$$

Tương tự ta chứng minh được $AK\perp mp(SCD)\Rightarrow AK\perp SD$

c) Chứng minh tứ giác AHIK có hai đường chéo vuông góc.

Do $BD\perp(SAC)$ và $BD\ //\ HK$ suy ra $HK\perp(SAC)\Rightarrow HK\perp AI\left(AI\subset(SAC)\right)$.

Tính diện tích AHIK theo a:

Trong ΔSAC có AI là đường cao:

$$AI.SC=SA.AC\Rightarrow AI=\frac{SA.AC}{\sqrt{SA^2+AC^2}}=\frac{a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Vì ΔSAB vuông cân tại A nên H là trung điểm BC.

Suy ra $HK=\frac{1}{2}BD=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Kết luận $S_{AHIK}=\frac{1}{2}AI.HK=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật có AB = a , BC = $a\sqrt{3}$, mặt bên SBC vuông tại B , SCD vuông tại D có SD = $a\sqrt{5}$.

a) Chứng minh SA $\perp$ (ABCD) và tính SA.

b) Đường thẳng qua A vuông góc với AC, cắt CB, CD tại I, J. Gọi H là hình chiếu của A trên SC, K và L là giao điểm của SB, SD với mp(HIJ). Chứng minh AK $\perp$ (SBC) và AL $\perp$ (SCD).

c) Tính diện tích tứ giác AKHL.

LỜI GIẢI

a). Chứng minh SA $\perp$ (ABCD) và tính SA.

BC $\perp$ AB (vì ABCD là hình chữ nhật) (1)

BC $\perp$ SB (vì ΔSBC vuông tại B) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $BC \perp mp(SAB)$ $(\text{vì } AB, SB \subset (SAB))$.

Vậy $mp(SAB) \perp mp(ABCD)$ $(\text{vì } BC \subset (ABCD))$ (*)

Chứng minh tương tự thì $CD \perp mp(SAD)$

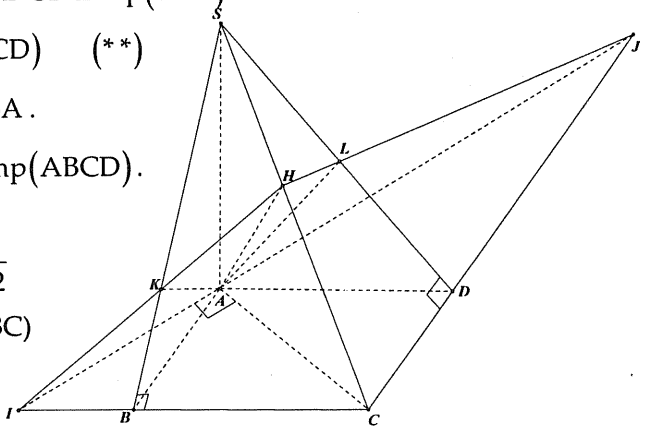
$\Rightarrow mp(SAD) \perp mp(ABCD)$ (**)

Ta có $(SAB) \cap (SAD) = SA$.

Từ (*) (**) suy ra $SA \perp mp(ABCD)$.

Xét ΔSAD vuông tại A:

$SA = \sqrt{SD^2 - AD^2} = a\sqrt{2}$



b). Chứng minh AK $\perp$ (SBC) và AL $\perp$ (SCD).

$(IJH) \cap (SBC) = IH$

Gọi $K = SB \cap IH \Rightarrow K = SB \cap mp(IJH)$.

$(IJH) \cap (SCD) = JH$, gọi $= SD \cap JH \Rightarrow L = SD \cap mp(IJH)$.

Chứng minh AK $\perp$ (SBC):

$$\begin{cases} IA \perp AC(gt) \\ IA \perp SA\,(SA \perp (ABCD), IA \subset (ABCD)) \end{cases}$$

$\Rightarrow IA \perp mp(SAC) \Rightarrow IA \perp SC$ (3)

$$\begin{cases} SC \perp AH(gt) \\ SC \perp IA(do(3)) \end{cases} \Rightarrow SC \perp mp(P); \begin{cases} SC \perp mp(P) \\ SC \subset mp(SBC) \end{cases} \Rightarrow mp(P) \perp mp(SBC)$$

$$\begin{cases} mp(P) \cap (SAB) = AK \\ mp(P) \quad \perp mp(SBC) \\ mp(SAB) \perp mp(SBC) \end{cases} \Rightarrow AK \perp mp(SBC)$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự $AL \perp mp(SCD)$.

c) Tính diện tích tứ giác AKHL.

Xét ΔSAB vuông tại A : $SB = \sqrt{AS^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$;

$AK.SB = AB.AS \Rightarrow AK = \dfrac{AB.AS}{SB} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Xét ΔSAD vuông tại A: $AL.SD = AD.AS \Rightarrow AL = \dfrac{AD.AS}{SD} = \dfrac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$.

Xét ΔSAC vuông tại A: $SC = \sqrt{AS^2 + AC^2} = a\sqrt{6}$;

$AH.SC = AC.AS \Rightarrow AH = \dfrac{AC.AS}{SC} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Vì $AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp KH$.

Xét ΔAKH vuông tại K: $KH = \sqrt{AH^2 - AK^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Vì $AL \perp (SCD) \Rightarrow AL \perp LH$.

Xét ΔALH vuông tại L: $LH = \sqrt{AH^2 - AL^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$

$$S_{AKHL} = S_{\Delta AKH} + S_{\Delta ALH} = \frac{1}{2}AK.HK + \frac{1}{2}AL.HL$$

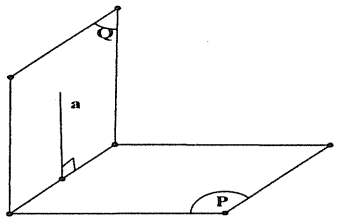
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}.\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\right) = \frac{8a^2}{15}.$$

HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

I. ĐỊNH NGHĨA

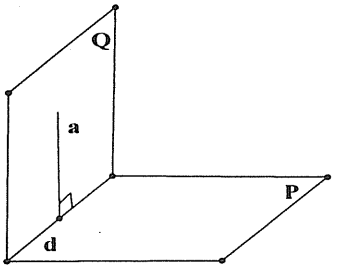
Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0.

II. CÁC ĐỊNH LÝ VÀ HỆ QUẢ



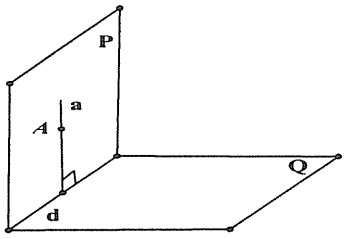
Định lý 1: Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} a \perp mp(P) \\ a \subset mp(Q) \end{cases} \Rightarrow mp(P) \perp mp(Q)$$



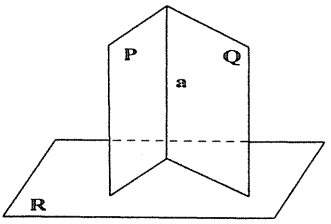
Hệ quả 1: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (Q), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (P).

$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \\ a \subset (Q),\ a \perp d \end{cases} \Rightarrow a \perp (P)$$



Hệ quả 2: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P).

$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P), A \in a \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P)$$



Định lý 2: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R)$$

HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG, HÌNH HỘP CHỮ NHẬT, HÌNH LẬP PHƯƠNG

ĐỊNH NGHĨA:

Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với các mặt đáy. Độ dài cạnh bên được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đứng.

+ Hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... được gọi là *hình lăng trụ đứng tam giác, hình lăng trụ đứng tứ giác, hình lăng trụ đứng ngũ giác,...*

+ Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều được gọi là hình lăng trụ đều. Ta có các loại lăng trụ đều như *hình lăng trụ tam giác đều , hình lăng trụ tứ giác đều , hình lăng trụ ngũ giác đều ...*

• Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là *hình hộp đứng.*

• Hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật được gọi là *hình hộp chữ nhật.*

• Hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông và các mặt bên đều là hình vuông được gọi là *hình lập phương.*

HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

HÌNH CHÓP ĐỀU

Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu nó có đáy là một đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.

Nhận xét:

+ Hình chóp đều có các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau. Các mặt bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

+ Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

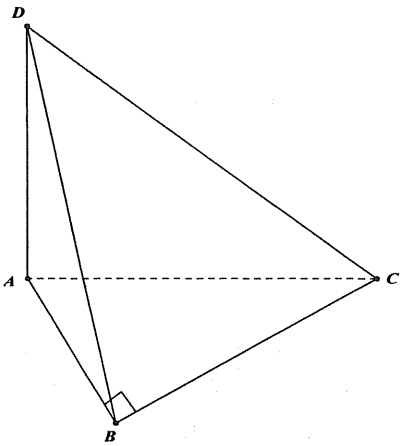
Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.

PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Cách 1: Ta chứng minh mặt phẳng này **chứa một đường thẳng vuông góc** với mặt phẳng kia.

Cách 2: Ta chứng minh góc giữa chúng là 90^0 .

Cho tứ diện ABCD có ABC là tam giác vuông tại B và AD ⊥ (ABC). Chứng minh: mp (ABD) vuông góc với mp (BCD).



LỜI GIẢI

$$\begin{cases} BC \perp AB \quad (\text{Vì } \Delta ABC \text{ vuông tại B}) \\ BC \perp DA \quad (\text{Vì } AD \perp mp\,(ABC)) \\ AB, DA \subset (ABD) \end{cases}$$

$\Rightarrow BC \perp mp(ABD)$

Mà $BC \subset (BCD) \Rightarrow (BCD) \perp (ABD)$

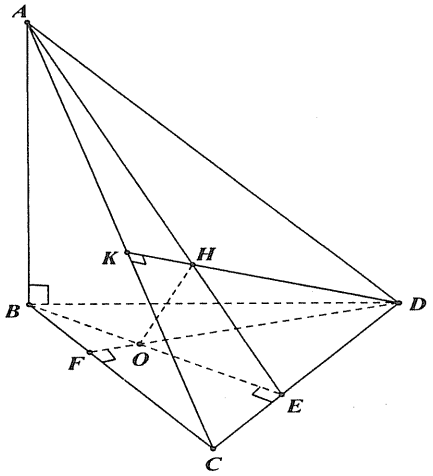
Cho tứ diện ABCD có AB ⊥ (BCD). Trong tam giác BCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau tại O. Trong mp(ACD) vẽ DK ⊥ AC. Gọi H là trực tâm của tam giác ACD.

a) Chứng minh (ACD) ⊥ (ABE) và (ACD) ⊥ (DFK).

b) Chứng minh OH ⊥ (ACD).

LỜI GIẢI

a) Chứng minh (ACD) ⊥ (ABE) và (ACD) ⊥ (DFK).



$$\begin{cases} CD \perp BE \quad (\text{Giả thiết}) \\ CD \perp AB \quad (\text{Vì } AB \perp mp\,(BCD)) \\ BE, AB \subset (ABE) \end{cases}$$

$\Rightarrow CD \perp (ABE)$.

Mà $CD \subset (ACD) \Rightarrow (ACD) \perp (ABE)$.

$$\begin{cases} DF \perp BC,\ DF \perp AB \\ BC, AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow DF \perp (ABC)$$

$\Rightarrow DF \perp AC\,(AC \subset (ABC))$ (1)

$$\begin{cases} AC \perp DF(\text{do}(1)),\ AC \perp DK(gt) \\ DF, DK \subset (DFK) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (DFK).$$

Mà $AC \subset (ACD) \Rightarrow (ACD) \perp (DFK)$.

b) Chứng minh OH ⊥ (ACD).

Ta có $CD \perp (ABE) \Rightarrow CD \perp OH\,(\text{vì } OH \subset (ABE))$ (*)

Ta có $AC \perp (DKF) \Rightarrow AC \perp OH (\text{vì } OH \subset (DKF))$ $(**)$

Từ $(*),(**)$: $\begin{cases} OH \perp CD,\ OH \perp AC \\ CD, AC \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ACD)$.

Cách khác Ta có : $\begin{cases} (ABE) \cap (DFK) = OH \\ (ABE) \perp (ACD) \\ (DEF) \perp (ACD) \end{cases}$. Suy ra $OH \perp (ACD)$.

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại C, SAC là tam giác đều và nằm trong mp vuông góc với (ABC). Gọi I là trung điểm của SC.

a) Chứng minh (SBC) ⊥ (SAC).

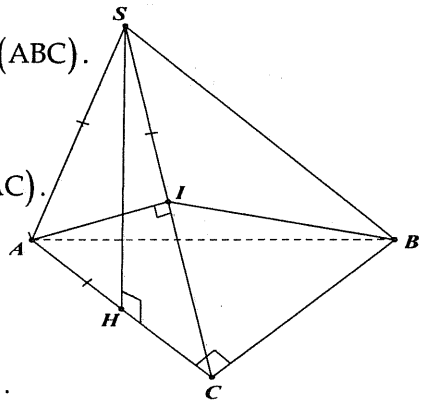
b) Chứng minh (ABI) ⊥ (SBC).

LỜI GIẢI

Gọi H trung điểm của AC .

Ta có ΔSAC đều nên $SH \perp AC$, $AI \perp SC$.

Có: $\begin{cases} (SAC) \cap (ABC) = AC \\ (SAC) \perp (ABC) \\ SH \perp AC,\ SH \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow SH \perp \text{mp}(ABC)$.



Có: $\begin{cases} BC \perp AC (gt),\ BC \perp SH \\ AC, SH \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC)$.

Mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$.

Có: $\begin{cases} AI \perp SC (gt) \\ AI \perp BC (BC \perp (SAC)) \Rightarrow AI \perp (SBC) \\ SC, BC \subset (SBC) \end{cases}$.

Mà $AI \subset (ABI) \Rightarrow (ABI) \perp (SBC)$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a và SA = SB = SC = a.

a). Chứng minh (SBD) ⊥ (ABCD).

b) Chứng minh tam giác SBD vuông.

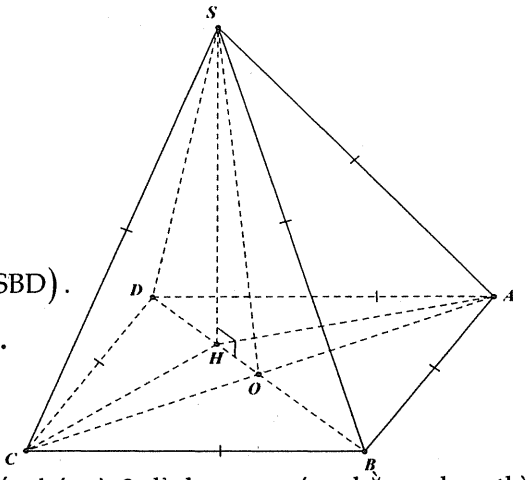
LỜI GIẢI

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD).

Vì $SA = SB = SC$, nên $HA = HB = HC$.

Suy ra: H nằm trên đường trung trực của đoạn AC, vậy $H \in BD$.

a). Chứng minh (SBD) ⊥ (ABCD).



$$\begin{cases} AC \perp BD \quad \text{(Vì ABCD là hình thoi)} \\ AC \perp SO \left(\Delta SAC \text{ cân tại S}\right) \\ BD, SO \subset mp(SBD) \end{cases}$$

$\Rightarrow AC \perp mp(SBD)$.

Mà $AC \subset (ABCD) \Rightarrow (ABCD) \perp (SBD)$.

b) Chứng minh tam giác SBD vuông.

Ta có ba tam giác:

$\Delta SAC = \Delta BAC = \Delta DAC (c.c.c)$.

Suy ra ba đường trung tuyến xuất phát từ 3 đỉnh tương ứng bằng nhau thì bằng nhau, nghĩa là $SO = BO = DO$.

Trong tam giác SBD có SO là đường trung tuyến và $SO = \frac{1}{2}BD$.

$\Rightarrow \Delta SBD$ vuông tại O.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, có cạnh bằng a và đường chéo BD = a, SC = $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ và vuông góc với (ABCD). Chứng minh (SAB) ⊥ (SAD).

LỜI GIẢI

Trong mặt phẳng (SAC), kẻ OH ⊥ SA tại H.

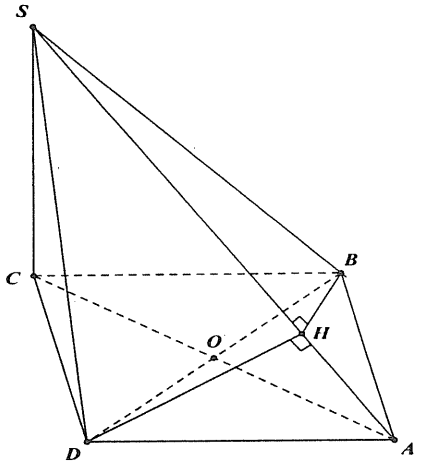
Ta có ΔABD đều nên:

$$AO = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}.$$

Trong ΔSAC có $SA = \sqrt{AC^2 + SC^2} = \frac{3a}{\sqrt{2}}$

Ta có: $\Delta AHO \sim \Delta ACS (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{HO}{CS} = \frac{AO}{AS} \Rightarrow HO = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{3a}{\sqrt{2}}} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a}{2}.$$



Trong tam giác HBD có HO là đường trung tuyến và $HO = \frac{1}{2}BD$.

$\Rightarrow \Delta HBD$ vuông tại H.

$\begin{cases} BD \perp AC (\text{vì } ABCD \text{ hình thoi}),\ BD \perp SC (SC \perp (ABCD)) \\ AC, SC \subset mp(SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SA$

Có: $\begin{cases} SA \perp BD,\ SA \perp OH \\ BD, OH \subset mp(BDH) \end{cases} \Rightarrow SA \perp mp(BDH) \Rightarrow \begin{cases} BH \perp SA \\ DH \perp SA \end{cases}$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là góc BHD.

Theo chứng minh trên $\widehat{BHD} = 90^0 \Rightarrow mp(SAD) \perp mp(SAB)$.

Cho tam giác đều ABC. Trên đường thẳng d vuông góc với mp(ABC) tại A lấy điểm S. Gọi D là trung điểm của BC.

a) Chứng minh (SAD) ⊥ (SBC).

b) Kẻ CI ⊥ AB, CK ⊥ SB. Chứng minh SB ⊥ (ICK).

c) Kẻ BM ⊥ AC, MN ⊥ SC. Chứng minh SC ⊥ BN.

d) Chứng minh (CIK) ⊥ (SBC) và (BMN) ⊥ (SBC).

e) MB cắt CI tại G, CK cắt BN tại H. Chứng minh GH ⊥ (SBC).

LỜI GIẢI

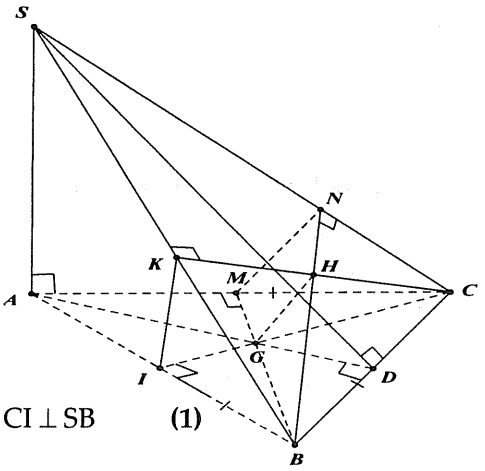
a) Chứng minh (SAD) ⊥ (SBC).

Vì ΔABC đều nên AD ⊥ BC

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AD,\ BC \perp SA \\ AD, SA \subset (SAD) \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAD)$.

Mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SAD) \perp (SBC)$.



b). Chứng minh SB ⊥ (ICK).

$\begin{cases} CI \perp AB\ ,\ CI \perp SA \\ AB, SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SAB) \Rightarrow CI \perp SB$ (1)

Có: $\begin{cases} SB \perp CK (gt),\ SB \perp CI (do (1)) \\ CK, CI \subset (CIK) \end{cases} \Rightarrow SB \perp (CIK)$

c). Chứng minh SC ⊥ BN.

Có: $\begin{cases} BM \perp AC\ ,\ BM \perp SA \\ AC, SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow BM \perp SC$ (2)

Có: $\begin{cases} SC \perp MN(gt) \ , \ SC \perp BM(do(2)) \\ MN, BM \subset (BMN) \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BMN) \Rightarrow SC \perp BN.$

d). Theo câu b) $SB \perp (CIK)$, mà $SB \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (CIK)$.

Theo câu c) $SC \perp (BMN)$, mà $SC \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (BMN)$.

e) Ta có : $\begin{cases} (CIK) \cap (BMN) = HG \\ (CIK) \perp (SBC) \\ (BMN) \perp (SBC) \end{cases} \Rightarrow HG \perp (SBC).$

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy ABCD.

a) Chứng minh (SAC) ⊥ (SBD).

b) Từ O kẻ OK ⊥ BC. Chứng minh BC ⊥ (SOK).

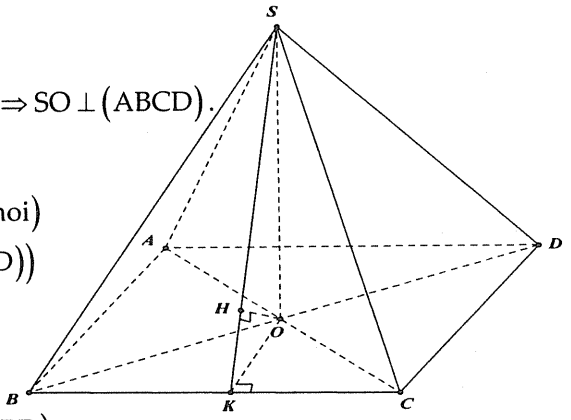
c) Chứng minh (SBC) ⊥ (SOK).

d) Kẻ OH ⊥ SK. Chứng minh OH ⊥ (SBC).

LỜI GIẢI

a). Chứng minh (SAC) ⊥ (SBD).

Ta có : $\begin{cases} (SAC) \cap (SBD) = SO \\ (SAC) \perp (ABCD) \\ (SBD) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD).$



Có: $\begin{cases} AC \perp BD(ABCD \text{ hình thoi}) \\ AC \perp SO(\text{vì } SO \perp (ABCD)) \\ BD, SO \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow AC \perp (SBD)$

Mà $AC \subset (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$.

b). Chứng minh BC ⊥ (SOK).

$\begin{cases} BC \perp OK(gt) \ , \ BC \perp SO(SO \perp (ABCD)) \\ OK, SO \subset (SOK) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOK).$

c). Chứng minh (SBC) ⊥ (SOK).

vì $\begin{cases} BC \perp (SOK) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SBC) \perp (SOK).$

d) Chứng minh $OH \perp (SBC)$.

$$\begin{cases} OH \perp SK (gt) \ , \ OH \perp BC \left(BC \perp (SOK)\right) \\ SK, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SBC)$$

Cho hình vuông ABCD. Gọi S là điểm trong không gian sao cho SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABCD). Gọi H và I lần lượt là trung điểm của AB và BC.

a) Chứng minh (SAB) ⊥ (SAD) và (SAB) ⊥ (SBC).

b) Chứng minh (SHC) ⊥ (SDI).

LỜI GIẢI

Vì tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$.

Có: $\begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ (SAB) \perp (ABCD) \\ SH \subset (SAB) \ , \ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

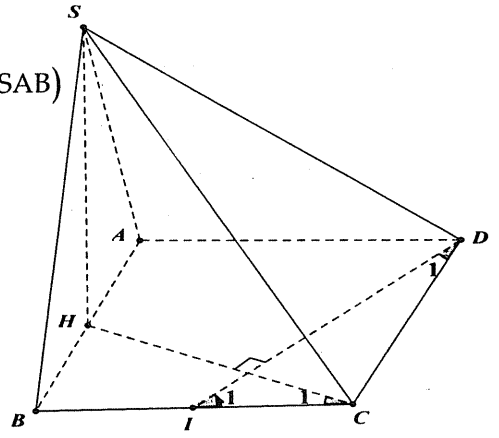
a). Chứng minh (SAB) ⊥ (SAD) và (SAB) ⊥ (SBC).

$$\begin{cases} AD \perp AB (gt) \\ AD \perp SH \left(SH \perp (ABCD)\right) \Rightarrow AD \perp (SAB) \\ AB, SH \subset (SAB) \end{cases}$$

Mà $AD \subset (SAD) \Rightarrow (SAD) \perp (SAB)$

Chứng minh hoàn toàn tương tự:

ta chứng minh được $(SBC) \perp (SAB)$.



b). Chứng minh (SHC) ⊥ (SDI).

Có: $\Delta BCH = \Delta CDI (c.g.c) \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{D_1}$.

Mà $\widehat{D_1} + \widehat{I_1} = 90^0 \Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{I_1} = 90^0$. Vậy $HC \perp DI$.

Có: $\begin{cases} DI \perp CH \\ DI \perp SH \left(SH \perp (ABCD)\right) \\ CH, SH \subset (SHC) \end{cases} \Rightarrow DI \perp (SHC)$.

Mà $DI \subset (SDI) \Rightarrow (SDI) \perp (SHC)$.

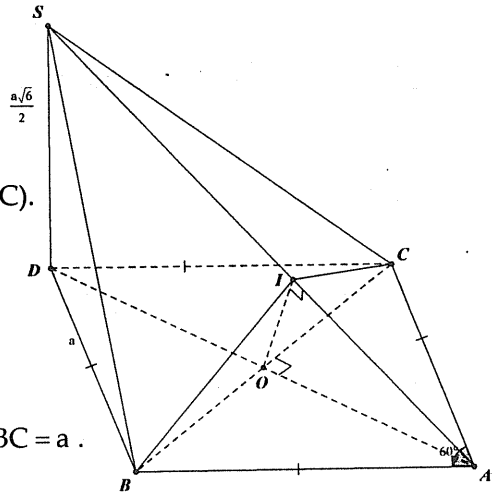
Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại D lấy điểm S sao cho SD = $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Chứng minh:

a). (SBC) ⊥ (SAD).

b) (SAB) ⊥ (SAC).

LỜI GIẢI



a) Chứng minh:(SBC) ⊥ (SAD).

$\begin{cases} BC \perp AD \quad \text{(Tính chất hình thoi)} \\ BC \perp SD\left(SD \perp (ABCD)\right) \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp mp(SAD)$. Mà $BC \subset mp\ (SBC)$.

Suy ra $(SAD) \perp (SBC)$.

b). (SAB) ⊥ (SAC).

Vì tam giác ABC đều nên:

$AB = BC = AC = a$.

Và có tam giác DBC đều $BD = DC = BC = a$.

Gọi $O = AC \cap BD$.

AO là đường cao của tam giác đều ABC nên: $AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AD = a\sqrt{3}$.

Tam giác SDA vuông tại S: $SA = \sqrt{SD^2 + AD^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}a}{2}$.

Hạ $OI \perp SA$ tại I. Tam giác $\Delta AIO \sim \Delta ADS(g-g)$.

Nên $\frac{OI}{DS} = \frac{AO}{AS} \Rightarrow OI = \frac{AO}{AS}.DS = \frac{a}{2}$

Trong tam giác BIC có IO là đường trung tuyến và $IO = \frac{1}{2}BC$.

Suy ra tam giác BIC vuông tại I, nghĩa là góc $\widehat{BIC} = 90^0$.

Vậy $(SAB) \perp (SAC)$.

Ta có: $\begin{cases} SA \perp BC \quad \text{(Vì BC ⊥ mp (SAD))} \\ SA \perp OI \quad \text{(Do cách dựng)} \\ BC, OI \subset mp(BCI) \end{cases} \Rightarrow SA \perp mp(BCI) \Rightarrow \begin{cases} BI \perp SA \\ CI \perp SA \end{cases} \quad (1)$

Từ (1) suy ra : $\left[\widehat{(SAB),(SAC)}\right]=\left[\widehat{BI,CI}\right]=\widehat{BIC}=90^0$ (Chứng minh trên)

$\Rightarrow mp(SAB)\perp mp(SAC)$.

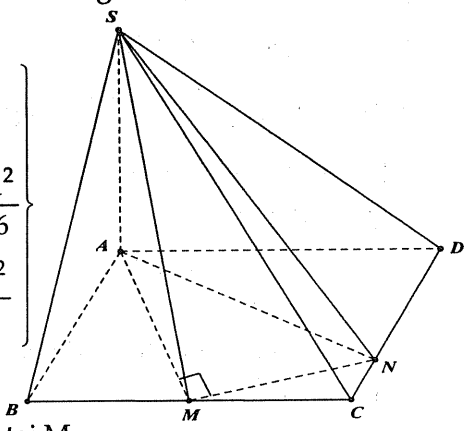
Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy. Gọi M, N là các điểm thuộc BC và CD sao cho BM = $\frac{a}{2}$, DN = $\frac{3a}{4}$. Chứng minh (SAM) ⊥ (SMN).

LỜI GIẢI

Áp dụng định lý Pitago cho các tam giác vuông ABM, CMN, ADN .

Ta có:

$$\left.\begin{aligned} AM^2 &= AB^2+BM^2=a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{5a^2}{4}\\ MN^2 &= CM^2+CN^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{4}\right)^2=\frac{5a^2}{16}\\ AN^2 &= AD^2+DN^2=a^2+\left(\frac{3a}{4}\right)^2=\frac{25a^2}{16}\end{aligned}\right\}$$



$\Rightarrow AM^2+MN^2=AN^2$

Theo định lý Pitago thì: ΔAMN vuông tại M.

Suy ra: MN ⊥ AM.

$$\begin{cases} MN\perp AM\\ MN\perp SA\end{cases}\Rightarrow MN\perp mp(SAM).$$

Mà $MN\subset mp(SMN)\Rightarrow (SAM)\perp(SMN)$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O, cạnh a, SB = SD = a, BD = $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy.

a) Chứng minh tam giác SAC vuông tại S.

b) Chứng minh (SBC) ⊥ (SCD).

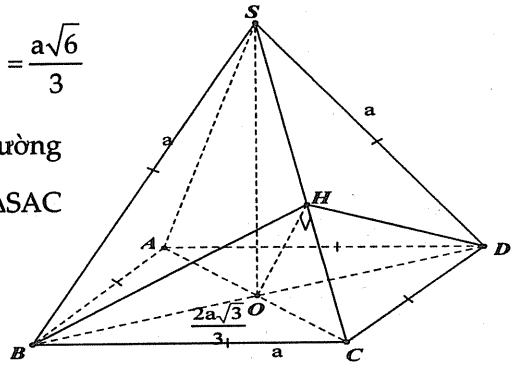
LỜI GIẢI

a). Chứng minh tam giác SAC vuông tại S.

Ta có: $SO=\sqrt{SB^2-BO^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$;

$$AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Trong tam giác SAC có SO là đường trung tuyến và $SO = \frac{1}{2}AC$, nên ΔSAC vuông tại S.



b). Chứng minh $(SBC) \perp (SCD)$.

Kẻ OH vuông góc với SC tại H.

Theo câu a) trong ΔSOC vuông tại O, ta có: $OA = OC = OS$.

Suy ra H trung điểm của SC.

Và $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow OH = \frac{OS.OC}{\sqrt{OS^2 + OC^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Xét ΔBDH có HO là đường trung tuyến và $HO = \frac{1}{2}BD$.

Nên BHD vuông tại H (1)

ΔBCS cân tại B, suy ra $BH \perp SC$ (2)

Tương tự $DH \perp SC$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\left[\widehat{(SBC),(SCD)}\right] = \widehat{BHD} = 90^0 \Rightarrow (SBC) \perp (SCD)$.

Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với đáy là hình vuông ABCD. Gọi O là tâm của đáy , vẽ CI vuông góc với SO tại I , vẽ DH vuông góc với SB tại H. Chứng minh rằng :

a). Mặt phẳng (SAB) vuông với mặt phẳng (ADH).

b). CI vuông góc với mặt phẳng (SBD).

c). Hai mặt phẳng (ABE) và (SAD) vuông góc nhau , với E là giao điểm của SO và DH.

LỜI GIẢI

a) Có: $\begin{cases} AD \perp SA \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB$.

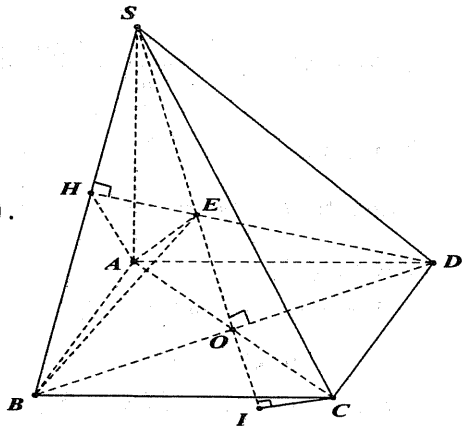
Có: $\begin{cases} SB \perp DH \\ SB \perp AD \end{cases} \Rightarrow SB \perp (ADH)$.

Mà $SB \subset (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (ADH)$.

b). Có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow BD \perp CI (CI \subset (SAC))$.

Có: $\begin{cases} CI \perp SO, CI \perp BD \\ SO, BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SBD)$.



c). Ta có $\begin{cases} SD \perp BE \\ SD \perp AB (AB \perp (SAD)) \end{cases}$

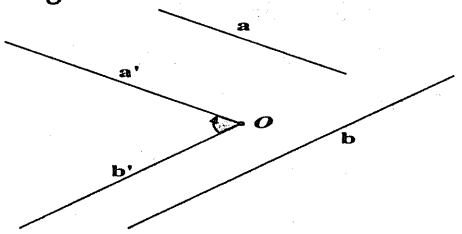
$\Rightarrow SD \perp (ABE)$.

Mà $SD \subset (SAD) \Rightarrow (SAD) \perp (ABE)$.

GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cách xác định góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b:

Chọn điểm O thích hợp, rồi kẻ hai đường thẳng đi qua điểm O: a'// a và b'// b.



Các phương pháp tính góc:

+ Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác.

Định lí sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

Định lí cos: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

Trong đó: a, b, c là 3 cạnh; A, B, C là 3 góc của ΔABC.

+ Tính góc theo vectơ chỉ phương: $\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$

Chú ý: $0^0 \le \varphi \le 90^0$

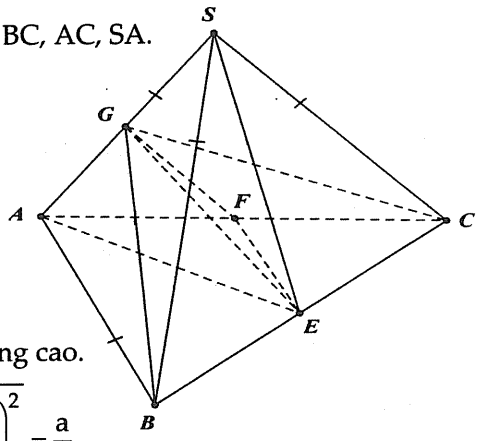
+ $AB \perp CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$.

+ Nếu a và b song song hoặc trùng nhau thì $\varphi = 0^0$.

Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = AB = AC = a, BC = $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB.

LỜI GIẢI

Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của BC, AC, SA.



Ta có: EF // AB, FG // SC

$\Rightarrow \left[\widehat{SC,AB}\right] = \left[\widehat{EF,FG}\right] = \widehat{EFG}$.

Ta có $FE = FG = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$

$\Delta BAG = \Delta CAG(c.g.c) \Rightarrow GB = GC$.

Tam giác GBC cân tại G có GE là đường cao.

$GE = \sqrt{BG^2 - BE^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}$

Tam giác EFG đều vì có 3 cạnh bằng nhau.Vậy $\widehat{EFG} = 60^0$.

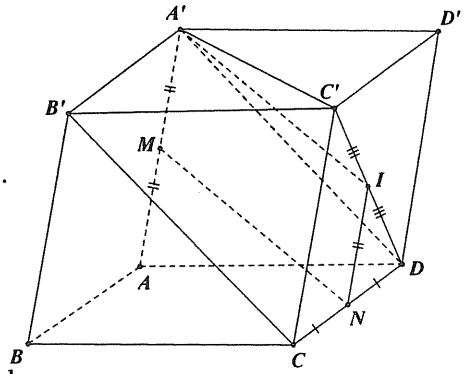
Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có độ dài tất cả các cạnh đều bằng a > 0 và $\widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = \widehat{A'AB} = 60^0$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AA', CD. Chứng minh MN // mp(A'C'D) và tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng NM và B'C.

LỜI GIẢI

Gọi I là trung điểm của DC'.

Trong tam giác CDC' có NI là đường trung bình của tam giác , nên :

$$\begin{cases} NI \,//\, CC' \\ NI = \frac{1}{2}CC' \end{cases}$$



Mà: $\begin{cases} CC' \,//\, AA' \\ CC' = AA' \end{cases}$ (Tính chất hình hộp).

$$\Rightarrow \begin{cases} NI \,//\, AA' \\ NI = \frac{1}{2}AA' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} NI \,//\, MA' \\ NI = MA' \end{cases}$$

Vậy tứ giác MNIA' là hình bình hành nên MN // IA'.

Mà $IA' \subset (A'C'D') \Rightarrow MN \,//\, mp(A'C'D)$.

Vì $\begin{cases} MN \,//\, IA' \\ CB' \,//\, DA' \end{cases} \Rightarrow \left[\widehat{CB', MN}\right] = \left[\widehat{DA', IA'}\right] = \widehat{DA'I}$ hoặc $180^0 - \widehat{DA'I}$

Ta có tam giác DAA' đều nên DA' = a.

Xét ΔABC có: $\widehat{ABC} = 120^0$;

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos 120^0 = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$.

Tương tự, áp dụng định lý cosin cho ΔA'AB': $AB' = a\sqrt{3}$.

Ta có $AC = A'C' = a$, $AB' = DC' = a\sqrt{3}$.

Trong ΔDA'C' có A'I là đường trung tuyến:

$$IA'^2 = \frac{DA'^2 + A'C'^2}{2} - \frac{DC'^2}{4} = \frac{a^2 + 3a^2}{2} - \frac{3a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow IA' = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Trong ΔA'DI ta cã : $\cos\widehat{DA'I} = \frac{DA'^2 + IA'^2 - DI^2}{2.DA'.IA'} = \frac{3}{2\sqrt{5}} > 0$.

Kết luận: $\cos\left[\widehat{MN, CB'}\right] = \left|\cos\widehat{DA'I}\right| = \frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có $AB = 1, CC' = m\,(m > 0)$. Tìm m biết rằng góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng 60^0.

LỜI GIẢI

Trong mặt phẳng (ABB'A'), kẻ BD // AB' (D ∈ A'B)

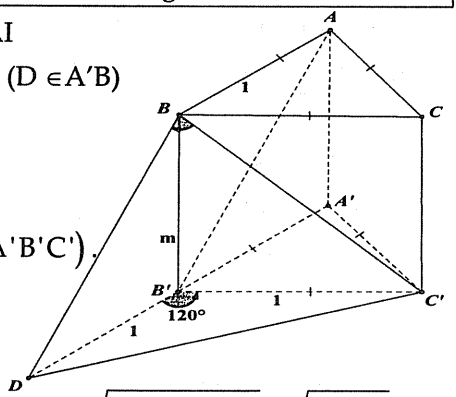
$\Rightarrow \left[\widehat{AB', BC'}\right] = \left[\widehat{BD, BC'}\right] = 60^0$.

Vậy: $\widehat{BDC'} = 60^0$ hoÆc $\widehat{DBC'} = 120^0$.

Vì ABC.A'B'C' lăng trụ đều nên $BB' \perp (A'B'C')$.

Áp dụng Pytago cho ΔBB'D vuông tại B:

$BD = \sqrt{DB'^2 + BB'^2} = \sqrt{1 + m^2}$.



Áp dụng Pytago cho ΔBB'C' vuông tại B': $BC' = \sqrt{C'B'^2 + BB'^2} = \sqrt{1 + m^2}$.

Áp dụng định lý cosin ΔDB'C':

$DC'^2 = DB'^2 + C'B'^2 - 2DB'.C'B'.\cos 120^0 = 3 \Rightarrow DC' = \sqrt{3}$.

Trường hợp 1: Nếu $\widehat{BDC'} = 60^0$ thì tam giác BDC' đều nên:

$BD = DC' \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 1} = \sqrt{3} \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$.

Trường hợp 2: Nếu $\widehat{BDC'} = 120^0$ áp dụng định lý cosin cho ΔBDC'

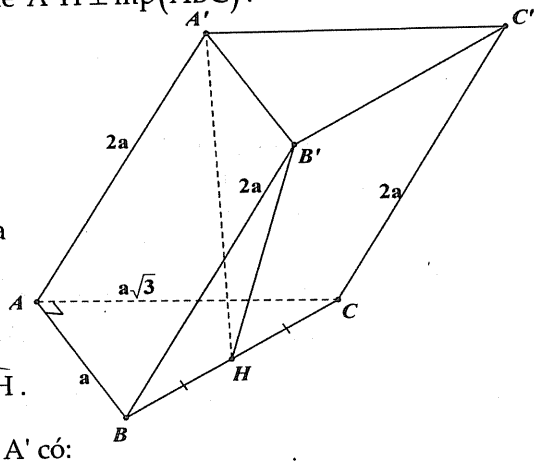
Suy ra: m = 0 (loại).

Tuyển sinh đại học khối A năm 2008

Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, AC = $a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA', B'C'.

LỜI GIẢI

Gọi H trung điểm của BC, theo đề $A'H \perp mp(ABC)$.



Mà $mp(ABC) // mp(A'B'C')$

$\Rightarrow A'H \perp mp(A'B'C')$

Tam giác ABC vuông tại A:

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a \Rightarrow BH = a$

Ta có: $\begin{cases} AA' // BB' \\ B'C' // BC \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\widehat{AA', B'C'}\right) = \left(\widehat{BB', BC}\right) = \widehat{B'BH}$.

Trong tam giác A'B'H vuông tại A' có:

$HB' = \sqrt{A'B^2 + A'H^2} = 2a$.

Áp dụng định lý hàm cosin cho tam giác B'BH có :

$$\cos\widehat{B'BH} = \frac{BB'^2 + BH^2 - B'H^2}{2.BB'.BH} = \frac{4a^2 + a^2 - 4a^2}{2.2a.a} = \frac{1}{4} > 0 \text{ (thỏa)}.$$

Tuyển sinh đại học khối B năm 2008

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA = a, SB = $a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

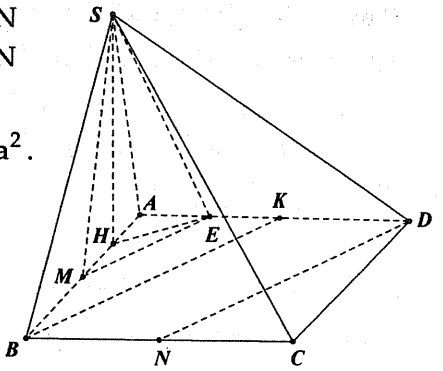
LỜI GIẢI

Hạ $SH \perp AB$ tại H.

Vì mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng (ABCD) có AB là giao tuyến.

Suy ra: $SH \perp mp(ABCD)$.

Trong mặt phẳng (ABCD), từ M kẻ ME // DN với E thuộc AD. Vậy góc giữa SM và DN chính là góc giữa SM và ME .



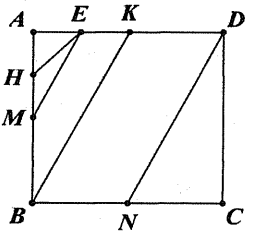
Xét tam giác SAB có: $AB^2 = SA^2 + SB^2 = 4a^2$.

Vậy ΔSAB vuông tại S.

Và: $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2}$

$\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác SHA vuông tại H:



$HA = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}$.

Gọi K trung điểm của AD ta có ME // BK // DN.

Vậy ME là đường trung bình tam giác ABK.

Vậy $AE = \frac{1}{2}AK = \frac{a}{2}$; $ME = \frac{1}{2}BK = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AK^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Tam giác HAE vuông tại A: $HE = \sqrt{AH^2 + AE^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SHE vuông tại H: $SE = \sqrt{SH^2 + EE^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Áp dụng định lý hàm cosin cho tam giác SME có:

$$\cos\widehat{SME} = \frac{SM^2 + ME^2 - SE^2}{2.SM.ME} = \frac{a^2 + \frac{5a^2}{4} - \frac{5a^2}{4}}{2.a.\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} > 0$$

Cho khối chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SB, AC.

LỜI GIẢI

Qua B kẻ đường thẳng Bx song song với AC.

Bx cắt AD tại F.

Góc giữa AC và SB, chính là góc giữa Bx và AC.

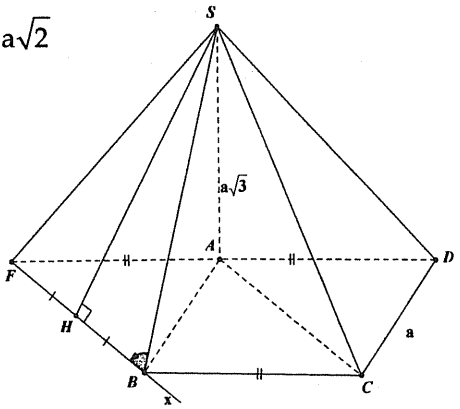
Ta có AFBC là hình bình hành, nên AF = BC và AC = FB.

Suy ra SF = SB, tam giác SBF cân tại S.

Có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a$. $FB = AC = a\sqrt{2}$

Hạ $SH \perp FB$, thì H trung điểm FB.

$$\cos\widehat{SBF} = \frac{HB}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$



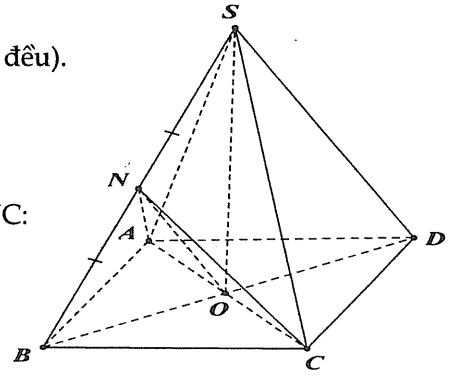
Cho hình chóp S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a, đáy là hình vuông. Gọi N là trung điểm SB. Tính góc giữa AN và CN, AN và SD.

LỜI GIẢI

Theo đề bài: $SA = SB = SC = SD = AB = BC = CD = DA = a$.

Gọi $O = AC \cap BD$, có $AN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (ΔSAB đều).

$CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (ΔSBC đều).



Áp dụng định lý cosin cho tam giác ANC:

$$\cos\widehat{ANC} = \frac{AN^2 + CN^2 - AC^2}{2.AN.CN} = \frac{-1}{3} < 0$$

$$\Rightarrow \widehat{ANC} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$$

Trong tam giác BDS có ON là đường trung bình của tam giác.

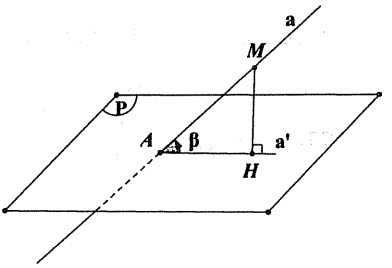
$$\Rightarrow \left[\widehat{AN,SD}\right] = \left[\widehat{AN,NO}\right] = \widehat{ANO}$$

Áp dụng định lý cosin cho ΔANO:

$$\cos\widehat{ANO} = \frac{AN^2 + ON^2 - AO^2}{2.AN.ON} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{ANO} = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN



Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là góc giữa d và hình chiếu của nó trên mặt phẳng (P).

Gọi α là góc giữa d và mặt phẳng (P) thì: $0^0 \le \alpha \le 90^0$

Đầu tiên tìm giao điểm của d và (P) gọi là điểm A.

Trên d chọn điểm B khác A, dựng BH vuông góc với (P) tại H.

Suy ra AH là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P).

Vậy góc giữa d và (P) là góc $\widehat{BAH}$.

Nếu khi xác định góc giữa d và (P) khó quá (không chọn được điểm B để dựng BH vuông góc với (P)), thì ta sử dụng công thức sau đây. Gọi α là góc giữa d và (P). Suy ra:

$$\sin\alpha = \frac{d\left(M, mp(P)\right)}{AM}$$

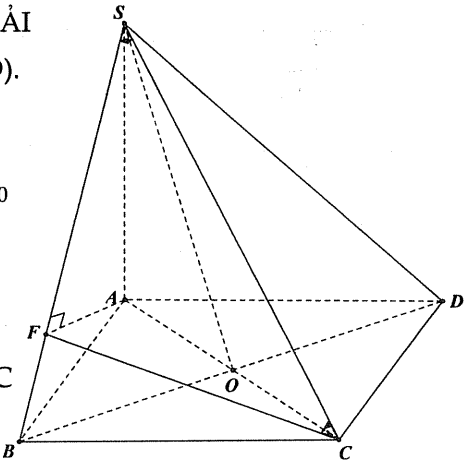
Ta phải chọn điểm M trên d, mà có thể tính khoảng cách được đến mặt phẳng (P). Còn A là giao điểm của d và mặt phẳng (P).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA $\perp$ đáy và SA = $a\sqrt{6}$. Tính góc giữa:

a). SC và (ABCD). b) SC và (SAB).

c). AC và (SBC). d) SB và (SAC).

LỜI GIẢI



a) AC là hình chiếu của SC lên mp(ABCD).

$\left[SC,(ABCD)\right] = \widehat{SCA}$,

$\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^0$

b) $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(SAB)$.

Vậy SB là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng (SAB).

$\Rightarrow \left(\widehat{SC,(SAB)}\right) = \widehat{CSB}$;

$\tan\widehat{CSB} = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{a}{a\sqrt{7}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}} \Rightarrow \widehat{CSB} = \arctan\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

c) Kẻ $AF \perp SB$ tại F.

Có $\begin{cases} AF \perp SB \\ AF \perp BC \end{cases} \Rightarrow AF \perp mp(SBC)$.

Vậy FC là hình chiếu vuông góc của AC trên mp(SBC).

Vậy: $\left(\widehat{AC,(SBC)}\right) = \widehat{ACF}$;

$\sin\widehat{ACF} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{42}}{7}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \widehat{ACF} = \arcsin\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

Với: $\dfrac{1}{AF^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{6a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{7}{6a^2} \Rightarrow AF = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.

d) $\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp SA \end{cases} \Rightarrow BO \perp mp(SAC)$.

Nên SO là hình chiếu của SB lên mp(SAC).

Vậy $\left(\widehat{SB,(SAC)}\right) = \widehat{BSO}$.

Có $\tan\widehat{BSO} = \dfrac{OB}{OS} = \dfrac{a}{\sqrt{2}} : \left(\dfrac{a\sqrt{13}}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{13}} \Rightarrow \widehat{BSO} = \arctan\dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

Với $SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \sqrt{6a^2 + \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi. Biết $SD = a\sqrt{3}$, tất cả các cạnh còn lại đều bằng a.

a) Chứng minh (SBD) là mặt phẳng trung trực của AC và SBD là tam giác vuông.

b) Xác định góc giữa SD và mp(ABCD).

LỜI GIẢI

a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mp(ABCD).

Theo đề bài $SA = SB = SC$.

Suy ra: $HA = HB = HC$ (đường xiên bằng nhau thì hình chiếu bằng nhau).

Vậy H thuộc BD (BD là đường trung trực của đoạn AC).

$\begin{cases} AC \perp BD \text{ (Vì ABCD là hình thoi)} \\ AC \perp SH \left(SH \subset (SBD)\right) \end{cases}$

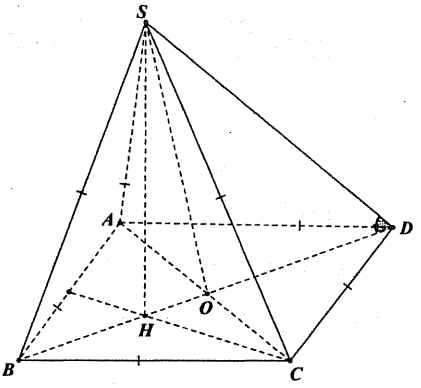
$\Rightarrow AC \perp mp(SBD)$

$AC \perp mp(SBD), (SBD) \cap AC = O$, O là trung điểm của AC.

Vậy: (SBD) là mp trung trực của đoạn AC.

Ta có: $\Delta SAC = \Delta BAC (c.c.c)$

$\Rightarrow SO = BO$ (2 đường trung tuyến xuất phát từ 2 đỉnh tương ứng bằng nhau).



Trong tam giác SBD: $SO = \frac{1}{2}BD \Rightarrow \Delta SBD$ vuông tại S.

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SD^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

b). HD là hình chiếu của SD trên mp(ABCD), $\left[SD, (ABCD)\right] = \widehat{SDH}$.

Trong tam giác vuông *SHD*: $\sin\widehat{SDH} = \frac{SH}{SD} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \left(a\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SDH} = 30^0$.

Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = a nằm trong mp(P), cạnh AC = $a\sqrt{2}$ và tạo với (P) một góc 60^0. Tính góc giữa BC và (P).

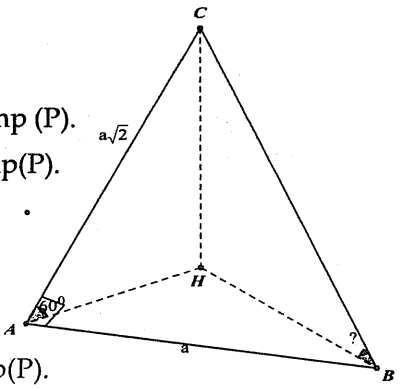
LỜI GIẢI

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{3}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên mp (P).

AH là hình chiếu vuông góc của AC trên mp(P).

$\left[AC, (P)\right] = \widehat{CAH} = 60^0$;



$\sin\widehat{CAH} = \frac{CH}{CA} \Rightarrow CH = a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

BH là hình chiếu vuông góc của BC trên mp(P).

$\left[BC, (P)\right] = \widehat{CBH}$

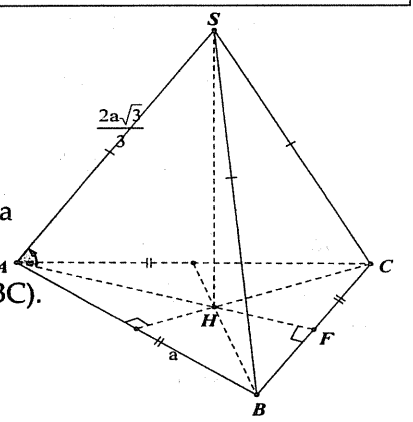
$\sin\widehat{CBH} = \frac{CH}{CB} = \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right) : \left(a\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{CBH} = 45^0$

Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ và đáy ABC là tam giác đều cạnh a.

a) Gọi H là hình chiếu của S trên mp(ABC). Tính SH.

b) Tính góc giữa SA và (ABC).

LỜI GIẢI



a) Có $AH = \frac{2}{3}AF = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, có:

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a$$

b) AH là hình chiếu của SA lên mặt phẳng (ABC).

Nên $\left[\widehat{SA,(ABC)}\right] = \widehat{SAH}$

$$\tan\widehat{SAH} = \frac{SH}{AH} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SAH} = 60^0$$

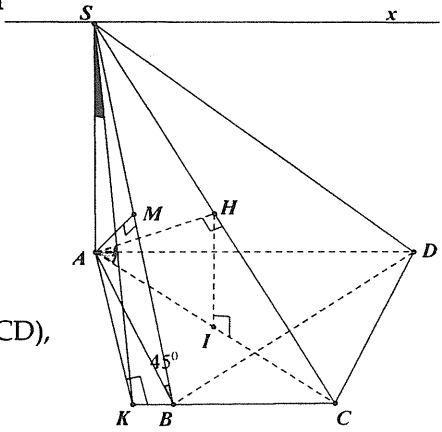
Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với đáy, ABCD là hình thang đáy lớn AD, AB = BC = DC = a , DA = 2a .Vẽ AH ⊥ SC và M là trung điểm SB. Góc giữa SB và mp(ABCD) là 45^0. Tính góc:

a) $\left(\widehat{AM,(SBD)}\right)$

b) $\left(\widehat{AH,(ABCD)}\right)$

c) $\left(\widehat{(SAD),(SBC)}\right)$

LỜI GIẢI



a). Theo đề bài ABCD nửa lục giác đều, nên ABCD nội tiếp trong đường tròn đường kính AD, có:

$AC = BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$.

Có $\begin{cases} BD \perp AB \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp mp(SAB)$.

Vậy: AB là hình chiếu của SB lên mp(ABCD),

nên: $\left(\widehat{SB,(ABCD)}\right) = \widehat{SBA} = 45^0$

$\Rightarrow SA = AB = a$ (Vì tam giác SAB vuông cân tại A)

Có: $\begin{cases} AM \perp SB(gt) \\ AM \perp BD\left(BD \perp (SAB)\right) \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBD) \Rightarrow \left(\widehat{AM,(SBD)}\right) = 90^0$.

b) Trong tam giác SAC : Kẻ $HI \parallel SA \Rightarrow HI \perp mp(ABCD)$.

Vậy AI là hình chiếu của AI trên mặt phẳng (ABCD):

$\left(\widehat{AH,(ABCD)}\right) = \widehat{HAI} = \widehat{HAC}$.

Trong ΔSAC vuông tại A: $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^0$.

Trong ΔHAC : $\widehat{HAC} + \widehat{HCA} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HAC} = 60^0$.

c) Muốn tìm góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC), ta phải tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:

Có: $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBD) \\ AD \;//\; BC \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SBD) = Sx(Sx \;//\; AD \;//\; BC)$ (1)

Kẻ $AK \perp BC$ tại K . Có $\begin{cases} BC \perp AK \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(SAK) \Rightarrow BC \perp SK$ (2)

Từ (1) và (2) $\begin{cases} SA \perp Sx \\ SK \perp Sx \end{cases} \Rightarrow \left[\widehat{(SAD),(SBC)}\right] = \widehat{ASK}$.

Trong ΔAKB vuông tại K:

$AK = AB.\cos\widehat{KAB} = a.\cos 30^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (vì $\widehat{DAB} = 60^0$)

Trong ΔSAK vuông tại A: $\tan\widehat{ASK} = \dfrac{AK}{AS} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{ASK} = \arctan\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với đáy ABCD, đáy là hình thang vuông tại A, có đáy lớn AB, $AB = 2a, AD = DC = a$. Vẽ $AH \perp SC$ và M là trung điểm của AB. Góc giữa (SDC) và (ABC) là 60^0. Tính :

a) $\left(\widehat{SD,(SAB)}\right)$

b) $\left(\widehat{(SAD),(SMC)}\right)$

c) Chứng minh $BC \perp (SAC)$.

LỜI GIẢI

a) Có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp mp(SAD) \Rightarrow CD \perp SD$.

Có: $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ AD \perp CD,\ SD \perp CD \\ AD \subset (ABCD), SD \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right) = \widehat{SDA} = 60^0$, trong ΔSAD có $SA = AD.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$.

Có: $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp mp(SAB)$.

Suy ra: SA là hình chiếu vuông góc của SD trên mp(SAB).

Vậy $\left(\widehat{SD,(SAB)}\right) = \widehat{DSA} = 30^0$

b) Ta có AD // CM (dễ dàng chứng minh được).

Tìm giao tuyến của mp(SAD) và mp(SCM).

Có: $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SCM) \\ AD \,//\, CM \\ AD \subset (SAD), CM \subset (SCM) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SCM) = Sx\,(Sx \,//\, AD \,//\, CM)$.

Ta có $DA \perp SA\,(DA \perp (SAB)) \Rightarrow SA \perp Sx$.

$CM \perp (SAB)\,(\text{vì } CM \,//\, AD) \Rightarrow SM \perp CM \Rightarrow SM \perp Sx$

Vậy: $\left[\widehat{(SAD),(SCM)}\right] = \left(\widehat{SA,SM}\right) = \widehat{ASM}$.

Có: $\tan\widehat{ASM} = \dfrac{AM}{AS} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{ASM} = 30^0$.

c) Ta có ACDM là hình vuông nên CM = a, trong tam giác ACB có CM là đường trung tuyến và bằng một nữa cạnh BC. Suy ra tam giác ACB vuông tại C.

Có: $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC)$.

Cho hình vuông ABCD và tam giác đều SAB cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi I là trung điểm của AB.

a) Chứng minh $SI \perp (ABCD)$ và tính góc hợp bởi SC và mặt phẳng (ABCD).

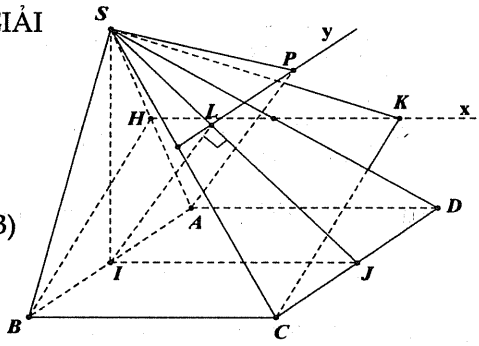
b) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAD). Từ đó tính góc giữa SC và mp (SAD).

c) Gọi J là trung điểm của CD, chứng minh $(SIJ) \perp (ABCD)$.

d) Tính góc hợp bởi SI và mp (SDC).

e) Xác định và tính góc hợp bởi SA và mặt phẳng (SCD).

LỜI GIẢI



a) Chứng minh $SI \perp (ABCD)$

$$\begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ (SAB) \perp (ABCD) \\ SI \perp AB \ \text{(Vì } \Delta SAB \text{ đều)}, \ SI \subset mp(SAB) \end{cases}$$

$\Rightarrow SI \perp mp(ABCD)$

Tính góc hợp bởi SC và mp (ABCD).

Ta có IC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (ABCD), nên: $\left[\widehat{SC,(ABCD)}\right] = \widehat{SCI}$.

SI là đường cao của tam giác đều SAB nên $SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong ΔIBC vuông tại B: $IC = \sqrt{BC^2 + BI^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Trong ΔSCI vuông tại I: $\tan\widehat{SCI} = \dfrac{SI}{CI} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Vậy $\left[\widehat{SC,(ABCD)}\right] = \widehat{SCI} = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right)$.

b) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAD).

Có: $\begin{cases} AD \perp AB \ \text{(ABCD hình vuông)} \\ AD \perp SI \ \text{(Vì } SI \perp mp\ (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow AD \perp mp(SAB)$.

$AD \subset (SAD) \Rightarrow (SAD) \perp (SAB)$

Hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SA.

Dựng $BH \perp SA$ tại $H \Rightarrow SH \perp (SAD)$.

Vậy $d\left(B,mp\left(SAD\right)\right)=BH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (vì ΔSAB đều).

Trong mp(SAD) kẻ Hx // AD; Trong mp (BC,Hx) qua C kẻ đường thẳng song song với BH cắt Hx tại K thì $CK\perp\left(SAD\right)$. Suy ra SK là hình chiếu vuông góc của SC trên mp(SAD) nên góc giữa SC và (SAD) là góc $\widehat{CSK}$.

Theo chứng minh trên thì BCKH là hình bình hành nên $BH=CK=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong ΔSCI có: $SC=\sqrt{SI^2+IC^2}=\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}+\dfrac{5a^2}{4}}=a\sqrt{2}$

Có: $\sin\widehat{CSK}=\dfrac{CK}{SC}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}\Rightarrow\widehat{CSK}=\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Kết luận $\left(\widehat{SC,\left(SAD\right)}\right)=\arcsin\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

c) Có $\begin{cases}CD\perp IJ\\CD\perp SI\end{cases}\Rightarrow CD\perp\left(SIJ\right)$, mà $CD\subset\left(SCD\right)\Rightarrow\left(SCD\right)\perp\left(SIJ\right)$

d) Tính góc hợp bởi SI và mp (SDC).

Hai mặt phẳng (SCD) và (SIJ) vuông góc với nhau theo giao tuyến SJ.

Dựng $IL\perp SJ\Rightarrow IL\perp\left(SCD\right)\Rightarrow$ SL là hình chiếu vuông góc của SI trên mp (SCD).

Vậy góc giữa SI và mặt phẳng (SCD) là góc $\widehat{ISL}$.

Trong ΔSIJ có: $\dfrac{1}{IL^2}=\dfrac{1}{IS^2}+\dfrac{1}{IJ^2}=\dfrac{4}{3a^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{7}{3a^2}\Rightarrow IL=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$;

$\sin\widehat{ISL}=\dfrac{IL}{SI}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{21}}{7}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\Rightarrow\widehat{ISL}=\arcsin\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

Kết luận $\left(\widehat{SI,\left(SCD\right)}\right)=\arcsin\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

e). Xác định và tính góc hợp bởi SA và mặt phẳng (SCD).

Trong mp(SCD) kẻ Ly // CD.

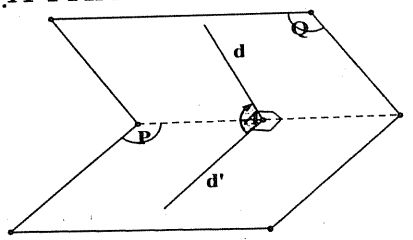
Tong mp(AB, Ly) qua A kẻ đường thẳng song song với IL cắt Ly tại P thì $AP \perp (SCD)$. Suy ra SP là hình chiếu vuông góc của SA trên mp(SCD) nên góc giữa SA và (SCD) là góc $\widehat{ASP}$.

Theo chứng minh trên thì AILP là hình bình hành nên $AP = IL = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Trong ΔSAP có $\sin\widehat{ASP} = \frac{AP}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{21}}{7}}{a} = \frac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \widehat{ASP} = \arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$

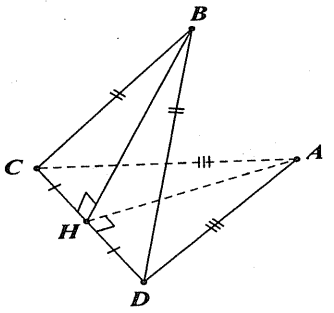
Kết luận: $\left(\widehat{SA,(SCD)}\right) = \arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$.

GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG



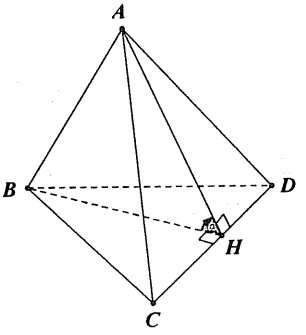
PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Để tìm góc giữa hai mặt phẳng, đầu tiên tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Sau đó tìm hai đường thẳng lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng vừa tìm.



Những trường hợp đặc biệt đề hay ra:

Trường hợp 1: Hai tam giác cân ACD và BCD có chung cạnh đáy CD. Gọi H trung điểm của CD, thì góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AHB}$.



Trường hợp 2: Hai tam giác ACD và BCD bằng nhau có chung cạnh CD. Dựng $AH \perp CD \Rightarrow BH \perp CD$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AHB}$.

Trường hợp 3: Khi xác định góc giữa hai mặt phẳng quá khó, ta nên sử dụng công thức sau :

$$\sin\varphi = \frac{d\left(A, mp(Q)\right)}{d\left(A,a\right)}$$

Với φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q). A là một điểm thuộc mặt phẳng (P) và a là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

Trường hợp 4: Có thể tìm góc giữa hai mặt phẳng bằng công thức:

$S' = S.\cos\varphi$

Trường hợp 5: Tìm hai đường thẳng d và d' lần lượt vuông góc với mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) . Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa d và d' .

Trường hợp 6: Cách xác định góc giữa mặt phẳng bên và mặt phẳng đáy

Bước 1: Xác định giao tuyến d.

Bước 2: Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp d$.

Bước 3: Góc cần tìm là góc $\widehat{SHA}$.

Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

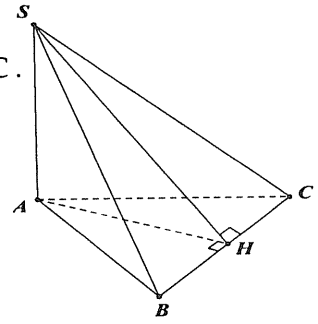
Ví dụ điển hình: Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với đáy (ABC). Hãy xác định góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABC).

Ta có BC là giao tuyến của mp(SBC) và (ABC).

Từ hình chiếu của đỉnh là điểm A , dựng $AH \perp BC$.

Vì $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$.

Kết luận góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SHA}$.



Cho tứ diện ABCD có $AD \perp (BCD)$ và AB = 3a. Biết BCD là tam giác đều cạnh 2a. Tính góc giữa hai mặt phẳng:

a) (ACD) và (BCD).

b) (ABC) và (DBC)

LỜI GIẢI

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD).

Vì AD vuông góc với mặt phẳng (BCD) nên hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau , suy ra góc giữa chúng bằng 90^0 .

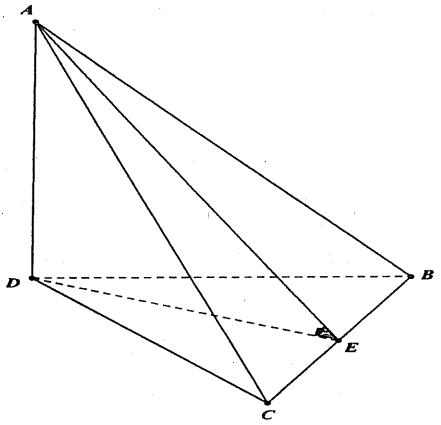
b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD).

Dựng $DE \perp BC$ tại E.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp DE \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(SBC)$

$\Rightarrow BC \perp AE$.

Hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) có BC là giao tuyến và hai đường thẳng DE, AE lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến BC. Nên góc giữa (ABC) và (DBC) là góc giữa DE và AE chính là góc $\widehat{AED}$.



Tam giác BCD đều nên có $DE = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

ΔABD vuông tại D có $AD = \sqrt{AB^2 - DB^2} = \sqrt{9a^2 - 4a^2} = a\sqrt{5}$.

Trong ΔADE vuông tại D, có:

$\tan\widehat{AED} = \dfrac{AD}{DE} = \dfrac{a\sqrt{5}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow \widehat{AED} = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{15}}{3}\right)$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông tâm O cạnh a, SA vuông góc với đáy ABCD, $SA = a\sqrt{3}$.

Tính góc giữa các cặp mặt phẳng sau :

a). (SAB) và (SBC)
b). (SAD) và (SCD)
c). (SAB) và (SCD)
d). (SBC) và (SAD)
e). (SBD) và (ABCD)
f). (SBD) và (SAB)
g). (SBC) và (ABCD)
h). (SCD) và (ABCD)
i). (SBD) và (SBC)
k). (SBC) và (SCD)

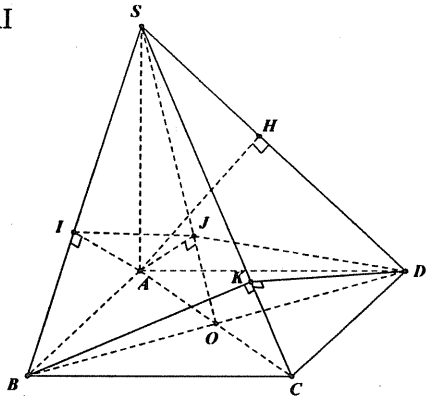
LỜI GIẢI

a) Góc giữa (SAB) và (SBC)

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow (SBC) \perp (SAB) \left(BC \subset (SBC)\right)$.

Vậy góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (SAB) bằng 90^0.



b) Góc giữa (SAD) và (SCD)

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$

$\Rightarrow (SCD) \perp (SAD) \left(CD \subset (SCD)\right)$.

Vậy góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng (SAD) bằng 90^0.

c) Góc giữa (SAB) và (SCD):

Dựng $AH \perp SD \left(H \in SD\right)$.

Ta có $AH \perp SD$ và $AH \perp CD$ (Vì $CD \perp$ (SAD)).

Từ đó $\Rightarrow AH \perp (SCD)$ (2)

Ngoài ra ta có $AD \perp (SAB)$. Sử dụng cách xác định góc trường hợp 5, thì góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là góc giữa hai đường thẳng AH và AD chính là góc $\widehat{HAD}$.

Ta có: $\widehat{DAH} = \widehat{DSA}$ (vì cùng phụ với góc $\widehat{SAH}$).

$\tan \widehat{DSA} = \dfrac{AD}{AS} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{DSA} = 30^0$.

Kết luận $\left(\widehat{(SAB),(SCD)}\right) = \widehat{DAH} = 30^0$.

d) Góc giữa (SBC) và (SAD)

Dựng $AI \perp SB \left(I \in SB\right)$.

Ta có: $AI \perp SB$ và $AI \perp CB$ (Vì $CB \perp$ (SAB)).

Từ đó $\Rightarrow AI \perp (SBC)$

Ngoài ra ta có $AB \perp (SAD)$. Sử dụng cách xác định góc trường hợp 5, thì góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) là góc giữa hai đường thẳng AI và AB chính là góc $\widehat{BAI}$.

Ta có $\widehat{BAI} = \widehat{BSA}$ (vì cùng phụ với góc $\widehat{SAI}$).

Có $\tan \widehat{BSA} = \dfrac{AB}{AS} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{BSA} = 30^0$.

Kết luận $\left(\widehat{(SBC),(SAD)}\right) = \widehat{BAI} = 30^0$.

e) Góc giữa (SBD) và (ABCD)

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SO$.

Hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD) có giao tuyến BD, hai đường thẳng AO và SO lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến nên góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa AO và SO chính là góc $\widehat{SOA}$.

Ta có: $\tan\widehat{SOA} = \dfrac{AO}{SO} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow \widehat{SOA} = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$

$\Rightarrow \left[\widehat{(SBD),(ABCD)}\right] = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

f) Góc giữa (SBD) và (SAB):

Vì $(SAC) \perp (SBD)$ theo giao tuyến SO.

Dựng $AJ \perp SO (J \in SO) \Rightarrow AJ \perp (SBD)$.

Có $AJ \perp (SBD), AD \perp (SAB) \Rightarrow \left(\widehat{(SBD),(SAB)}\right) = \left(\widehat{AJ,AD}\right) = \widehat{DAJ}$.

Có $\dfrac{1}{AJ^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AO^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{2}{a^2} = \dfrac{7}{3a^2} \Rightarrow AJ = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vì $AJ \perp (SBD) \Rightarrow AJ \perp JD (JD \subset (SBD)) \Rightarrow \Delta AJD$ vuông tại J nên:

$\cos\widehat{DAJ} = \dfrac{AJ}{AD} = \dfrac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \widehat{DAJ} = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{21}}{7}\right)$.

Kết luận $\left(\widehat{(SBD),(SAB)}\right) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{21}}{7}\right)$.

g) Góc giữa (SBC) và (ABCD)

Ta có: $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) có giao tuyến BC và $AB \perp BC, SB \perp BC$

$\Rightarrow \left[\widehat{(SBC),(ABCD)}\right] = \left(\widehat{AB,SB}\right) = \widehat{SBA} = 60^0$ (vì $\widehat{BSA} = 30^0$).

h) Góc giữa (SCD) và (ABCD)

Ta có $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$.

Hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD) có giao tuyến CC và $AD \perp CD$, $SD \perp CD$

$\Rightarrow \left[\widehat{(SCD),(ABCD)}\right] = \left(\widehat{AD,SD}\right) = \widehat{SDA} = 60^0$ (vì $\widehat{DSA} = 30^0$).

i) Góc giữa (SBD) và (SBC)

Ta có: $AI \perp (SBC), AJ \perp (SBD) \Rightarrow \left[\widehat{(SBC),(SBD)}\right] = \left(\widehat{AI,AJ}\right) = \widehat{JAI}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông SAB và SAO có:

$SA^2 = SI.SB \Rightarrow SI = \dfrac{3a^2}{2a} = \dfrac{3a}{2}$;

$SA^2 = SJ.SO \Rightarrow SI = \dfrac{SA^2}{SO} = \dfrac{SA^2}{\sqrt{SA^2 + AO^2}} = \dfrac{3a^2}{\sqrt{3a^2 + \dfrac{a^2}{2}}} = \dfrac{3a\sqrt{14}}{7}$.

$AI.SB = AS.AB \Rightarrow AI = \dfrac{a\sqrt{3}.a}{2a} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong ΔSBO vuông tại O có $\cos\widehat{BSO} = \dfrac{SO}{SB} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{14}}{2}}{2a} = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

Trong ΔSJI có:

$IJ^2 = SI^2 + SJ^2 - 2.SI.SJ.\cos\widehat{BSO} = \dfrac{9a^2}{4} + \dfrac{18a^2}{7} - 2.\dfrac{3a}{2}.\dfrac{3a\sqrt{14}}{7}.\dfrac{\sqrt{14}}{4} = \dfrac{9a^2}{28}$

Trong ΔAIJ có:

$\cos\widehat{IAJ} = \dfrac{AI^2 + AJ^2 - IJ^2}{2.AI.AJ} = \dfrac{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{7} - \dfrac{9a^2}{28}}{2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{21}}{7}} = \dfrac{2\sqrt{7}}{7} \Rightarrow \widehat{IAJ} = \arccos\left(\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\right)$.

Kết luận $\left[\widehat{(SBC),(SBD)}\right] = \widehat{JAI} = \arccos\left(\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\right)$.

k) Góc giữa (SBC) và (SCD)

Ta có $\Delta SBC = \Delta SDC$ (Cạnh huyền – cạnh góc vuông).

Dựng $BK \perp SC (K \in SC) \Rightarrow DK \perp SC$ và $DK = BK$.

Hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) có SC cạnh chung nên:

$\left[\widehat{(SBC),(SCD)}\right] = \left(\widehat{BK,DK}\right) = \widehat{BKD}$ hoặc $180^0 - \widehat{BKD}$.

Xét ΔSBC vuông tại B có:

$BK.SC = BS.BC \Rightarrow BK = \dfrac{BS.BC}{SC} = \dfrac{BS.BC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{2a.a}{\sqrt{3a^2 + 2a^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Trong ΔBDK có:

$\cos\widehat{BKD} = \dfrac{BK^2 + DK^2 - BD^2}{2.BK.DK} = \dfrac{\dfrac{4a^2}{5} + \dfrac{4a^2}{5} - 2a^2}{2.\dfrac{4a^2}{5}} = -\dfrac{1}{4} < 0 \Rightarrow \widehat{BKD} = \arccos\dfrac{1}{4}$.

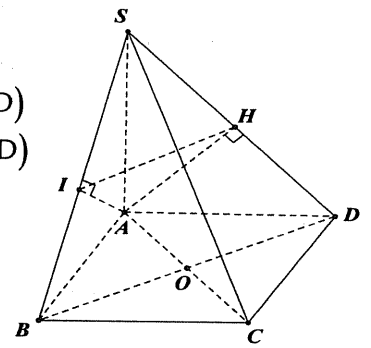
Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật $AB = a, BC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = a . Tính góc giữa các mặt phẳng sau :

a). Góc giữa mặt phẳng bên và mặt phẳng đáy

b). Góc giữa hai mặt bên liên tiếp .

c). Góc giữa hai mặt bên đối diện

LỜI GIẢI



a). Góc giữa các mặt bên và mặt đáy :

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} mp(SAB) \perp mp(ABCD) \\ mp(SAD) \perp mp(ABCD) \end{cases}$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB), (SAD) với mặt phẳng (ABCD) bằng 90^0.

$BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp SB$ (định lý ba đường vuông góc).

Hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) có giao tuyến BC nên góc của chúng là góc giữa SB và AB là góc $\widehat{SBA}$.

Trong ΔSAB có:

$$\tan\widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a}{a} = 1 \Rightarrow \widehat{SBA} = 45^0 \Rightarrow \left[\widehat{(SBC),(ABCD)}\right] = 45^0.$$

$CD \perp AD, CD \perp SA \Rightarrow CD \perp SD$ (định lý ba đường vuông góc).

Hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD) có giao tuyến CD nên góc của chúng là góc giữa SD và AD là góc $\widehat{SDA}$.

Trong ΔSAD có:

$$\tan\widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SDA} = \arctan\frac{1}{2} \Rightarrow \left[\widehat{(SCD),(ABCD)}\right] = \arctan\frac{1}{2}.$$

b) Góc giữa hai mặt bên liên tiếp .

Góc giữa (SAB) và (SBC)

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB) \left(BC \subset (SBC)\right).$

Vậy góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (SAB) bằng 90^0.

Góc giữa (SAD) và (SCD)

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD) \left(CD \subset (SCD)\right).$

Vậy góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng (SAD) bằng 90^0 .

Góc giữa (SBC) và (SCD)

Dựng $AI \perp SB \Rightarrow AI \perp (SBC)$, dựng $AH \perp SD \Rightarrow AH \perp (SCD)$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là góc giữa AIvà AH chính là góc $\widehat{IAH}$ hoặc 180^0 - $\widehat{IAH}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong hai tam giác vuông SAB và SAD có:

$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{2}$, $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{5}$.

$AI.SB = AB.AS \Rightarrow AI = \dfrac{a.a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $AH.SD = AD.AS \Rightarrow AH = \dfrac{2a.a}{a\sqrt{5}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

$SI = \dfrac{SA^2}{SB} = \dfrac{a^2}{a\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $SH = \dfrac{SA^2}{SD} = \dfrac{a^2}{a\sqrt{5}} = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

Áp dụng hàm số cos cho hai tam giác BSD và ISH có chung góc S:

$\cos\hat{S} = \dfrac{SB^2 + SD^2 - BD^2}{2.SB.SD} = \dfrac{2a^2 + 5a^2 - 5a^2}{2.a\sqrt{2}.a\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

$IH^2 = SI^2 + SH^2 - 2.SI.SH.\cos\hat{S} = \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2}{5} - 2.\dfrac{a}{\sqrt{2}}.\dfrac{a}{\sqrt{5}}.\dfrac{\sqrt{10}}{10} = \dfrac{a^2}{2}$.

$\cos\widehat{IAH} = \dfrac{AI^2 + AH^2 - IH^2}{2.AI.AH} = \dfrac{\dfrac{a^2}{2} + \dfrac{4a^2}{5} - \dfrac{a^2}{2}}{2.\dfrac{a}{\sqrt{2}}.\dfrac{2a}{\sqrt{5}}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \widehat{IAH} = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)$.

Kết luận $\left(\widehat{(SBC),(SCD)}\right) = \widehat{IAH} = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)$.

c). Góc giữa hai mặt bên đối diện

Góc giữa (SAB) và (SCD)

Vì $AD \perp (SAB)$ và $AH \perp (SCD)$ nên góc giữa (SAB) và (SCD) là góc giữa AD và AH là góc nhọn $\widehat{DAH}$

Ta có: $\tan\widehat{DSA} = \dfrac{AD}{AS} = \dfrac{2a}{a} = 2 \Rightarrow \widehat{DSA} = \arctan 2$

$\Rightarrow \widehat{DAH} = \arctan 2$ (vì hai góc DAH và DSA cùng phụ với góc SAH).

Tương tự ta tính được góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D , có $AB = 2a$, $AD = DC = a$,dựng $AH \perp SC (H \in SC)$, gọi M trung điểm AB . Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD) bằng 60^0.

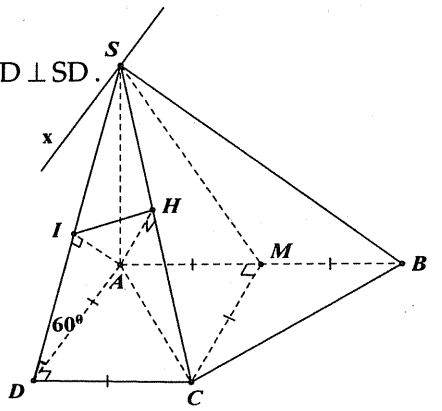
a). Tính góc giữa SD và (SAB)

b). Góc giữa (SAD) và (SMC).

c). Tính góc giữa (SBC) và (ABCD)

d). Tính góc giữa (SBC) và (SCD)

LỜI GIẢI



Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp mp(SAD) \Rightarrow CD \perp SD$.

Hai mặt phẳng (SCD) và (SAD) có SD là giao tuyến nên góc giữa hai mặt phẳng này là góc giữa AD và SD chính là góc $\widehat{SDA} = 60^0$, nên có:

$SA = AD.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$;

$SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$.

a). Tính góc giữa SD và (SAB)

Có $AD \perp (SAB)$ nên SA là hình chiếu vuông góc của SD trên mặt phẳng (SAB). Nên góc giữa SD và (SAB) là góc $\widehat{DSA}$.

Kết luận $\left(\widehat{SD,(SAB)}\right) = \widehat{DSA} = 30^0$ (cùng phụ với $\widehat{SDA} = 60^0$).

b). Góc giữa (SAD) và (SMC).

Hai mặt phẳng (SAD) và (SMC) có điểm chung là S và có AD // MC nên giao tuyến của chúng là Sx và song với AD và MC .

$\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp AM$. Mà: $CM \,//\, Sx \Rightarrow AM \perp Sx$ (1)

$SA \perp AD$. Mà: $AD \,//\, Sx \Rightarrow SA \perp Sx$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\left(\widehat{(SAD),(SMC)}\right) = \left(\widehat{SA,SM}\right) = \widehat{MAS}$.

Trong ΔMAS vuông tại A có: $\tan\widehat{MSA} = \dfrac{AM}{AS} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{MSA} = 30^0$.

c). Tính góc giữa (SBC) và (ABCD)

Trong tam giác ABC có CM là đường trung tuyến và $CM = \dfrac{1}{2}AB$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.

Có: $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC$.

Hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) có giao tuyến BC, hai đường thẳng SC và AC lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến BC. Nên góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa SC và AC là góc $\widehat{SCA}$. Trong ΔSAC vuông tại A có $\tan\widehat{SCA}=\dfrac{SA}{AC}=\dfrac{SA}{\sqrt{AB^2+AM^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Kết luận $\left[\widehat{(SBC),(ABCD)}\right]=\widehat{SCA}=\arctan\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$

d). Tính góc giữa (SBC) và (SCD)

Vì $BC\perp(SAC)\Rightarrow(SBC)\perp(SAC)$, hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SC, dựng $AH\perp SC(H\in SC)\Rightarrow AH\perp(SBC)$ (3)

Và có (SAD) và (SCD) vuông góc với nhau theo giao tuyến SD.

Dựng $AI\perp SD(I\in SD)\Rightarrow AI\perp(SCD)$ (4)

Từ (3) và (4) thì $\left[\widehat{(SBC),(SCD)}\right]=\widehat{(AI,AH)}=\widehat{IAH}$

Hệ thức lượng trong các tam giác vuông SAD và SAC có:

$AI.SD=AS.AD\Rightarrow AI=\dfrac{a\sqrt{3}.a}{2a}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SA^2=SI.SD\Rightarrow SI=\dfrac{3a^2}{2a}=\dfrac{3a}{2}$.

$AH.SC=AC.AS\Rightarrow AH=\dfrac{a\sqrt{2}.a\sqrt{3}}{a\sqrt{5}}=\dfrac{a\sqrt{30}}{5}$;

$SH.SC=SA^2\Rightarrow SH=\dfrac{3a^2}{a\sqrt{5}}=\dfrac{3a}{\sqrt{5}}$.

Ta có: $\cos\widehat{CSD}=\dfrac{SD}{SC}=\dfrac{2a}{a\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Áp dụng định lý hàm cosin cho hai tam giác SIH và AIH có:

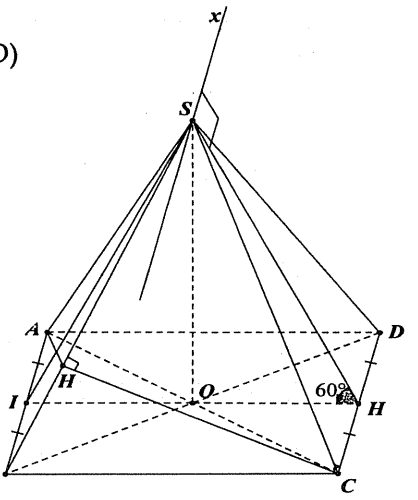
$IH^2=SI^2+SH^2-2.SI.SH.\cos\widehat{CSD}=\dfrac{9a^2}{4}+\dfrac{9a^2}{5}-2.\dfrac{3a}{2}.\dfrac{3a}{\sqrt{5}}.\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{9a^2}{20}$.

$\cos\widehat{IAH}=\dfrac{AI^2+AH^2-IH^2}{2.AI.AH}=\dfrac{\dfrac{3a^2}{4}+\dfrac{6a^2}{5}-\dfrac{9a^2}{20}}{2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{30}}{5}}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}\Rightarrow\widehat{IAH}=\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, mặt bên hợp với mặt đáy góc 60^0. Tính góc giữa các mặt phẳng:

a). (SAB) và (SCD). b). (SAB) và (SBC).

LỜI GIẢI



a). Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)

Gọi O là tâm của đáy.

Gọi H , I lần lượt trung điểm của CD, AB.

Ta có : $\begin{cases}(SCD)\cap(ABCD)=CD\\ OH\perp CD, OH\subset(ABCD)\\ SH\perp CD, SH\subset(SCD)\end{cases}$

$\Rightarrow\left[(SCD),(ABCD)\right]=\widehat{SHO}=60^0$.

Trong ΔSHO vuông tại O có:

$\tan\widehat{SHO}=\dfrac{SO}{OH}\Rightarrow SO=OH.\tan 60^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD).

Ta có : $\begin{cases}S\in(SAB)\cap(SCD)\\ AB\ //\ CD\\ AB\subset(SAB), CD\subset(SCD)\end{cases}\Rightarrow(SAB)\cap(SCD)=Sx(Sx\ //\ AB\ //\ CD)$

$AB\perp SI\Rightarrow Sx\perp SI, CD\perp SH\Rightarrow Sx\perp SH$

Vậy góc $\left[(SAB),(SCD)\right]=\widehat{ISH}$.

Vì Δ ISH cân có góc $\widehat{SHI}=60^0$ nên Δ ISH đều $\widehat{ISH}=60^0$

b). Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC)

Vì S.ABCD là hình chóp đều nên các mặt bên là các tam giác cân và bằng nhau do đó $\Delta SAB=\Delta SCB(c.c.c)$.

Hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) có giao tuyến SB.

Hạ $AH\perp SB$ thì $CH\perp SB$. Vậy góc giữa $\left[(SAB),(SCB)\right]=\widehat{AHC}$.

Trong ΔSOB vuông tại O: $SB=\sqrt{SO^2+OB^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Trong ΔSAB có: $S_{\Delta SAB}=\dfrac{1}{2}SI.AB=\dfrac{1}{2}AH.SB\Rightarrow AH=\dfrac{SI.AB}{SB}=\dfrac{a.a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Ta có tam giác ACH cân tại H từ chứng minh trên, nên $AH=CH=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác AHC:

$$\cos\widehat{AHC}=\frac{AH^2+CH^2-AC^2}{2AH.CH}=\frac{\frac{4a^2}{5}+\frac{4a^2}{5}-2a^2}{2.\frac{4a^2}{5}}=-\frac{1}{4}<0$$

$$\Rightarrow \widehat{AHC}=\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$$

Cho tam giác đều ABC cạnh a nằm trong mp(P). Trên các đường thẳng vuông góc với (P) vẽ từ B và C lấy các đoạn $BD=\frac{a\sqrt{2}}{2}, CE=a\sqrt{2}$ nằm cùng một bên đối với (P).

a). Chứng minh tam giác ADE vuông. Tính diện tích tam giác này.

b). Tính góc giữa hai mp(ADE) và (P).

LỜI GIẢI

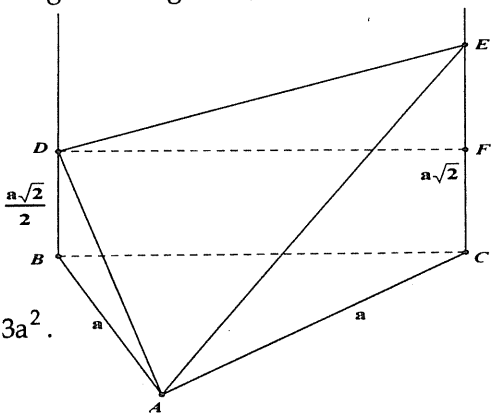
Gọi F là trung điểm của CE có $FE=FC=\frac{CE}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Áp dụng định lý Pitago cho các tam giác vuông ABD, ACE, DEF có:

$$AD^2=AB^2+BD^2=\frac{3a^2}{2};$$

$$AE^2=AC^2+CE^2=3a^2;$$

$$DE^2=DF^2+FE^2=\frac{3a^2}{2}$$



Trong tam giác ADE:

$$AE^2=AD^2+DE^2=\frac{3a^2}{2}+\frac{3a^2}{2}=3a^2.$$

Vậy tam giác ADE vuông tại D

Vì $BD\perp(ABC), CE\perp(ABC)$ nên tam giác ABC là hình chiếu vuông góc của tam giác ADE.

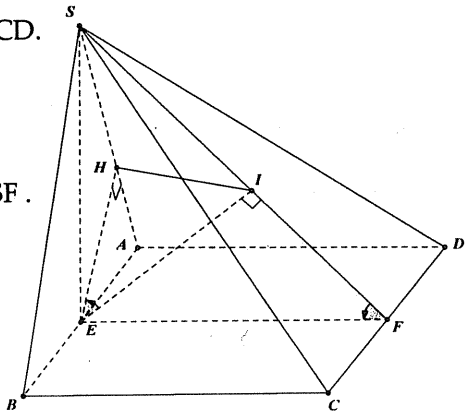
Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ADE) và mp(P).Chú ý mặt phẳng (ABC) chính là mp(P).

$$S_{\Delta ABC}=\cos\varphi.S_{\Delta ADE}\Rightarrow\cos\varphi=\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}=\frac{\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}DE.DA}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2.\frac{3a^2}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và (SAB) ⊥ (ABCD). Tính góc giữa:

a). (SCD) và (ABCD). b). (SCD) và (SAD).

LỜI GIẢI



a). Gọi E , F lần lượt trung điểm của AB, CD.

Có SE ⊥ AB (SAB tam giác đều)

$\Rightarrow SE \perp mp(ABCD)$

Có: $\begin{cases} CD \perp EF \\ CD \perp SE \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SEF) \Rightarrow CD \perp SF$.

Vậy $\left[\widehat{(SCD),(ABCD)}\right] = \widehat{SFE}$.

Trong ΔSEF vuông tại E:

$\tan\widehat{SFE} = \dfrac{SE}{EF} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b). $CD \perp EF$ và $CD \perp SE \Rightarrow CD \perp mp(SEF) \Rightarrow (SCD) \perp (SEF)$.

Dựng $EI \perp SF (I \in SF) \Rightarrow EI \perp (SCD) \Rightarrow d(E,(SCD)) = EI$.

Trong ΔSEF vuông tại E có: $\dfrac{1}{EI^2} = \dfrac{1}{ES^2} + \dfrac{1}{EF^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{7}{3a^2} \Rightarrow EH = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

Vì $AE // CD \Rightarrow AE // (SCD) \Rightarrow d(A,(SCD)) = d(E,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Ta có $SD^2 = SE^2 + ED^2 = SE^2 + EA^2 + AD^2 = \dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4} + a^2 = 2a^2$.

Dựng $AH \perp SD (H \in SD)$, vì ΔSAD cân tại A nên:

$AH = \sqrt{SA^2 - SH^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Ta có: $(SAD) \cap (SCD) = SD$; $A \in (SAD)$;

$d(A,SD) = AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $d(A,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD).

Sử dụng công thức tính góc ở trường hợp 3 ta được:

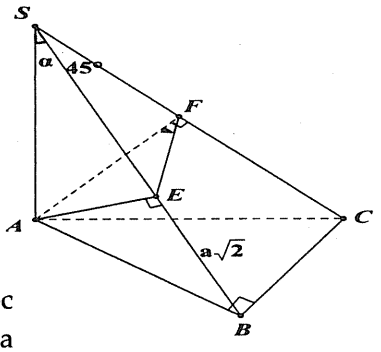
$\sin\varphi = \dfrac{d(A,(SCD))}{d(A,SD)} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{21}}{7}}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{42}}{7} \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{42}}{7}\right)$.

Cho tứ diện S.ABC, hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC),biết $SB = a\sqrt{2}, \widehat{BSC} = 45^0, \widehat{ASB} = \alpha$.

a) Chứng minh BC vuông góc với SB.

b) Xác định α để hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) tạo với nhau góc 60^0.

LỜI GIẢI



a) Chứng minh BC vuông góc với SB.

Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$ (1)

Theo đề bài: $(SAB) \perp (SBC)$ (2)

Và: $(ABC) \cap (SBC) = BC$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp SB$ (hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba).

Dựng $AE \perp SB$ tại E. Dựng $AF \perp SC$ tại F.

Theo câu a) thì $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$.

Vậy $SC \perp (AEF) \Rightarrow SC \perp EF$.

Hai đường thẳng AF và EF lần lượt thuộc hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) cùng vuông góc với giao tuyến SC, nên $\left[\widehat{(SAC),(SBC)}\right] = \widehat{AFE} = 60^0$.

Ta có: ΔAEF vuông tại E (vì $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp EF$) có:

$AE = EF.\tan 60^0 = EF.\sqrt{3}$.

Xét ΔSAE có: $AE = SE.\tan\alpha$.

Xét ΔSEF có: $EF = SE.\sin 45^0 = \dfrac{SE.\sqrt{2}}{2}$

Suy ra $AE = EF.\sqrt{3} \Leftrightarrow SE.\tan\alpha = \dfrac{SE.\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \alpha = \arctan\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

DỰ BỊ ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2003.

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác cân với AB = AC = a, $\widehat{BAC} = 120^0$, BB' = a. Gọi I trung điểm CC'. Chứng minh tam giác AB'I vuông ở A. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB'I).

LỜI GIẢI

Gọi H trung điểm BC. Vì ABC cân tại A nên $AH \perp BC$.

Do $\widehat{BAC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{ACH} = 30^0$

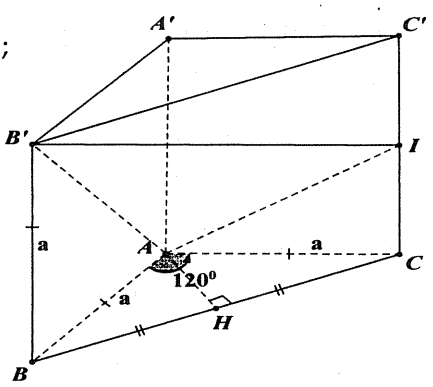
Ta có: $AH = AC.\sin\widehat{ACH} = a.\sin 30^0 = \frac{a}{2}$;

$CH = AC.\cos\widehat{ACH} = a.\cos 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow BC = 2CH = a\sqrt{3}$

Áp dụng PITAGO cho các Δ vuông: B'C'I, ABB', ACI:

$IB'^2 = B'C'^2 + IC'^2 = 3a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{13a^2}{4}$;



$AB'^2 = AB^2 + BB'^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ $AI^2 = AC^2 + IC^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$

Ta có: $IB'^2 = AB'^2 + AI^2 = \frac{13a^2}{4}$. Vậy tam giác B'AI vuông tại A.

Ta có: $S_{\Delta B'AI} = \frac{1}{2}AI.AB' = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2}.a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{10}}{4}$;

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}.a\sqrt{3}.\frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Gọi α là góc giữa 2 mặt phẳng (ABC) và (AB'I).

Ta có: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AB'I}.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right):\left(\frac{a^2\sqrt{10}}{4}\right) = \frac{\sqrt{30}}{10}$.

Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh a. Lấy hai điểm M, N thuộc CB và CD. Đặt CM = x, CN = y. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) tại điểm A lấy một điểm S. Tìm hệ thức giữa x, y để:

a) $\widehat{((SAM),(SAN))} = 45^0$

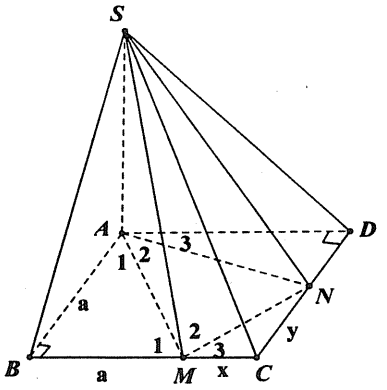
b) $(SAM) \perp (SMN)$.

LỜI GIẢI

Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AM$, $SA \perp AN$.

Hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) có giao tuyến là SA . Nên góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa AM và AN chính là góc $\widehat{MAN} = 45^0 \Leftrightarrow \widehat{A_2} = 45^0$.

Ta có: $\widehat{A_1} + \widehat{A_2} + \widehat{A_3} = 90^0 \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{A_3} = 45^0$.



Có: $\tan(A_1+A_3)=\dfrac{\tan A_1+\tan A_3}{1-\tan A_1.\tan A_3}\Leftrightarrow\dfrac{\tan A_1+\tan A_3}{1-\tan A_1.\tan A_3}=1$ (1)

Xét trong hai tam giác vuông ABM và ADN có:

$\tan A_1=\dfrac{BM}{BA}=\dfrac{a-x}{a};\ \tan A_2=\dfrac{DN}{AD}=\dfrac{a-y}{a}$ (2)

Thay (2) vào (1):

$$\frac{\frac{a-x}{a}+\frac{a-y}{a}}{1-\frac{a-x}{a}\frac{a-y}{a}}=1\Leftrightarrow\frac{2a-x-y}{a}=\frac{a^2-(a-x)(a-y)}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow a(2a-x-y)=a(x+y)-xy$$

$$\Leftrightarrow 2a^2=2a(x+y)-xy$$

b) Ta có: $SA\perp(ABCD)\Rightarrow(SAM)\perp(ABCD)$.

Giả sử $(SMN)\perp(SAM)$, thì hai mặt phẳng (ABCD) và (SMN) cùng vuông góc với mặt phẳng (SAM) nên giao tuyến của chúng là MN vuông góc với mặt phẳng (SAM). Suy ra $MN\perp AM$ hay $\widehat{AMN}=90^0$.

Lúc đó: $\widehat{M_1}+\widehat{M_3}=90^0\Rightarrow\widehat{M_3}=\widehat{A_1}$ (Vì cùng phụ với góc $\widehat{M_1}$)

Nên có: $\tan M_3=\tan A_1\Leftrightarrow\dfrac{y}{x}=\dfrac{a-x}{a}\Leftrightarrow ay=ax-x^2\Leftrightarrow x^2=a(x-y)$

KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

I. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN :

Bài toán tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng , là một dạng toán rất quan trọng trong chương vuông góc của lớp 11 và là một phần hay ra trong đề thi đại học .

Để giải quyết vấn đề này các bạn phải thành thạo hai công cụ sau và nó liên quan với nhau :

<u>Bài toán 1:</u> Tính khoảng cách từ hình chiếu vuông góc của đỉnh đến một mặt bên.

Phương pháp xác định khoảng cách từ hình chiếu của đỉnh đến một mặt phẳng bên.

Bước 1: Xác định giao tuyến d.

Bước 2: Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh , DỰNG $AH\perp d$ ($H\in d$).

Bước 3: Dựng $AI \perp SH (I \in SH)$ .Khoảng cách cần tìm là AI.

Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

Ba bước dựng ở trên là sử dụng tính chất: Hai mặt phẳng vuông góc với nhau , một đường thuộc mặt phẳng này vuông góc với giao tuyến thì sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Đây là bài toán cơ bản nhưng vô cùng quan trọng trong việc tính khoảng cách từ một đểm đến một mặt phẳng .Hầu như tính khoảng cách từ một điểm BẤT KỲ đến mặt phẳng bên đều thông qua điểm này dựa vào công thức của bài toán 2 .

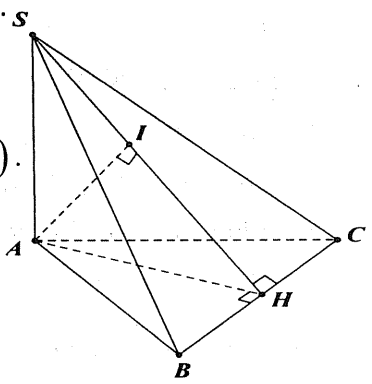
Ví dụ điển hình: *Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với đáy (ABC). Hãy xác khoảng cách từ điểm A đến mặt bên (SBC).*

Ta có: BC là giao tuyến của mp(SBC) và (ABC).

Từ hình chiếu của đỉnh là điểm A.

Dựng $AH \perp BC$ tại H. Dựng $AI \perp SH$ tại I.

Vì $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow (SBC) \perp (SAH)$.

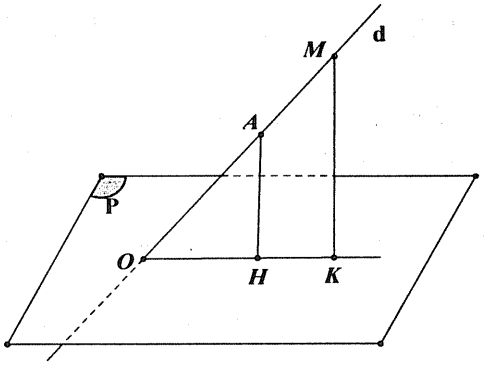


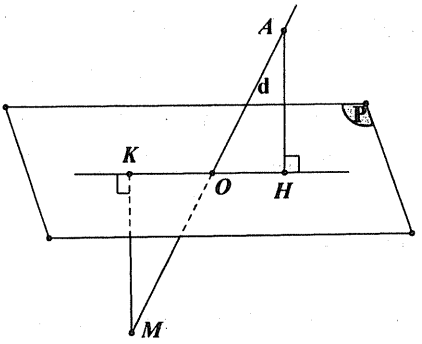
Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (SAH) theo giao tuyến SH có $AI \perp SH$ nên

$AI \perp mp(SBC) \Rightarrow d(A, mp(SBC)) = AI$.

<u>Bài toán 2</u>: Tính khoảng cách từ một đểm bất kỳ đến một mặt phẳng

Thường sử dụng công thức sau:





Công thức tính tỉ lệ khoảng cách: $\dfrac{d(M, mp(P))}{d(A, mp(P))} = \dfrac{MO}{AO}$

Ở công thức trên cần tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P).

Phương pháp phải tìm một đường thẳng d qua M và chứa một điểm A mà có thể tính khoảng cách đến mặt phẳng (P). KINH NGHIỆM thường điểm A là hình chiếu của đỉnh.

Để hiểu và tự làm được bài tập thì những tính chất của hình học và phương pháp làm bài tập các bạn phải khắc vào trong tim.

II. BÀI TẬP MẪU

DỰ BỊ ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2002.

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a, biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

LỜI GIẢI

Đây là bài toán cơ bản chúng ta đã nói ở phần trên.

Gọi E trung điểm BC thì:

$BC \perp AE$ (vì ABC đều).

Dựng $AF \perp SE$ tại F.

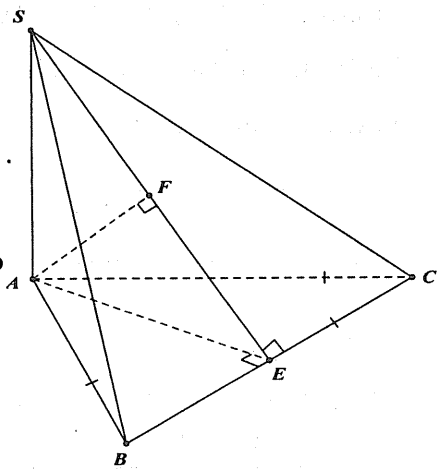
Có $BC \perp SA, BC \perp AE \Rightarrow BC \perp mp(SAE)$.

$\Rightarrow (SBC) \perp (SAE)$

Mp (SBC) vuông góc với mp (SAE) theo giao tuyến SE có $AF \perp SE$

$\Rightarrow AF \perp (SBC)$.

Vậy: $d(A,(SBC)) = AF$.



Trong tam giác vuông SAE có:

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{2}{3a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow AF = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Kết luận: $d(A,(SBC)) = AF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2011

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, BA = 3a, BC = 4a; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết SB = $2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^0$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

LỜI GIẢI

H là hình chiếu vuông góc của đỉnh và điểm B cùng nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SAC) tại C. Nên bước đầu tiên ta phải tính khoảng cách từ H đến mp(SAC), sau đó sử dụng công thức tỉ số khoảng cách để tính khoảng cách từ điểm B. Cách làm như sau:

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên BC.

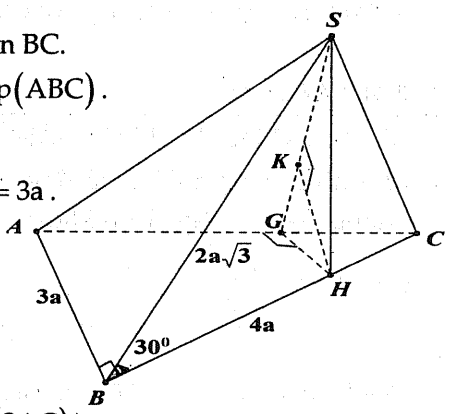
Do $mp(SBC) \perp mp(ABC)$ nên $SH \perp mp(ABC)$.

Trong ΔSBH vuông tại H có:

$SH = SB.\sin 30^0 = a\sqrt{3}$; $BH = SB.\cos 30^0 = 3a$.

Dựng $HG \perp AC$ tại G.

Dựng $HK \perp SG$ tại K.



Ta có: $\begin{cases} AC \perp HG \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp mp(SHG)$

$\Rightarrow mp(SAC) \perp mp(SHG)$ (vì $AC \subset mp(SAC)$).

Và $(SAC) \cap (SHG) = SG \Rightarrow HK \perp mp(SAC)$.

Vậy: $d(H, mp(SAC)) = HK$.

Ta có: $\Delta CGH \sim \Delta CBA \Leftrightarrow \dfrac{GH}{BA} = \dfrac{CH}{CA} \Rightarrow GH = \dfrac{a}{5a}.3a = \dfrac{3a}{5}$.

Trong ΔSHG vuông tại H:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HG^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{25}{9a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{28}{9a^2} \Rightarrow HK = \frac{3a\sqrt{7}}{14}.$$

Hai điểm H và B nằm trên đường thẳng có giao điểm với mp(SAC) tại C,

nên có: $\dfrac{d(B, mp(SAC))}{d(H, mp(SAC))} = \dfrac{BC}{HC} = 4$

$$\Rightarrow d(B, mp(SAC)) = 4d(H, mp(SAC)) = \frac{6a\sqrt{7}}{7}.$$

Các bạn phải nắm vững phương pháp tính khoảng cách từ hình chiếu của đỉnh lên mặt bên.

Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A với BC = 2a, $\widehat{ABC} = 60^0$.

Gọi M là trung điểm BC. Biết SA = SB = SC = $a\sqrt{5}$.

a) Tính chiều cao của hình chóp.

b) Tính khoảng cách từ M đến mp(SAB).

LỜI GIẢI

a) Tính chiều cao của hình chóp.

Vì ΔABC vuông tại A, M trung điểm của BC nên có:

$MA = MB = MC$ (1)

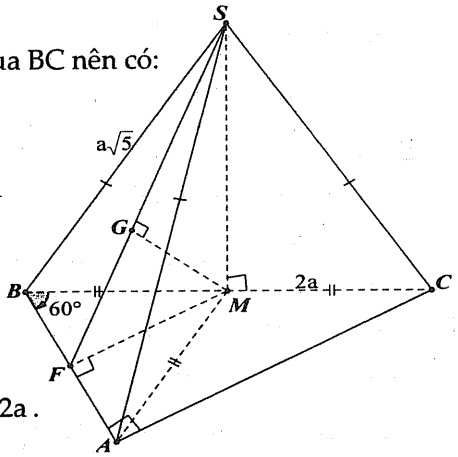
Theo đề $SA = SB = SC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: M là hình chiếu vuông góc của S lên mp(ABC).

Vậy $d\left(S,(ABC)\right) = SM$

Trong ΔSBM có: $SM = \sqrt{SB^2 - BM^2}$

$= \sqrt{\left(a\sqrt{5}\right)^2 - (a)^2} = 2a$.



b) Tính khoảng cách từ M đến mp(SAB).

CHÚ Ý: M là hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mp(ABC).

Kẻ $MF \perp AB$ tại F; Kẻ $MG \perp SF$ tại $F \Rightarrow MG \perp (SAB)$.

MBA là tam giác cân có góc 60^0, nên MBA đều $\Rightarrow MF = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông SMF:

$$\frac{1}{MG^2} = \frac{1}{SM^2} + \frac{1}{MF^2} = \frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Rightarrow MG = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}.$$

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy (ABCD) là hình vuông tâm O, AB = 2a, SA = 4a. Tính:

a) Khoảng cách từ O đến (SAB).

b) Khoảng cách từ A đến (SCD).

LỜI GIẢI

a) Khoảng cách từ O đến (SAB). *(các bạn để ý O là hình chiếu của đỉnh)*

Theo đề bài thì $SO \perp mp(ABCD)$.

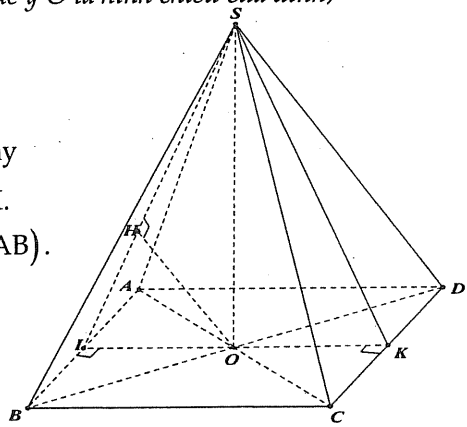
Dựng $OI \perp AB$ tại I thì $AB \perp (SIO)$

$\Rightarrow (SAB) \perp (SIO)$: hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SI.

Dựng $OH \perp SI$ tại H. Suy ra $OH \perp (SAB)$.

Vậy: $d\left(O,(SAB)\right) = OH$.

OI là đường trung bình của ΔBAD



$\Rightarrow OI = \frac{1}{2}AD = a$.

Trong ΔSAO vuông tại O:

$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{16a^2 - 2a^2} = a\sqrt{14}$.

Trong ΔSOI vuông tại O:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{14a^2} = \frac{15}{14a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{210}}{15}.$$

b) Khoảng cách từ A đến (SCD).

Vì S.ABCD là hình chóp đều nên khoảng cách từ tâm O đến các mặt bên bằng nhau, có: $d\left(O,(SAB)\right) = d\left(O,(SCD)\right) = OH = \frac{a\sqrt{210}}{15}$.

Hai điểm A và O nằm trên đường thẳng có giao điểm với mp(SCD) tại C, nên có: $\frac{d\left(A,mp(SCD)\right)}{d\left(O,mp(SCD)\right)} = \frac{AC}{AO} = 2$

$$\Rightarrow d\left(A,mp(SCD)\right) = 2d\left(A,mp(SCD)\right) = \frac{2a\sqrt{210}}{15}$$

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi SC và mặt phẳng (SAB) bằng 30^0.

a) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

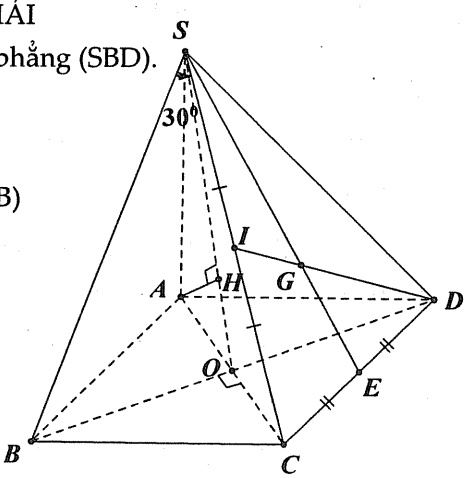
b) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD).

c) Tính khoảng cách từ trung điểm I của SC , trọng tâm G của tam giác SCD đến mặt phẳng (SBD).

d)Tính khoảng cách từ O , I và G đến mặt phẳng (SAB).

LỜI GIẢI

a) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).



Vì $\begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB)$

$\Rightarrow$ SB là hình chiếu của SC lên mp(SAB)

$\Rightarrow \left(\widehat{SC,(SAB)}\right) = \left(\widehat{SC,SB}\right) = \widehat{CSB} = 30^0$.

Trong ΔSBC vuông tại B có:

$SB = BC.\cot 30^0 = a\sqrt{3}$.

Trong ΔSAB vuông tại A có:

$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$

Ta có: $\begin{cases} SA \perp BD \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow (SBD) \perp (SAC) = SO \ (O = AC \cap BD)$

Trong mp (SAC), kẻ $AH \perp SO \Rightarrow AH \perp (SBD) \Rightarrow d(A,(SBD)) = AH$.

Trong tam giác vuông SAO có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AO^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{5}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{10}a}{5}$$

Vậy: $d(A,(SBD)) = \frac{a\sqrt{10}}{5}$.

b) Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD).

Vì hai điểm A và C nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SBD) tại O nên có: $\frac{d(C,(SBD))}{d(A,(SBD))} = \frac{CO}{AO} = 1$

$\Rightarrow d(C,(SBD)) = d(A,(SBD)) = \frac{a\sqrt{10}}{5}$

c) Tính khoảng cách từ I và G đến mặt phẳng (SBD)

Vì hai điểm I và C nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SBD) tại S nên có: $\frac{d(I,(SBD))}{d(C,(SBD))} = \frac{IS}{CS} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(I,(SBD)) = \frac{1}{2}d(C,(SBD)) = \frac{a\sqrt{10}}{10}$.

Vì hai điểm I và G nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SBD) tại D nên có: $\frac{d(G,(SBD))}{d(I,(SBD))} = \frac{GD}{ID} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow d(G,(SBD)) = \frac{2}{3}d(I,(SBD)) = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{10}}{10} = \frac{a\sqrt{10}}{15}$.

d). Tính khoảng cách từ O , I và G đến mặt phẳng (SAB).

Ở câu a) ta có $CB \perp (SAB) \quad \Rightarrow d(C, mp(SAB)) = CB = a$.

Vì hai điểm I và C nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SAB) tại S nên có: $\frac{d(I,(SAB))}{d(C,(SAB))} = \frac{IS}{CS} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(I,(SAB)) = \frac{1}{2}d(C,(SAB)) = \frac{a}{2}$.

Vì hai điểm O và C nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SAB) tại A nên có: $\frac{d(O,(SAB))}{d(C,(SAB))} = \frac{OA}{CA} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow d\left(O,(SAB)\right)=\frac{1}{2}d\left(C,(SAB)\right)=\frac{a}{2}$.

Vì CE // AB nên $d\left(C,(SAB)\right)=d\left(E,(SAB)\right)=a$.

Vì hai điểm E và G nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SAB) tại S nên có: $\frac{d\left(G,(SAB)\right)}{d\left(E,(SAB)\right)}=\frac{GS}{ES}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow d\left(G,(SAB)\right)=\frac{2}{3}d\left(E,(SAB)\right)=\frac{2a}{3}$

Thông qua bài tập này các bạn thấy mấu chốt của bài toán là dựa vào khoảng cách từ hình chiếu của đỉnh ở đây là điểm A , sau đó sử dụng công thức tính tỉ lệ khoảng cách.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính AD = 2a , SA vuông góc với đáy (ABCD) và $SA=a\sqrt{6}$.

a) Tính khoảng cách từ A , B đến (SCD).

b) Tính khoảng cách từ AD đến (SBC).

LỜI GIẢI

Có $CD\perp AC$ (gt), $CD\perp SA$

$\Rightarrow CD\perp mp(SAC)\Rightarrow mp(SCD)\perp mp(SAC)$.

Kẻ $AH\perp SC$ $(H\in SC)$ $\Rightarrow AH\perp(SCD)$.

Vậy $d\left(A,(SCD)\right)=AH$.

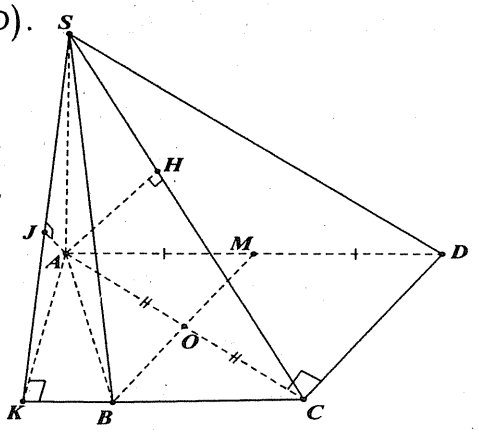
Trong ΔACD vuông tại C có:

$AC=\sqrt{AD^2-CD^2}=\sqrt{4a^2-a^2}=a\sqrt{3}$.

Trong tam giác vuông SAC có:

$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{3a^2}$

$\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



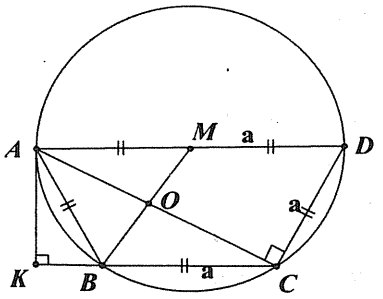
Kết luận: $d\left(A,(SCD)\right)=AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi M trung điểm của AD thì BM // CD $\Rightarrow$ BM // $mp(SCD)$.

Gọi $O=BM\cap AC$ nên $d\left(B,(SCD)\right)=d\left(O,(SCD)\right)$.

Hai điểm A và O cùng nằm trên đường thẳng có giao điểm với mp(SCD) tại C nên ta có: $\frac{d(O,(SCD))}{d(A,(SCD))}=\frac{OC}{AC}=\frac{1}{2}\Rightarrow d(O,(SCD))=\frac{1}{2}d(A,(SCD))=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Kết luận $d(B,(SCD))=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.



b). Tính khoảng cách từ AD đến (SBC).

Vì AD // BC $\Rightarrow$ AD // mp(SBC)

$\Rightarrow d(AD,(SBC))=d(A,(SBC))$

Kẻ $AK\perp BC(K\in BC)$, có:

$\begin{cases}BC\perp AK\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAK)\Rightarrow mp(SBC)\perp mp(SAK)$ theo giao tuyến SK, kẻ

$AJ\perp SK(J\in SK)\Rightarrow AJ\perp(SBC)\Rightarrow d(A,(SBC))=AK$.

Tính AK: $AK=\sqrt{AB^2-BK^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

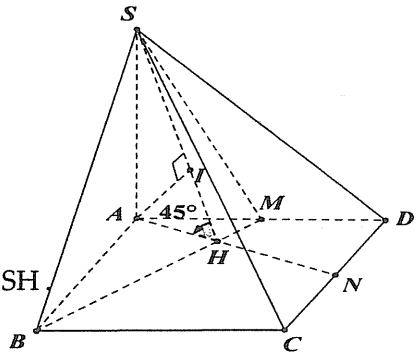
Trong tam giác vuông SAK: $\frac{1}{AJ^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{3a^2}$

$\Rightarrow AJ=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Kết luận: $d(AD,(SBC))=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông. SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, DC. Góc giữa mặt phẳng (SBM) và mặt phẳng (ABCD) bằng 45^0. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBM).

LỜI GIẢI



Gọi H là giao điểm của BM và AN.

Ta có: $\Delta ABM=\Delta DAN(c.g.c)\Rightarrow\hat{B}_1=\widehat{A_1}$.

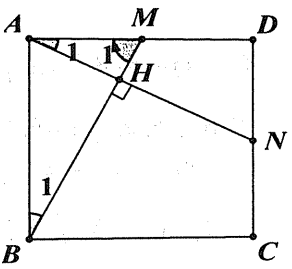
Mà: $\widehat{B_1}+\widehat{M_1}=90^0\Rightarrow\widehat{A_1}+\widehat{M_1}=90^0$.

Vậy: $BM\perp AN$

Ta có: $\begin{cases}BM\perp AN\\BM\perp SA\end{cases}\Rightarrow BM\perp(SAN)\Rightarrow BM\perp SH$.

BM là giao tuyến của mặt phẳng (SBM)
và mặt phẳng (ABCD).

Và có $BM \perp AN, BM \perp SH$ nên góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng AN và SH là góc $\widehat{SHA} = 45^0$.



Tam giác SAH vuông cân tại $A \Rightarrow AH = AS = a$

Trong tam giác vuông ABM: $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AH^2}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{AB^2} + \frac{4}{AB^2} = \frac{1}{AH^2} \Leftrightarrow \frac{5}{AB^2} = \frac{1}{AH^2}$

$\Leftrightarrow AB^2 = 5AH^2 \Leftrightarrow AB = AH\sqrt{5} = a\sqrt{5}$

Dựng $AI \perp SH (I \in SH)$. Hai mặt phẳng (SBM) và (SAN) vuông góc nhau theo giao tuyến $SH \Rightarrow AI \perp (SBM) \Rightarrow d(A, mp(SMB)) = AI$.

Trong tam giác SAH vuông cân tại A có: $AI = \frac{SH}{2} = \frac{AH.\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hai điểm A và D cùng nằm trên đường thẳng có giao điểm với mp(SBM) tại M nên có: $\frac{d(D,(SMB))}{d(A,(SMB))} = \frac{DM}{AD} = 1 \Rightarrow d(D,(SMB)) = d(A,(SMB)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy (ABCD) là hình vuông tâm O cạnh a , SA vuông góc với đáy (ABCD) và SA = a. Gọi I, J là trung điểm của SC và AB.

a) Chứng minh $IO \perp (ABCD)$.

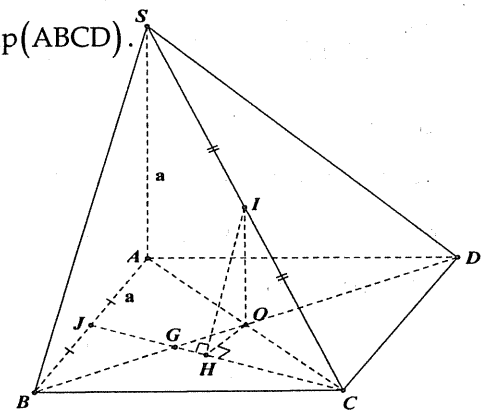
b). Tính khoảng cách từ I đến CJ.

LỜI GIẢI

a) Chứng minh $IO \perp (ABCD)$.

Trong ΔSAC có OI là đường trung bình của tam giác .

Nên có: $\begin{cases} OI \,//\, SA \\ SA \perp mp(ABCD) \end{cases} \Rightarrow OI \perp mp(ABCD)$.



b) Tính khoảng cách từ I đến CJ.

Kẻ $OH \perp CJ$ tại H.

Ta có: $\begin{cases} CJ \perp SO \\ CJ \perp OH \end{cases} \Rightarrow CJ \perp mp(IOH)$

$\Rightarrow CJ \perp IH$.

Khoảng cách từ I đến CJ là HI .

Gọi $G = BO \cap CJ$ nên G là trọng tâm

của ΔABC, với $OG = \frac{1}{3}OB = \frac{a\sqrt{2}}{6}$

Trong ΔCOG vuông tại O có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OG^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{18}{a^2} = \frac{20}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a}{\sqrt{20}}.$$

Trong ΔOIH vuông tại O : $IH = \sqrt{OH^2 + OI^2} = \sqrt{\frac{a^2}{20} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{30}}{10}$

Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có AA' = a, đáy ABC là tam giác vuông tại A có BC = 2a, AB = $a\sqrt{3}$.

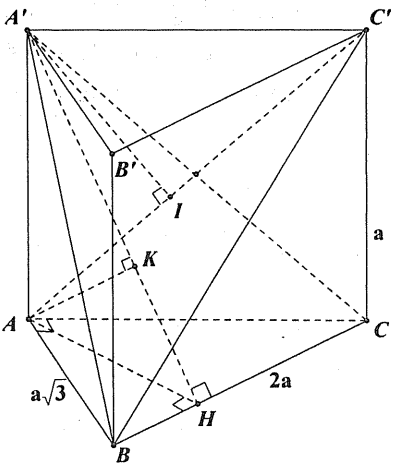
a) Tính khoảng cách từ AA' đến mp(BCC'B').

b) Tính khoảng cách từ A đến (A'BC).

c) Chứng minh $AB \perp (ACC'A')$ và tính khoảng cách từ A' đến (ABC').

LỜI GIẢI

a) Tính khoảng cách từ AA' đến mp(BCC'B').



Dựng $AH \perp BC$ tại H, có:

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BCC'B')$$

$$\Rightarrow d(A, mp(BCC'B')) = AH$$

ΔABC vuông tại A có:

$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a$ và $AH.BC = AB.AC$

$$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}.a}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Kết luận $d(A, mp(BCC'B')) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vì $AA' // BB' \Rightarrow AA' \parallel (BCC'B')$

$$\Rightarrow d(AA', (BCC'B')) = d(A, (BCC'B')) = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

b). Tính khoảng cách từ A đến (A'BC).

Có $BC \perp AH$ và $BC \perp AA' \Rightarrow BC \perp (A'AH) \Rightarrow (A'BC) \perp (A'AH)$: Hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến A'H.

Dựng $AK \perp A'H (K \in A'H) \Rightarrow AK \perp (A'BC)$.

Vậy: $d(A, (A'BC)) = AK$.

Trong $\Delta A'AH$ có $:\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AA'^2}+\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{3a^2}=\frac{7}{3a^2}\Rightarrow AK=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Kết luận $d\left(A,\left(A'BC\right)\right)=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

c) Chứng minh $AB\perp(ACC'A')$, vì: $\begin{cases}AB\perp AC\\AB\perp AA'\end{cases}\Rightarrow AB\perp\left(ACC'A'\right)$.

Vì $AB\perp\left(ACC'A'\right)\Rightarrow\left(ABC'\right)\perp\left(ACC'A'\right)$: Hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến AC'.

Dựng $A'I\perp AC'\Rightarrow A'I\perp\left(ABC'\right)$. Vậy $d\left(A',\left(ABC'\right)\right)=A'I$

Trong $\Delta AA'C'$ có $\frac{1}{A'I^2}=\frac{1}{AA'^2}+\frac{1}{A'C'^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{2}{a^2}\Rightarrow A'I=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông tâm O, cạnh a, $SA\perp$ đáy và $SA=a\sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách từ A tới mp (SBC).

b) Tính khoảng cách từ O đến mp (SBC).

c) Tính khoảng cách từ trọng tâm của tam giác SAB đến mp (SAC).

LỜI GIẢI

a) Tính khoảng cách từ A tới mp(SBC).

Ta có: $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp\left(SAB\right)\Rightarrow\left(SBC\right)\perp\left(SAB\right)$: Hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SB.

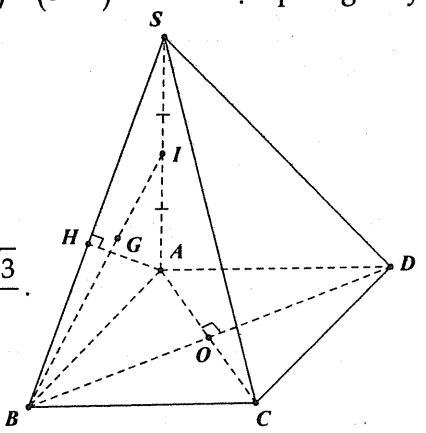
Hạ $AH\perp SB\Rightarrow AH\perp\left(SBC\right)$.

Vậy: $d\left(A,\left(SBC\right)\right)=AH$.

Trong ΔSAB có:

$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AS^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{3a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Kết luận: $d\left(A,\left(SBC\right)\right)=\frac{a\sqrt{3}}{2}$



b). Tính khoảng cách từ O đến mp(SBC).

Hai điểm A và O nằm trên đường thẳng có giao điểm với mp(SBC) tại B, nên có: $\frac{d\left(O,\left(SBC\right)\right)}{d\left(A,\left(SBC\right)\right)}=\frac{OC}{AC}=\frac{1}{2}\Rightarrow d\left(O,\left(SBC\right)\right)=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

c) Tính khoảng cách từ trọng tâm của tam giác SAB đến mp(SAC).

Ta có: $BO \perp mp(SAC) \Rightarrow d(B,(SAC)) = BO = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hai điểm B và G nằm trên đường thẳng có giao điểm với mp(SAC) tại I với I trung điểm của SA, nên có $\frac{d(G,(SAC))}{d(B,(SAC))} = \frac{GI}{BI} = \frac{1}{3} \Rightarrow d(G,(SAC)) = \frac{1}{3}d(B,(SAC)) = \frac{a\sqrt{2}}{6}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA = a và SA vuông góc với đáy ABCD.

a) Gọi I là trung điểm của SD. Chứng minh $AI \perp (SCD)$.

b) Tính khoảng cách từ trọng tâm của tam giác SBC đến mp(ABCD).

LỜI GIẢI

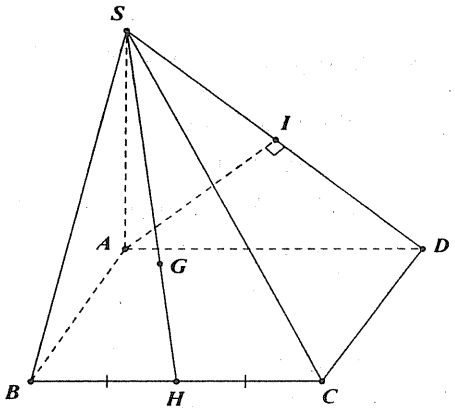
a) Chứng minh $AI \perp (SCD)$.

Có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp mp(SCD)$

$\Rightarrow (SAD) \perp (SCD)$.

Có $AI \perp SD$ vì tam giác SAD cân tại S.

Suy ra: $AI \perp mp(SCD)$.



b). Tính khoảng cách từ trọng tâm của tam giác SBC đến mp(ABCD).

Gọi H trung điểm của BC.

Hai điểm S và G nằm trên đường thẳng có giao điểm với mp(ABCD) tại H nên có :

$\frac{d(G,(ABCD))}{d(S,(ABCD))} = \frac{GH}{SH} = \frac{1}{3} \Rightarrow d(G,(ABCD)) = \frac{1}{3}d(S,(ABCD)) = \frac{a}{3}$

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật với AB = a, AD = 2a, SA = a và SA vuông góc với đáy (ABCD) . Gọi I , M là trung điểm của SC , CD .

a) Tính khoảng cách từ A đến (SBD).

b) Tính khoảng cách từ I đến (SBD).

c) Tính khoảng cách từ A đến (SBM).

LỜI GIẢI

a) Tính khoảng cách từ A đến (SBD).

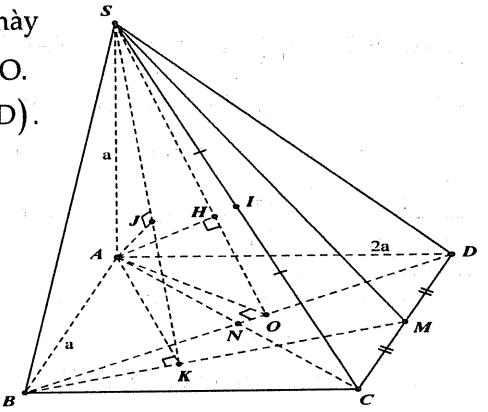
Kẻ $AO \perp BD$ tại O.

Có $BD \perp AO$ và $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAO)$

$\Rightarrow (SBD) \perp (SAO)$: hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SO.

Dựng $AH \perp SO$ tại H $\Rightarrow AH \perp (SBD)$.

Vậy: $d(A,(SBD)) = AH$.



Trong ΔABD có:

$$\frac{1}{AO^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AO = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

Trong ΔSAO có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AO^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{5}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a}{3}$.

Kết luận: $d(A,(SBD)) = AH = \frac{2a}{3}$.

b) Tính khoảng cách từ I đến (SBD)

Gọi $N = AC \cap BD$.

Vì hai điểm A và C nằm trên đường thẳng có giao điểm với mp(SBD) tại N,

nên có: $\frac{d(C,(SBD))}{d(A,(SBD))} = \frac{CN}{AN} = 1 \Rightarrow d(C,(SBD)) = d(A,(SBD))$.

Vì hai điểm I và C nằm trên đường thẳng có giao điểm với mp(SBD) tại S,

nên có: $\frac{d(I,(SBD))}{d(C,(SBD))} = \frac{IS}{CS} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(I,(SBD)) = \frac{1}{2} d(C,(SBD)) = \frac{a}{3}$

c) Tính khoảng cách từ A đến (SBM).

Kẻ $AK \perp BM$, $AJ \perp SK$. Suy ra: $AJ \perp mp(SBM) \Rightarrow d_{(A,(SBM))} = AJ$.

Có: $BM = \sqrt{BC^2 + CM^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{17}}{2}$.

Có: $S_{ABCD} = S_{\Delta ABM} + 2S_{\Delta BCM} \Leftrightarrow 2a^2 = \frac{1}{2} AK.BM + 2.\frac{1}{2} BC.CM$

$2a^2 = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{17}}{2} AK + \frac{a^2}{2} \Rightarrow AK = \frac{6a}{\sqrt{17}}$.

Trong ΔSAK có: $\frac{1}{AJ^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{17}{36a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{53}{36a^2} \Rightarrow AJ = \frac{6a}{\sqrt{53}}$

Kết luận: $d_{(A,(SBM))} = AJ = \frac{6a}{\sqrt{53}}$.

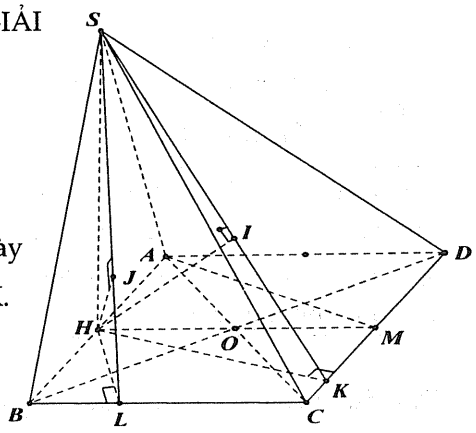
Cho hình thoi ABCD tâm O, cạnh a và AC = a. Từ trung điểm H của AB dựng SH vuông góc với (ABCD) với SH = a.

a) Tính khoảng cách từ H đến (SCD).

b) Tính khoảng cách từ O đến (SCD).

c) Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

LỜI GIẢI



a) Tính khoảng cách từ H đến (SCD).

Kẻ $HK \perp CD$ tại K.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp HK \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHK)$

$\Rightarrow (SCD) \perp (SHK)$: hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SK.

Kẻ $HI \perp SK$ tại $I \Rightarrow HI \perp (SCD)$.

Vậy: $d_{(H,mp(SCD))} = HI$.

Vì AB // CD nên $d_{(H,CD)} = d_{(A,CD)} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (ΔACD đều)

Trong ΔSHK vuông tại H:

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Kết luận: $d(H, mp(SCD)) = HI = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

b) Tính khoảng cách từ O đến (SCD).

Gọi M là giao điểm của HO và CD, O là tâm đối xứng của đáy.

Suy ra O trung điểm của HM.

Nên: $\dfrac{d(O, mp(SCD))}{d(H, mp(SCD))} = \dfrac{OM}{HM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow d(O, mp(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.

c) Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

Muốn tính khoảng cách từ A đến mp(SBC), ta phải tính khoảng cách từ H đến mp(SBC) trước sau đó sử dụng công thức tính tỉ lệ khoảng cách.

Kẻ $HL \perp BC$ tại L, có: $\begin{cases} BC \perp HL \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHL) \Rightarrow (SBC) \perp (SHL)$: Hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SL.

Kẻ $HJ \perp SL$ tại $J \Rightarrow HJ \perp (SBC) \Rightarrow d_{(H,mp(SBC))} = HJ$.

Ta có: ΔABC đều nên $\widehat{HBL} = 60^0$.

Trong tam giác HBL $HL = BH.\sin 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Trong ΔSHL vuông tại H: $\dfrac{1}{HJ^2} = \dfrac{1}{HL^2} + \dfrac{1}{HS^2} = \dfrac{16}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{19}{3a^2} \Rightarrow HJ = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$

Hai điểm A và H nằm trên đường thẳng có giao điểm với mp(SBC) tại B nên có: $\dfrac{d(A, mp(SBC))}{d(H, mp(SBC))} = \dfrac{AB}{HB} = 2 \Rightarrow d(A, mp(SBC)) = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

Cho hình chóp S.ABCD có SA = 2a và SA $\perp$ đáy (ABCD), đáy là hình thang vuông tại A và B, có AB = BC = a, AD = 2a.

a) Tính khoảng cách từ A, B đến (SCD).

b) Tính khoảng cách từ AD đến (SBC).

LỜI GIẢI

a) Đáy được vẽ lại ở hình 2. Dễ dàng chứng minh $CD \perp AC$.

$\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp mp(SAC)$

$\Rightarrow mp(SCD) \perp mp(SAC)$: hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SC. Dựng $AH \perp SC \Rightarrow AH \perp mp(SCD)$.

Vậy $d_{(A,(SCD))} = AH$

Trong ΔSAC có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AS^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{3}{4a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Kết luận: $d_{(A,(SCD))} = AH = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Gọi M là trung điểm của AD, thì:

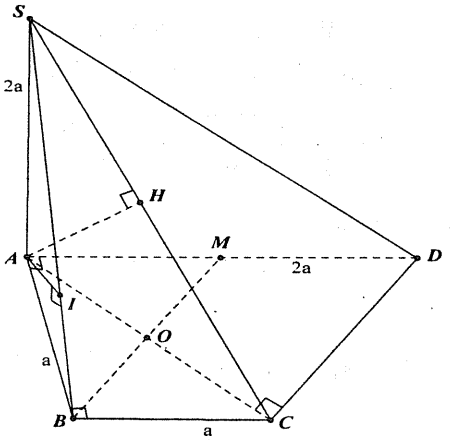
BCDM là hình vuông $\Rightarrow BM \,//\, CD$.

Gọi $O = BM \cap AC$.

Vì $MB \,//\, CD \Rightarrow BM \,//\, mp(SCD)$

$\Rightarrow d(B,(SCD)) = d(O,(SCD))$.

Hai điểm O và A nằm trên đường thẳng có giao điểm với mp(SCD) tại C nên có:



$$\frac{d(O,(SCD))}{d(A,(SCD))}=\frac{OC}{AC}=\frac{1}{2}\Rightarrow d(O,(SCD))=\frac{1}{2}d(A,(SCD))=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

Kết luận $d(B,(SCD))=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

b). Tính khoảng cách từ AD đến (SBC).

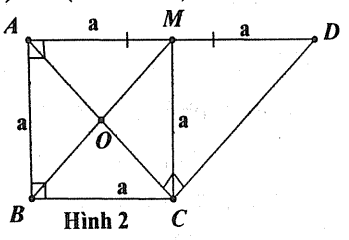
$AD\ //\ BC\Rightarrow AD\ //\ mp(SBC)\Rightarrow d(AD,(SBC))=d(A,(SBC))$

Ta có: $BC\perp mp(SAB)\Rightarrow (SBC)\perp (SAB)$:

hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SB.

Dựng $AI\perp SB(I\in SB)\Rightarrow AI\perp mp(SBC)$.

Vậy $d(A,(SBC))=AI$.



Hình 2

Trong ΔSAB có: $\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AS^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4a^2}=\frac{5}{4a^2}\Rightarrow AH=\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Kết luận: $d(AD,(SBC))=AH=\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi với $\widehat{BAD}=120^0$, BD = a, SA ⊥ đáy (ABCD), góc giữa mp(SBC) và mp đáy là 60^0. Tính:

a) Đường cao của hình chóp.

b) Khoảng cách từ A đến (SBC).

LỜI GIẢI

a). Gọi $O=AC\cap BD$. Kẻ $AH\perp BC$.

Có $\begin{cases}BC\perp AH\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp mp(SAH)\Rightarrow BC\perp SH$

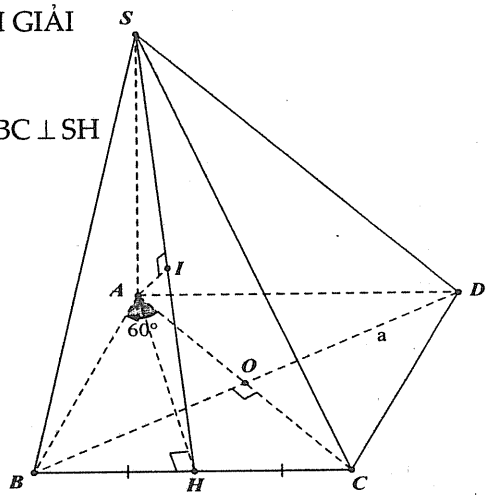
Có: $\begin{cases}(SBC)\cap(ABCD)=BC\\SH\perp BC,\ AH\perp BC\\SH\subset(SBC),AH\subset(ABCD)\end{cases}$

$\Rightarrow\left[\widehat{(SBC),(ABCD)}\right]=\widehat{AHS}$

AOB nửa tam giác đều:

$BO=\frac{AB.\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AB=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

ABC là tam giác đều: $AH=BO=\frac{a}{2}$.



$\tan\widehat{AHS} = \dfrac{SA}{AH} \Rightarrow SA = \tan 60^0.AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

b) Hạ $HA \perp SH \Rightarrow AH \perp mp(SBC)$. Vậy $d(A,(SBC)) = AI$

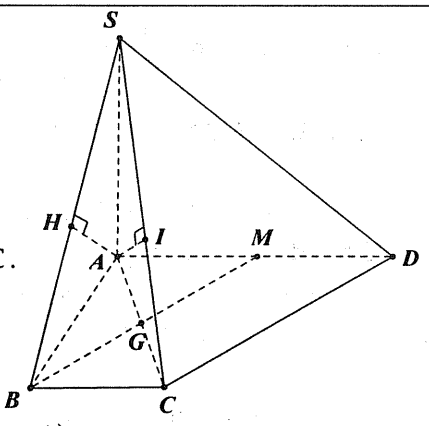
$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Kết luận: $d(A,(SBC)) = AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2007

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang. $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^0$, BA = BC = a, AD = 2a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

LỜI GIẢI



Gọi M trung điểm của AD có:

$MA = MC = MD \Rightarrow MC = \dfrac{1}{2}AD$.

Vậy: tam giác ACD vuông tại C.

Có: $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp SC$.

Kết luận tam giác SCD vuông tại C.

Dựng $AI \perp SC$ tại I.

Có $\begin{cases} AI \perp SC \\ AI \perp CD \end{cases} \Rightarrow AI \perp (SCD) \Rightarrow d(A, mp(SCD)) = AI$.

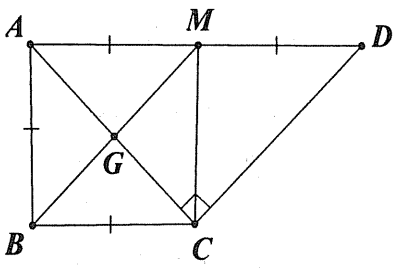
Trong ΔSAC vuông tại A có: $\dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AS^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{2a^2} = \dfrac{1}{a^2} \Rightarrow AH = a$

Gọi $G = BM \cap AC$. Ta có BM // CD nên BM // mp(SCD)

Vậy $d(B, mp(SCD)) = d(G, mp(SCD))$.

Hai điểm A và G nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SCD) tại C nên:

$$\frac{d(G, mp(SCD))}{d(A, mp(SCD))} = \frac{GC}{AC} = \frac{1}{2}$$



$\Rightarrow d\left(G,mp(SCD)\right)=\frac{1}{2}d\left(A,mp(SCD)\right)=\frac{a}{2}$ Trong ΔSAB vuông tại A có:

$SH.SB=SA^2 \Leftrightarrow \frac{SH.SB}{SB^2}=\frac{SA^2}{SB^2}=\frac{SA^2}{SA^2+AB^2}=\frac{2a^2}{2a^2+a^2}=\frac{2}{3}$.

Hai điểm B và H nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SCD) tại S nên: $\frac{d\left(H,mp(SCD)\right)}{d\left(B,mp(SCD)\right)}=\frac{HS}{BS}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow d\left(H,mp(SCD)\right)=\frac{2}{3}d\left(B,mp(SCD)\right)=\frac{a}{3}$.

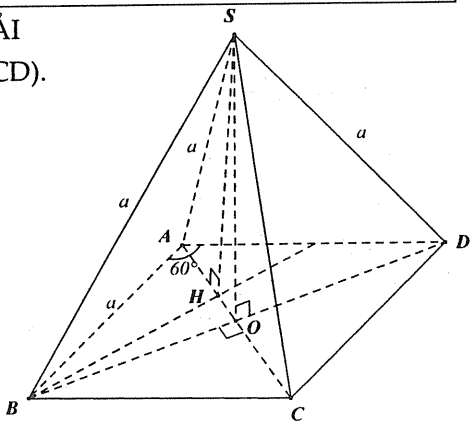
Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a có góc $\widehat{BAD}=60^0$ và SA=SB = SD = a.

a) Chứng minh (SAC) vuông góc với (ABCD).

b). Chứng minh tam giác SAC vuông.

c) Tính khoảng cách từ S đến (ABCD).

LỜI GIẢI



a) Chứng minh (SAC) vuông góc với (ABCD).

Gọi O là tâm của hình thoi ABCD.

Ta có: ΔSBD cân tại S có O là trung điểm của BD nên: $SO \perp BD$; *ABCD* là hình thoi nên $BD \perp AC$.

$\Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Mà $BD \subset (ABCD) \Rightarrow (SAC) \perp (ABCD)$.

b). Chứng minh tam giác SAC vuông

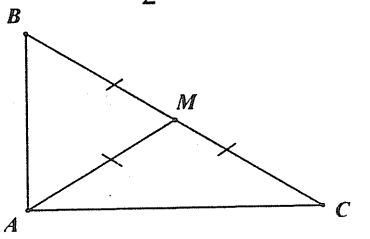
Ta chứng minh SO = AO = OC.

Do ΔABD cân tại A có $\widehat{BAD}=60^0 \Rightarrow \Delta ABD$ đều.

ΔABD đều cạnh a có AO là đường trung tuyến $\Rightarrow AO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét ΔSOD vuông tại O, ta có:

$SO=\sqrt{SD^2-OD^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



$\Rightarrow SO=AO=OC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Mà SO là đường trung tuyến của $\Delta SAC \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S.

<u>Chú ý:</u> Cho tam giác ABC có AM là đường trung tuyến ΔABC vuông tại A $\Leftrightarrow AM = MB = MC$.

"Trong một tam giác vuông đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền".

c) Tính khoảng cách từ S đến (ABCD).

Xét hình chóp S.ABD :

Ta có: SA = SB = SD = a . AB = BD = DA = a nên S.ABD là hình chóp đều.

Gọi H là trọng tâm của $\Delta ABD \Rightarrow SH \perp (ABD)$ (Theo tính chất của hình chóp đều)

$\Rightarrow SH \perp (ABCD)$ tại H $\Rightarrow d(S,(ABCD)) = SH$.

Vì H là trọng tâm ΔABD nên $AH = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong ΔSHA vuông tại H, ta có:

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\Rightarrow d(S,(ABCD)) = SH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Trong mp(P) cho tam giác ABC vuông tại A có BC = 2a, $\widehat{ACB} = 60^0$. Dựng hai đoạn BB′ = a, CC′ = 2a cùng vuông góc với mp (P) và ở cùng một bên với (P). Tính khoảng cách từ:

a) C đến mp(ABB′).

b) Trung điểm B'C đến mp(ACC′).

c) B' đến mp(ABC′).

LỜI GIẢI

Trong ΔABC: $AC = BC.\cos 60^0 = a, AB = BC.\sin 60^0 = a\sqrt{3}$

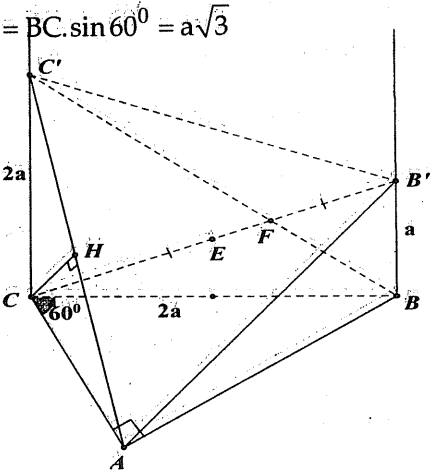
a) $\begin{cases} CA \perp AB \\ CA \perp BB' \end{cases} \Rightarrow CA \perp (ABB')$

$\Rightarrow d(C, mp(ABB')) = CA = a$.

b) Gọi E trung điểm của CB'.

$\begin{cases} BB' // CC' \\ CC' \subset (ACC') \end{cases} \Rightarrow BB' // (ACC')$.

Vậy: $d_{(B', mp(ACC'))} = d_{(B, mp(ACC'))}$



Ta có: $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp CC' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ACC')$

$\Rightarrow d_{(B,mp(ACC'))} = AB = a\sqrt{3}$

Ta có: EB' và mặt phẳng (ACC') cắt nhau tại C nên :

$$\frac{d_{(E,mp(ACC'))}}{d_{(B,mp(ACC'))}} = \frac{EC}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow d_{(E,mp(ACC'))} = \frac{1}{2} d_{(B,mp(ACC'))} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

c) Vì $CB', C'B \subset (BCC'B')$. Gọi $F = CB' \cap C'B$.

Để tính khoảng cách từ B' đến mp(ABC'), ta phải thông qua khoảng cách từ C đến mp(ABC'). Vì C là hình chiếu vuông góc của đỉnh, nên tính khoảng cách từ C đến mặt bên (ABC') là rất dễ dàng.

Trong tam giác ACC' kẻ $CH \perp AC'$.

Ta có: $\begin{cases} CH \perp AC' \\ CH \perp AB \left(\text{vì } AB \perp (ACC')\right) \end{cases} \Rightarrow CH \perp (ABC') \Rightarrow d_{(C,mp(ABC'))} = CH$

Trong $\Delta ACC'$ vuông tại C:

$$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CA^2} + \frac{1}{CC'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow CH = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Ngoài ra: $\Delta B'FB \sim CFC' \Rightarrow \frac{FB'}{FC} = \frac{BB'}{CC'} = \frac{1}{2}$

F là giao điểm của CB' với mp(ABC') nên:

$$\frac{d_{(B',mp(ABC'))}}{d_{(C,mp(ABC'))}} = \frac{B'F}{CF} = \frac{1}{2} \Rightarrow d_{(B',mp(ABC'))} = \frac{1}{2} d_{(C,mp(ABC'))} = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

TÍNH KHOẢNG CÁCH NHỜ TÍNH CHẤT CỦA TỨ DIỆN VUÔNG

Định nghĩa:

Tứ diện vuông là tứ diện có một góc tam diện ba mặt vuông. Trong tứ diện vuông có một tính chất đáng chú ý sau đây.

Tính chất:

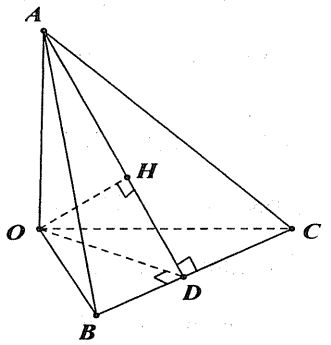
Giả sử O.ABC là tứ diện vuông tại O ($OA \perp OB$, $OB \perp OC$, $OC \perp OA$).
Khi đó đường cao OH của tứ diện OABC được tính theo công thức:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

Chứng minh:

Dựng $OD \perp BC (D \in BC)$, dựng $OH \perp AD (H \in AD)$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp OD \\ BC \perp AO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AOD) \Rightarrow (ABC) \perp (AOD) (BC \subset (ABC))$



Hai mặt phẳng (ABC) và (AOD) vuông góc với nhau theo giao tuyến AD có $OH \perp AD$ nên suy ra $OH \perp mp(ABC)$

Trong các tam giác vuông OBC và OAD có

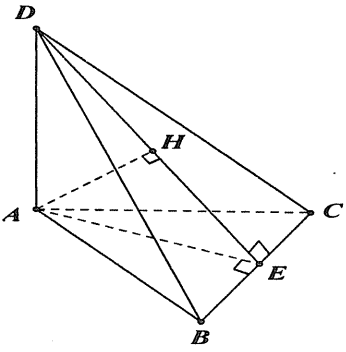
$$\frac{1}{OD^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \; ; \; \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OA^2}$$

Vì vậy : $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Sử dụng tính chất này để tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng trong nhiều trường hợp tỏ ra khá bất lợi. Đây là công thức đẹp và cũng được hay sử dụng. Trong đề thi đại học những năm vừa qua có nhiều bài sử dụng công thức này, chúng ta lần lượt xem những ví dụ sau đây:

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2002

Cho hình tứ diện ABCD có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC), biết $AC = AD = 4cm$, $AB = 3cm$, $BC = 5cm$ .Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD).



LỜI GIẢI

Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 25 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Tứ diện ABCD có đôi một vuông góc với nhau tại A

nên: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{17}{72}$

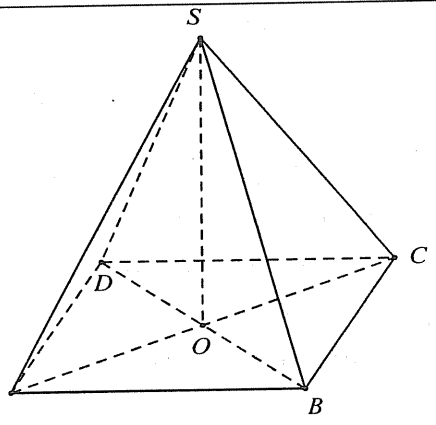
$\Rightarrow AH = \frac{6\sqrt{34}}{17}$

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^0$, SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SO = \frac{3a}{4}$.

a) Tính d(O;(SBC)), d(A;(SBC)).

b) Tính d(AD;SB).

LỜI GIẢI



a) Từ giả thiết có tam giác ABC đều nên có:

$OB = \frac{a}{2}; OC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do tứ diện OSBC vuông tại O $(OB \perp OC, OC \perp OS, OS \perp OB)$ nên:

$$\frac{1}{d^2(O;(SBC))} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

$$= \frac{16}{9a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{64}{9a^2}$$

Suy ra: $d(O;(SBC)) = \frac{3a}{8}$

Tính khoảng cách từ A mặt phẳng (SBC) thì ta sử dụng công thức tỉ lệ khoảng cách . Vì 2 điểm A và O nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SBC) tại C nên có:

$$\frac{d(A, mp(SBC))}{d(O, mp(SBC))} = \frac{AC}{OC} = 2 \Rightarrow d(A, mp(SBC)) = 2d(O, mp(SBC)) = 2.\frac{3a}{8} = \frac{3a}{4}$$

b) Vì AD // mp(SBC) nên $d(AD;SB) = d(AD;(SBC)) = d(A;(SBC)) = \frac{3a}{4}$.

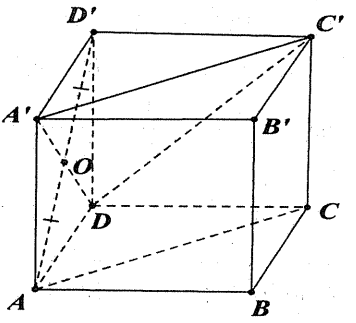
Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Tính $d(AC, DC')$.

LỜI GIẢI

Vì $AC // A'C' \Rightarrow AC // mp(DA'C')$ nên có:

$$d(AC,DC') = d(AC,mp(DA'C')) = d(A,mp(DA'C')) = d(D',mp(DA'C'))$$

Vì hai đểm A và D' nằm trên đường thẳng có giao điểm với mp(DA'C') tại O nên có: $\dfrac{d(A,mp(DA'C'))}{d(D',mp(DA'C'))} = \dfrac{AO}{D'O} = 1$



$$\Rightarrow d(A,mp(DA'C')) = d(D',mp(DA'C'))$$

Tứ diện D'DA'C' vuông tại D' nên:

$$\frac{1}{d^2(D',mp(DA'C'))} = \frac{1}{D'D^2} + \frac{1}{D'A'^2} + \frac{1}{D'C'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2}$$

$$\Rightarrow d(D',mp(DA'C')) = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Kết luận: $d(AC\,;\,DC') = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2008

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC.

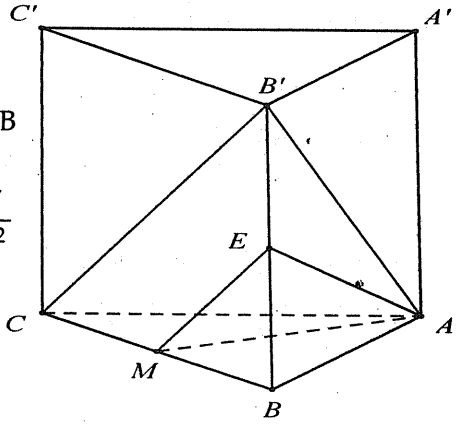
a) Tính $d(AM,B'C)$.

b) Tính $d(M,mp(AB'C))$.

LỜI GIẢI

a) Gọi E là trung điểm của BB' thì $B'C \,//\, mp(AME)$. Do đó

$$d(AM,CB') = d(CB',mp(AME)) = d(B',(AME)) = d(B,(AME))$$



Vì E trung đểm BB' nên:

$$d(B',(AME)) = d(B,(AME))$$

Vì tứ diện BAME là tứ diện vuông tại B nên ta có:

$$\frac{1}{d^2(B;(AME))} = \frac{1}{BE^2} + \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{7}{a^2}$$

Suy ra: $d(B\,;\,(AME)) = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Kết luận $d(AM;B'C) = \dfrac{a\sqrt{7}}{7}$

b) Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (AB'C) các bạn lanh mắt tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (AB'C) trước vì BB'AC là tứ diện vuông, sau đó sử dụng công thức tỉ số khoảng cách thì tính được khoảng cách từ M. Ta tính như sau:

$$\frac{1}{d^2\left(B,\left(AB'C\right)\right)}=\frac{1}{BA^2}+\frac{1}{BB'^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{2a^2}=\frac{5}{2a^2}$$

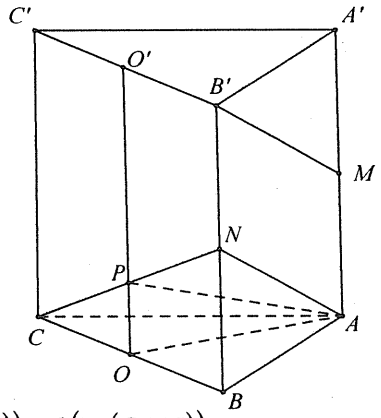
$$\Rightarrow d\left(B,\left(AB'C\right)\right)=\frac{a\sqrt{10}}{5}$$

Vì đường thẳng qua 2 điểm B và M có giao điểm với mặt phẳng (AB'C) tại C nên có:

$$\frac{d\left(M,\left(AB'C\right)\right)}{d\left(B,\left(AB'C\right)\right)}=\frac{MC}{BC}=\frac{1}{2}\Rightarrow d\left(M,\left(AB'C\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(B,\left(AB'C\right)\right)=\frac{a\sqrt{10}}{10}$$

Cho lăng trụ đều ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', BB' . Tính $d\left(B'M,CN\right)$.

LỜI GIẢI



Vì đề bài cho chưa có góc nào để có tứ diện vuông, nên ta phải dựng thêm đường thẳng để có tứ diện vuông. Vì ΔABC đều nên ta nghĩ ngay đến kẻ đường cao của tam giác.

Gọi O và O' lần lượt là trung điểm của BC và B'C'. Ta có ngay tứ diện vuông tại O.

Gọi P là giao điểm của OO' với CN.

Vì B'M // AN suy ra B'M // mp(CAN) nên:

$$d\left(MB',CN\right)=d\left(MB',\left(CAN\right)\right)=d\left(B',\left(CAN\right)\right)=d\left(B,\left(CAN\right)\right)$$

Muốn tính khoảng cách từ B đến (ACN) thông qua khoảng cách từ O đến (ACN).

Mặt phẳng (ACN) và mặt phẳng (ACP) như nhau.

Ta có: OA, OP, OC đôi một vuông góc tại O nên O.ACP là từ diện vuông tại O nên có:

$$\frac{1}{d^2\left(O,\left(ACP\right)\right)}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OC^2}+\frac{1}{OP^2}=\frac{4}{3a^2}+\frac{4}{a^2}+\frac{16}{a^2}=\frac{64}{3a^2}$$

$$\Rightarrow d\left(O,\left(ACP\right)\right)=\frac{a\sqrt{3}}{8}$$

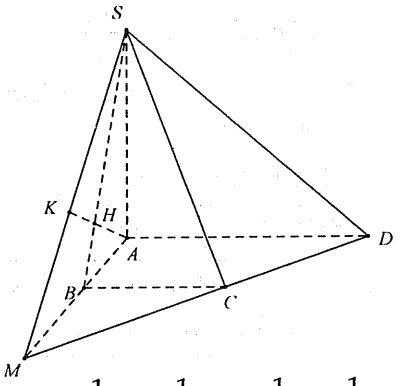
Vì BO có giao điểm với mặt phẳng (CAN) tại C nên có:

$$\frac{d(B,(CAN))}{d(O,(CAN))}=\frac{BC}{OC}=2\Rightarrow d(B,(CAN))=2d(O,(CAN))=2.\frac{a\sqrt{3}}{8}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2007

Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình thang, $\widehat{ABC}=\widehat{BAD}=90^0$, AB = BC = a, AD = 2a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy SA = $a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Tính d(H; (SCD)).

LỜI GIẢI



Gọi M là giao điểm của AB với CD;

K là giao điểm của AH với SM.

Dễ thấy B là trung điểm của AM.

Ta có: $\frac{BH}{BS}=\frac{BH.BS}{BS^2}=\frac{BA^2}{BS^2}=\frac{a^2}{3a^2}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ H là trọng tâm của tam giác SAM.

Từ đó: $\frac{d(H,(SCD))}{d(A,(SCD))}=\frac{KH}{KA}=\frac{1}{3}$

Tứ diện A.SDM vuông tại A nên: $\frac{1}{d^2(A;(SCD))}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AM^2}=\frac{1}{a^2}$

Suy ra: d(A,(SCD)) = a. Vậy d(H,(SCD))= $\frac{a}{3}$.

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm của DD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và A'D .

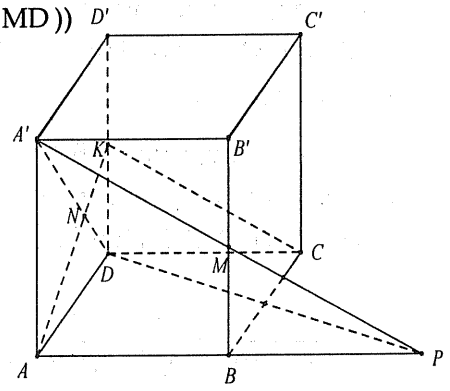
LỜI GIẢI

Gọi M là trung điểm của BB'. Ta có: A'M // KC nên:

d(CK, A'D) = d(CK, (A'MD))= d(K, (A'MD))

Gọi N là giao điểm của AK với A'D ;

P là giao điểm của AB với A'M



Khi đó: $\frac{d(K,(A'MD))}{d(A,(A'MD))}=\frac{NK}{NA}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow d(CK;\ A'D)=\frac{1}{2}d(A;(A'MD))$

$=\frac{1}{2}d(A;(A'DP))$

Tứ diện AA'DP vuông tại A nên:

$$\frac{1}{d^2(A,(A'DP))}=\frac{1}{AA'^2}+\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AP^2}=\frac{9}{4a^2}$$

Suy ra: d(A;(A'DP)) = $\frac{2a}{3}$. Vậy: d(CK; A'D)=$\frac{a}{3}$.

HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

1. Khái niệm

   Hai đường thẳng a và b không cùng thuộc một mặt phẳng (không có mặt phẳng nào chứa cả a và b) thì ta nói hai đường thẳng a và b chéo nhau .

2. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng:

   Nếu có đường thẳng d lần lượt vuông góc với cả hai đường thẳng a và b chéo nhau lần lượt tại M và N , thì đường thẳng d gọi là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b , còn độ dài đoạn MN gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

   Có hai dạng toán chính của bài này là :

   Dạng 1: Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

   Dạng 2: Xác định đường vuông góc chung và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau.

   Chúng ta lần lượt xét các phương pháp giải cụ thể của hai dạng trên như sau:

<u>DẠNG 1:</u> Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Phương pháp chung ta phải chuyển khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau về khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng hoặc khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng. Thường xảy ra những trường hợp sau đây:

1. Nếu đường thẳng a thuộc một mặt phẳng (P), và đường thẳng b song song với mặt phẳng (P). Thì khoảng cách giữa a và b bằng khoảng cách từ đường thẳng b đến mặt phẳng (P). CHỌN một điểm M thích hợp thuộc b sao có có thể tính khoảng cách dễ dàng đến mặt phẳng (P). Khoảng cách từ M đến (P) là khoảng cách giữa hai đường a và b.

   <u>Chú ý:</u> Nếu không tìm được một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia, thì ta phải dựng mặt phẳng (P) chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

2. Nếu đường thẳng a thuộc mặt phẳng (P), đường thẳng b thuộc mặt phẳng (Q). Mà hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau, thì khoảng cách giữa a và b bằng khoảng cách (P) và (Q).

3. Cụ thể tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b, với a là cạnh bên còn b là một cạnh của đáy. Cách làm như sau:

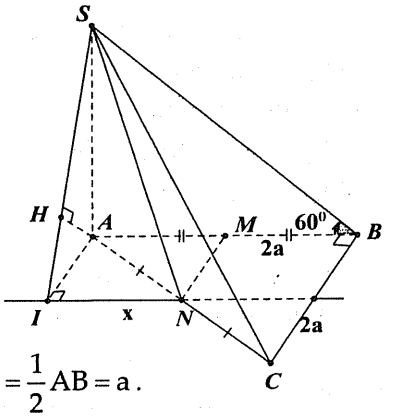
   Gọi I là giao điểm của đường thẳng a với mặt đáy. Từ I dựng đường thẳng Δ song song với b. Lúc đó b song song với mặt phẳng (P) chứa a và Δ. Chọn một điểm M trên b sao cho có thể tính khoảng cách đến mặt phẳng (P). Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng khoảng cách giữa a và b.

   Thông qua các ví dụ sau các bạn sẽ hiểu rõ hơn:

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2011

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng qua SM và song song với BC cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

LỜI GIẢI



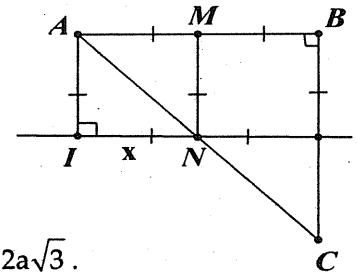
Ta có: $mp(SAB) \cap mp(SAC) = SA$, và hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Suy ra $SA \perp mp(ABC)$.

Mặt phẳng qua SM và song song với BC cắt AC tại N, suy ra MN // BC và N trung điểm của AC.

Trong tam giác ABC có: $MN = \frac{1}{2}BC = a, BM = \frac{1}{2}AB = a$.

Ngoài ra: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.



Vì: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SB \perp BC, AB \perp BC \\ SB \subset (SBC), AB \subset (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SBC),(ABC)} \right) = \widehat{SBA} = 60^0$.

Xét ΔSAB vuông tại A: $SA = AB.\tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$.

Tính khoảng cách giữa AB và SN, *đây là bài toán tính khoảng cách giữa cạnh bên SN và cạnh đáy AB. Do chưa có mặt phẳng nào chứa một trong hai đường trên nên ta phải dựng một mặt phẳng (P) chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.* Cách dựng theo phương pháp 3 ở trên:

N là giao điểm của cạnh bên SN với mặt đáy (ABC).

Từ N, kẻ Nx // AB, suy ra AB // $mp(SNx)$ (vì $Nx \subset (SNx)$).

Nên $d(AB,SN) = d(AB, mp(SNx)) = d(A, mp(SNx))$.

Chú ý: *A là hình chiếu của đỉnh, còn mặt phẳng (SNx) là mặt phẳng bên. Các bạn xem lại phương pháp tính khoảng cách từ hình chiếu của đỉnh lên một mặt phẳng bên ở bài khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng*

Dựng $AI \perp Nx$ tại I. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SI.

Vì $\begin{cases} Nx \perp AI \\ Nx \perp SA \end{cases} \Rightarrow Nx \perp (SAI) \Rightarrow mp(SNx) \perp mp(SAI)$.

Hai mặt phẳng (SNx) và (SAI) vuông góc với nhau có giao tuyến SI, mà $AH \perp SI \Rightarrow AH \perp (SNx)$. Vậy $d(A, mp(SNx)) = AH$.

Ta có: $AI = \frac{1}{2}BC = a$.

Trong ΔSAI vuông tại A có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{12a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{13a^2}{12} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

Kết luận $d(A, mp(SNx)) = AH = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2012.

Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho HA = 2HB. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

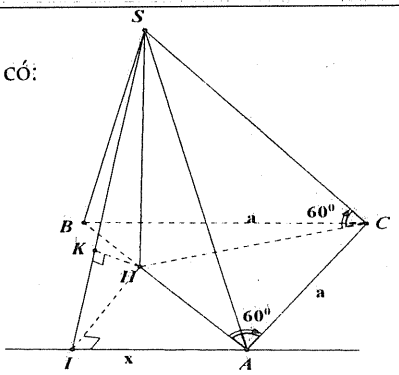
LỜI GIẢI

Áp dụng định lý cosin cho tam giác AHC có:

$$CH^2 = AC^2 + AH^2 - 2AC.CH.\cos\widehat{CAH}$$

$$= a^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 - 2.a.\frac{2a}{3}.\cos 60^0 = \frac{7a^2}{7}$$

$$\Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

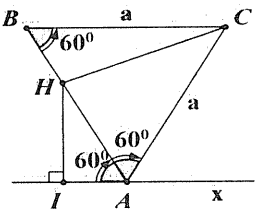


Ta có: HC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (ABC).

Nên góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SCH} = 60^0$.

Trong tam giác SCH vuông tại H có:

$$SH = CH.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{7}}{3}.\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{21}}{3}.$$



Tính khoảng cách giữa SA và BC, *đây là bài toán tính khoảng cách giữa cạnh bên SA và cạnh đáy BC. Do chưa có mặt phẳng nào chứa một trong hai đường trên nên ta phải dựng một mặt phẳng (P) chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia*. Cách dựng theo phương pháp 3 ở trên :

A là giao điểm của cạnh bên SA với mặt đáy (ABC).

Từ A kẻ Ax // BC. Suy ra BC // $mp(SAx)$ (vì $Ax \subset (SAx)$) nên:

$d(BC,SA) = d(BC, mp(SAx)) = d(B, mp(SAx))$.

BC song song với mặt phẳng (SAx) thì khoảng cách mọi điểm trên đường thẳng BC đến mặt phẳng (SAx) đều bằng nhau.

Vì sao Thầy lại chọn điểm B mà không chọn điểm khác chẳng hạn là C , là vì điểm B nằm trên đường thẳng có chứa điểm H là hình chiếu của đỉnh, việc tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng bên (SAx) là rất dễ dàng. Thông qua công thức tính tỉ số khoảng cách thì ta tính được khoảng cách từ B.

Nên trên lý thuyết Thầy có nói chọn điểm M thích hợp có thể tính khoảng cách đến mp(P), cụ thể ở bài này là điểm B.

Dựng $HI \perp Ax$ tại I. Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên SI.

Vì $\begin{cases} Ax \perp HI \\ Ax \perp SH \end{cases} \Rightarrow Ax \perp (SHI) \Rightarrow mp(SAx) \perp mp(SHI)$.

Hai mặt phẳng (SAx) và (SHI) vuông góc với nhau có giao tuyến SI.

Mà $HK \perp SI \Rightarrow HK \perp (SAx)$. Vậy $d(H, mp(SAx)) = HK$.

Trong ΔAIH vuông tại I có $HI = HA.\sin 60^0 = \frac{2a}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong ΔSIH vuông tại H có:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HI^2} = \frac{9}{21a^2} + \frac{9}{3a^2} = \frac{24}{7a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{24}}.$$

Đường thẳng đi qua hai điểm B và H có giao điểm với mặt phẳng (SAx) là A nên: $\frac{d(B, mp(SAx))}{d(H, mp(SAx))} = \frac{BA}{HA} = \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow d(B, mp(SAx)) = \frac{3}{2} d(H, mp(SAx)) = \frac{3}{2}.\frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{24}} = \frac{a\sqrt{42}}{8}$$

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA = SB = SC = SD = $a\sqrt{2}$. Gọi I, K là trung điểm của AD, BC.

a) Chứng minh (SIK) $\perp$ (SBC).

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD.

LỜI GIẢI

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có: OA = OB = OC = OD (tính chất hình vuông)

Theo đề bài SA = SB = SC = SD = $a\sqrt{2}$.

Suy ra: O là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD), $SO \perp (ABCD)$.

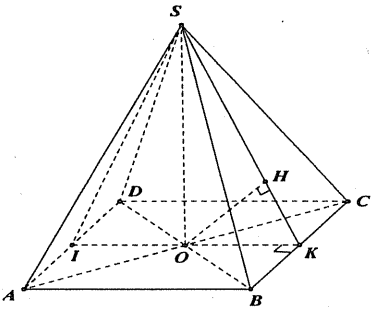
Có: $\begin{cases} BC \perp IK \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SIK)$

$\Rightarrow (SBC) \perp (SIK)$ (vì $BC \subset (SBC)$).

Có AD // BC $\Rightarrow$ AD / /mp(SBC), nên:

$d(AD,SB) = d(AD,(SBC))$

$= d(I,(SBC))$ (vì $I \in AD$).



Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên SK có:

$\begin{cases} OH \perp SK \\ OH \perp BC \end{cases} \Rightarrow OH \perp mp(SBC) \Rightarrow d(O,mp(SBC)) = OH.$

Trong ΔSAO vuông tại O có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Trong ΔSOK vuông tại O có:

$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{4}{6a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{14}{3a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{42}}{14}$.

Hai điểm I và O cùng nằm trên đường thẳng có giao điểm với mp(SBC) tại K nên: $\frac{d(I,mp(SBC))}{d(O,mp(SBC))} = \frac{IK}{OK} = 2$

$\Rightarrow d(I,mp(SBC)) = 2d(O,mp(SBC)) = 2.\frac{a\sqrt{42}}{14} = \frac{a\sqrt{42}}{7}$.

Kết luận: $d(AD,SB) = \frac{a\sqrt{42}}{7}$

Cho lăng trụ tam giác ABC.A₁B₁C₁ có tất cả các cạnh bằng a, góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng (A₁B₁C₁) thuộc đường thẳng B₁C₁. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA₁ và B₁C₁ theo a.

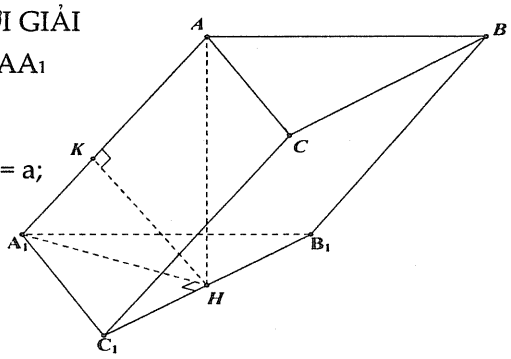
LỜI GIẢI

Do $AH \perp (A_1B_1C_1)$ nên góc giữa AA₁ và (A₁B₁C₁) là góc $\widehat{AA_1H} = 30^0$.

Xét tam giác vuông AHA₁ có: AA₁ = a;

$A_1H = AA_1.\cos 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$AH = AA_1.\sin 30^0 = \frac{a}{2}$.



Do tam giác $A_1B_1C_1$ là Δ đều cạnh a; H thuộc B_1C_1 và $A_1H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên:

A_1H vuông góc với B_1C_1.

Mặt khác: $AH \perp B_1C_1$ nên: $B_1C_1 \perp (AA_1H)$

Kẻ đường cao HK của tam giác AA_1H thì HK chính là khoảng cách giữa AA_1 và B_1C_1

Ta có: $AA_1.HK = A_1H.AH \Rightarrow HK = \frac{A_1H.AH}{AA_1} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

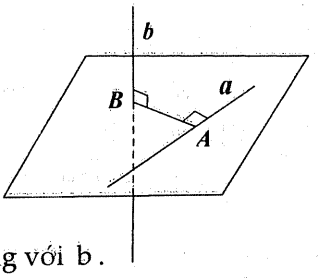
<u>DẠNG 2:</u> Xác định đường vuông góc chung.

<u>Phương pháp giải:</u>

Ta có các trường hợp sau đây:

a) Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau và $a \perp b$

- Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và vuông góc với b tại B.
- Trong (α) dựng $BA \perp a$ tại A, ta được độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.

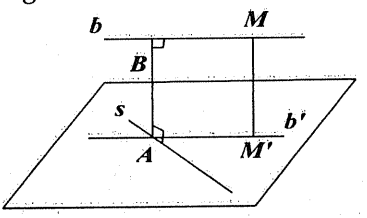


b) Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau nhưng không vuông góc với nhau.

<u>Cách 1:</u>

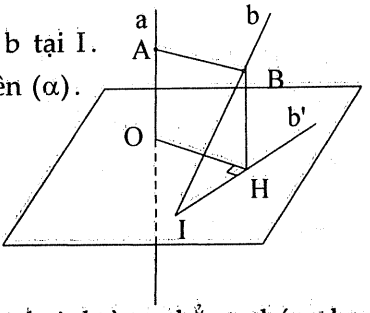
- Ta dựng mặt phẳng (α) chứ a và song song với b.
- Lấy một điểm M tùy ý trên b, dựng $MM' \perp (\alpha)$ tại M'.
- Từ M' dựng $b' // b$ cắt a tại A.

Từ A dựng $AB // MM'$ cắt b tại B, độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.



<u>Cách 2:</u>

- Ta dựng mặt phẳng $(\alpha) \perp a$ tại O, (α) cắt b tại I.
- Dựng hình chiếu vuông góc của b là b' trên (α).
- Trong mặt phẳng (α), vẽ $OH \perp b'$, $H \in b'$.
- Từ H dựng đường thẳng song song với a cắt b tại B.
- Từ B dựng đường thẳng song song với OH cắt a tại A.



- Độ dài đoạn thẳng AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA = h và $\perp$ đáy. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của:

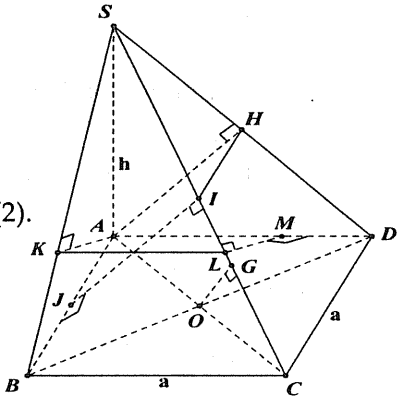
a) SB và CD. b) AD và SB

c) AB và SD d) SC và BD.

e) SC và AB. f) SC và AD

LỜI GIẢI

a) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của SB và CD



$BC \perp AB$ (ABCD hình vuông)

$BC \perp SA$ (Vì $SA \perp (ABCD)$)

$\Rightarrow BC \perp mp(SAB) \Rightarrow BC \perp SB$ (1).

Mà: $BC \perp CD$ (ABCD hình vuông) (2).

Từ (1) và (2) ta có: BC là đường vuông góc chung của SB và CD, và BC cũng là khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD.

Kết luận $d(SB,CD) = BC = a$.

b) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của SB và AD

Trong ΔSAB kẻ $AK \perp SB$ tại K (3)

$$\begin{cases} AD \perp AB & \text{(ABCD hình vuông)} \\ AD \perp SA & \text{(Vì } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow AD \perp AK\left(AK \subset (SAB)\right) \quad (4)$$

Từ (3) và (4) thì AK là đường vuông góc chung của SB và AD, và AK cũng là khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD .

Trong ΔSAB vuông tại A :

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{a^2+h^2}{a^2.h^2} \Rightarrow AK = \frac{a.h}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$

Kết luận $d(SB,AD) = AK = \dfrac{a.h}{\sqrt{a^2+h^2}}$.

c) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SD.

Trong ΔSAD kẻ $AH \perp SD$ tại H (5)

Ta có: $\begin{cases} AB \perp AD & \text{(ABCD hình vuông)} \\ AB \perp SA & \text{(Vì } SA \perp (ABCD)) \end{cases}$

$\Rightarrow AB \perp mp(SAD) \Rightarrow AB \perp AH\left(AH \subset (SAD)\right)$ (6)

Từ (5) và (6) thì AH là đường vuông góc chung của SD và AB, và AH cũng là khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AB.

Trong ΔSAD vuông tại A : $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{1}{h^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{a^2+h^2}{a^2.h^2}$

$\Rightarrow AH=\frac{a.h}{\sqrt{a^2+h^2}}$.

Kết luận: $d(SD,AB)=AH=\frac{a.h}{\sqrt{a^2+h^2}}$.

d) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của SC và BD.

Gọi $O=AC\cap BD$. Trong ΔSAC kẻ $OG\perp SC$ tại G (7)

Ta có: $\begin{cases}BD\perp AC & \text{(Tính chất hình vuông)}\\ BD\perp SA & \text{(Vì } SA\perp (ABCD))\end{cases}$

$\Rightarrow BD\perp mp(SAC)\Rightarrow BD\perp OG\left(OG\subset (SAC)\right)$ (8).

Từ (7) và (8) thì OG là đường vuông góc chung của SC và BD, và OG cũng là khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD.

Trong ΔSAC có: $AC=a\sqrt{2}$; $CO=\frac{1}{2}AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$;

$SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=\sqrt{h^2+2a^2}$

Ta có: $\Delta CGO\sim\Delta CAS(g.g)\Rightarrow\frac{CO}{CS}=\frac{OG}{SA}$

$\Rightarrow OG=\frac{CO}{CS}.SA=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2a^2+h^2}}.h=\frac{a.h.\sqrt{2}}{2\sqrt{2a^2+h^2}}$.

Kết luận: $d(SC,BD)=OG=\frac{a.h.\sqrt{2}}{2\sqrt{2a^2+h^2}}$.

e). Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của SC và AB.

Ta có: $\begin{cases}AH\perp SD\\ AH\perp CD\left(CD\perp (SAD)\right)\end{cases}\Rightarrow AH\perp mp(SCD)\Rightarrow AH\perp SC$.

Từ H kẻ HI // CD.

Suy ra HI và AB cùng thuộc một mặt phẳng vì cùng song song với CD.

Trong mặt phẳng (AB,HI) kẻ IJ // AH , IJ cắt AB tại J.

Ta có: $\begin{cases} IJ \,//\, AH \\ AH \perp SC,\ AH \perp AB \end{cases}$ (Đã chứng minh ở trên) $\Rightarrow \begin{cases} IJ \perp SC \\ IJ \perp AB \end{cases}$

Vậy: IJ là đường vuông góc chung của SC và AB, và IJ cũng là khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB.

Kết luận: $d(SC, AB) = IJ = AH = \dfrac{a.h}{\sqrt{a^2 + h^2}}$.

f) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của SC và AD.

Ta có: $\begin{cases} AK \perp SB \\ AK \perp BC\left(BC \perp (SAB)\right) \end{cases} \Rightarrow AK \perp mp(SBC) \Rightarrow AK \perp SC$.

Từ K kẻ KL // BC $\Rightarrow$ KL và AD cùng thuộc một mặt phẳng vì cùng song song với BC.

Trong mặt phẳng (AD,KL) kẻ LM // AK , LM cắt AD tại M.

Ta có: $\begin{cases} LM \,//\, AK \\ AK \perp SC, AK \perp AD \end{cases}$ (Đã chứng minh ở trên) $\Rightarrow \begin{cases} LM \perp SC \\ LM \perp AD \end{cases}$

Vậy: LM là đường vuông góc chung của SC và AD, và LM cũng là khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AD.

Kết luận: $d(SC, AD) = LM = AK = \dfrac{a.h}{\sqrt{a^2 + h^2}}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, có góc $\widehat{BAD} = 120^0$, SA = h và SA vuông góc với đáy (ABCD). Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của:

a) SB và CD.

b) BD và SC.

c) SC và AB.

LỜI GIẢI

a) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của SB và CD.

Trong mặt phẳng (ABCD) kẻ CL $\perp$ AB tại L

Vì SA $\perp$ (ABCD), mà SA $\subset$ (SAB) nên:

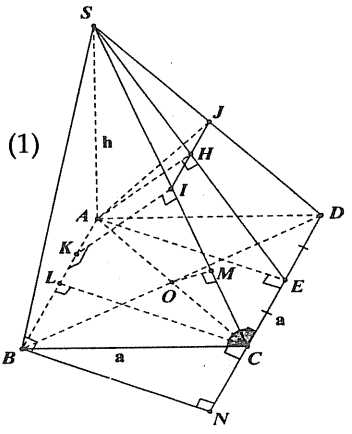
$(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow CL \perp (SAB)$

$\Rightarrow CL \perp SB$ (2)

Trong mặt phẳng (ABCD), từ B kẻ:

BN // LC với N $\in$ CD (3)

(1)



Từ (1), (2), (3) thì BN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng SB và CD và khoảng cách giữa chúng là CL.

Vì ABCD là hình thoi có $\widehat{BAD} = 120^0$ nên: ΔABC đều.

Mà CL đường cao của tam giác: $CL = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Kết luận: $d(SB, CD) = CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

b). Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của BD và SC.

Gọi $O = AC \cap BD$. Trong ΔSAC kẻ $OM \perp SC$ tại M (4)

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC & \text{(Tính chất hình thoi)} \\ BD \perp SA & \text{(Vì } SA \perp (ABCD)) \end{cases}$

$\Rightarrow BD \perp mp(SAC) \Rightarrow BD \perp OM \left(OM \subset (SAC)\right)$ (5)

Từ (4) và (5) thì OM là đường vuông góc chung của SC và BD, và OM cũng là khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD.

Trong ΔSAC có: $AC = a, CO = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}, SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{h^2 + a^2}$.

Ta có: $\Delta CMO \sim \Delta CAS (g.g) \Rightarrow \frac{CO}{CS} = \frac{OM}{SA}$

$$\Rightarrow OM = \frac{CO}{CS}.SA = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + h^2}}.h = \frac{a.h.}{2\sqrt{a^2 + h^2}}.$$

Kết luận: $d(SC, BD) = OG = \frac{a.h.}{2\sqrt{a^2 + h^2}}$.

c) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của SC và AB.

Kẻ $AE \perp CD$ tại E.

$$\begin{cases} CD \perp AE \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAE) \Rightarrow (SCD) \perp (SAE) \left(CD \subset (SCD)\right).$$

Kẻ $AH \perp SE$ tại H và có $\begin{cases} (SAE) \cap (SCD) = SE \\ (SAE) \perp (SCD) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow AH \perp SC$.

Từ H kẻ HI // CD.

Suy ra HI và AB cùng thuộc một mặt phẳng vì cùng song song với CD.

Trong mặt phẳng (AB,HI), kẻ IK // AH , IK cắt AB tại K.

Ta có: $\begin{cases} IK \parallel AH \\ AH \perp SC, AH \perp AB \left(\text{vì } AH \perp CD, CD \parallel AB\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IK \perp SC \\ IK \perp AB \end{cases}$

Vậy IK là đường vuông góc chung của SC và AB, và IK cũng là khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB.

Trong ΔSAE vuông tại A: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{3a^2 + 4h^2}{3a^2.h^2}$

$\Rightarrow AH = \dfrac{a.h\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4h^2}}$

Kết luận: $d\left(SC, AB\right) = IK = AH = \dfrac{a.h\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4h^2}}$.

Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình thoi cạnh a, góc A bằng 60^0, góc của đường chéo AC' và mp đáy bằng 60^0.

a) Tính đường cao của hình hộp đó.

b) Tìm đường vuông góc chung của A'C và BB'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng đó.

LỜI GIẢI

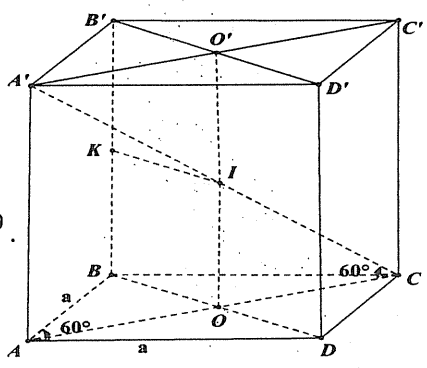
Vì ABCD.A'B'C'D' là hình hộp đứng nên: $AA' \perp \left(ABCD\right)$.

Ta có: AC là hình chiếu vuông góc của A'C trên mặt phẳng (ABCD) nên :

$\left(\widehat{A'C, \left(ABCD\right)}\right) = \left(\widehat{A'C, AC}\right) = \widehat{A'CA} = 60^0$.

Vì ABCD là hình thoi có $\widehat{A} = 60^0$ nên:

ΔBAD đều $\Rightarrow AC = 2AO = a\sqrt{3}$.



Trong $\Delta A'AC$ vuông tại A: $AA' = AC.\tan\widehat{A'CA} = a\sqrt{3}.\sqrt{3} = 3a$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD. I trung điểm của A'C. Ta có OI là đường trung bình của $\Delta A'AC$.

Vậy: OI // AA' // BB' (1)

Ta có: $\begin{cases} BO \perp AC \text{ (Vì ABCD hình thoi)} \\ BO \perp AA \text{ (Vì } AA' \perp (ABCD)) \end{cases}$

$\Rightarrow BO \perp mp\left(A'AC\right) \Rightarrow \begin{cases} BO \perp AA' \\ BO \perp CA' \end{cases}$ (2)

Trong mặt phẳng (BDD'B') kẻ IK // BO (3)

Từ (1), (2) và (3) ta suy ta IK là đường vuông góc chung của A'C và BB'.
IK cũng là khoảng cách giữa A'C và BB'.

Kết luận: $d(A'C, BB') = IK = BO = \frac{BD}{2} = \frac{a}{2}$.

Cho chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng 3a, cạnh bên bằng 2a. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Dựng và tính đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SA và BC.

LỜI GIẢI

Trong tam giác ABC đều, kéo dài AG cắt BC tại M
$\Rightarrow AG \perp BC$

Chóp S.ABC đều, mà G là tâm ΔABC nên:
$SG \perp (ABC) \Rightarrow SG \perp BC$

Vì $BC \perp SG$ và $BC \perp AM$ từ đó $\Rightarrow BC \perp (SAM)$.

Trong ΔSAM kẻ $MN \perp SA (N \in SA)$

$\Rightarrow MN \perp BC$ (vì $MN \subset (SAM)$).

Do vậy: MN là đoạn vuông góc chung của BC và SA.

Trong ΔSAG vuông tại G có:

$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$

Trong ΔSAM có: $MN.SA = SG.AM$

$\Leftrightarrow MN.2a = a.\frac{3a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MN = \frac{3a\sqrt{3}}{4}$.

Cho hình chóp tam giác S.ABC có SA vuông góc với mp(ABC) và $SA = a\sqrt{2}$.. Đáy ABC là tam giác vuông tại B với BA=a. Gọi M là trung điểm của AB. Tìm độ dài đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng SM và BC.

LỜI GIẢI

Ta có: $\left.\begin{matrix} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$ tại B.

Dựng $BH \perp SM (H \in SM)$.

Ta thấy: $BC \perp BH (BH \subset (SAB))$.

Vậy: BH chính là đoạn vuông góc chung của SM và BC.

Ta tính BH như sau:

Có $\Delta MHB \sim \Delta MAS \Rightarrow \frac{HB}{AS} = \frac{MB}{MS}$

$$\Leftrightarrow \frac{HB}{AS}=\frac{MB}{\sqrt{AS^2+AM^2}}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{3a}{2}}=\frac{1}{3}\Rightarrow HB=\frac{AS}{3}=\frac{a\sqrt{2}}{3}$$

Trong mặt phẳng (P) cho hình thoi ABCD có tâm là O, cạnh a và $OB=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Trên đường thẳng vuông góc với mp(ABCD) tại O, lấy điểm S sao cho SB = a. Dựng và tính đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng:

a) BD và SC

b) AB và SD

a) Dễ dàng chứng minh được: $BD\perp(SAC)$ (vì $BD\perp AC, BD\perp SO$)

Trong mp(SAC), kẻ $OM\perp SC(M\in SC)$

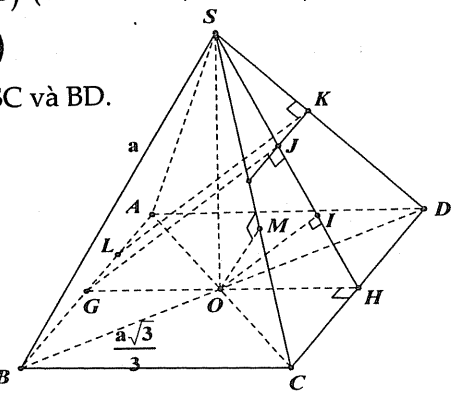
$\Rightarrow$ OM là đoạn vuông góc chung của SC và BD.

Trong ΔSOB vuông tại O có:

$$SO=\sqrt{SB^2-BO^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Trong ΔBOC vuông tại O có:

$$OC=\sqrt{BC^2-BO^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$$



Trong ΔSOC vuông tại O có: $SC=\sqrt{SO^2+OC^2}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Và $OM.SC=OS.OC\Leftrightarrow OM.\frac{2a\sqrt{3}}{3}=\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow OM=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi G, H lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Ta có: $\begin{cases}CD\perp GH\\CD\perp SO\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SGH)\Rightarrow(SCD)\perp(SGH)\big(CD\subset(SCD)\big)$.

Từ O dựng $OI\perp SH$ là giao tuyến của hai mặt phẳng vuông góc nhau (SCD) và (SGH), suy ra $OI\perp(SCD)$.

Trong mặt phẳng (SGH) kẻ GJ // OI ($J\in SH$) $\Rightarrow GJ\perp(SCD)$.

Từ J dựng đường thẳng song song với CD cắt SD tại K.

Suy ra AB và JK cùng thuộc một mặt phẳng.

Trong mặt (AB,JK) dựng KL // GJ ($L\in AB$).

Suy ra KL là đoạn vuông góc chung của AB và SD.

Thật vậy: Vì $GJ\perp(SCD)\Rightarrow\begin{cases}GJ\perp SD\\GJ\perp CD\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}GJ\perp SD\\GJ\perp AB\big(AB//CD\big)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}KL\perp SD\\KL\perp AB\end{cases}$

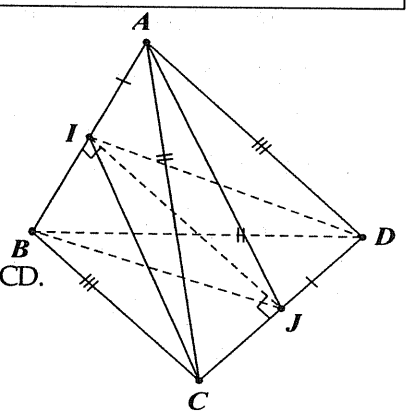
Trong ΔSOH : $\frac{1}{OI^2}=\frac{1}{OS^2}+\frac{1}{OH^2}=\frac{3}{2a^2}+\frac{4}{a^2}=\frac{11}{2a^2}\Rightarrow OI=\frac{a\sqrt{22}}{11}$

$\Rightarrow GJ=2OI=\frac{2a\sqrt{22}}{11}$

Kết luận: $d(AB,SD)=\frac{2a\sqrt{22}}{11}$.

Cho tứ diện ABCD với AB = CD = a, AC = BD = b, BC = AD = c. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và CD.

LỜI GIẢI



Ta có: $\Delta CAB = \Delta DBA$ (c.c.c) nên hai đường trung tuyến CI và DI tương ứng bằng nhau , nên tam giác ICD cân tại I.

Suy ra: $IJ \perp CD$.

Chứng minh tương tự ta có: $IJ \perp AB$.

Kết luận: IJ là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

BJ là đường trung tuyến của ΔBCD có:

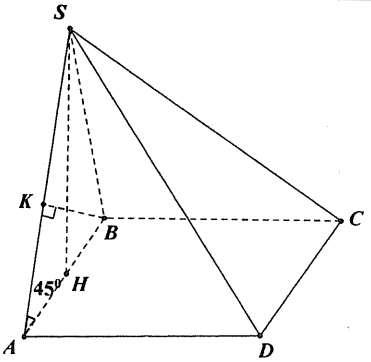
$BJ^2=\frac{BC^2+BD^2}{2}-\frac{CD^2}{4}=\frac{c^2+b^2}{2}-\frac{a^2}{4}$.

Trong ΔBJI vuông tại I có:

$IJ^2=BJ^2-BI^2=\frac{c^2+b^2}{2}-\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\Rightarrow IJ=\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a; mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABCD); góc giữa mặt phẳng (SAD) và mặt phẳng (ABCD) bằng 45^0. Tính khoảng cách từ C tới mặt phẳng (SAD).

LỜI GIẢI



Gọi H là hình chiếu của S trên AB.

Vì $(SAB)\perp(ABCD)$ theo giao tuyến AB nên:

$SH\perp(ABCD)$

Vì: $\begin{cases}AD\perp AB\\AD\perp SH\end{cases}\Rightarrow AD\perp SA$.

Suy ra góc giữa mặt phẳng (SAD) và mặt phẳng (ABCD) là góc giữa 2 đường thẳng SA và AB và bằng 45^0.

Vì BC // mp (SAD) $\Rightarrow$ d(C; mp (SAD)) = d(B; mp (SAD)).

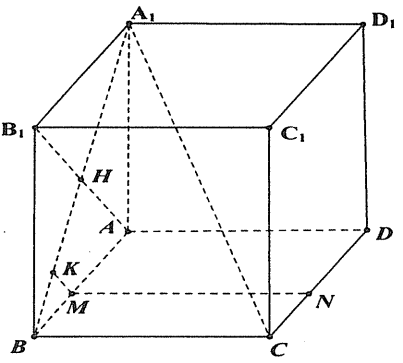
Gọi K là hình chiếu vuông góc của B lên SA có:

$$\begin{cases} BK \perp SA \\ BK \perp AD \end{cases} \Rightarrow BK \perp (SAD) \Rightarrow d(B, mp(SAD)) = BK$$

Trong ΔABK vuông tại K có $\widehat{BAK} = 45^0$, suy ra ΔABK vuông cân tại K nên $BK = AK = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Kết luận $d(C, mp(SAD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có độ dài cạnh bằng a. Trên các cạnh AB và CD lấy lần lượt các điểm M, N sao cho BM = CN = x. Xác định ví trí điểm M sao cho khoảng cách giữa hai dường thẳng A_1C và MN bằng $\frac{a}{3}$.

LỜI GIẢI



Ta có: MN // BC $\Rightarrow$ MN // $mp(A_1BC)$

$\Rightarrow d(MN, A_1C) = d(MN, mp(A_1BC))$

Gọi $H = A_1B \cap AB_1$ và $MK // HA, K \in A_1B$

Ta có: ΔBMKvuông cân tại K

$\Rightarrow MK = BK = \frac{BM}{\sqrt{2}} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Vì $A_1B \perp AB_1 \Rightarrow MK \perp A_1B$;

Và $CB \perp (ABB_1A_1) \Rightarrow CB \perp MK$.

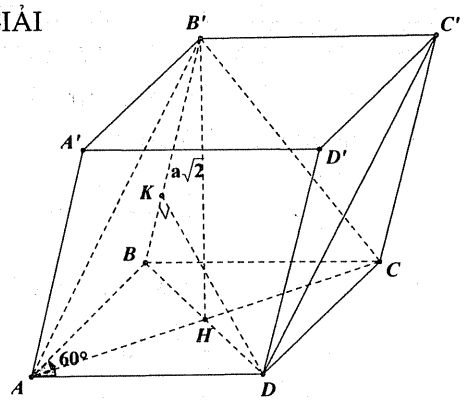
Từ đó suy ra $MK \perp (A_1BC) \Rightarrow MK = d(MN, (A_1BC)) = d(MN, A_1C)$

Để $MK = \frac{a}{3} \Rightarrow \frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{3} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Vậy M thỏa mãn $BM = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{DAB} = 60^0$, $BB' = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của điểm D trên BB' là điểm K nằm trên BB' và $BK = \frac{1}{4}BB'$, hình chiếu vuông góc của điểm B' trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H nằm trên đoạn thẳng BD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng B'C và DC'.

LỜI GIẢI



Ta có: $BK = \frac{1}{4}BB' = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

Trong tam giác vuông BKD có:

$DK = \sqrt{BD^2 - BK^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$

Ta có: $B'K = \frac{3}{4}BB' = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$

Trong tam giác vuông B'KD:

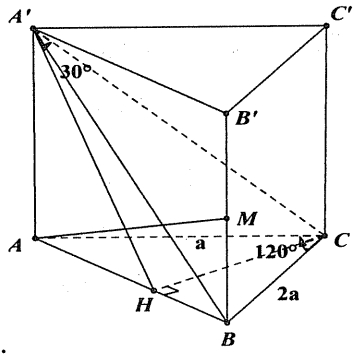
$DB' = \sqrt{KB'^2 + KD^2} = \sqrt{\frac{18a^2}{16} + \frac{14a^2}{16}} = a\sqrt{2}$.

Suy ra tam giác B'BD cân tại B' do đó H chính là giao điểm của AC và BD.

$DC' // AB' \Rightarrow d_{(DC',B'C)} = d_{(DC',mp(AB'C))} = d_{(B,mp(A'AC))} = BH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có $AC = a$, $BC = 2a$, $\widehat{ACB} = 120^0$ và đường thẳng A'C tạo với mặt phẳng (ABB'A') góc 30^0. Gọi M trung điểm của BB'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, CC' theo a.

LỜI GIẢI



Kẻ $CH \perp AB$. Vì $AA' \perp (ABC)$ nên:

$AA' \perp CH \Rightarrow CH \perp mp(ABB'A')$.

Vậy $\left(\widehat{A'C,(ABB'A')}\right) = \widehat{CA'H} = 30^0$.

Sử dụng định lý cosin và công thức tính diện tích cho tam giác ABC, ta có:

$AB = a\sqrt{7}$, $CH = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB} = \frac{a.2a.\sin 120^0}{a\sqrt{7}} \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Mặt phẳng (ABB'A') chứa AM và song song với CC' nên:

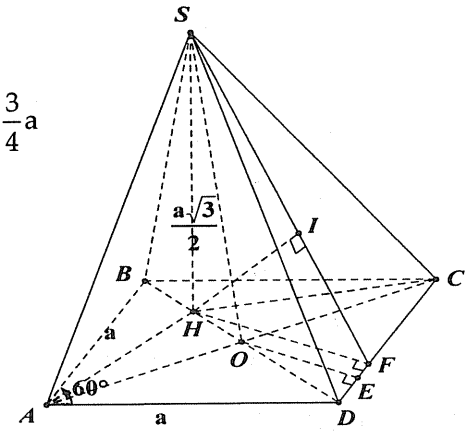
$d(AM,CC') = d(C,(ABB'A')) = CH = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^0$. O là giao điểm của AC và BD, H là trung điểm của BO, $SH \perp (ABCD)$ $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tìm khoảng cách giữa AB và SC.

LỜI GIẢI

$h = SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $S_{AHCD} = \frac{1}{2}AC.DH$.

Ta có: ΔABD đều nên BD=a $\Rightarrow DH = \frac{3}{4}a$



Kẻ HN song song AB $N \in AD$;

Kẻ HK vuông góc với HN, $K \in CD$

Kẻ HI vuông góc với SK, I thuộc SK

$\Rightarrow HI \perp (SCD)$.

Khoảng cách từ H tới (SCD) là HI:

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HS^2}$$

Có: $HS = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $HK = HD.\sin HDK = \frac{3a}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a\sqrt{3}}{8}$

$$\Rightarrow \frac{1}{HI^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{64}{27a^2} = \frac{100}{27a^2} \Rightarrow HI = \frac{3a\sqrt{3}}{10}$$

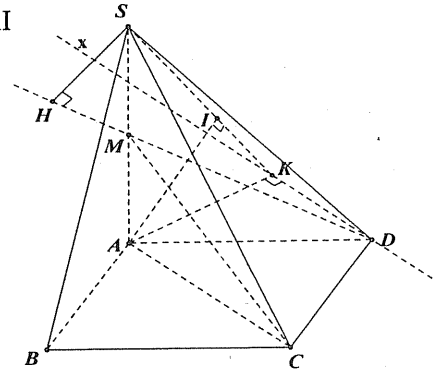
$$d(AB,SC) = d(AB,(SCD)) = \frac{4}{3}d(HN,(SCD)) = \frac{4}{3}d(H,(SCD)) = \frac{4}{3}HI = \frac{2a\sqrt{3}}{5}.$$

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy ABCD và SA = a. Tính :

a) Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng MCD với M là trung điểm của SA.

b) Khoảng cách giữa AC và SD.

LỜI GIẢI



a) Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp mp(SAD)$

Mà CD ⊂ (MCD).

Vậy: mp (SAD) ⊥ mp (MCD).

Kẻ SH ⊥ MD tại H.

Ta có: $\begin{cases} (SAD) \perp (MCD) \\ (SAD) \cap (MCD) = MD \end{cases}$

$\Rightarrow SH \perp mp(MCD) \Rightarrow d_{(S,mp(MCD))} = SH$.

Vì M trung điểm của SA nên: $S_{\Delta SMD} = \frac{1}{2}S_{\Delta SAD} \Leftrightarrow SH.MD = \frac{1}{2}SA.AD$

$$\Leftrightarrow SH.\frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

Có: $MD = \sqrt{MA^2 + AD^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Kết luận: $d_{(S,mp(MCD))} = SH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

b). Khoảng cách giữa AC và SD.

Trong mặt phẳng (ABCD), từ D kẻ Dx // AC.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng SD và Dx.

Vì $\begin{cases} AC \,//\, Dx \\ Dx \subset mp(\alpha) \end{cases} \Rightarrow AC \,//\, mp(\alpha)$ nên $d_{(AC,SD)} = d_{(AC,mp(\alpha))} = d_{(A,mp(\alpha))}$.

Từ A kẻ $AK \perp Dx$ tại K. Kẻ $AI \perp SK$ tại I. Thì AI là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (α).

Thật vậy ta có: $\begin{cases} Dx \perp AK \\ Dx \perp SA \end{cases} \Rightarrow Dx \perp (SAK)$.

Mà $Dx \subset (\alpha) \Rightarrow mp\,(SAK) \perp mp\,(\alpha)$.

$\begin{cases} mp(SAK) \cap mp(\alpha) = SK \\ mp(SAK) \perp mp(\alpha) \\ AI \perp SK \end{cases} \Rightarrow AI \perp mp(\alpha) \Rightarrow d_{(A,mp(\alpha))} = AI$.

Ta có: ΔADK vuông cân tại K nên $KA = KD = \frac{AD}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Trong tam giác ΔSAK vuông tại K :

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow AI = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2007

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

LỜI GIẢI

Gọi O giao điểm của AC và BD. P trung điểm của SA.

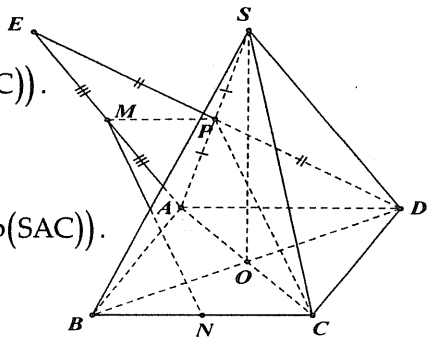
Trong tam giác EAD có MP là đường trung bình của tam giác nên:

$MP \,//\, AD,\ MP = \frac{1}{2}AD$ (1)

Vì N trung điểm của BC nên: $NC \,//\, AD,\ NC = \frac{1}{2}AD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: tứ giác CPMN là hình bình hành nên MN // PC.

Ta có: $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp CP\left(CP \subset (SAC)\right)$.



Kết luận: $BD \perp MN$

Vì MN // mp(SAC) nên:

$d(MN, AC) = d\left(MN, mp(SAC)\right) = d\left(N, mp(SAC)\right)$.

Hai điểm B và N nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SAC) tại điểm C nên:

$$\frac{d\left(N, mp(SAC)\right)}{d\left(B, mp(SAC)\right)} = \frac{NC}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow d\left(N, mp(SAC)\right) = \frac{1}{2} d\left(B, mp(SAC)\right) = \frac{1}{2}.BO = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Kết luận: $d(MN, AC) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có các mặt bên là hình vuông cạnh bằng a. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, A'C', B'C'. Tính khoảng cách giữa và A'F.

LỜI GIẢI

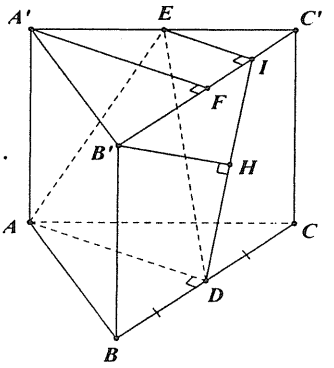
Vì các mặt bên ABB'A', ACC'A', BCC'B' là các hình vuông có:

$AA' \perp AB$ và $AA' \perp AC \Rightarrow AA' \perp (ABC)$.

Vậy ABC.A'B'C' là hình lăng trụ đứng và đáy là tam giác đều .

Trong mp(A'B'C') dựng EI // $A'F\left(I \in B'C'\right)$

$\Rightarrow A'F$ // $mp\left(ADIE\right)$.



Ta có DE thuộc mặt phẳng (ADIE).

Vậy: $d(A'F, DE) = d\left(A'F, (ADIE)\right) = d\left(F, (ADIE)\right)$.

Ta có: $AD \perp (BCC'B') \Rightarrow (ADIE) \perp (BCC'B')$:

Hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến DI.

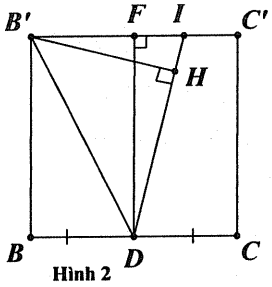
Dựng $B'H \perp DI\left(H \in DI\right) \Rightarrow B'H \perp (ADIE)$.

Suy ra: khoảng cách từ B' đến mặt phẳng (ADIE) là B'H .

Hình vuông BCC'B' được vẽ lại ở hình 2.

Ta có: EI là đường trung bình của tam giác C'A'F nên I trung điểm của C'F .

Ta có: $DI = \sqrt{DF^2 + FI^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{17}}{4}$;



Hình 2

$B'H.DI = DF.B'I \Leftrightarrow B'H.\frac{a\sqrt{17}}{4} = a.\frac{3}{4}a$

$\Rightarrow B'H = \frac{3a\sqrt{17}}{17}$.

Vì hai điểm B', F nằm trên đường thẳng có giao điểm với mp(ADIE) tại I nên có:

$$\frac{d\left(F,(ADIE)\right)}{d\left(B',(ADIE)\right)} = \frac{FI}{B'I} = \frac{1}{3} \Rightarrow d\left(F,(ADIE)\right) = \frac{1}{3}d\left(B',(ADIE)\right) = \frac{a\sqrt{17}}{17}.$$

Cho hình lăng trụ ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và AD. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng ABCD trùng với giao điểm của AM và BN. Biết góc giữa hai mặt phẳng ADD'A' và ABCD bằng 60^0.Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng B'C và BN .

LỜI GIẢI

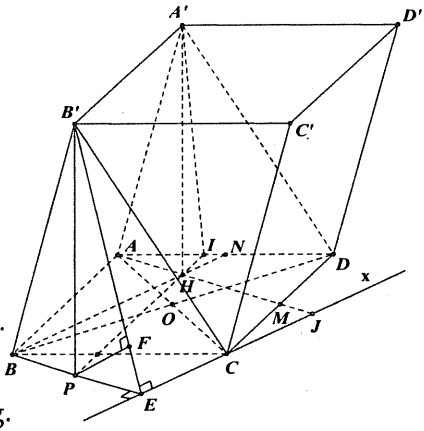
Gọi $H = AM \cap BN$. Vì ABCD là hình vuông nên $AM \perp BN$ tại H.

Theo đề bài có: $A'H \perp (ABCD)$.

Kẻ $HI \perp AD \Rightarrow AD \perp A'I$ (định lý ba đường vuông góc) .

Vậy: $\left[\widehat{(ADD'A'),(ABCD)}\right] = \widehat{(HI,A'I)} = \widehat{HIA'} = 60^0$

Từ B' dựng đường thẳng // với A'H; Từ H dựng đường thẳng // với AB. Hai đường thẳng vừa dựng cắt nhau tại P. Thì P là hình chiếu vuông góc của B' trên mp(ABCD) .



Dựng Cx // BN thì BN // (Cx,BC').

$\Rightarrow d\left(BN,B'C\right) = d\left(BN,(Cx,B'C)\right)$

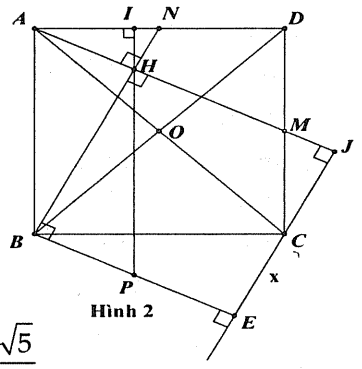
$= d\left(B,(Cx,B'C)\right)$.

Gọi $E = BP \cap Cx$, vì BP // AH $\Rightarrow BP \perp Ax$.

Gọi $J = AH \cap Cx$.

Dễ dàng chứng minh BHJE là hình vuông.

Đáy (ABCD) được vẽ lại như hình 2:



Hình 2

$BN = \sqrt{AB^2 + AN^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$;

$AB^2 = BH.BN \Leftrightarrow a^2 = BH.\frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow BH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

$HN = BN - BH = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{2a\sqrt{5}}{5} = \frac{a\sqrt{5}}{10}$

$AH.BN = AB.AN \Leftrightarrow AH.\frac{a\sqrt{5}}{2} = a.\frac{a}{2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$

$HI.AN = HA.HN \Leftrightarrow HI.\frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.\frac{a\sqrt{5}}{10} \Leftrightarrow HI = \frac{a}{5}$.

Ta có: $BP = AH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. Ta có $PE = BE - BP = \frac{2a\sqrt{5}}{5} - \frac{a\sqrt{5}}{5} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

$HA' = HI.\tan 60^0 = \frac{a}{5}.\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{5} \Rightarrow PB' = HA' = \frac{a\sqrt{3}}{5}$.

Vì $\begin{cases} Cx \perp PE \\ Cx \perp PB' \end{cases} \Rightarrow Cx \perp (PEB') \Rightarrow (Cx, B'C) \perp (PEB')$: hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến B'E.

Dựng $PF \perp B'E (F \in B'E) \Rightarrow PF \perp (Cx, B'C) \Rightarrow d(P, (Cx, B'C)) = PF$.

Trong $\Delta B'PE$ có: $\frac{1}{PF^2} = \frac{1}{PB'^2} + \frac{1}{PE^2} = \frac{25}{3a^2} + \frac{5}{a^2} = \frac{40}{3a^2} \Rightarrow PF = \frac{a\sqrt{30}}{20}$.

Vì P là trung điểm của BE nên $d(B, (Cx, B'C)) = 2d(P, (Cx, B'C)) = \frac{a\sqrt{30}}{10}$.

TỔNG HỢP CHƯƠNG VUÔNG GÓC

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$.

a) Chứng minh rằng các mặt bên hình chóp là những tam giác vuông.

b) CMR (SAC) ⊥ (SBD).

c) Tính góc giữa SC và mp (SAB).

d) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD).

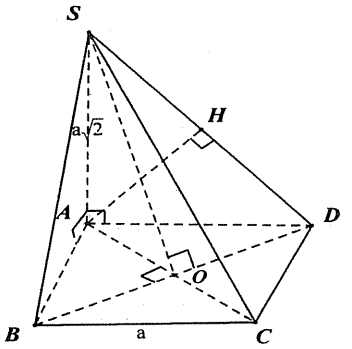
e) Tính d(A, (SCD)).

LỜI GIẢI

a) Chứng minh rằng các mặt bên hình chóp là những tam giác vuông.

Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AD, SA \perp AB$

$\Rightarrow \Delta SAD, \Delta SAB$ vuông tại A.



Chứng minh ΔSBC vuông:

Ta có: $BC \perp AB$ (Hai cạnh kề của hình vuông ABCD); $BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$)

$\Rightarrow BC \perp (SAB)$, mà $SB \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$

$\Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B.

Chứng minh ΔSCD vuông:

Ta có: $CD \perp AD$ (Hai cạnh kề của hình vuông ABCD);

$CD \perp SA$ (Vì $SA \perp (ABCD)$)

$\Rightarrow CD \perp (SAD)$, mà $SD \subset (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$ $\Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại D.

b) CMR (SAC) $\perp$ (SBD):

$BD \perp AC$ (Hai đường chéo của hình vuông ABCD);

$BD \perp SA$ (Vì $SA \perp (ABCD)$)

$\Rightarrow BD \perp (SAC)$, mà $BD \subset (SBD) \Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$.

c) Tính góc giữa SC và mp (SAB):

Do $BC \perp (SAB)$ tại B nên hình chiếu của C lên (SAB) là B

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SC lên (SAB) là SB $\Rightarrow \left(\widehat{SC,(SAB)}\right) = \left(\widehat{SC,SB}\right) = \widehat{CSB}$.

Trong ΔSAB vuông tại A, ta có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

Trong ΔSBC vuông tại B, ta có: $\tan\widehat{CSB} = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{CSB} = 30^0$.

Vậy $\left(\widehat{SC,(SAB)}\right) = 30^0$.

d) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD):

Ta có: $(SBD) \cap (ABCD) = BD$.

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD, $O \in BD$.

Theo chứng minh ở câu b) $BD \perp (SAC)$, mà $SO \subset (SAC) \Rightarrow SO \perp BD$.

Mặc khác, $AO \perp BD$.

Vậy $\left(\widehat{(SBD),(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SO,AO}\right) = \widehat{AOS}$ (do $\widehat{AOS}$ là góc nhọn).

$AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong ΔSAO vuông tại A, ta có: $\tan\widehat{AOS} = \dfrac{SA}{AO} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = 2 \Rightarrow \widehat{AOS} = \arctan 2$.

$\Rightarrow \left(\widehat{(SBD),(ABCD)}\right) = \widehat{AOS} = \arctan 2$.

e) Tính d(A, (SCD)):

Gọi H là hình chiếu của A lên SD.

Ta có: $AH \perp SD$ (1)

$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH \perp (SCD)$ tại H $\Rightarrow d(A,(SCD)) = AH$.

Xét ΔSAD vuông tại A có AH là đường cao.

Ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{3}{2a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy: $d(A,(SCD)) = AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Cho hình chóp S. ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại C và SB ⊥ (ABC), biết AC = $a\sqrt{2}$, BC = a, SB = 3a.

a) Chứng minh: AC ⊥ (SBC).

b) Gọi BH là đường cao của tam giác SBC. Chứng minh: SA ⊥ BH.

c) Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC).

LỜI GIẢI

a) Chứng minh : $AC \perp (SBC)$

Ta có : $AC \perp BC$ (gt) và $AC \perp SB$ (Vì $SB \perp (ABC)$) $\Rightarrow AC \perp (SBC)$.

b) Chứng minh: SA ⊥ BH

Để chứng minh SA ⊥ BH, ta chứng minh: $BH \perp (SAC)$.

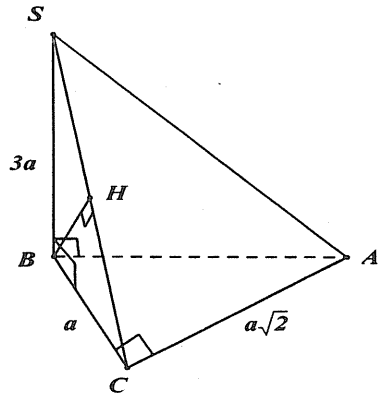
Ta có: $BH \perp SC$ (gt) (1)

Theo chứng minh trên , $AC \perp (SBC)$.

Mà $BH \subset (SBC) \Rightarrow BH \perp AC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BH \perp (SAC)$.

Mà $SA \subset (SAC) \Rightarrow BH \perp SA$.



c) Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC)

Do $SB \perp (ABC)$ tại B nên hình chiếu của S lên (ABC) là B.

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SA lên (ABC) là BA $\Rightarrow \left(\widehat{SA,(ABC)}\right) = \left(\widehat{SA,BA}\right) = \widehat{SAB}$.

Trong ΔABC vuông tại C, ta có: $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$.

Trong ΔSBA vuông tại B, ta có: $\tan\widehat{SAB} = \dfrac{SB}{AB} = \dfrac{3a}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SAB} = 60^0$.

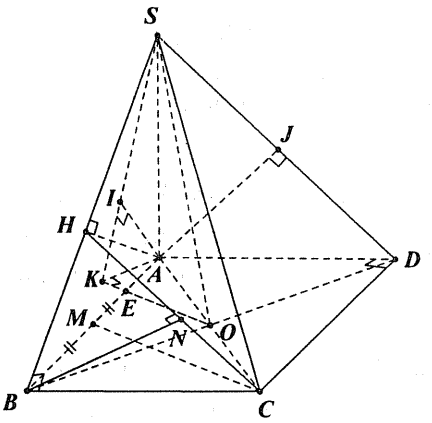
Vậy: $\left(\widehat{SA,(ABC)}\right) = \widehat{SAB} = 60^0$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm O cạnh $AB = 2BC = 2a$, hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy ABCD. Góc giữa SO và mặt đáy bằng 45^0. M trung điểm của AB, H là hình chiếu vuông góc của A trên SB.

a) Chứng minh tam giác ACH vuông.

b) Tính $d(H,(SCD))$, $d(M,(ACH))$, $d(SO,MC)$.

LỜI GIẢI



a) Chứng minh tam giác ACH vuông.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp AH, BC \perp SB$.

Ta có: $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow AH \perp CH\left(CH \subset (SBC)\right)$.

Kết luận: tam giác ACH vuông tại H.

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

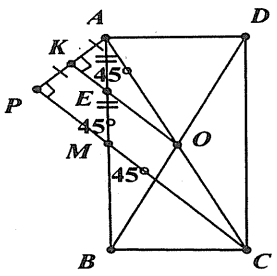
AO là hình chiếu vuông góc của SO trên mặt phẳng (ABCD), góc giữa SO và (ABCD) là góc $\widehat{SOA} = 45^0 \Rightarrow SA = AO.\tan 45^0 = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

b) Tính $d(H,(SCD))$, $d(M,(ACH))$, $d(SO,MC)$.

Vì: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)\left(CD \subset (SCD)\right)$.

Dựng $AJ \perp SD\left(J \in SD\right) \Rightarrow AJ \perp (SCD)$.

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) là AJ.



Trong ΔSAD có: $AJ.SD = AS.AD$

$$\Rightarrow AJ = \frac{AS.AD}{SD} = \frac{AS.AD}{\sqrt{AD^2 + AS^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{2}.a}{\sqrt{\frac{5a^2}{4} + a^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

Vì $AB // CD \Rightarrow d\left(B,(SCD)\right) = d\left(A,(SCD)\right) = \frac{a\sqrt{5}}{3}$.

Trong ΔSAB vuông tại A có: $SH.SB = SA^2 \Leftrightarrow \frac{SH.BS}{BS^2} = \frac{SA^2}{BS^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{HS}{BS} = \frac{AS^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{\frac{5a^2}{4}}{\frac{5a^2}{4} + 4a^2} = \frac{5}{21}.$$

$SH = \frac{5}{21}SB = \frac{5}{21}.\frac{\sqrt{21}a}{2} = \frac{5a\sqrt{21}}{42}$, $BH = SB - SH = \frac{8a\sqrt{21}}{21}$

Vì hai điểm B và H nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SCD) tại S nên có: $\frac{d\left(H,(SCD)\right)}{d\left(B,(SCD)\right)} = \frac{HS}{BS} = \frac{5}{21}$

$$\Rightarrow d\left(H,(SCD)\right) = \frac{5}{21}d\left(B,(SCD)\right) = \frac{5}{21}.\frac{a\sqrt{5}}{3} = \frac{5a\sqrt{5}}{63}.$$

Kết luận: $d\left(H,(SCD)\right) = \frac{5a\sqrt{5}}{63}$

Vì $AH \perp (SBC) \Rightarrow (ACH) \perp (SBC)$. Dựng $BN \perp CH (N \in CH)$ thì $BN \perp (ACH)$.

Vậy $d\left(B,(ACH)\right) = BN$. Trong ΔHBC vuông tại B có:

$$\frac{1}{BN^2} = \frac{1}{BH^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{21}{64a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{85}{64a^2} \Rightarrow BN = \frac{8a}{\sqrt{85}}.$$

Vì hai điểm B và M nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (ACH) tại A, theo công thức tính tỉ lệ khoảng cách có:

$$\frac{d\left(M,(ACH)\right)}{d\left(B,(ACH)\right)} = \frac{MA}{BA} = \frac{1}{2} \Rightarrow d\left(M,(ACH)\right) = \frac{1}{2}d\left(B,(ACH)\right) = \frac{1}{2}.\frac{8a}{\sqrt{85}} = \frac{4a}{\sqrt{85}}$$

Kết luận $d\left(M,(ACH)\right) = \frac{4a}{\sqrt{85}}$.

Qua O dựng đường thẳng song với CM cắt đoạn AB tại E.

Dựng AK vuông góc với OE tại K.

Ta có: $OE \perp AK, OE \perp SA \Rightarrow OE \perp (SAK) \Rightarrow (SOE) \perp (SAK)$ theo giao tuyến SK.

Dựng AI vuông góc với SK tại I. Suy ra AI vuông góc với mặt phẳng (SOE).

Vậy: khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SOE) là AI.

Gọi $P = CM \cap AK$. Vì BM = BC = a nên tam giác CBM vuông cân tại B.

Tam giác APM vuông cân tại P và tam giác AKE vuông cân tại E.

Tam giác AKE vuông cân tại E nên có $AK = KE = \frac{AE}{\sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

Trong ΔSAK vuông tại A có:

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{8}{a^2} + \frac{4}{5a^2} = \frac{44}{5a^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{55}}{22}.$$

Vì $MC // OE \Rightarrow d(MC, SO) = d(MC, (SOE)) = d(M, (SOE))$.

Vì E trung điểm của AM và E cũng là giao điểm của AM và mặt phẳng (SOE) nên theo công thức tính tỉ lệ khoảng cách ta có:

$$\frac{d(M, (SOE))}{d(A, (SOE))} = \frac{ME}{AE} = 1 \Rightarrow d(M, (SOE)) = d(A, (SOE)) = \frac{a\sqrt{55}}{22}.$$

Kết luận $d(MC, SO) = \frac{a\sqrt{55}}{22}$.

Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều tâm O cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng ABC là trung điểm H của OB. Biết góc giữa (A'BC) và (ABC) bằng 60^0.

a) Tính góc giữa hai đường thẳng AA' và BC.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC.

c) Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (AA'C), G là trọng tâm của tam giác B'C'C.

LỜI GIẢI

a) Tính góc giữa hai đường thẳng AA' và BC.

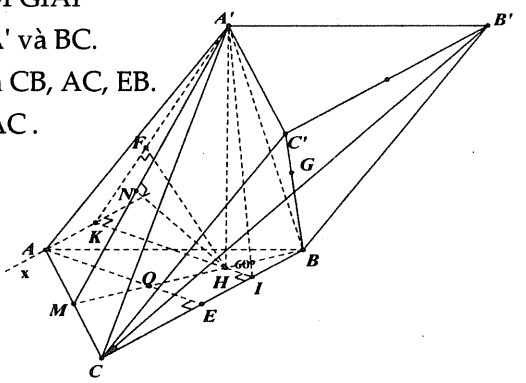
Gọi E, M, I lần lượt trung điểm của CB, AC, EB.

Vì ΔABC đều có $AE \perp BC$, $BM \perp AC$.

HI là đường trung bình của ΔBOE

$\Rightarrow HI // OE \Rightarrow HI \perp BC$;

$$HI = \frac{1}{2}OE = \frac{1}{6}AE = \frac{1}{6}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{12}.$$



Ta có: $\begin{cases} BC \perp HI \\ BC \perp HA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (HIA') \Rightarrow BC \perp IA'$.

Từ đó suy ra góc giữa (A'BC) và (ABC) là góc $\widehat{HIA'} = 60^0$.

Trong $\Delta HIA'$ có $HA' = HI.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{12}.\sqrt{3} = \frac{a}{4}$.

Trong mp (ABC) kẻ Ax // BC.

Góc giữa AA' và BC chính là góc giữa AA' và Ax.

Dựng $HK \perp Ax (K \in Ax) \Rightarrow HK // AE$.

Ta có: $\begin{cases} Ax \perp HK \\ Ax \perp HA' \end{cases} \Rightarrow Ax \perp (HKA') \Rightarrow Ax \perp A'K$.

Tam giác OHJ đều $JH = OJ = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ta có: AKIE là hình chữ nhật có $HK = EI = \frac{a}{4}$;

$KI = AE = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HK = KI - HI = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{12} = \frac{5a\sqrt{3}}{12}$.

Trong $\Delta HKA'$ vuông tại H có:

$$KA' = \sqrt{HA'^2 + HK^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{5a\sqrt{3}}{12}\right)^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}.$$

Trong $\Delta A'AK$ vuông tại K có:

$$\tan \widehat{A'AK} = \frac{A'K}{AK} = \frac{\frac{a\sqrt{21}}{6}}{\frac{a}{4}} = \frac{2\sqrt{21}}{3} \Rightarrow \widehat{A'AK} = \arctan\frac{2\sqrt{21}}{3}.$$

Kết luận $(AA', BC) = \widehat{A'AK} = \arctan\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC.

Vì Ax // BC $\Rightarrow d(BC, AA') = d(BC, (A'Ax)) = d(I, (A'Ax))$ (Vì $I \in BC$)

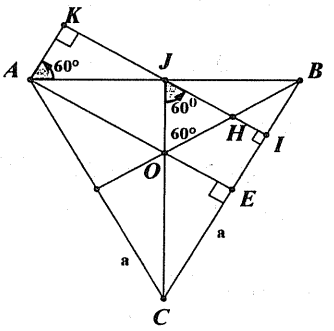
Vì $Ax \perp (HKA') \Rightarrow (A'Ax) \perp (HKA')$: hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến A'K.

Dựng $HF \perp A'K (F \in A'K) \Rightarrow HF \perp (A'Ax) \Rightarrow d(H, (A'Ax)) = HF$.

Trong $\Delta A'HK$ có: $HF.KA' = HA'.HK$

$\Leftrightarrow HF.\frac{a\sqrt{21}}{6}=\frac{a}{4}.\frac{5a\sqrt{3}}{12} \Leftrightarrow HF=\frac{5a\sqrt{7}}{56}$.

Vì hai điểm H, I cùng nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (A'Ax) tại K nên : $\frac{d\left(I,\left(A'Ax\right)\right)}{d\left(H,\left(A'Ax\right)\right)}=\frac{IK}{HK}=\frac{6}{5}$



$\Rightarrow d\left(I,\left(A'Ax\right)\right)=\frac{6}{5}d\left(H,\left(A'Ax\right)\right)=\frac{3a\sqrt{7}}{28}$.

Kết luận: $d\left(BC,AA'\right)=\frac{3a\sqrt{7}}{28}$.

c) Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (AA'C).

Ta có: $\begin{cases}AC\perp HM\\AC\perp HA'\end{cases}\Rightarrow AC\perp\left(HMA'\right)\Rightarrow\left(ACC'A'\right)\perp\left(HMA'\right)$.

Hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến A'M.

Dựng $HN\perp A'M\left(N\in A'M\right)\Rightarrow HN\perp\left(ACC'A'\right)\Rightarrow d\left(H,\left(ACC'A'\right)\right)=HN$.

Trong $\Delta HMA'$ có: $\frac{1}{HN^2}=\frac{1}{HM^2}+\frac{1}{HA'^2}=\frac{3}{a^2}+\frac{16}{a^2}=\frac{19}{a^2}\Rightarrow HN=\frac{a}{\sqrt{19}}$.

Hai điểm H và B cùng nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt (ACC'A') tại M nên có: $\frac{d\left(B,\left(ACC'A'\right)\right)}{d\left(H,\left(ACC'A'\right)\right)}=\frac{BM}{HM}=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow d\left(B,\left(ACC'A'\right)\right)=\frac{3}{2}d\left(H,\left(ACC'A'\right)\right)=\frac{3a}{2\sqrt{19}}$.

Hai điểm B và G cùng nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt (ACC'A') tại C' nên có: $\frac{d\left(G,\left(ACC'A'\right)\right)}{d\left(B,\left(ACC'A'\right)\right)}=\frac{GC'}{BC'}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow d\left(G,\left(ACC'A'\right)\right)=\frac{1}{3}d\left(B,\left(ACC'A'\right)\right)=\frac{a}{2\sqrt{19}}$.

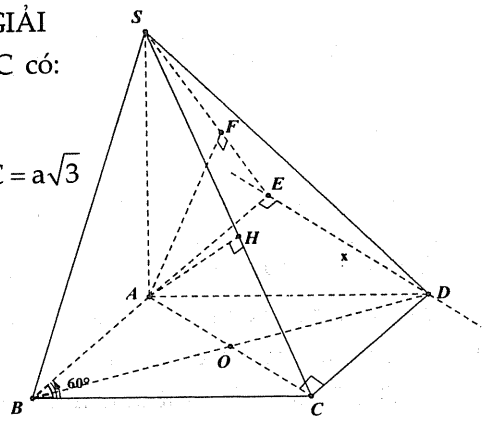
Công thức tính tỉ lệ khoảng cách là một công thức đẹp. Các bạn nên rèn luyện nhiều bài tập để sử dụng công thức này thành thạo.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành có AB = a, BC = 2a, góc ABC = 60, SA vuông góc với đáy (ABCD) góc giữa (SCD) và (ABCD) bằng 60.

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC, AC và SD.

LỜI GIẢI



Áp dụng định lý hàm cosin cho ΔABC có:

$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA.BC.\cos 60^0$

$= a^2 + 4a^2 - 2.a.2a.\dfrac{1}{2} = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$

Có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4a^2$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A .

Có: $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$

$\Rightarrow CD \perp SC$.

Vậy: góc giữa (SCD) và (ABCD) là góc $\widehat{SCA} = 60^0$.

Có: $SA = AC.\tan\widehat{SCA} = 3a$

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

Có $CD \perp (SAC) \Rightarrow (SCD) \perp (SAC) \left(CD \subset (SCD)\right)$:

hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SC.

Dựng $AH \perp SC \Rightarrow AH \perp (SCD)$. Vậy $d\left(A,(SCD)\right) = AH$.

Trong ΔSAC có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{9a^2} = \dfrac{4}{9a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{3a}{2}$.

Kết luận: $d\left(A,(SCD)\right) = AH = \dfrac{3a}{2}$.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

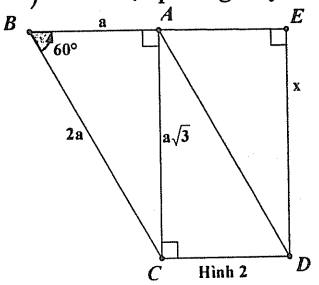
Có $AB \,//\, CD \Rightarrow AB \,//\, (SCD)$.

Nên $d(AB,SC) = d\left(AB,(SCD)\right) = d\left(A,(SCD)\right) = \dfrac{3a}{2}$ (vì $SC \subset (SCD)$).

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD.

Kẻ $Dx \,//\, AC$. Gọi $E = Dx \cap AB \Rightarrow AB \perp Dx$ tại E.

Có: $\begin{cases} Dx \perp AB \\ Dx \perp SA \end{cases} \Rightarrow Dx \perp (SAB) \Rightarrow (SD,Dx) \perp (SAB)$: hai mặt phẳng này vuông



góc với nhau theo giao tuyến SE.

Dựng $AF \perp SE \Rightarrow AF \perp (SD,Dx)$.

Vậy $d\left(A,(SD,Dx)\right) = AF$.

Đáy ABCD được vẽ lại ở hình 2.

Ta có ACDE là hình chữ nhật, có $AE = CD = a$

Trong ΔSAE có: $\frac{1}{AF^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{4}{3a^2}\Rightarrow AF=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì $AC \,//\, Dx \Rightarrow AC \,//\, (SD,Dx)$

$\Rightarrow d(AC,SD)=d\big(AC,(SD,Dx)\big)=d\big(A,(SD,Dx)\big)=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật và AB = 2a , BC = a, các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$.

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABCD) .

b) Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD, K là điểm bất kỳ thuộc đoạn thẳng AD. Chứng minh khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK không phụ thuộc vào vị trí K. Hãy tính khoảng cách này theo a.

LỜI GIẢI

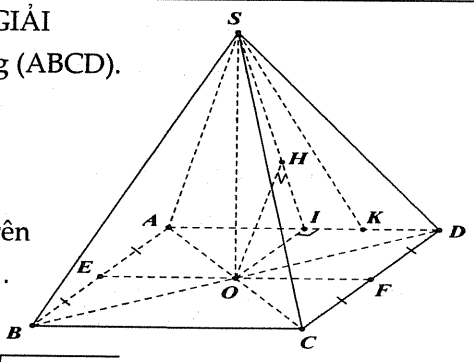
a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABCD).

Gọi O là tâm của đáy ABCD thì có:

$OA = OB = OC = OD$.

Theo đề bài $SA = SB = SC = SD$

$\Rightarrow$ O là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD), có $SO \perp (ABCD)$.



Trong ΔSAO vuông tại O có:

$SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{SA^2-\frac{AC^2}{4}}=\sqrt{2a^2-\frac{5a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) Chứng minh khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK không phụ thuộc vào vị trí K.

Ta có: $SK \subset (SAD)$.

Mà $EF \,//\, AD \Rightarrow EF \,//\, (SAD) \Rightarrow d(EF,SK)=d\big(EF,(SAD)\big)=d\big(O,(SAD)\big)$

Vì khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAD) không đổi nên khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK cũng không đổi, nghĩa là khoảng cách này không phụ thuộc vào điểm K.

Dựng $OI \perp AD\,(I \in AD)$, có: $AD \perp SO$ và $AD \perp OI$

$\Rightarrow AD \perp (SOI) \Rightarrow (SAD) \perp (SOI)$: hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SI.

Dựng $OH \perp SI\,(H \in SI) \Rightarrow OH \perp (SAD)$. Vậy $d\big(O,(SAD)\big)=OH$.

Trong ΔSOI vuông tại O có:

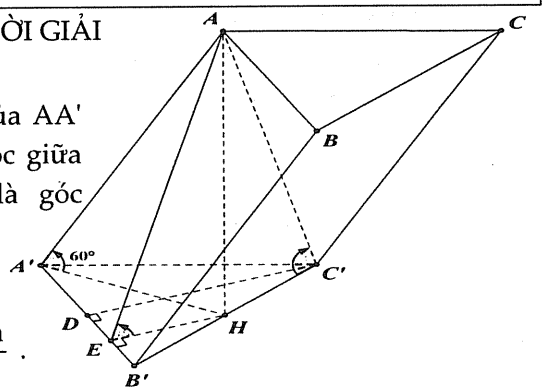
$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OS^2}+\frac{1}{OI^2}=\frac{4}{3a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{7}{3a^2}\Rightarrow OH=\frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Kết luận $d(EF,SK)=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đáy đều bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (A'B'C') là trung điểm H của cạnh B'C'.

Tính khoảng cách hai đáy. Tính góc giữa BC và AC'. Tính góc giữa (ABB'A') và mặt đáy.

LỜI GIẢI



Tính khoảng cách hai đáy.

A'H là hình chiếu vuông góc của AA' trên mặt phẳng (A'B'C'), nên góc giữa AA' và mặt phẳng (A'B'C') là góc $\widehat{AA'H}=60^0$.

Trong $\Delta AA'H$ có:

$$AH=A'H.\tan 60^0=\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}=\frac{3a}{2}.$$

Vì $AH\perp(A'B'C')$

Mà $(ABC)\ //\ (A'B'C')\Rightarrow AH\perp(ABC)$.

Suy ra khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy là $AH=\frac{3a}{2}$.

Tính góc giữa BC và AC'.

Vì B'C' // BC nên góc giữa BC và AC' bằng góc giữa B'C' và AC' là góc $\widehat{AC'H}$.

Trong $\Delta AC'H$ có: $\tan\widehat{AC'H}=\frac{AH}{HC'}=\frac{3a}{2}:\frac{a}{2}=3>0\Rightarrow\widehat{AC'H}=\arctan 3$.

Tính góc giữa (ABB'A') và mặt đáy.

Dựng C'D và HE cùng vuông góc với A'B' lần lượt tại D và E.

Ta có: $\begin{cases}A'B'\perp HE\\A'B'\perp AH\end{cases}\Rightarrow A'B'\perp(AHE)\Rightarrow A'B'\perp AE$

Hai mặt phẳng (ABB'A') và (A'B'C') có giao tuyến A'B' cùng vuông góc với hai đường thẳng AE và HE tại điểm E nên :

$$\left[\widehat{(ABB'A'),(A'B'C')}\right]=\widehat{(AE,HE)}=\widehat{AEH}.$$

Vì HE là đường trung bình của tam giác C'DB' nên $HE = \frac{1}{2}C'D = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Trong ΔAEH có: $\tan\widehat{AEH} = \frac{AH}{EH} = \frac{3a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \widehat{AEH} = \arctan 2\sqrt{3}$.

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a.

a) Chứng minh rằng khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' bằng nhau. Tính khoảng cách đó.

b) Chứng minh rằng B'D vuông góc với mặt phẳng (BA'C').

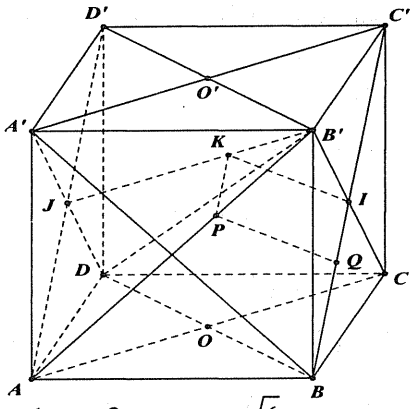
c) Chứng minh BC' vuông góc với mặt phẳng (A'B'CD).

d) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (BA'C') và (ACD').

e) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

f) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB' và BC'.

LỜI GIẢI



a) Vì ABCD.A'B'C'D' là hình lập phương nên các tam giác sau là các tam giác vuông bằng nhau và đều nhận AC' làm cạnh huyền: $\Delta ABC'$, $\Delta AA'C'$, $\Delta ACC'$, $\Delta AD'C'$, $\Delta ADC'$, $\Delta AB'C'$.

Từ đó suy ra khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' bằng nhau.

Gọi khoảng cách từ B đến AC' là h.

Trong $\Delta ABC'$ có: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

b) Chứng minh rằng B'D vuông góc với mặt phẳng (BA'C').

Ta có: $\begin{cases} B'B = B'A' = B'C' = a \\ AB' = A'C' = C'B = a\sqrt{2} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Hình chóp B'.BA'C' là hình chóp đều.

Suy ra $B'H \perp (BA'C')$ (1), với H là tâm tam giác đều BA'C'.

Tương tự ta có D.BA'C' là hình chóp đều $\Rightarrow DH \perp (BA'C')$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $B'D \perp (BA'C')$.

c) Chứng minh BC' vuông góc với mặt phẳng (A'B'C'D)

Vì BCC'B' là hình vuông nên có $BC' \perp B'C$ (1)

Ta có $DC \perp (BCC'B') \Rightarrow DC \perp BC'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC' \perp (A'B'CD)$.

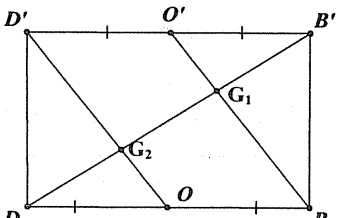
d) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (BA'C') và (ACD').

Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai mặt đáy ABCD và A'B'C'D'.

Trong mp(BDD'B'), gọi $G_1 = DB' \cap BO'$.

Mà $BO' \subset (BA'C') \Rightarrow G_1 = DB' \cap (BA'C')$.

Vậy: $B'G_1 \perp (BA'C') \Rightarrow d(B',(BA'C')) = B'G_1$.



Hình 2

Hoàn toàn tương tự: $d(D,(ACD')) = DG_2$

Dễ dàng chứng minh được: (ACD') // (BA'C').

Từ đó suy ra G_1G_1 là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ACD') và (BA'C').

Mặt phẳng (BDD'B') được vẽ lại ở hình 2.

Dễ dàng chứng minh: $G_1G_2 = B'G_1 = DG_2 = \frac{1}{3}DB' = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Kết luận khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ACD') và (BA'C') bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

e) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

Có BC' và CD' lần lượt thuộc hai mặt phẳng (BA'C') và (ACD').

Theo câu d) có (BA'C') // (ACD'). Vậy khoảng cách giữa BC' và CD' bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ACD') và (BA'C') và bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

f) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB' và BC'.

Gọi I và J lần lượt là tâm của hai hình vuông BCC'B' và ADD'A'.

Trong mp(A'B'CD), dựng $IK \perp JB' (K \in JB')$.

Trong mp(AB'D'), dựng $KP \,//\, AD' (P \in AB') \Rightarrow KP \,//\, BC'$.

Trong mp(KP,BC'), dựng $PQ \,//\, IK (Q \in BC')$.

Ta chứng minh: PQ là đoạn vuông góc chung của BC' và AB'.

Ta có: $BC' \perp (A'B'CD) \supset IK \Rightarrow IK \perp BC'$ (3)

Mà $BC' \,//\, AD' \Rightarrow IK \perp AD'$ (4)

Ngoài ra có: $IK \perp JB'$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra: $IK \perp (AB'D') \Rightarrow IK \perp AB'$ (6)

Tóm lại có: $\begin{cases} IK \perp BC' \\ IK \perp AB' \end{cases}$, mà PQ // IK

$\Rightarrow$ PQ vuông góc với cả hai đường thẳng BC' và AB'.

Vậy: PQ là đoạn vuông góc chung của AB' và BC'.

Có IJ // A'B' mà $A'B' \perp (BCC'B') \Rightarrow IJ \perp (BCC'B') \Rightarrow IJ \perp IB'$

Tam giác B'IJ vuông ở I có đường cao IK:

$$\frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IB'^2} + \frac{1}{IJ^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow IJ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Theo cách dựng thì IKPQ là hình chữ nhật $\Rightarrow PQ = IK = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD hình vuông cạnh a, mặt bên (SAD) là tam giác đều và vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD). Gọi I, M, F lần lượt trung điểm của AD, AB, SB và K là giao điểm của BI và CM.

a) Chứng minh mp(CMF) vuông góc với mp(SIB).

b) Tính BK và KF.

c) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SD.

d) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SA.

LỜI GIẢI

a) Chứng minh mp(CMF) vuông góc với mp(SIB)

Ta có: $\Delta IAB = \Delta MBC (c.g.c) \Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{B_1}$

Ta có: $\widehat{C_1} + \widehat{M_1} = 90^0 \Rightarrow \widehat{B_1} + \widehat{M_1} = 90^0 \Rightarrow \widehat{MKB} = 90^0 \Rightarrow CM \perp IB$.

Vậy có: CM $\perp$ IB; CM $\perp$ SI (SI $\perp$ (ABCD))

Mà: CM $\subset$ mp (CMF) $\Rightarrow mp(CMF) \perp mp(SBI)$.

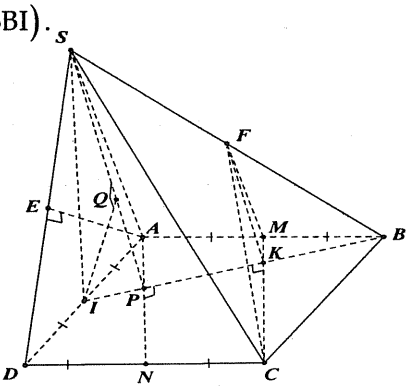
b) Tính BK và KF.

Trong ΔCBM vuông tại B:

$$CM = \sqrt{BC^2 + BM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

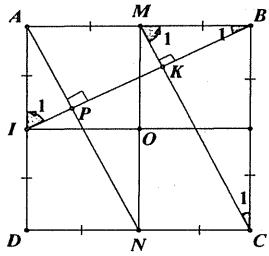
Và $BK.MC = BM.BC \Leftrightarrow BK.\frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a}{2}.a$

$$\Rightarrow BK = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$



Trong ΔSIB vuông tại I: $SB = \sqrt{SI^2 + BI^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{5a^2}{4}} = a\sqrt{2}$;

$$\cos\widehat{SBI} = \frac{BI}{SI} = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$



Trong $\Delta BKF : FK^2 = BK^2 + BF^2 - 2BK.BF\cos\widehat{FBK}$

$$= \frac{a^2}{5} + \frac{a^2}{2} - 2.\frac{a\sqrt{5}}{5}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{10}}{4} = \frac{a^2}{5} \Rightarrow FK = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

c) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SD.

$\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SI \end{cases} \Rightarrow AB \perp mp(SAD)$. Trong mặt phẳng (SAD) kẻ $AE \perp SD$.

Vậy AE là đoạn vuông góc chung của AB và SD.

Kết luận $d(AB, SD) = AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (vì AE là đường cao ΔSAD đều).

d). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SA.

Gọi N trung điểm của CD.

Ta có: $AN // CM \Rightarrow CM // mp(SAN)$ (Vì $AN \subset$ mp (SAN))

Nên $d(CM, SA) = d(CM, mp(SAN)) = d(K, mp\ SAN))$ $(Do\ K \in CM)$.

Gọi $P = AN \cap BI$. Ta có $BI \perp AN$ (vì AN // CM).

Vậy: $AN \perp mp(SIP)$. Từ I kẻ $IQ \perp SP \Rightarrow IQ = d(I, mp(SAN))$.

Thật vậy, vì IQ vuông góc với cả hai đường thẳng SP và AN cùng thuộc mp (SAN).

$$\Delta IAP = \Delta MBK \Rightarrow IP = MK = \frac{BM^2}{MC} = \frac{a^2}{4} : \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{10}.$$

Trong ΔSIP vuông tại A : $\frac{1}{IQ^2} = \frac{1}{IS^2} + \frac{1}{IP^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{20}{a^2} = \frac{64}{3a^2} \Rightarrow IQ = \frac{a\sqrt{3}}{8}$.

Vậy: $d_{(I, mp(SAN))} = IQ = \frac{a\sqrt{3}}{8}$

Ta có: $IK \cap mp(SAN) = P$ nên:

$$\frac{d(k, mp(SAN))}{d(I, mp(SAN))} = \frac{KP}{IP} = 2 \Rightarrow d(K, mp(SAN)) = 2d(I, mp(SAN)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD tâm O cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^0$. Đường thẳng SO vuông góc với đáy và $SO = \frac{3a}{4}$. Gọi E , F lần lượt là trung điểm của BC và BE.

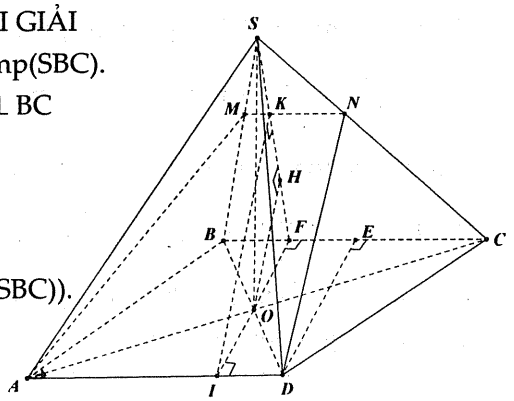
a) Chứng minh mp(SOF) vuông góc mp(SBC).

b) Tính khoảng cách từ O và A đến mặt phẳng (SBC).

c) Gọi (α) là mặt phẳng qua AD và vuông góc với mặt phẳng (SBC). Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α). Tính diện tích của thiết diện này.

d) Tính góc giữa mặt phẳng (α) và mặt phẳng (ABCD).

LỜI GIẢI



a). Chứng minh mp(SOF) vuông góc mp(SBC).

Vì ΔBDC đều nên: $DE \perp BC \Rightarrow OF \perp BC$

(OF đường trung bình ΔBDE)

$$\begin{cases} BC \perp SO \\ BC \perp OF \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(SOF)$$

$\Rightarrow mp(SBC) \perp mp(SOF)$ (vì $BC \subset (SBC)$).

b). Tính khoảng cách từ O và A đến mặt phẳng (SBC).

Trong mặt phẳng (SOF), dựng $OH \perp SF$ thì:

$OH \perp mp(SBC) \Rightarrow d(O, mp(SBC)) = OH$.

Trong ΔSOF vuông tại O:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OF^2} = \frac{16}{9a^2} + \frac{16}{3a^2} = \frac{64}{9a^2} \Rightarrow OH = \frac{3a}{8} \Rightarrow d(O, mp(SBC)) = \frac{3a}{8}.$$

Gọi $I = FO \cap AD$.

Trong mặt phẳng (SIF) dựng $IK \perp SF$ tại K thì $IK \perp mp(SBC)$ (Vì IK // OH).

Vì $AD // BC \Rightarrow AD // mp(SBC)$ (Vì $BC \subset mp(SBC)$).

Nên $d_{(A, mp(SBC))} = d_{(I, mp(SBC))} = IK = 2OH = \frac{3a}{4}$ (Vì $I \in AD$).

c). Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α).

Ta có $IK \perp mp(SBC)$ nên mặt phẳng (α) chính là mặt phẳng (ADK).

Ta có: $\begin{cases} K \in (SBC) \cap (ADK) \\ AD // BC \end{cases} \Rightarrow (SBC) \cap (ADK) = Kx (Kx // AD // BC)$.

Gọi $M = Kx \cap SB, N = Kx \cap SD$.

Kết luận: thiết diện cần tìm là hình thang ADNM.

Tính diện tích hình thang ADNM: $S_{ADNM} = \frac{1}{2}(AD + MN).IK$

Tính MN:

Trong ΔSOF vuông tại O: $SF = \sqrt{OS^2 + OF^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{16} + \frac{3a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong ΔSIK vuông tại K: $SK = \sqrt{SI^2 - IK^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{9a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Do đó $\frac{SK}{SF} = \frac{1}{2}$.

Vậy: K là trung điểm SF. Suy ra MN là đường trung bình ΔSBC:

$MN = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$.

$S_{ADNM} = \frac{1}{2}(AD + MN).IK = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right).\frac{3a}{4} = \frac{9a^2}{16}$.

d). Tính góc giữa mặt phẳng (α) và mặt phẳng (ABCD).

Ta có: $\begin{cases} (\alpha) \cap (ABCD) = AD \\ FI \perp AD, KI \perp AD \\ FI \subset (ABCD), KI \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \widehat{((\alpha),(ABCD))} = \widehat{FIK}$.

Trong ΔFIK vuông tại K: $\cos\widehat{FIK} = \frac{IK}{IF} = \frac{3a}{4} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{FIK} = 30^0$.

Cho tam giác đều SAB và hình vuông ABCD cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi H, K lần lượt trung điểm AB, CD và E, F lần lượt trung điểm của SA và SB.

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) . Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

b) Gọi G là giao điểm của CE và DF. Chứng minh $CE \perp SA, DF \perp SB$ .Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (GEF) và (SAB) .

c) Chứng minh G là trọng tâm của tam giác SHK .Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SCD).

d) Gọi M là điểm di động trên đoạn SA. Tìm tập hợp những điểm là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (CDM).

LỜI GIẢI

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

Ta có $DC \perp HK, DC \perp SH$ nên $DC \perp (SHK) \Rightarrow (SCD) \perp (SHK)$.

Trong mặt phẳng (SHK) dựng $HQ \perp SK \Rightarrow HQ \perp mp(SCD)$

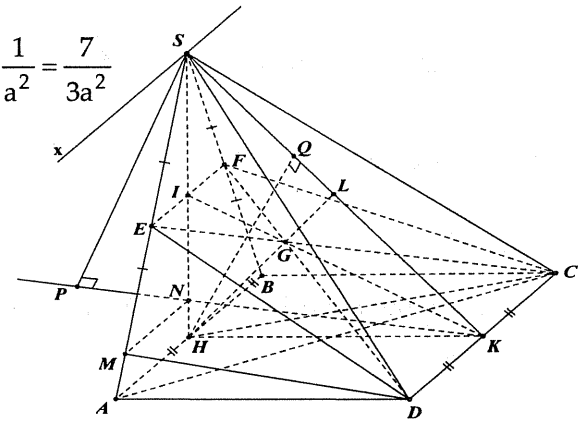
$\Rightarrow d(H, mp(SCD)) = HQ$.

Trong ΔSHK vuông tại K:

$$\frac{1}{HQ^2}=\frac{1}{HS^2}+\frac{1}{HK^2}=\frac{4}{3a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{7}{3a^2}$$

$$\Rightarrow HQ=\frac{a\sqrt{21}}{7}$$

$$\Rightarrow d\left(H,mp(SCD)\right)=\frac{a\sqrt{21}}{7}.$$



Vì AH // CD

$\Rightarrow$ AH // mp(SCD)

(Vì CD $\subset$ mp (SCD)).

Nên $d\left(A,mp(ACD)\right)=d\left(H,mp(SCD)\right)=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD):

Ta có: $(SAB)\cap(SCD)=Sx\,(Sx\ //\ AB\ //\ CD)$.

Và $\begin{cases}SH\perp AB, SK\perp CD\\ SH\subset(SAB), SK\subset(SCD)\\ Sx\ //\ AB\ //\ CD\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}SH\perp Sx\\ SK\perp Sx\end{cases}\Rightarrow\widehat{\left((SAB),(SCD)\right)}=\widehat{KSH}$.

Xét ΔSHK vuông tại H: $\tan\widehat{HSK}=\frac{HK}{HS}=\frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

b) Chứng minh $CE\perp SA, DF\perp SB$.

Xét ΔHBC vuông tại B: $HC=\sqrt{HB^2+BC^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét ΔSHC vuông tại H : $SC=\sqrt{HS^2+HC^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}+\frac{5a^2}{4}}=a\sqrt{2}$.

Xét ΔSAC có $CA=CS=a\sqrt{2}$ nên tam giác SAC cân tại C và có CE là đường trung tuyến, suy ra CE cũng là đường cao. Kết luận $CE\perp SA$.

Chứng minh tương tự thì $DF\perp SB$.

Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (GEF) và (SAB):

Gọi $I=SH\cap EF\Rightarrow$ I trung điểm EF.

Ta có CDEF là hình thang cân và I, F lần lượt là trung điểm của hai đáy EF và CD nên $IK\perp EF$.

$$\begin{cases}(SAB)\cap(CDEF)=EF\\ SH\perp EF, KI\perp EF\\ SH\subset(SAB), KI\subset(CDEF)\end{cases}\Rightarrow\widehat{((SAB),(CDEF))}=\widehat{HIK}.$$

Xét ΔHIK vuông tại H : $\tan\widehat{HIK}=\dfrac{HK}{HI}=\dfrac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

c) Chứng minh G là trọng tâm của tam giác SHK.

Vì CDEF là hình thang cân nên $G\in KI$, mà KI là đường trung tuyến của tam giác SHK (1)

Trong hình thang cân CDEF ta có tỉ lệ đồng dạng:

$$\frac{GF}{GD}=\frac{GE}{GC}=\frac{GI}{GK}=\frac{EF}{DC}=\frac{1}{2}\ (\text{Vì } EF=\frac{1}{2}AB, AB=CD)$$

$$\Rightarrow GK=2GI\Leftrightarrow KG=\frac{2}{3}KI \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ G là trọng tâm của tam giác SHK.

Trong mặt phẳng (SHK) gọi L giao điểm của HG và SK.

$$\frac{d(G,mp(SCD))}{d(H,mp(SCD))}=\frac{GL}{HL}=\frac{1}{3}\Rightarrow d(G,mp(SCD))=\frac{1}{3}d(H,mp(SCD))=\frac{a\sqrt{21}}{21}$$

d) Tìm tập hợp những điểm là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (CDM).

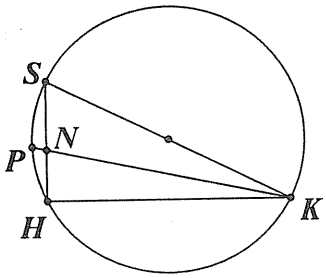
Ta có: $CD\perp(SHK)\Rightarrow mp(CDM)\perp mp(SHK)$.

Dựng MN // CD, $N\in SH$.

Ta được $(CDM)\cap(SHK)=KN$.

Dựng $SP\perp KN\Rightarrow SP\perp mp(CDM)$.

Do đó P là hình chiếu của S trên mp(CDM).



Ta có: $\widehat{SPK}=90^0$.

Do đó P thuộc đường tròn đường kính SK trong mặt phẳng (SHK).

Mặt khác: M di động trên đoạn SA nên N di động trên đoạn SH.

Ta suy ra điểm P chạy trên cung $\overset{\frown}{SH}$.

Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a, các cạnh bên đều bằng $a\sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABCD).

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC. Hãy xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α). Tính diện tích của thiết diện này.

c) Gọi φ là góc giữa AB và mặt phẳng (α). Tính $\sin\varphi$.

LỜI GIẢI

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD thì SO là khoảng cách từ S đến (ABCD).

Ta có: $SO^2 = SC^2 - OC^2 = 3a^2 - \frac{2a^2}{4} = \frac{10a^2}{4}$

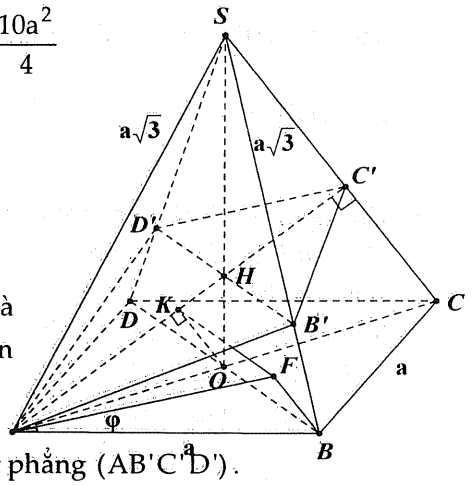
$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

Vì $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp SC$.

Trong (SAC) dựng $AC' \perp SC$.

AC' cắt SO tại H và cắt SC tại C'.

Trong (SBD), đường thẳng qua H và song song với BD cắt SB và SD lần lượt tại B' và D'.



Ta có: B'D' ⊥ SC.

Vậy $SC \perp mp(AB'C'D')$ và (α) là mặt phẳng (AB'C'D').

$BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AC' \Rightarrow B'D' \perp AC'$.

Do đó : $S_{AB'C'D'} = \frac{1}{2}AC'.B'D'$

Ta có: $AC' = \frac{SO.AC}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{10}}{2}.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{15}}{3}$;

$SC' = SA^2 - AC'^2 = 3a^2 - \frac{5a^2}{3} = \frac{4a^2}{3} \Rightarrow SC' = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

Từ hai tam giác vuông đồng dạng SOC và SC'H, ta có:

$SH = \frac{SC'.SC}{SO} = \frac{\frac{2a}{\sqrt{3}}.a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{10}}{2}} = \frac{4a}{\sqrt{10}}$

Vì B'D' // BD nên: $\frac{B'D'}{BD} = \frac{SH}{SO} = \frac{4a}{\sqrt{10}}.\frac{2}{a\sqrt{10}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \Rightarrow B'D' = \frac{4}{5}a\sqrt{2}$

Vậy: $S_{AB'C'D'} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.\frac{4}{5}a\sqrt{2} = \frac{2a^2\sqrt{10}}{5\sqrt{3}} = \frac{2a^2\sqrt{30}}{15}$.

Gọi φ là góc $(AB,(\alpha))$.

Ta có: $CC' = SC - SC' = a\sqrt{3} - \frac{2a}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Dựng OK // CC' với $K \in AC'$, thì $OK \perp (\alpha)$ và $OK = \frac{1}{2}CC' = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Dựng $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OK}$ thì $BF \perp (\alpha)$ và $BF = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ta có: góc $\widehat{(AB,(\alpha))} = \widehat{BAF} = \varphi$; $\sin\widehat{BAF} = \dfrac{BF}{BA} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAB) là tam giác đều. Gọi E, F là trung điểm của AB và CD.

a) Cho biết tam giác SCD vuông cân tại S. Chứng minh: SE $\perp$ (SCD) và SF $\perp$ (SAB).

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên EF. Chứng minh: SH $\perp$ AC

c) Tính góc giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SAD).

LỜI GIẢI

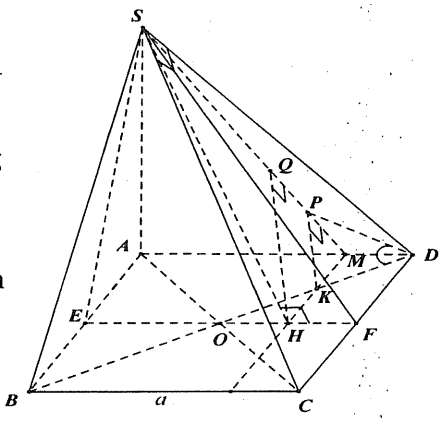
a) Chứng minh SE $\perp$ (SCD) và SF $\perp$ (SAB).

Chứng minh SE $\perp$ (SCD):

Do ΔSCD cân tại S có F là trung điểm của CD $\Rightarrow$ CD $\perp$ SF

Mà CD $\perp$ EF (theo tính chất của hình vuông) $\Rightarrow$ CD $\perp (SEF)$.

Mà $SE \subset (SEF) \Rightarrow SE \perp CD$ (1)



Ta chứng minh ΔSEF *vuông tại S bằng cách sử dụng định lý Pytago như sau:*

ΔSCD vuông tại S có SF là đường trung tuyến nên $SF = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{a}{2}$.

ΔSAB đều cạnh a có SE là trung tuyến nên $SE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; EF = a.

Có : $SE^2 + SF^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = a^2 = EF^2$.

Vậy : ΔSEF vuông tại S $\Rightarrow$ SE $\perp$ SF (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ SE $\perp$ (SCD).

Chứng minh SF $\perp$ (SAB):

Theo chứng minh trên : SE $\perp$ SF (3)

CD $\perp$ (SEF), mà AB // CD $\Rightarrow$ AB $\perp$ (SEF) $\Rightarrow$ SF $\perp$ AB (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ SF $\perp$ (SAB).

b) Chứng minh SH $\perp$ AC

Ta có: CD $\perp$ (SEF) (theo chứng minh trên), mà SH $\subset$ (SEF) $\Rightarrow$ SH $\perp$ CD.

Hơn nữa, $SH \perp EF$ (gt) $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Mà $AC \subset (ABCD) \Rightarrow SH \perp AC$.

c) Tính góc giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SAD).

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD.

Theo tính chất của hình vuông ABCD, ta có : AC, BD và EF đồng quy tại O.

Vì SE > SF nên H thuộc đoạn OF.

Trong mặt phẳng (ABCD), qua H vẽ đường thẳng song song với CD cắt AD, OD lần lượt tại M và K.

Vậy : góc giữa BD và mặt phẳng (SAD) là góc giữa KD và (SAD).

Ta đi tìm hình chiếu của K lên (SAD).

Ta có: $AD \perp MH$, $AD \perp SH$ (do $SH \perp (ABCD)$)

$\Rightarrow AD \perp (SHM) \Rightarrow (SAD) \perp (SHM)$.

$(SAD) \cap (SHM) = SM$. Vẽ $KP \perp SM$ ($P \in SM$) $\Rightarrow KP \perp (SAD)$ tại P.

Nhận xét: Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

$\Rightarrow$ Hình chiếu của K lên (SAD) là P $\Rightarrow$ Hình chiếu của KD lên (SAD) là PD.

$$\Rightarrow \left(\widehat{BD,(SAD)}\right) = \left(\widehat{KD,(SAD)}\right) = \left(\widehat{KD,PD}\right) = \widehat{KDP}.$$

Để tìm góc $\widehat{KDP}$, ta đi tìm KD và KP.

ΔSEF vuông tại S có SH là đường cao nên ta có:

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SE^2} + \frac{1}{SF^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{3a^2}{4}} + \frac{1}{\frac{a^2}{4}} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

ΔSEH vuông tại H nên ta có: $EH = \sqrt{SE^2 - SH^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{16}} = \frac{3a}{4}$.

$$OH = EH - OE = \frac{3a}{4} - \frac{a}{2} = \frac{a}{4} \Rightarrow HF = OF - OH = \frac{a}{2} - \frac{a}{4} = \frac{a}{4}.$$

$\Rightarrow$ H là trung điểm của OF, mà HK // DF nên HK là đường trung bình của ΔFOD.

$\Rightarrow$ K là trung điểm của OD $\Rightarrow KD = \frac{1}{2}OD = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ (Do $BD = a\sqrt{2}$).

$$HK = \frac{1}{2}DF = \frac{1}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a}{4}; \quad MK = MH - HK = \frac{a}{2} - \frac{a}{4} = \frac{a}{4}$$

$\Rightarrow$ K là trung điểm của MH.

Trong (SHM), vẽ $HQ \perp SM$ ($Q \in SM$), mà $KP \perp SM \Rightarrow KP$ // HQ

Mà K là trung điểm của MH nên KP là đường trung bình của ΔMHQ

$\Rightarrow KP = \frac{1}{2}HQ.$

ΔSHM vuông tại H có HQ là đường cao, ta có:

$$\frac{1}{HQ^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HM^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{3a^2}{16}} + \frac{1}{\frac{a^2}{4}} = \frac{28}{3a^2} \Rightarrow HQ = \frac{a\sqrt{21}}{14}$$

$$\Rightarrow KP = \frac{1}{2}HQ = \frac{a\sqrt{21}}{28}$$

Trong ΔKPD vuông tại P, ta có:

$$\sin\widehat{KDP} = \frac{KP}{KD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4\sqrt{7}}}{\frac{a\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{42}}{14} \Rightarrow \widehat{KDP} = \arcsin\frac{\sqrt{42}}{14}$$

Vậy: $\left(\widehat{BD,(SAD)}\right) = \left(\widehat{KDP}\right) = \arcsin\frac{\sqrt{42}}{14}$.

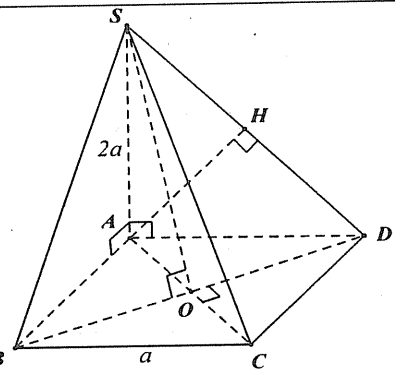
Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA ⊥ (ABCD) và SA = 2a.

a) Chứng minh (SAC) ⊥ (SBD); (SCD) ⊥ (SAD).

b) Tính góc giữa SD và (ABCD) , SB và (SAD) , SB và (SAC) .

c) Tính d(A, (SCD)), d(B,(SAC)).

LỜI GIẢI



a) Chứng minh (SAC) ⊥ (SBD); (SCD) ⊥ (SAD).

Chứng minh (SAC) ⊥ (SBD);

Ta có: BD ⊥ AC (Hai đường chéo của hình vuông ABCD); BD ⊥ SA (do SA ⊥ (ABCD)).

⇒ BD ⊥ (SAC). Mà BD ⊂ (SBD).

⇒ (SAC) ⊥ (SBD).

Chứng minh (SCD) ⊥ (SAD):

Ta có: CD ⊥ AD (Hai cạnh kề của hình vuông ABCD) và CD ⊥ SA (do SA ⊥ (ABCD)

⇒ CD ⊥ (SAD). Mà CD ⊂ (SCD) ⇒ (SCD) ⊥ (SAD).

b) Tính góc giữa SD và (ABCD); SB và (SAD) ; SB và (SAC).

Tính góc giữa SD và (ABCD).

Ta có: SA ⊥ (ABCD) tại A nên hình chiếu của S lên mp (ABCD) là A.

⇒ Hình chiếu của SD lên mặt phẳng (ABCD) là AD.

$\Rightarrow \left(\widehat{SD,(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SD,AD}\right) = \widehat{SDA}$.

Trong ΔSAD vuông tại A, $\tan\widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} = \frac{2a}{a} = 2 \Rightarrow \widehat{SDA} = \arctan 2$.

Vậy: $\left(\widehat{SD,(ABCD)}\right) = \widehat{SDA} = \arctan 2$.

Tính góc giữa SB và (SAD):

Ta có: BA ⊥ SA, BA ⊥ AD ⇒ BA ⊥ (SAD) tại A nên hình chiếu của B lên (SAD) là A.

⇒ Hình chiếu của SB lên mặt phẳng (SAD) là SA.

$\Rightarrow \left(\widehat{SB,(SAD)}\right) = \left(\widehat{SB,SA}\right) = \widehat{BSA}$.

Trong ΔSAB vuông tại A: $\tan\widehat{BSA} = \frac{AB}{SA} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BSA} = \arctan\frac{1}{2}$

Vậy: $\left(\widehat{SB,(SAD)}\right) = \widehat{BSA} = \arctan\frac{1}{2}$.

Tính góc giữa SB và (SAC):

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD.

Theo chứng minh trên: BD ⊥ (SAC) tại O nên hình chiếu của B lên (SAC) là O.

⇒ Hình chiếu của SB lên (SAC) là SO $\Rightarrow \left(\widehat{SB,(SAC)}\right) = \left(\widehat{SB,SO}\right) = \widehat{BSO}$.

$BD = a\sqrt{2} \Rightarrow BO = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

ΔSAB vuông tại A nên: $SB = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}$.

Trong ΔSOB vuông tại O, ta có: $\sin\widehat{BSO} = \frac{BO}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \widehat{BSO} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Vậy: $\left(\widehat{SB,(SAC)}\right) = \widehat{BSO} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$.

c). Tính d(A, (SCD)); d(B,(SAC)).

Tính d(A, (SCD)).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SD.

Ta có: AH ⊥ SD.

Theo chứng minh ở câu a, CD ⊥ (SAD)

Mà AH ⊂ (SAD) ⇒ AH ⊥ CD ⇒ AH ⊥ (SCD) ⇒ d(A, (SCD)) = AH.

ΔSAD vuông tại A có AH là đường cao.

Ta có: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AS^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4a^2}\Rightarrow AH=\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Vậy: $d\left(A,(SCD)\right)=AH=\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Nhận xét: Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Trong ý trên, do (SAD) $\perp$ (SCD) và có giao tuyến là SD nên khi kẻ AH $\perp$ SD thì AH $\perp$ (SCD).

Tính d(B,(SAC)).

Theo chứng minh trên BD $\perp$ (SAC) tại O nên hình chiếu của B lên (SAC) là O.

$\Rightarrow d(B,(SAC))=BO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hình chóp S.ABC. ΔABC vuông tại A, góc $\widehat{B}=60^0$, AB = a, hai mặt bên (SAB) và (SBC) vuông góc với đáy; SB = 2a. Hạ BH $\perp$ SA (H $\in$ SA); BK $\perp$ SC (K $\in$ SC).

a) Chứng minh: SB $\perp$ (ABC)

b) Chứng minh: mp(BHK) $\perp$ SC.

c) Chứng minh: ΔBHK vuông.

d) Tính cosin của góc tạo bởi SA và (BHK).

LỜI GIẢI

Nhận xét: Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) vuông góc với mặt phẳng đó, tức là:

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha)\cap(\beta)=d\\(\alpha)\perp(\gamma);(\beta)\perp(\gamma)\end{array}\right\}\Rightarrow d\perp(\gamma).$$

a) SB $\perp$ (ABC):

Ta có: $\left.\begin{array}{l}(SAB)\cap(SBC)=SB\\(SAB)\perp(ABC);(SBC)\perp(ABC)\end{array}\right\}$

$\Rightarrow SB\perp(ABC)$.

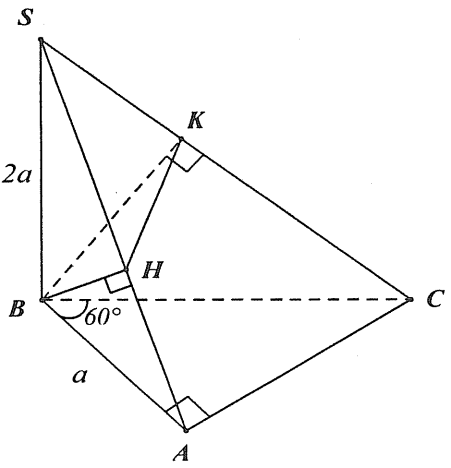
b) CM (BHK) $\perp$ SC:

SC $\perp$ BK (gt) (1)

AC $\perp$ AB (ΔABC vuông tại A) và

AC $\perp$ SB (do SB $\perp$ (ABC))

$\Rightarrow$ AC $\perp$ (SAB).



Mà $BH \subset (SAB) \Rightarrow BH \perp AC$. Mặc khác: $BH \perp SA$ (gt)

$\Rightarrow BH \perp (SAC)$. Mà $SC \subset (SAC) \Rightarrow SC \perp BH$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SC \perp (BHK)$.

c) CM ΔBHK vuông:

Theo chứng minh ở câu b, $BH \perp (SAC)$. Mà $HK \subset (SAC) \Rightarrow BH \perp HK$.

Vậy: ΔBHK vuông tại H.

d) Tính cosin của góc tạo bởi SA và (BHK) :

Vì $H \in SA$ nên $\left(\widehat{SA,(BHK)}\right) = \left(\widehat{SH,(BHK)}\right)$.

Theo chứng minh ở câu b, $SC \perp (BHK)$ tại K nên hình chiếu của S lên (BHK) là K.

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SH lên (BHK) là KH.

$\Rightarrow \left(\widehat{SA,(BHK)}\right) = \left(\widehat{SH,(BHK)}\right) = \left(\widehat{SH,KH}\right) = \widehat{SHK}$.

ΔSHK vuông tại K nên $\cos\widehat{SHK} = \dfrac{HK}{SH}$.

Ta có: $\Delta SHK \backsim \Delta SCA \Rightarrow \dfrac{HK}{SH} = \dfrac{AC}{SC}$.

ΔBAC vuông tại A, $\cos 60^0 = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \dfrac{AB}{\cos 60^0} = \dfrac{a}{\frac{1}{2}} = 2a$.

ΔSBC vuông tại B nên $SC = \sqrt{BS^2 + BC^2} = \sqrt{4a^2 + 4a^2} = 2\sqrt{2}a$.

$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{8a^2 - a^2} = a\sqrt{7}$

$\Rightarrow \cos\widehat{SHK} = \dfrac{HK}{SH} = \dfrac{AC}{SC} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{2}a} = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

Vậy: $\cos\left(\widehat{SA,(BHK)}\right) = \cos\widehat{SHK} = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD. Và M là trung điểm của SC.

a) Chứng minh: (MBD) $\perp$ (SAC).

b) Tính góc giữa SA và mp(ABCD) .

c) Tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABCD).

d) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD).

LỜI GIẢI

Nhắc lại: Hình chóp đều là hình chóp có các cạnh bên bằng nhau và có đáy là đa giác đều. Do đó, trong hình chóp đều, tâm của đa giác đáy trùng với hình chiếu của đỉnh S lên mặt đáy.

a) Chứng minh: (MBD) ⊥ (SAC):

Vì hình chóp S.ABCD đều nên SO ⊥ (ABCD).

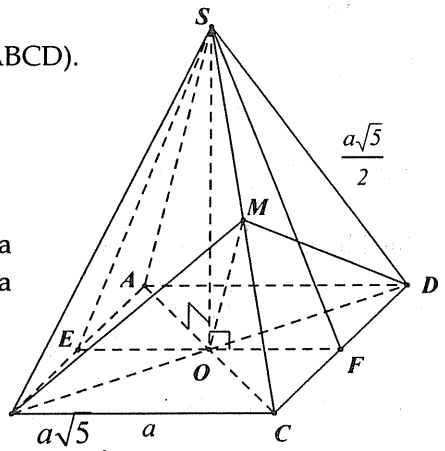
Mà BD ⊂ (ABCD) ⇒ BD ⊥ SO.

Hơn nữa có: BD ⊥ AC ⇒ BD ⊥ (SAC).

Mà BD ⊂ (MBD) ⇒ (MBD) ⊥ (SAC).

Tính góc giữa SA và mp(ABCD):

Ta có: SO ⊥ (ABCD) nên hình chiếu của S lên (ABCD) là O ⇒ Hình chiếu của SA lên (ABCD) là OA.



$\Rightarrow \left(\widehat{SA,(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SA,OA}\right) = \widehat{SAO}$.

$SA = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ $SA = \frac{a\sqrt{5}}{2}$;

Trong ΔSOA vuông tại O, ta có:

$\cos\widehat{SAO} = \frac{AO}{SA} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \widehat{SAO} = \arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Vậy: $\left(\widehat{SA,(ABCD)}\right) = \widehat{SAO} = \arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABCD):

Ta có: MBD ∩ (ABCD) = BD; BD ⊥ (SAC); (SAC) ∩ (ABCD) = AC;

$(SAC) \cap (MBD) = MO \Rightarrow \left(\widehat{(MBD),(ABCD)}\right) = \left(\widehat{AC,MO}\right) = \widehat{COM}$

(Vì $\widehat{COM}$ là góc nhọn)

Trong ΔSOC vuông tại O có OM là đường trung tuyến nên:

$OM = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{4}$.

$OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $MC = \frac{1}{2}SC = \frac{a\sqrt{5}}{4}$.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác COM, ta có:

$CM^2 = OM^2 + OC^2 - 2OM.OC.\cos\widehat{COM}$.

$$\cos\widehat{COM} = \frac{OM^2 + OC^2 - CM^2}{2OM.OC} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{5}}{4}\right)^2}{2\frac{a\sqrt{5}}{4}.\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$\Rightarrow \widehat{COM} = \arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Vậy: $\left(\widehat{(MBD),(ABCD)}\right) = \widehat{COM} = \arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Cách 2:

Trong ΔSOC vuông tại O có OM là đường trung tuyến nên:

$OM = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{4} = CM \Rightarrow \Delta COM$cân tại $M \Rightarrow \widehat{COM} = \widehat{MCO}$.

Mặc khác: $\widehat{MCO} = \widehat{SAO}$ (Vì ΔSAC cân tại S) $\Rightarrow \widehat{COM} = \widehat{SAO}$.

Theo câu b, $\widehat{SAO} = \text{arc}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

Từ đó suy ra: $\left(\widehat{(MBD),(ABCD)}\right) = \widehat{COM} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD):

Ta có: (SAB) $\cap$ (ABCD) =AB. Gọi E , F lần lượt là trung điểm của AB và CD.

$AB \perp EF$; $AB \perp SO$ (Do $SO \perp (ABCD)$) $\Rightarrow AB \perp (SEF)$.

(SEF) $\cap$ (ABCD) = EF; (SEF) $\cap$ (SAB) = SE;

$\Rightarrow \left(\widehat{(SAB),(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SE,EF}\right) = \widehat{SEF}$ (Vì $\widehat{SEF}$ là góc nhọn)

ΔSOC vuông tại O nên $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong ΔSEO vuông tại O, ta có:

$\tan\widehat{SEF} = \frac{SO}{OE} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SEF} = 60^0$

Vậy: $\left(\widehat{(SAB),(ABCD)}\right) = \widehat{SEF} = 60^0$.

Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có AA' $\perp$ (ABC) và AA' = a, đáy ABC là tam giác vuông tại A có BC = 2a, AB = $a\sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng (BCC'B').

b) Tính khoảng cách từ A đến (A'BC).

c) Chứng minh rằng AB $\perp$ (ACC'A') và tính khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC').

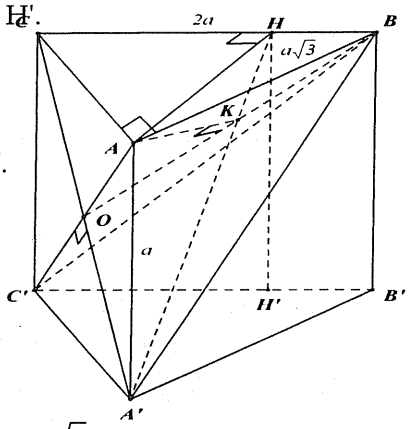
LỜI GIẢI

a) Tính khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng (BCC'B').

Vì AA; // BB' nên AA' // (BCC'B') $\Rightarrow$ d(AA', (BB'C'C) = d(A, (BCC'B')

Gọi H là hình chiếu ⊥ của A lên BC.

Từ H, vẽ đường thẳng // với AA' cắt B'C' tại H'.



Do AA' // HH', mà AA' ⊥ (ABC)

$\Rightarrow$ HH' ⊥ (ABC) $\Rightarrow$ HH' ⊥ AH.

Ta có: $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp HH' \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BCC'B')$ tại H.

$\Rightarrow d\left(A,(BCC'B')\right) = AH$.

ΔABC vuông tại A nên:

$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$.

ΔABC vuông tại A có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow d\left(AA',(BB'C'C)\right) = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

b) Tính khoảng cách từ A đến (A'BC).

AB ⊥ AA' (Do AA' ⊥ (ABC)); AB ⊥ AC (gt) $\Rightarrow$ AB ⊥ (A'ACC') $\Rightarrow$ AB ⊥ A'C.

Ta có: A'A = AC = a nên A'ACC' là hình vuông.

Gọi O là tâm của hình vuông A'ACC'.

Do $\left.\begin{matrix} A'C \perp AC' \\ A'C \perp AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow A'C \perp (ABC')$

Mà A'C ⊂ (A'BC) $\Rightarrow$ (ABC') ⊥ (A'BC).

Hai mặt phẳng (A'BC), (ABC') có giao tuyến là OB.

Trong (ABC') kẻ AK ⊥ OB (K ∈ OB)

$\Rightarrow$ AK ⊥ (A'BC) tại K $\Rightarrow d\left(A,(A'BC)\right) = AK$.

ΔAOB vuông tại A có AK là đường cao nên:

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AO^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

Vậy: $d\left(A,(A'BC)\right) = AK = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Cách 2:

Vì BC ⊥ AH, BC ⊥ AA' $\Rightarrow$ BC ⊥ (AA'H) $\Rightarrow$ (A'BC) ⊥ (AA'H).

Hai mặt phẳng này cắt nhau theo giao tuyến A'H.

Trong mặt phẳng (AA'H), kẻ AI ⊥ A'H (I ∈ A'H) $\Rightarrow$ AI ⊥ (A'BC) tại I.

$\Rightarrow d\left(A,\left(A'BC\right)\right) = AI$.

$\Delta AA'H$ vuông tại A có AI là đường cao nên:

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{\frac{3a^2}{4}} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

$$\Rightarrow d\left(A,\left(A'BC\right)\right) = AI = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

Nhận xét: Hai điểm I và K hiển nhiên trùng nhau.

c) Chứng minh rằng AB ⊥ (ACC'A') và tính khoảng cách từ A' đến mp (ABC').

Chứng minh rằng AB ⊥ (ACC'A'):

Ta có: AB ⊥ AC, AB ⊥ AA' (Do AA' ⊥ (ABC) ⇒ AB ⊥ (ACC'A').

Tính khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC'):

Theo chứng minh trên, A'C ⊥ (ABC') tại O nên $d\left(A',\left(ABC'\right)\right) = A'O$.

Ta có: $A'C = a\sqrt{2} \Rightarrow A'O = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow d\left(A',\left(ABC'\right)\right) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Nhận xét: Để tính khoảng cách từ M đến (α), nếu đề bài cho không xác định trực tiếp được hình chiếu của M lên (α) thì ta làm như sau :

Tìm mp (β) đi qua M và (β) ⊥ (α);

Tìm giao tuyến Δ = (α) ∩ (β);

Kẻ MH ⊥ Δ (H ∈ Δ) ⇒ MH ⊥ (α) ⇒ $d\left(M,\left(\alpha\right)\right) = MH$.

Cho hình thang ABCD vuông tại A và B , có AD = 2a, AB = BC = a. Trên đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng (ABCD) lấy điểm S. Gọi C' và D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của đỉnh A trên SC và SD.

a) Chứng minh $\widehat{SBC} = \widehat{SCD} = 90^0$.

b) Chứng minh ba đường thẳng AD', AC', AB cùng nằm trên một mặt phẳng. Từ đó chứng minh C'D' luôn đi qua một điểm cố định khi S chạy trên Ax.

c) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SC khi $SA = a\sqrt{2}$.

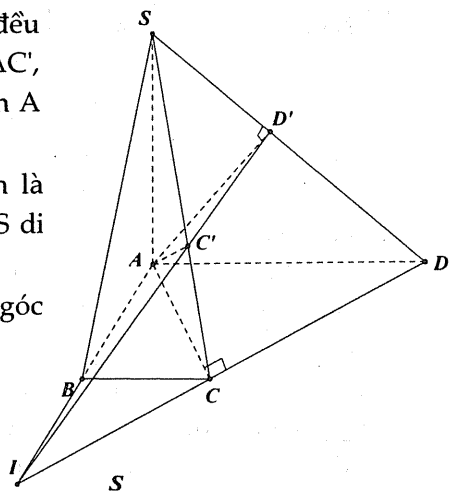
LỜI GIẢI

a) Chứng minh $\widehat{SBC} = \widehat{SCD} = 90^0$.

Áp dụng định lý ba đường vuông góc thì ta chứng minh được SB ⊥BC và SC ⊥ CD.

b). Dễ dàng chứng minh AD', AC', AB đều vuông góc với SD . Từ đó suy ra AD', AC', AB cùng nằm trong mp(P) đi qua điểm A và vuông góc với SD.

Do đó C'D' đi qua một điểm cố định là giao điểm I của AB và CD khi điểm S di động trên đường thẳng Ax.



c). Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SC.

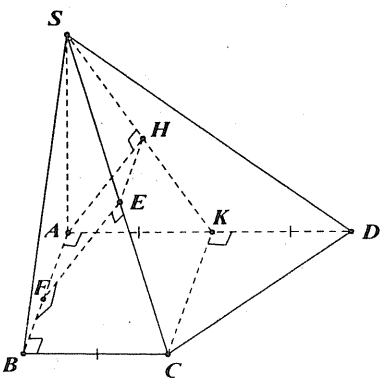
Gọi K trung điểm AD.

Ta có: AB // CK, mà CK $\subset$ (SCK)

$\Rightarrow$ AB // mp (SCK). Dựng AH $\perp$ SK.

Ta có: $\begin{cases} AH \perp SK \\ AH \perp CK \left(CK \perp (SAD)\right) \end{cases}$

$\Rightarrow AH \perp (SCK) \Rightarrow \begin{cases} AH \perp SC \\ AH \perp CK \end{cases}$



Trong mặt phẳng (SCK) kẻ HE // CK.

Suy ra HE và AB cùng thuộc một mặt phẳng vì cùng song song với CK.

Trong mp (AB,HE), kẻ EF // AH, F $\in$ AB.

Vậy: EF là đoạn vuông góc chung của AB và SC

Ta có: AHEF là hình bình hành AH = EF.

Trong ΔSAH vuông tại A:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Kết luận: $d(AB,SC) = AH = EF = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

CHƯƠNG IV: THỂ TÍCH KHỐI TRỤ, THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

LOẠI 1: THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG CAO CỦA KHỐI CHÓP

Loại 1: Khối chóp có 1 cạnh vuông góc với đáy , thì cạnh đó là chiều cao của khối chóp .

Loại 2: Khối chóp có một mặt bên vuông góc với đáy , thì chiều cao chính là đường kẻ từ mặt bên vuông góc với giao tuyến .

Loại 3: Khối chóp có hai mặt kề nhau vuông góc với đáy , thì đường cao chính là giao tuyến của hai mặt kề nhau đó .

Loại 4: Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau , hoặc các cạnh bên cùng tạo với đáy một góc bằng nhau thì chân đường cao chính là tâm vòng tròn ngoại tiếp đáy .

Loại 5: Khối chóp có các mặt bên đều tạo với đáy một góc bằng nhau thì chân đường cao chính là tâm vòng tròn nội tiếp.

Công thức tính thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3}B.h$

Với B là diện tích đáy , h là độ dài chiều cao của khối chóp.

DẠNG 1: Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy.

Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với AC = a , biết SA vuông góc với đáy ABC và SB hợp với đáy một góc 60^o.

a) Chứng minh các mặt bên là tam giác vuông .

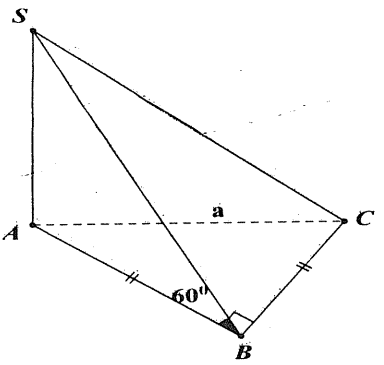
b) Tính thể tích hình chóp .

LỜI GIẢI

a) $SA \perp mp(ABC) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AC \end{cases}$

Mà $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp SB$ (định lý 3 đường vuông góc).

Vậy các mặt bên chóp là tam giác vuông.



b) Ta có : SA ⊥ (ABC)

$\Rightarrow$ AB là hình chiếu của SB trên mp(ABC).

Vậy : góc [SB,(ABC)] = $\widehat{SBA} = 60^0$.

Ta có : ΔABC vuông cân nên $BA = BC = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Vậy: $S_{ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = \frac{a^2}{4}$

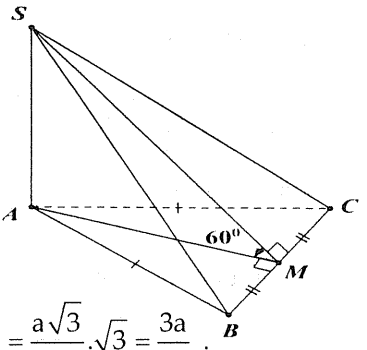
Trong ΔSAB vuông tại A có: $SA = AB.\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} SA$

Vậy: $V = \dfrac{1}{3} S_{\Delta ABC}.SA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2}{4}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{24}$.

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , biết SA vuông góc với mặt đáy (ABC), và (SBC) hợp với đáy (ABC) một góc 60^o. Tính thể tích hình chóp S.ABC.

LỜI GIẢI

Gọi M là trung điểm của BC,vì tam giác ABC đều nên $AM \perp BC$ $\Rightarrow SM \perp BC$ (định lý 3 đường vuông góc) .



Vậy : $\left[\widehat{(SBC),(ABC)}\right] = \widehat{SMA} = 60^0$

Vì ΔABC đều nên: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

Có $AM = \dfrac{AB.\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong ΔSAM vuông tại A có: $SA = AM.\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \dfrac{3a}{2}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3} S_{ABC}.SA = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Cho hình chóp SABCD có đáy (ABCD) là hình vuông có cạnh a và SA vuông góc đáy (ABCD) , mặt bên (SCD) hợp với đáy (ABCD) một góc 60^o.

a) Tính thể tích hình chóp SABCD.

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD).

LỜI GIẢI

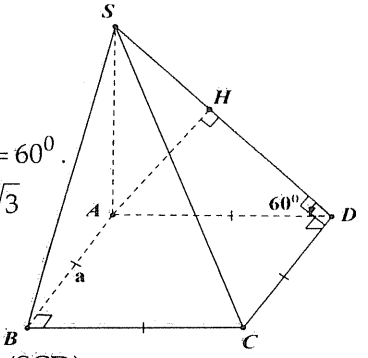
a) Vì $CD \perp AD$ và $CD \perp SA$

$\Rightarrow CD \perp SD$ (định lý 3 đường vuông góc) (1)

Suy ra góc giữa (SCD) và (ABCD) là góc $\widehat{SDA} = 60^0$.

ΔSAD vuông tại A nên có $SA = AD.\tan 60^o = a\sqrt{3}$

Vậy: $V = \dfrac{1}{3} S_{ABCD}.SA = \dfrac{1}{3} a^2.a\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$



b). Ta dựng $AH \perp SD$ tại H.

Vì $CD \perp (SAD)$ (do (1)) nên $CD \perp AH \Rightarrow AH \perp (SCD)$

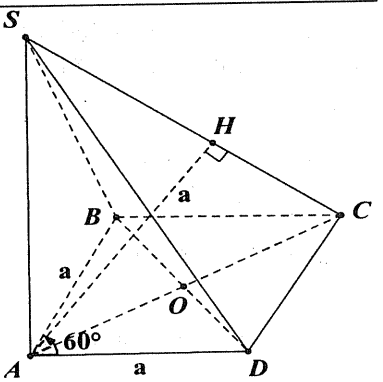
Vậy AH là khoảng cách từ A đến (SCD).

ΔSAD vuông tại A: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{4}{3a^2}$.

Vậy: $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và góc nhọn A bằng 60^o và SA $\perp$ (ABCD), biết rằng khoảng cách từ A đến cạnh SC = a. Tính thể tích khối chóp SABCD.

LỜI GIẢI



Vì ABCD là hình thoi có góc A bằng 60^0.

Nên ABD đều $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$.

Xét ΔSAC vuông tại A :

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AS^2} \Rightarrow \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{3a^2} = \frac{2}{3a^2}$$

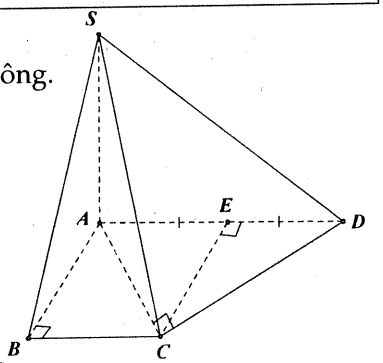
$$\Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Diện tích đáy ABCD $V_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Cho khối chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B biết AB = BC = a, AD = 2a, SA $\perp$ (ABCD) và (SCD) hợp với đáy (ABCD) một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

LỜI GIẢI



Gọi E trung điểm của AD có ABCE là hình vuông.

Trong ΔACD có $CE = \dfrac{1}{2}AD$ (đường trung tuyến bằng nửa cạnh huyền) nên ΔACD vuông tại C.

$$\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp mp(SAC) \Rightarrow CD \perp SC.$$

Vậy góc giữa mp (SCD) và (ABCD) là góc $\widehat{SCA} = 60^0$.

Xét ΔSAC có $SA = AC.\tan 60^0 = a\sqrt{2}.\sqrt{3} = a\sqrt{6}$.

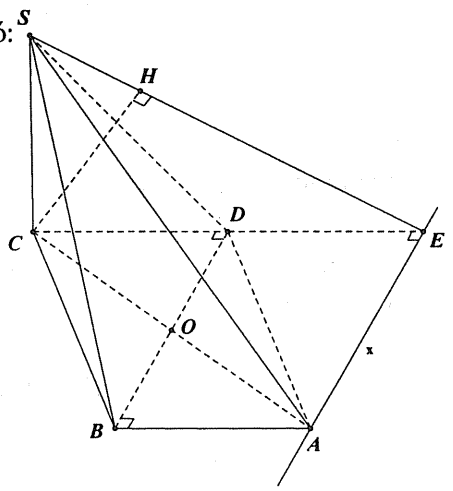
Diện tích đáy ABCD: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{2}(BC + AD).AB = \dfrac{1}{2}(a + 2a).a = \dfrac{3a^2}{2}$.

Thể tích khối chóp: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{6}.\dfrac{3a^2}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành với $AB = a, AD = 2a, \widehat{BAD} = 60^0$, SC vuông góc với mặt phẳng (ABCD), SA hợp với mặt phẳng (ABCD) góc 45^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD.

LỜI GIẢI

Áp dụng hàm cosin cho tam giác ABD có:



$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos 60^0$$

$$= a^2 + 4a^2 - 2.a.2a.\frac{1}{2} = 3a^2$$

$\Rightarrow BD = a\sqrt{3}$.

Từ đó ta có $AD^2 = AB^2 + BD^2 = 4a^2$

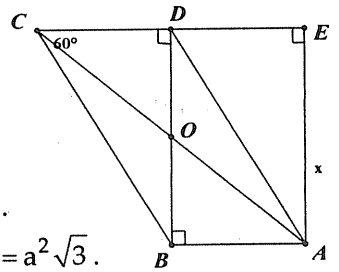
$\Rightarrow \Delta ABD$ vuông tại B.

Gọi $O = AC \cap BD$.

Trong ΔABO có:

$$OA = \sqrt{AB^2 + BO^2} = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$\Rightarrow AC = a\sqrt{7}$.



Ta có AC là hình chiếu vuông góc SA trên mp(ABCD), góc giữa SA và (ABCD) là góc $\widehat{SAC} = 45^0$.

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại C nên $SC = AC = a\sqrt{7}$.

Diện tích ABCD: $S = 2S_{\Delta ABD} = BA.BD = a.a\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp S.ABCD: $V = \frac{1}{3}SC.S_{ABCD} = \frac{1}{3}a\sqrt{7}.a^2\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{21}}{3}$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD.

Dựng Ax // BD, gọi $E = Ax \cap CD$.

Vì $BD // AE \Rightarrow BD // (SAE)$, nên $\Rightarrow d(BD,SA) = d(BD,(SAE)) = d(D,(SAE))$.

Có: $\begin{cases} AE \perp CE \\ AE \perp SC \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SCE) \Rightarrow (SAE) \perp (SCE)$.

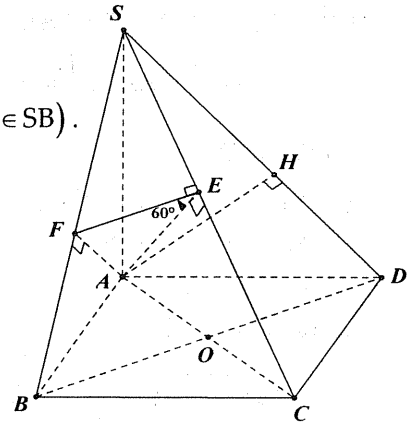
Hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SE, dựng $CH \perp SE \Rightarrow CH \perp (SAE) \Rightarrow d(C,(SAE)) = CH$.

Trong ΔSCE có $\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CS^2} + \frac{1}{CE^2} = \frac{1}{7a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{11}{28a^2} \Rightarrow CH = \frac{2a\sqrt{77}}{11}$.

Vì D là trung điểm của CE nên $d\left(D,(SAE)\right)=\frac{1}{2}d\left(C,(SAE)\right)=\frac{a\sqrt{77}}{11}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật , SA vuông góc với đáy ABCD, biết $AB=a, AD=a\sqrt{3}$, góc giữa mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

LỜI GIẢI



Dựng $AE\perp SC\left(E\in SC\right)$.

Trong mặt phẳng (SBC) từ E kẻ $EF\perp SC\left(F\in SB\right)$.

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) là góc giữa hai đường thẳng AE và FE.

Ta có: $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)$

$\Rightarrow BC\perp AF\left(AF\subset(SAB)\right)$ (1)

Ta có: $\begin{cases}SC\perp AE\\SC\perp EF\end{cases}\Rightarrow SC\perp(AEF)\Rightarrow SC\perp AF\left(AF\subset(AEF)\right)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $AF\perp(SBC)\Rightarrow AF\perp SB,\ AF\perp FE$.

Trong ΔAEF có: $AF=AE.\sin 60^0=\frac{AE\sqrt{3}}{2}$.

Trong hai tam giác SAB và SAC có :

$$\frac{1}{AF^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AB^2}\Rightarrow\frac{1}{AS^2}=\frac{1}{AF^2}-\frac{1}{AB^2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AC^2}\Rightarrow\frac{1}{AS^2}=\frac{1}{AE^2}-\frac{1}{AC^2} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \frac{1}{AF^2}-\frac{1}{AB^2}=\frac{1}{AE^2}-\frac{1}{AC^2}$

$$\Leftrightarrow\frac{4}{3AE^2}-\frac{1}{a^2}=\frac{1}{AE^2}-\frac{1}{4a^2}\Rightarrow AE=\frac{2a}{3}.$$

Vậy: $\frac{1}{AS^2}=\frac{1}{AE^2}-\frac{1}{AC^2}=\frac{9}{4a^2}-\frac{1}{4a^2}=\frac{2}{a^2}\Rightarrow AS=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích khối chóp S.ABCD: $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a.a\sqrt{3}=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

Vì $AB // CD \Rightarrow AB // (SCD)$, nên suy ra:

$d(AB,SC) = d(AB,(SCD)) = d(A,(SCD))$.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)$, hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SD.

Dựng $AH \perp SD (H \in SD) \Rightarrow AH \perp (SCD)$. Vậy $d(A,(SCD)) = AH$.

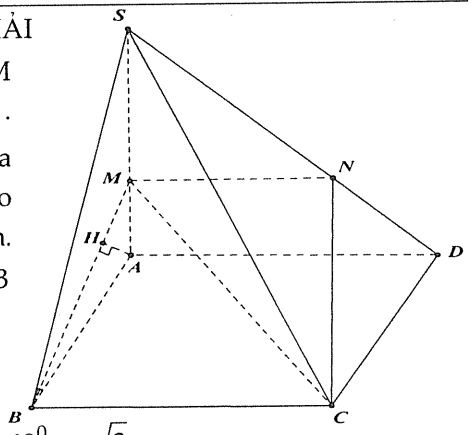
Trong ΔSAD có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{5}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Kết luận $d(AB,SC) = \frac{a\sqrt{10}}{5}$.

DỰ BỊ ĐẠI HỌC KHỐI A . 2006

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$, cạnh SA vuông góc với đáy (ABCD), cạnh bên SB tạo với đáy 1 góc 60^0. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng (BCM) cắt SD tại N. Tính thể tích khối chóp S.BCNM.

LỜI GIẢI



Hai mặt phẳng (BCM) và (SAD) có M là điểm chung thứ nhất, mà $BC // AD$. Suy ra giao tuyến của 2 mặt phẳng qua M và song song với BC, AD. Giao tuyến cắt SD tại 1 điểm là điểm N cần tìm.

AB là hình chiếu vuông góc của SB trên mp(ABCD) nên:

$\left[\widehat{SB,(ABCD)}\right] = \widehat{SBA} = 60^0$

Trong ΔSAB vuông tại A: $SA = AB.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(SAB) \Rightarrow BC \perp BM$.

Vậy tứ giác BCNM là hình thang vuông tại B và M.

Hạ $AH \perp BM (H \in BM)$, vì $\begin{cases} AH \perp BM \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp mp(BCNM)$.

$BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Có: $MN \,//\, AD \Rightarrow \frac{SM}{SA} = \frac{MN}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN = \frac{2}{3}AD = \frac{4a}{3}$

Trong tam giác vuông ABM: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{3}{a^2} = \frac{4}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a}{2}$

Ta có: $SA \cap (BCNM) = M \Rightarrow \frac{d(S,(BCNM))}{d(A,(BCNM))} = \frac{SM}{AM} = 2 \Rightarrow d(S,(BCNM)) = a$.

Có $S_{BCNM} = \frac{(BC + MN).BM}{2} = \frac{1}{2}.\left(2a + \frac{4a}{3}\right).\frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{10a^2\sqrt{3}}{9}$.

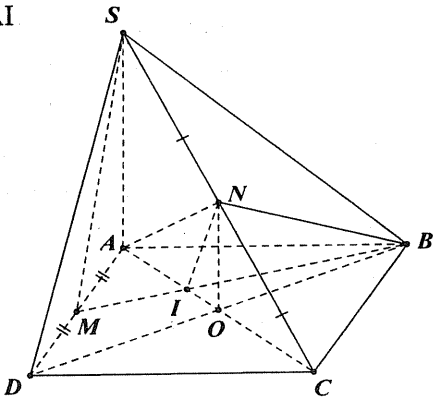
Vậy $V_{S.BCNM} = \frac{1}{3}d(S,(BCNM)).S_{BCNM} = \frac{1}{3}a.\frac{10a^2\sqrt{3}}{9} = \frac{10a^3\sqrt{3}}{27}$.

TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI B 2006.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và SC, I là giao điểm của MB và AC. Chứng minh mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB).

Tính thể tích khối tứ diện A.NIB.

LỜI GIẢI



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Xét ΔABM vuông tại M:

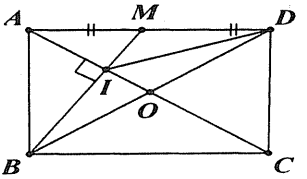
$BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Và: $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì I trọng tâm tam giác ABD:

$IM = \frac{1}{3}BM = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. $AI = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Trong ΔAIM có $AM^2 = AI^2 + MI^2 = \frac{a^2}{2}$.

Vậy ΔAIM vuông tại I.

Ta có: $\begin{cases} BM \perp AC \\ BM \perp SA \end{cases} \Rightarrow BM \perp mp(SAC)$

$\Rightarrow mp(SBM) \perp mp(SAC)$ (vì $BM \subset mp(SBM)$).

$S_{\Delta ABI} = \frac{1}{2}.IA.IB = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}IO.\frac{2}{3}BM = \frac{2}{9}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{6}$.

Ta có ON // SA (vì ON là đường trung bình của tam giác) nên:

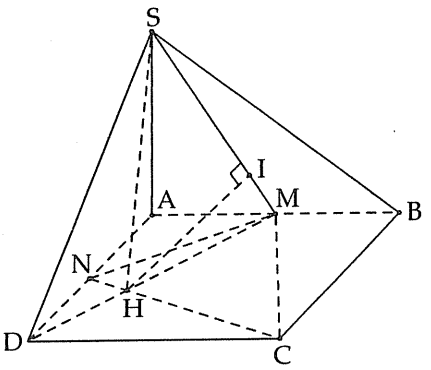
$ON \perp (ABCD), ON = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2}$.

Thể tích cần tìm: $V_{N.IAB} = \frac{1}{3}.NO.S_{\Delta IAB} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{2}}{6} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2010.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD, $H = CN \cap DM$ và SH vuông góc với (ABCD) và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.CDNM và khoảng cách giữa DM và SC.

LỜI GIẢI



Ta có $\Delta ADM = \Delta DCN (c.g.c) \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{C_1}$.

Mà $\widehat{D_1} + \widehat{D_2} = 90^0 \Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{D_2} = 90^0$

$\Rightarrow \Delta CDH$ vuông tại H nên $CN \perp DM$.

Trong ΔADM có:

$DM = \sqrt{AD^2 + AM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

$S_{CDNM} = \frac{1}{2}.CN.DM = \frac{1}{2}.\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{8}$.

Vậy: $V_{S.CDNM} = \frac{1}{3}SH.S_{CDNM} = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{5a^2}{8} = \frac{5a^3\sqrt{3}}{24}$.

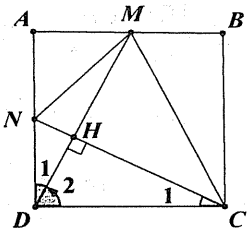
Gọi I là hình chiếu vuông góc của H trên cạnh SC (1)

Ta có: $\begin{cases} DM \perp CN \\ DM \perp SH \end{cases} \Rightarrow DM \perp mp(SCN) \Rightarrow DM \perp HI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: HI là đoạn vuông góc chung của SC và DM.

Vậy: $d(SC, DM) = HI$.

Ta có: $CD^2 = CH.CN \Rightarrow CH = \dfrac{a^2}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.



$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HC^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{5}{4a^2} = \frac{19}{12a^2}.$$

$$\Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{12}}{\sqrt{19}} = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2010.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA = a ; hình chiếu vuông góc của S lên (ABCD) là điểm H thuộc đoạn AC, $AH = \dfrac{AC}{4}$. CM là đường cao của tam giác SAC. CMR: M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện SMBC.

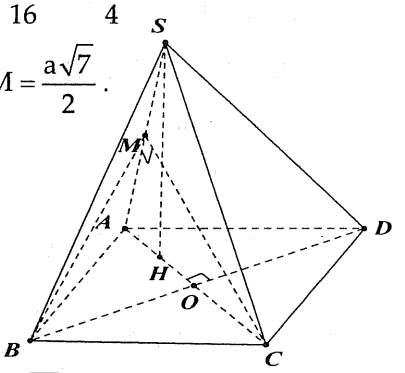
LỜI GIẢI

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

$$AH = \frac{AC}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}, SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$$

$$SH.AC = CM.SA \Leftrightarrow CM.a = \frac{a\sqrt{14}}{4}.a\sqrt{2} \Rightarrow CM = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

$$AM = \sqrt{AC^2 - CM^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{7a^2}{4}} = \frac{a}{2} = \frac{SA}{2}.$$



Vậy M trung điểm của SA.

Ta có: $BO \perp AC$, $BO \perp SH$

$\Rightarrow BO \perp mp(SAC)$.

$$V_{B.SCM} = \frac{1}{3}.BO.S_{\Delta SCM} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{a^3\sqrt{14}}{48}$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2012.

Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho HA = 2HB. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích của khối chóp S.ABC và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

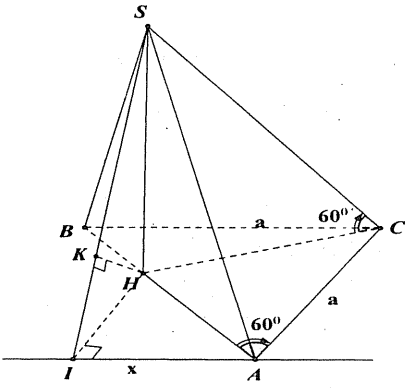
LỜI GIẢI

Áp dụng định lý cosin cho tam giác AHC có:

$CH^2 = AC^2 + AH^2 - 2AC.CH.\cos\widehat{CAH}$

$= a^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 - 2.a.\frac{2a}{3}.\cos 60^0 = \frac{7a^2}{7}$

$\Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{7}}{3}$.



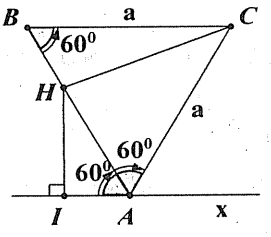
Ta có: HC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (ABC) nên góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SCH} = 60^0$.

Trong Δ SCH vuông tại H có:

$SH = CH.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{7}}{3}.\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{21}}{3}$.

Diện tích tam giác ABC đều:

$S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.



Thể tích khối chóp:

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{21}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}$

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

Đây là bài tính khoảng cách giữa cạnh bên và cạnh đáy, các bạn xem lại phương pháp tính ở bài khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Kẻ Ax // BC $\Rightarrow$: BC // mp(SAx) (vì $Ax \subset (SAx)$).

Nên: $d(BC,SA) = d(BC, mp(SAx)) = d(B, mp(SAx))$.

BC song song với mặt phẳng (SAx) thì khoảng cách mọi điểm trên đường thẳng BC đến mặt phẳng (SAx) đều bằng nhau. Vì sao Thầy lại chọn điểm B mà không chọn điểm C là vì điểm B nằm trên đường thẳng có chứa điểm H là hình chiếu của đỉnh, việc tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng bên (SAx) là rất dễ dàng. Thông qua công thức tính tỉ số khoảng cách thì ta tính được khoảng cách từ B.

Dựng HI $\perp$ Ax tại I. Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên SI.

Vì $\begin{cases} Ax \perp HI \\ Ax \perp SH \end{cases} \Rightarrow Ax \perp (SHI) \Rightarrow mp(SAx) \perp mp(SHI)$.

Hai mặt phẳng (SAx) và (SHI) vuông góc với nhau có giao tuyến SI.

Mà $HK \perp SI \Rightarrow HK \perp (SAx)$.

Vậy $d(H, mp(SAx)) = HK$.

Trong ΔAIH vuông tại I có $HI = HA.\sin 60^0 = \frac{2a}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong ΔSIH vuông tại H có:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HI^2} = \frac{9}{21a^2} + \frac{9}{3a^2} = \frac{24}{7a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{24}}.$$

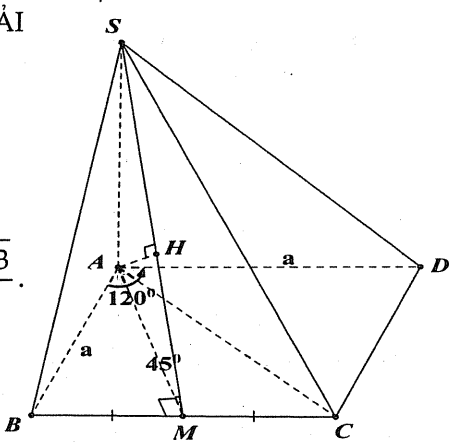
Đường thẳng đi qua hai điểm B và H có giao điểm với mặt phẳng (SAx) là A nên: $\frac{d\left(B,mp(SAx)\right)}{d\left(H,mp(SAx)\right)} = \frac{BA}{HA} = \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow d\left(B,mp(SAx)\right) = \frac{3}{2}d\left(H,mp(SAx)\right) = \frac{3}{2}.\frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{24}} = \frac{a\sqrt{42}}{8}$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2013

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a. Cạnh SA vuông góc với đáy, $\widehat{BAD} = 120^0$, M là trung điểm của cạnh BC và $\widehat{SMA} = 45^0$. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC).

LỜI GIẢI



Vì ABCD là hình thoi có: $\widehat{BAD} = 120^0$

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 60^0 \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

Nên $AM \perp BC$ và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = 2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Trong ΔSAM vuông tại A có:

$SA = AM.\tan 45^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4}.$$

Do $AD // BC$ nên $d\left(D,mp(SBC)\right) = d\left(A,mp(SBC)\right)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SM.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(SAM) \Rightarrow BC \perp AH$.

Vì $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SM \end{cases} \Rightarrow AH \perp mp(SBC)$. Vậy $AH = d\left(A,mp(SBC)\right)$.

Trong ΔSAM vuông tại A có:

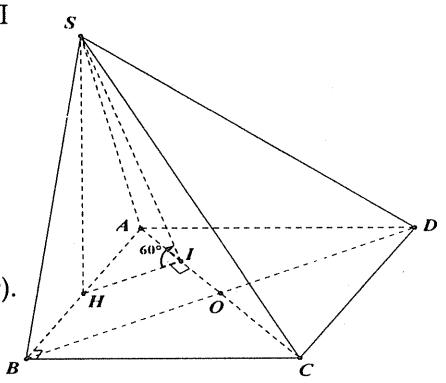
$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AS^2}=\frac{4}{3a^2}+\frac{4}{3a^2}=\frac{8}{3a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Kết luận $d\left(D,mp\left(SBC\right)\right)=\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

<u>DẠNG 2:</u> Khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật cạnh $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$, góc giữa mặt phẳng (SAC) và (ABCD) bằng 60^0. Gọi H là trung điểm của AB, biết mặt bên SAB là tam giác cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy ABCD. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

LỜI GIẢI



Vì AB là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) vuông góc nhau, mà $SH\perp AB$ suy ra $SH\perp\left(ABCD\right)$.

Dựng $HI\perp AC\left(I\in AC\right)$.

Ta có: $AC\perp SH$ và $AC\perp HI$

$\Rightarrow AC\perp SI$ (định lý ba đường vuông góc).

Vậy: góc giữa (SAC) và (ABCD) là góc $\widehat{SIH}=60^0$.

Ta có: $\Delta AIH\sim\Delta ABC\left(g.g\right)\Rightarrow\frac{IH}{BC}=\frac{AH}{AC}$

$$\Rightarrow IH=\frac{AH}{\sqrt{AB^2+BC^2}}.BC=\frac{\frac{a}{2}}{2a}.a\sqrt{3}=\frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Trong ΔSHI có $SH=HI.\tan 60^0=\frac{a\sqrt{3}}{4}.\sqrt{3}=\frac{3a}{4}$.

Thể tích khối chóp S.ABCD: $V=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{3a}{4}.a.a\sqrt{3}=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông có cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáyABCD,

a) Chứng minh rằng chân đường cao khối chóp trùng với trung điểm cạnh AB.

b) Tính thể tích khối chóp SABCD.

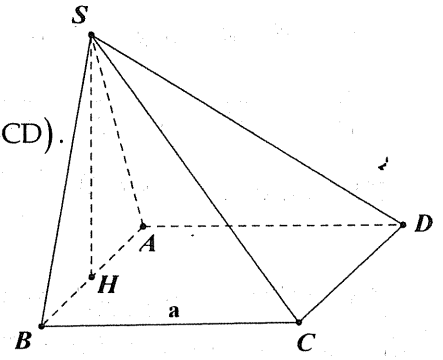
LỜI GIẢI

a). Gọi H là trung điểm của AB.

Vì ΔABC đều $\Rightarrow SH \perp AB$.

Mà : $\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB\end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Vậy H là chân đường cao của khối chóp.



b). Ta có tam giác SAB đều nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra : $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SH = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Cho tứ diện ABCD có ABC là tam giác đều cạnh a, BCD là tam giác vuông cân tại D, (ABC) $\perp$ (BCD) và AD hợp với (BCD) một góc 60°. Tính thể tích tứ diện ABCD.

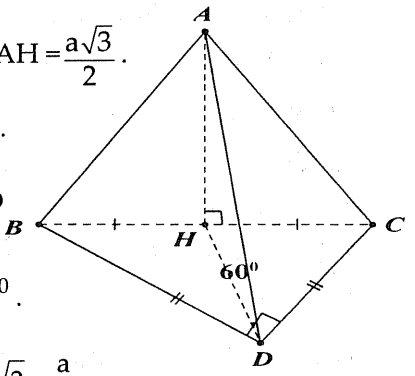
LỜI GIẢI

Gọi H là trung điểm của BC.

Ta có tam giác ABC đều nên: $AH \perp BC$, và $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mà: $\begin{cases}(ABC) \perp (BCD) \\ (ABC) \cap (BCD) = BC\end{cases} \Rightarrow AH \perp (BCD)$.

Ta có: HD là hình chiếu vuông góc của AD trên mp(BCD).



Nên: $\left[\widehat{AD,(BCD)}\right] = \left(\widehat{AD,HD}\right) = \widehat{ADH} = 60^0$.

ΔHAD vuông tại H: $DH = \frac{AH}{\tan 60^0} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \sqrt{3} = \frac{a}{2}$.

Trong ΔBCD vuông cân tại D có:

$BC = 2HD = a$, $DB = DC = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} DB.DC = \frac{a^2}{4}$.

$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{\Delta BCD}.AH = \frac{1}{3}.\frac{a^2}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Cho hình chóp S.ABC có đáy (ABC) là tam giác vuông cân tại B, có BC = a. Mặt bên (SAC) vuông góc với đáy, các mặt bên còn lại đều tạo với mặt đáy một góc 45^0. Chứng minh rằng chân đường cao khối chóp trùng với trung điểm cạnh AC. Tính thể tích khối chóp SABC.

LỜI GIẢI

Kẻ SH $\perp$ BC tại H.

Vì mp(SAC) $\perp$ mp(ABC) nên SH $\perp$ mp(ABC).

Gọi I, J là hình chiếu của H trên AB và BC

$\Rightarrow SI \perp AB, SJ \perp BC.$

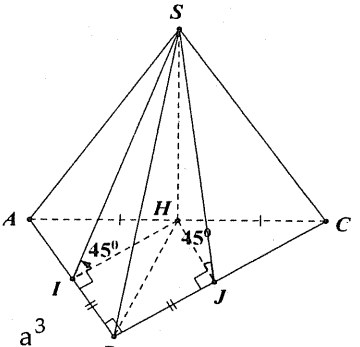
Theo giả thiết $\widehat{SIH} = \widehat{SJH} = 45^0$.

Ta có: . $\Delta SHI = \Delta SHJ \Rightarrow HI = HJ$

Nên BH là đường phân giác của ΔABC.

Từ đó suy ra H là trung điểm của AC.

Suy ra I, J lần lượt là trung điểm của AB và BC.



$$HI = HJ = HS = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3}{12}.$$

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều, tam giác SCD vuông cân tại S. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, SA. Chứng minh rằng (SIJ) vuông góc với (ABCD). Tính thể tích khối chóp K.IBCD.

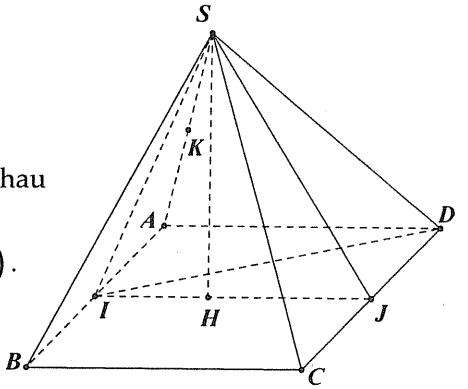
LỜI GIẢI

Ta có: $\begin{cases} AB \perp SI \\ AB \perp IJ \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SIJ).$

Vì $AB \subset (ABCD) \Rightarrow (ABCD) \perp (SIJ).$

Hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến IJ.

Dựng $SH \perp IJ (H \in IJ) \Rightarrow SH \perp (ABCD).$



ABC là tam giác đều nên $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác SCD vuông tại S có $SJ = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2}$.

Ta có: $SI^2 + SJ^2 = IJ^2 \Rightarrow \Delta SIJ$ vuông tại S, nên có: $SH.IJ = SI.SJ \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Vì K trung điểm của SA, có $d(K,(ABCD)) = \frac{1}{2}d(S,(ABCD)) = \frac{1}{2}SH = \frac{a\sqrt{3}}{8}.$

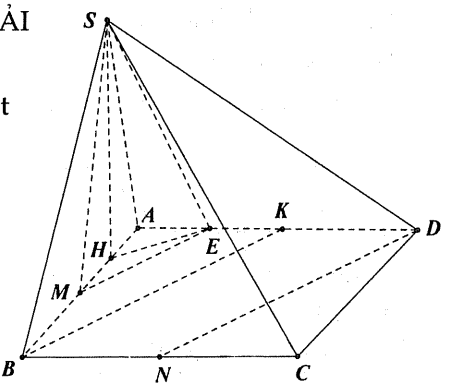
$$S_{BCDI} = S_{ABCD} - S_{\Delta AID} = a^2 - \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.a = \frac{3a^2}{4}$$

Vậy: $V_{K.BCDI} = \frac{1}{3}.d(K,(ABCD)).S_{BCDI} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{8}.\frac{3a^2}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{32}$

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2008

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, SA = a, SB = $a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp S.BMDN.

LỜI GIẢI



Hạ SH ⊥ AB tại H.

Vì mặt phẳng (SAB) vuông góc mặt phẳng (ABCD) có AB là giao tuyến.

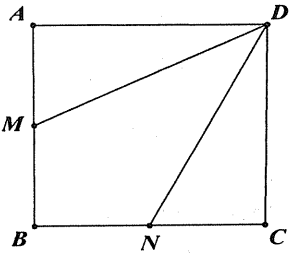
Suy ra $SH \perp mp(ABCD)$.

Xét ΔSAB có: $AB^2 = SA^2 + SB^2 = 4a^2$.

Vậy ΔSAB vuông tại S. Và :

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2}$$

$$\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



$$S_{BMDN} = S_{ABCD} - S_{\Delta AMD} - S_{\Delta CND}$$

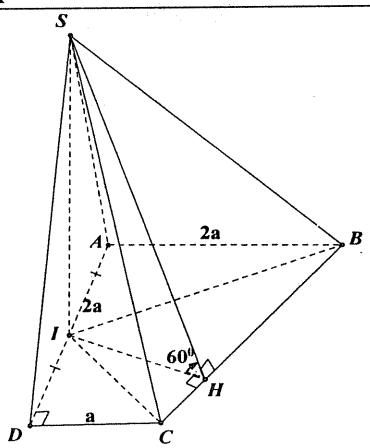
$$= AB^2 - \frac{1}{2}AD.AM - \frac{1}{2}CD.CN = 4a^2 - 2a^2 = 2a^2.$$

$$V_{S.BMDN} = \frac{1}{3}.SH.S_{BMDN} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}.2a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2009

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D; AB = AD = 2a; CD = a; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD), tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

LỜI GIẢI



Hai mặt phẳng (SBI) và mặt phẳng (SCI) có giao tuyến là SI cùng vuông góc với mặt phẳng đáy suy ra $SI \perp (ABCD)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên BC.

Có: $\begin{cases} BC \perp IH \\ BC \perp SI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SIH) \Rightarrow BC \perp SI$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC);

Và (ABCD) là góc $\widehat{SHI} = 60^0$.

Ta có: $BC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD).AD = \frac{1}{2}(2a + a).2a = 3a^2$.

Ngoài ra: $S_{ABCD} = S_{\Delta ABI} + S_{\Delta BIC} + S_{\Delta CDI}$

$\Rightarrow S_{\Delta BIC} = 3a^2 - \frac{1}{2}AB.AI - \frac{1}{2}CD.DI = 3a^2 - a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}$.

$S_{\Delta BCI} = \frac{1}{2}IH.BC \Rightarrow IH = \frac{2S_{\Delta BCI}}{BC} = \frac{3a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{3a}{\sqrt{5}}$.

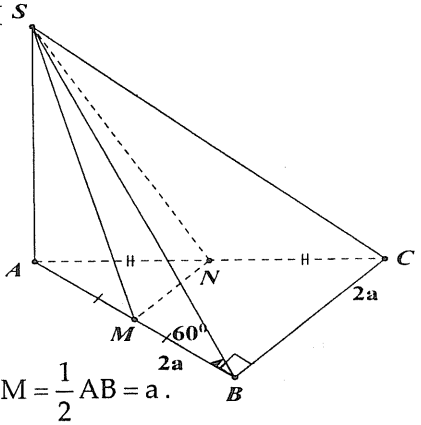
Trong ΔSIH vuông tại H có: $SI = IH.\tan 60^0 = \frac{3a}{\sqrt{5}}.\sqrt{3} = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$.

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SI.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{3a\sqrt{15}}{5}.3a^2 = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2011

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng qua SM và song song với BC cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.BCNM.

LỜI GIẢI



Ta có: $mp(SAB) \cap mp(SAC) = SA$.

Và hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Suy ra $SA \perp mp(ABC)$.

Mặt phẳng qua SM và song song với BC cắt AC tại N, suy ra MN // BC và N trung điểm của AC.

Trong tam giác ABC có $MN = \frac{1}{2}BC = a, BM = \frac{1}{2}AB = a$.

Ta có BCNM là hình thang vuông tại B và M:

$S_{BCNM} = \frac{1}{2}(MN + BC).BM = \frac{1}{2}(a + 2a).a = \frac{3a^2}{2}$.

Ngoài ra: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Vì : $\begin{cases}(SBC)\cap(ABC)=BC\\ SB\perp BC, AB\perp BC\\ SB\subset(SBC), AB\subset(SAB)\end{cases}\Rightarrow\left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right)=\widehat{SBA}=60^0$.

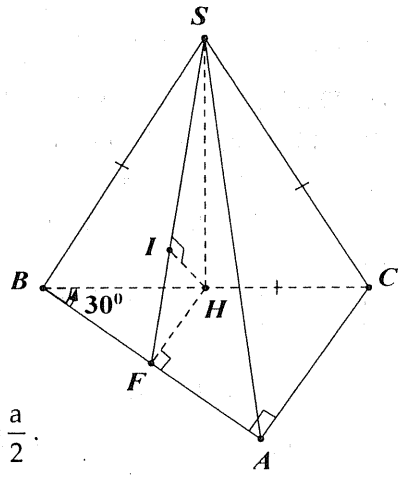
Xét ΔSAB vuông tại A : $SA=AB.\tan 60^0=2a\sqrt{3}$.

Kết luận: $V_{S.BCNM}=\frac{1}{3}SA.S_{BCNM}=\frac{1}{3}.2a\sqrt{3}.\frac{3a^2}{2}=a^3\sqrt{3}$.

ĐỀ TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2013

Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC}=30^0$, SBC là tam giác đều cạnh a và mặt bên SBC vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB).

LỜI GIẢI



Dựng $SH\perp BC$ với $H\in BC$.

Mà mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) theo giao tuyến BC, suy ra $SH\perp mp(ABC)$.

Vì Δ SBC đều nên H trung điểm của BC

Và $SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong tam giác ABC vuông tại A có:

$AB=BC.\cos 30^0=\frac{a\sqrt{3}}{2}, AC=BC.\sin 30^0=\frac{a}{2}$.

Thể tích khối chóp S.ABC:

$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.SH.\frac{1}{2}.AB.AC=\frac{1}{6}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{2}=\frac{a^3}{16}$.

Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB).

<u>Cách 1:</u> Dựa vào thể tích.

Gọi F trung điểm của AB. Có HA, HB lần lượt là hình chiếu vuông góc của SA và SB trên mặt phẳng (ABC). Mà HA = HB tính chất tam giác vuông, nên SA = SB suy ra $SF\perp AB$.

Tính diện tích tam giác SAB :

Trong Δ SAF vuông tại F có $SF=\sqrt{SA^2-AF^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{a\sqrt{13}}{4}$.

$S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}SF.AB=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{13}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{39}}{16}$.

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.d\left(C, mp(SAB)\right).S_{\Delta SAB}$$

$$\Rightarrow d\left(C, mp(SAB)\right) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SAB}} = \frac{\frac{3a^3}{16}}{\frac{a^2\sqrt{39}}{16}} = \frac{a\sqrt{39}}{13}.$$

Cách 2: Tính theo phương pháp của lớp 11.

Dựng $HI \perp SF$ với $I \in SF$.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp HF \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHF) \Rightarrow (SAB) \perp (SHF)$ (Vì $AB \subset (SAB)$).

Hai mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SHF) theo giao tuyến SF và $HI \perp SF$, suy ra $SI \perp mp(SAB)$

Vậy $d\left(H, mp(SAB)\right) = HI$.

Có: $HF = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{4}$ (HF đường trung bình tam giác ABC).

Trong ΔSHF vuông tại H:

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HF^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{16}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{52}{3a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{39}}{26}.$$

Vì hai điểm H và C cùng nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SAB) tại B nên: $\frac{d\left(C, mp(SAB)\right)}{d\left(H, mp(SAB)\right)} = \frac{CB}{HB} = 2$

$$\Rightarrow d\left(C, mp(SAB)\right) = 2d\left(H, mp(SAB)\right) = 2.\frac{a\sqrt{39}}{26} = \frac{a\sqrt{39}}{13}$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2013

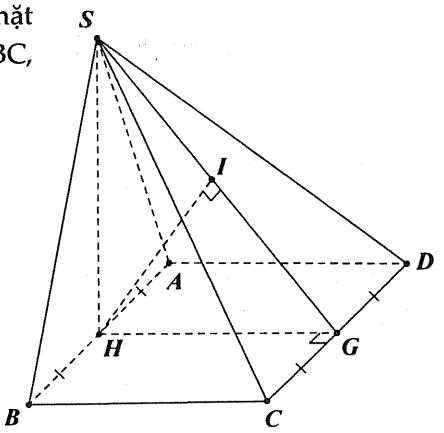
Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

LỜI GIẢI

Gọi H trung điểm của AB.

Vì tam giác SAC đều nên $SH \perp AB$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mà mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD) theo giao tuyến BC, suy ra $SH \perp mp(ABCD)$.



Thể tích khối chóp S.ABCD:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}SH.AB^2$$

$$= \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$

Do AB // CD và $H \in AB$, nên:

$d(A, mp(SCD)) = d(H, mp(SCD))$.

Gọi G trung điểm của CD và I là hình chiếu vuông góc của H trên SG.

Có: $\begin{cases} CD \perp SH \\ CD \perp HG \end{cases} \Rightarrow CD \perp mp(SHG) \Rightarrow CD \perp HI$.

Vì $\begin{cases} HI \perp CD \\ HI \perp SG \end{cases} \Rightarrow HI \perp mp(SCD) \Rightarrow d(H, mp(SCD)) = HI$.

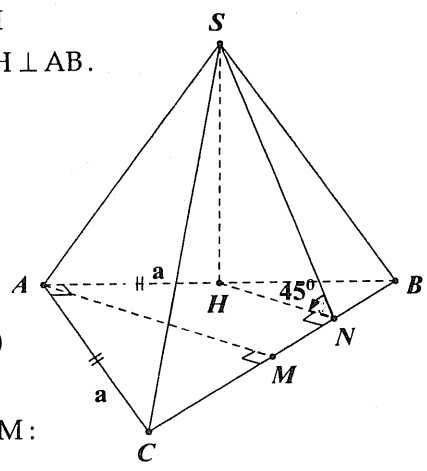
Trong ΔSHG vuông tại H có:

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HG^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Kết luận $d(A, mp(SCD)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Cho hình chóp SABC có đáy ABC vuông cân tại A với AB = AC = a, biết tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC), mặt phẳng (SBC) hợp với (ABC) một góc 45°. Tính thể tích của SABC.

LỜI GIẢI



Gọi H trung điểm BC. Vì SAB cân nên $SH \perp AB$.

Mà $(SAB) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp mp(ABC)$.

Gọi M trung điểm của BC, thì:

$AM \perp BC$ vì ΔABC cân tại A.

Từ H dựng $HN \perp BC$ với $N \in BC$, thì

$BC \perp mp(SHN) \Rightarrow BC \perp SN$.

Vậy góc giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SNH} = 45^0$.

Ta có: HN là đường trung bình của ΔBAM:

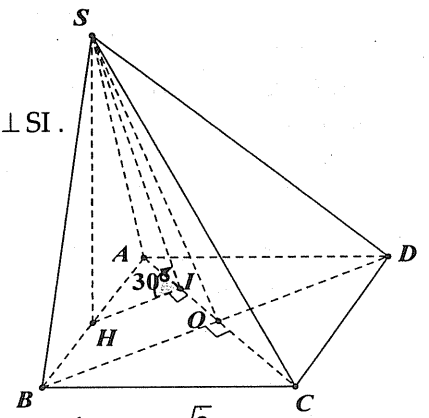
$HN = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{4}BC = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Xét ΔSHN vuông tại H: $SH = HN.\tan 45^0 = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.SH.\frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{6}.\frac{a\sqrt{2}}{4}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$

Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình vuông, tam giác SAB đều cạnh a nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABCD) biết (SAC) hợp với (ABCD) một góc 30^o .Tính thể tích hình chóp SABCD.

LỜI GIẢI



Dựng $HI \perp AC$ tại I.

Ta có $\begin{cases} AC \perp HI \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp mp(SHI) \Rightarrow AC \perp SI$.

Ta có: $\begin{cases} (SAC) \cap (ABCD) = AC \\ HI \perp AC, SI \perp AC \\ HI \subset (ABCD), SI \subset (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SAC),(ABCD)}\right) = \widehat{SIH} = 30^0$.

Vì HI và BO cùng vuông góc với AC, nên $HI = \frac{1}{2}BO = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Xét ΔSHI vuông tại H: $SH = HI.\tan 30^0 = \frac{a\sqrt{2}}{4}.\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$.

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{12}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$

Cho hình chóp SABCD có ABCD là hình chữ nhật có AB = 2a, BC = 4a, (SAB) $\perp$ (ABCD), hai mặt bên (SBC) và (SAD) cùng hợp với đáy ABCD một góc 30^o. Tính thể tích hình chóp SABCD.

LỜI GIẢI

Dựng $SH \perp AB$ tại H .Vì (SAB) $\perp$ (ABCD). Suy ra $SH \perp (ABCD)$

Có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) là góc $\widehat{SBA} = 30^0$, vì có AB và SB lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến.

Lý luận tương tự góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (ABCD) là góc $\widehat{SAB} = 30^0$.

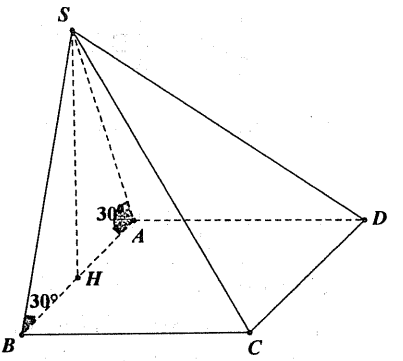
Theo trên ta có SAB là tam giác cân tại S nên H trung điểm của AB.

Xét ΔSHB vuông tại H:

$SH = BH.\tan 30^0 = a.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích đáy $S_{ABCD} = AB.AD = 2a.4a = 8a^2$.

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.8a^2 = \dfrac{8a^2\sqrt{3}}{9}$



Cho hình chóp S.ABC có SA = 3a, đường thẳng SA hợp với mặt phẳng (ABC) góc 60^0. Tam giác ABC vuông tại B, $\widehat{ACB} = 30^0$, G là trọng tâm cùa tam giác ABC. Hai mặt phẳng (SGB) và (SGC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính thể tích khối chóp S.ABC theo a.

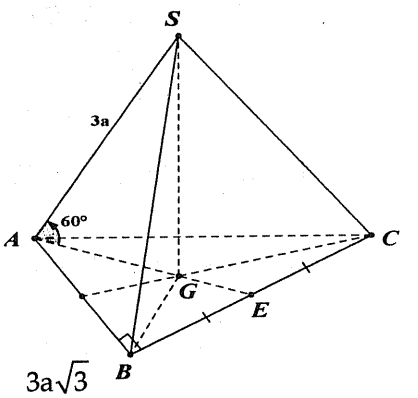
LỜI GIẢI

Hai mặt phẳng (SGB) và (SGC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Suy ra giao tuyến SG vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Ta có AG là hình chiếu vuông góc của SA trên mp(ABC).

Suy ra: $\left(\widehat{SA,(ABC)}\right) = \widehat{SAG} = 60^0$.



Vậy $AG = SA.\cos 60^0 = \dfrac{3a}{2}$, $SG = SA.\sin 60^0 = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Xét trong ΔABC có $AE = \dfrac{3}{2}AG = \dfrac{3}{2}.\dfrac{3a}{2} = \dfrac{9a}{4}$.

Đặt $AB = x > 0$, $BC = AB : \tan 30^0 = x\sqrt{3}$.

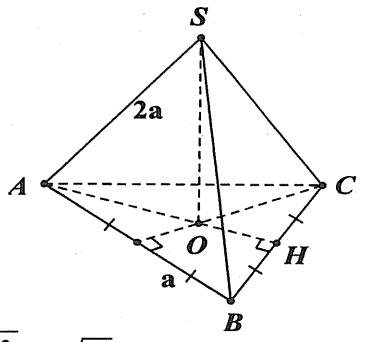
$$AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} \Leftrightarrow AE = \sqrt{x^2 + \frac{3x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{7}}{2} \Leftrightarrow \frac{9a}{4} = \frac{x\sqrt{7}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{9a\sqrt{7}}{14}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SG.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{3a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}AB.BC = \frac{a\sqrt{3}}{4}.x^2\sqrt{3} = \frac{3a}{4}.\left(\frac{9a\sqrt{7}}{14}\right)^2 = \frac{243a^3}{112}$$

DẠNG 3: Khối chóp đều.

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng 2a. Chứng minh rằng chân đường cao kẻ từ S của hình chóp là tâm của tam giác đều ABC. Tính thể tích chóp đều SABC .

LỜI GIẢI



Dựng SO ⊥ (ABC). Ta có SA = SB = SC.

Suy ra OA = OB = OC (đường xiên bằng nhau thì hình chiếu vuông góc của chúng bằng nhau).

Vậy O là tâm của tam giác đều ABC.

Vì Δ ABC đều có $AO = \frac{2}{3}AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong ΔSAO có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{33}}{3}$.

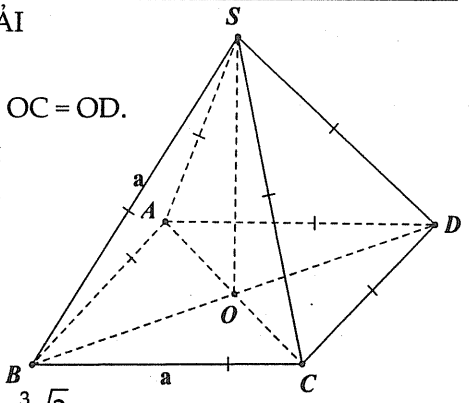
Vậy: $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SO = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}$.

Cho khối chóp tứ giác SABCD có tất cả các cạnh có độ dài bằng a .

a). Chứng minh rằng S.ABCD là chóp tứ giác đều.

b). Tính thể tích khối chóp SABCD

LỜI GIẢI



Dựng SO ⊥ mp(ABCD)

Ta có SA = SB = SC = SD nên OA = OB = OC = OD.

Có ABCD là hình thoi và có đường tròn ngoại tiếp tâm O nên ABCD là hình vuông.

Ta có: $SA^2 + SC^2 = AC^2$.

Nên ΔSAC vuông tại S nên $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

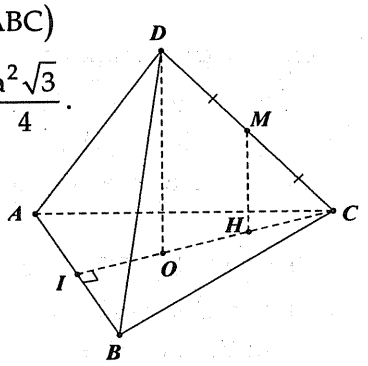
Cho khối tứ diện đều ABCD cạnh bằng a, M là trung điểm DC.

a). Tính thể tích khối tứ diện đều ABCD.

b) Tính khoảng cách từ M đến mp(ABC). Suy ra thể tích hình chóp MABC.

LỜI GIẢI

a). Gọi O là tâm của tam giác ABC suy ra $DO \perp (ABC)$



Trong ΔABC có $OC = \frac{2}{3}CI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ Và $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Trong ΔDOC vuông tại O có :

$DO = \sqrt{DC^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

$V_{D.ABC} = \frac{1}{3}.DO.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

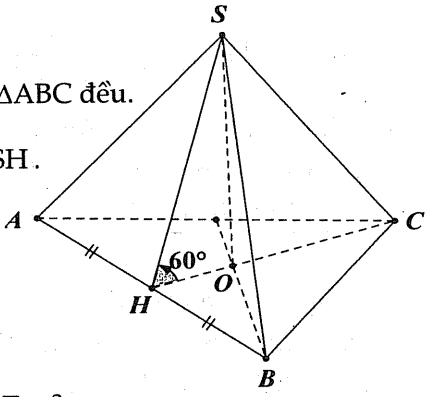
b). Kẻ MH // DO, khoảng cách từ M đến mp(ABC) là MH

$MH = \frac{1}{2}DO \Rightarrow V_{M.ABC} = \frac{1}{2}V_{D.ABC} = \frac{1}{2}.\frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, mặt bên hợp với đáy góc 60^o. Tính thể tích khối chóp S.ABC.

LỜI GIẢI

Gọi O là tâm của đáy thì $SO \perp (ABC)$.



Gọi H trung điểm của BC thì $CH \perp AB$ vì ΔABC đều.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp HC \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHC) \Rightarrow AB \perp SH$.

Vậy $\left(\widehat{(SAB),(ABC)}\right) = \widehat{SHO} = 60^0$.

Ta có: $HO = \frac{1}{3}HC = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Trong ΔSHO có $SO = HO.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3} = \frac{a}{2}$.

Thể tích khối chóp: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SO.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Cho chóp tam giác đều có đường cao là h hợp với một mặt bên một góc 30^o. Tính thể tích hình chóp.

LỜI GIẢI

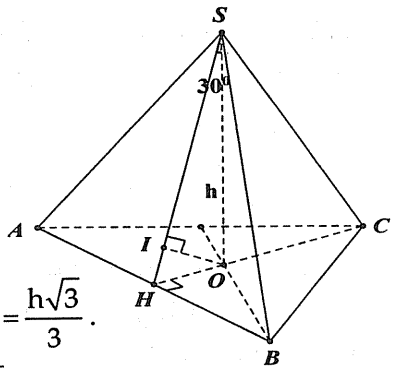
Gọi O là tâm của đáy thì $SO \perp (ABC)$.

Gọi H trung điểm của BC thì $CH \perp AB$ vì ΔABC đều.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp HC \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHC) \Rightarrow AB \perp SH$.

Dựng $OI \perp SH$ tại H.

Ta có $\begin{cases} OI \perp SH \\ OI \perp AB \end{cases} \Rightarrow OI \perp (SAB)$.



Suy ra SI là hình chiếu vuông góc của SO trên mặt phẳng (SAB).

Nên góc giữa SO và mặt phẳng (SAB) là góc $\widehat{OSI} = 30^0$.

Trong ΔSOH vuông tại O: $OH = SO.\tan 30^0 = \dfrac{h\sqrt{3}}{3}$.

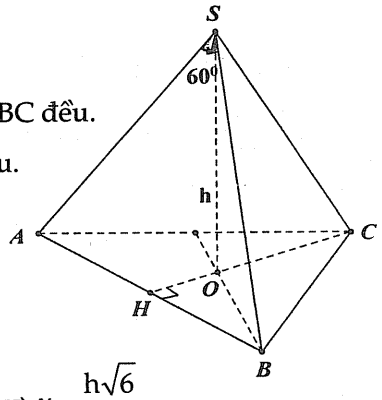
Mà $HC = 3HO = h\sqrt{3}$. Ngoài ra $HC = \dfrac{AB.\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \dfrac{2.HC}{\sqrt{3}} = 2h$.

Thể tích khối chóp:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SO.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.SO.\frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3}h.\frac{4h^2\sqrt{3}}{4} = \frac{h^3\sqrt{3}}{3}.$$

Cho hình chóp tam giác đều có đường cao h và mặt bên có góc ở đỉnh bằng 60^o. Tính thể tích hình chóp.

LỜI GIẢI



Gọi O là tâm của đáy thì $SO \perp (ABC)$.

Gọi H trung điểm của BC thì $CH \perp AB$ vì ΔABC đều.

Giả sử góc $\widehat{ASB} = 60^0 \Rightarrow \Delta SAB$ là tam giác đều.

Đặt độ dài đoạn $AB = x > 0$.

Suy ra: $OB = OC = \dfrac{2}{3}HC = \dfrac{2}{3}\dfrac{AB.\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$.

Pitago cho ΔSOB vuông tại O:

$$SB^2 = SO^2 + OB^2 \Leftrightarrow x^2 = h^2 + \frac{x^2}{3} \Leftrightarrow x^2 = \frac{3h^2}{2} \Rightarrow x = \frac{h\sqrt{6}}{2}.$$

Thể tích khối chóp:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SO.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.SO.\frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3}h.\frac{\left(\frac{h\sqrt{6}}{2}\right)^2.\sqrt{3}}{4} = \frac{h^3\sqrt{3}}{8}.$$

DỰ BỊ ĐẠI HỌC KHỐI D 2006

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a. Gọi SH là đường cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm I của SH đến mặt phẳng bên (SBC) bằng b. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

LỜI GIẢI

Vì S.ABCD hình chóp tứ giác đều và $SH \perp (ABCD)$.

Nên H là tâm của đáy ABCD.

Gọi E trung điểm của CD.

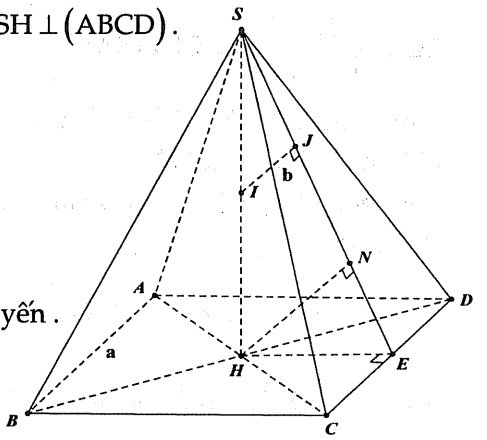
Ta có: $\begin{cases} CD \perp SH \\ CD \perp HE \end{cases} \Rightarrow CD \perp mp(SHE)$

$\Rightarrow mp(SCD) \perp mp(SHE)$.

Và hai mặt phẳng này có SE là giao tuyến.

Dựng $HN \perp SE$.

$\Rightarrow HN \perp mp(SCD)$ với $N \in SE$



Từ I dựng $IJ \,//\, HN \Rightarrow d(I, mp(SCD)) = IJ = b$ với $J \in SE$.

Ta có: IJ đường trung bình của ΔSHN, nên $HN = 2IJ = 2b$.

Trong ΔSHE vuông tại H:

$$\frac{1}{HN^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HE^2} \Rightarrow \frac{1}{HS^2} = \frac{1}{4b^2} - \frac{4}{a^2} = \frac{a^2 - 16b^2}{4a^2b^2} \Rightarrow SH = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}.$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}.a^2.\frac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}} = \frac{2a^3b}{3\sqrt{a^2 - 16b^2}}.$$

TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI B 2004

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy là $\varphi\left(0 < \varphi < 90^0\right)$. Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) theo φ và tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a và φ.

LỜI GIẢI

Gọi O là tâm của đáy thì $SO \perp (ABCD)$.

Gọi I trung điểm của CD, thì $OI \perp CD$.

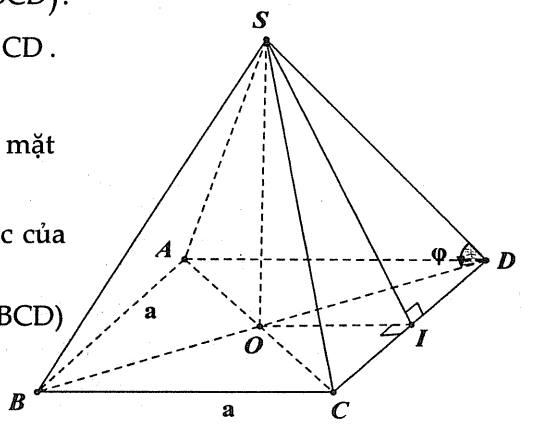
Ta có $CD \perp mp(SOI) \Rightarrow CD \perp SO$.

Vậy góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng (ABCD) là góc $\widehat{SIO}$.

Ta có OD là hình chiếu vuông góc của SD trên mặt phẳng (ABCD).

Vậy góc giữa SD và mặt phẳng (ABCD) là góc $\widehat{SDO} = \varphi$.

Trong ΔSDO vuông tại O:



$\tan\varphi = \dfrac{SO}{OD} \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\tan\varphi$.

Trong ΔSOI vuông tại O: $\tan\widehat{SIO} = \dfrac{SO}{OI} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\tan\varphi}{\dfrac{a}{2}} = \sqrt{2}.\tan\varphi$.

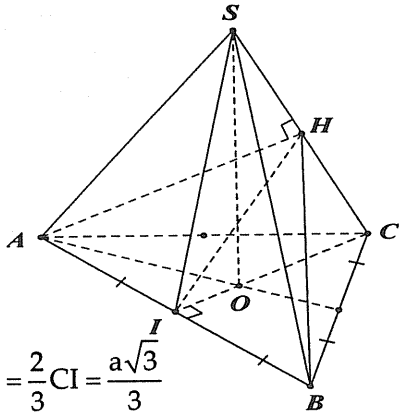
Thể tích của khối tứ diện:

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\tan\varphi.a^2 = \dfrac{a^3.\sqrt{2}.\tan\varphi}{6}$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2012

Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* với *SA* = 2a, *AB* = a. Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của *A* trên cạnh *SC*. Chứng minh *SC* vuông góc với mặt phẳng (*ABH*). Tính thể tích của khối chóp *S.ABH* theo a.

LỜI GIẢI



Gọi I trung điểm của AB.

O là tâm của đáy thì $SO \perp (ABC)$.

Có: $\begin{cases} AB \perp CI \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp mp(SCI) \Rightarrow AB \perp SC$.

Vì: $\begin{cases} SC \perp AB \\ SC \perp AH \end{cases} \Rightarrow SC \perp mp(ABH)$.

Trong tam giác đều ABC có: $CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CO = \dfrac{2}{3}CI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Trong ΔSOC vuông tại O có: $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{4a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{33}}{3}$

Trong ΔSCI có: $IH.SC = SO.IC \Rightarrow IH = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{33}}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{2a} = \dfrac{a\sqrt{11}}{4}$.

Suy ra $S_{\Delta ABH} = \dfrac{1}{2}HI.AB = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{11}}{4}.a = \dfrac{a^2\sqrt{11}}{8}$

Trong ΔCHI vuông tại H có $CH = \sqrt{CI^2 - IH^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{11a^2}{16}} = \dfrac{a}{4}$.

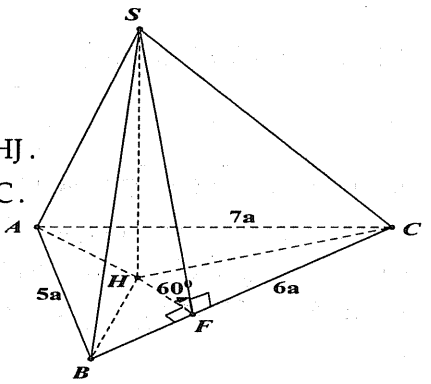
Ta có: $SH = SC - HC = 2a - \dfrac{a}{4} = \dfrac{7a}{4}$.

Kết luận: $V_{S.ABH} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABH} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{7a}{4}.\dfrac{a^2\sqrt{11}}{8} = \dfrac{7a^3\sqrt{11}}{96}$.

Cho hình chóp tam giác S.ABC có AB = 5a, BC = 6a, CA = 7a. Các mặt bên SAB, SBC, SCA tạo với đáy một góc 60^o .Tính thể tích khối chóp.

LỜI GIẢI

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC), $SH \perp (ABC)$.



Dựng $HE \perp AB$, $HF \perp BC$, $HJ \perp AC$.

Suy ra $SE \perp AB$, $SF \perp BC$, $SJ \perp AC$.

Theo đề $\widehat{SEH} = \widehat{SFH} = \widehat{SJH} = 60^0$.

Vậy: $\Delta SHF = \Delta SHE = \Delta SHJ \Rightarrow HE = HF = HJ$.

Suy ra H là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Mặt khác ta lại có:

$$p = \frac{AB + BC + CA}{2} = \frac{5a + 6a + 7a}{2} = 9a$$

Và: $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$= \sqrt{9a(9a-5a)(9a-6a)(9a-7a)} = 6a^2\sqrt{6}.$$

Ta lại có: $S_{\Delta ABC} = pr$ (Với r =HF, là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC).

Suy ra: $pr = 6a^2\sqrt{6} \Rightarrow r = HF = \frac{6a^2\sqrt{6}}{9a} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Từ đó suy ra chiều cao SH, tam giác vuông SHF:

$$SH = HF\tan 60^0 = \frac{2a\sqrt{6}}{3}\sqrt{3} = 2a\sqrt{2}.$$

Vậy: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}SH = \frac{1}{3}6a^2\sqrt{6}2a\sqrt{2} = 4a^3.2\sqrt{3} = 8a^3\sqrt{3}$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2007

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích của khối tứ diện CMNP.

LỜI GIẢI

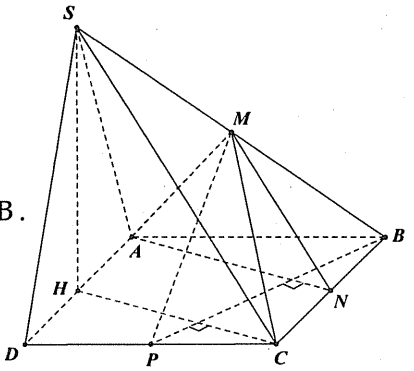
Hạ $SH \perp AD$ tại H. Vì SAD là tam giác đều nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì mặt phẳng (SAD) vuông góc mặt phẳng (ABCD) có AD là giao tuyến. Suy ra $SH \perp mp(ABCD)$.

Ta có AN // HC và MN // SC.

Mà $AM, MN \subset (AMN)$; Và $HC, SC \subset (SHC)$.

Suy ra: Mặt phẳng (AMN) song song với mặt phẳng (SHC).



Trong hình vuông ABCD có:

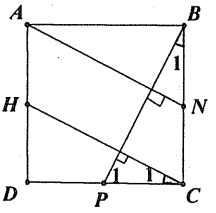
$\Delta BCP = \Delta CDH (c.g.c)$ nên $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$.

Mà $\widehat{B_1} + \widehat{P_1} = 90^0 \Rightarrow \widehat{C_1} + \widehat{P_1} = 90^0 \Rightarrow CH \perp PB$.

Ta có: $\begin{cases} BP \perp CH \\ BP \perp SH \end{cases} \Rightarrow BP \perp (SHC)$

$\Rightarrow BP \perp (AMN) \Rightarrow BP \perp AM$.

Có M trung điểm của SB nên:



$$d(M,(ABCD)) = \frac{1}{2} d(S,(ABCD)) = \frac{1}{2} SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Diện tích tam giác PCN:

$$S_{\Delta PCN} = \frac{1}{2} CP.CN = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$$

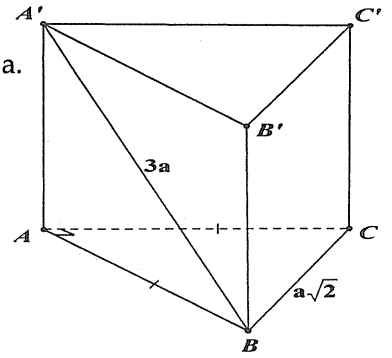
$$V_{M.PCN} = \frac{1}{3} d(M,(ABCD)).S_{\Delta PCN} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{a^2}{8} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}.$$

LOẠI II: THỂ TÍCH LĂNG TRỤ

DẠNG 1: Khối lăng trụ đứng có chiều cao hay cạnh đáy.

Đáy của lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C', đáy là tam giác ABC vuông cân tại A có cạnh $BC = a\sqrt{2}$ và biết A'B = 3a. Tính thể tích khối lăng trụ.

LỜI GIẢI



Ta có ΔABC vuông cân tại A nên AB = AC = a.

ABC.A'B'C' là lăng trụ đứng $\Rightarrow AA' \perp AB$

$\Delta AA'B$ có: $AA'^2 = A'B^2 - AB^2 = 8a^2$

$\Rightarrow AA' = 2a\sqrt{2}$.

Vậy $V = B.h = S_{ABC}.AA' = a^3\sqrt{2}$

Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD.A'B'C'D' có cạnh bên bằng 4a và đường chéo 5a. Tính thể tích khối lăng trụ này.

LỜI GIẢI

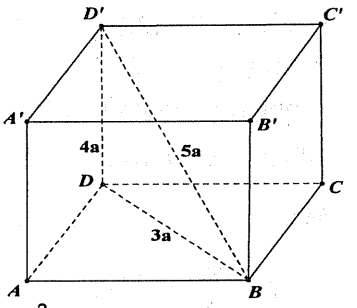
ABCD.A'B'C'D' là lăng trụ đứng nên:

Trong $\Delta BDD'$ vuông tại D có:

$BD = \sqrt{BD'^2 - DD'^2} = 3a$.

ABCD là hình vuông nên có:

$AB = \frac{BD}{\sqrt{2}} = \frac{3a}{\sqrt{2}} \Rightarrow S_{ABCD} = AB^2 = \frac{9a^2}{2}$.



Vậy: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.S_{ABCD} = 4a.\frac{9a^2}{2} = 18a^3$.

Cho lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' là tam giác đều cạnh a = 4 và biết diện tích tam giác A'BC bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.

LỜI GIẢI

Gọi I là trung điểm BC.

Ta có: ΔABC đều nên $AI \perp BC$ và $AI = \frac{AB.\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp AA \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'I$

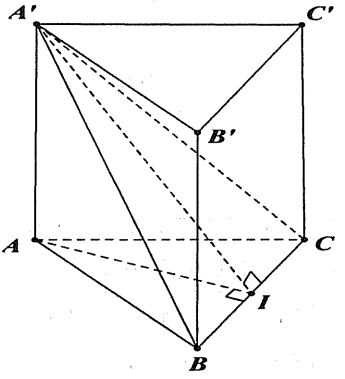
(định lý ba đường vuông góc).

$S_{\Delta A'BC} = \frac{1}{2}.A'I.BC \Rightarrow A'I = \frac{2.S_{\Delta A'BC}}{BC} = \frac{2.8}{4} = 4$.

Trong $\Delta AIA'$ vuông tại A:

$AA' = \sqrt{IA'^2 - AI^2} = \sqrt{16 - 12} = 2$.

Vậy: $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = 2.\frac{16\sqrt{3}}{4} = 8\sqrt{3}$.



Cho hình hộp đứng có đáy là hình thoi cạnh a và có góc nhọn bằng 60^0. Đường chéo lớn của đáy bằng đường chéo nhỏ của lăng trụ. Tính thể tích hình hộp.

LỜI GIẢI

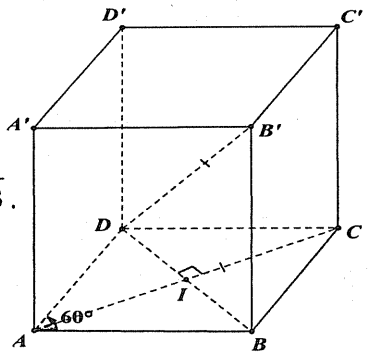
Giả sử $\widehat{BAD} = 60^0$ thì AC là đường chéo lớn của đáy, DB' là đường chéo nhỏ của hình hộp.

Ta có tam giác ABD đều nên: $BD = a, AC = a\sqrt{3}$.

Theo đề: $AC = DB' = a\sqrt{3}$.

Xét $\Delta BDB'$ vuông tại B:

$BB' = \sqrt{DB'^2 - BD^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.



Vì ABCD là hình thoi có: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = \frac{1}{2}.a\sqrt{3}.a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

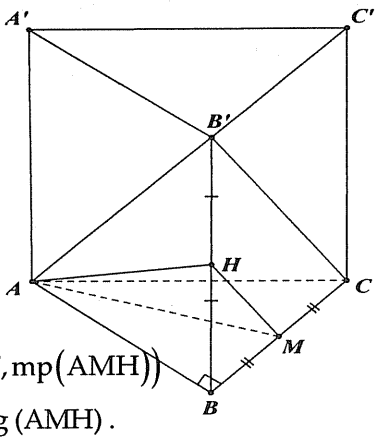
Kết luận: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.S_{ABCD}$

$$= a\sqrt{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}.$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2008

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông, AB = BC = a, cạnh bên AA' = $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B'C.

LỜI GIẢI



Thể tích của khối lăng trụ:

$$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = AA'.\frac{1}{2}BA.BC$$

$$= \frac{1}{2}.a\sqrt{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}.$$

Gọi H trung điểm của BB' thì HM // B'C

$\Rightarrow B'C \,//\, mp(AMH)$.

Nên $d(AM, CB') = d(CB', mp(AMH)) = d(B', mp(AMH))$

Gọi h là khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (AMH) .

Tứ diện B.AMH có BA , BM , BH đôi một vuông góc nên có

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{7}}{7}.$$

Đường thẳng đi qua B và B' có giao điểm với mặt phẳng (AMH) là điểm H nên có: $\frac{d(B', mp(AMH))}{d(B, mp(AMH))} = \frac{B'H}{BH} = 1$

$$\Rightarrow d(B', mp(AMH)) = d(B, mp(AMH)) = \frac{a\sqrt{7}}{7}.$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2012

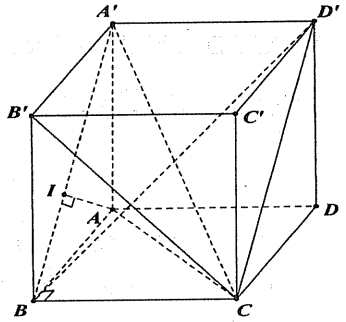
Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình vuông, tam giác A'AC vuông cân, A'C = a. Tính thể tích khối tứ diện ABB'C' và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD') theo a.

LỜI GIẢI

Vì tam giác A'AC vuông cân có: $AC = AA' = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vì ABCD là hình vuông có:

$AB = AD = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{2}$.



Vậy: $V_{A.BB'C'} = \dfrac{1}{3}.AB.\dfrac{1}{2}.B'B.B'C$

$= \dfrac{1}{6}\dfrac{a}{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{48}$.

Mặt phẳng (BCD'A') cũng là mặt phẳng (BCD').

Gọi I là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BA'.

Ta có: $BC \perp (ABB'A') \Rightarrow BC \perp AI$.

Vì: $\begin{cases} AI \perp BC \\ AI \perp A'B \end{cases} \Rightarrow AI \perp mp(BCD'A') \Rightarrow d(A, mp(BCD'A')) = AI$.

Trong $\Delta ABA'$ vuông tại A có:

$AI.BA' = AB.AA' \Leftrightarrow AI.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a}{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow AI = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

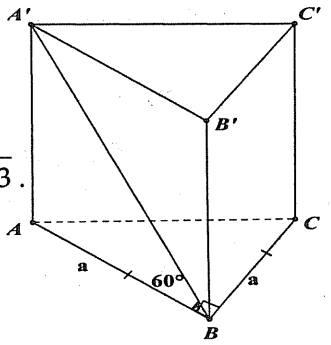
Với $BA' = \sqrt{AB^2 + AA'^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Kết luận: $d(A, mp(BCD'A')) = AI = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

DẠNG 2: Lăng trụ đứng có góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

Cho lăng trụ đứng tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với BA = BC = a, biết A'B hợp với đáy ABC một góc 60^0.Tính thể tích lăng trụ.

LỜI GIẢI



Ta có AB là hình chiếu vuông góc của A'B trên mặt phẳng (ABC). Nên góc giữa A'B' và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{ABA'} = 60^0$.

Trong $\Delta ABA'$ vuông tại A: $AA' = AB.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$.

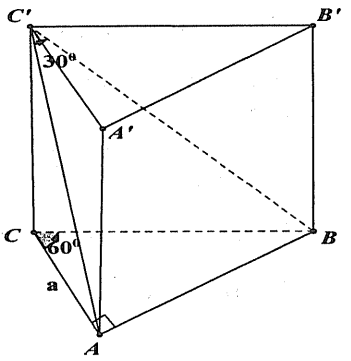
Thể tích hình lăng trụ:

$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = AA'.\dfrac{1}{2}BA.BC$

$= a\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}.a.a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Cho lăng trụ đứng tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^0$, biết BC' hợp với (AA'C'C) một góc 30^0. Tính AC' và thể tích lăng trụ.

LỜI GIẢI



Trong Δ ABC vuông tại A:

$AB = AC.\tan 60^0 = a\sqrt{3}, BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a$.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AB \perp mp(ACC'A')$.

Nên AC' là hình chiếu vuông góc của BC' trên mặt phẳng (ACC'A'). Vậy góc giữa BC' và mặt phẳng (ACC'A') là góc $\widehat{BC'A} = 30^0$.

Trong Δ ABC' vuông tại A: $AC' = AB : \tan 30^0 = a\sqrt{3} : \frac{\sqrt{3}}{3} = 3a$.

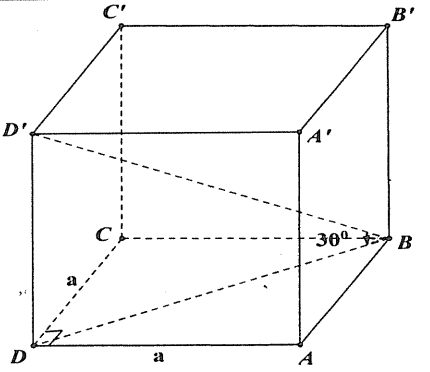
Trong Δ ACC' vuông tại C: $CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = \sqrt{9a^2 - a^2} = 2a\sqrt{2}$.

Thể tích khối chóp:

$V_{ABC.A'B'C'} = CC'.S_{\Delta ABC} = CC'.\frac{1}{2}AB.AC = 2a\sqrt{2}.\frac{1}{2}.a.a\sqrt{3} = a^3\sqrt{6}$.

Cho lăng trụ đứng ABCD A'B'C'D' có đáy ABCD là hình vuông cạnh a và đường chéo BD' của lăng trụ hợp với đáy ABCD một góc 30^0. Tính thể tích và tổng diên tích của các mặt bên của lăng trụ.

LỜI GIẢI



Ta có ABCD A'B'C'D' là lăng trụ đứng nên ta có $DD' \perp (ABCD)$, và BD là hình chiếu vuông góc của BD' trên mặt phẳng ABCD.

Vậy góc [BD'; (ABCD)] = $\widehat{DBD'} = 30^0$.

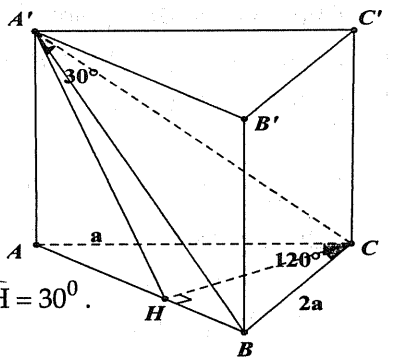
Trong ΔDBD' vuông tại D:

$DD' = BD.\tan 30^0 = a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = DD'.S_{ABCD} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có $AC = a, BC = 2a, \widehat{ACB} = 120^0$ và đường thẳng A'C tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ góc 30^0. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A'B, CC' và thể tích khối lăng trụ đã cho theo a.

LỜI GIẢI



Trong (ABC), kẻ $CH \perp AB$ $(H \in AB)$.

Ta có: $\begin{cases} CH \perp AB \\ CH \perp AA' \end{cases} \Rightarrow CH \perp (ABB'A')$,

nên A'H là hình chiếu vuông góc của A'C trên (ABB'A').

Do đó: $\left[\widehat{CA',(ABB'A')}\right] = \widehat{(CA',HA')} = \widehat{CA'H} = 30^0$.

Do $CC' \,//\, AA' \Rightarrow CC' \,//\, mp(ABB',A')$.

Suy ra: $d(A'B,CC') = d(CC',(ABB'A')) = d(C,(ABB'A')) = CH$

Trong tam giác ABC có : $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC.BC.\sin 120^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC.\cos 120^0 = 7a^2 \Rightarrow AB = a\sqrt{7}$

$CH = \frac{2.S_{\Delta ABC}}{AB} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

Kết luận: $d(A'B,CC') = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Trong $\Delta CHA'$ có: $A'C = \frac{HC}{\sin 30^0} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Trong $\Delta CHA'$ có: $AA' = \sqrt{CA'^2 - AC^2} = \frac{a\sqrt{35}}{7}$.

Thể tích khối lăng trụ: $V = AA'.S_{\Delta ABC} = \frac{a\sqrt{35}}{7}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{105}}{14}$.

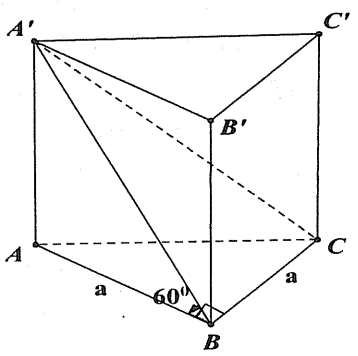
<u>DẠNG 3:</u> Lăng trụ đứng có góc giữa hai mặt phẳng.

Cho lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với BA = BC = a, biết (A'BC) hợp với đáy (ABC) một góc 60^0.Tính thể tích lăng trụ.

LỜI GIẢI

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ABB'A') \Rightarrow BC \perp BA' (BA' \subset (ABB'A'))$.

Hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) có giao tuyến là BC, hai đường thẳng A'B và AB lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến. Nên góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa AB và A'B chính là góc $\widehat{ABA'} = 60^0$.



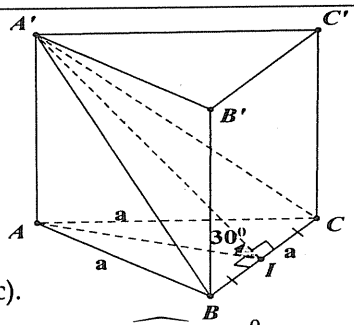
Trong $\Delta BAA'$ vuông tại A có:

$AA' = AB.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$.

$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = a\sqrt{3}.\frac{1}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Đáy của lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' là tam giác đều . Mặt (A'BC) tạo với đáy một góc 30^0 và diện tích tam giác A'BC bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.

LỜI GIẢI



Gọi I trung điểm của BC.

Đặt độ dài cạnh đáy bằng a.

Vì ΔABC đều nên $AI \perp BC$ và $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Có $BC \perp AA', BC \perp AI$

$\Rightarrow BC \perp A'I$ (Định lý ba đường vuông góc).

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) là góc $\widehat{AIA'} = 30^0$.

Trong $\Delta AIA'$ vuông tại A, có: $A'I = \frac{AI}{\cos 30^0} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = a$;

$AA' = AI.\tan 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{2}$.

$S_{\Delta AA'BC} = \frac{1}{2}A'I.BC \Leftrightarrow 8 = \frac{1}{2}.a.a \Leftrightarrow a^2 = 16 \Leftrightarrow a = 4$.

$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = \frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8} = 8\sqrt{3}$

Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD A'B'C'D' có cạnh đáy a và mặt phẳng (BDC') hợp với đáy (ABCD) một góc 60^o. Tính thể tích khối hộp trên.

LỜI GIẢI

Gọi O là tâm của hình vuông ABCD.

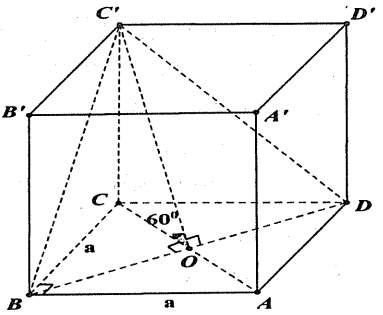
Ta có $BD \perp AC, BD \perp CC'$

$\Rightarrow BD \perp C'O$ (định lý ba đường vuông góc).

Vậy góc giữa mặt phẳng (C'BD) và mặt (ABCD) là góc $\widehat{COC'} = 60^0$.

Trong $\Delta C'CO$ vuông tại C có:

$$CC' = CO.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$



$$S_{ABCD} = AB^2 = a^2 \Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = CC'.S_{ABCD} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$$

Ví dụ 4: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AA' = 2a; mặt phẳng (A'BC) hợp với đáy (ABCD) một góc 60° và A'C hợp với đáy (ABCD) một góc 30°. Tính thể tích khối hộp chữ nhật.

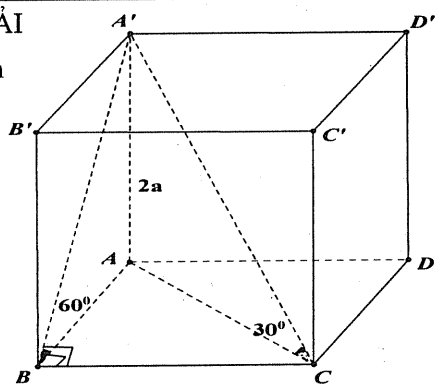
LỜI GIẢI

Ta có: $AA' \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của A'C trên (ABCD).

Vậy góc $\left[\widehat{A'C,(ABCD)}\right] = \widehat{A'CA} = 30^0$

Vì: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(ABB'A')$

$\Rightarrow BC \perp A'B$.



Vậy góc giữa mặt phẳng (A'BC) và mặt (ABCD) là góc $\widehat{ABA'} = 60^0$.

Trong $\Delta CAA'$ vuông tại A có: $AC = AA' : \tan 30^0 = 2a : \frac{\sqrt{3}}{3} = 2a\sqrt{3}$.

Trong $\Delta BAA'$ vuông tại A có $AB = AA' : \tan 60^0 = 2a : \sqrt{3} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Trong ΔABC vuông tại B có:

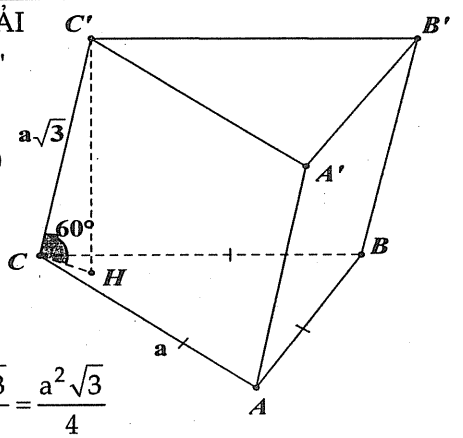
$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{\left(2a\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{4a\sqrt{6}}{3}.$$

Thể tích hình hộp: $V = AA'.AB.AD = 2a.\frac{2a\sqrt{3}}{3}.\frac{4a\sqrt{6}}{3} = \frac{16a^3\sqrt{2}}{3}$.

DẠNG 4: Khối lăng trụ xiên.

Cho lăng trụ xiên tam giác ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, biết cạnh bên là $a\sqrt{3}$ và hợp với đáy ABC một góc 60^o.Tính thể tích lăng trụ.

LỜI GIẢI



Gọi H là hình chiếu vuông góc của C' trên mặt phẳng (ABC), $C'H \perp (ABC)$

Vậy góc giữa CC' và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{C'CH} = 60^0$.

Trong $\Delta CHC'$ vuông tại H có:

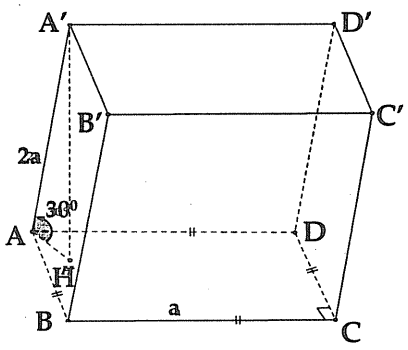
$$C'H = CC'.\sin 60^0 = a\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}.$$

Tam giác ABC đều nên $S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Thể tích cần tìm: $V = CH.S_{\Delta ABC} = \frac{3a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Cho lăng trụ ABCD A'B'C'D'có đáy ABCD là hình vuông cạnh a và biết cạnh bên bằng 2a hợp với đáy ABC một góc 30^o.Tính thể tích lăng trụ.

LỜI GIẢI



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' trên mp(ABCD).

Theo đề bài $\widehat{A'AH} = 30^0$.

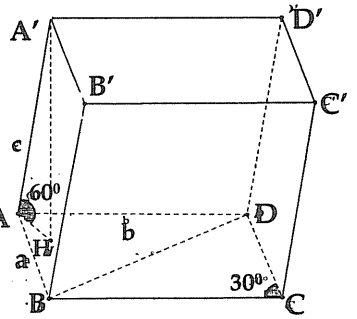
$$\sin\widehat{A'AH} = \frac{HA'}{AA'} \Rightarrow HA' = AA'.\sin 30^0 = a;$$

$S_{ABCD} = a^2$ (ABCD hình vuông).

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = HA'.S_{ABCD} = a^3$.

Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'có AB = a, AD = b, AA' = c và $\widehat{BAD} = 30^0$ và biết cạnh bên AA' hợp với đáy ABC một góc 60^o. Tính thể tích lăng trụ.

LỜI GIẢI



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' trên mp(ABCD).

Theo đề bài: $\widehat{A'AH} = 30^0$.

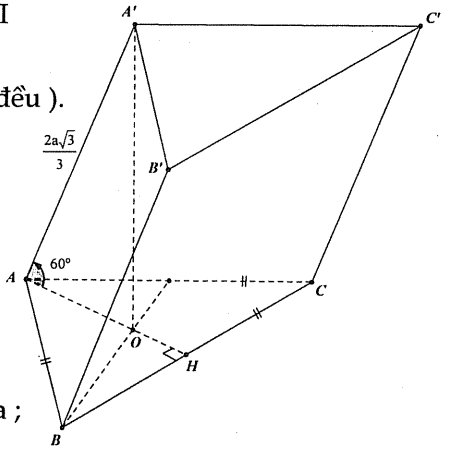
$$\sin\widehat{A'AH} = \frac{HA'}{AA'} \Rightarrow HA' = AA'.\sin 60^0 = \frac{c\sqrt{3}}{2}.$$

$S_{ABCD} = 2S_{\Delta BCD} = 2.\frac{1}{2}CB.CD.\sin\widehat{BCD} = \frac{ab}{2}$.

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = HA'.S_{ABCD} = \frac{abc\sqrt{3}}{4}$.

Cho lăng trụ tam giác ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều, và điểm A' cách đều ba điểm A, B, C biết $AA' = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$, AA' hợp với mặt phẳng đáy (ABC) một góc 60^0. Tính thể tích lăng trụ.

LỜI GIẢI



Gọi O là tâm của đáy (ABC).

Ta có OA = OB = OC (tính chất tam giác đều).

Theo đề bài có A'A = A'B = A'C.

Vậy O là hình chiếu vuông góc của A' trên mp (ABC). AO là hình chiếu vuông góc của AA' trên mặt phẳng (ABC) Theo đề bài $\widehat{A'AO} = 60^0$.

Trong tam giác A'AO vuông tại O có :

$\sin\widehat{A'AO} = \frac{OA'}{AA'} \Rightarrow OA' = AA'.\sin 60^0 = a$;

$\cos\widehat{A'AO} = \frac{OA}{AA'} \Rightarrow OA = AA'.\cos 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Trong tam giác ABC đều có: $AO = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}.\frac{AB.\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{\sqrt{3}} \Rightarrow AB = a$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2.\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. $V_{ABC.A'B'C'} = OA'.S_{ABC} = a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Cho lăng trụ ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, đỉnh A' có hình chiếu trên (ABC) nằm trên đường cao AH của tam giác ABC biết mặt bên BB'C'C hợp với đáy ABC một góc 60^o.

a). Chứng minh rằng BB'C'C là hình chữ nhật.

b). Tính thể tích lăng trụ ABC.A'B'C'.

LỜI GIẢI

Gọi O là hình chiếu vuông góc của A' trên mp(ABC). Gọi I trung điểm của B'C'.

Ta có: H trung điểm của BC.

Suy ra: $\begin{cases} IH \,//\, B'B \\ IH = B'B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IH \,//\, A'A \\ IH = A'A \end{cases}$.

Vậy: AHIA' là hình bình hành.

$\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp A'O \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(AHIA') \Rightarrow BC \perp HI$

$\begin{cases} HI \,//\, BB' \\ HI \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp BB'.$

Vậy: BCC'B' là hình chữ nhật.

$BC = (ABC \cap BCC'B')$;

$BC \perp AH$; $BC \perp HI$.

Vậy: $\left[(ABC),(BCC'B')\right] = \widehat{IHx} = 60^0 = \widehat{A'AO}$

$\sin\widehat{A'AO} = \dfrac{A'O}{AA'} \Rightarrow A'O = AA'.\sin 60^0 = \dfrac{3a}{2}$;

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{AB^2.\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$V_{ABC.A'B'C'} = OA'.S_{ABC} = \dfrac{3a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}.$

Cho lăng trụ ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều với tâm O. Cạnh bên CC' = a hợp với đáy ABC một góc 60° và C' có hình chiếu trên ABC trùng với tâm O.

Chứng minh rằng AA'B'B là hình chữ nhật. Tính diện tích AA'B'B.

Tính thể tích lăng trụ ABC.A'B'C'.

LỜI GIẢI

Gọi I trung điểm của A'B'. H trung điểm của AB.

Suy ra: $\begin{cases} IH \,//\, B'B \\ IH = B'B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IH \,//\, CC' \\ IH = CC' \end{cases}$.

Vậy: tứ giác CHIC' là hình bình hành.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp CH \\ AB \perp OC' \end{cases} \Rightarrow AB \perp mp(CHIC')$

$\Rightarrow AB \perp HI$

Mà $\begin{cases} HI \,//\, BB' \\ HI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp BB'.$

Vậy: ABB'A' là hình chữ nhật.

CO là hình hiếu vuông góc của CC' trên mp(ABC).

Vậy: $\left[CC',(ABC)\right] = \widehat{C'CO} = 60^0$

Trong $\Delta COC'$ vuông tại O có: $\sin\widehat{OCC'} = \frac{OC'}{CC'} \Rightarrow OC' = CC'.\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

$\cos\widehat{OCC'} = \frac{OC}{CC'} \Rightarrow OC = CC'.\cos 60^0 = \frac{a}{2}$

$CO = \frac{2}{3}CH = \frac{2}{3}.\frac{AB.\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{\sqrt{3}} \Rightarrow AB = CO.\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Diện tích hình chữ nhật ABB'A': $S_{ABB'A'} = AB.BB' = \frac{a\sqrt{3}}{2}.a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2.\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$; $V_{ABC.A'B'C'} = OC'.S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a}{2}.\frac{3a^2\sqrt{3}}{16} = \frac{9a^3}{32}$

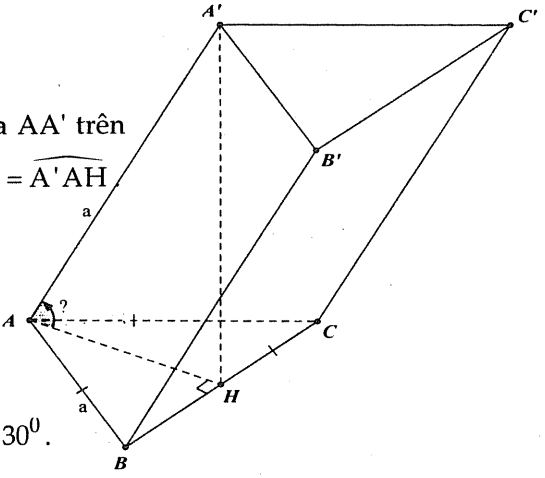
Cho lăng trụ ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a biết chân đường vuông góc hạ từ A' trên ABC trùng với trung điểm của BC và AA' = a. Tìm góc hợp bởi cạnh bên với đáy lăng trụ. Tính thể tích lăng trụ.

LỜI GIẢI

Gọi H là trung điểm của BC.

Theo đề bài $A'H \perp mp(ABC)$.

AH là hình chiếu vuông góc của AA' trên mp(ABC), nên góc $\left[\widehat{AA',(ABC)}\right] = \widehat{A'AH}$.



Ta có: $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

(đường cao của tam giác đều).

Trong tam giác vuông AHA' có:

$\cos\widehat{A'AH} = \frac{AH}{AA'} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{A'AH} = 30^0$.

$\sin\widehat{A'AH} = \frac{A'H}{AA'} \Rightarrow A'H = AA'.\sin 30^0 = \frac{a}{2}$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2.\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $V_{ABC.A'B'C'} = HA'.S_{ABC} = \frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Cho lăng trụ xiên ABC A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều với tâm O. Hình chiếu của C' trên (ABC) là O.Tính thể tích của lăng trụ biết rằng khoảng cách từ O đến CC' là a và 2 mặt bên (AA'C'C) và (BB'C'C) hợp với nhau một góc 90°

LỜI GIẢI

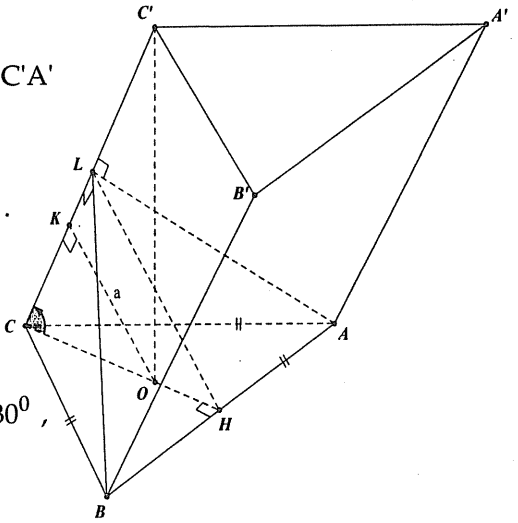
Gọi H là trung điểm của BC.

Theo đề bài $C'O \perp mp(ABC)$.

Hai hình bình hành BCC'B' và ACC'A' bằng nhau, có chung cạnh CC'.

Hạ $BL \perp CC'$ thì $AL \perp CC'$.

$\left[(BCC'B'),(ACC'A')\right] = \widehat{ALB} = 90^0$.



Ta có: $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông AHA' có"

$\cos\widehat{A'AH} = \dfrac{AH}{AA'} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{A'AH} = 30^0$,

$\sin\widehat{A'AH} = \dfrac{A'H}{AA'}$

$\Rightarrow A'H = AA'.\sin 30^0 = \dfrac{a}{2}$.

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{AB^2.\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$V_{ABC.A'B'C'} = HA'.S_{ABC} = \dfrac{a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có 6 mặt là hình thoi cạnh a,hình chiếu vuông góc của A' trên(ABCD) nằm trong hình thoi, các cạnh xuất phát từ A của hộp đôi một tạo với nhau một góc 60^o.

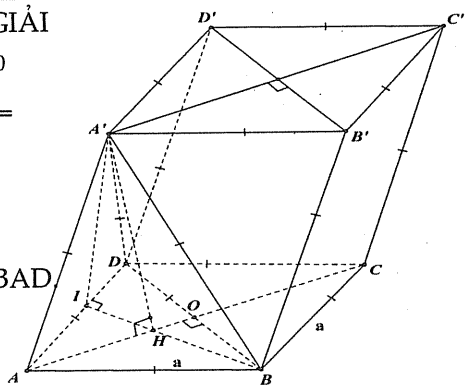
a). Chứng minh rằng H nằm trên đường chéo AC của ABCD.

b). Tính diện tích các mặt chéo ACC'A' và BDD'B'.

c). Tính thể tích của hộp.

d). Tính góc giữa hai mặt phẳng (AA'D'D) và mặt phẳng (ABCD).

LỜI GIẢI



a) Theo đề có: $\widehat{DAA'} = \widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = 60^0$ nên ba tam giác đều $\Delta DAA' = \Delta BAA' = \Delta BAD$ (c.g.c).

Suy ra $A'A = A'B = A'D$

$\Rightarrow HA = HB = HD$.

Vậy $H \in AC$ và H là trọng tâm của ΔBAD.

b) Ta có: $AH = \dfrac{2}{3}AO = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$,

$AC = 2AO = a\sqrt{3}$

Trong Δ HAA' vuông tại H có: $HA' = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Diện tích hình bình hành ACC'A': $S_{ACC'A'} = HA'.AC = \frac{a\sqrt{6}}{3}.a\sqrt{3} = a^2\sqrt{2}$.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp HA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp mp(ACC'A') \Rightarrow BD \perp AA'$, mà $AA' // BB'$.

Vậy: $BD \perp BB'$

Suy ra tứ giác BDD'B' là hình vuông $S_{BDD'B'} = BD^2 = a^2$.

c) Diện tích của hình thoi ABCD: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = \frac{1}{2}.a\sqrt{3}.a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối hộp : $V = HA'.S_{ABCD} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

d) Đây chính là bài toán tính góc giữa mặt bên và mặt đáy, các bạn nhớ xem lại phương pháp tìm góc ở bài góc giữa hai mặt phẳng.

Gọi I trung điểm AD thì $HI \perp AD$ (ABD đều).

Ta có: $AD \perp mp(A'HI) \Rightarrow AD \perp SI$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (AA'D'D) và mặt phẳng (ABCD) là góc $\widehat{HIA'}$.

Vì H trọng tâm tam giác đều ABD nên ba điểm B, H, I thẳng hàng và $HI = \frac{1}{3}BI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Xét Δ A'IH vuông tại H:

$$\tan\widehat{HIA'} = \frac{HA'}{HI} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \widehat{HIA'} = \arctan\left(2\sqrt{2}\right)$$

Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và góc A = 60^o chân đường vuông góc hạ từ B' xuông ABCD trùng với giao điểm 2 đường chéo đáy biết BB' = a.

a). Tìm góc hợp bởi cạnh bên và đáy.

b). Tính thể tích và tổng diện tích các mặt bên của hình hộp.

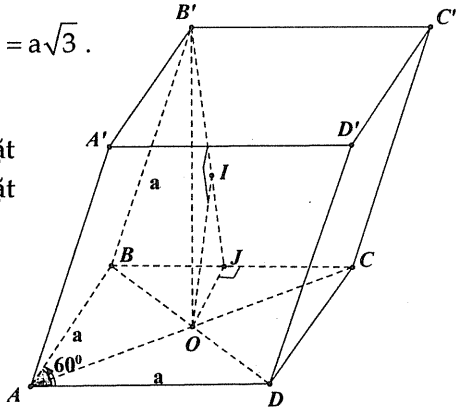
c). Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCC'B') theo a.

LỜI GIẢI

Gọi $O = AC \cap BD$, theo đề $B'O \perp mp(ABCD)$.

Vì ABCD hình thoi có $\widehat{A} = 60^0$ nên Δ ABD đều có:

$BD = a \Rightarrow BO = \frac{a}{2}$, $AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$.



a). Tìm góc hợp bởi cạnh bên và đáy.

Ta có OB là hình chiếu của BB' trên mặt phẳng (ABCD). Góc giữa BB' và mặt phẳng (ABCD) là góc $\widehat{OBB'}$.

Trong Δ OBB' vuông tại O có :

$\cos\widehat{OBB'} = \frac{OB}{BB'} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{OBB'} = 60^0$.

Vì ABCD.A'B'C'D' là hình hộp nên góc hợp bởi các cạnh bên và mặt đáy đều bằng nhau và bằng 60^0.

b) Tính thể tích và tổng diện tích các mặt bên của hình hộp.

$OB' = OB.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Dựng $OJ \perp BC$ tại J, suy ra $BC \perp mp(JOB') \Rightarrow BC \perp B'J$.

Trong ΔBOC vuông tại O có: $OJ.BC = OB.OC \Rightarrow OJ = \frac{\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Trong $\Delta JOB'$ vuông tại O có:

$JB' = \sqrt{OJ^2 + OB'^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{4}$.

Diện tích hình bình hành BCC'B': $S_{BCC'B'} = \frac{1}{2}.JB'.BC = \frac{a\sqrt{15}}{4}.a = \frac{a^2\sqrt{15}}{4}$

Vì các mặt bên có cùng đường cao và cùng cạnh đáy nên diện tích bằng nhau.

Tổng diện tích bốn mặt bên là $S = 4.S_{BCC'B'} = a^2\sqrt{15}$.

c). Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCC'B') theo a

Dựng $OI \perp B'J$ tại I (1)

Vì $BC \perp (B'OJ) \Rightarrow (BCC'B') \perp (B'OJ)$, hai mặt phẳng này có B'J là giao tuyến (2).

Từ (1) và (2) thì $OI \perp mp(BCC'B') \Rightarrow d(O, mp(BCC'B')) = OI$.

Trong $\Delta JOB'$ vuông tại O có: $OI.JB' = OJ.OB' \Rightarrow OI = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{15}}{4}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{10}$

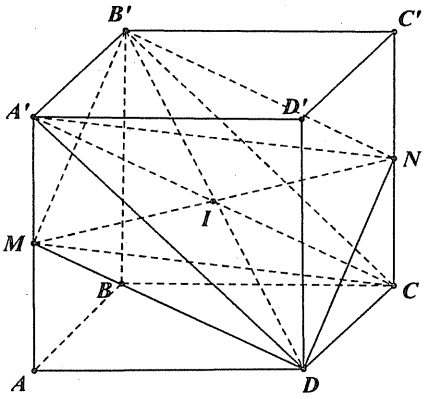
Vì hai điểm A và O cùng nằm trên một đường thẳng có giao điểm với mp (BCC'B') tại C có: $\dfrac{d\left(A,mp\left(BCC'B'\right)\right)}{d\left(O,mp\left(BCC'B'\right)\right)} = \dfrac{AC}{OC} = 2$

$\Rightarrow d\left(A,mp\left(BCC'B'\right)\right) = 2.d\left(O,mp\left(BCC'B'\right)\right) = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2003

Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là một hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^0$. Gọi M là trung điểm cạnh AA' và N là trung điểm cạnh CC'. Chứng minh rằng bốn điểm B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng. Hãy tính độ dài cạnh AA' theo a để tứ giác B'MDN là hình vuông.

LỜI GIẢI



Ta có A'M song song và bằng NC.

Suy ra A'MCN là hình bình hành.

Do đó A'C và MN cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường. Mặt khác tứ giác A'DCB' cũng là hình bình hành nên trung điểm I của A'C cũng chính là trung điểm của B'D. Vậy MN và B'D cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường nên B'MDN là hình bình hành.

Do đó B', M, N, D cùng thuộc một mặt phẳng.

Mặt khác: $DM^2 = DA^2 + AM^2 = DC^2 + CN^2 = DN^2 \Rightarrow DM = CN$.

Vậy B'MDN là hình thoi.

Để B'MDN là hình vuông thì:

$MN = DB' \Leftrightarrow AC = DB' \Leftrightarrow AC^2 = DB'^2 = BB'^2 + BD^2$

$\Leftrightarrow 3a^2 = BB'^2 + a^2 \Leftrightarrow BB' = a\sqrt{2} \Leftrightarrow AA' = a\sqrt{2}$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2009

Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có $BB' = a$ và góc giữa BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của B' lên (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện A'.ABC.

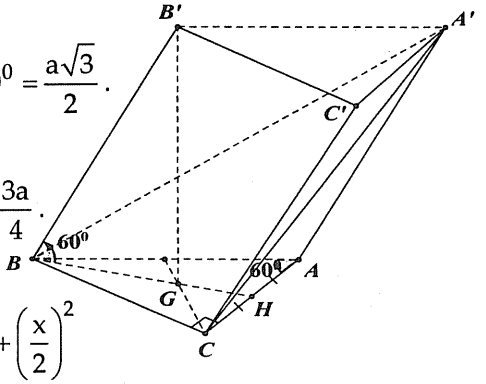
LỜI GIẢI

Gọi H trung điểm của AC.

Ta có: BG là hình chiếu vuông góc của BB' trên mặt phẳng (ABC) nên góc giữa BB' và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{B'BG} = 60^0$.

Trong $\Delta B'BG$ vuông tại G có:

$$BG = BB'.\cos 60^0 = \frac{a}{2}, B'G = BB'.\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Đặt $AC = x$, trong ΔABC có:

$$BC = AC.\tan 60^0 = x\sqrt{3},\ BH = \frac{3}{2}BG = \frac{3a}{4}.$$

Trong ΔBCH vuông tại C có:

$$BH^2 = BC^2 + CH^2 \Leftrightarrow \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = \left(x\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{13x^2}{4} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{13}a}{26}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}CB.CA = \frac{1}{2}.x\sqrt{3}.x = \frac{\sqrt{3}}{2}.x^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.\left(\frac{3\sqrt{13}a}{26}\right)^2 = \frac{9a^2\sqrt{3}}{104}.$$

$$V_{A'ABC} = \frac{1}{3}.B'G.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{9a^2\sqrt{3}}{104} = \frac{9a^3}{208}.$$

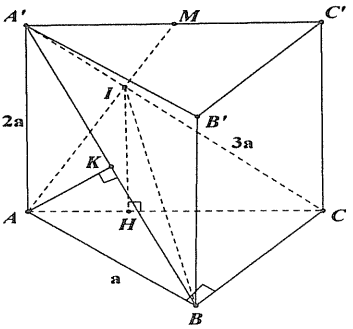
ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2009

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a. M là trung điểm của A'C' và I = AM ∩ A'C. Tính thể tích khối chóp I.ABC và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC).

LỜI GIẢI

Dựng $IH \perp AC (H \in AC)$.

Ta có $HI \perp (ABC)$, IH là đường cao của tứ diện I.ABC.



$$\Rightarrow IH // AA' \Rightarrow \frac{CI}{CA'} = \frac{IH}{AA'} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow CI = \frac{2}{3}.AA' = \frac{4a}{3}.$$

Pitago cho các tam giác vuông CAA', ABC có:

$$AC = \sqrt{CA'^2 - AA'^2} = \sqrt{9a^2 - 4a^2} = a\sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a.$$

Diện tích tam giác ABC : $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.BA.BC = \frac{1}{2}.a.2a = a^2$.

Thể tích tứ diện $V_{I.ABC} = \frac{1}{3}.IH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{4a}{3}.a^2 = \frac{4a^3}{9}$.

Mà $AK \perp BA'(K \in BA')$. Ta có $BC \perp (ABB'A') \Rightarrow BC \perp AK$.

Ta có: $\begin{cases} AK \perp BC \\ AK \perp BA' \end{cases} \Rightarrow AK \perp mp(BCA')$.

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC) là AK.

Trong $\Delta BAA'$ vuông tại A có:

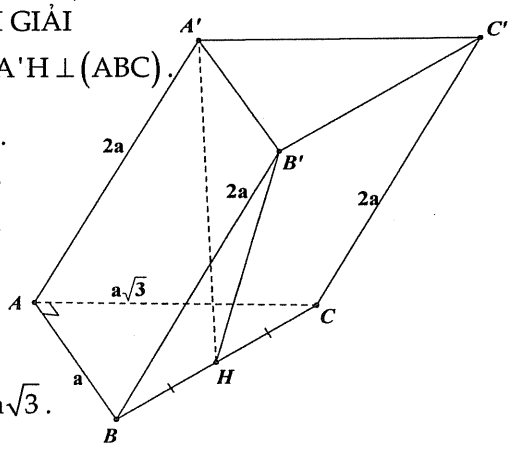
$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AK = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

Kết luận: $d(A, mp(IBC)) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2008

Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB=a, AC=$a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp A'.ABC.

LỜI GIẢI



Gọi H trung điểm của BC, theo đề $A'H \perp (ABC)$.

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$.

Vì tam giác ABC vuông tại A có AH đường trung tuyến nên $AH = \frac{1}{2}.BC = a$.

Trong $\Delta A'AH$ vuông tại H có:

$HA' = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

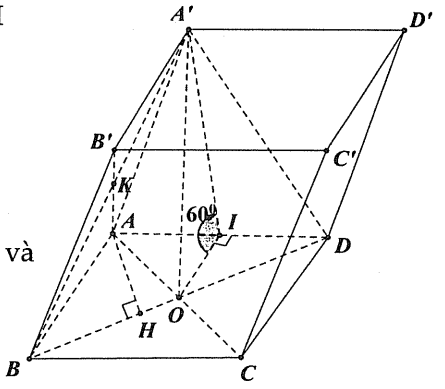
Thể tích khối chóp A'.ABC:

$$V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}.A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.A'H.\frac{1}{2}.AB.AC = \frac{1}{6}a\sqrt{3}.a.a\sqrt{3} = \frac{a^3}{2}.$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2011

Cho lăng trụ ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình chữ nhật. AB = a, AD = $a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A1 trên mặt phẳng (ABCD) trùng với giao điểm AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD'A') và (ABCD) bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B' đến mặt phẳng (A'BD) theo a.

LỜI GIẢI



Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow A'O \perp (ABCD)$.

Gọi I là trung điểm của AD.

$\begin{cases} AD \perp SO \\ AD \perp OI \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SOI) \Rightarrow AD \perp SI$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ADD'A') và mặt phẳng (ABCD) là góc $\widehat{SIO} = 60^0$.

Trong ΔSIO vuông tại O có:

$OA' = OI.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (vì $OI = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$)

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'O.S_{ABCD} = A'O.AB.AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}.a.a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{2}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BD có

$\begin{cases} AH \perp BD \\ AH \perp A'O \end{cases} \Rightarrow AH \perp (A'BD) \Rightarrow d(A, mp(A'BD)) = AH$.

Trong ΔABD vuông tại A có:

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi $K = AB' \cap BA' \Rightarrow K = AB' \cap mp(A'BD)$ có

$\frac{d(B', mp(A'BD))}{d(A, mp(A'BD))} = \frac{B'K}{AK} = 1 \Rightarrow d(B', mp(A'BD)) = d(A, mp(A'BD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = a\sqrt{3}$, AD = a, AA' = a, O là giao điểm của AC và BD.

a). Tính thể tích khối hộp chữ nhật, khối chóp O.A'B'C'D'

b). Tính thể tích khối OBB'C'.

c). Tính độ dài đường cao đỉnh C' của tứ diện OBB'C'.

LỜI GIẢI

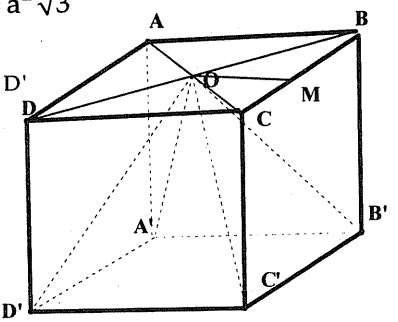
a). Tính thể tích khối hộp chữ nhật, khối chóp OA'B'C'D'

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.AB.AD = a^3\sqrt{3}$

Ta có: $S_{ABCD} = S_{A'B'C'D'} = AB.AD = a\sqrt{3}.a = a^2\sqrt{3}$

$V_{O.A'B'C'D'} = \frac{1}{3}d\left(O, mp\left(A'B'C'D'\right)\right).S_{A'B'C'D'}$

$= \frac{1}{3}.AA'.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a.a^2\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$



b).Tính thể tích khối OBB'C'.

$V_{O.BB'C'} = \frac{1}{2}V_{O.BCC'B'} = \frac{1}{4}V_{A.BCC'B'}$

$= \frac{1}{12}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{12}.AA'.AB.AD = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

c). Tính độ dài đường cao đỉnh C' của tứ diện OBB'C'.

$S_{\Delta OBB'} = \frac{1}{2}.BO.BB' = \frac{1}{2}a.a = \frac{a^2}{2}$ (vì $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2} = a$)

$V_{O.BB'C'} = \frac{1}{3}d\left(C, mp\left(OBB'\right)\right).S_{\Delta OBB'}$

$\Rightarrow d\left(C, mp\left(OBB'\right)\right) = \frac{3V_{O.BB'C'}}{S_{\Delta OBB'}} = \frac{3.\frac{a^3\sqrt{3}}{12}}{\frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

PHƯƠNG PHÁP TỈ SỐ THỂ TÍCH

Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông cân ở B, $AC = a\sqrt{2}$, $SA = a$. SA vuông góc với đáy ABC .

a). Tính thể tích của khối chóp S.ABC.

b). Gọi G là trọng tâm tam giác SBC, mặt phẳng (α) qua AG và song song với BC cắt SC, SB lần lượt tại M, N. Tính thể tích của khối chóp S.AMN.

LỜI GIẢI

a)Ta có ΔABC cân tại B có $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow BA = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a$

Vậy : $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}a.\frac{1}{2}.a^2 = \frac{a^3}{6}$

b) Gọi I là trung điểm BC.

Ta có mặt phẳng (α) và mặt phẳng (SBC) có G là điểm chung và (α) // BC.

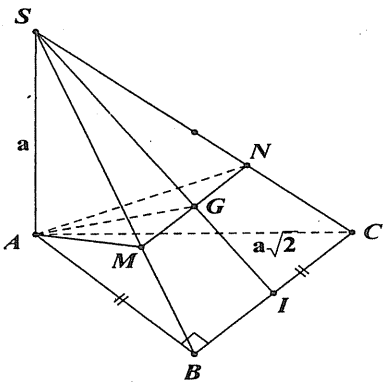
Nên giao tuyến MN qua G và MN // BC.

Trong ΔSBC có G là trọng tâm, ta có:

$\frac{SG}{SI}=\frac{SM}{SB}=\frac{SN}{SC}=\frac{2}{3}$.

Ta có: $\frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}}=\frac{SA}{SA}.\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}=\frac{2}{3}.\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

$\Rightarrow V_{SAMN}=\frac{4}{9}V_{SABC}=\frac{4}{9}.\frac{a^3}{6}=\frac{2a^3}{27}$.



Cho tam giác ABC vuông cân ở A và $AB=a$. Trên đường thẳng qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm D sao cho $CD=a$. Mặt phẳng (α) qua C vuông góc với BD, cắt BD tại F và cắt AD tại E.

a). Tính thể tích khối tứ diện ABCD.

b). Chứng minh $CE\perp(ABD)$.

c). Tính thể tích khối tứ diện CDEF.

LỜI GIẢI

Dựng $CF\perp BD$ tại F. Trong mặt phẳng (ABD) từ F dựng đường thẳng vuông góc với BD tại F cắt AD tại E.

Kết luận vậy mặt phẳng (CEF) vuông góc với BD.

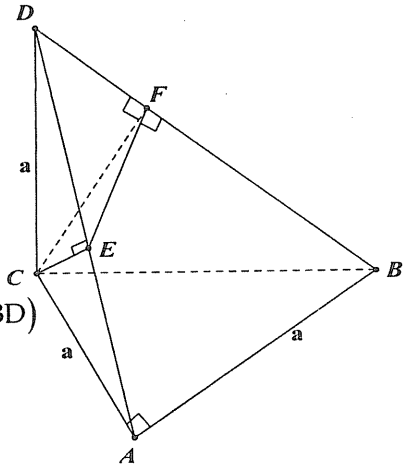
a) Tính V_{ABCD}:

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.CD=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.AB.AC.CD=\frac{a^3}{6}$

b) Tacó: $\begin{cases}AB\perp AC\\AB\perp CD\end{cases}\Rightarrow AB\perp mp(ACD)$

$\Rightarrow AB\perp EC$ (vì $EC\subset(ACD)$)

Ta có: $\begin{cases}EC\perp AB\\EC\perp BD\left(BD\perp mp(\alpha)\right)\end{cases}\Rightarrow EC\perp(ABD)$



c) Tính thể tích khối tứ diện CDEF.

Ta có: $\frac{V_{DCEF}}{V_{DABC}}=\frac{DE}{DA}.\frac{DF}{DB}$

Xét ΔACD vuông tại C: $DE.DA=CD^2\Leftrightarrow\frac{DE.DA}{DA^2}=\frac{CD^2}{DA^2}\Leftrightarrow\frac{DE}{DA}=\frac{a^2}{2a^2}=\frac{1}{2}$.

Xét ΔBCD vuông tại C: $DF.DB = CD^2 \Leftrightarrow \frac{DF.DB}{DB^2} = \frac{CD^2}{DB^2} \Leftrightarrow \frac{DF}{DB} = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3}$.

Vậy : $\frac{V_{DCEF}}{V_{DABC}} = \frac{DE}{DA}.\frac{DF}{DB} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{DCEF} = \frac{1}{6}.V_{DABC} = \frac{1}{6}.\frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{36}$.

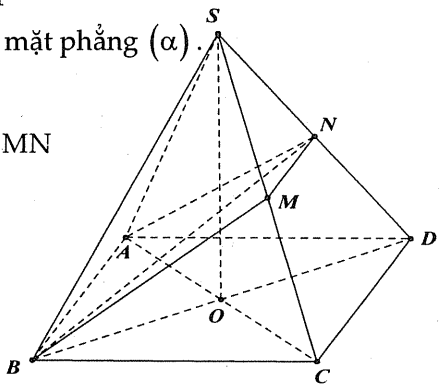
Cho khối chóp tứ giác đều SABCD. Một mặt phẳng (α) qua A, B và trung điểm M của SC. Tính tỉ số thể tích của hai phần khối chóp bị phân chia bởi mặt phẳng đó.

LỜI GIẢI

Tìm giao tuyến của mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng (α).

$$\begin{cases} M \in (SCD) \cap (\alpha) \\ CD \,//\, AB \\ CD \subset (SCD), AB \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (SCD) \cap (\alpha) = MN$$

(với MN // CD // AB, $N \in SD$)



Vậy hình thang ABMN là thiết diện của khối chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α).

Gọi V là thể tích khối chóp S.ABCD.

Mặt phẳng (α) chia khối chóp thành 2 khối thể tích, là $V_1 = V_{S.ABMN}$ và V_2 phần thể tích còn lại.

Tính V_1 theo V:

Ta có: $V_1 = V_{S.ABN} + V_{S.BMN}$

Theo tỉ lệ thể tích :

$$\frac{V_{S.ABN}}{V_{S.ABD}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SB}{SB}.\frac{SN}{SD} = \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.ABN} = \frac{1}{2}V_{S.ABD} = \frac{1}{4}V.$$

$$\frac{V_{S.BMN}}{V_{S.BCD}} = \frac{SM}{SC}.\frac{SB}{SB}.\frac{SN}{SD} = \frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.BMN} = \frac{1}{4}V_{S.BCD} = \frac{1}{8}V.$$

Vậy: $V_1 = V_{S.ABN} + V_{S.BMN} = \frac{1}{4}V + \frac{1}{8}V = \frac{3}{8}V$.

Kết luận: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}$.

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên tạo với đáy góc 60^0. Gọi M là trung điểm SC. Mặt phẳng (α) đi qua AM và song song với BD, cắt SB tại E và cắt SD tại F.

a). Hãy xác định mp(AEMF).

b). Tính thể tích khối chóp S.ABCD

c). Tính thể tích khối chóp S.AEMF

LỜI GIẢI

a). Gọi $O = AC \cap BD$

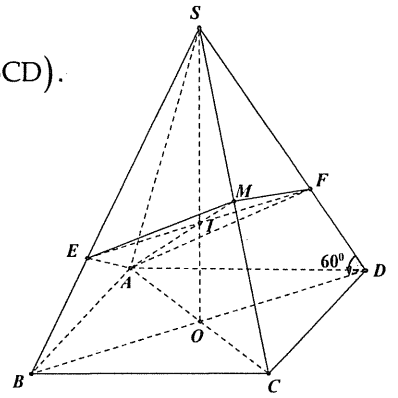
$\Rightarrow mp(SAC) \cap mp(SBD) = SO$ và $SO \perp (ABCD)$.

Gọi $I = AM \cap SO (AM, SO \subset mp(SAC))$.

Hai mặt phẳng (α) và mặt phẳng (SBD) có I là điểm chung và mặt phẳng (α) // BD.

Nên giao tuyến EF của chúng qua I và song song với BD, với $E \in SB$ và $F \in SD$.

Kết luận: AEMF là thiết diện cần tìm.



b). Ta có: AO là hình chiếu vuông góc của SA trên mp(ABCD).

Nên $\left(\widehat{SA,(ABCD)}\right) = \widehat{SAO} = 60^0$.

Xét ΔSAO vuông tại O : $SO = AO.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SO.S_{ABCS} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

c) Phân chia chóp tứ giác, ta có : $V_{S.AEMF} = V_{S.AEM} + V_{S.AFM}$

Xét tam giác SBD có I trọng tâm và EF // BD, ta có: $\frac{SI}{SO} = \frac{SE}{SB} = \frac{SF}{SD} = \frac{2}{3}$

Theo tỉ lệ thể tích có :

$\frac{V_{S.AEM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SE}{SB}.\frac{SM}{SC} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AEM} = \frac{1}{3}.V_{S.ABC} = \frac{1}{6}V_{S.ABCD}$

Tương tự: $V_{S.AFM} = \frac{1}{3}.V_{S.ADC} = \frac{1}{6}V_{S.ABCD}$.

Kết luận: $V_{S.AEMF} = V_{S.AEM} + V_{S.AFM} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a^3\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$.

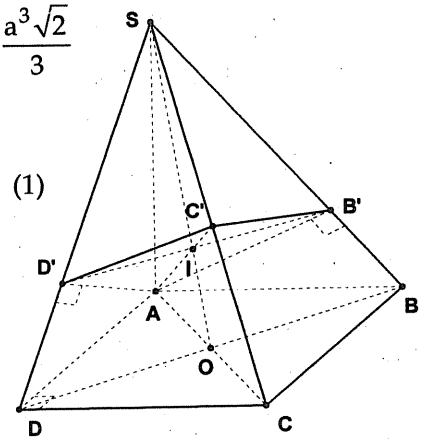
Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi B', D' là hình chiếu của A lần lượt lên SB, SD. Mặt phẳng (AB'D') cắt SC tại C'.

a) Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

b) Chứng minh $SC \perp (AB'D')$

c) Tính thể tích khối chóp S.AB'C'D'

LỜI GIẢI



a) Ta có: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a\sqrt{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

b) Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'$, có :

$$\begin{cases} AB' \perp SB \\ AB' \perp BC \end{cases} \Rightarrow AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SC \qquad (1)$$

Chứng minh tương tự :

$AD' \perp (SCD) \Rightarrow AD' \perp SC \qquad (2)$

Từ (1) và (2) thì : $SC \perp (AB'D')$

c). Gọi $O = AC \cap BD$.

Trong mặt phẳng SBD gọi $I = SO \cap B'D'$.

Mặt phẳng (AB'D') và (SAC) có hai điểm chung là A và I, nên $(AB'D') \cap (SAC) = AI$. Vậy C' là giao điểm của SC và AI.

Theo câu b) $SC \perp (AB'D') \Rightarrow SC \perp AC'$

$\Rightarrow$ C' trung điểm SC vì tam giác SAC cân tại A.

Ta có : $V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'C'} + V_{S.AD'C'}$.

Xét ΔSAB vuông tại A: $SB'.SB = SA^2 \Leftrightarrow \frac{SB'.SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} \Leftrightarrow \frac{SB'}{SB} = \frac{2a^2}{3a^2} = \frac{2}{3}$.

Vì $SB^2 = SA^2 + AB^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$.

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AB'C'} = \frac{1}{3}V_{S.ABC} = \frac{1}{6}V_{S.ABCD}$$

Lý luận tương tự ta có : $V_{S.AD'C'} = \frac{1}{3}V_{S.ADC} = \frac{1}{6}V_{S.ABCD}$

Kết luận: $V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'C'} + V_{S.AD'C'} = \frac{1}{6}V_{S.ABCD} + \frac{1}{6}V_{S.ABCD}$

$$= \frac{1}{3}V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a^3\sqrt{2}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2006

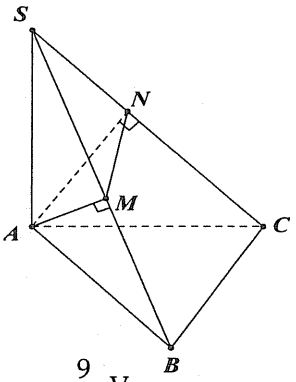
Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA = 2a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC. Tính thể tích khối chóp A.BCNM.

LỜI GIẢI

Ta có: $SB = SC = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$.

Trong ΔSAB vuông tại B có: $SM.SB = SA^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{SM.SB}{SB^2} = \dfrac{SA^2}{SB^2} \Leftrightarrow \dfrac{SM}{SB} = \dfrac{4a^2}{5a^2} = \dfrac{4}{5}$



Tương tự ta cũng có : $\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{4}{5}$

Ta có tỉ lệ thể tích: $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC} = \dfrac{16}{25}$

$\Rightarrow V_{S.AMN} = \dfrac{16}{25}.V_{S.ABC}$

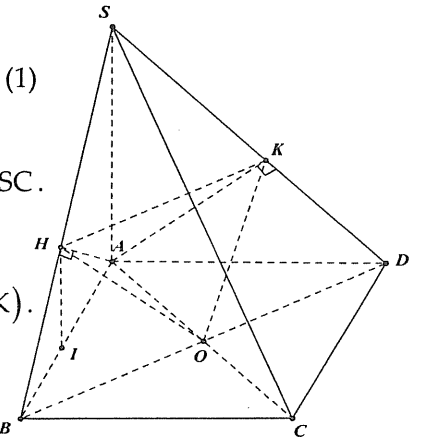
Vậy: $V_{A.BCNM} = V_{S.ABC} - V_{S.AMN} = V_{S.ABC} - \dfrac{16}{25}.V_{S.ABC} = \dfrac{9}{25}.V_{S.ABC}$

$$= \frac{9}{25}.\frac{1}{3}.SA.S_{\Delta ABC} = \frac{3}{25}.2a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{50}$$

DỰ BỊ ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2007

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, SA vuông góc với đáy ABCD. Cho $AB = a, SA = a\sqrt{2}$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD. Chứng minh $SC \perp (AHK)$ và tính thể tích khối chóp OAHK.

LỜI GIẢI



$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \qquad (1)$

$\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC(do(1)) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC.$

Chứng minh tương tự $AK \perp SC$.

Vì $AH \perp SC, AK \perp SC$, nên $SC \perp mp(AHK)$.

Trong tam giác vuông:

$SA\,SA^2 = SH.SB \Rightarrow SH = \dfrac{SA^2}{SB} = \dfrac{2a^2}{a\sqrt{3}} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

Tương tự: $SK = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. Kẻ $HI // SA \Rightarrow HI \perp (ABCD)$

Ta có: $\dfrac{V_{SAHK}}{V_{SABD}} = \dfrac{SA.SH.SK}{SA.SB.SD} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow V_{SAHK} = \dfrac{4}{9}V_{SABD}$

$$V_{AHBO} = V_{AKDO} = \frac{1}{3}HI.S_{\Delta ABO} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}S_{\Delta ABD} = \frac{1}{6}V_{SABD}$$

(Vì HI // SA : $\frac{BH}{BS} = \frac{HI}{SA} = \frac{1}{3} \Rightarrow HI = \frac{1}{3}SA$)

$$V_{OAHK} = V_{SABD} - V_{SAHK} - V_{AHBO} - V_{AKDO}$$

$$= V_{SABD} - \frac{4}{9}V_{SABD} - \frac{1}{3}V_{SABD} = \frac{2}{9}V_{SABD} = \frac{2}{9}.\frac{1}{3}SA.S_{ABD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{27}$$

Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh bằng a

a) Tính thể tích khối tứ diện A'BB'C ?

b) Mặt phẳng (α) đi qua A'B' và trọng tâm G tam giác ABC cắt AC và BC lần lượt tại E và F. Tính thể tích hình chóp C.A'B'FE. Tính tỉ số thể tích 2 phần của khối lăng trụ do (α) chia cắt ra.

LỜI GIẢI

a) Vì lăng trụ đứng có tất cả các cạnh bằng a suy ra tam giác hai đáy là tam giác đều, và các mặt bên là các hình vuông.

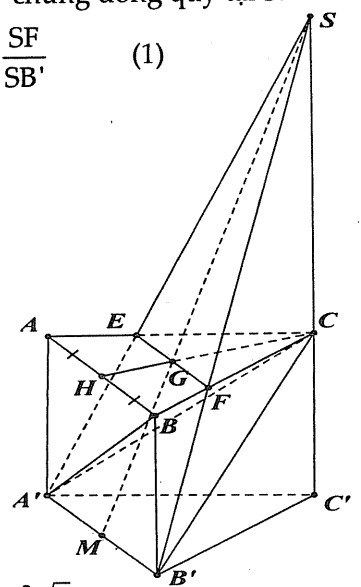
Ta có: $V_{A'BB'C} = V_{C.A'BB'} = \frac{1}{3}.S_{\Delta A'BB'}.CH = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}a^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

b) Vì A'B' song song với mặt phẳng (ABC) cho nên mặt phẳng qua A'B' và trọng tâm G sẽ cắt (ABC) theo giao tuyến qua G và song song với AB, cắt AC tại E và cắt BC tại F. Kéo dài B'F, A'E và CC' chúng đồng quy tại S.

Gọi $V = V_{S.A'B'C'}$; $V' = V_{S.CEF} \Rightarrow \frac{V'}{V} = \frac{SE}{SA'}.\frac{SC}{SC'}.\frac{SF}{SB'}$ (1)

Nhưng: $\frac{SC}{SC'} = \frac{SE}{SA'} = \frac{SF}{SB'} = \frac{EF}{A'B'} = \frac{EF}{AB} = \frac{CG}{CH} = \frac{2}{3}$.

Suy ra: $\frac{V'}{V} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{8}{27} \Rightarrow V' = \frac{8}{27}V$ (2).



Ta có: $V_{C.A'B'C'} = \frac{1}{3}S_{\Delta A'B'C'}.CC'$

$$= \frac{1}{3}S_{\Delta A'B'C'}.\frac{1}{3}SC' = \frac{1}{3}V \quad (3)$$

Vậy: $V_{C.A'B'FE} = V - (V' + V_{C.A'B'C'})$

$$= V - \left(\frac{8}{27}V + \frac{1}{3}V\right) = \frac{10}{27}V$$

Mà: $V = V_{S.A'B'C'} = \frac{1}{3}SC'.S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{3}.3a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

$$V_{C.A'B'FE} = \frac{10}{27}V = \frac{10}{27}.\frac{a^3\sqrt{3}}{4} = \frac{5a^3\sqrt{3}}{54}.$$

$$V_{CEFA'B'C'} = V_{CEFA'B'} + V_{CA'B'C'} = \frac{10}{27}V + \frac{1}{3}V = \frac{19}{27}V.$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = CC'.S_{\Delta A'B'C'} = a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} = V.$$

Vậy $\frac{V_{ABB'A'EF}}{V_{CEFA'B'C'}} = \frac{V - \frac{19}{27}V}{\frac{19}{27}V} = \frac{8}{19}$.

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh $AB = a$. Các cạnh bên SA, SB, SC tạo với đáy một góc bằng 60^0. Gọi D là giao điểm của SA với mặt phẳng qua BC và vuông góc với SA.

a) Tính tỉ số thể tích của hai khối chóp S.DBC và S.ABC.

b) Tính thể tích khối chóp S.DBC.

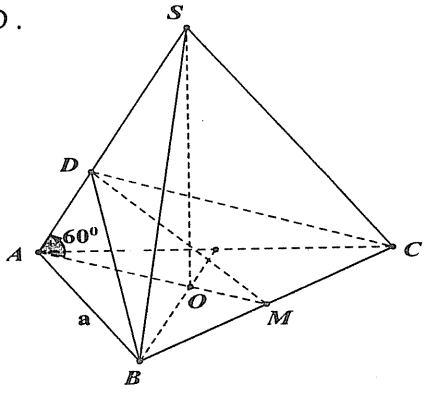
LỜI GIẢI

a) Các cạnh bên tạo với đáy một góc bằng 60^0 thì:

Hình chiếu của S trên đáy trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đáy ABC.

Vì đáy là tam giác đều, gọi O là tâm của đáy ABC thì $SO \perp (ABC)$.

Theo đề $SA \perp (BCD) \Rightarrow SA \perp BD, SA \perp CD$.



Do $\Delta SAB = \Delta SAD$ nên $BD = BC$

Tam giác ABC đều có: $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow AO = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Ta có AO là hình chiếu vuông góc của SA trên mặt phẳng (ABC). Nên góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{SAO} = 60^0$.

Xét ΔSAO vuông tại O:

$SO = AO.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a$. $SA = AO : \cos 60^0 = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Mặt khác $SA \perp (BDC) \Rightarrow SA \perp DM$, cho nên SD là đường cao của chóp S.BDC.

Tam giác AMD vuông tại D có :

$AD = AM\cos 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. $DM = AM.\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$.

$$\frac{V_{S.DBC}}{V_{S.ABC}}=\frac{SD}{SA}=\frac{SA-AD}{SA}=1-\frac{AD}{SA}=1-\frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{2a\sqrt{3}}{3}}=\frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow V_{S.DBC}=\frac{5}{8}V_{S.ABC}=\frac{5}{8}.\frac{a^3\sqrt{3}}{12}=\frac{5a^3\sqrt{3}}{96}$$

Vì $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.SO.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA $\perp$ (ABCD) và SA = a. Một mặt phẳng (α) qua CD cắt các cạnh SA, SB lần lượt ở M , N. Đặt AM = x.

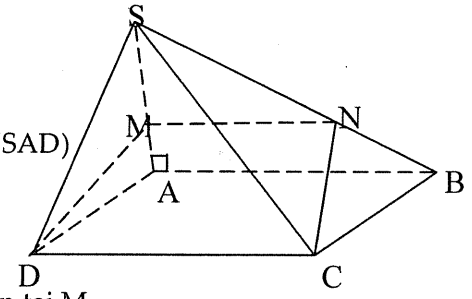
a). Tứ giác MNCD là hình gì?

b). Tính diện tích tứ giác MNCD theo a, x.

c). Xác định giá trị của x để thể tích của hình chóp S.MNCD bằng $\frac{2}{9}$ lần thể tích hình chóp S.ABCD.

LỜI GIẢI

a) Ta có: $\left.\begin{array}{l} mp(\alpha)\cap mp(SAB)=MN \\ CD\subset(\alpha) \\ AB\subset(SAB) \\ AB//CD \end{array}\right\}\Rightarrow MN // AB // CD \Rightarrow MNCD$ là hình thang.



$\left.\begin{array}{l} CD\perp AD \\ CD\perp SA\,(doSA\perp(ABCD)) \end{array}\right\}\Rightarrow CD\perp(SAD)$

$\Rightarrow CD\perp MN, MN\perp MD$.

$\Rightarrow$ MNCD là hình thang vuông.

$\Delta SMN \backsim \Delta SAB \Rightarrow \Delta SMN$ vuông cân tại M.

$\Rightarrow MN = SM = SA - AM = a - x$

ΔAMD vuông: $MD=\sqrt{AM^2+AD^2}=\sqrt{x^2+a^2}$

$$\Rightarrow S_{MNCD}=\frac{MN+CD}{2}.MD=\left(\frac{2a-x}{2}\right)\sqrt{x^2+a^2}$$

b) Xét ΔSAB có MN // AB nên $\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SB}=\frac{MN}{AB}=\frac{a-x}{a}$.

Ta có: $\frac{V_{SMCD}}{V_{S.ACD}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SC}{SC}.\frac{SD}{SD}=\frac{SM}{SA}=\frac{a-x}{a}$

$$\Rightarrow V_{SMCD} = \frac{a-x}{a} V_{S.ACD} = \frac{1}{2}\frac{a-x}{a} V_{S.ABCD}$$

$$\frac{V_{SMNC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA}\cdot\frac{SN}{SB}\cdot\frac{SC}{SC} = \frac{SM}{SA}\cdot\frac{SN}{SB} = \left(\frac{a-x}{a}\right)^2$$

$$\Rightarrow V_{SMNC} = \left(\frac{a-x}{a}\right)^2 V_{S.ABC} = \frac{1}{2}\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 V_{S.ABCD}$$

$$V_{SMNCD} = V_{SMCD} + V_{SMNC} = \frac{1}{2}\frac{a-x}{a} V_{S.ABCD} + \frac{1}{2}\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 V_{S.ABCD}$$

$$= \frac{1}{2} V_{S.ABCD}\left[\frac{a-x}{a} + \left(\frac{a-x}{a}\right)^2\right].$$

Theo đề bài: $V_{SMNCD} = \frac{2}{9} V_{S.ABCD} \Leftrightarrow \frac{1}{2} V_{S.ABCD}\left[\frac{a-x}{a} + \left(\frac{a-x}{a}\right)^2\right]$

$$= \frac{2}{9} V_{S.ABCD} \Leftrightarrow \frac{a-x}{a} + \left(\frac{a-x}{a}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

Đặt $t = \frac{a-x}{a}\left(t > 0\right)$. Ta được $t^2 + t - \frac{4}{9} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{3}\,(n) \\ t = -\frac{4}{3} \end{array}\right.$ (l)

Vậy: $\frac{a-x}{a} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a - x = \frac{a}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2a}{3}$

Cho khối lăng trụ đều ABC.A'B'C' và M là trung điểm cạnh AB. Mặt phẳng (B'C'M) chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỉ số thể tích hai phần đó?

LỜI GIẢI

Ta có: mp(B'C'M) cắt mp(ABC) theo giao tuyến MN song song với BC (phương pháp tìm giao tuyến).

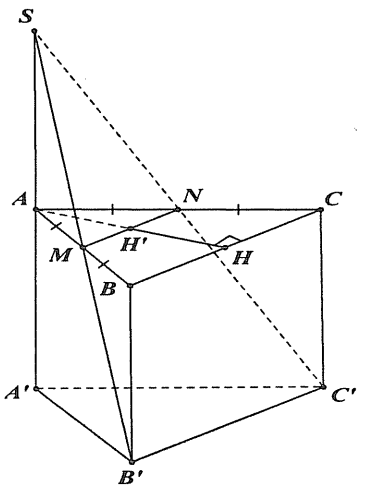
Gọi V' là thể tích khối chứa cạnh AA', còn V'' là thể tích còn lại.

Gọi $V = V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta AA'B'C'}$.

Gọi S là điểm đồng qui của ba đường thẳng A'A, B'M, C'N.

Trong $\Delta SB'C'$ có MN // B'C':

$$\frac{SM}{SB'} = \frac{SN}{SC'} = \frac{MN}{B'C'}. \qquad (1)$$



Trong ΔABC có MN // BC: $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}=\frac{1}{2}$. (2)

Trong $\Delta SA'B'$ có AM // A'B': $\frac{SA}{SA'}=\frac{SM}{SB'}=\frac{AM}{A'B'}=\frac{1}{2}$. (3)

Từ (1) và (2) : $\frac{SM}{SB'}=\frac{SN}{SC'}=\frac{MN}{B'C'}=\frac{1}{2}$.(vì BC = B'C')

Ta có: $V_{S.A'B'C'}=\frac{1}{3}.SA'.S_{\Delta A'B'C'}=\frac{2}{3}.AA'.S_{\Delta A'B'C'}=\frac{2}{3}.V$

$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.A'B'C'}}=\frac{SA}{SA'}.\frac{SM}{SB'}.\frac{SN}{SC'}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\Rightarrow V_{S.AMN}=\frac{1}{8}V_{S.A'B'C'}=\frac{1}{8}.\frac{2}{3}.V=\frac{1}{12}.V$

$V'=V_{S.A'B'C'}-V_{S.AMN}=\frac{2}{3}V-\frac{1}{12}V=\frac{7}{12}V$.

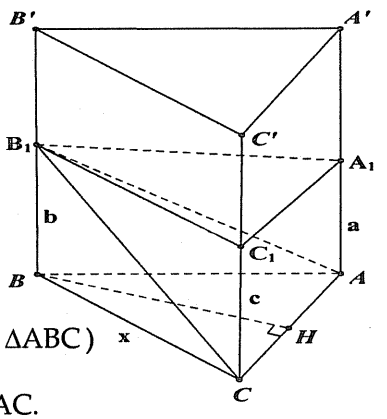
Kết luận tỉ lệ thể tích cần tìm : $\frac{V'}{V''}=\frac{7}{5}$.

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có diện tích đáy bằng S và AA' = h. Một mặt phẳng (P) cắt các cạnh AA',BB' CC' lần lượt tại A_1,B_1,C_1. Biết: $BB_1=b, AA_1=a, CC_1=c$.

a) Tính thể tích 2 phần của khối lăng trụ được phân chia bởi mặt phẳng (P).

b) Với điều kiện nào của a,b,c thì thể tích hai phần đó bằng nhau?

LỜI GIẢI



Vì BB' song song với mặt phẳng (AA'C'C) cho nên khoảng cách từ các điểm B', B_1 và B đến mặt phẳng (AA'C'C) bằng nhau .

Gọi x là độ dài của cạnh AB.

Vì tam giác ABC đều nên:

$S=S_{\Delta ABC}=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}, BH=\frac{x\sqrt{3}}{2}$ (BH đường cao ΔABC)

Vì $mp(ABC)\cap mp(ACC'A')$ có giao tuyến AC.

Mà $BH\perp AC\Rightarrow BH\perp mp(ACC'A')$.

Ta có: tứ giác ACC_1A_1 là hình thang vuông tại A và C nên:

$S_{ACC_1A_1}=\frac{1}{2}(AA_1+BB_1).AC=\frac{1}{2}(a+c).x$

Ta có: $V_{A_1B_1C_1ABC}=V_{B_1.ABC}+V_{B_1.ACC_1A_1}=\frac{1}{3}B_1B.S_{\Delta ABC}+\frac{1}{3}.BH.S_{ACC'A'}$

$$= \frac{1}{3}S.b + \frac{1}{3}.\frac{1}{2}x(a+c).\frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}S.b + \frac{1}{3}(a+c).\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{1}{3}S.b + \frac{1}{3}(a+c).S = \frac{1}{3}(a+b+c).S$$

Vậy thể tích khối trụ còn lại là:

$$V_{A'B'C'.A_1B_1C_1} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{ABC.A_1B_1C_1}$$

$$= S.h - \frac{1}{3}(a+b+c).S = \left[h - \frac{1}{3}(a+b+c)\right].S$$

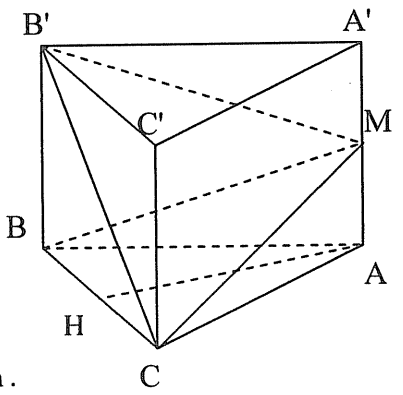
b). Nếu hai thể tích đó bằng nhau thì:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(a+b+c)S = \frac{1}{3}\left[3h-(a+b+c)\right].S \Leftrightarrow 2(a+b+c) = 3h.$$

Cho khối lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C'. Gọi M là trung điểm của AA'. Mặt phẳng đi qua M và B'C' chia khối lăng trụ thành hai phần. Tính tỷ số thể tích hai phần đó?

LỜI GIẢI

Gọi cạnh tam giác đều bằng a (BC=a), chiều cao tam giác đều bằng h: AH=h.



Ta có: $V_{M.ACBB'} = V_{M.ABC} + \frac{1}{2}V_{BCC'B'}$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{2}BC.AHAM + \frac{1}{2}\frac{1}{3}BC.BB'.AH$$

$$= \frac{1}{6}BC.AH(MA+BB')$$

$$= \frac{1}{6}a\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)h = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}h \quad (1).$$

Mặt khác: $V_{LT} = Bh = \frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{3}}{2}.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.h.$

Vì vậy thể tích còn lại:

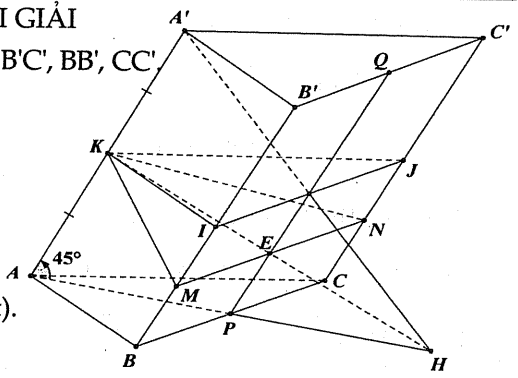
$$V_{M.BCC'A'} = V_{LT} - V_{M.ABCB'} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.h - \frac{a^2\sqrt{3}}{8}h = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}h.$$

Do vậy: $\frac{V_{M.ACBB'}}{V_{M.BCC'A'}} = 1.$

Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên hợp với đáy một góc 45^0. Gọi P là trung điểm của BC, chân đường vuông góc hạ từ A' xuống mặt phẳng (ABC) là H sao cho $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$. Gọi K trung

điểm của AA', (α) là mặt phẳng chứa HK và song song với BC cắt BB' và CC' lần lượt tại M, N .Tính tỉ số thể tích $\frac{V_{ABCKMN}}{V_{A'B'C'KMN}}$.

LỜI GIẢI



Gọi Q, I, J lần lượt là trung điểm của B'C', BB', CC'.

Ta có: $AP = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = a\sqrt{3}$.

Vì $\Delta AHA'$ vuông cân tại H nên:

$A'H = AH = a\sqrt{3}$.

Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (đvtt).

$V_{ABC.A'B'C'} = a\sqrt{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2}{4}$ (đvtt) (1)

Vì $\Delta AHA'$ vuông cân tại H nên $\Rightarrow HK \perp AA' \Rightarrow HK \perp mp(BCC'B')$.

Gọi $E = MN \cap KH \Rightarrow BM = PE = CN$ (2).

Mà: $AA' = \sqrt{A'H^2 + AH^2} = \sqrt{3a^2 + 3a^2} = a\sqrt{6}$

$\Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow BM = PE = CN = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Ta có: thể tích K.MNIJ là $V_{K.MNIJ} = \frac{1}{3}S_{MNIJ}.KE$

Mà $KE = \frac{1}{2}KH = \frac{1}{4}AA' = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. $S_{NMIJ} = MN.IJ = a.\frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$ (đvdt).

$V_{K.MNIJ} = \frac{1}{3}S_{MNIJ}.KE = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{6}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{a^3}{8}$ (đvtt).

$$\frac{V_{ABCKMN}}{V_{A'B'C'KMN}} = \frac{\frac{3a^3}{8} - \frac{a^3}{8}}{\frac{3a^3}{8} + \frac{a^3}{8}} = \frac{1}{2}$$

Cho khối tứ diện ABCD. Trên các cạnh BC, BD, AC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $BC = 4BM$, $DB = 2BN$, $AC = 3AP$. Mặt phẳng (MNP) chia khối tứ diện ABCD thành hai phần. Tính tỉ số thể tích giữa hai phần đó.

LỜI GIẢI

Gọi T là giao điểm của MN và CD; Q là giao điểm của PT với AD.

Vẽ DD' // BC với D' ∈ MT ta có DD' = BM.

$\Rightarrow \dfrac{TD}{TC}=\dfrac{DD'}{MC}=\dfrac{1}{3}$

Mà: $\dfrac{TD}{TC}=\dfrac{AP}{AC}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow AT \,//\, DP$

$\Rightarrow \dfrac{QD}{QA}=\dfrac{DP}{AT}=\dfrac{CP}{CA}=\dfrac{2}{3}.$

Nên: $\dfrac{V_{A.PQN}}{V_{A.CDN}}=\dfrac{AP}{AC}.\dfrac{AQ}{AD}.\dfrac{AN}{AN}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{5}=\dfrac{1}{5}$

$\Rightarrow V_{A.PQN}=\dfrac{1}{5}V_{A.CDN}\quad (1)$

Và $\dfrac{V_{C.PMN}}{V_{C.ABN}}=\dfrac{CP}{CA}.\dfrac{CM}{CB}.\dfrac{CN}{CN}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{1}\Rightarrow V_{C.PMN}=\dfrac{1}{2}V_{C.ABN}\quad (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra: $V_{ABMNQP}=\dfrac{7}{20}V_{ABCD}.$

Kết luận tỉ số cần tìm là $\dfrac{7}{13}$ hoặc $\dfrac{13}{7}$.

Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, với AB = 2AD = 2a, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), cạnh SC tạo với đáy một góc 45^0. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB, mặt phẳng (GCD) cắt SA, SB lần lượt tại P, Q. Tính thể tích khối chóp S.PQCD theo a.

LỜI GIẢI

$\begin{cases} G\in(SAB)\cap(GCD) \\ AB \,//\, CD \end{cases}\Rightarrow (SAB)\cap(GCD)=Gx\,(Gx \,//\, AB \,//\, CD)$

Gọi $Q=Gx\cap SB, P=Gx\cap SA$.

Trong tam giác SAB có:

$\dfrac{SQ}{SB}=\dfrac{SP}{SA}=\dfrac{SG}{SM}=\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{V_{S.PQC}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SP}{SA}.\dfrac{SQ}{SB}.\dfrac{SC}{SC}=\dfrac{4}{9}$

$\Rightarrow V_{S.PQC}=\dfrac{4}{9}V_{S.ABC}$

$\dfrac{V_{S.PCD}}{V_{S.ACD}}=\dfrac{SP}{SA}.\dfrac{SC}{SC}.\dfrac{SD}{SD}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow V_{S.PCD}=\dfrac{2}{3}V_{S.ACD}$

$V_{S.PQCD}=V_{S.PQC}+V_{S.PCD}=\dfrac{4}{9}V_{S.ABC}+\dfrac{2}{3}V_{S.ACD}=\dfrac{10}{9}V_{S.ABC}=\dfrac{5}{9}V_{S.ABCD}$

Ta có: $\left[\widehat{SC,(ABCD)}\right] = \widehat{SCA} = 45^0$.

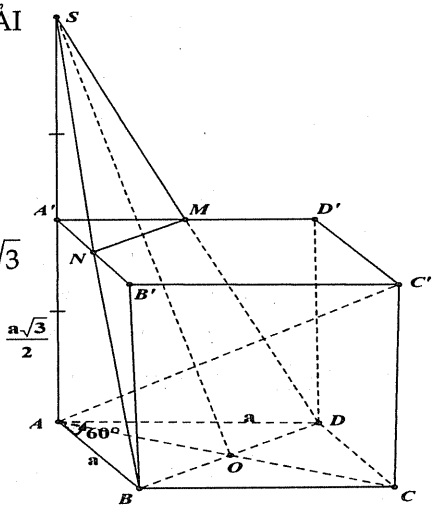
Vậy tam giác SAC vuông cân $AC = SA = a\sqrt{5}$

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{2a^3\sqrt{5}}{3} \Rightarrow V_{S.PQCD} = \frac{5}{9}V_{S.ABCD} = \frac{10a^3\sqrt{5}}{27}$

ĐỀ THI DỰ BỊ KHỐI A NĂM 2006

Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình thoi, $AB = AD = a$, $\widehat{BAD} = 60^0$, $AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh A'D' và A'B'. Chứng minh $AC' \perp mp(BDMN)$. Tính thể tích khối đa diện AA'BDMN, khối chóp A.BDMN.

LỜI GIẢI



Gọi O là tâm của ABCD, S là điểm đối xứng của A qua A' thì M và N lần lượt là trung điểm của SD và SB.

Theo đề bài: $AB = AD = a, \widehat{BAD} = 60^0$.

Nên ΔABD đều .Vậy: $OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AC = a\sqrt{3}$

$SA = 2AA' = a\sqrt{3}$; $CC' = AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \Delta SAO = \Delta ACC' \Rightarrow SO \perp AC'$.

Mặt khác $BD \perp (ACC'A') \Rightarrow BD \perp AC'$.

Vậy $AC' \perp (BDMN)$

Lập luận dẫn tới $V_{SABD} = \frac{1}{3}a^2\frac{\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3} = \frac{a^3}{4}$; $V_{SA'MN} = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{16}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{32}$

Vậy: $V_{AA'BDMN} = V_{SABD} - V_{SA'MN} = \frac{7a^3}{32}$.

DỰ BỊ KHỐI D NĂM 2006

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a và điểm K thuộc cạnh CC' sao cho $CK = \frac{2}{3}a$. Mặt phẳng (α) đi qua A, K và song song với BD, chia khối lập phương thành hai khối đa diện. Tính thể tích của hai khối đa diện đó.

LỜI GIẢI

Gọi $O = AC \cap BD, O' = A'C' \cap B'D'$

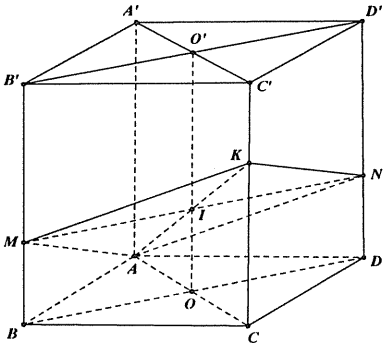
Ta có: $(ACC'A') \cap (BDD'B') = OO'$.

Gọi $I = AK \cap OO'$.

Mặt phẳng (α) chứa AK và // với BD, nên (α) đi qua I và cắt mp (BDD'B') theo giao tuyến MN (với MN // BD).

Trong tam giác ACK, có:

OI là đường trung bình nên $OI = \frac{1}{2}CK = \frac{a}{3}$.



Vì BDNM là hình chữ nhật nên $BM = DN = OI = \frac{a}{3}$.

Mặt phẳng (α) chia khối chóp thành 2 khối đó là:

$V_1 = V_{ABCDNKM}$ và $V_2 = V_{A'B'C'D'ANKM}$

Tính V_1:

$$V_1 = 2V_{ABCKM} = 2.\frac{1}{3}AB.S_{BCKM} = \frac{2}{3}AB.\frac{(BM+CK).BC}{2} = \frac{1}{3}.a\left(\frac{a}{3}+\frac{2a}{3}\right).a = \frac{a^3}{3}$$

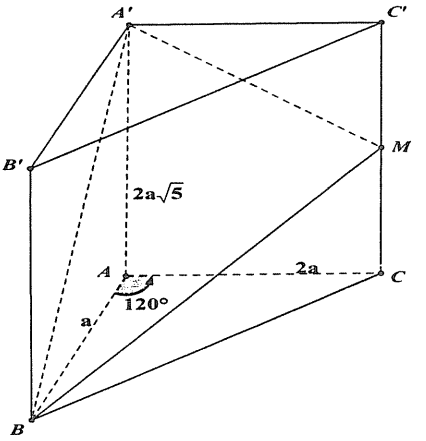
Tính V_2: $V_2 = V_{ABCD.A'B'C'D'} - V_1 = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{2a^3}{3}$.

TÍNH KHOẢNG CÁCH DỰA VÀO THỂ TÍCH

DỰ BỊ ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2007

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có $AB = a, AC = 2a, AA' = 2a\sqrt{5}, \widehat{BAC} = 120^0$. M là trung điểm của CC'. Chứng minh $MB \perp MA'$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (A'BM).

LỜI GIẢI



$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 120^0 = 7a^2$

$\Rightarrow BC = a\sqrt{7}$

$BA'^2 = AB^2 + AA'^2 = 21a^2 \Rightarrow BA' = a\sqrt{21}$.

$BM^2 = BC^2 + CM^2 = 12a^2 \Rightarrow BM = a\sqrt{12}$

$MA'^2 = A'C'^2 + MC'^2 = 9a^2 \Rightarrow MA' = 3a$

Ta có: $BA'^2 = MB^2 + MA'^2 = 21a^2$

$\Delta BMA'$ vuông tại M.suy ra $MB \perp MA'$

Trong tứ diện A.BMA' ta có:

$$V_{M.BAA'} = V_{C.BAA'} = V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}AA'.S_{ABC} = \frac{1}{3}.AA'.\frac{1}{2}.AB.AC.\sin 120^0$$

$$= \frac{1}{3}.2a\sqrt{5}.\frac{1}{2}.a.2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}$$

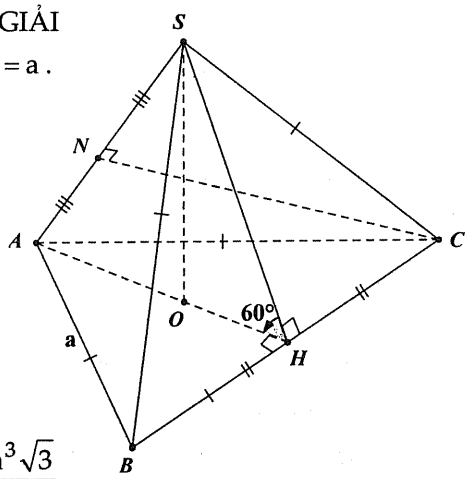
$$V_{A.BMA'} = V_{M.BAA'} \Leftrightarrow \frac{1}{3}d\left(A,(BMA')\right).S_{\Delta BMA'} = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}$$

$$\Rightarrow d\left(A,(BMA')\right) = \frac{a^3\sqrt{15}}{S_{\Delta BMA'}} = \frac{a^3\sqrt{15}}{3a^2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

DỰ BỊ ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2007

Cho hình chóp S.ABC có góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Hai tam giác ABC và SBC đều cạnh a. Tính theo a khoảng cách từ đỉnh B đến mặt phẳng (SAC).

LỜI GIẢI



Theo đề bài: $AB = BC = AB = SB = SC = a$.

Gọi H là trung điểm của BC.

$$\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(SAH)$$

$$\Rightarrow \left[\widehat{(SBC),(ABC)}\right] = \widehat{SHA} = 60^0$$

Vậy tam giác SAH là tam giác đều.

$$S_{\Delta SAH} = \frac{AH^2.\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$$

$$V_{S.ABC} = 2V_{S.ABH} = 2.\frac{1}{3}BH.S_{\Delta SAH} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$$

Tam giác CAS cân tại C. Gọi N trung điểm của SA.

$$CN = \sqrt{CS^2 - SN^2} = \frac{a\sqrt{13}}{4};\ S_{\Delta SCA} = \frac{1}{2}CN.SA = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{13}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{39}}{16}$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}d\left(B,(SAC)\right).S_{\Delta SAC} \Rightarrow d\left(B,(SAC)\right) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SAC}} = \frac{3a}{\sqrt{13}}.$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2011

Cho hình chóp S.ABC có tam giác ABC vuông tại B. Có $AB = 3a, BC = 4a$. Mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SB = 2a\sqrt{3}, \widehat{SBC} = 30^0$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

LỜI GIẢI

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên BC.

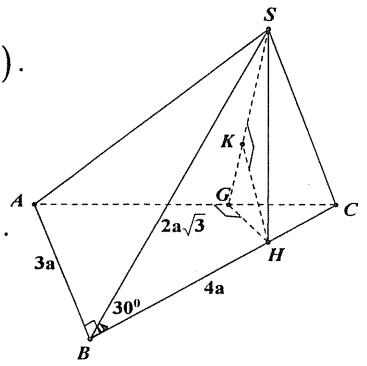
Do $mp(SBC) \perp mp(ABC)$ nên $SH \perp mp(ABC)$.

Trong ΔSBH vuông tại H có:

$SH = SB.\sin 30^0 = a\sqrt{3}, BH = SB.\cos 30^0 = 3a$.

ΔABC vuông $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = \frac{1}{2}.3a.4a = 6a^2$.

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.6a^2 = 2\sqrt{3}.a^3$



$AB \perp mp(SBC) \Rightarrow AB \perp SB$.

Trong ΔSAB có: $SA = \sqrt{AB^2 + SB^2} = \sqrt{9a^2 + 12a^2} = a\sqrt{21}$.

Trong ΔSHC có $SC = \sqrt{HS^2 + HC^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$

Ta có $AC^2 = SA^2 + SC^2 = 25a^2$ nên tam giác SAC vuông tại S.

$S_{\Delta SAC} = \frac{1}{2}SA.SC = a^2\sqrt{21}$.

$V_{S.ABC} = V_{B.SAC} = \frac{1}{3}d\left(B, mp(SAC)\right).S_{\Delta SAC}$

$\Rightarrow d\left(B, mp(SAC)\right) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SAC}} = \frac{6\sqrt{3}.a^3}{a^2.\sqrt{21}} = \frac{6a\sqrt{7}}{7}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy ABCD và đường thẳng SC hợp với mặt phẳng (SAB) một góc 30^0. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC. Tính thể tích khối chóp O.AMN và khoảng cách từ N đến mặt phẳng (AOM).

LỜI GIẢI

Ta có $BC \perp AB \wedge BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

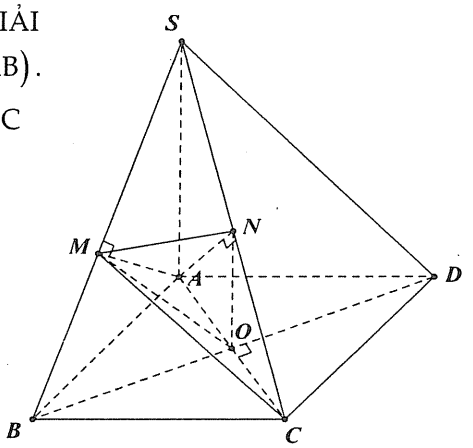
Vậy SB là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (SAB), có:

$\left(\widehat{SC, (SAB)}\right) = \left(\widehat{SC, SB}\right) = \widehat{CSB} = 30^0$.

Trong tam giác SBC vuông tại B có:

$\tan\widehat{CSB} = \frac{BC}{SB} \Rightarrow SB = a.\sqrt{3}$;

$SC = \sqrt{SB^2 + BC^2} = 2a$.



Trong tam giác SAB vuông tại A có: $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$;

$AM.SB = AB.AS \Leftrightarrow AM.a\sqrt{3} = a.a\sqrt{2} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{6}}{3}$;

$BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow MS = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Vì $AS = AC = a\sqrt{2}$ nên tam giác SAC vuông cân tại A.

Suy ra N trung điểm của SC, vì NO // SA suy ra $NO \perp (ABCD)$.

Vậy tam giác ANO vuông tại O.

$S_{\Delta ANO} = \frac{1}{2}.AO.NO = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.AC.\frac{1}{2}SA = \frac{1}{8}.a\sqrt{2}.a\sqrt{2} = \frac{a^2}{4}$.

Dễ dàng chứng minh $BO \perp (SAC) \Rightarrow d(B,(SAC)) = BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hai điểm B và M nằm trên đường thẳng có giao điểm với mp(SAC) tại S.

Theo công thức tính tỉ số khoảng cách ta có:

$\frac{d(M,(SAC))}{d(B,(SAC))} = \frac{MS}{BS} = \frac{2}{3} \Rightarrow d(M,(SAC)) = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Thể tích khối chóp M.AON:

$V_{M.AON} = \frac{1}{3}.S_{\Delta AON}.d(M,(SAC)) = \frac{1}{3}.\frac{a^2}{4}.\frac{a\sqrt{2}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Tam giác MBC vuông tại B có: $MC = \sqrt{BC^2 + BM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Ta có: $\begin{cases} AM \perp SB \\ AM \perp BC \left(BC \perp (SAB)\right) \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp MC$.

Vậy tam giác AMC vuông tại M có $S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2}AM.MC = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$

Vì O trung điểm của AC nên $S_{\Delta AMO} = \frac{1}{2}S_{\Delta AMC} = \frac{a^2\sqrt{2}}{6}$.

Ngoài ra Thể tích khối chóp M.AON: $V_{N.AMO} = \frac{1}{3}.S_{\Delta AMO}.d(N,(AMO))$

$\Rightarrow d(N,(AMO)) = \frac{3V_{N.AMO}}{S_{\Delta AMO}} = \frac{3.\frac{a^3\sqrt{2}}{36}}{\frac{a^2\sqrt{2}}{6}} = \frac{a}{2}$.

CHƯƠNG V: MẶT CẦU – MẶT TRỤ – MẶT NÓN

MẶT CẦU – MẶT CẦU NGOẠI TIẾP KHỐI ĐA DIỆN

I. MẶT CẦU

1. Định nghĩa:

Tập hợp các điểm M trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R gọi là mặt cầu tâm O, bán kính R, kí hiệu là:

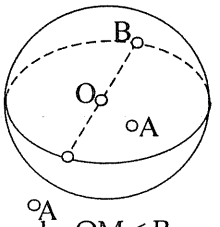
$S(O;R)$ hay $\{M / OM = R\}$.

2. Vị trí tương đối của một điểm đối với mặt cầu

Cho mặt cầu $S(O;R)$ và một điểm A bất kì, khi đó:

– Nếu $OA = R \Leftrightarrow A \in S(O;R)$. Khi đó OA gọi là bán kính mặt cầu.

Nếu OA và OB là hai bán kính sao cho $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$ thì đoạn thẳng AB gọi là 1 đường kính của mặt cầu.



– Nếu $OA < R \Leftrightarrow$ A nằm trong mặt cầu.

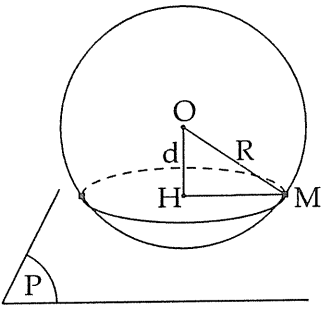
– Nếu $OA > R \Leftrightarrow$ A nằm ngoài mặt cầu.

$\Rightarrow$ Khối cầu $S(O;R)$ là tập hợp tất cả các điểm M sao cho $OM \le R$.

3. Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu

Cho mặt cầu $S(O;R)$ và một $mp(P)$.

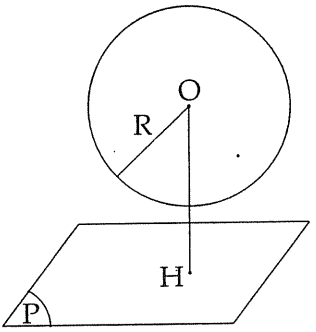
Gọi d là khoảng cách từ tâm O của mặt cầu đến $mp(P)$ và H là hình chiếu của O trên $mp(P) \Rightarrow d = OH$.



Hình a

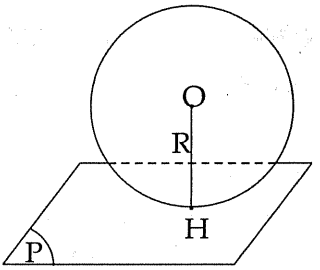
- Nếu $d < R \Leftrightarrow mp(P)$ cắt mặt cầu $S(O;R)$ theo giao tuyến là đường tròn nằm trên $mp(P)$ có tâm là H và bán kính: $r = HM = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{R^2 - OH^2}$ (hình a).

– Nếu $d > R \Leftrightarrow mp(P)$ không cắt mặt cầu $S(O;R)$ (hình b)



Hình b

– Nếu $d = R \Leftrightarrow mp(P)$ có một điểm chung duy nhất. Lúc này, ta gọi mặt cầu $S(O;R)$ tiếp xúc $mp(P)$. Do đó, điều kiện cần và đủ để $mp(P)$ tiếp xúc với mặt cầu $S(O;R)$ là $d(O, mp(P)) = R$ (hình c).



Hình c

4. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt cầu

Cho mặt cầu $S(O;R)$ và một đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của O trên đường thẳng Δ và $d = OH$ là khoảng cách từ tâm O của mặt cầu đến đường thẳng Δ. Khi đó:

– Nếu $d > R \Leftrightarrow \Delta$ không cắt mặt cầu $S(O;R)$.

– Nếu $d < R \Leftrightarrow \Delta$ cắt mặt cầu $S(O;R)$ tại hai điểm phân biệt.

– Nếu $d = R \Leftrightarrow \Delta$ và mặt cầu tiếp xúc nhau (tại một điểm duy nhất). Do đó: điều kiện cần và đủ để đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu là $d = d(O, \Delta) = R$.

Định lí: Nếu điểm A nằm ngoài mặt cầu $S(O;R)$ thì:

– Qua A có vô số tiếp tuyến với mặt cầu $S(O;R)$.

– Độ dài đoạn thẳng nối A với các tiếp điểm đều bằng nhau.

– Tập hợpc các điểm này là một đường tròn nằm trên mặt cầu $S(O;R)$.

II. MẶT CẦU NGOẠI TIẾP KHỐI ĐA DIỆN

Điều kiện cần và đủ để một hình chóp có mặt cầu ngoại tiếp là hình chóp đó có đáy là một đa giác nội tiếp. Điều kiện cần và đủ để một hình lăng trụ có mặt cầu ngoại tiếp là lăng trụ đó phải là lăng trụ đứng và có đáy là một đa giác nội tiếp.

1. Các khái niệm cơ bản

– **Trục của đa giác đáy**: là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đáy.

$\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên trục của đa giác thì cách đều các đỉnh của đa giác đó.

– **Đường trung trực của đoạn thẳng**: là đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.

$\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên đường trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

– **Mặt trung trực của đoạn thẳng**: là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.

$\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên mặt trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

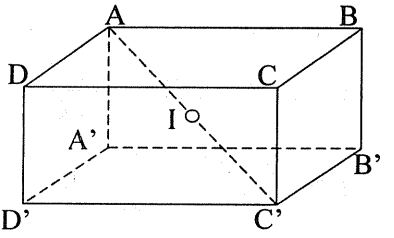
2. Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

– **Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp**: là điểm cách đều các đỉnh của hình chóp. Hay nói cách khác, nó chính là giao điểm I của trục *đường tròn ngoại tiếp mặt phẳng đáy* và *mặt phẳng trung trực của một cạnh bên* hình chóp.

– **Bán kính**: là khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

3. Cách xác định tâm và bán kính mặt cầu của một số hình đa diện cơ bản

a) Hình hộp chữ nhật, hình lập phương.



– **Tâm**: trùng với tâm đối xứng của hình hộp chữ nhật (hình lập phương).

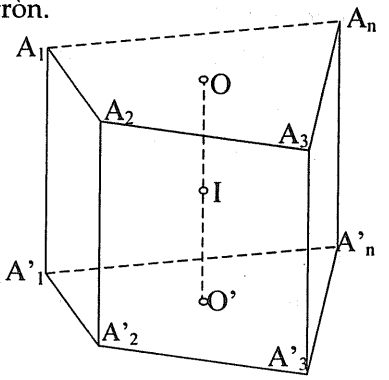
$\Rightarrow$ Tâm là I, là trung điểm của AC'.

– **Bán kính**: bằng nửa độ dài đường chéo hình hộp chữ nhật (hình lập phương).

$\Rightarrow$ Bán kính: $R = \dfrac{AC'}{2}$.

b) Hình lăng trụ đứng có đáy nội tiếp đường tròn.

Xét hình lăng trụ đứng $A_1A_2A_3...A_n.A_1'A_2'A_3'...A_n'$, trong đó có: 2 đáy $A_1A_2A_3...A_n$ và $A_1'A_2'A_3'...A_n'$ nội tiếp đường tròn (O) và (O'). Lúc đó, mặt cầu nội tiếp hình lăng trụ đứng có:



– **Tâm**: I với I là trung điểm của OO'.

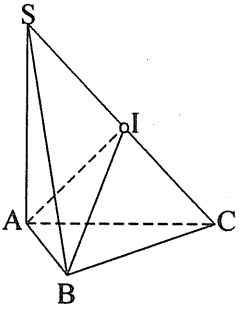
– **Bán kính**: $R = IA_1 = IA_2 = ... = IA_n'$.

c) Hình chóp có các đỉnh nhìn đoạn thẳng nối 2 đỉnh còn lại dưới 1 góc vuông.

Hình chóp S.ABC có $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = 90^0$.

– Tâm: I là trung điểm của SC.

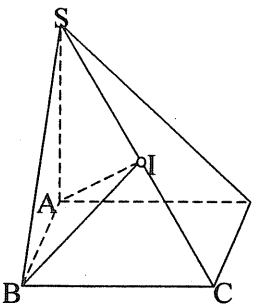
– Bán kính: $R = \dfrac{SC}{2} = IA = IB = IC$.



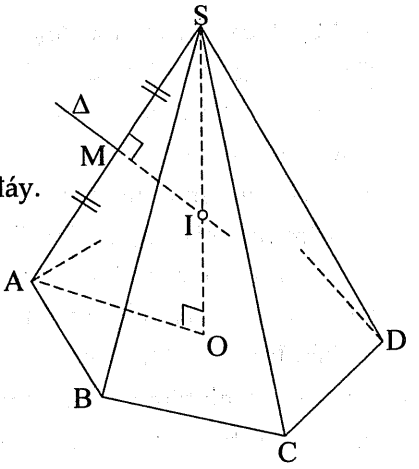
Hình chóp S.ABCD có:

$\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = \widehat{SDC} = 90^0$.

– Tâm: I là trung điểm của SC.



– Bán kính: $R = \frac{SC}{2} = IA = IB = IC = ID$.



d) Hình chóp đều.

Cho hình chóp đều S.ABC...

– Gọi O là tâm của đáy $\Rightarrow$ SO là trục của đáy.

– Trong mặt phẳng xác định bởi SO và một cạnh bên, chẳng hạn như $mp(SAO)$, ta vẽ đường trung trực của cạnh SA là Δ cắt SA tại M và cắt SO tại I

$\Rightarrow$ I là tâm của mặt cầu.

– Bán kính:

Ta có: $\Delta SMI \sim \Delta SOA \Rightarrow \frac{SM}{SO} = \frac{SI}{SA} \Rightarrow$ Bán kính là:

$$R = IS = \frac{SM.SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO} = IA = IB = IC = ...$$

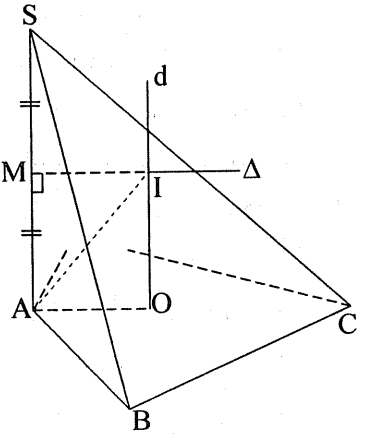
e) Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy.

Cho hình chóp S.ABC... có cạnh bên SA $\perp$ đáy $(ABC...)$ và đáy ABC... nội tiếp được trong đường tròn tâm O. Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC... được xác định như sau:

– Từ tâm O ngoại tiếp của đường tròn đáy, ta vẽ đường thẳng d vuông góc với $mp(ABC...)$ tại O.

– Trong $mp(d,SA)$, ta dựng đường trung trực Δ của cạnh SA, cắt SA tại M, cắt d tại I

$\Rightarrow$ I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và bán kính: $R = IA = IB = IC = IS = ...$



Tìm bán kính:

Ta có: MIOB là hình chữ nhật.

Xét ΔMAI vuông tại M có:

$$R = AI = \sqrt{MI^2 + MA^2} = \sqrt{AO^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2}.$$

f) Hình chóp khác.

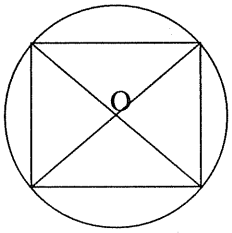
– Dựng trục Δ của đáy.

– Dựng mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên bất kì.

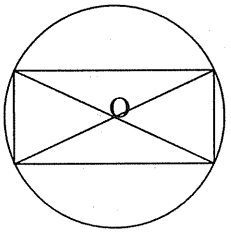
- $(\alpha) \cap \Delta = I \Rightarrow$ I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
- Bán kính: khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

g) Đường tròn ngoại tiếp một số đa giác thường gặp.

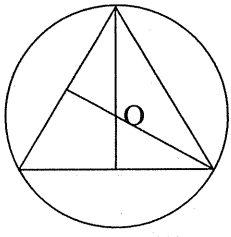
Khi xác định tâm mặt cầu, ta cần xác định trục của mặt phẳng đáy, đó chính là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đáy tại tâm O của đường tròn ngoại tiếp đáy. Do đó, việc xác định tâm đường tròn ngoại tiếp O là yếu tố rất quan trọng của bài toán.



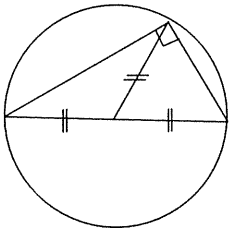
Hình vuông: O là giao điểm 2 đường chéo.



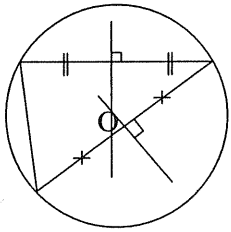
Hình chữ nhật: O là giao điểm của hai đường chéo.



Δ đều: O là giao điểm của 2 đường trung tuyến (trọng tâm).



Δ vuông: O là trung điểm của cạnh huyền.



Δ thường: O là giao điểm của hai đường trung trực của hai cạnh Δ.

4. Diện tích và thể tích mặt cầu
   - Diện tích mặt cầu: $\boxed{S = 4\pi R^2}$.

   Thể tích mặt cầu: $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$

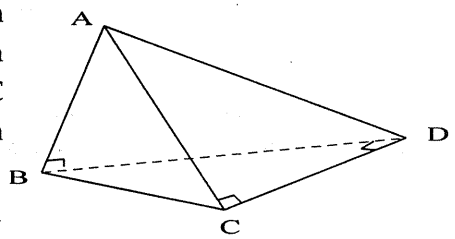
MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP VÀ CÁC VÍ DỤ CỤ THỂ XÁC ĐỊNH TÂM VÀ BÁN KÍNH HÌNH CẦU NGOẠI TIẾP KHỐI ĐA DIỆN

– **Trường hợp 1:** Nếu các đỉnh của khối đa diện đều nhìn đoạn thẳng AB dưới một góc 90^0 (trừ các đỉnh trùng với A hoặc B) thì nội tiếp trong mặt cầu (S) có tâm O là điểm đoạn thẳng AB và bán kính $R = \frac{AB}{2}$.

Thí dụ 1: Cho tứ diện ABCD có bốn mặt là tam giác vuông và cạnh lớn nhất có độ dài bằng 2a. Tính thể tích hình cầu ngoại tiếp của tứ giác đó.

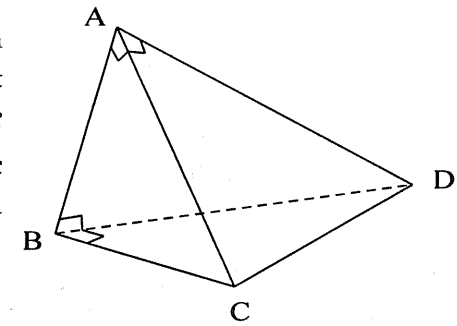
LỜI GIẢI

1. Nếu mỗi đỉnh của tứ diện là đỉnh của một góc vuông, chẳng hạn như ở hình 1. Khi đó hai mặt cầu đường kính BC và AD đều ngoại tiếp tứ diện. Khả năng này không xảy ra.



Hình 1

2. Nếu có một đỉnh là đỉnh chung của ba góc vuông thì theo tính chất của tứ diện vuông, mặt đối diện với đỉnh đó phải là tam giác nhọn. Điều này trái với giả thiết.
3. Như vậy phải tồn tại một đỉnh là đỉnh chung của hai góc vuông. Không mất tính tổng quát, giả sử $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = 90^0$. Khi đó các góc vuông còn lại được sắp xếp như ở hình 2. Nếu $\widehat{ABD} = 90^0$ thì do $CA \perp (ABD)$ nên $BD \perp (ABC)$, suy ra $\widehat{DBC} = 90^0$. Hai góc vuông còn lại phải có đỉnh là B.



Hình 2

Từ đó ở hai trường hợp trên, dễ thấy CD là cạnh lớn nhất. Các đỉnh A, B đều nhìn đoạn thẳng CD dưới một góc 90^0, nên mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là mặt cầu đường kính CD với bán kính $R = \frac{CD}{2} = a$. Suy ra $V_{cau} = \frac{4}{3}\pi a^3$.

– **Trường hợp 2:** Khi xác định tâm hình cầu ngoại tiếp của các khối đa diện có đáy (như khối chóp, khối cụt, lăng trụ...) mà không thỏa mãn trường hợp 1 thì phải dựng trục đường tròn ngoại tiếp đáy và mặt phẳng trung trực của cạnh bên. Tuy nhiên chúng ta không nên vội dựng mặt

phẳng trung trực mà tùy theo từng dạng bài tập để đưa cách xác định tâm hình cầu ngoại tiếp ngắn gọn nhất. Dưới đây chúng ta phân tích một số dạng bài tập thường gặp trong các kỳ thi vào đại học.

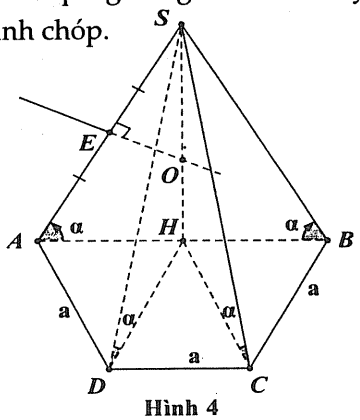
DẠNG 1: *Như đã biết, hình chóp đều, hình chóp có các cạnh bên bằng nhau, hình chóp có các cạnh bên nghiêng đều trên đáy luôn có đường cao là trục đường tròn ngoại tiếp đáy. Do đó chúng có mặt cầu ngoại tiếp. Vì trục đường tròn ngoại tiếp đáy đồng phẳng với bất kỳ cạnh bên nào nên chúng ta chỉ việc chọn cạnh bên thuận lợi nhất ở hình vẽ để trong mặt phẳng tạo bởi cạnh bên đó và đường cao, tâm hình cầu ngoại tiếp là giao của đường trung trực của cạnh bên đó với đường cao của hình chóp.*

Thí dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với đáy lớn $AB = 2a, BC = CD = DA = a$. Các cạnh bên của chóp nghiêng đều trên đáy góc α. Tính thể tích hình cầu ngoại tiếp của hình chóp.

Lời giải

Gọi H là trung điểm cạnh AB thì $HA = HB = HC = HD = a$, nên đường tròn (H;a) ngoại tiếp đáy.

Ta thấy SH là trục đường tròn ngoại tiếp đáy. Do đó trong mặt phẳng (SAH) đường trung trực của cạnh SA cắt SH tại O thì O là tâm hình cầu ngoại tiếp của hình chóp.



Hình 4

Trong trường hợp này O cũng chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB. Gọi R là bán kính hình cầu.

Ta thấy: $SA = SB = \dfrac{a}{\cos\alpha}$.

Từ đó dùng định lý sin đối với tam giác SAB.

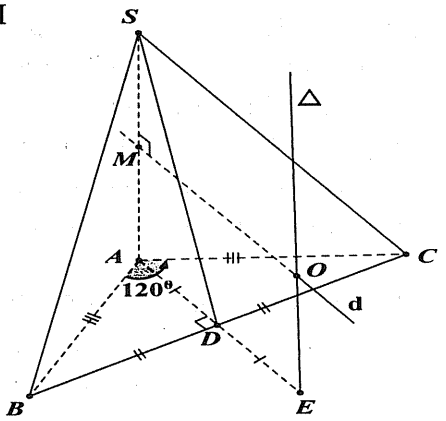
Ta có: $2R = \dfrac{a}{\sin\alpha\cos\alpha} \Leftrightarrow R = \dfrac{a}{\sin 2\alpha}$

Vậy $V_{cau} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4\pi}{3}\dfrac{a^3}{\sin^2 2\alpha}$.

DẠNG 2: *Xét hình chóp có một cạnh bên là d vuông góc với đáy và đáy có trục đường tròn ngoại tiếp là Δ. Khi đó Δ song song với d và chúng tạo thành mặt phẳng (P). Để xác định hình cầu ngoại tiếp của hình chóp, thì trong mp(P) tâm O của hình cầu là giao của đường trung trực của cạnh bên đó và Δ. Dễ dàng tính được bán kính R của hình cầu theo định lí Pitago hoặc tam giác đồng dạng.*

Thí dụ 4: Cho hình chóp S.ABC có $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^0$. Các mặt phẳng (SAB) ,(SAC) cùng vuông góc với đáy (ABC) , mặt phẳng (SBC) tạo với đáy góc α. Tính thể tích hình cầu ngoại tiếp của hìn chóp.

LỜI GIẢI



Gọi E là điểm đối xứng với A qua BC.

Vì $AB = AC = a$ và $\widehat{BAC} = 120^0$ nên đường tròn (E;a) ngoại tiếp đáy ABC.

Từ giả thiết có $SA \perp (ABC)$.

Suy ra đường thẳng Δ qua E, song song với SA là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Trong mp(P) chứa SA và Δ, tâm O hình cầu ngoại tiếp của hình chóp là giao đường trung trực của SA với Δ.

Gọi D là trung điểm cạnh BC thì $BC \perp (SAD)$.

$$\Rightarrow \alpha = \widehat{SDA} \Rightarrow SA = \frac{a}{2}\tan\alpha \Rightarrow OE = \frac{a}{4}\tan\alpha .$$

Do đó: $R^2 = OB^2 = OE^2 + EB^2 = \frac{a^2}{16}\tan^2\alpha + a^2 = \frac{a^2}{16}(\tan^2\alpha + 16)$.

Vậy: $V_{cau} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{4}\right)^3\left(\sqrt{\tan^2\alpha - 16}\right)^3 = \frac{\pi a^3}{48}\left(\tan^2\alpha + 16\right)^{\frac{3}{2}}$.

DẠNG 3: *Xét hình chóp với đáy có trục đường tròn ngoại tiếp là đường thẳng Δ, nhưng Δ không đồng phẳng với bất kỳ cạnh bên nào. Cũng đừng vội dựng mặt phẳng trung trực của một cạnh bên mà hãy bình tĩnh quan sát các mặt bên. Nếu xác định được trục đường tròn ngoại tiếp d của một mặt bên thì giao điểm của d với Δ chính là tâm hình cầu ngoại tiếp hình tròn phải tìm.*

Thí dụ 5. Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Gọi A_1, D_1 là tâm các mặt (BCD),(ABC). Tính thể tích hình cầu ngoại tiếp tứ diện D_1A_1CD.

LỜI GIẢI

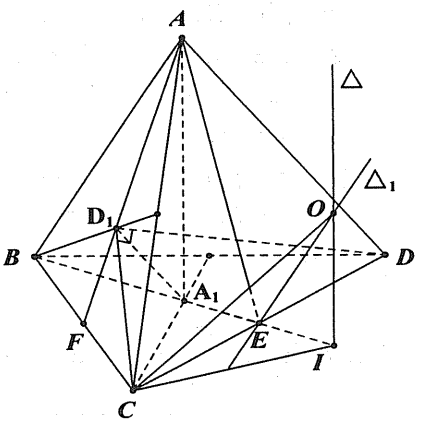
Gọi I là điểm đối xứng với A_1 qua CD, E là trung điểm của CD.

Xét hình chóp D_1A_1CD có đáy là tam giác A_1CD với $A_1C = A_1D = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{CA_1D} = 120^0$. Suy ra đường tròn $(I;\frac{a\sqrt{3}}{3})$ ngoại tiếp tam giác A_1CD.

Đường thẳng Δ qua I và song song với AA_1 là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác A_1CD và thuộc mặt phẳng (ABE).

Xét mặt bên (D_1CD) có: $\widehat{CD_1D} = 90^0$ và do đó $AB \perp CD_1$, $AB \perp DD_1$ nên $AB \perp (D_1CD)$.

Vậy đường thẳng Δ_1 qua E và song song với AB là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác D_1CD.



Do đó $\Delta_1 \cap \Delta = O$ là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện D_1A_1CD.

Ta thấy: $IO = EI \tan\widehat{OEI} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}\dfrac{AA_1}{BA_1} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

Suy ra $R^2 = OC^2 = IO^2 + IC^2 = \dfrac{a^2}{6} + \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $V_{cau} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi a^3$.

– **Trường hợp 3**: *Để xác định tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD ta có thể sử dụng thêm phương pháp hai mặt phẳng trung trực: Gọi $(P_1),(P_2)$ là hai mặt phẳng trung trực của một cặp cạnh đối diện, chẳng hạn AB và CD. Xác định giao tuyến Δ của $(P_1),(P_2)$. Trên đường thẳng Δ ta tìm điểm O để $OB = OC$ thì O là tâm hình cầu ngoại tiếp của tứ diện.*

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Cho tứ diện ABCD có DA = 5a và vuông góc với mp(ABC), tam giác ABC vuông tại B và AB = 3a , BC = 4a.

a) Xác định mặt cầu đi qua 4 điểm A, B, C, D.

b) Tính bán kính của mặt cầu nói trên. Tính diện tích và thể tích của mặt cầu.

LỜI GIẢI

a). Gọi H là trung điểm của AC $\Rightarrow OC = OD$ (1)

Gọi O là trung điểm của CD.

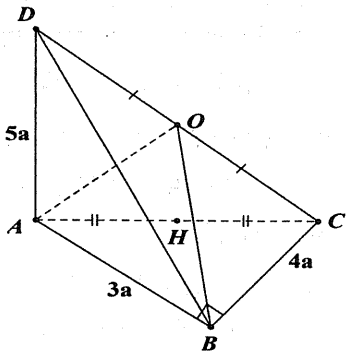
Trong ΔACD có OH là đường trung bình của tam giác nên OH // AD.

Mà $AD \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp (ABC)$ (2)

Vì tam giác ABC vuông tại B nên $HA = HB = HC$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra: OH là trục của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có $OA = OB = OC$ (4)

Từ (1) và (4) suy ra: bốn điểm A, B, C, D thuộc mặt cầu (S) tâm O bán kính $R = \frac{CD}{2}$.



b) Bán kính: $R = \frac{CD}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{AD^2 + AC^2}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{AD^2 + AB^2 + BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{25a^2 + 9a^2 + 16a^2} = \frac{5a\sqrt{2}}{2}.$$

$$S = 4\pi\left(\frac{5a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 50\pi a^2;$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{5a\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{125\sqrt{2}\pi a^3}{3}.$$

Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều , các cạnh bên bằng a và tạo với đáy một góc α .

a). Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Tính thể tích mặt cầu đó.

b). Tìm tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp S.ABC.

c). Tìm α để tâm mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp trùng nhau

LỜI GIẢI

Gọi O là tâm của tam giác đều ABC $\Rightarrow OA = OB = OC$.

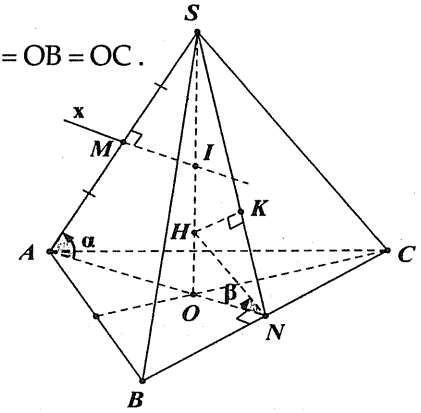
Mà $SA = SB = SC$.

Suy ra O là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) có $SO \perp (ABC)$.

SO là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Trong tam giác SAO dựng đường trung trực Mx của SA cắt SO tại I .

I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABC.



Bán kính: $R = IA = IB = IC = IS$

AO là hình chiếu vuông góc của SA trên mặt phẳng (ABC).

Nên góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SAO} = \alpha$.

Trong ΔSAO vuông tại O có:

$AO = SA.\cos\alpha = a.\cos\alpha$, $SO = SA.\sin\alpha = a.\sin\alpha$.

$$\Delta SMI \sim \Delta SOA(g.g) \Rightarrow \frac{SI}{SA} = \frac{SM}{SO} \Rightarrow SI = \frac{\frac{a}{2}.a}{a.\sin\alpha} = \frac{a}{2.\sin\alpha}.$$

b) Dễ dàng chứng minh $mp(SNO) \perp mp(SBC)$.

Gọi H là tâm đường tròn nội tiếp của hình chóp S.ABC, thì $I \in SO$, và HO là bán kính mặt cầu nội tiếp khối chóp.

Dựng $HK \perp SN (K \in SN) \Rightarrow HK \perp (SBC)$.

Ta có $HO = HK \Rightarrow \Delta HON = \Delta HKN$. Đặt $\widehat{HNO} = \widehat{HNK} = \beta$.

Trong tam giác HON vuông tại O có:

$$HO = ON.\tan\beta = \frac{1}{2}AO.\tan\beta = \frac{a}{2}.\cos\alpha.\tan\beta.$$

Trong ΔSON có $\tan\widehat{SNO} = \tan 2\beta = \frac{SO}{ON} = \frac{SO}{\frac{1}{2}AO} = 2\tan\alpha$.

$$\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = 2\tan\alpha \Leftrightarrow \tan\alpha.\tan^2\beta - \tan\beta - \tan\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan\beta = \dfrac{1-\sqrt{1+\tan^3\alpha}}{2.\tan\alpha} \quad \text{(Loại vì } \tan\alpha > 0) \\ \tan\beta = \dfrac{1+\sqrt{1+\tan^3\alpha}}{2.\tan\alpha} \quad \text{(Nhận)} \end{array}\right.$$

Kết luận: $r = HO = \frac{a}{2}.\cos\alpha.\frac{1+\sqrt{1+\tan^3\alpha}}{2.\tan\alpha}$.

Khi H và I trùng nhau thì:

$$R + r = SO \Leftrightarrow \frac{a}{2.\sin\alpha} + \frac{a}{2}.\cos\alpha.\frac{1+\sqrt{1+\tan^3\alpha}}{2.\tan\alpha} = a.\sin\alpha$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos^2\alpha.\sqrt{1+\tan^3\alpha} = 2\sin^2\alpha.$$

Chia 2 vế cho $\cos^2\alpha$ ta được:

$$1 + \tan^2\alpha + \sqrt{1+\tan^3\alpha} = 2\tan^2\alpha \Leftrightarrow \sqrt{1+\tan^3\alpha} = \tan^2\alpha - 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \tan^3\alpha = (\tan^2\alpha - 1)^2$$

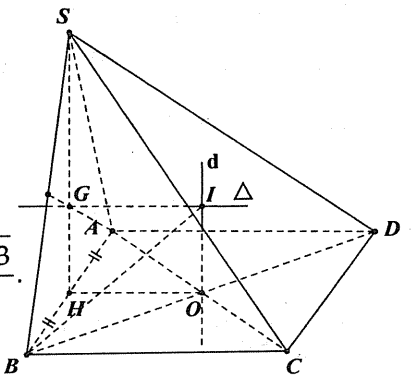
Điều kiện $\tan^2\alpha - 1 > 0$:

$$\Leftrightarrow \tan^4\alpha - \tan^3\alpha - 2\tan^2\alpha = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan\alpha = -1 \\ \tan\alpha = 0 \quad \text{(Loại)} \\ \tan\alpha = 2 \quad \text{(Nhận)} \end{array}\right.$$

Kết luận: khi $\alpha = \arctan 2$ thì tâm mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp hình chóp trùng nhau.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy ABCD. Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD và tính thể tích, mặt cầu đó.

LỜI GIẢI



Gọi O là tâm hình vuông ABCD, H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABCD).

Ta có $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow H \in AB$.

Mặt khác ΔSAB đều nên H là trung điểm của AB.

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.dt(ABCD) = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Từ O kẻ đường thẳng (d) vuông góc với (ABCD), lúc đó (d) là trục đường tròn ngoại tiếp ABCD, suy ra $d \,//\, SH$.

Trong tam giác ASB: gọi G là trọng tâm của tam giác ASB suy ra G là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔASB.

Từ G kẻ đường thẳng $\Delta \perp (SAB) \Rightarrow \Delta \,//\, HO$

$\Rightarrow (\Delta)$ là trục đường tròn ngoại tiếp ΔASB.

Trong mặt phẳng $(SHO) \equiv (d;SH)$ gọi $I = (d) \cap (\Delta)$

$\Rightarrow$ I cách đều S, A, B, C, D hay I chính là tâm mặt cầu cần tìm.

Bán kính mặt cầu:

$$R = IB = \sqrt{IH^2 + HB^2} = \sqrt{HG^2 + HO^2 + HB^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{\frac{7}{12}}$$

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a.

a) Xác định mặt cầu đi qua 5 điểm A, B, C, D, S.

b) Tính bán kính của mặt cầu nói trên. Tính diện tích và thể tích của mặt cầu.

LỜI GIẢI

a). Gọi O là tâm hình vuông ABCD.

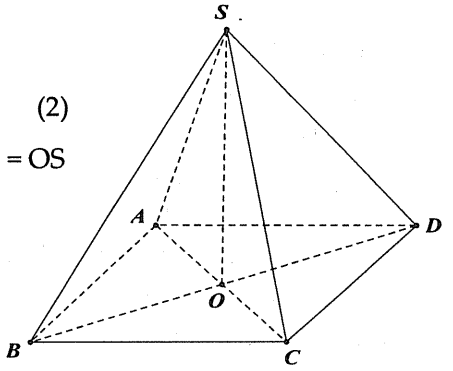
Suy ra $OA = OB = OC = OD$ (1)

Ta có: $\Delta SAC = \Delta ABC(c.c.c) \Rightarrow OS = OB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $OA = OB = OC = OD = OS$

Kết luận: 5 điểm A, B, C, D, S thuộc mặt cầu (S) có tâm O và bán kính:

$R = OB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



b). Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\pi a^2$

c). Thể tích khối cầu : $V = \dfrac{a^3\pi\sqrt{2}}{3}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA = a và SA vuông góc với đáy.

a). Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

b). Chứng minh trung điểm I của cạnh SC là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

LỜI GIẢI

a). Tính thể tích khối chóp S.ABCD :

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.a.a^2 = \dfrac{a^3}{3}$

b). Trong Δ SAC vuông, có AI là trung tuyến ứng với cạnh huyền SC nên:

$AI = IS = IC$ (1)

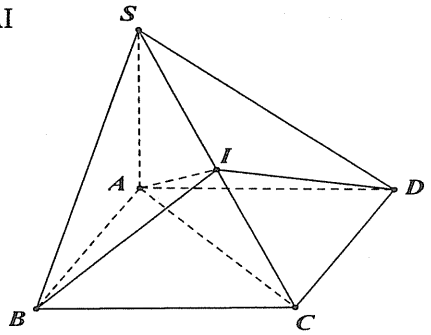
$BC \perp AB$ và $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp SB$

$\Rightarrow \Delta$ SBC vuông tại B, IB là trung tuyến ứng với cạnh huyền SC nên:

$IB = IS = IC$ (2).

Tương tự, ta cũng có: $ID = IS = IC$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có: I cách đều tất cả các đỉnh hình chóp nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp.



Cho hình chóp S.ABC có 4 đỉnh đều nằm trên một mặt cầu, SA = a, SB = b, SC = c và ba cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc.

a). Xác định tâm I và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện S.ABC. Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu được tạo nên bởi mặt cầu đó .

b). Chứng minh ba điểm S, I, G thẳng hàng với G là trọng tâm của ΔABC.

LỜI GIẢI

a). Xác định tâm I và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện S.ABC

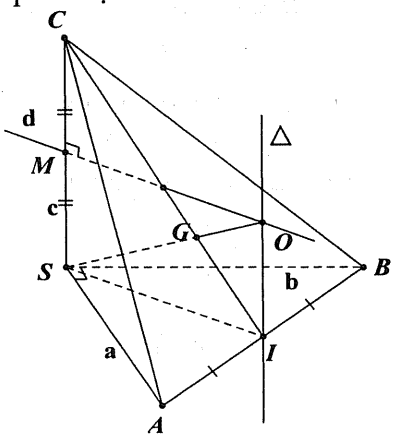
* Gọi I là trung điểm AB .

Ta có $IA = IB = IS$ (vì ΔSAB vuông tại S).

Dựng đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (SAB) tại I, thì Δ là trục của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABC.

Vì SC và Δ cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC), nên chúng thuộc cùng một mặt phẳng.

Trong mặt phẳng (SC, Δ) dựng đường trung trực của SC cắt Δ tại O. O chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện S.ABC, bán kính mặt cầu $R = OS = OA = OB = OC$.



Hình 1

Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu được tạo nên bởi mặt cầu trên

$$R = OA = \sqrt{OI^2 + AI^2} = \sqrt{\left(\frac{SC}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}}.$$

$$S = S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}}\right)^2 = \pi(a^2 + b^2 + c^2)$$

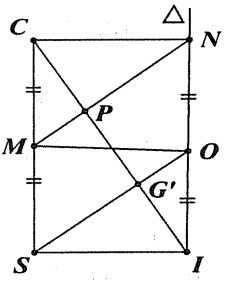
$$V = V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi(a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

b). Chứng minh ba điểm S , I , G thẳng hàng

Vẽ lại mặt (SC, Δ) như hình 2

Gọi G' giao điểm của CI và SO.

P giao điểm của CI và MN, thì SO và MN chia đoạn CI thành ba phần bằng nhau.



Hình 2

Suy ra $CG' = \frac{2}{3}CI$ (1)

Mà CI là đường trung tuyến của tam giác ABC, nên $CG = \frac{2}{3}CI$ (2)

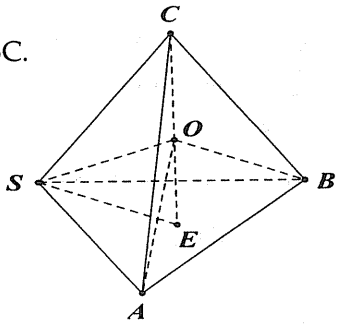
Từ (1) và (2) suy ra: $G' \equiv G$. Kết luận ba điểm S, I, G thẳng hàng.

Cho hình chóp S.ABC có các mặt SBC và ABC là các tam giác đều cạnh a, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích và diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

LỜI GIẢI

Gọi R là bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho. Ta tính R theo a.

Cách 1:



Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

Dựng $CE \perp mp(SAB)(E \in (SAB))$.

Do $CS = CA = CB$ nên E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB, CE là trục của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABC.

Suy ra $O \in CE$.

Áp dụng Pitago cho tam giác SEO có:

$$SO^2 = SE^2 + EO^2 \Rightarrow R^2 = SE^2 + (CE - R)^2$$

$$\Rightarrow R^2 = SE^2 + CE^2 - 2CE.R + R^2 \Rightarrow R = \frac{SE^2 + CE^2}{2CE} = \frac{SC^2}{2CE} = \frac{a^2}{2CE}$$

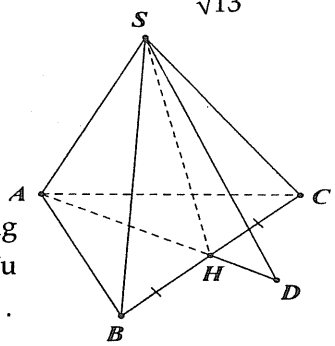
Xét tam giác SAB có:

$$\cos\hat{B} = \frac{SB^2 + AB^2 - SA^2}{2.SB.BA} = \frac{a^2 + a^2 - \frac{3a^2}{4}}{2.a.a} = \frac{5}{8} \Rightarrow \sin\hat{B} = \frac{\sqrt{39}}{8}.$$

Áp dụng hàm số sin ta có $SE = \frac{SA}{2\sin B} = \frac{2a}{\sqrt{13}}$.

Suy ra: $CE = \sqrt{SC^2 - SE^2} = \sqrt{a^2 - \frac{4}{13}a^2} = \frac{3a}{\sqrt{13}}$. Do đó $R = \frac{a^2}{2.\frac{3a}{\sqrt{13}}} = \frac{\sqrt{13}a}{6}$.

Cách 2:



Gọi H trung điểm của BC.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(SAH)$.

Suy ra mặt phẳng (SAH) là mặt phẳng trung trực của đoạn BC. Gọi O là tam mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABC ta có $O \in (SAH)$.

Kéo dài AH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D.

Ta có đường tròn ngoại tiếp tam giác SAD là đường tròn lớn cảu mặt cầu. áp dụng định lý hàm sin cho tam giác SAD.

Ta có: $R = \dfrac{SD}{2\sin\widehat{SAD}}(1)$.

Do các tam giác ABC và SBC đều cạnh a nên $AH = SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra tam giác SAH đều và $\widehat{SAD} = 60^0$.

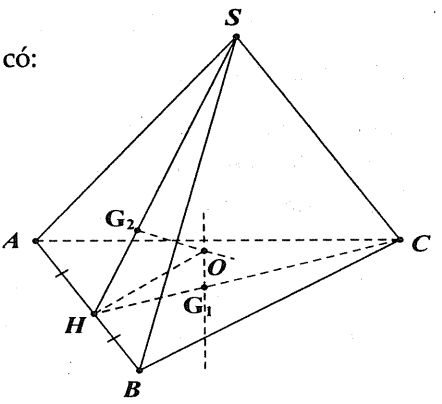
Áp dụng định lý cosin cho tam giác SAD có:

$SD^2 = SA^2 + AD^2 - 2SA.AD.\cos 60^0$.

Do AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $AD = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Từ đó suy ra $SD = \dfrac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$.

Thay vào (1) ta có $R = \dfrac{\sqrt{13}a}{6}$.



Cách 3:

Gọi G_1, G_2 tương ứng là tâm ΔABC và SBC.

Hai đường thẳng qua G_1, G_2 và vuông góc với (ABC) và (SBC) cắt nhau tại O. O là tam mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Vì: $HG_1 = HG_2 = G_1G_2 = \dfrac{1}{3}HA = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ nên tam giác HG_1G_2 đều.

Do đó $OH = \dfrac{HG_1}{\cos 30^0} = \dfrac{a}{3}$.

Suy ra $R = OB = \sqrt{OH^2 + HB^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{6}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O, $AB = 2a$, $AD = 2a\sqrt{3}$, các cạnh bên bằng nhau và bằng 3a. Gọi M trung điểm của OC. Tính thể tích khối chóp S.ABMD và diện tích của hình cầu ngoại tiếp tứ diện SOCD.

LỜI GIẢI

Ta có: $SA = SC \Rightarrow \Delta SAC$ cân tại S ,nên $SO \perp AC$ (1)

Ta có: $SB = SD \Rightarrow \Delta SBD$ cân tại S ,nên $SO \perp BD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Vì $SA = SB = SC = SD \Rightarrow OA = OB = OC = OD$

Suy ra ABCD là hình chữ nhật.

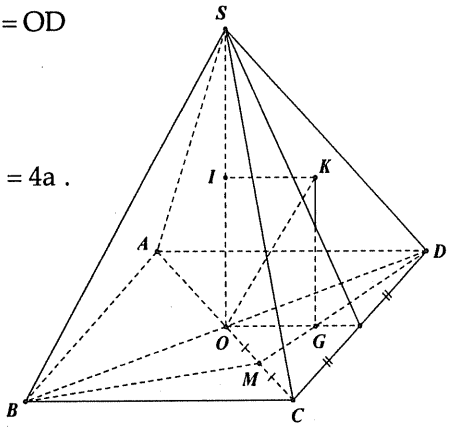
$\Rightarrow S_{ABCD} = AB.AD = 4a^2\sqrt{3}$.

Ta có: $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{4a^2 + 12a^2} = 4a$.

$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{9a^2 - 4a^2} = a\sqrt{5}$.

Vậy: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \frac{4a^3\sqrt{15}}{3}$.

Do đó $V_{S.ABMD} = \frac{3}{4}V_{S.ABCD} = a^3\sqrt{15}$



Gọi G là trọng tâm ΔOCD.

Vì ΔOCD đều nên G cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOCD.

Dựng đường thẳng d qua G và song song với SO thì $d \perp (ABCD)$ nên d là trục của ΔOCD.

Trong mp (SOG) dựng đường trung trực của SO, cắt d tại K cắt SO tại I.

Ta có: OI là đường trung trực của $SO \Rightarrow KO = KS$

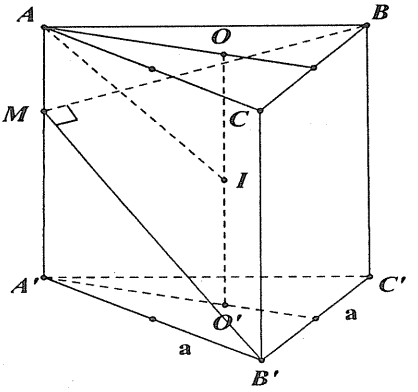
Mà $KO = KC = KD$ nên K là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SOCD.

Ta có: $GO = \frac{CD}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}; R = KO = \sqrt{OI^2 + OG^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4} + \frac{4a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{31}}{\sqrt{12}}$.

Do đó: $S = 4\pi R^2 = 4\pi.\frac{31a^2}{12} = \frac{31\pi a^2}{3}$.

Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có cạnh đáy bằng a. M là điểm trên cạnh AA_1 sao cho $AA_1 = 3AM$. Biết $\widehat{BMC_1} = 90^0$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$.

LỜI GIẢI



Đặt $AA_1 = x$ suy ra $AM = \frac{x}{3}; A_1M = \frac{2x}{3}$

Tam giác MBC_1 vuông tại M

$\Rightarrow MB^2 + MC_1^2 = BC_1^2$

$\frac{x^2}{9} + a^2 + \frac{4x^2}{9} + a^2 = x^2 + a^2$

$\Leftrightarrow \frac{4x^2}{9} = a^2 \Leftrightarrow x = \frac{3a}{2}$

Gọi O, O_1 là tâm của đáy ABC và $A_1B_1C_1$, I là trung điểm của OO_1.

Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.

$$R^2 = AO^2 + OI^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{43a^2}{48} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{43}}{4\sqrt{3}}a$$

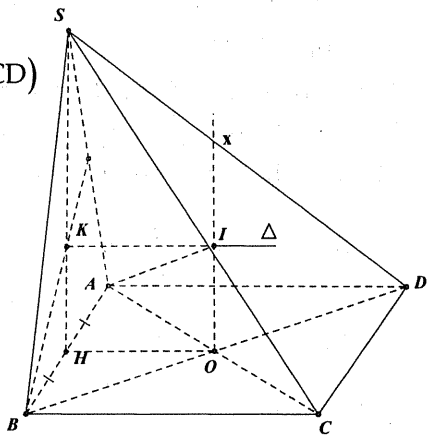
Vậy: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{43}}{4\sqrt{3}}a\right)^3 = \frac{43}{144}\pi\sqrt{\frac{43}{3}}a^3$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.
Tính thể tích khối chóp S.ABCD.
Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện S.ABC.

LỜI GIẢI

Gọi H trung điểm của AB, SH ⊥ AB (SAB tam giác đều)

$$\begin{cases}(SAB) \perp (ABCD)\\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp mp(ABCD)\\ SH \perp AB, SH \subset (SAB)\end{cases}$$



$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$

Gọi O: tâm hình vuông ABCD, thì O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Kẻ O x ⊥ (ABCD), thì Ox là trục ΔABC và Ox // SH.

Gọi K là trọng tâm ΔSAB.

Trong mp (SH, Ox); qua K, kẻ đường thẳng Δ // HO cắt Ox tại I.

Ta có: $OH \perp (SAB) \Rightarrow KI \perp (SAB)$. Vậy IK là trục ΔSAB.

Nên ta có IS = IA = IB & IA = IB = IC, suy ra IA = IB = IC = IS.

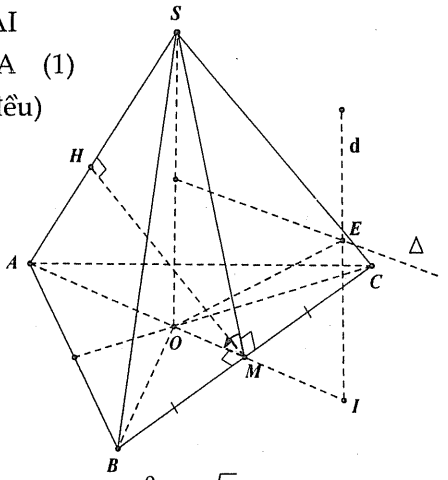
Kết luận I: tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC.

OHKI là hình chữ nhật, nên $OI = HK = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Bán kính mặt cầu $R = IA = \sqrt{OI^2 + OA^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$.

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60^0 và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\frac{3a}{2\sqrt{7}}$. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC và diện tích mặt cầu đi qua bốn điểm S, O, B, C với O là tâm của đáy ABC.

LỜI GIẢI



Gọi M là trung điểm của BC.Kẻ $MH \perp SA$ (1)

$BC \perp AM$, $BC \perp SM$ (tính chất tam giác đều)

$\Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp MH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra" MH là đường vuông góc chung của SA và BC.

Vậy: $MH = \dfrac{3a}{2\sqrt{7}}$

Theo chứng minh trên:

$\left[\widehat{SBC,(ABC)}\right] = \widehat{SMA} = 60^0$.

Đặt $OM = x$ thì $AO = 2x$, $AM = 3x$, $SO = OM.\tan 60^0 = x\sqrt{3}$.

Trong tam giác vuông SOA: $SA = \sqrt{SO^2 + AO^2} = x\sqrt{7}$

Trong tam giác SAM: $SO.AM = MH.SA \Leftrightarrow x\sqrt{3}.3x = \dfrac{3a}{2\sqrt{7}}.x\sqrt{7} \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$

$\Rightarrow SO = \dfrac{a}{2}, AB = \dfrac{2AM}{\sqrt{3}} = \dfrac{2.3x}{\sqrt{3}} = a$; $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC.

Kẻ đt d đi qua I vuông góc với (ABC).

Ta có: d//SO. Trong mặt phẳng (SOI) kẻ trung trực của SO cắt d tại E.

Khi đó E là tâm mặt cầu.

Ta có: $EI = \dfrac{1}{2}SO = \dfrac{a}{4}, OI = \dfrac{BC}{2\sin\widehat{BOC}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

Bán kính mặt cầu $R = OE = \sqrt{EI^2 + IO^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{16} + \dfrac{a^2}{3}} = a\sqrt{\dfrac{19}{48}}$

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = \dfrac{19\pi a^2}{12}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABCD) bằng 60^0. Gọi H là trung điểm của AB. Biết mặt bên (SAB) là tam giác cân tại đỉnh S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và xác định tâm bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.AHC.

LỜI GIẢI

Ta có: $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Kẻ HM vuông góc với AC thì góc tạo bởi (SAC) và (ABCD) là $\widehat{SMH} = 60^0$.

Có $HM = AH.\sin\widehat{HAM} = AH.\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{a}{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$, $SH = HM\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{a^3}{3}$$

Gọi J , r lần lượt là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AHC có:

$$r = \frac{AH.HC.AC}{4S_{\Delta AHC}} = \frac{AH.HC.AC}{2S_{\Delta ABC}} = \frac{3a\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$$

Kẻ đường thẳng Δ qua J và Δ // SH. Khi đó tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.AHC là giao điểm của đường trung trực đoạn SH và Δ trong mặt phẳng (SHJ).

Ta có: $IH = \sqrt{IJ^2 + JH^2} = \sqrt{\dfrac{SH^2}{4} + r^2}$. Suy ra bán kính mặt cầu là $R = a\sqrt{\dfrac{31}{32}}$.

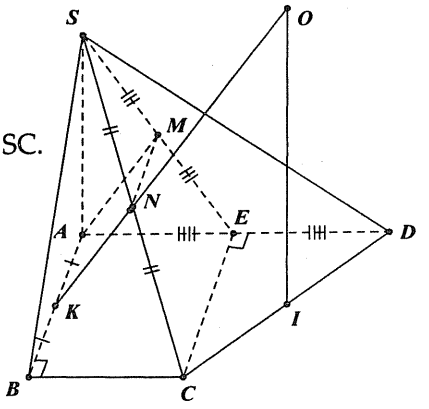
Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B biết AB = BC = a; AD = 2a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABCD) và SA= a. Gọi E là trung điểm của AD. Tính thể tích khối chóp S.CDE và tìm tâm, bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.CDE.

LỜI GIẢI

Thể tích khối chóp S.CDE :

$$V_{S.CDE} = \frac{1}{3}.SA.S_{\Delta CDE} = \frac{1}{3}.SA.\frac{1}{2}.EC.ED$$

$$= \frac{1}{6}a.a.a = \frac{a^3}{6}$$



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SE và SC.

ΔSAF cân tại A nên $AM \perp SE$ (1)

$$\left.\begin{array}{l} AB \perp (SAD) \\ MN // AB \end{array}\right\} \Rightarrow MN \perp (SAD)$$

$\Rightarrow MN \perp SE$ (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow SE \perp mp(ABNM)$.

Suy ra mặt phẳng (ABNM) là mặt phẳng trung trực của SE .

Vậy tâm O của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SCDE là giao điểm của mặt phẳng (ABMN) và trục đường tròn ngoại tiếp đáy CDE. Gọi Δ là đường thẳng qua I là trung điểm của CD và song song với SA. Gọi K là trung điểm của AB thì KN //AM. KN và Δ đồng phẳng, suy ra $KN \cap \Delta = O$ là điểm cần tìm.

Tam giác OIK vuông cân nên: $OI = IK = \dfrac{BC + AD}{2} = \dfrac{3a}{2}$;

$CD = a\sqrt{2}; IC = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

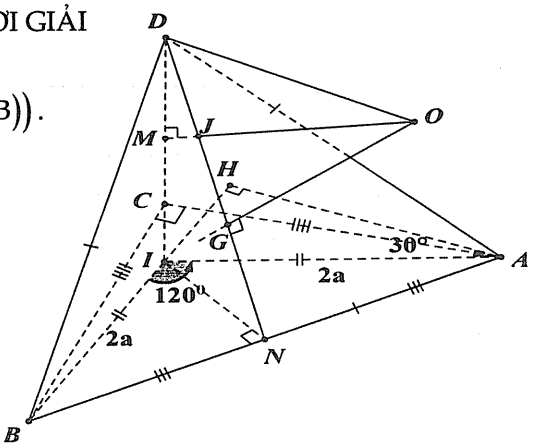
Ta có $OC^2 = OI^2 + IC^2 = \dfrac{9a^2}{4} + \dfrac{2a^2}{4} = \dfrac{11a^2}{4} \Rightarrow R = OC = \dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.

Cho tam giác IAB có $IA = IB = 2a$, $\widehat{AIB} = 120^0$. Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (AIB) tại I, lấy hai điểm C và D cùng phía với I sao cho tam giác ABC vuông và tam giác ABD đều.

a). Tính thể tích và diện tích toàn phần của tứ diện .

b). Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ điện ABCD. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

LỜI GIẢI



Dựng $AH \perp BI$ tại H, có:

$AH \perp CD\left(CD \perp (AIB), AH \subset (AIB)\right)$.

Suy ra $AH \perp mp(BCD)$

Thể tích khối tứ diện ABCD:

$V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.AH.S_{\Delta BCD}$

Trong ΔHAI vuông tại H có:

$AH = AI.\cos 30^0 = 2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Áp dụng định lý cosin cho tam giác AIB có

$AB^2 = IA^2 + IB^2 - 2.IA.IB.\cos 120^0 = 4a^2 + 4a^2 - 2.4a.4a.\cos 120^0 = 12a^2$

$\Rightarrow AB = 2a\sqrt{3}$

Ta có: $\left.\begin{array}{l} CI \perp (IAB) \\ IA = IB \end{array}\right\} \Rightarrow CA = CB = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = a\sqrt{6}$.

Trong ΔBCI vuông tại I có $CI = \sqrt{BC^2 - IB^2} = \sqrt{6a^2 - 4a^2} = a\sqrt{2}$.

Trong ΔBDI vuông tại I có:

$DI = \sqrt{BD^2 - IB^2} = \sqrt{12a^2 - 4a^2} = 2a\sqrt{2}$ (Vì BD = AB)

Do đó: $CD = DI - CI = 2a\sqrt{2} - a\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

$S_{\Delta BCD} = \dfrac{1}{2}.BI.CD = \dfrac{1}{2}.2a.a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$.

Thể tích khối tứ diện ABCD: $V_{ABCD}=\frac{1}{3}.AH.S_{\Delta BCD}=\frac{1}{3}.a\sqrt{3}.a^2.\sqrt{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Diện tích toàn phần của tứ diện ABCD:

$S_{tp}=2S_{\Delta BCD}+S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ABD}\left(do\,\Delta BCD=\Delta ACD\right)$.

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.CA.CB=\frac{1}{2}.a\sqrt{6}.a\sqrt{6}=3a^2$.

$S_{\Delta ABD}=\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}=\frac{12a^2.\sqrt{3}}{4}=3a^2\sqrt{3}$.

Vậy $S_{tp}=2a^2\sqrt{2}+3a^2+3a^2\sqrt{3}=\left(2\sqrt{2}+3+3\sqrt{3}\right)a^2$.

Gọi N trung điểm của AB, G trọng tâm của tam giác ABD vì ABD đều.

Suy ra G cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.

Dựng $Gx\perp(ABD)$ thì Gx là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔABD.

Mà: $\begin{cases}AB\perp Gx\\AB\perp GN\end{cases}\Rightarrow Gx\subset mp(NDI)\left(G\in(NDI)\perp AB\right)$.

Do đó Gx và CD cùng thuộc mặt phẳng (NDI) suy ra $Gx\cap My=O$.

Trong đó My là đường trung trực của CD trong mặt phẳng (NDI).

Vậy suy ra $OA=OB=OC=OD$.

Kết luận O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Gọi $J=OM\cap DG\Rightarrow\Delta MJD\sim\Delta GJO\Rightarrow\frac{MD}{GO}=\frac{MJ}{GJ}\Rightarrow GO=\frac{MD.GJ}{MJ}$.

Mà: $MD=\frac{1}{2}CD=\frac{a\sqrt{2}}{2}$,

Xét ΔNDI có: MJ // IN nên : $\frac{MJ}{IN}=\frac{DM}{DI}\Rightarrow MJ=\frac{DM.IN}{DI}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.a}{2a\sqrt{2}}=\frac{a}{4}$

$GJ=GD-DJ=\frac{2}{3}.\frac{2a\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{16}}=2a-\frac{3a}{4}=\frac{5a}{4}$.

Do đó: $OG=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{5a}{4}}{\frac{a}{4}}=\frac{5a\sqrt{2}}{2}$. Bán kính R mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

$R=OD=\sqrt{OG^2+GD^2}=\sqrt{\frac{25a^2}{2}+4a^2}=\frac{a\sqrt{66}}{2}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là $S=4\pi R^2=4\pi\frac{33a^2}{2}=66\pi a^2$.

Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' nội tiếp trong một mặt cầu tâm O bán kính R. Xác định chiều cao của lăng trụ đã cho để thể tích V của nó đạt giá trị lớn nhất.

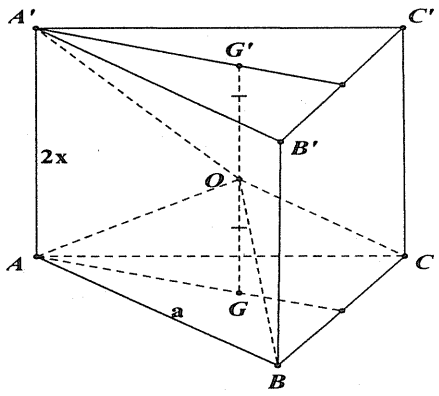
LỜI GIẢI

Gọi G và G' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và A'B'C'.

Gọi O là trung điểm của GG' thì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình trụ đã cho.

Thật vậy, vì: hai tam giác ABC và A'B'C' đều nên G và G' là tâm đường tròn ngoại tiếp của hai tam giác.

Suy ra GG' là trục của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp ABC.A'B'C'.



Đặt $AB = a, AA' = 2x$.

Xét tam giác vuông OAH ta có:

$$OA^2 = OH^2 + HA^2 \Rightarrow R^2 = x^2 + \frac{a^2}{3} \Rightarrow a^2 = 3\left(R^2 - x^2\right)$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = 2x.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.x\left(R^2 - x^2\right).$$

Xét hàm số $f(x) = x\left(R^2 - x^2\right)$ (Với $0 < x < R$)

Ta có $f'(x) = R^2 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow R^2 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{R}{\sqrt{3}}$	R
y'	+	||	-
f(x)			

Từ bảng biến thiên suy ra f(x) đạt giá trị lớn nhất khi $x = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

Khi đó $AA' = 2x = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Vậy: Để thể tích của khối lăng trụ lớn nhất thì chiều cao của khối lăng trụ là:

$AA' = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Cho hình chóp S.ABC có ABC là tam giác vuông cân tại A có AB = AC = a và SH vuông góc với mặt phẳng (ABC) với H là điểm đối xứng của B qua A biết SH = 3a.

a). Tính thể tích khối chóp S.ABC

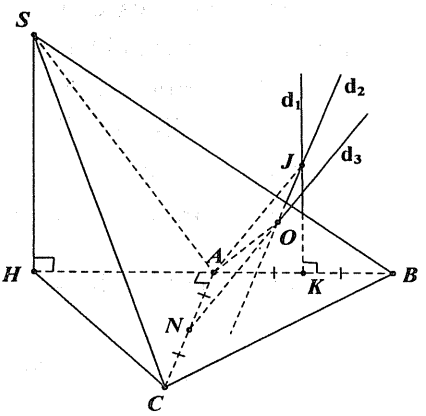
b). Định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABC

LỜI GIẢI

a). Tính thể tích khối chóp S.ABC

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.SH.\frac{1}{2}.AB.AC$$

$$= \frac{1}{6}.3a.a.a = \frac{a^3}{2}.$$



b). Định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABC

Ta có: $\begin{cases} CA \perp AB \\ CA \perp SH \end{cases} \Rightarrow CA \perp mp(SHB)$.

Gọi K trung điểm của AB.

Dựng d_1 qua K và song song với SH $\Rightarrow$ d_1 là đường trung trực của đoạn AB.

Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB thì $J \in d_1$.

$\Rightarrow$ AJ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB.

Pitago cho các tam giác vuông SHA và SHB có

$SA = \sqrt{SH^2 + HA^2} = \sqrt{9a^2 + a^2} = a\sqrt{10}$;

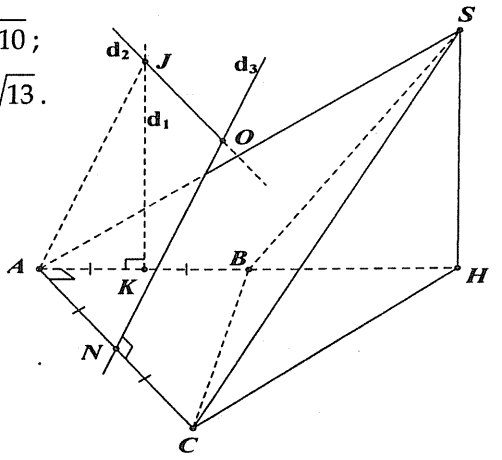
$SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \sqrt{9a^2 + 4a^2} = a\sqrt{13}$.

Diện tích tam giác SAB:

$$S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}.SH.AB = \frac{1}{2}.3a.a = \frac{3a^2}{2}.$$

Ngoài ra: $S_{\Delta SAB} = \frac{SA.AB.SB}{4.AJ}$

$$\Rightarrow AJ = \frac{a\sqrt{10}.a.a\sqrt{13}}{4.\frac{3a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{130}}{6}.$$



Qua J kẻ đường thẳng d_2 vuông góc với mặt phẳng (SAB) thì d_2 // CA.

Trong mặt phẳng (CAJ) kẻ đường trung trực d_3 của CA, d_3 cắt d_2 tại điểm O. O chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABC.

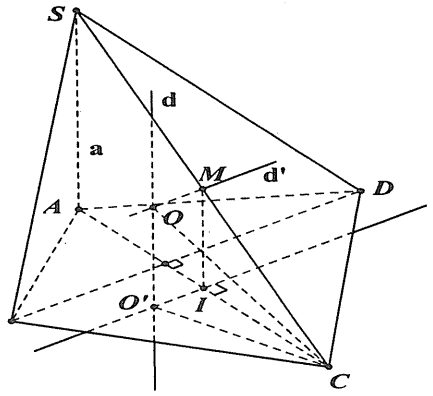
Tính bán kính mặt cầu. Trong tam giác AOJ vuông tại J có:

$$OA^2 = OJ^2 + AJ^2 = AN^2 + AJ^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{65a^2}{18} = \frac{139a^2}{36} \Rightarrow R = OA = \frac{a\sqrt{37}}{3}.$$

Chú ý: Nếu đề bài cho H là điểm đối xứng của B qua A phương pháp giải cũng tương tự như trên, và cách tìm tâm O ở hình phía dưới.

Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với đáy ABCD, SA = a và đáy ABCD là tứ giác nội tiếp nội tiếp đường tròn bán kính r, trong đó các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

LỜI GIẢI



Trong mặt phẳng chứa đường tròn tâm O' ngoại tiếp tứ giác ABCD kẻ đường kính qua O' vuông góc với AC tại I.

Ta có: IA = IC (*đường kính vuông góc với dây cung đi qua trung điểm dây cung đó*), O'I // BD và $O'I \perp (SAC)$.

Tâm O của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp phải nằm trên trục d của đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD.

Gọi M là trung điểm của SC thì MI // SA $\Rightarrow MI \perp (ABCD)$ và $MI = \frac{a}{2}$.

Từ M kẻ đường thẳng d' // O'I cắt d tại O.

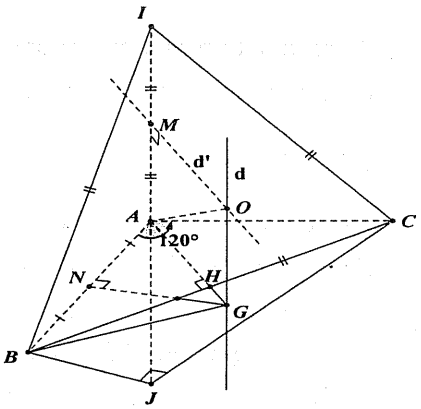
Vì $d' \perp (SAC)$ tại M nên OC = OS = R.

Ta có $R = OC = \sqrt{OO'^2 + O'C^2} = \sqrt{MI^2 + O'C^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2} = \frac{\sqrt{a^2 + 4r^2}}{2}$.

Kết luận: $R = \frac{\sqrt{a^2 + 4r^2}}{2}$.

Cho tam giác cân ABC có $\widehat{BAC} = 120^0$ và đường cao $AH = a\sqrt{2}$. Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A, lấy hai điểm I và J khác phía với A sao cho tam giác IBC đều còn tam giác JBC vuông tại J. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện IABC và IJBC.

LỜI GIẢI



Vì tam giác ABC cân tại A có $\widehat{BAC} = 120^0$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 30^0$.

$AB = AC = \dfrac{AH}{\sin 30^0} = 2a\sqrt{2};$

$BH = AB.\cos 30^0 = a\sqrt{6} \Rightarrow BC = 2a\sqrt{6}$

Gọi G là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC thì $G \in AH$.

Có ΔABG đều nên: $GA = GB = AB = 2a\sqrt{3}$

Dựng đường thẳng d qua G vuông góc với mặt phẳng (ABC), thì d là trục của đường tròn ngoại tiếp ABC và d // AI. Trong mặt phẳng chứa (AI,d) dựng đường trung trực của đoạn AI cắt d tại O. O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp I.ABC, bán kính $R = OA = OB = OC = OI$.

Pitago cho tam giác IAB: $IA = \sqrt{IB^2 - AB^2} = \sqrt{24a^2 - 8a^2} = 4a$

Pitago cho tam giác AOG:

$$AO = \sqrt{AG^2 + OG^2} = \sqrt{AG^2 + \left(\frac{AI}{2}\right)^2} = \sqrt{8a^2 + 4a^2} = 2a\sqrt{3}.$$

Kết luận hình chóp I.ABC nội tiếp trong mặt cầu tâm O, bán kính $R = OA = 2a\sqrt{3}$.

Ta có: mặt phẳng (IJH) là mặt trung trực của đoạn BC nên:

$$JB = JC = \frac{BC}{\sqrt{2}} = 2a\sqrt{3}.$$

Pitago cho tam giác JAB vuông tại A: $JA = \sqrt{JB^2 - AB^2} = \sqrt{12a^2 - 8a^2} = 2a$.

Ta có: $IJ = IA + JA = 4a + 2a = 6a$.

Xét ΔIBJ có: $IJ^2 = BI^2 + BJ^2 = \left(2a\sqrt{3}\right)^2 + \left(2a\sqrt{6}\right)^2 = 36a^2$.

Suy ra tam giác IBJ vuông tại B.

Tương tự: tam giác ICJ vuông tại C.

Kết luận: hình chóp IJBC nội tiếp trong mặt cầu đường kính IJ và tâm là trung điểm của IJ.

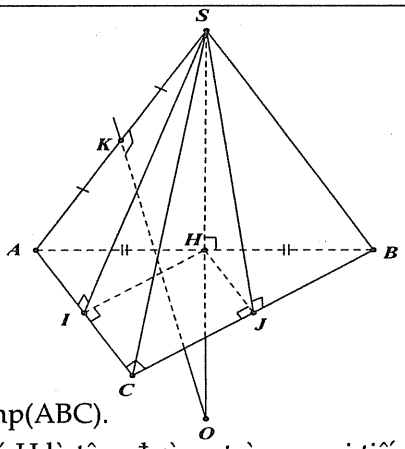
Cho ba tia Sx, Sy, Sz không đồng phẳng với $\widehat{xSy} = 120^0, \widehat{ySz} = 60^0$, $\widehat{zOx} = 90^0$. Trên các tia Sx, Sy, Sz lấy lần lượt các điểm A, B, C sao cho $SA = SB = SC = a$.

a). Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

b). Tính bán kính r của mặt cầu nội tiếp tứ diện SABC.

c). Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC.

LỜI GIẢI



a). Áp dụng định lí hàm số cosin trong ΔSAB:

$AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2.SA.SB.\cos 120^0$

$AB^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\left(\frac{-1}{2}\right) = 3a^2 \Rightarrow AB = a\sqrt{3}$

ΔSAB đều nên $BC = a$.

ΔSAC vuông cân tại S nên $AC = a\sqrt{2}$.

Suy ra $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Vậy tam giác ABC vuông tại C.

b). Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mp(ABC).

Do $SA = SB = SC$ nên $HA = HB = SC$, do đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABC. Mà ΔABC vuông tại C nên H là trung điểm của AB.

Gọi r là bán kính của mặt cầu nội tiếp hình chóp S.ABC thì ta có: $r = \frac{3V}{S_{tp}}$

Tính V: $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a.a\sqrt{2}\right).\frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Tính S_{tp}: $S_{tp} = S_{ABC} + S_{SAC} + S_{SBC} + S_{SAB}$

$$= \frac{a^2\sqrt{2}}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{2}\left(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1\right)$$

Suy ra: $r = \frac{a\sqrt{2}}{2(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)}$.

c). Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC và K là trung điểm của SA. Từ câu b) suy ra SH là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC nên $O \in SH$.

Vì $OA = OS$ nên O nằm trên trung trực của SA.

Hai tam giác vuông SKO và SHA đồng dạng nên ta có:

$$\frac{SO}{SA} = \frac{SK}{SH} \Rightarrow SO = \frac{SK.SA}{SH} = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{a^2}{2\frac{a}{2}} = a \ \left(SH = \frac{a}{2}\right)$$

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là $R = a$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, góc ABC = 60, SA = SB = SC, chiều cao của hình chóp là a, góc giữa (SCD) và (ABCD) bằng 60. Tính thể tích S.ABCD. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện S.ACB, S.ACD. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC).

LỜI GIẢI

Vì $\widehat{ABC} = 60^0$ nên ΔABC và ΔACD đều.

Gọi G là trọng tâm ΔABC thì: $GA = GB = GC$.

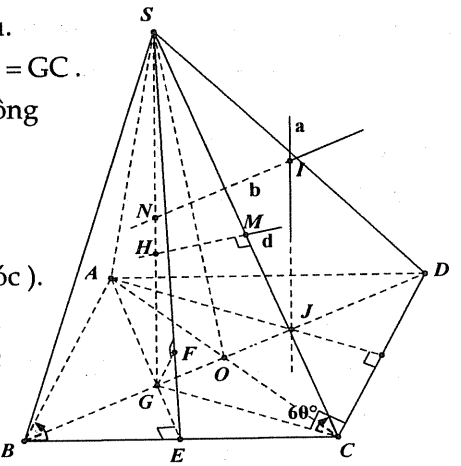
Mà $SA = SB = SC \Rightarrow$ G là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD).

Dễ dàng chứng minh $GC \perp CD$.

Có $CD \perp GC$ và $CD \perp GC$

$\Rightarrow CD \perp SC$ (định lý ba đường vuông góc).

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD) là góc giữa SC và CG là góc $\widehat{SCG} = 60^0$.



Trong ΔSCG có: $CG = \dfrac{SG}{\tan 60^0} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$,

$SC = \dfrac{SG}{\sin 60^0} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Trong ΔABC có: $CG = \dfrac{AB.\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AB = a$.

Diện tích ABCD: $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD = \dfrac{1}{2}a.a\sqrt{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Thể tích khối chóp S.ABCD $V = \dfrac{1}{3}SG.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Vì G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $SG \perp (ABCD)$.

Suy ra SG là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Trong mặt phẳng (SGC) dựng đường trung trực của đoạn thẳng SC cắt đường SG tại điểm H. H chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABC có bán kính R = SH.

$\Delta SMH \sim \Delta SGC \Rightarrow \dfrac{SH}{SC} = \dfrac{SM}{SG} \Rightarrow SH = \dfrac{SC^2}{2SG} = \dfrac{\left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2a} = \dfrac{2a}{3}$.

Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔACD, thì J cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác AGCD. Từ J dựng đường thẳng a vuông góc với mp (AGCD) thì a là trục đường tròn ngoại tiếp tứ giác AGCD và a // SG.

Trong mp (SGD) dựng đường trung trực của SG cắt đường thẳng a tại I.

Vậy: I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.AGCD, bán kính R = GI.

Ta có: GJIN là hình chữ nhật có $IJ = GN = \dfrac{a}{2}, GJ = 2OJ = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy: $R = GI = \sqrt{GJ^2 + JI^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$.

Vì $AD // BC \Rightarrow d\left(D,(SBC)\right) = d\left(A,(SBC)\right)$.

Muốn tính khoảng cách từ A đến mp (SBC), ta phải tính khoảng cách từ G *(hình chiếu của đỉnh)* đến mp(SBC) trước, sau đó sử dụng công thức tỉ lệ khoảng cách thì tính được khoảng cách từ A.

Gọi E là trung điểm của BC.

Có $BC \perp GE$ và $BC \perp SG \Rightarrow BC \perp (SGE) \Rightarrow (SBC) \perp (SGE)$ [vì $BC \subset (SBC)$].

Hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SE.

Dựng $GF \perp SE (F \in SE) \Rightarrow GF \perp (SBC)$. Vậy $d\left(G,(SBC)\right) = GF$.

Trong ΔSGE có: $\frac{1}{GF^2} = \frac{1}{GS^2} + \frac{1}{GE^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{12}{a^2} = \frac{13}{a^2} \Rightarrow GF = \frac{a\sqrt{13}}{13}$.

Ta có $AE = 3GE \Rightarrow d\left(A,(SBC)\right) = 3.d\left(G,(SBC)\right) = \frac{3a\sqrt{13}}{13}$.

Kết luận $d\left(D,(SBC)\right) = \frac{3a\sqrt{13}}{13}$.

Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, góc ABC = 60. SA vuông góc với ABCD, góc giữa (SCD) và (ABCD) bằng 60. Tính thể tích khối chóp S.ABCD. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC, SABD, SBCD.

LỜI GIẢI

Vì $\widehat{ABC} = 60^0$ nên ΔABC và ΔACD đều.

Gọi E là trung điểm của CD, có $CD \perp AE$ và $CD \perp SA$

$\Rightarrow CD \perp SE$ (định lý ba đường vuông góc).

Từ đó suy ra: góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD) là góc $\widehat{SEA} = 60^0$.

Trong ΔSAE có $SA = AE.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{3a}{2}$.

Tính thể tích khối chóp S.ABCD:

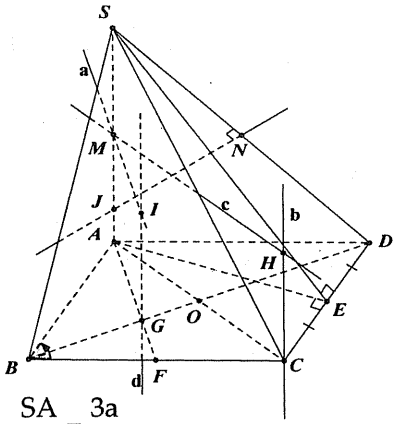
$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{3a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$

(Với $S_{ABCD} = \frac{1}{2}.AC.BD = \frac{1}{2}a.a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$).

Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện S.ABC

Gọi G là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Từ G kẻ đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) thì d là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔBC và d // SA.

Trong mặt phẳng chứa d và SA, kẻ đường thẳng a là đường trung trực đoạn SA, đường thẳng a cắt đường thẳng d tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABC, bán kính R = AI.



Ta có: AGIM là hình chữ nhật có: $GI = AM = \frac{SA}{2} = \frac{3a}{4}$

Trong ΔAIG có: $AI = \sqrt{AG^2 + GI^2} \Leftrightarrow AI = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{9a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{129}}{12}$.

Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện S.ABD

Vì có $CA = CB = CD \Rightarrow$ C là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD.

Từ C kẻ đường thẳng b vuông góc với (ABCD) thì b là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD và b // SA.

Trong mặt phẳng chứa b và SA, kẻ đường thẳng c là đường trung trực đoạn SA, đường thẳng c cắt đường thẳng b tại H thì H là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABD, bán kính R = AH.

Ta có: ACHM là hình chữ nhật có: $CH = AM = \frac{SA}{2} = \frac{3a}{4}$.

Trong ΔAIG có: $AH = \sqrt{AC^2 + CH^2} \Leftrightarrow AH = \sqrt{a^2 + \frac{9a^2}{16}} = \frac{5a}{4}$.

Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SBCD.

Vì có $AB = AC = AD \Rightarrow$ A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow$ SA là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Trong ΔSAD kẻ đường trung trực đoạn SD cắt SA tại điểm J, thì J là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.BCD có bán kính R = JS.

Có: $\Delta SNJ \sim \Delta SAD \Rightarrow \frac{SJ}{SD} = \frac{SN}{SA} \Rightarrow SJ = \frac{SN}{SA}.SD = \frac{SD^2}{2SA} = \frac{\frac{13a^2}{4}}{2.\frac{3a}{2}} = \frac{13a}{12}$.

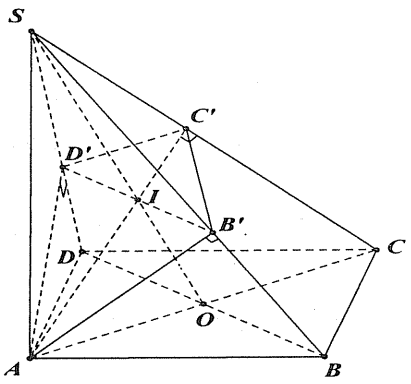
Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, SA vuông góc với đáy ABCD, SA = a , góc giữa SC và SAB bằng 30^0, mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC, cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'.

a) Chứng minh năm điểm A , S , B' , C' , D' cùng nằm trên một mặt cầu . Tìm tâm và tính bán kính mặt cầu đó .

b) Chứng minh rằng A, B, C, D, B', C', D' nằm trên một mặt cầu cố định. Tìm tâm và tính bán kính của mặt cầu đó.

c) Tính thể tích của S.AB'C'D' .

LỜI GIẢI



Vì $CB \perp (SAB)$ nên SB là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (SAB).

Vậy: góc giữa SC và (SAB) là $\widehat{CSB} = 30^0$.

Trong ΔSBC có: $SB = BC : \tan 30^0 = BC.\sqrt{3}$.

Trong ΔSAB vuông tại A có:

$SB^2 = SA^2 + AB^2 \Leftrightarrow 3BC^2 = a^2 + AB^2$

$\Rightarrow AB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (vì AB = BC) .

Mà ABCD là hình vuông $AC = BC = AB.\sqrt{2} = a$

Vì $SC \perp (P) \Rightarrow SC \perp AC'$.

Ta có: $BD \perp AC$ và $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.

Từ đó suy ra $BD \,//\, (P)$.

Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có : $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

Gọi $I = AC' \cap SO$. I là điểm chung của hai mặt phẳng (SBD) và (P) và $BD \,//\, (P)$. Suy ra giao tuyến của chúng qua I và song song với BD, giao tuyến này cắt SB và SD lần lượt tại B' và D'.

Vì $BC \perp AB$ và $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB'$ (vì $AB' \subset (SAB)$).

Ta có: $\begin{cases} AB' \perp BC \\ AB' \perp SC \end{cases} \Rightarrow AB' \perp (SBC)$.

Chứng minh tương tự có: $AD' \perp (SCD)$.

Vì $AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SB'$. Vậy tam giác SAB' vuông tại B'.

Tương tự: $\Delta SAD'$ vuông tại D'.

Vì ba điểm B', C', D' cùng nhìn đoạn SA dưới một góc vuông nên chúng nằm trên mặt cầu đường kính SA, có tâm trung điểm SA và bán kính $R = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Theo chứng minh trên có: $\widehat{AB'C} = \widehat{AC'C} = \widehat{AD'C} = \widehat{ADC} = \widehat{ABC} = 90^0$.

Từ đó suy ra bảy điểm A, B, C, D, B', C', D' cùng nằm trên mặt cầu đường kính AC, bán kính R = ½ AC = ½ a.

Áp dụng hệ thức lượng trong Δ vuông cho hai Δ SAB và SAD có:

$$SD'.SD = SA^2 \Leftrightarrow \frac{SD'.SD}{SD^2} = \frac{SA^2}{SD^2} \Leftrightarrow \frac{SD'}{SD} = \frac{SA^2}{SA^2 + AD^2} = \frac{2}{3}.$$

Tương tự ta tính được: $\frac{SB'}{SB} = \frac{2}{3}$.

Có: SA = AC = a $\Rightarrow \Delta SAC$ cân tại A suy ra C' trung điểm của SC.

Vì có: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a.\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^3}{6}$.

$$\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AB'C'} = \frac{1}{3}V_{S.ABC} = \frac{1}{6}V_{S.ABCD}.$$

Tương tự $V_{S.AD'C'} = \frac{1}{3}V_{S.ADC} = \frac{1}{6}V_{S.ABCD}$

$$V_{S.AB'C'D'} = V_{S.AB'C'} + V_{S.AD'C'} = \frac{1}{6}V_{S.ABCD} + \frac{1}{6}V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{18}$$

Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau tại H, SH vuông góc với đáy ABCD.

Chứng minh rằng bốn tâm mặt cầu ngoại tiếp các hình chóp S.HAB, S.HBC, SHCD, S.HDA tạo thành một hình chữ nhật.

Gọi H_1, H_2, H_3, H_4, là hình chiếu vuông góc của H lần lượt trên AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng hình chóp $SH_1H_2H_3H_4$ có mặt cầu ngoại tiếp. Tính diện tích của thiết diện mặt cầu ấy khi cắt bởi mp(ABCD), nếu biết $H_1H_3 = a, \widehat{BAC} = \alpha, \widehat{BDC} = \beta$.

LỜI GIẢI

a). Gọi I_1 là trung điểm của AB và O_1 là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABH thì I_1O_1 // SH và $I_1O_1 = \frac{1}{2}SH$.

Tương tự như trên, nếu I_2, I_3, I_4 thứ tự là trung điểm của BC, CD, DA.

Và O_2, O_3, O_4 thứ tự là tâm các mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.HBC, S.HCD, S.HDA thì: $I_2O_2 = \frac{1}{2}SH$; $I_3O_3 = \frac{1}{2}SH$; $I_4O_4 = \frac{1}{2}SH$.

Và I_2O_2, I_3O_3, I_4O_4 cùng song song với SH.

Dễ thấy: I_1I_2 // O_1O_2 và I_1I_2 // AC;

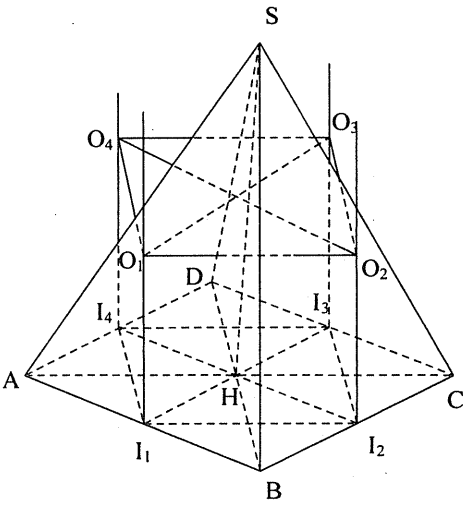
I_2I_3 // O_2O_3 và I_2I_3 // BD.

I_3I_4 // O_3O_4 và I_3I_4 // AC;

I_4I_1 // O_4O_1 và I_4I_1 // BD.

Kết hợp với AC ⊥ BD, ta có:

$O_1O_2O_3O_4$ là hình chữ nhật.



b). Dễ thấy: $\widehat{HH_1H_2} = \widehat{HBH_2} = \widehat{HBC}$

$\widehat{HH_1H_4} = \widehat{HAH_4} = \widehat{HAD}$

$\widehat{HH_3H_2} = \widehat{HCH_2} = \widehat{HCB}$

$\widehat{HH_3H_4} = \widehat{HCH_4} = \widehat{HDA}$

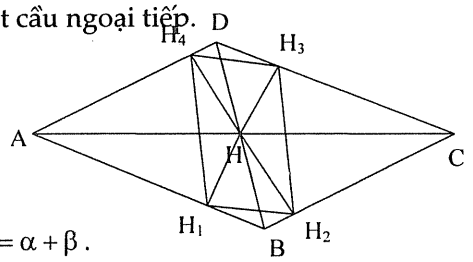
Từ đó: $\widehat{HH_1H_2} + \widehat{HH_1H_4} + \widehat{HH_3H_2} + \widehat{HH_3H_4}$

$= \widehat{HBC} + \widehat{HCB} + \widehat{HAD} + \widehat{HDA} = 180^0$

Vậy: $H_1H_2H_3H_4$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Từ đó hình chóp $S.H_1H_2H_3H_4$ có mặt cầu ngoại tiếp.

Diện tích thiết diện của hình cầu đó và mặt phẳng (ABCD) là diện tích hình tròn ngoại tiếp tứ giác $H_1H_2H_3H_4$.



Vì $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{BDC} = \beta$ nên $\widehat{H_1H_4H_3} = \alpha + \beta$.

Khi ấy: $\dfrac{H_1H_3}{\sin(\alpha+\beta)} = 2R$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $H_1H_2H_3H_4$).

Từ đó: $R = \dfrac{a}{2\sin(\alpha+\beta)}$.

Vậy: diện tích hình thu được là $4\pi R^2 = \dfrac{\pi a^2}{\sin^2(\alpha+\beta)}$.

Cho hình chóp lục giác đều S.ABCDEF có cạnh đáy bằng a và mặt bên hợp với đáy một góc α.

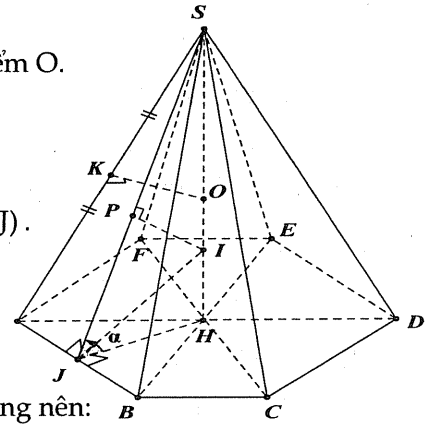
a) Xác định tâm và tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp theo a và α.

b) Xác định tâm và tính bán kình của mặt cầu nội tiếp hình chóp theo a và α.

c) Tìm α để tâm mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp của hình chóp trùng nhau.

LỜI GIẢI

a) Gọi H là tâm lục giác đều ABCDEF thì SH là đường cao của hình chóp.
Vì S.ABCDEF là hình chóp đều nên SH là trục của đường tròn ngoại tiếp ABCDEF.
Gọi K là trung điểm của SA.
Dựng mặt trung trực của SA cắt SH tại điểm O.
Ta được điểm O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCDEF.
Gọi J là trung điểm của AB.
Ta có: $AB \perp SH$ và $AB \perp HJ$ nên $AB \perp (SHJ)$.
Suy ra: $SJ \perp AB$
Suy ra góc $\widehat{SJH}$ là góc phẳng tạo bởi hai mặt (SAB) và (ABCDEF), và $\widehat{SJH} = \alpha$.
Hai tam giác vuông SHA và SKO đồng dạng nên:



$$\frac{SO}{SA} = \frac{SK}{SH} \Rightarrow SO = \frac{SA.SK}{SH} = \frac{SA^2}{2SH}$$

Từ ΔSHJ vuông tại H ta có $SH = SJ.\tan\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\tan\alpha$.

Tam giác SHA vuông tại H cho:

$$SA^2 = SH^2 + HA^2 = \frac{3a^2}{4}\tan^2\alpha + a^2 = \frac{a^2}{4}\left(3\tan^2\alpha + 4\right)$$

Suy ra: $SO = \dfrac{\frac{a^2}{4}\left(3\tan^2\alpha + 4\right)}{2\frac{a\sqrt{3}}{2}\tan\alpha} = \dfrac{a\sqrt{3}(3\tan^2\alpha + 4)}{12\tan\alpha}$

Vậy bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCDEF là:

$$R = \frac{a\sqrt{3}(3\tan^2\alpha + 4)}{12\tan\alpha}$$

b) Trong ΔSHJ kẻ phân giác góc $\widehat{SJH}$ cắt SH tại điểm I.
Gọi P là hình chiếu vuông góc của I trên SJ.
Ta có: $IP \perp SJ$. Suy ra $AB \perp IP$.
Như thế $IP \perp (SAB)$, tức là độ dài đoạn IK là khoảng cách từ I đến mp (SAB).
Mặt khác: I nằm trên phân giác của góc $\widehat{SJH}$ nên $IH = IP$.
Do đó điểm I là điểm cách đều hai mặt (ABCDEF) và (SAB).
Suy ra I cách đều tất cả các mặt của hình chóp.
Vậy: I là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp S.ABCDEF.
Từ tam giác IHJ vuông tại H ta có $IH = HJ.\tan\widehat{IJH} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\tan\frac{\alpha}{2}$

c) Tâm mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp trùng nhau khi và chỉ khi:

$$R+r=SH \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{3}(3\tan^2\alpha+4)}{12\tan\alpha}+\frac{a\sqrt{3}}{2}\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\tan\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\tan^2\alpha+4}{6\tan\alpha}+\tan\frac{\alpha}{2}=\tan\alpha \Leftrightarrow 3\tan^2\alpha-6\tan\alpha.\tan\frac{\alpha}{2}-4=0$$

Đặt $t=\tan\frac{\alpha}{2}$ ta được phương trình $3\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2-6\frac{2t}{1-t^2}-4=0$

Hay $2t^4+2t^2-1=0$. Giải được $t^2=\frac{\sqrt{3}-1}{2} \Leftrightarrow t=\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}(t>0)$

Vậy tâm mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp của hình chóp S.ABCDEF trùng nhau khi góc α được xác định bởi $\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi I, J, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC,SD.

a) Chứng minh bảy điểm A, B, C, D, I, J, K cùng nằm trên một mặt cầu. Tính diện tích của mặt cầu đó.

b) Gọi (T) là đường tròn có đường kính là AC nằm trên mặt phẳng (SAC). Trên (T) lấy điểm M bất kỳ (khác A và C). Chứng minh rằng MBD là một tam giác vuông.

LỜI GIẢI

Từ giả thiết $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}=\widehat{AJC}=90^0$ (1)

Cũng từ giả thiết: $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAD)\perp(ANBCD)\\(SAB)\cap(SAD)=SA\end{cases} \Rightarrow SA\perp(ABCD)$

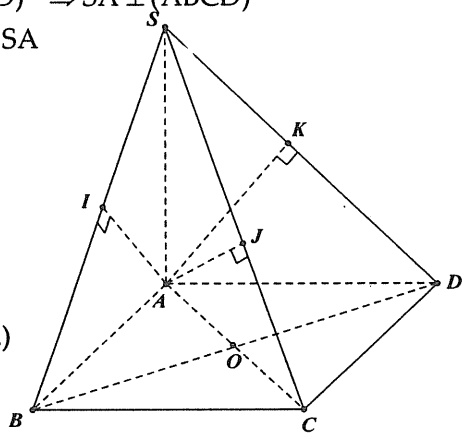
Ta có: $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)$.

Do đó $BC\perp AI$.

$\begin{cases}AI\perp BC\\AI\perp SB\end{cases}\Rightarrow AI\perp(SBC)$

Suy ra $AI\perp IC$ hay $\widehat{AIC}=90^0$ (2)

Tương tự: $\widehat{AKC}=90^0$ (3)



Từ (1), (2), (3) suy ra: Bảy điểm A, B, C, D, I, J, K cùng nằm trên một mặt cầu (S) đường kính AC. Bán kính của (S) là $R = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Diện tích của mặt cầu (S) là $S = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\pi a^2$.

Điểm M nằm trên đường tròn (T) có đường kính là AC, nên M nằm trên mặt cầu (S). Để ý rằng BD là đường kính của (S), nên với điểm $M \in (S)$ ta phải có $\widehat{BMD} = 90^0$. Vậy tam giác MBD vuông tại M.

Đề thi đại học KHỐI D 2003

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng. Trên giao tuyến lấy hai điểm A, B với AB = a. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểmD sao cho AC, BD vuông góc với nhau và AC = BD = AB. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) theo a.

LỜI GIẢI

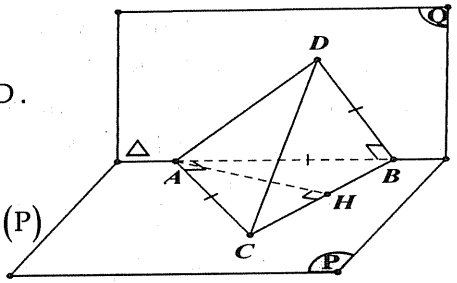
Ta có: $(P) \perp (Q)$ và $\Delta = (P) \cap (Q)$

Mà: $\begin{cases} AC \perp \Delta \\ AC \subset (P) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (Q) \Rightarrow AC \perp AD$.

Hay $\widehat{CAD} = 90^0$.

Chứng minh hoàn toàn tương tự: $BD \perp (P)$

$\Rightarrow BD \perp BC$ hay $\widehat{CBD} = 90^0$.



Vậy: bốn điểm A, B, C, D thuộc mặt cầu tâm I trung điểm của CD bán kính $R = \frac{CD}{2}$.

$CD = \sqrt{BD^2 + BC^2} = \sqrt{AB^2 + AC^2 + BD^2} = a\sqrt{3}$. Vậy bán kính $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

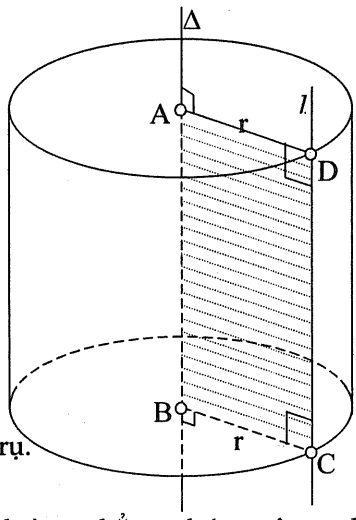
Dựng $AH \perp BC (H \in BC)$ (1).

Vì $BD \perp (P) \Rightarrow (BCD) \perp (ABC)$ có giao tuyến AB (1)

Từ (1) và (2) suy ra: $AH \perp (BCD) \Rightarrow d(A,(BCD)) = AH$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

MẶT TRỤ



1. Mặt trụ tròn xoay

   Trong $mp(P)$ cho hai đường thẳng Δ và l song song nhau, cách nhau một khoảng r. Khi quay $mp(P)$ quanh trục cố định Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay hay gọi tắt là mặt trụ.

   - Đường thẳng Δ được gọi là trục.
   - Đường thẳng l được gọi là đường sinh.
   - Khoảng cách r được gọi là bán kính của mặt trụ.

2. Hình trụ tròn xoay

   Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh đường thẳng chứa một cạnh, chẳng hạn cạnh AB thì đường gấp khúc $ABCD$ tạo thành một hình, hình đó được gọi là hình trụ tròn xoay hay gọi tắt là hình trụ.

   - Đường thẳng AB được gọi là trục.
   - Đoạn thẳng CD được gọi là đường sinh.
   - Độ dài đoạn thẳng $AB = CD = h$ được gọi là chiều cao của hình trụ.
   - Hình tròn tâm A, bán kính $r = AD$ và hình tròn tâm B, bán kính $r = BC$ được gọi là 2 đáy của hình trụ.
   - Khối trụ tròn xoay, gọi tắt là khối trụ, là phần không gian giới hạn bởi hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ.

3. Công thức tính diện tích và thể tích của hình trụ

   Cho hình trụ có chiều cao là h và bán kính đáy bằng r, khi đó:

   - Diện tích xung quanh của hình trụ: $\boxed{S_{xq} = 2\pi rh}$
   - Diện tích toàn phần của hình trụ: $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + 2.S_{Đay} = 2\pi rh + 2\pi r^2}$
   - Thể tích khối trụ: $\boxed{V = B.h = \pi r^2 h}$

4. Tính chất:

   - Nếu cắt mặt trụ tròn xoay (có bán kính là r) bởi một $mp(\alpha)$ vuông góc với trục Δ thì ta được đường tròn có tâm trên Δ và có bán kính bằng r với r cũng chính là bán kính của mặt trụ đó.
   - Nếu cắt mặt trụ tròn xoay (có bán kính là r) bởi một $mp(\alpha)$ không vuông góc với trục Δ nhưng cắt tất cả các đường sinh, ta được giao tuyến là một

đường elíp có trụ nhỏ bằng 2r và trục lớn bằng $\frac{2r}{\sin\varphi}$, trong đó φ là góc giữa trục Δ và $mp(\alpha)$ với $0^0 < \varphi < 90^0$.

– Cho $mp(\alpha)$ song song với trục Δ của mặt trụ tròn xoay và cách Δ một khoảng k.

+ Nếu $k < r$ thì $mp(\alpha)$ cắt mặt trụ theo hai đường sinh $\Rightarrow$ thiết diện là hình chữ nhật.

+ Nếu $k = r$ thì $mp(\alpha)$ tiếp xúc với mặt trụ theo một đường sinh.

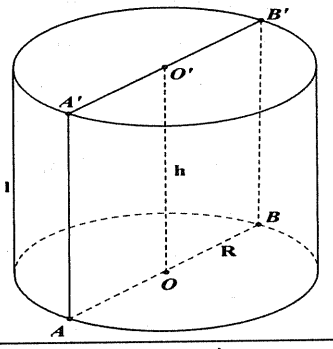
+ Nếu $k > r$ thì $mp(\alpha)$ không cắt mặt trụ.

Một hình trụ có bán kính đáy bằng R và thiết diện qua trục là một hình vuông.

a). Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ

b). Tính thể tích của khối trụ

LỜI GIẢI



Gọi thiết diện qua trục là hình vuông ABB'A'.

Nên có $AB = AA' = OO' = 2R$

$S_{xq} = 2\pi Rl = 2\pi.OA.OO' = 2\pi.R.2R = 4\pi R^2$

$S_{tp} = S_{xq} + 2\,S_{đáy} = 4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2$

$V = S_{đáy}.\ h = \pi.R^2.2R = 2\pi R^3$

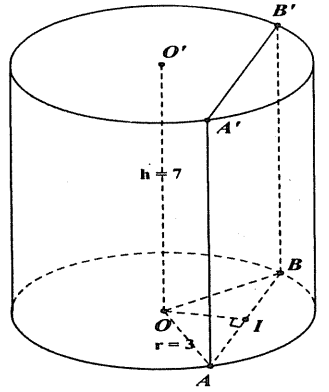
Một hình trụ có bán kính đáy r = 5cm và khoảng cách giữa hai đáy bằng 7cm.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ

b) Tính thể tích của khối trụ

c) Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trụ 3cm. Hãy tính diện tích của thiết diện được tạo nên.

LỜI GIẢI



a). Tính diện tích xung quanh:

$S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi.OA.OO' = 2\pi.5.7 = 70\pi\ (cm^2)$.

Diện tích toàn phần của hình trụ:

$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 70\pi + 50\pi = 120\pi\ (cm^2)$

b). Tính thể tích của khối trụ:

$V = \pi R^2 h = \pi.OA^2.OO' = \pi.5^2.7 = 175\pi\ (cm^3)$

Vì OO' vuông góc với hai đáy, một mp(P) // OO' và cắt hình trụ, thì thiết diện là một hình chữ nhật ABB'A'.

Gọi I trung điểm của dây AB, theo đề bài có $OI \perp AB$ và $OI = 3cm$.

Trong ΔOAI có: $AI = \sqrt{OA^2 - OI^2} = 4 \Rightarrow AB = 2AI = 8$, có $AA' = OO' = 7$.

Diện tích thiết diện ABB'A' $S = AB.AA' = 8.7 = 56\left(cm^2\right)$.

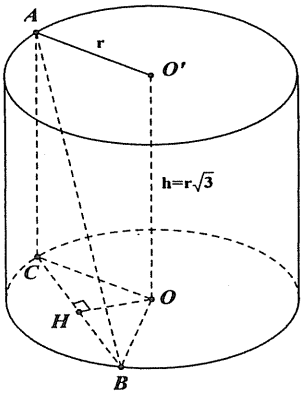
Một hình trụ có bán kính r và chiều cao $h = r\sqrt{3}$.

a). Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ.

b). Tính thể tích của khối trụ tạo nên bởi hình trụ đã cho.

c). Cho hai điểm A và B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ bằng 30^0. Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ.

LỜI GIẢI



a). Tính diện tích xung quanh:

$S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi.r.r\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi r^2$.

Diện tích toàn phần của hình trụ:

$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 2\sqrt{3}\pi r^2 + 2\pi r^2 = 2\left(\sqrt{3}+1\right)\pi r^2$.

b). Tính thể tích của khối trụ:

$V = \pi r^2 h = \pi r^2 r\sqrt{3} = \sqrt{3}\pi r^3$

Dựng AC // OO'.

Góc giữa AB và OO' bằng góc giữa AB và AC, chính là góc $\widehat{BAC} = 30^0$.

Từ đó suy ra: $d\left(AB, OO'\right) = d\left(OO', \left(ABC\right)\right) = d\left(O, \left(ABC\right)\right)$.

Dựng $OH \perp BC\left(H \in BC\right)$ thì $OH \perp \left(ABC\right)$. Vậy $d\left(O, \left(ABC\right)\right) = OH$.

Trong ΔABC vuông tại C có $BC = AC.\tan 30^0 = r\sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}} = r$.

Suy ra ΔOBC nên có $OH = \frac{r\sqrt{3}}{2}$.

Kết luận: $d\left(AB, OO'\right) = \frac{r\sqrt{3}}{2}$.

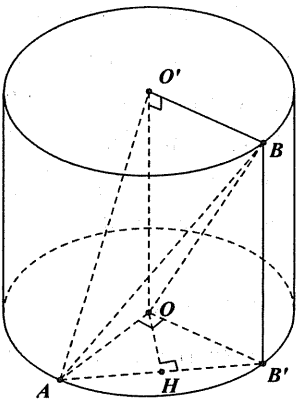
Một hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O' bán kính r và có đường cao $h = r\sqrt{2}$. Gọi A là một điểm trên đường tròn tâm O và B là một điểm trên đường tròn tâm O' sao cho OA vuông góc với O'B.

a) Chứng minh rằng các mặt bên của tứ diện OABO' là những tam giác vuông. Tính thể tích của tứ diện này.

b) Gọi (α) là mặt phẳng qua AB và song song với OO'. Tính khoảng cách giữa trục OO' và mặt phẳng (α).

c). Chứng minh rằng (α) tiếp xúc với mặt trụ trục OO' có bán kính bằng $\frac{r\sqrt{2}}{2}$ dọc theo một đường sinh.

LỜI GIẢI



a). Vì trục OO' vuông góc với các đáy nên $OO' \perp OA$ và $OO' \perp O'B$.

Vậy các tam giác AOO' và BO'O vuông tại O và O'.

Theo giả thiết ta có $AO \perp O'B$, mà $AO \perp OO'$ nên $AO \perp (OO'B)$.

Do đó $AO \perp OB$, nên tam giác AOB vuông tại O. Tương tự ta chứng minh được tam giác AO'B vuông tại O'.

Thể tích hình chóp OABO' là:

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta OO'B}.AO = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}OO'.O'B.AO = \frac{1}{6}.r\sqrt{2}.r^2 = \frac{\sqrt{2}}{6}r^3$$

b). Ta có (α) là (ABB').

Vì $OO' // (\alpha)$, nên khoảng cách giữa OO' và (α) bằng khoảng cách từ O đến (α).

Dựng $OH \perp AB'$ ta có $OH \perp (\alpha)$. Vậy khoảng cách cần tìm là $OH = \frac{r\sqrt{2}}{2}$.

c). Đường tròn tâm O có bán kính bằng $\frac{r\sqrt{2}}{2}$ tiếp xúc với AB' tại H là trung điểm của AB'.

Do đó mặt phẳng (α) song song với trục OO' chứa tiếp tuyến của đường tròn đáy, nên (α) tiếp xúc với mặt trụ dọc theo một đường sinh, với mặt trụ có trục OO' và có bán kính đáy bằng $\frac{r\sqrt{2}}{2}$.

Một hình trụ có bán kính đáy bằng 50 cm và có chiều cao $h = 50cm$.

a). Tính diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích của khối trụ được tạo nên.

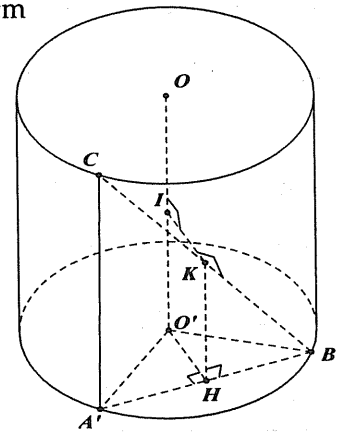
b). Một đoạn thẳng có chiều dài 100 cm và có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy. Tính khoảng cách từ đoạn thẳng đó đến trục hình trụ.

LỜI GIẢI

a). Ta có công thức $S_{xq} = 2\pi rl$ với $r = 50cm, l = 50cm$

Do đó $S_{xq} = 2\pi.50.50 = \pi.5000\left(cm^2\right)$

Và $V = \pi r^2.h = 125000\pi\left(cm^3\right)$



b). Giả sử đoạn thẳng AB có điểm mút A nằm trên đường tròn đáy tâm O và điểm mút B nằm trên đường tròn đáy tâm O'.

Theo giả thiết ta có $AB = 100cm$. Giả sử IK là đoạn vuông góc chung của trục OO' và đoạn AB với I thuộc OO' và K thuộc AB. Chiếu vuông góc đoạn AB xuống mặt phẳng đáy chứa đường tròn tâm O'.

Ta có A',H,B lần lượt là hình chiếu của A,K,B.

Vì $KI \perp OO'$ nên IK song song với mặt phẳng (O'BA').

Do đó: $O'H \,//\, IK$ và $O'H = IK$. Ta suy ra $O'H \perp AB$ và $O'H \perp AA'$.

Vậy $O'H \perp A'B$.

Xét tam giác vuông AA'B, ta có: $A'B = \sqrt{AB^2 - AA'^2} = \sqrt{100^2 - 50^2} = 50\sqrt{3}$

Vậy: $IK = O'H = \sqrt{O'A'^2 - A'H^2} = \sqrt{50^2 - \left(\frac{50\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 50\sqrt{1 - \frac{3}{4}} = 25\left(cm\right)$.

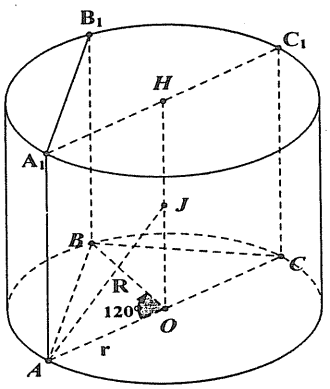
Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng 4π.

a). Tính diện tích toàn phần của hình trụ và thể tích khối trụ.

b). Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình trụ.

c). Một mặt phẳng (α) song song với trục hình trụ và cắt hình trụ theo thiết diện ABB_1A_1. Biết một cạnh của thiết diện là dây cung của một đường tròn đáy và căng một cung 120^0. Tính diện tích thiết diện.

LỜI GIẢI



Thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông, nên hình trụ có:

$h = 2r \Rightarrow S_{xq} = 2\pi.r.h = 4\pi r^2$

Theo giả thiết $\Rightarrow 4\pi r^2 = 4\pi \Rightarrow r = 1 \Rightarrow h = 2$

Vậy ta có: $S_{tp} = S_{xq} + 2\pi r^2 = 4\pi + 2\pi = 6\pi$ ..

$V = \pi r^2 h = \pi.1^2.2 = 2\pi$.

Hình cầu ngoại tiếp hình trụ có đường tròn lớn là đường tròn ngoại tiếp hình vuông có cạnh là 2, nên hình cầu có bán kính là: $R = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Vậy: thể tích khối cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4\pi\left(\sqrt{2}\right)^3}{3} = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$

Vì $\overset{\frown}{AB} = 120^0 \Rightarrow \overset{\frown}{AOB} = 120^0 \Rightarrow AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB.\cos\overset{\frown}{AOB}$

$\Rightarrow AB^2 = 2 - 2.\left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \Rightarrow AB = \sqrt{3}$.

Vậy $S_{ABB_1A_1} = AB.AA_1 = 2\sqrt{3}$..

Trong không gian cho hình vuông ABCD cạnh a. Gọi I và H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Khi quay hình vuông đó xung quanh trục IH ta được một hình trụ tròn xoay.

a). Tính diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay được tạo nên.

b). Tính thể tích của khối trụ tròn xoay được tạo nên bởi hình trụ tròn xoay đó.

LỜI GIẢI

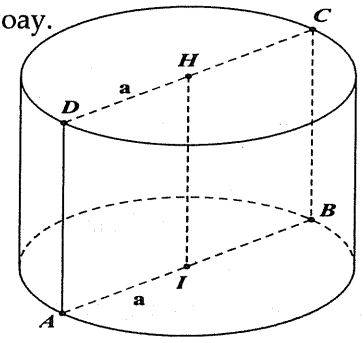
Tính diện tích xung quanh của hình trụ tròn xoay.

Theo giả thiết, hình trụ có bán kính: $R = \frac{a}{2}$

Đường cao $h = a \Rightarrow S_{xq} = 2\pi R.h = 2\pi.\frac{a}{2}.a = \pi a^2$

Thể tích của khối trụ tròn:

$V = \pi R^2.h = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2.a = \frac{\pi a^3}{4}$.



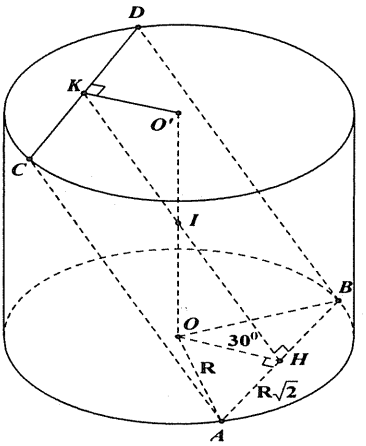
Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O') bán kính R. AB và CD lần lượt là hai dây cung song song của hai đường tròn đáy và cùng bằng $R\sqrt{2}$.

a). Mặt phẳng (ABCD) không song song hay chứa OO'. Chứng minh rằng ABCD là một hình chữ nhật.

b). Cho biết góc hợp bởi mặt phẳng (ABCD) và đáy bằng 30^0. Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình trụ.

LỜI GIẢI

Theo giả thiết, ta có: $\left.\begin{matrix} AB \,//\, CD \\ AB = CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow ABCD$ là hình bình hành.



Nếu gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Dễ thấy: $OH \,//\, O'K$ và $AB \perp (OHO'K)$

$\Rightarrow AB \perp HK \,//\, AC \Rightarrow AB \perp AC$.

Vậy ABCD là hình chữ nhật

Gọi $I = OO' \cap HK \Rightarrow \begin{cases} OH \perp AB \\ HI \perp AB \end{cases}$

$\Rightarrow \left[\widehat{(ABCD),(OAB)}\right] = \widehat{IOH} = 30^0$

Dễ thấy hình trụ có chiều cao: $h = OO' = 2OI = 2OH.\tan 30^0 = \dfrac{2OH}{\sqrt{3}}$

Mà: $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{R^2}{2}} = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$, vậy $h = \dfrac{2R}{\sqrt{6}} = \dfrac{R\sqrt{6}}{3}$

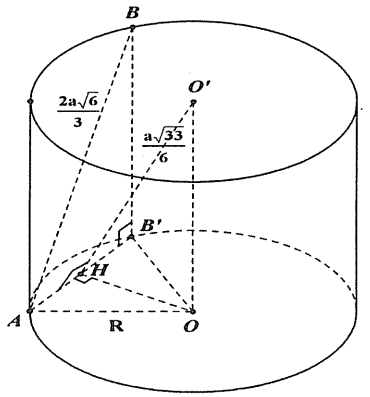
Do đó: $V = \pi R^2.h = \pi R^2.\dfrac{R\sqrt{6}}{3} = \dfrac{\pi R^3\sqrt{6}}{3}$ $S_{xq} = 2\pi.R.h = 2\pi.R.\dfrac{R\sqrt{6}}{3} = \dfrac{2\pi R^3\sqrt{6}}{3}$.

Cho hình trụ có đáy là hình tròn tâm O và O'. Gọi A, B là hai điểm lần lượt thuộc hai đường tròn (O) và (O'). Dựng đường sinh BB'. Biết thể tích của hình trụ là $\dfrac{\pi a^3}{3}$; $AB = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$; khoảng cách từ tâm O' đến AB' là $\dfrac{a\sqrt{33}}{6}$. Tính bán kính đáy và đường cao của hình trụ đã cho.

LỜI GIẢI

Gọi H là trung điểm của $AB' \Rightarrow OH \perp AB' \Rightarrow O'H \perp AB'$

Nên: $d(O';AB') = O'H = \dfrac{a\sqrt{33}}{6}$.



Thể tích của hình trụ: $V = \pi R^2.h = \dfrac{\pi a^3}{3}$

Ta có: $h = OO' = \sqrt{O'H^2 - OH^2}$

$= \sqrt{\dfrac{11a^2}{12} - \left(R^2 - AH^2\right)} = \sqrt{\dfrac{11a^2}{12} - R^2 + \dfrac{AB'^2}{4}}$

Mà: $AB'^2 = AB^2 - BB'^2 = \dfrac{8a^2}{9} - h^2$

$$\Rightarrow h=\sqrt{\frac{11a^2}{12}-R^2+\frac{\frac{8a^2}{9}-h^2}{4}} \Leftrightarrow \frac{11a^2}{12}-R^2+\frac{\frac{8a^2}{9}-h^2}{4}=h^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{11a^2}{12}+\frac{2a^2}{9}-\frac{h^2}{4}-h^2=R^2 \Leftrightarrow R^2=\frac{41a^2}{36}-\frac{5h^2}{4}$$

Suy ra: $V=\pi R^2.h=\pi.\left(\frac{41a^2}{36}-\frac{5h^2}{4}\right).h$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi a^3}{3}=\pi\left(\frac{41a^2}{36}-\frac{5h^2}{4}\right).h \Leftrightarrow 41a^2h-45h^3=12a^3$$

$$\Leftrightarrow 45h^3-41a^2.h+12a^3=0 \Leftrightarrow (3h-a)\left(-15h^2-5ah+12a^2\right)=0 \Leftrightarrow h=\frac{a}{3}$$

Vì phương trình: $-15h^2-5ah+12a^2=0$, có:

$\frac{c}{a}=-\frac{4}{5}<0; \frac{-b}{a}=-\frac{a}{3}<0$, tức là nó có hai nghiệm $h_{1,2}<0$, không thỏa mãn đề ra.

Khi $h=\frac{a}{3} \Rightarrow R^2=a^2 \Rightarrow R=a$

Vậy hình trụ có bán kính đáy là $R=a$, đường cao $h=\frac{a}{3}$.

Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thang cân với đáy nhỏ $AB=a$, đáy lớn $CD=4a$, cạnh bên bằng $\frac{5a}{2}$; chiều cao lăng trụ bằng h.

a). Chứng minh rằng có hình trụ nội tiếp hình lăng trụ đã cho.

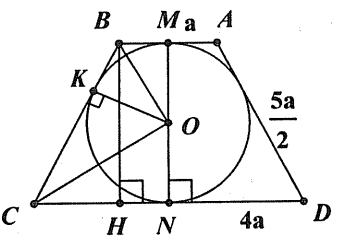
b). Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình trụ đó.

LỜI GIẢI

a). Chứng minh rằng có hình trụ nội tiếp hình lăng trụ đã cho.

Vì lăng trụ đã cho là lăng trụ đứng, nên ta chỉ cần chứng minh hình thang ABCD có đường tròn nội tiếp thì sẽ có hình trụ nội tiếp hình lăng trụ đã cho.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD; O là trung điểm của MN, kẻ $OK \perp BC$ tại K, $BH \perp CD$ tại H.



Ta có: $MN=BH=\sqrt{BC^2-HC^2}$. Mà: $BC^2=\left(\frac{5a}{2}\right)^2=\frac{25a^2}{4}$;

$HC = NC - NH = \frac{1}{2}CD - \frac{1}{2}AB = 2a - \frac{a}{2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow HC^2 = \frac{9a^2}{4}$

Do đó: $MN = \sqrt{\frac{25a^2}{4} - \frac{9a^2}{4}} = 2a \Rightarrow OM = ON = a$

Mặt khác: $OK.BC = OB.OC \Rightarrow OK = \frac{OB.OC}{BC}$

Ta có: $OB^2 = OM^2 + MB^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow OB = \frac{a\sqrt{5}}{2}$;

$OC^2 = ON^2 + NC^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2 \Rightarrow OC = a\sqrt{5}$

Do đó: $d(O, BC) = OK = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{2}.a\sqrt{5}}{\frac{5a}{2}} = a$

Tương tự ta cũng chứng minh được: $d(O, AD) = a$.

Tức là O cách đều bốn cạnh của hình thang ABCD, hay đường tròn tâm O, bán kính là a, chính là đường tròn nội tiếp ABCD.

b). Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình trụ

Theo câu a) hình trụ nội tiếp lăng trụ có bán kính $r = a$, chiều cao của hình trụ là h: $S_{tp} = 2\pi r(h + r) = 2\pi a(h + a)$; $V = \pi r^2 h = \pi a^2 h$.

Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' nội tiếp trong hình trụ cho trước, biết đường kính của đáy hình trụ bằng 5a, góc giữa đường thẳng B'D và mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng 30^0. Khoảng cách từ trục hình trụ đến mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng $\frac{3a}{2}$.

a). Tính thể tích hình hộp đã cho.

b). Tính thể tích hình cầu ngoại tiếp hình chóp.

LỜI GIẢI

a). Hình hộp nội tiếp hình trụ nên nó là hình hộp chữ nhật có đáy là hình chữ nhật ABCD nội tiếp đường tròn có đường kính $AC = 5a$.

Gọi H là trung điểm của AB, O là trung điểm của AC.

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} OH \perp AB \\ OH \perp AA' \end{matrix}\right\} \Rightarrow OH \perp (ABB'A')$.

Do đó: $d(O, (ABCD)) = OH = \frac{3a}{2} \Rightarrow BC = 2OH = 3a$

$AB = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\sqrt{\frac{25a^2}{4} - \frac{9a^2}{4}} = 4a$

Nên: $S_{ABCD} = AB.BC = 3a.4a = 12a^2$.

Vì: $DA \perp (ABB'A') \Rightarrow AB' = hch_{(ABB'A')}DB'$

$\Rightarrow \left(\widehat{B'D,(ABB'A')}\right) = \widehat{AB'D} = 30^0$

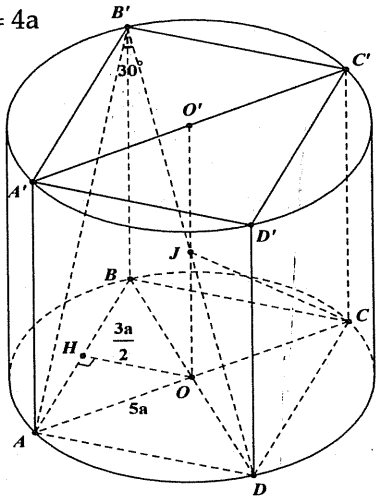
$\Rightarrow AB' = AD.\cos 30^0 = 3a\sqrt{3}$.

Do đó: $BB' = \sqrt{AB'^2 - AB^2}$

$= \sqrt{27a^2 - 16a^2} = a\sqrt{11}$

Vậy: thể tích của hình hộp là:

$V = S_{ABCD}.BB' = 12a^2.a\sqrt{11} = 12a^3\sqrt{11}$.



b). Hình cầu ngoại tiếp hình hộp có đường tròn lớn là đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $BDD'B'$ nên nó có bán kính là $R = \frac{1}{2}BD' = \frac{1}{2}6a = 3a$.

Vậy: thể tích hình cầu là: $V_{(C)} = \frac{4}{3}\pi.R^3 = \frac{4}{3}\pi.27a^3 = 36\pi a^3$.

Một khối trụ có chiều cao bằng $20(cm)$ và có bán kính đáy bằng $10(cm)$.

Người ta kẻ hai bán kính đáy OA và $O'B'$ lần lượt nằm trên hai đáy, sao cho chúng hợp với nhau một góc bằng 30^0.

Cắt mặt trụ bởi một mặt phẳng chứa đường thẳng AB' và song song với trục của khối trụ đó.

a). Tính diện tích của thiết diện tạo bởi mặt phẳng cắt hình trụ trên.

b). Hãy tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình trụ và thể tích của khối trụ.

LỜI GIẢI

a) Tính diện tích của thiết diện.

Từ một đáy của khối trụ, ta vẽ hai bán kính OA, OB sao cho $\widehat{AOB} = 30^0$.

Gọi A', O', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, O, B trên mặt đáy còn lại.

Ta có: OA và $O'B'$ tạo với nhau một góc 30^0.

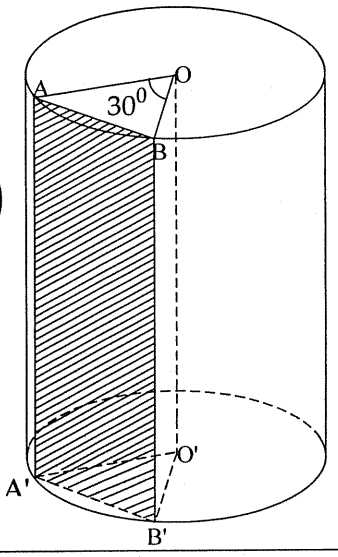
Thiết diện là hình chữ nhật $ABB'A'$ có:

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2.OA.OB.\cos 30^0 = 100\left(2 - \sqrt{3}\right) \Rightarrow AB = 10\sqrt{2 - \sqrt{3}}\,(cm)$.

Mặt khác, ta có: $AA' = BB' = OO' = 20(cm)$.

$\Rightarrow S_{ABB'A'} = AB.BB' = 10\sqrt{2-\sqrt{3}}.20$

$= 200\sqrt{2-\sqrt{3}}\left(cm^2\right).$



b) Diện tích xung quanh của hình trụ.

$S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi.OA.OO' = 2\pi.10.20 = 400\pi\left(cm^2\right)$

Diện tích toàn phần hình trụ:

$S_{tp} = S_{xq} + 2.S_{Đay} = 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 400\pi + 2\pi 10^2 = 600\pi\left(cm^2\right).$

Thể tích khối trụ:

$V = B.h = \pi r^2 h = \pi.10^2.20 = 2000\pi\left(cm^3\right).$

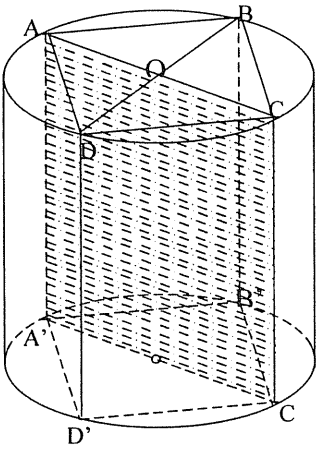
Một khối trụ có bán kính đáy bằng r và có thiết diện qua trục là một hình vuông.

a). Tính diện tích xung quanh của khối trụ đó.

b). Tính thể tích của hình lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong hình trụ đã cho.

c). Gọi V là thể tích hình lăng trụ đều nội tiếp trong hình trụ và V' là thể tích khối trụ. Hãy tính tỉ số $\frac{V}{V'}$.

LỜI GIẢI



a) Tính diện tích xung quanh của khối trụ.

Vì thiết diện qua trục hình trụ là một hình vuông nên $l = h = 2r$.

Do đó, diện tích xung quanh của khối trụ đó là: $S_{xq} = 2\pi rl = 4\pi r^2$.

b) Tính thể tích của hình lăng trụ

Gọi ABCD.A'B'C'D' là lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong hình trụ.

Ta có: hình vuông ABCD nội tiếp trong đường tròn đáy.

Do đó: $AB = r\sqrt{2}$ và thể tích khối lăng trụ là:

$V = S_{ABCD}.AA' = \left(r\sqrt{2}\right)^2.2r = 4r^3\left(Đvtt\right).$

c/ Tìm tỉ số: $\frac{V}{V'} = \frac{4r^3}{Bh} = \frac{4r^3}{\pi r^2.2r} = \frac{2}{\pi}$.

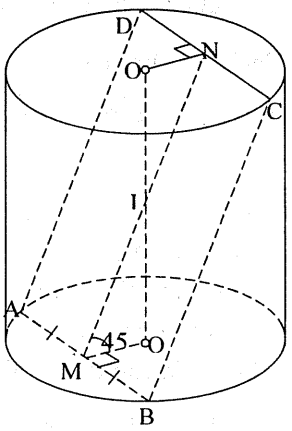
Cho một hình trụ tròn xoay và hình vuông ABCD cạnh a có hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy hình trụ góc 45^0. Tính diện tích xung quanh hình trụ và thể tích của khối trụ.

LỜI GIẢI

Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và CD.

Khi đó: $OM \perp AB$ và $O'N \perp DC$. Giả sử I là giao điểm của MN và OO'.

Đặt $R = OA$, $h = OO'$.



Trong ΔIOM vuông cân tại I nên:

$$OM = OI = \frac{\sqrt{2}}{2}IM \Rightarrow \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{a}{2} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Ta có: $R^2 = OA^2 + AM^2 + MO^2$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} = \frac{3a^2}{8}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V = \pi R^2 h = \pi \dfrac{3a^2}{8}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{16} \\ S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Trong số các khối trụ có diện tích toàn phần bằng S, khối trụ nào có thể tích lớn nhất?

LỜI GIẢI

Kí hiệu R là bán kính đáy, h là độ dài đường cao của khối trụ.

Ta có: $S = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$. Ta cần tìm R và h để $V = \pi R^2 h$ có giá trị lớn nhất.

Theo trên, ta có:

$$\Leftrightarrow \frac{S}{2\pi} = R^2 + \frac{V}{\pi R} = R^2 + \frac{V}{2\pi R} + \frac{V}{2\pi R} \overset{\text{Côsi}}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}$$

$$\Rightarrow 27\frac{V^2}{4\pi^2} \leq \left(\frac{S}{2\pi}\right)^3 \Leftrightarrow V \leq \sqrt{\frac{S^3}{54\pi}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $R^2 = \dfrac{V}{2\pi R} = \dfrac{\pi R^2 h}{2\pi R} = \dfrac{Rh}{2}$ hay $h = 2R$.

Khi đó $S = 6\pi R^2$ nên $R = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$.

Vậy:khối trụ có thể tích lớn nhất là khối trụ có $R=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ và $h=2.\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.

Cho hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai hình tròn (O,R) và (O',R). Biết rằng tồn tại dây cung AB của đường tròn (O) sao cho $\Delta O'AB$ đều và mp $(O'AB)$ hợp với mặt phẳng chứa đường tròn (O) một góc 60^0.

Tính diện tích xung quanh và thể tích hình trụ.

LỜI GIẢI

Ta có: $OO'\perp(OAB)$.

Gọi H là trung điểm của AB thì:

$OH\perp AB,\ O'H\perp AB\Rightarrow \widehat{OHO'}=60^0$.

Giả sử $OH=x$.

Khi đó: $0<x<R$ và $OO'=x\tan 60^0=x\sqrt{3}$.

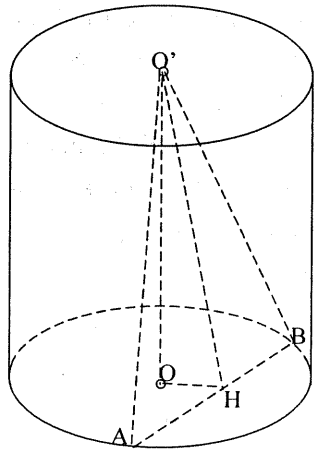
Xét ΔOAH, ta có: $AH^2=R^2-x^2$.

Vì $\Delta O'AB$ đều nên:

$O'A=AB=2AH=2\sqrt{R^2-x^2}$ (1)

Mặt khác, $\Delta AOO'$ vuông tại O nên:

$AO'^2=OO'^2+R^2=3x^2+R^2$ (2)



Từ $(1),(2)\Rightarrow 4\left(R^2-x^2\right)=3x^2+R^2\Rightarrow x^2=\frac{3R^2}{7}\Rightarrow h=OO'=x\sqrt{3}=\frac{3R\sqrt{7}}{7}$.

Vậy: nếu kí hiệu S là diện tích xung quanh và V là thể tích của hình trụ thì

Ta có: $\begin{cases} S=2\pi Rh=\dfrac{6\pi R^2\sqrt{7}}{7} \\ V=\pi R^2h=\dfrac{3\pi R^3\sqrt{7}}{7} \end{cases}$

Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R, thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông.

a). Tính diện tích và thể tích hình cầu ngoại tiếp hình trụ.

b). Một mp(P) song song với trục hình trụ, cắt đáy hình trụ theo một dây cung có độ dài bằng bán kính đáy hình trụ. Tính diện tích các thiết diện của hình trụ và hình cầu ngoại tiếp hình trụ khi cắt bởi mặt phẳng (P).

LỜI GIẢI

a). Giả sử thiết diện qua trục OO' của hình trụ là hình vuông $ABCD$.

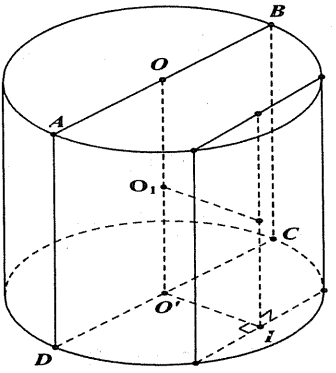
Khi đó $AB=AD=2R$.

Gọi O_1 là trung điểm của OO' thì mặt cầu tâm O_1, bán kính O_1B là mặt cầu ngoại tiếp hình trụ.

Dễ thấy $O_1B = R\sqrt{2}$.

Vậy diện tích mặt cầu là $4\pi\left(R\sqrt{2}\right) = 8\pi R^2$

Và thể tích khối cầu là: $\frac{4}{3}\pi\left(R\sqrt{2}\right) = \frac{8}{3}\pi R^3\sqrt{2}$.



b). Mặt phẳng (P) song song với OO' nên cắt hình trụ theo thiết diện là hình chữ nhật có một cạnh bằng AD, cạnh còn lại theo giả thiết bằng R.

Vậy diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi (P) là $R.2R = 2R^2$.

Vì (P) // OO' nên khoảng cách từ tâm O_1 của mặt cầu ngoại tiếp hình trụ đến (P) bằng khoảng cách từ O' đến (P) và bằng O'I (I là trung điểm của dây cung nói trong giả thiết).

Ta có: $O'I^2 = R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3R^2}{4}$. Tức là $O'I = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Vì mp (P) cắt mặt cầu trên theo đường tròn nên bán kính r của đường tròn được tính theo công thức:

$$r^2 = O_1B^2 - O'I^2 = 2R^2 - \frac{3}{4}R^2 = \frac{5R^2}{4}$$

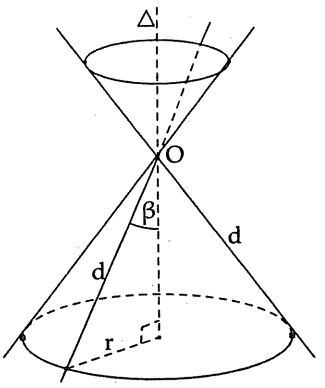
Vậy diện tích thiết diện của mặt cầu ngoại tiếp hình trụ đã cho khi cắt bởi mp (P) là $S = \frac{5\pi R^2}{4}$.

MẶT NÓN

1. Mặt nón tròn xoay

Trong mặt phẳng (P), cho 2 đường thẳng d, Δ cắt nhau tại O và chúng tạo thành góc β với $0^0 < \beta < 90^0$. Khi quay mp(P) xung quanh trục Δ với góc β không thay đổi được gọi là mặt nón tròn xoay đỉnh O (hình 1).

– Người ta thường gọi tắt mặt nón tròn xoay là mặt nón.



Hình 1

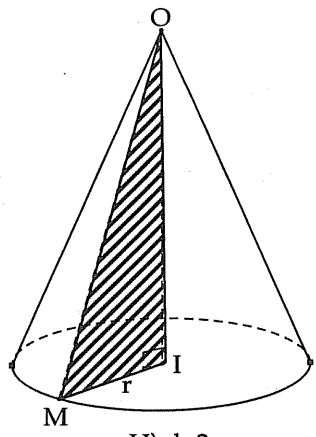
– Đường thẳng Δ gọi là trục, đường thẳng d được gọi là đường sinh và góc 2β gọi là góc ở đỉnh.

2. Hình nón tròn xoay

Cho ΔOIM vuông tại I quay quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OIM tạo thành một hình, gọi là hình nón tròn xoay (gọi tắt là hình nón) (hình 2).

– Đường thẳng OI gọi là trục, O là đỉnh, OI gọi là đường cao và OM gọi là đường sinh của hình nón.

– Hình tròn tâm I, bán kính $r = IM$ là đáy của hình nón.



Hình 2

3. Công thức diện tích và thể tích của hình nón

Cho hình nón có chiều cao là h, bán kính đáy r và đường sinh là l thì có:

– **Diện tích xung quanh:** $\square$

Diện tích đáy (hình tròn): $\square$

$\Rightarrow$ Diện tích toàn phần hình nón: $S_{tp} = S_{xq} + S_đ$

– **Thể tích khối nón:** $V_{nón} = \frac{1}{3} .S_đ.h = \frac{1}{3} \pi.r^2.h$

4. Tính chất

– Nếu cắt mặt nón tròn xoay bởi mặt phẳng **đi qua đỉnh** thì có các trường hợp sau xảy ra:

+ Mặt phẳng cắt mặt nón theo 2 đường sinh $\Rightarrow$ Thiết diện là tam giác cân.

+ Mặt phẳng tiếp xúc với mặt nón theo một đường sinh. Trong trường hợp này, người ta gọi đó là mặt phẳng tiếp diện của mặt nón.

– Nếu cắt mặt nón tròn xoay bởi mặt phẳng **không đi qua đỉnh** thì có các trường hợp sau xảy ra:

+ Nếu mặt phẳng cắt vuông góc với trục hình nón $\Rightarrow$ giao tuyến là một đường tròn.

+ Nếu mặt phẳng cắt song song với 2 đường sinh hình nón $\Rightarrow$ giao tuyến là 2 nhánh của 1 hypebol.

+ Nếu mặt phẳng cắt song song với 1 đường sinh hình nón $\Rightarrow$ giao tuyến là 1 đường parabol.

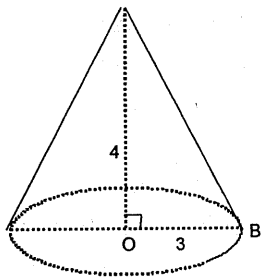
BÀI TẬP GIẢI CHI TIẾT

Trong không gian cho tam giác vuông OAB tại O có OA = 4, OB = 3. Khi quay tam giác vuông OAB quanh cạnh góc vuông OA thì đường gấp khúc OAB tạo thành một hình nón tròn xoay.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón .

b) Tính thể tích của khối nón.

LỜI GIẢI



a) Có $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 5$.

$S_{xq} = \pi Rl = \pi .OB.AB = 15\pi$.

$S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = 15\pi + 9\pi = 24\pi$.

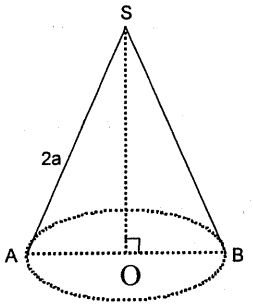
b) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi.OB^2.OA = \frac{1}{3}\pi.3^2.4 = 12\pi$

Một hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh 2a.

a). Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón.

b). Tính thể tích của khối nón.

LỜI GIẢI



a) $S_{xq} = \pi Rl = \pi .OB.SB = 2\pi a^2$

$S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = 2\pi a^2 + \pi a^2 = 23\pi a^2$

b) Vì SO là đường cao của Δ SAB , nên:

$SO = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

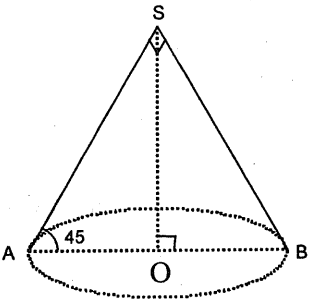
$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi.OB^2.SO = \frac{1}{3}\pi.a^2.a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Một hình nón có chiều cao bằng a và thiết diện qua trục là tam giác vuông.

a). Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón

b). Tính thể tích của khối nón

LỜI GIẢI



a) Thiết diện qua trục là tam giác SAB vuông cân tại S nên $\widehat{A} = \widehat{B} = 45^0$

Theo đề bài có $OS = OA = OB = a$

$\Rightarrow AB = 2a, SA = a\sqrt{2}$

$S_{xq} = \pi Rl = \pi .OA.SA = \pi a^2\sqrt{2}$

$S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = \pi a^2\sqrt{2} + \pi a^2 = (1+\sqrt{2})\,\pi a^2$

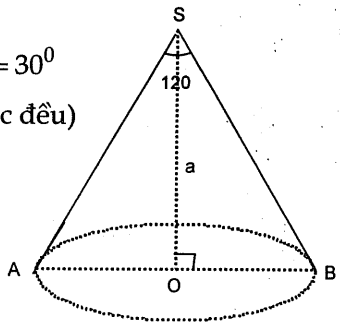
b) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi.OA^2.SO = \frac{1}{3}\pi.a^2.a = \frac{\pi a^3}{3}$.

Một hình nón có đường cao bằng a, thiết diện qua trục có góc ở đỉnh bằng 120^0.

a). Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón

b). Tính thể tích của khối nón.

LỜI GIẢI



a) Thiết diện qua trục là ΔSAB cân tại S nên $\widehat{A} = \widehat{B} = 30^0$

Tính: $OA = a\sqrt{3}$; $SA = 2a$ (vì Δ SOA nửa tam giác đều)

$S_{xq} = \pi Rl = \pi.OA.SA = \pi.a\sqrt{3}.2a = 2\pi a^2\sqrt{3}$

$S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = 2\pi a^2\sqrt{3} + 3\pi a^2 = \left(2\sqrt{3}+3\right)\pi a^2$

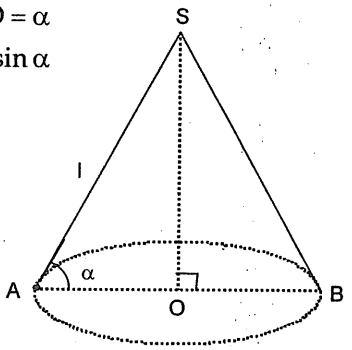
b) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi.OA^2.SO = \frac{1}{3}\pi.3a^2.a = \pi a^3$.

Một hình nón có độ dài đường sinh bằng l và góc giữa đường sinh và mặt đáy bằng α.

a). Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón

b). Tính thể tích của khối nón.

LỜI GIẢI



a) Góc giữa đường sinh và mặt đáy là $\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \alpha$

Vì Δ SOA vuông tại O, có $OA = l\cos\alpha$, $SO = l\sin\alpha$

$S_{xq} = \pi Rl = \pi.OA.SA = \pi.l\cos\alpha.l = \pi l^2\cos\alpha$

$S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = \pi l^2\cos\alpha + \pi l^2\cos^2\alpha$

$= \left(1+\cos\alpha\right)\pi l^2\cos\alpha$

b) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi.OA^2.SO$

$= \frac{1}{3}\pi.l^2\cos^2\alpha.l\sin\alpha = \frac{\pi l^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{3}$

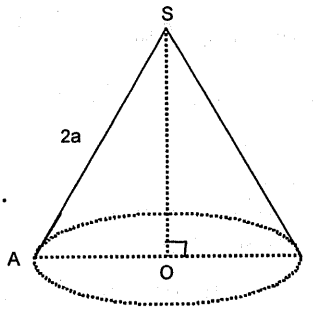
Một hình nón có đường sinh bằng 2a và diện tích xung quanh của mặt nón bằng $2\pi a^2$. Tính thể tích của hình nón.

LỜI GIẢI

$S_{xq} = \pi Rl \Leftrightarrow \pi Rl = 2\pi a^2 \Rightarrow R = \dfrac{2\pi a^2}{\pi l} = \dfrac{2a^2}{2a} = a$

Tính: $SO = a\sqrt{3}$ (Δ_v SOA tại O)

$V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi.OA^2.SO = \dfrac{1}{3}\pi.a^2.a\sqrt{3} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.



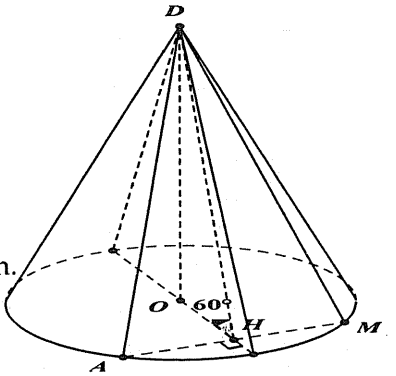
Một hình nón tròn xoay có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có cạnh bằng a. Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình nón đó.

Một mặt phẳng đi qua đỉnh tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Tính diện tích thiết diện được tạo nên.

LỜI GIẢI

a) Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác vuông cân cạnh a nên hình nón có đường sinh $\ell = a$, có bán kính đáy:

$r = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, và có chiều cao $h = r = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Gọi S_{xq} là diện tích xung quanh của hình nón.

Ta có: $S_{xq} = \pi rl = \pi\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.a = \dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$

Gọi S là diện tích đáy của hình nón, ta có $S = \pi r^2 = \pi\dfrac{a^2}{2}$

Vậy: diện tích toàn phần của hình nón đã cho là:

$S_{tp} = S_{xq} + S = \dfrac{1}{2}\pi a^2\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\pi a^2 = \dfrac{1}{2}\pi a^2\left(\sqrt{2}+1\right)$

Hình nón có thể tích là: $V = \dfrac{1}{3}Bh = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{12}\pi a^3\sqrt{2}$.

b) Xét mặt phẳng (DAM) đi qua đỉnh D tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0, cắt đường tròn đáy tại hai điểm A và M. Từ tâm O của đường tròn đáy ta kẻ $OH \perp AM$, do vậy H là trung điểm của đoạn AM.

Ta có $AM \perp (DOH)$ vì $AM \perp OH$ và $AM \perp DO$.

Vậy: $\widehat{DOH} = 60^0$ và $\sin 60^0 = \dfrac{DO}{DH}$ hay $DH = \dfrac{DO}{\sin 60^0} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Gọi $S_{\Delta DAM}$ là diện tích thiết diện cần tìm, ta có $S_{\Delta ADM} = AH.DH$

Mà $AH^2 = DA^2 - DH^2 = a^2 - \frac{2a^2}{3} = \frac{a^2}{3}$, suy ra $AH = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Vậy: $S_{\Delta DAM} = AH.DH = \frac{a}{\sqrt{3}}.\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có chiều cao $SO = h$ và góc $\widehat{SAB} = \alpha$ $\left(\alpha > 45^0\right)$. Tính diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S có đường tròn đáy ngoại tiếp hình vuông ABCD của hình chóp.

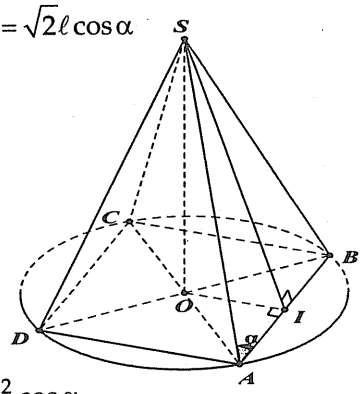
LỜI GIẢI

Gọi r là bán kính đáy của hình nón.

Ta có: $OA = r, SO = h$ và $SA = SB = SC = SD = l$ là đường sinh của hình nón.

Gọi I là trung điểm của đoạn AB.

Ta có: $\begin{cases} SA^2 = SO^2 + OA^2 \\ AI = SA.\cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l^2 = h^2 + r^2 \\ \frac{r\sqrt{2}}{2} = l\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow r = \sqrt{2}\ell\cos\alpha$



$\Rightarrow l^2 = h^2 + 2l^2\cos^2\alpha \Rightarrow h^2 = l^2\left(1 - 2\cos^2\alpha\right)$

$\Rightarrow l^2 = \frac{h^2}{1 - 2\cos^2\alpha} \Rightarrow l = \frac{h}{\sqrt{1 - 2\cos^2\alpha}}$

Do đó: $r = \sqrt{2}l\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}h\cos\alpha}{\sqrt{1 - 2\cos^2\alpha}}$.

$S_{xq} = \pi rl = \pi.\frac{\sqrt{2}h\cos\alpha}{\sqrt{1 - 2\cos^2\alpha}}.\frac{h}{\sqrt{1 - 2\cos^2\alpha}} = \frac{\pi\sqrt{2}h^2\cos\alpha}{1 - 2\cos^2\alpha}$.

Chứng minh rằng trong một khối nón tròn xoay, góc ở đỉnh là góc lớn nhất trong số các góc được tạo nên bởi hai đường sinh của khối nón đó.

LỜI GIẢI

Xét hai đường sinh SA, SB tùy ý của hình nón.

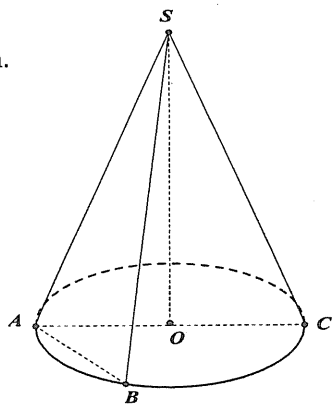
Vẽ đường kính AC của đường tròn đáy.

Ta có góc ASC là góc ở đỉnh của hình nón.

Hai tam giác ASC và ASB có hai cặp cạnh bằng nhau vì chúng cùng là đường sinh của hình nón.

Ta có: cạnh $AC \geq AB$ nên $\widehat{ASC} \geq \widehat{ASB}$.

Đó là điều cần chứng minh.



Cho khối nón có bán kính đáy $r = 12cm$ và có góc ở đỉnh là $\alpha = 120^0$. Hãy tính diện tích của thiết diện đi qua hai đường sinh vuông góc với nhau.

LỜI GIẢI

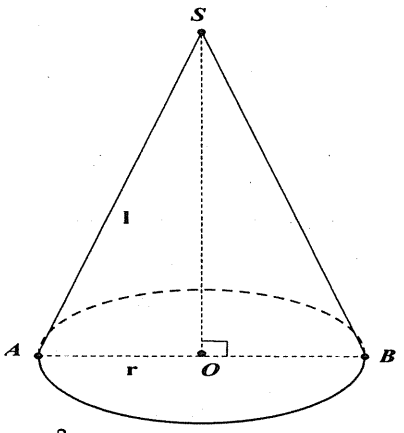
Theo giả thiết ta có góc ở đỉnh của hình nón là $\widehat{ASB} = \alpha = 120^0$.

Gọi O là tâm của đường tròn đáy.

Ta có: $\widehat{ASO} = 60^0$, và $\sin 60^0 = \dfrac{OA}{SA} = \dfrac{r}{l}$

(với l là độ dài đường sinh của hình nón).

Vậy: $\ell = \dfrac{r}{\sin 60^0} = \dfrac{12}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{24}{\sqrt{3}}$.



Khi có hai đường sinh vuông góc với nhau.

Ta có: tam giác vuông có diện tích là $\dfrac{1}{2}\ell^2$.

Do đó diên tích của thiết diện là : $S = \dfrac{1}{2}l^2 = \dfrac{1}{2}.\dfrac{24^2}{3} = 96\left(cm^2\right)$.

Một mặt phẳng (α) đi qua hai đường sinh của hình nón, cắt mặt đáy hình nón theo một dây cung có độ dài gấp k lần đường cao hình nón. Tính góc φ giữa mặt phẳng (α) và mặt đáy hình nón nếu φ bằng nửa góc tạo bởi hai đường sinh của hình nón nằm trên mp(α).

LỜI GIẢI

Giả sử O là tâm của đáy hình nón và mặt phẳng (α) đi qua hai đường sinh SA, SB.

Gọi I là trung điểm của AB thì $OI \perp AB$ và $SI \perp AB$, từ đó $\widehat{SIO} = \varphi$.

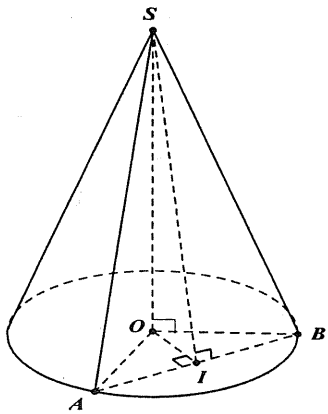
Theo giả thiết $\varphi = \widehat{ISB}$.

Từ tam giác vuông SIO, ta có $\sin\varphi = \dfrac{SO}{SI}$.

Từ tam giác vuông SIB, ta cũng có $\tan\varphi = \dfrac{IB}{SI}$

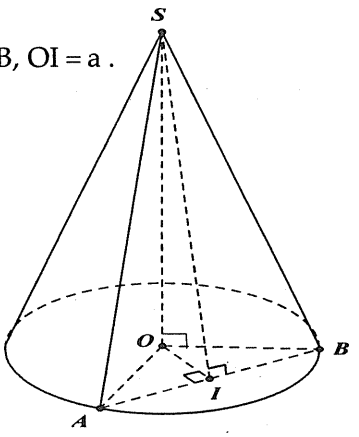
Từ đó suy ra: $\dfrac{\sin\varphi}{\tan\varphi} = \dfrac{SO}{IB} = \dfrac{SO}{\dfrac{k}{2}SO} = \dfrac{2}{k}$.

Vậy: $\cos\varphi = \dfrac{2}{k}$.



Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO. Gọi A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a và $\widehat{SAO} = 30^0$, $\widehat{SAB} = 60^0$. Tính diện tích xung quanh hình nón.

LỜI GIẢI



Gọi I là trung điểm của AB thì: $OI \perp AB$, $SI \perp AB$, $OI = a$.

Ta có: $AO = SA.\cos\widehat{SAO} = \frac{\sqrt{3}}{2}SA$;

$AI = SA.\cos\widehat{SAI} = \frac{1}{2}SA$

Từ đó: $\frac{AI}{AO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Mặt khác $\frac{AI}{AO} = \cos\widehat{IAO} \Rightarrow \sin\widehat{IAO} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{a}{OA}$

Vậy: $OA = \frac{3a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

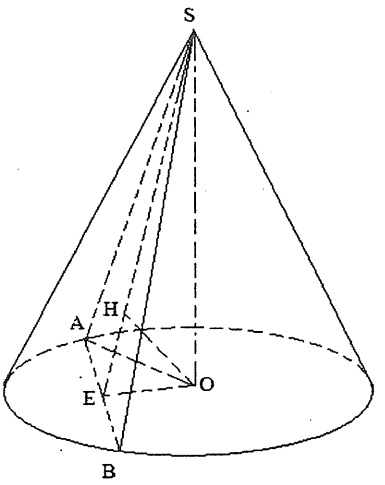
Xét tam giác SAO, ta có: $SA = \frac{OA}{\cos 30^0} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}} = a\sqrt{2}$

Từ đó diện tích xung quanh của hình nón đã cho là:

$S_{xq} = \pi.OA.SA = \pi.\frac{a\sqrt{6}}{2}.a\sqrt{2} = \pi a^2\sqrt{3}$.

Cho hình nón có đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O, SA và SB là hai đường sinh, biết SO = 3, khoảng cách từ O đến mặt phẳng SAB bằng 1, diện tích tam giác SAB bằng 18. Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình nón đã cho.

LỜI GIẢI



Gọi E là trung điểm của AB.

Ta có: $OE \perp AB, SE \perp AB \Rightarrow (SOE) \perp AB$.

Dựng $OH \perp SE \Rightarrow OH \perp (SAB)$.

Vậy: OH là khoảng cách từ O đến (SAB).

Theo giả thiết thì OH = 1.

ΔSOE vuông tại O, OH là đường cao.

Ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OE^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{SO^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

$$\Rightarrow OE^2 = \frac{9}{8} \Rightarrow OE = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$SE^2 = OE^2 + SO^2 = \frac{9}{8} + 9 = \frac{81}{8} \Rightarrow SE = \frac{9}{2\sqrt{2}}$$

$$S_{SAB} = \frac{1}{2}AB.SE \Leftrightarrow AB = \frac{2S_{SAB}}{SE} = \frac{36}{\frac{9}{2\sqrt{2}}} = 8\sqrt{2}$$

$$OA^2 = AE^2 + OE^2 = \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + OE^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 + \frac{9}{8} = 32 + \frac{9}{8} = \frac{265}{8}$$

Thể tích hình nón đã cho: $V = \frac{1}{3}\pi.OA^2.SO = \frac{1}{3}\pi\frac{265}{8}.3 = \frac{265}{8}\pi$

Diện tích xung quanh của hình nón đã cho:

$$SA^2 = SO^2 + OA^2 = 9 + \frac{265}{8} = \frac{337}{8} \Rightarrow SA = \sqrt{\frac{337}{8}}$$

$$S_{xq} = \pi.OA.SA = \pi\sqrt{\frac{265}{8}}.\sqrt{\frac{337}{8}} = \pi\frac{\sqrt{89305}}{8}$$

Một hình nón tròn xoay có đường cao $h = 20cm$, bán kính đáy $r = 25cm$.

a). Tính diện tích xung quanh hình nón đã cho.

b). Tính thể tích khối nón tạo nên bởi hình nón đó.

c). Một thiết diện đi qua đỉnh có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là $12(cm)$. Tính diện tích thiết diện đó.

LỜI GIẢI

Gọi S là đỉnh của hình nón.

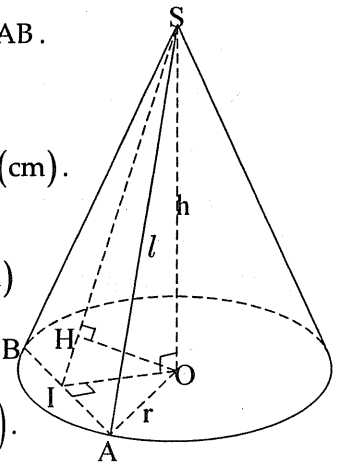
Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S cắt khối nón theo hai đường sinh bằng nhau.

$SA = SB = l$ nên ta có thiết diện là tam giác cân SAB.

Gọi I là trung điểm của đoạn $AB \Rightarrow OI \perp AB$.

Từ tâm O, ta kẻ $OH \perp SI$ tại H.

Ta có: $OH \perp mp(SAB) \Rightarrow OH = d[O,(SAB)] = 12(cm)$.



a) Tính diện tích xung quanh hình nón đã cho.

Ta có: $SA = \sqrt{AO^2 + SO^2} = \sqrt{20^2 + 25^2} = 5\sqrt{41}(cm)$

(Pitago trong tam giác vuông SAO)

Diện tích xung quanh của hình nón:

$S_{xq} = \pi.r.l = \pi.OA.SA = \pi.25.5\sqrt{41} = 125\pi\sqrt{41}(cm^2)$.

b) Thể tích của khối nón: $V_{non} = \frac{1}{3}\pi.r^2.h = \frac{1}{3}\pi.25^2.20 = \frac{12500\pi}{3}\left(cm^3\right)$.

c) Tính diện tích của thiết diện $S_{\Delta SAB}$

Diện tích thiết diện: $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}AB.SI = \frac{1}{2}.2IA.SI = IA.SI \quad (1)$.

Xét tam giác vuông SOI, ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OS^2} \Rightarrow OI = 15(cm)$.

Mặt khác, xét tam giác vuông SOI thì:

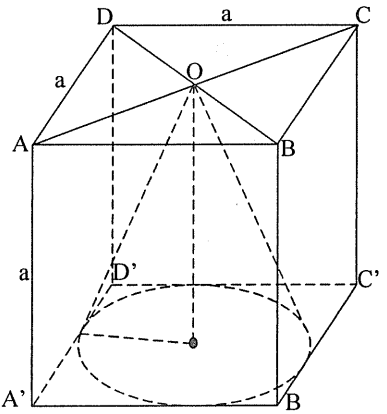
$OI.OS = SI.OH \Rightarrow SI = \frac{OS.OI}{OH} = \frac{20.15}{12} = 25(cm) \quad (2)$.

Trong tam giác vuông AIO: $IA = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20(cm) \quad (3)$

Thay $(2),(3)$ vào $(1) \Rightarrow S_{\Delta SAB} = 20.25 = 500\left(cm^2\right)$.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a. Hãy tính diện tích xung quanh và thể tích của khối nón có đỉnh là tâm O của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$.

LỜI GIẢI



Khối nón có chiều cao bằng a,

và bán kính đáy $r = \frac{a}{2}$.

Diện tích xung quanh khối nón:

$S_{xq} = \pi rl = \pi.a.\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\pi a^2\sqrt{5}}{4}(Đvdt)$.

Thể tích của khối nón:

$V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 a = \frac{1}{12}\pi a^3\left(Đvtt\right)$.

Thiết diện đi qua trục của hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$.

a). Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón, giả sử nó có đỉnh là S.

b). Tính thể tích của khối nón tương ứng.

c). Cho dây cung BC của đường tròn đáy hình nón, sao cho $mp(SBC)$ tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc 60^0. Tính diện tích tam giác SBC.

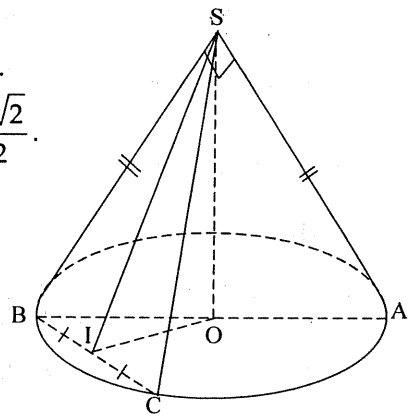
LỜI GIẢI

Do thiết diện đi qua trục là tam giác vuông cân (ΔSAB vuông cân tại đỉnh S) có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$ nên ΔSAB là nửa hình vuông với đường chéo hình vuông là $AB = a\sqrt{2}$.

$\Rightarrow$ đường sinh hình nón: $\ell = SA = SB = a$.

Đường cao hình nón là: $h = SO = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Và bán kính đáy: $r = h = SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



a) Tính diện tích xung quanh hình nón.

$$S_{xq} = \pi rl = \pi.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}(\text{Đvdt})$$

Diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{đ} = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2} + \pi r^2 = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2} + \frac{a^2\pi}{2} = \frac{\pi a^2\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}$$

Thể tích khối nón tương ứng: $V = \dfrac{1}{3}B.h = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{a^3\pi\sqrt{2}}{12}(\text{Đvtt})$

b) Tính diện tích thiết diện $(S_{\Delta SBC})$

Gọi I là trung điểm của BC và kẻ $OH \perp SI$ tại H.

Đặt mặt phẳng chứa đáy hình nón là $mp(\alpha)$.

Ta có: $\begin{cases} mp(SBC) \cap mp(\alpha) = BC \\ BC \perp OI \subset mp(\alpha) \\ BC \perp SI \subset mp(SBC) \end{cases} \Rightarrow \left[\widehat{mp(SBC);mp(\alpha)}\right] = \widehat{SIO} = 60^0$.

Trong tam giác vuông SIO (vuông tại O), ta có:

$$\sin\widehat{SIO} = \frac{SO}{SI} \Rightarrow SI = \frac{SO}{\sin 60^0} = \frac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Trong tam giác vuông SIB (vuông tại I), ta có:

$$BC = 2IB = 2.\sqrt{SB^2 - SI^2} = 2\sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Do đó: diện tích thiết diện cần tìm là:

$$S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}SI.BC = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}(\text{Đvdt}).$$

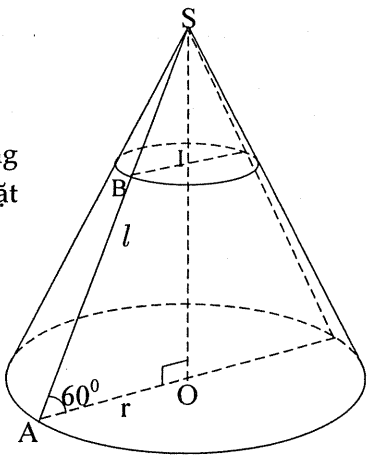
Mặt nón tròn xoay có đỉnh là S, O là tâm của đường tròn đáy, đường sinh bằng $a\sqrt{2}$ và góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy bằng 60^0.

a). Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình nón và thể tích của khối nón được tạo nên.

b). Gọi I là một điểm trên đường cao SO của hình nón sao cho tỉ số $\frac{SI}{SO}=\frac{1}{3}$.

Tính diện tích của thiết diện qua I và vuông góc với trục của hình nón.

LỜI GIẢI



a) Tính diện tích xung quanh của hình nón:

$S_{xq}=\pi rl=\pi.AO.SA$ (1)

Do AO là hình chiếu của SA lên mặt phẳng đáy, nên góc giữa đường sinh SA và mặt phẳng đáy là $\widehat{SAO}=60^0$.

Trong tam giác vuông SAO: $\cos 60^0=\frac{AO}{SA}$

$$\Rightarrow\begin{cases}SA=a\sqrt{2}\\AO=SA.\cos 60^0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}SA=a\sqrt{2}\\AO=\frac{a\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

Thay (2) vào $(1)\Rightarrow S_{xq}=\pi.a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}=\pi a^2\,(Đvdt)$.

Diện tích toàn phần của hình nón:

$$S_{tp}=S_{xq}+S_{đ}=\pi a^2+\pi r^2=\pi a^2+\frac{\pi a^2}{2}=\frac{3\pi a^2}{2}(Đvdt).$$

Thể tích của khối nón tròn xoay:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi AO^2.SO=\frac{1}{3}\pi.\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.SA.\sin 60^0$$

$$=\frac{1}{6}\pi a^2.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{12}\,(Đvtt).$$

b) Tính diện tích của thiết diện

Thiết diện qua I và vuông góc với trục của hình nón là một hình tròn có bán kính là IB như hình vẽ. Gọi diện tích của hình tròn này là S_{td}.

Do $\Delta SIB\sim\Delta SOA\Rightarrow\frac{SI}{SO}=\frac{IB}{OA}\Leftrightarrow IB=\frac{SI}{SO}.OA=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{6}$

$\Rightarrow S_{td} = \pi.IB^2 = \dfrac{\pi a^2}{18}$ (Đvdt).

Cho hình nón đỉnh S với đáy là đường tròn tâm O, bán kính R, chiều cao của hình nón bằng 2R. Gọi I là một điểm nằm trên mặt phẳng đáy sao cho $IO = 2R$. Giả sử A là điểm nằm trên đường tròn (O,R) sao cho $OA \perp OI$.

a). Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích của khối nón tạo thành.

b). Gọi M là một điểm di động trên SA, IM cắt mặt nón tại điểm thứ hai là N. Chứng minh rằng N di động trên một đường thẳng cố định.

c). Chứng minh rằng hình chiếu K của O trên IM di động trên một đường tròn cố định đi qua trực tâm H của ΔSAI.

LỜI GIẢI

a) Diện tích xung quanh của hình nón

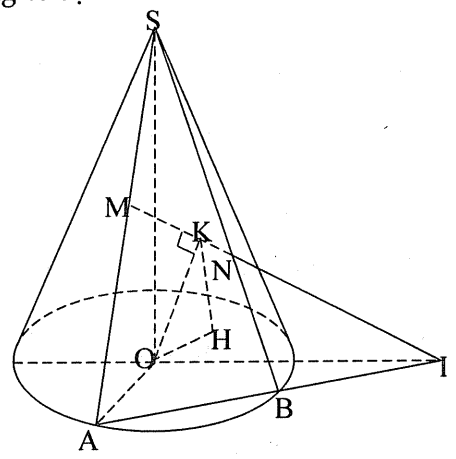
Trong tam giác vuông $\Delta SOA: SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{R^2 + 4R^2} = R\sqrt{5}$

$\Rightarrow S_{xq} = \pi rl = \pi R.R\sqrt{5} = \pi R^2\sqrt{5}$.

<u>Thể tích khối nón</u>: $V = \dfrac{1}{3}\pi OA^2.SO = \dfrac{1}{3}\pi R^2 2R = \dfrac{2\pi R^3}{3}$.

b) CMR: N di động trên một đường thẳng cố định.

Gọi Ω là mặt xung quanh của mặt nón đã cho và $mp(\alpha)$ là mặt phẳng đi qua các điểm S, A, I.



Ta có: $\begin{cases} N \in \Omega \\ N \in mp(\alpha) \ (do N \in IM) \end{cases}$

$\Rightarrow N \in mp(\alpha) \cap \Omega$

Vậy: N di động trên đoạn SB là giao tuyến thứ hai của $mp(\alpha)$ và Ω (B là giao điểm thứ hai của IA và đường tròn đáy).

c) CMR: Hình chiếu K của O trên IM di động trên một đường tròn cố định đi qua trực tâm H của ΔSAI.

Dễ thấy: trực tâm H của ΔSAI chính là hình chiếu vuông góc của O trên $mp(SAI)$.

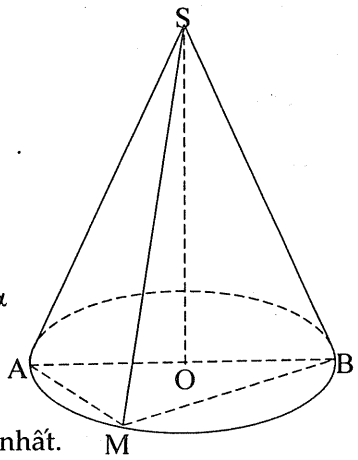
Do: $\begin{cases} OH \perp (SAI) \Rightarrow OH \perp IM \\ OK \perp IM \end{cases} \Rightarrow IM \perp (OHK) \Rightarrow HK \perp IM \Rightarrow \widehat{HKI} = 90^0$.

Vậy: K di động trên đường tròn, đường kính IH trong mp(α).

Hiển nhiên, đường tròn này đi qua H và nó là đường tròn cố định.

Cho hình nón tròn xoay có bán kính đáy R và chiều cao h. Trong tất cả các mặt phẳng đi qua đỉnh của hình nón, hãy xác định mặt phẳng cắt hình nón theo thiết diện có diện tích lớn nhất và tính diện tích lớn nhất đó.

LỜI GIẢI



Giả sử AB là một đường kính của đường tròn đáy hình nón, O là tâm đáy.

Mặt phẳng qua đỉnh của hình nón cắt hình nón theo thiết diện là tam giác cân SAM có:

$SA = SM = \sqrt{h^2 + R^2}$ (không đổi).

Ta có: $S_{\Delta ASM} = \frac{1}{2} SA.SM.\sin\widehat{ASM} = \frac{1}{2} SA^2 \sin\alpha$ với

$= \frac{1}{2}\left(h^2 + R^2\right)\sin\alpha \ \left(\alpha = \widehat{ASM}\right)$.

Do đó: $S_{\Delta ASM}$ lớn nhất khi và chỉ khi $\sin\alpha$ lớn nhất.

Vậy: – Nếu $\widehat{ASB} < 90^0$, nghĩa là $h > R$ thì $\sin\alpha$ lớn nhất khi $\sin\alpha = \sin\widehat{ASB}$.

Lúc đó: $\max S_{\Delta SAM} = h.R$.

– Nếu $\widehat{ASB} \geq 90^0$, nghĩa là $h \leq R$ thì $\sin\alpha$ lớn nhất bằng 1.

Lúc đó: $\max S_{\Delta SAM} = \frac{1}{2}\left(h^2 + R^2\right)$.

Cho lăng trụ ABC.A'B'C', đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh A. Mặt bên AA'B'B là hình thoi cạnh a nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt bên AA'C'C tạo với mặt đáy góc α.

a). Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' theo a và α.

b). Tình khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BB' theo a.

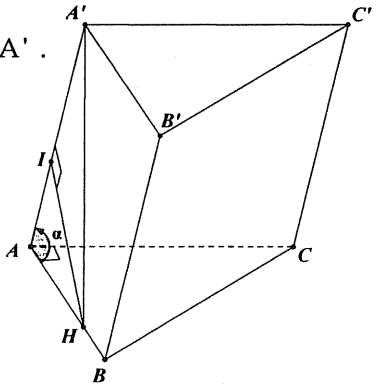
LỜI GIẢI

a). Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C'

Hai mp (ABB'A') và mp (ABC) vuông góc với nhau theo giao tuyến AB.

Trong mp (ABB'A'), dựng: $A'H \perp AB \Rightarrow A'H \perp (ABC)$.

Có: $\begin{cases} AC \perp AB \\ AC \perp A'H \end{cases} \Rightarrow AC \perp (ABB'A') \Rightarrow AC \perp AA'$.



Vậy: góc giữa (ACC'A') và (ABC) là góc $\widehat{BAA'} = \alpha$.

Ta có: $HA' = AA'.\sin\alpha = a.\sin\alpha$;

$HA = AA'.\cos\alpha = a.\cos\alpha$.

Thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C':

$$V = HA'.S_{\Delta ABC} = a.\sin\alpha.\frac{1}{2}a^2 = \frac{a^3.\sin\alpha}{2}.$$

b). Tình khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BB'

$BB' // AA' \Rightarrow BB' // (ACC'A')$.

Nên $d(BB', AC) = d(BB', (ACC'A')) = d(B, (ACC'A'))$.

Vì hai mp (ABB'A') và (ACC'A') vuông góc với nhau theo giao tuyến AA'.

Dựng $HI \perp AA' \ (I \in AA') \Rightarrow HI \perp (ACC'A')$.

Vậy: $d(H, (ACC'A')) = HI$.

Trong $\Delta AHA'$ có: $HI.AA' = HA.HA'$

$\Leftrightarrow HI.a = a.\cos\alpha.a.\sin\alpha \Rightarrow HI = a.\sin\alpha.\cos\alpha$.

Hai điểm B và H nằm trên đường thẳng có giao điểm với mp(ACC'A') tại A

nên có: $\dfrac{d(B, (ACC'A'))}{d(H, (ACC'A'))} = \dfrac{BA}{HA} = \dfrac{a}{a.\cos\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

$\Rightarrow d(B, (ACC'A')) = a.\sin\alpha$.

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C', đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AC = a$, $\widehat{C} = 60^0$, AC' tạo với mặt bên (BB'C'C) góc 30^0.

a) Tính AC' theo a.

b) Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' theo a.

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và BC theo a.

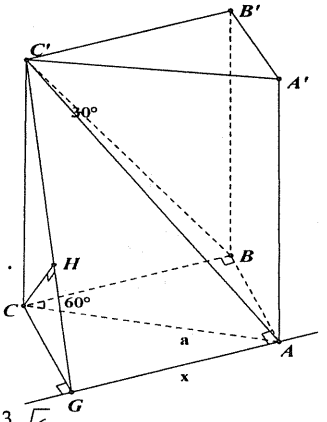
LỜI GIẢI

a). Tính AC':

Trong ΔABC có: $BC = AC.\cos 60^0 = \frac{a}{2}$; $AB = AC.\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCC'B')$.

$\Rightarrow$ BC' là hình chiếu vuông góc của AC' trên mp(BCC'B'). Vậy góc giữa AC' và mp (BCC'B') là góc $\widehat{AC'B} = 30^0$.



Trong $\Delta ABC'$ vuông tại B có: $AC' = \frac{AB}{\sin 30^0} = a\sqrt{3}$.

b). Trong $\Delta ACC'$ vuông tại C có:

$CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

$V = CC'.S_{\Delta ABC} = CC'.\frac{1}{2}BA.BC = a\sqrt{2}.\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và BC

Kẻ $Ax // BC \Rightarrow BC // (Ax, AC')$.

Vậy: $d(BC, AC') = d(BC, (Ax, AC')) = d(C, (Ax, AC'))$.

Dựng $CG \perp Ax (G \in Ax)$, có $Ax \perp CC'$.

Suy ra: $Ax \perp (CGC') \Rightarrow (Ax, AC') \perp (CGC')$.

Hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến C'G.

Dựng $CH \perp C'G (H \in C'G)$ thì: $CH \perp (Ax, AC')$.

Vậy: $d(C, (Ax, AC')) = CH$.

Dễ dàng chứng minh ABCG là hình chữ nhật $\Rightarrow CG = AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong $\Delta CGC'$ có: $\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CG^2} + \frac{1}{CC'^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{11}{6a^2} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{66}}{11}$.

Kết luận: $d(BC, AC') = \frac{a\sqrt{66}}{11}$.

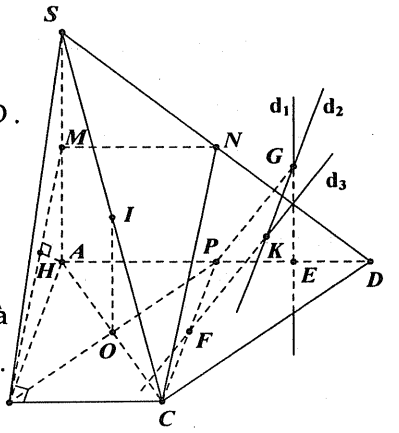
Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A, B với AD = 2AB = 2BC = 2a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy ABCD và góc giữa mặt phẳng (SCD) và đáy ABCD bằng 60^0. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SD và AD.

a). Tính thể tích khối đa diện ADCBMN .

b). Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCP .

c). Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện S.CDP .

LỜI GIẢI



a). Tính thể tích khối đa diện ADCBMN .

Ta có: CP là đường trung tuyến và $CP = \frac{1}{2}AD$.

Nên ΔACD vuông tại C.

Ta có: $CD \perp AC$ và $CD \perp SA$

$\Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp SC$.

Vậy: góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD) là góc giữa SC và AC là góc $\widehat{SCA} = 60^0$.

Ta có: ABCP là hình vuông có $AC = a\sqrt{2}$.

Trong ΔSAC có: $SA = AC.\tan 60^0 = a\sqrt{6}$.

Vì: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp BM$.

Ta có BC và MN cùng song song và bằng một nửa AD, nên tứ giác BCMN là hình bình hành và có $BC \perp BM$ vậy BCMN là hình chữ nhật.

Hai mặt phẳng (SAB) và (BCMN) vuông góc với nhau theo giao tuyến BM.

Dựng $AH \perp BM$ tại H suy ra $AH \perp (BCMN) \Rightarrow d(A,(BCMN)) = AH$.

Trong ΔSAB có: $BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{6a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$;

Và $AH.BM = AB.AM \Leftrightarrow AH.\frac{a\sqrt{10}}{2} = a.\frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Vì M là trung điểm của SA nên $d(S,(BCMN)) = d(A,(BCMN)) = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

$$V_{ADCBMN} = V_{S.ABCD} - V_{S.CBMN} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} - \frac{1}{3}d(S,(CBMN)).S_{CBMN}$$

$$= \frac{1}{3}.SA.\frac{(AD+BC).AB}{2} - \frac{1}{3}d(S,(CBMN)).BC.BM$$

$$= \frac{1}{3}.a\sqrt{6}.\frac{3a^2}{2} - \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{15}}{5}.a.\frac{a\sqrt{10}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$$

Kết luận: $V_{ADCBMN} = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

b). Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCP .

Gọi O là tâm của hình vuông ABCP, I là trung điểm của SC.

Ta có: IO // SA nên $IO \perp (ABCD)$.

$\Rightarrow$ IO là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCP

$\Rightarrow$ IA = IB = IC = IP mà IS = IC .

Từ đó suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCP và bán kính $R = \frac{SC}{2}$.

c). Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện S.CDP .

Ta có: $\begin{cases} CP \perp AD \\ CP \perp SA \end{cases} \Rightarrow CP \perp mp(SAD)$.

Gọi K trung điểm của PD. Dựng d_1 qua K và song song với SA, suy ra d_1 là đường trung trực của đoạn PD.

Gọi G là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SPD thì $G \in d_1$.

Suy ra PG là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SPD.

Pitago cho các tam giác vuông SAP và SAD có:

$SP = \sqrt{SA^2 + AP^2} = \sqrt{6a^2 + a^2} = a\sqrt{7}$; $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{6a^2 + 4a^2} = a\sqrt{10}$

Diện tích tam giác SPD: $S_{\Delta SPD} = \frac{1}{2}.SA.PD = \frac{1}{2}.a\sqrt{6}.a = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

Ngoài ra: $S_{\Delta SPD} = \frac{SP.PD.SD}{4.PG} \Rightarrow PG = \frac{a\sqrt{7}.a.a\sqrt{10}}{4.\frac{a^2\sqrt{6}}{2}} = \frac{a\sqrt{105}}{6}$.

Qua G kẻ đường thẳng d_2 vuông góc với mặt phẳng (SPD) thì d_2 // CP.

Trong mặt phẳng (CPG), kẻ đường trung trực d_3 của CP, d_3 cắt d_2 tại điểm K. K chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.CDP.

Tính bán kính mặt cầu.

Trong tam giác PGK vuông tại G có:

$$KP^2 = KG^2 + PG^2 = PF^2 + PG^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{35a^2}{12} = \frac{19a^2}{6} \Rightarrow R = KP = \frac{a\sqrt{114}}{6}.$$

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C', đáy ABC là tam giác đều cạnh a, BC' tạo với mặt bên AA'B'B góc 30^0.

a). Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ ABC.A'B'C' theo a .
b). Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C'.
c). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và BC theo a .

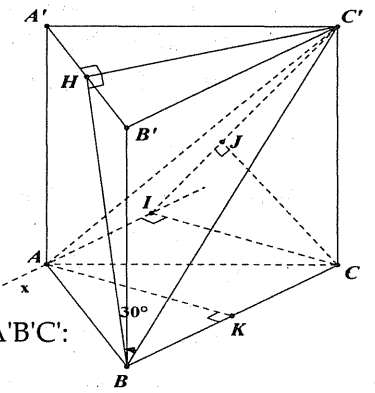
LỜI GIẢI

a). Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ

Gọi H là trung điểm của A'B'.

Ta có: $\begin{cases} HC' \perp A'B' \\ HC' \perp AA' \end{cases} \Rightarrow HC' \perp (ABB'A')$.

Suy ra BH là hình chiếu vuông góc của BC' trên mp(ABB'A') . Góc giữa BC' và (ABB'A') là góc $\widehat{HBC'} = 30^0$.



Trong $\Delta BHC'$ có:

$$BH = HC' : \tan 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3a}{2}$$

Vậy $BB' = \sqrt{BH^2 - HB'^2} = a\sqrt{2}$.

Diện tích xung quanh của hình lăng trụ ABC.A'B'C':

$$S_{xq} = 3.S_{ABB'A'} = 3.AB.BB' = 3.a.a\sqrt{2} = 3a^2\sqrt{2}$$

b). Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C'.

Thể tích khối trụ ABC.A'B'C': $V = BB'.S_{\Delta ABC} = a\sqrt{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

c). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và BC .

Dựng $Ax // BC \Rightarrow BC // (Ax, AC')$.

Vậy: $d(BC, AC') = d(BC, (Ax, AC')) = d(C, (Ax, AC'))$.

Dựng $CI \perp Ax (I \in Ax)$, có:

$Ax \perp CI;\ Ax \perp CC' \Rightarrow Ax \perp (CIC') \Rightarrow (Ax, AC') \perp (CIC')$.

Dựng $CJ \perp C'I \Rightarrow CJ \perp (Ax, AC')$. Vậy $d(C, (Ax, AC')) = CJ$.

Gọi K trung điểm của BC. Ta có: AKCI là hình chữ nhật $\Rightarrow CI = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong $\Delta CIC'$ có: $\frac{1}{CJ^2} = \frac{1}{CI^2} + \frac{1}{CC'^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{11}{6a^2} \Rightarrow CJ = \frac{a\sqrt{66}}{11}$.

Kết luận: $d(BC, AC') = \frac{a\sqrt{66}}{11}$.

Cho lăng trụ đứng tứ giác đều ABCD.A'B'C'D' có chiều cao bằng a, góc giữa hai đường chéo của hai mặt bên kề nhau xuất phát từ cùng một đỉnh là 60^0.

a) Tính diện tích xung quanh của hình lăng trụ ABCD.A'B'C'D' theo a.

b) Tính thể tích khối lăng trụ ABCD.A'B'C'D' theo a.

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A'C và BD theo a.

LỜI GIẢI

a). Theo đề bài ta có $\widehat{BA'D} = 60^0$.

Vì $BA' = DA' \Rightarrow \Delta BDA'$ đều.

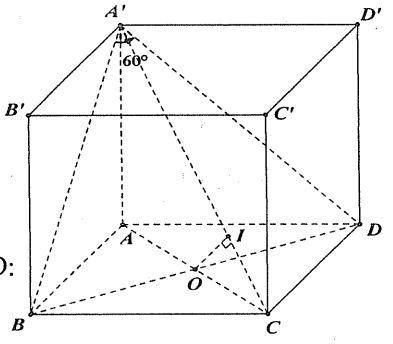
Đặt $AB = x$ có $BD = x\sqrt{2}$.

Trong $\Delta ABA'$ có: $BA'^2 = AB^2 + AA'^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 = x^2 + a^2 \Rightarrow x = a$.

Diện tích xung quanh lăng trụ ABCD.A'B'C'D:

$S_{xq} = 4S_{ABB'A'} = 4a^2$



b) Thể tích khối lăng trụ ABCD.A'B'C'D': $V = AA'S_{ABCD} = a.a^2 = a^3$.

c). $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ACA')$.

Trong mp(ACA') dựng $OI \perp CA' \Rightarrow OI \perp BD$.

Suy ra OI là đoạn vuông góc chung của BD và CA'.

Vậy: $d(BD, CA') = OI$.

Ta có: $\Delta CIO \sim \Delta CAA'(g.g) \Rightarrow \dfrac{OI}{A'A} = \dfrac{CO}{CA'} \Rightarrow OI = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}}.a = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAC và khoảng cách từ G đến mặt bên (SCD) bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{12}$.

a) Tính khoảng cách từ tâm O của đáy ABCD đến mặt bên (SCD).

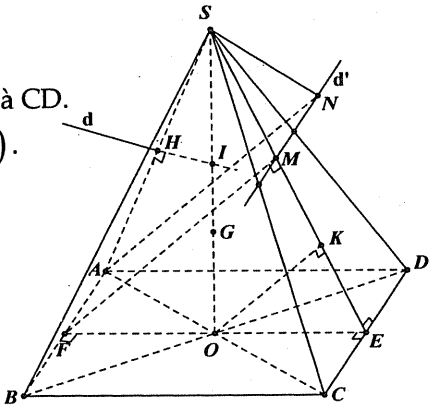
b) Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

c) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

d) Xác định và tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SCD).

LỜI GIẢI

a) Tính khoảng cách từ tâm O của đáy ABCD đến mặt bên (SCD).



Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Có $CD \perp OE$ và $CD \perp SO \Rightarrow CD \perp (SOE)$.

Vì $CD \subset (SCD) \Rightarrow (SOE) \perp (SCD)$, hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SE.

Dựng $OK \perp SE \Rightarrow OK \perp (SCD)$.

Vậy: $d(O,(SCD)) = OK$.

Hai điểm O và G nằm trên đường thẳng có giao điểm với mp(SCD) tại S nên có: $\dfrac{d(O,(SCD))}{d(G,(SCD))} = \dfrac{OS}{GS} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow d(O,(SCD)) = \dfrac{3}{2} d(G,(SCD)) = \dfrac{3}{2}.\dfrac{a\sqrt{6}}{12} = \dfrac{a\sqrt{6}}{8}$

b) Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

Trong ΔSOE có: $\dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{OK^2} - \dfrac{1}{OE^2} = \dfrac{32}{3a^2} - \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{20}{3a^2} \Rightarrow OS = \dfrac{a\sqrt{15}}{10}$.

$V = \dfrac{1}{3} SO.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{15}}{10}.a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{30}$.

c) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

Vì S.ABCD là hình chóp tứ giác đều nên SO là trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD. Trong mp(SAC) kẻ đường trung trực đoạn thẳng SA cắt SO tại điểm I, thì I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD.

Có: $SA^2 = SO^2 + AO^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{15}}{10}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{13a^2}{20} \Rightarrow SA = \dfrac{a\sqrt{65}}{10}$.

Ta có: $\Delta SHI \sim \Delta SOA \Rightarrow \dfrac{SI}{SA} = \dfrac{SH}{SO} \Rightarrow SI = \dfrac{SA^2}{2SO} = \dfrac{\dfrac{13a^2}{20}}{2.\dfrac{a\sqrt{15}}{10}} = \dfrac{13a\sqrt{15}}{60}$.

Kết luận bán kính mặt cầu $R = \dfrac{13a\sqrt{15}}{60}$.

d) Xác định và tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SCD).

Trong mp (SEF): dựng $FM \perp SE (M \in SE)$ thì $FM \,//\, OK \Rightarrow FM \perp (SCD)$.

Qua M dựng đường thẳng d' song song với CD.

Trong mp(AB,d') dựng $AN \,//\, FM (N \in d')$ thì $AN \perp (SCD)$.

Vậy có SN là hình chiếu vuông góc của SA trên mp (SCD) suy ra góc giữa SA và (SCD) là $\widehat{ASN}$.

Ta có: $AN = FM = 2OK = 2.\dfrac{a\sqrt{6}}{8} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Trong ΔSAN vuông tại N có:

$$\sin\widehat{ASN} = \frac{AN}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{4}}{\frac{a\sqrt{65}}{10}} = \frac{\sqrt{390}}{26} \Rightarrow \widehat{ASN} = \arcsin\frac{\sqrt{390}}{26}.$$

Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác ABC vuông tại A, cạnh AB = 2a, góc $\widehat{ABC} = 60^0$, $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm của BC, hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng ABC trùng với trung điểm H của AI.

a). Tính thể tích khối chóp A.BCC'B'.

b). Xác định tâm và tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện A'ABC.

c). Tính khoảng cách giữa A'B và CC'.

LỜI GIẢI

a). Tính thể tích khối chóp A.BCC'B'.

Trong tam giác ABC vuông tại A có:

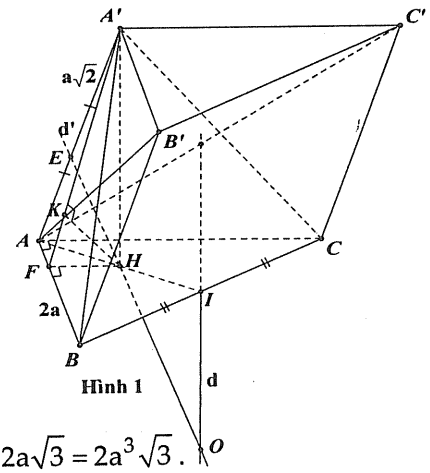
$AC = AB.\tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$;

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 4a$;

$IA = IB = IC = 2a$, $HA = HI = a$.

Trong $\Delta AHA'$ vuông có:

$HA' = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{2a^2 - a^2} = a$.



Hình 1

Gọi V là thể tích khối chóp ABC.A'B'C':

$$V = A'H.S_{\Delta ABC} = A'H.\frac{1}{2}.AB.AC = \frac{1}{2}.a.2a.2a\sqrt{3} = 2a^3\sqrt{3}.$$

$$V_{A.BCC'B'} = V - V_{A.A'B'C'} = V - V_{A'.ABC} = V - \frac{1}{3}V = \frac{2}{3}V = \frac{2}{3}.2a^3\sqrt{3} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}.$$

b) Xác định tâm và tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện A'ABC.

Vì tam giác ABC vuông tại A và có I trung điểm của cạnh huyền BC.

Suy ra: I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

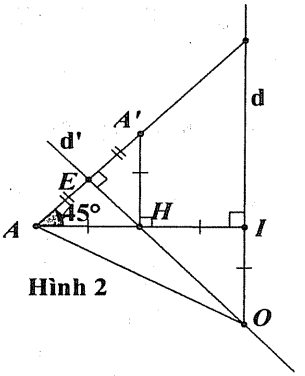
Qua I kẻ đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng ABC thì d // A'H và d là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Suy ra: AA', A'H và đường thẳng d cùng thuộc một mặt phẳng, kí hiệu mặt phẳng đó là (P).

Trong mặt phẳng (P) dựng đường trung trực d' của đoạn AA' cắt đường thẳng d tại điểm O. O chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp A'.ABC.

Mặt phẳng (P) biểu diễn ở hình 2 .

Vì tam giác AHA' vuông cân tại H nên d' đi qua H và có $\Delta HIO = \Delta HAA'$.



Hình 2

Bán kính mặt cầu:

$R = AO = \sqrt{AI^2 + IO^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$.

Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(a\sqrt{5}\right)^2 = 20\pi a^2$.

c). Tính khoảng cách giữa A'B và CC'.

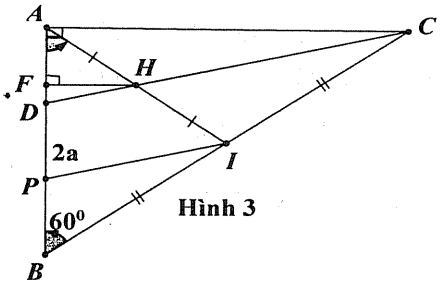
Dựng $HF \perp AB\left(F \in AB\right)$.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp HF \\ AB \perp HA' \end{cases} \Rightarrow AB \perp \left(A'HF\right)$

$\Rightarrow \left(ABB'A'\right) \perp \left(A'HF\right)$.

Dựng $HK \perp A'F \Rightarrow HK \perp \left(ABB'A'\right)$

$\Rightarrow d\left(H,\left(ABB'A'\right)\right) = HK$.



Hình 3

Trong tam giác vuông AHF có: $HF = AH.\sin 60^0 = a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong $\Delta A'HF$ có: $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HF^2} + \dfrac{1}{HA'^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{7}{3a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Đáy ABC được vẽ lại như hình 3.

Gọi $D = CH \cap AB$, dựng $IP \,//\, CD\left(P \in AB\right)$.

HD là đường trung bình của tam giác AIP có $HD = \dfrac{1}{2}IP$ (1).

PI là đường trung bình của tam giác BCD có $IP = \dfrac{1}{2}CD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $CD = 4HD$.

Vì $CC' \,//\, AA' \Rightarrow CC' \,//\, mp\left(ABB'A'\right)$

$\Rightarrow d\left(CC', A'B\right) = d\left(CC',\left(ABB'A'\right)\right) = d\left(C,\left(ABB'A'\right)\right)$.

Hai điểm C và H nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (ABB'A') tại điểm P.

Theo công thức tính tỉ lệ khoảng cách, ta có:

$$\frac{d\left(C,\left(ABB'A'\right)\right)}{d\left(H,\left(ABB'A'\right)\right)}=\frac{CD}{HD}=4\Rightarrow d\left(C,\left(ABB'A'\right)\right)=4d\left(H,\left(ABB'A'\right)\right)=\frac{4a\sqrt{21}}{7}.$$

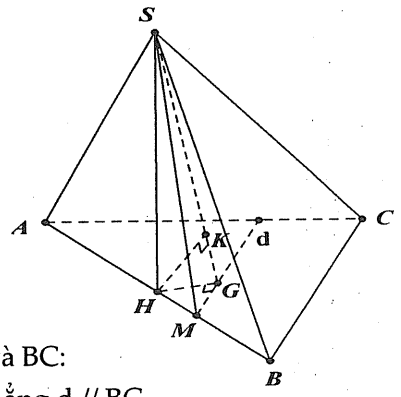
Cho hình chóp S.ABC có (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABC), tam giác ABC và SAB đều cạnh a. Gọi H là trung điểm của AB, M thuộc cạnh AB sao cho AM = 2MB.Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC.

LỜI GIẢI

*Tính thể tích khối chóp S.ABC:

Vì tam giác SAB đều nên $SH\perp AB$.

Hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) vuông góc với nhau theo giao tuyến AB, suy ra $SH\perp\left(ABC\right)$.



Thể tích khối chóp S.ABC:

$$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3}{8}.$$

* Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC:

Trong mặt phẳng (ABC) qua M kẻ đường thẳng d // BC.

Ta có: $BC\ //\ mp\left(SM,d\right)$

Vậy: $d\left(BC,SM\right)=d\left(BC,mp\left(SM,d\right)\right)=d\left(B,mp\left(SM,d\right)\right)$.

Muốn tính khoảng cách từ B đến mp(SM,d), ta phải tính khoảng cách từ H (*là hình chiếu của đỉnh*) đến mp(SM,d) trước, sau đó sử dụng công thức tính tỉ lệ khoảng cách.

Dựng $HG\perp d$. Ta có: $\begin{cases}d\perp HG\\ d\perp SH\end{cases}\Rightarrow d\perp\left(SHG\right)\Rightarrow\left(SM,d\right)\ //\ \left(SHG\right)$.

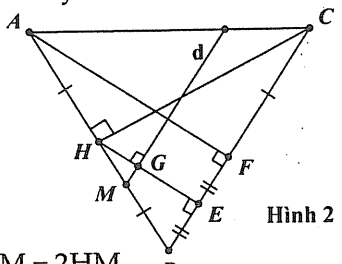
Hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SG.

Dựng $HK\perp SG\ \Rightarrow HK\perp\left(SM,d\right)$

$\Rightarrow d\left(H,mp\left(SM,d\right)\right)=HK$.

Mặt phẳng đáy (ABC) được vẽ lại như (hình 2).

Gọi $E=HG\cap BC$, $AF\perp BC\left(F\in BC\right)$



Hình 2

Ta có: $AB=3BM,\ AB=2BH\Rightarrow BM=\frac{2}{3}BH\Rightarrow BM=2HM$.

HE là đường trung bình của $\Delta BAF \Rightarrow HE = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Trong ΔHBE có MG // BE:

$\frac{HG}{HE} = \frac{HM}{HB} = \frac{1}{3} \Rightarrow HG = \frac{1}{3}HE \Leftrightarrow HG = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$.

Trong ΔSHG có: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HG^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{48}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{148}{3a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{111}}{74}$.

Khoảng cách từ B đến mp(SM,d) : $\frac{d\left(B,mp\left(SM,d\right)\right)}{d\left(H,mp\left(SM,d\right)\right)} = \frac{BM}{HM} = 2$

$\Rightarrow d\left(B,mp\left(SM,d\right)\right) = 2d\left(H,mp\left(SM,d\right)\right) = \frac{a\sqrt{111}}{37}$

Kết luận: $d\left(BC,SM\right) = \frac{a\sqrt{111}}{37}$.

Cho hình chóp S.ABC, đáy ABC là tam giác đều cạnh 2a, SA vuông góc với đáy, góc giữa SB và đáy ABC bằng 60^0. I là trung điểm của BC, H là hình chiếu vuông góc của A trên SI.

a) Chứng minh tam giác ABH vuông . Tính thể tích S.ABC

b) Tính khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đến mặt phẳng ABH.

LỜI GIẢI

a). Chứng minh tam giác ABH vuông. Tính thể tích S.ABC.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp \left(SAI\right) \Rightarrow \left(SBC\right) \perp \left(SAI\right)\left(BC \subset \left(SBC\right)\right)$: hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SI, có:

$AH \perp SI \Rightarrow AH \perp \left(SBC\right)$

$\Rightarrow AH \perp BH\left(BH \subset \left(SBC\right)\right)$.

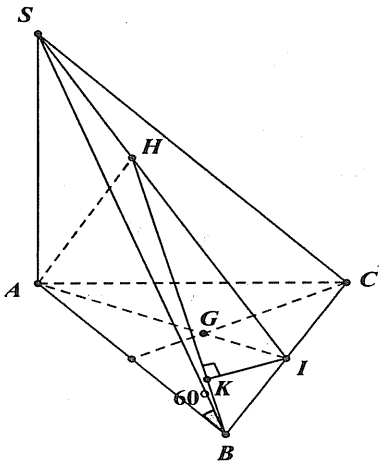
Kết luận: tam giác ABH vuông tại H .

AB là hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng (ABC), nên góc giữa SB và (ABC) là góc: $\widehat{SBA} = 60^0$

$\Rightarrow SA = AB.\tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$.

Thể tích khối tứ diện S.ABC:

$V = \frac{1}{3}.SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.2a\sqrt{3}.a^2\sqrt{3} = 2a^3$.



b). Tính khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC đến mp ABH.

Ta có: $AH \perp (SBC) \Rightarrow (ABH) \perp (SBC)$.

Từ I thuộc BC kẻ $IK \perp HB (K \in HB)$, mà HB là giao tuyến của hai mặt phẳng vuông góc (ABH) và (SBC), nên suy ra $IK \perp (ABH)$. Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (ABH) là IK.

Trong ΔSAI vuông tại A có: $SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \sqrt{12a^2 + 3a^2} = a\sqrt{15}$;

$AI^2 = IH.IS \Leftrightarrow 3a^2 = IH.a.\sqrt{15} \Rightarrow IH = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Trong ΔBIH vuông tại I có: $\dfrac{1}{IK^2} = \dfrac{1}{IB^2} + \dfrac{1}{IH^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{5}{3a^2} = \dfrac{8}{3a^2} \Rightarrow IK = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Vì hai điểm I và G nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (ABH) là A.

Theo công thức tính tỉ lệ khoảng cách có: $\dfrac{d(G,(ABH))}{d(I,(ABH))} = \dfrac{GA}{IA} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow d(G,(ABH)) = \dfrac{2}{3} d(I,(ABH)) = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{4} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Cho hình chóp đều S.ABCD có AB = 2a, O là giao điểm của hai đường chéo, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0, H là hình chiếu vuông góc của O trên SC, K là hình chiếu vuông góc của O trên SB.

a) Tính thể tích S.OBC, SAHK.

b) Chứng minh mặt phẳng (ACK) vuông góc với (SBC).

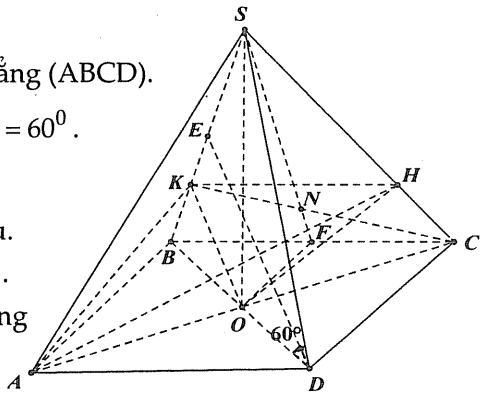
c) Tính khoảng cách từ trực tâm tam giác SBC đến mặt phẳng (SCD).

LỜI GIẢI

a) Tính thể tích S.OBC, SAHK.

OD là hình chiếu của SD trên mặt phẳng (ABCD).

Nên $\left(\widehat{SD,(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SD,OD}\right) = \widehat{SDO} = 60^0$.



Vậy: có tam giác SBD đều.

Tương tự: ΔSAC cũng là tam giác đều.

Gọi E trung điểm của SB thì $DE \perp SB$.

Mà $OK \perp SB \Rightarrow$ OK là đường trung bình của tam giác BDE.

Suy ra K trung điểm của BE.

Vì S.ABCD là hình chóp đều nên OK = OH, suy ra BK = CH.

Ta có: $BD = AC = AB.\sqrt{2} = 2a\sqrt{2}$.

SO, DE là đường cao của tam giác đều SBD có: $SO = DE = \dfrac{BD.\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{6}$.

Gọi V là thể tích khối tứ diện S.ABCD có:

$$V = \frac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a\sqrt{6}.4a^2 = \frac{4a^3\sqrt{6}}{3}.$$

Vì $S_{\Delta OBC} = \frac{1}{4}.S_{ABCD} \Rightarrow V_{S.OBC} = \frac{1}{4}V = \frac{1}{4}.\frac{4a^3\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Sử dụng công thức tính tỉ lệ thể tích thì ta tính được thể tích khối tứ diện S.AHK

$$\frac{V_{S.AKH}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SK}{SB}.\frac{SH}{SC} = \frac{3}{4}.\frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow V_{S.AKH} = \frac{9}{16}.V_{S.ABC} = \frac{9}{16}.\frac{1}{2}V = \frac{9}{32}.\frac{4a^3\sqrt{6}}{3} = \frac{3a^3\sqrt{6}}{8}$$

Kết luận: $V_{S.OBC} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$, $V_{S.AKH} = \dfrac{3a^3\sqrt{6}}{8}$.

b) Chứng minh mặt phẳng (ACK) vuông góc với (SBC).

Vì S.ABCD là hình chóp đều nên tam giác KAC cân tại K .

Ta có $AK^2 = CK^2 = AO^2 + OK^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \dfrac{7a^2}{2}$.

Ta có $AK^2 + BK^2 = \dfrac{7a^2}{2} + \left(\dfrac{1}{4}.2a\sqrt{2}\right)^2 = 4a^2 = AB^2 \Rightarrow \Delta ABK$ vuông tại K .

Tương tự tam giác BCK vuông tại K .

Ta có: $\begin{cases} SB \perp AK \\ SB \perp CK \end{cases} \Rightarrow SB \perp (ACK) \Rightarrow (SBC) \perp (ACK) \left(SB \subset (SBC)\right)$.

c) Tính khoảng cách từ trực tâm tam giác SBC đến mặt phẳng (SCD).

Gọi N trực tâm của tam giác SBC, F là giao điểm của SN và BC, suy ra F là trung điểm của BC.

Muốn tính khoảng cách từ N đến mp(SCD), ta phải tính khoảng cách từ O đến mp(SCD) trước, sau đó sử dụng công thức tính tỉ lệ khoảng cách thì ta tính được khoảng cách từ N.

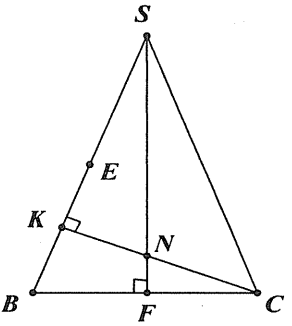
Tứ diện O.CDS là tứ diện vuông vì có OC,OD, OS đôi một vuông góc nhau nên có: $\dfrac{1}{d^2\left(O,(SCD)\right)} = \dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{OD^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{6a^2} = \dfrac{7}{6a^2}$

$\Rightarrow d\left(O,(SCD)\right)=\dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.

Vì OF // CD $\Rightarrow$ OF // (SCD)

$\Rightarrow d\left(F,(SCD)\right)=d\left(O,(SCD)\right)=\dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.

Vẽ lại mặt bên SBC như hình 2 .



Hình 2

Ta có $SF=\sqrt{SB^2-BF^2}=\sqrt{8a^2-a^2}=a\sqrt{7}$

Và có: $\Delta SKN\sim\Delta SFB\Rightarrow\dfrac{SN}{SB}=\dfrac{SK}{SF}$

$\Rightarrow SN=\dfrac{SK}{SF}.SB=\dfrac{\frac{3}{4}SB}{SF}.SB=\dfrac{\frac{3}{4}.2a\sqrt{2}}{a\sqrt{7}}.2a\sqrt{2}=\dfrac{6a\sqrt{7}}{7}$.

Hai điểm F và N nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SCD) là điểm S nên có:

$$\frac{d\left(N,(SCD)\right)}{d\left(F,(SCD)\right)}=\frac{NS}{FS}=\frac{6}{7}\Rightarrow d\left(N,(SCD)\right)=\frac{6}{7}.d\left(F,(SCD)\right)=\frac{6}{7}.\frac{a\sqrt{42}}{7}=\frac{6a\sqrt{42}}{49}$$

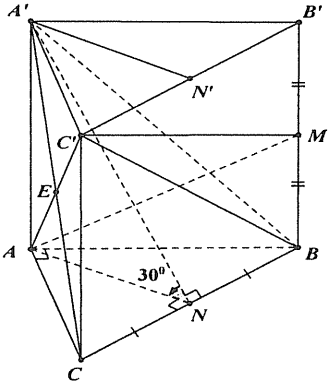
Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) bằng 30^0. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh BB' và BC. Biết A'N = a , hãy tính theo a:

a). Thể tích các khối chóp ABC.A'B'C' , A.MBC'.

b). Khoảng cách giữa hai đường thẳng B'C' và A'N .

c). Thể tích hình cầu (S) ngoại tiếp khối chóp A'BCC'B'.

LỜI GIẢI



a) Thể tích các khối chóp ABC.A'B'C'.

Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên AN $\perp$ BC .

Ta có: $\begin{cases}BC\perp AN\\BC\perp AA'\end{cases}\Rightarrow BC\perp(A'AN)\Rightarrow BC\perp A'N$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và mặt phẳng (ABC) là góc giữa AN và A'N là góc $\widehat{ANA'}=30^0$.

Trong $\Delta ANA'$ vuông tại A có:

$AA'=A'N.\sin 30^0=\dfrac{a}{2}$, $AN=A'N.\cos 30^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong ΔABC vuông cân tại A có:

$NA = NB = NC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $BC = 2NB = a\sqrt{3}$, $AB = AC = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích các khối chóp ABC.A'B'C':

$$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = AA'.\frac{1}{2}.AB.AC = \frac{a}{2}.\frac{1}{2}.\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{3a^3}{8}.$$

Vì M trung điểm của BB' nên:

$$S_{\Delta BMC'} = \frac{1}{2}S_{\Delta BB'C'} = \frac{1}{4}.S_{BCC'B'} = \frac{1}{4}.BB'.BC = \frac{1}{4}.\frac{a}{2}.a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}.$$

Ta có: $AN \perp BC, AN \perp BB' \Rightarrow AN \perp (BCC'B')$.

Thể tích khối tứ diện A.BMC': $V_{A.BMC'} = \frac{1}{3}.AN.S_{\Delta BMC'} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{a^3}{16}$.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng B'C' và A'N.

Ta có: B'C' // BC nên B'C' // mp(BCA') chứa A'N.

Vậy: $d(B'C', A'N) = d(B'C', (A'BC)) = d(C', (A'BC))$.

Gọi $E = AC' \cap CA'$. Hai điểm A và C' nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (A'BC) tại điểm E, và E là trung điểm của AC' nên $d(C', (A'BC)) = d(A, (A'BC))$.

Hình chóp A.BCA' là tứ diện vuông vì có AB , AC , AA' đôi một vuông góc nên:

$$\frac{1}{d^2(A, (A'BC))} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AA^2} = \frac{2}{3a^2} + \frac{2}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{16}{3a^2}$$

$$\Rightarrow d(A, (A'BC)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Kết luận: $d(B'C', A'N) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

c) Tính thể tích hình cầu (S) ngoại tiếp khối chóp A'BCC'B'.

Gọi N' là trung điểm của B'C' thì $NN' \perp (A'B'C')$.

Vì tam giác A'B'C' vuông tại A' suy ra N' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C' và NN' là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C'.

Ngoài ra NN' là đường trung bình của hình chữ nhật BCC'B'.

Gọi O là giao điểm của NN' và BC' thì O chính là tâm mặt cầu (S) ngoại tiếp khối chóp A'.BCC'B', bán kính $R = OB = OC' = \frac{BC'}{2}$.

Ta có: $BC' = \sqrt{BC^2 + BB'^2} = \sqrt{3a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

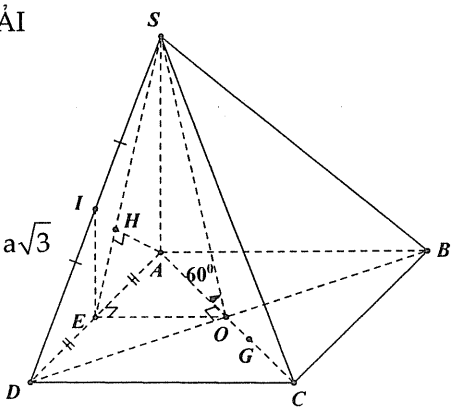
Thể tích khối cầu (S): $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{13}}{2}\right)^3 = \frac{13\pi a^3\sqrt{13}}{6}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, SA vuông góc với đáy ABCD. SO hợp với đáy ABCD một góc 60^0, biết SO = 2a.

a) Xác định tâm I của mặt cầu (S) ngoại tiếp khối chóp S.OAD, tính thể tích hình cầu (S).

b) Gọi E trung điểm của cạnh AD và G là trọng tâm của tam giác BCD. Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SOE) theo a.

LỜI GIẢI



a) AO là hình chiếu vuông góc của SO trên mặt phẳng (ABCD) nên góc giữa SO và (ABCD) là $\widehat{SOA} = 60^0$.

Trong ΔSAO vuông tại A có:

$AO = SO.\cos 60^0 = a$; $SA = SO.\sin 60^0 = a\sqrt{3}$

Tâm I của mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện S.OAD là trung điểm của SD.

Thật vậy: ΔAOD vuông tại O, nên E là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAOD.

Vì EI là đường trung bình của tam giác SAD nên EI // SA.

Mà $SA \perp (AOD) \Rightarrow IE \perp (AOD)$.

Vậy: IE là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác AOD nên có:

$IA = IO = ID$ (1)

Vì I trung điểm của SD có $IS = ID$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện S.OAD;

Bán kính $R = \frac{SD}{2}$.

Vì ABCD là hình vuông có $AC = 2AO = 2a \Rightarrow AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.

Có: $SD = \sqrt{AD^2 + SA^2} = a\sqrt{5} \Rightarrow R = \frac{SD}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Thể tích hình cầu (S) : $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^3=\frac{5\pi a^3\sqrt{5}}{6}$.

b) Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SOE) theo a.

Muốn tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SOE) ta phải tính khoảng cách từ A *(là hình chiếu của đỉnh S)* đến mặt phẳng (SOE) trước, sau đó sử dụng công thức tính tỉ lệ khoảng cách thì ta tính được khoảng cách từ G, cách làm như sau :

Ta có: $OE\perp(SAD)\Rightarrow(SOE)\perp(SAD)$ theo giao tuyến SE.

Dựng $AH\perp SE(H\in SE)\Rightarrow AH\perp(SOE)\Rightarrow d(A,(SOE))=AH$.

Ta có: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{2}{a^2}=\frac{7}{3a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

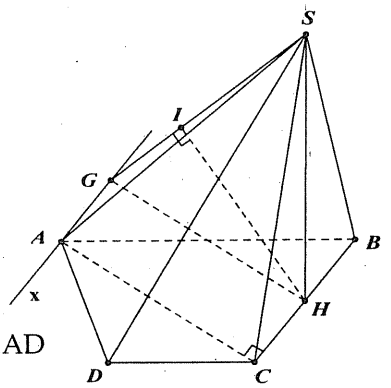
Vì G là trọng tâm của tam giác BCD có $OG=\frac{1}{3}OC\Rightarrow OG=\frac{1}{3}OA$.

Hai điểm A và G nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SOE) tại O nên có: $\frac{d(G,(SOE))}{d(A,(SOE))}=\frac{GO}{AO}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow d(G,(SOE))=\frac{1}{3}d(A,(SOE))=\frac{a\sqrt{21}}{21}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, biết $AD=DC=a$, $AB=2AD$, mặt bên SBC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy ABCD. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa SA và BC.

LỜI GIẢI



Tính thể tích khối chóp S.ABCD:

Gọi H là trung điểm của BC.

Hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) vuông góc với nhau theo giao tuyến BC, có: $SH\perp BC\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

Thể tích khối chóp S.ABCD:

$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}SH.\frac{1}{2}(AB+CD).AD$

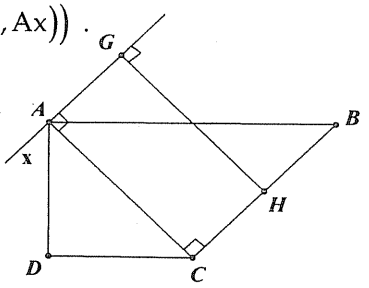
$=\frac{1}{6}.\frac{a\sqrt{6}}{2}(2a+a).a=\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Khoảng cách giữa SA và BC:

Trong mặt phẳng đáy ABCD dựng Ax // BC.

Suy ra BC // mp(SA,Ax) nên:

$d(BC,SA) = d(BC, mp(SA,Ax)) = d(H, mp(SA,Ax))$.



Từ H dựng $HG \perp Ax$.

Ta có $Ax \perp HG$, $Ax \perp SH \Rightarrow Ax \perp (SHG)$

$\Rightarrow mp(SA,Ax) \perp mp(SHG)$.

Theo giao tuyến SG, dựng $HI \perp SG (I \in SG)$

$\Rightarrow HI \perp mp(SA,Ax) \Rightarrow d(H, mp(SA,Ax)) = HI$.

Ta có: ACHG là hình chữ nhật nên $HG = AC = a\sqrt{2}$.

Trong ΔSHG có: $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HG^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{2}{3a^2} = \frac{7}{6a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{42}}{7}$

Kết luận: $d(BC,SA) = \frac{a\sqrt{42}}{7}$.

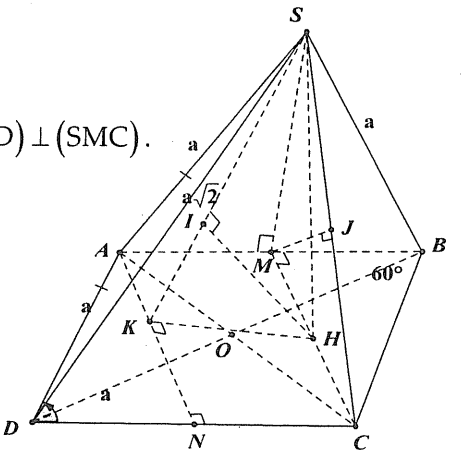
Cho hình chóp S.ACD có đáy ACD là tam giác đều cạnh a, tam giác SAD cân tại A và $SD = a\sqrt{2}$. Gọi B là điểm đối xứng với D qua trung điểm O của AC , M là trung điểm của cạnh AB, biết SM vuông góc với AB. Tính thể tích khối chóp S.AMCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SA.

LỜI GIẢI

* Tính thể tích khối chóp S.AMCD.

Ta có tam giác ABC đều nên $CM \perp AB$.

Vì $\begin{cases} AB \perp SM \\ AB \perp CM \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SMC) \Rightarrow (ABCD) \perp (SMC)$.



Hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến MC, trong mặt phẳng (SMC) dựng $SH \perp CM (H \in CM)$

$\Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Vì CM là đường trung trực của đoạn AB nên $HA = HB \Rightarrow SA = SB = a$.

Suy ra tam giác SAB đều cạnh a $\Rightarrow \Delta SMC$ cân tại M vì có $SM = CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì $CD // AB \Rightarrow CD \perp (SMC) \Rightarrow CD \perp SC$.

Vậy tam giác SCD vuông tại C, có: $SC = \sqrt{SD^2 - CD^2} = \sqrt{2a^2 - a^2} = a$.

Trong ΔSMC dựng $MJ \perp SC (J \in SC)$ thì J là trung điểm của SC;

$$MJ = \sqrt{MC^2 - JC^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$SH.CM = MJ.SC \Leftrightarrow SH.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.a \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$S_{ADCM} = \frac{3}{4}S_{ABCD} = \frac{3}{4}.\frac{1}{2}.AC.BD = \frac{3}{8}.a.a\sqrt{3} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}.$$

Thể tích khối chóp S.ADCM:

$$V_{S.ADCM} = \frac{1}{3}.SH.S_{ADCM} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{3a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}.$$

* Khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SA:

Trong mặt phẳng đáy (ABCD) dựng AN // CM thì:

$CM // (SAN) \Rightarrow d(CM,SA) = d(CM,(SAN)) = d(H,(SAN))$ $(H \in CM)$.

Từ H dựng $HK \perp AN (K \in AN)$.

Ta có: $AN \perp KH \wedge AN \perp SH \Rightarrow AN \perp (SHK)$.

$\Rightarrow (SAN) \perp (SHK)$. Hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SK.

Trong mặt phẳng (SHK) dựng: $HI \perp SK (I \in SK) \Rightarrow HI \perp (SAN)$.

Vậy: $d(H,(SAN)) = HI$.

Ta có: $HK = AM = \frac{a}{2}$.

Trong tam giác vuông SHK có:

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{3}{2a^2} = \frac{11}{2a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{22}}{11}.$$

Kết luận: $d(CM,SA) = \frac{a\sqrt{22}}{11}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm O, biết $AB = a, AD = 2a$, M là điểm trên cạnh AB sao cho MA = 2MB, tam giác SMO cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy ABCD. Biết mặt bên (SBC) hợp với mặt phẳng đáy (ABCD) một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp S.AMOD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và CD theo a.

LỜI GIẢI

* Tính thể tích khối chóp S.AMOD:

Vì hai mặt phẳng (SOM) và (ABCD) vuông góc với nhau theo giao tuyến OM.

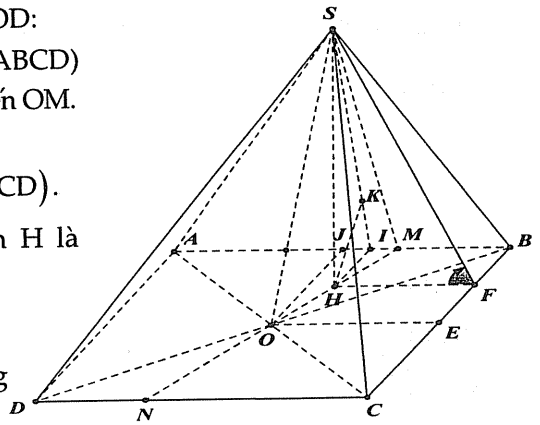
Trong mặt phẳng (SOM) dựng:

$SH \perp OM\left(H \in OM\right) \Rightarrow SH \perp \left(ABCD\right)$.

Vì tam giác SOM cân tại S nên H là trung điểm của OM.

Dựng $HF \perp BC\left(F \in BC\right)$.

Theo định lý ba đường vuông góc thì: $BC \perp SF$.



Suy ra: góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) là góc $\widehat{SFH} = 60^0$.

Gọi E trung điểm của BC thì HF là đường trung bình của hình thang OEBM,

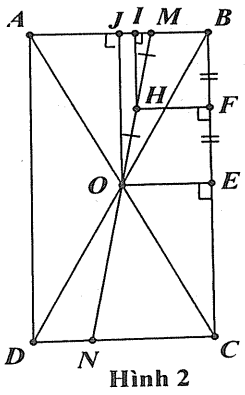
nên có $HF = \dfrac{OE + BM}{2} = \dfrac{\frac{a}{2} + \frac{a}{3}}{2} = \dfrac{5a}{12}$.

Trong SHF có $SH = SF.\tan 60^0 = \dfrac{5a\sqrt{3}}{12}$.

Ta có: $S_{AMOD} = S_{\Delta AMO} + S_{\Delta AOD} = S_{\Delta AMO} + S_{\Delta BOC}$

$$= \frac{1}{2}OJ.AM + \frac{1}{2}OE.BC = \frac{5a^2}{6}.$$

$$V_{S.AMOD} = \frac{1}{3}.SH.S_{AMOD} = \frac{1}{3}.\frac{5a\sqrt{3}}{12}.\frac{5a^2}{6} = \frac{25a^3\sqrt{3}}{216}.$$



Hình 2

* Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và CD

Vì CD // AB nên $d\left(CD,SM\right) = d\left(CD,\left(SAB\right)\right) = d\left(N,\left(SAB\right)\right)$, với N là giao điểm của OM và CD.

Muốn tính khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SAB) ta phải tính khoảng cách từ điểm H (là hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy) trước, sau đó sử dụng công thức tính tỉ lệ khoảng cách thì ta tính được khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SAB).

Dựng $HI \perp AB\left(I \in AB\right)$.

Ta có: $AB \perp HI \wedge AB \perp SH \Rightarrow AB \perp \left(SHI\right) \Rightarrow \left(SAB\right) \perp \left(SHI\right)$: hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SI.

Trong mặt phẳng (SHI), dựng: $HK \perp SI\ \left(K \in SI\right)$ thì:

$HK \perp \left(SAB\right) \Rightarrow d\left(H,\left(SAB\right)\right) = HK$.

Dựng $OJ \perp AB\left(I \in AB\right)$. Ta có IH là đường trung bình của tam giác OMJ

$\Rightarrow HI = \frac{1}{2}OJ = \frac{a}{2}$

Trong ΔSHI có: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{48}{25a^2} = \frac{148}{25a^2} \Rightarrow HK = \frac{5a\sqrt{37}}{74}$.

Hai điểm N và H nằm trên đường thẳng có giao điểm với mặt phẳng (SAB) tại M nên có:

$\frac{d\left(N,(SAB)\right)}{d\left(H,(SAB)\right)} = \frac{NM}{HM} = 4 \Rightarrow d\left(N,(SAB)\right) = 4d\left(H,(SAB)\right) = \frac{10a\sqrt{37}}{37}$.

Kết luận: $d\left(CD,SM\right) = \frac{10a\sqrt{37}}{37}$.

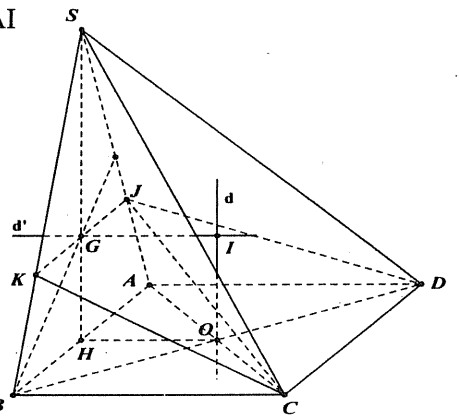
Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông . Tam giác SAB đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABCD) .

a) Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình chóp .

b) Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp .

c) Mặt phẳng (α) qua CD và trọng tâm G của tam giác SAB cắt hình chóp thành hai phần. Tính thể tích phần khối đa diện không chứa điểm S.

LỜI GIẢI



a) Tính thể tích:

Gọi H là trung điểm của AB.

Vì SAB tam giác đều nên $SH \perp AB$.

Hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) vuông góc với nhau theo giao tuyến AB nên $SH \perp (ABCD)$.

Thể tích khối chóp S.ABCD:

$V = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

* Diện tích xung quanh của hình chóp:

Dễ dàng chứng minh BC và AD cùng vuông góc với mp(SAB).

Có $S_{\Delta SAB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác SBC và SAD vuông cân và bằng nhau, có $S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}BC^2 = \frac{1}{2}a^2$.

Gọi E trung điểm của CD có: $CD \perp HE$ và $CD \perp SH \Rightarrow CD \perp SE$ (định lý ba đường vuông góc)

$SE = \sqrt{SH^2 + HE^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$. $S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2}SE.CD = \frac{a^2\sqrt{7}}{4}$

Diện tích xung quanh khối chóp:

$S_{S.ABCD} = S_{\Delta SAB} + 2S_{\Delta SBC} + S_{\Delta SCD} = a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + 1 + \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$

b) Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Gọi $O = AC \cap BD$, thì O là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD. Từ O dựng đường thẳng d vuông góc với mp(ABCD) thì d là trục đường tròn ngoại tiếp ABCD.

Gọi G là tâm của mặt bên (SAB). Từ G dựng đường thẳng d' vuông góc với mp(SAB), d' cắt d tại điểm I thì I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện S.ABCD.

Có: $OH \perp (SAB) \Rightarrow d' \| OH$ và d // SH nên tứ giác HOIG là hình chữ nhật.

Bán kính: $R = SI = \sqrt{SG^2 + GI^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2 = \frac{7\pi a^2}{3}$.

c) Tính thể tích phần khối đa diện không chứa điểm S.

Có: $\begin{cases} G \in (SAB) \cap (\alpha) \\ AB \text{ // } CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = Gx\,(Gx \text{ // } AB \text{ // } CD)$.

Gx cắt SA, SB lần lượt tại J và K. Suy ra mp(α) cắt hình chóp thiết diện là hình thang cân CDJK.

Trong mp(SAB) có: $\frac{SJ}{SA} = \frac{SK}{SB} = \frac{SG}{SH} = \frac{2}{3}$.

$\frac{V_{S.JCD}}{V_{S.ACD}} = \frac{SJ}{SA}.\frac{SC}{SC}.\frac{SD}{SD} = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{S.JCD} = \frac{2}{3}V_{S.ACD} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD}$.

$\frac{V_{S.JKC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SJ}{SA}.\frac{SK}{SB}.\frac{SC}{SC} = \frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9} \Rightarrow V_{S.JKC} = \frac{4}{9}V_{S.ACD} = \frac{2}{9}V_{S.ABCD}$.

$V_{S.CDJK} = V_{S.JCD} + V_{S.JKC} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD} + \frac{2}{9}V_{S.ABCD} = \frac{5}{9}V_{S.ABCD}$

$$= \frac{5}{9}\frac{a^3\sqrt{3}}{6} = \frac{5a^3\sqrt{3}}{54}$$

$$V_{ABCDJK} = V_{S.ABCD} - V_{S.CDJK} = \frac{4}{9}V_{S.ABCD} = \frac{4}{9}.\frac{a^3\sqrt{3}}{6} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{27}.$$

Cho hình tứ diện S.ABC có SA vuông góc với ABC, có (SBC) vuông góc với (SAB), biết $SB = a\sqrt{2}$, góc BSC = 45, góc BSA = 30.

a) Tính thể tích khối tứ diện S.ABC.

b) Gọi B', C' lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Tính thể tích khối tứ diện SAB'C'.

c) Định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện S.ABC.

d) Gọi I là giao điểm của B'C' và BC. Tính thể tích tứ diện B'AIC.

LỜI GIẢI

Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$.

Mà theo đề $(SBC) \perp (SAB)$ và $(SBC) \cap (ABC) = BC$.

Từ đó suy ra: $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB,\ BC \perp SB$.

Vậy: ΔABC vuông tại B và ΔSBC vuông tại B.

Từ đề $\Rightarrow \Delta SBC$ vuông cân tại B có:

$SB = BC = a\sqrt{2}$, $SC = SB.\sqrt{2} = 2a$.

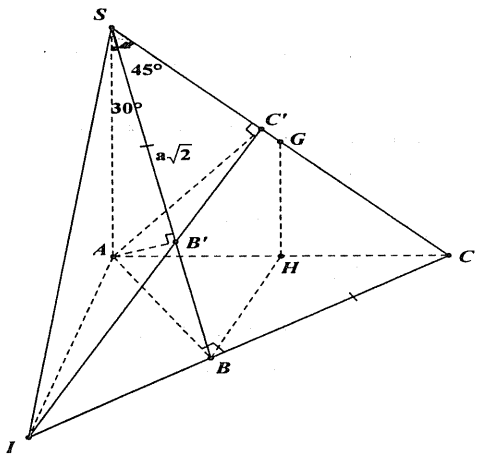
Trong ΔSAB vuông tại A có:

$$SA = SB.\cos 30^0 = a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2};$$

$$AB = SB.\sin 30^0 = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Trong ΔABC có:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}.$$



a) Tính thể tích khối tứ diện S.ABC:

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}.AB.BC = \frac{1}{6}.\frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}.$$

b) Tính thể tích khối tứ diện SAB'C'.

Trong hai ΔSAB, ΔSAC có: $SB'.SB = SA^2 \Rightarrow SB' = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$;

Và $SC'.SC = SA^2 \Rightarrow SC' = \frac{3a}{4}$.

Ta có: $\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \frac{\frac{3a\sqrt{2}}{4}}{a\sqrt{2}}.\frac{\frac{3a}{4}}{2a} = \frac{9}{32}$

$\Rightarrow V_{S.AB'C'} = \frac{9}{32}V_{S.ABC} = \frac{9}{32}.\frac{a^3\sqrt{6}}{12} = \frac{3a^3\sqrt{6}}{128}$

c) Định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện S.ABC.

Gọi H và G lần lượt là trung điểm của AC và SC.

Ta có HG là đường trung bình của tam giác SAC nên GH // SA.

Mà $SA \perp (ABC) \Rightarrow HG \perp (ABC)$.

Vì H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Suy ra HG là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Có $GA = GB = GC$, lại có $GS = GC$.

Từ đó suy ra G là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC và bán kính $R = \frac{SC}{2} = a$.

d) Tính thể tích tứ diện B'AIC.

Có $AB' \perp SB$ và $AB' \perp BC \Rightarrow AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SC$.

Vì SC vuông góc với AB' và AC'.

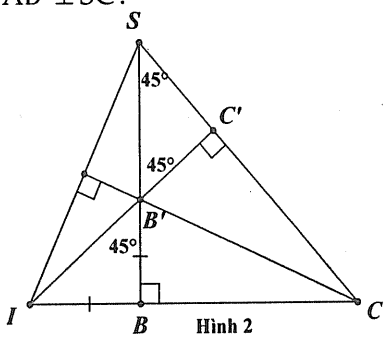
Suy ra $SC \perp (AB'C') \Rightarrow SC \perp B'C'$.

Từ đó suy ra: B' là trực tâm của ΔSIC.

Tam giác SBC được vẽ lại ở hình 2.

Dễ dàng chứng minh $\Delta IBB'$ vuông cân, có:

$BI = BB' = SB - SB' = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.



Hình 2

Diện tích tam giác AIC:

$S_{\Delta AIC} = \frac{1}{2}AB.IC = \frac{1}{2}AB(IB + BC) = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{4} + a\sqrt{2}\right) = \frac{5a^2}{8}$

Và có: $d(B',(ABC)) = \frac{B'B}{SB}.SA = \frac{1}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{8}$.

$V_{B'.AIC} = \frac{1}{3}.d(B',(ABC)).S_{\Delta AIC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{8}.\frac{5a^2}{8} = \frac{5a^3\sqrt{6}}{192}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, có AC= 2a .
SA vuông góc với đáy ABCD, SAB là tam giác cân.
a). Tính thể tích S.ABCD theo a .

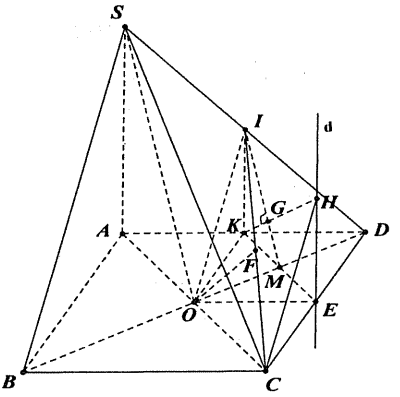
b). Gọi I trung điểm của SD. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (IOC).
c). Tìm tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện IOCD.

LỜI GIẢI

a) Vì ΔSAB vuông tại A. Suy ra ΔSAB cân tại A , nên: $SA = AB = a\sqrt{2}$, $SB = 2a$
Thể tích khối chóp S.ABC:

$$V = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}SA.AB^2 = \frac{1}{3}.a\sqrt{2}.2a^2 = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}.$$

b) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (IOC) .
Thông qua thể tích khối chóp I.OBC để tính khoảng cách từ B đến mp(IOC).
Gọi K là trung điểm AD, có IK là đường trung bình của ΔSAD
$\Rightarrow IK // SA \Rightarrow IK \perp (ABCD)$



Có: $IK = \frac{1}{2}SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy: $V_{I.OBC} = \frac{1}{3}.IK.S_{\Delta OBC} = \frac{1}{3}.IK.\frac{1}{4}S_{ABCD}$

$= \frac{1}{12}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.2a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

OI là đường trung bình của $\Delta SBD \Rightarrow OI = \frac{1}{2}SB = a$, có:

$OC = \frac{1}{2}AC = a \Rightarrow \Delta IOC$ cân tại O.

Dễ dàng chứng minh: $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$,

Có: $CI = \sqrt{CD^2 + DI^2} = \sqrt{CD^2 + \frac{SD^2}{4}} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

Gọi F là trung điểm của CI. Có $OF = \sqrt{OC^2 - CF^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{a}{2}$.

Diện tích tam giác IOC: $S_{\Delta IOC} = \frac{1}{2}OF.CI = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$$V_{I.OBC} = \frac{1}{3}d(B,(IOC)).S_{\Delta IOC} \Rightarrow d(B,(IOC)) = \frac{3V_{I.OBC}}{S_{\Delta IOC}} = \frac{3.\frac{a^3\sqrt{2}}{12}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Kết luận: $d\left(B,(IOC)\right)=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

c) Tìm tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện IOCD.

Gọi E là trung điểm của CD.

Vì tam giác OCD vuông tại O nên E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OCD.

Từ E kẻ đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (OCD), thì d là trục đường tròn ngoại tiếp ΔOCD.

Ta có: $KI=KO=KD=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, và có $OD=OI=ID \Rightarrow \Delta IOD$ đều.

Từ đó suy ra hình chóp K.IOD là hình chóp tam giác đều.

Gọi G là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔOCD, suy ra KG là trục đường tròn ngoại tiếp ΔOID.

Đường thẳng KG cắt đường thẳng d tại H thì H là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện I.OCD.

Gọi M trung điểm của OD có $KM=\frac{1}{2}OD=\frac{a}{2}$;

$$MG=\frac{1}{3}IM=\frac{1}{3}\frac{OD.\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$KG=\sqrt{KM^2-MG^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{12}}=\frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Ta có: $\Delta KEH \sim \Delta KGM \Rightarrow \frac{EH}{GM}=\frac{KE}{KG} \Rightarrow EH=\frac{a}{\frac{a\sqrt{6}}{6}}.\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Bán kính: $R=CH=\sqrt{CE^2+EH^2}=\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}}=a$.

Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 4a, trên cạnh AB và AD lần lượt lấy hai điểm H và K sao cho BH = 3HA, AK = 3KD. Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng ABCD tại H lấy điểm S sao cho góc $\widehat{SBH}=30^0$. Gọi E là giao điểm của CH và BK.

a) Tính thể tích khối chóp S.ABCD, và SBHKC.

b) Chứng minh năm điểm S, A, H, E, K cùng nằm trên một mặt cầu. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp khối chóp S.AHEK.

c) Gọi M là hình chiếu vuông góc của H trên cạnh SA. Tính thể tích khối chóp M.AHEK.

LỜI GIẢI

a) Có: $BH = 3a$, $AH = a$, $AK = 3a$, $DK = a$.

Trong ΔSBH có: $SH = BH.\tan 30^0 = a\sqrt{3}$;

$SB = BH : \cos 30^0 = 6a$.

Ta có: $\Delta BCH = \Delta ABK(c.g.c) \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{C_1}$.

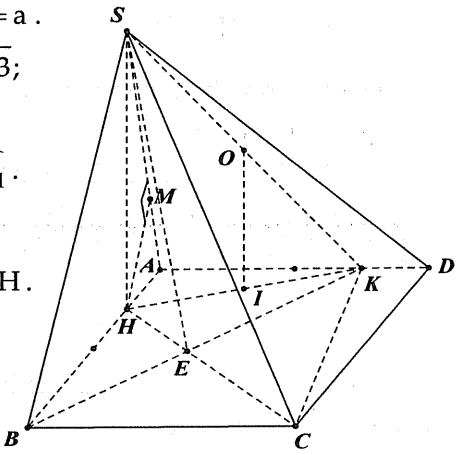
Mà $\widehat{C_1} + \widehat{H_1} = 90^0 \Rightarrow \widehat{B_1} + \widehat{H_1} = 90^0$.

Vậy: ΔHBE vuông tại E suy ra $BK \perp CH$.

$HK = \sqrt{AH^2 + AK^2} = a\sqrt{10}$,

$SK = \sqrt{SH^2 + HK^2} = a\sqrt{13}$;

$SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = 2a$;



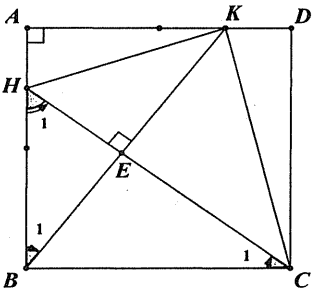
$BK = HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = 5a$; $BH^2 = HE.HC \Leftrightarrow 9a^2 = HE.5a \Rightarrow HE = \dfrac{9a}{5}$.

$EK = \sqrt{HK^2 - HE^2} = \sqrt{10a^2 - \dfrac{81a^2}{25}} = \dfrac{13a}{5}$

$S_{ABCD} = AB^2 = 16a^2$, $S_{BCKH} = \dfrac{1}{2}BK.CH = \dfrac{25a^2}{2}$

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{3}.16a^2 = \dfrac{16a^3\sqrt{3}}{3}$

$V_{S.BCKH} = \dfrac{1}{3}SH.S_{BCKH} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{3}.\dfrac{25a^2}{2} = \dfrac{25a^3\sqrt{3}}{6}$.



Hình 2

b) Vì hai tam giác HAK và HEK vuông tại A và D nên tứ giác AHEK nội tiếp trong đường tròn đường kính HK .

Gọi I và O lần lượt là trung điểm của HK và SK. Suy ra OI là đường trung bình của $\Delta SHK \Rightarrow OI \perp (AHEK) \Rightarrow$ OI là trục của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AHEK, nên $OA = OH = OE = OK$.

Mà O trung điểm của SK nên $OS = OK$.

Từ đó suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.AHEK và bán kính $R = \dfrac{SK}{2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

c) Thể tích khối cầu cần tìm là: $V = \dfrac{4}{3}\pi.R^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{13}}{2}\right)^3 = \dfrac{13\pi a^3\sqrt{13}}{6}$.

Trong ΔSHA có $HA^2 = AM.AS \Leftrightarrow a^2 = AM.2a \Rightarrow AM = \dfrac{a}{2}$.

Ta có:

$$\frac{d\left(M,(ABCD)\right)}{d\left(S,(ABCD)\right)}=\frac{MA}{SA}=\frac{1}{4}\Rightarrow d\left(M,(ABCD)\right)=\frac{1}{4}d\left(S,(ABCD)\right)=\frac{1}{4}SH=\frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$S_{AHEK}=S_{\Delta AHK}+S_{\Delta HEK}=\frac{1}{2}AH.AK+\frac{1}{2}EH.EK=\frac{1}{2}\left(a.3a+\frac{9a}{5}.\frac{13a}{5}\right)=\frac{96a^2}{25}$$

$$V_{M.AHEK}=\frac{1}{3}.d\left(M,(ABCD)\right).S_{\Delta HEK}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{96a^2}{25}=\frac{8a^3\sqrt{3}}{25}.$$

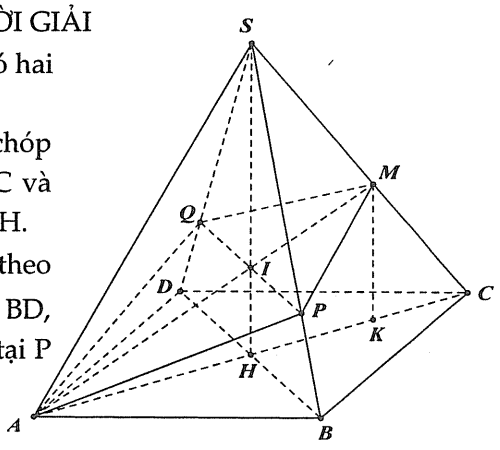
Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng 2a. Một điểm M thay đổi trên cạnh SC (khác so với S và C), đặt $\frac{SM}{SC}=k$. Dựng mặt phẳng (α) qua AM và song song với BD, mặt phẳng này cắt SB tại P và cắt SD tại Q.

a). Chứng minh rằng tứ giác APMQ có hai đường chéo vuông góc với nhau.

b). Với $k=\frac{1}{2}$, hãy tính thể tích khối chóp S.APMQ.

c). Xác định giá trị của k để mặt phẳng (α) chia khối chóp S.ABCD thành hai phần có thể tích bằng nhau.

LỜI GIẢI



a) Chứng minh rằng tứ giác APMQ có hai đường chéo vuông góc với nhau.

Kẻ đường cao SH của khối chóp S.ABCD thì H là giao điểm của AC và BD. Gọi I là giao điểm của AM và SH.

Do $(\alpha)//BD$ nên (α) cắt (SBD) theo giao tuyến qua I và song song với BD, giao tuyến này cắt SB, SD lần lượt tại P và Q, có $PQ//BD$.

Ta có: $\begin{cases}BD\perp AC\\BD\perp SH\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)$.

Mà $PQ//BD$ nên $PQ\perp(SAC)$, suy ra $PQ\perp AM$.

Vậy: tứ giác APMQ có hai đường chéo vuông góc.

Ngoài ra do H là trung điểm của BD nên I cũng là trung điểm của PQ, nghĩa là hai điểm P và Q đối xứng với nhau qua AM.

b) Với $k=\frac{1}{2}$, hãy tính thể tích khối chóp S.APMQ.

Nếu $k=\frac{1}{2}$ thì M là trung điểm của SC, do đó I là trọng tâm của ΔSAC.

Trong ΔSBD: PQ // BD $\Rightarrow \frac{SP}{SB}=\frac{SQ}{SD}=\frac{SI}{SH}=\frac{2}{3}$

Gọi V_1 là thể tích khối chóp S.APMQ và V là thể tích khối chóp S.ABCD.

Ta có: $V_1=2V_{S.APM}$ và $V=2V_{S.ABC}$.

Có: $\frac{V_{S.APM}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA}{SA}.\frac{SP}{SB}.\frac{SM}{SC}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\Rightarrow V_1=\frac{V}{3}$

Mặt khác $V=\frac{1}{3}.S_{ABCD}.SH$, có:

$S_{ABCD}=a^2$; $SH=\sqrt{SC^2-HC^2}=\sqrt{(2a^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Do đó: $V=\frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{14}}{2}=\frac{a^3\sqrt{14}}{6}$. Vậy $V_1=\frac{a^3\sqrt{14}}{18}$.

c) Xác định giá trị của k: Gọi K là hình chiếu vuông góc của M trên AC.

Trong ΔSHC: MK // SH $\Rightarrow \frac{MK}{SH}=\frac{CM}{CS}=1-k$ (1)

Trong ΔAMK: IH // MK $\Rightarrow \frac{MK}{IH}=\frac{AK}{AH}=\frac{AH+HK}{AH}=1+\frac{HK}{HC}=1+k$

(vì AH = HC) (2)

Từ (1) và (2) cho: $\frac{IH}{SH}=\frac{1-k}{1+k}\Rightarrow\frac{SI}{SH}=1-\frac{1-k}{1+k}=\frac{2k}{1+k}$

Trong ΔSBD: PQ // BD $\Rightarrow \frac{SP}{SB}=\frac{SQ}{SD}=\frac{SI}{SH}=\frac{2k}{1+k}$.

Gọi V_1 là thể tích khối chóp S.APMQ và V là thể tích khối chóp S.ABCD.

Ta có: $V_1=2V_{S.APM}$ và $V=2V_{S.ABC}$.

Có: $\frac{V_{S.APM}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA}{SA}.\frac{SP}{SB}.\frac{SM}{SC}=\frac{2k}{1+k}.k=\frac{2k^2}{1+k}\Rightarrow V_1=\frac{2k^2}{1+k}V$.

Theo yêu cầu đề bài, ta có :

$$\frac{2k^2}{k+1}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 4k^2-k-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}\\ k=\dfrac{1-\sqrt{17}}{8}\end{array}\right.\ \text{(Loại)}$$

Vậy: nếu $k=\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$ thì mặt phẳng (α) chia khối chóp S.ABCD thành hai phần có thể tích bằng nhau.

Cho khối tứ diện OABC với OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một, biết $OA=OB=2a, OC=4a$. Một điểm M thay đổi trên cạnh OA, đặt $OM=x(0<x<2a)$. Qua M dựng mặt phẳng (α) song song với AB và OC, mặt phẳng này cắt các cạnh OB, BC, AC lần lượt tại các điểm N, P, Q.

a). Tứ giác MNPQ là hình gì? Tính diện tích của nó theo a và x.

b). Tính thể tích V của khối chóp O.MNPQ theo a và x.

c). Xác định vị trí của M để V đạt giá trị lớn nhất.

d). Xác định tâm và tính diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp O.ABC.

e). Tính diện tích của mặt cầu nội tiếp hình chóp O.ABC.

LỜI GIẢI

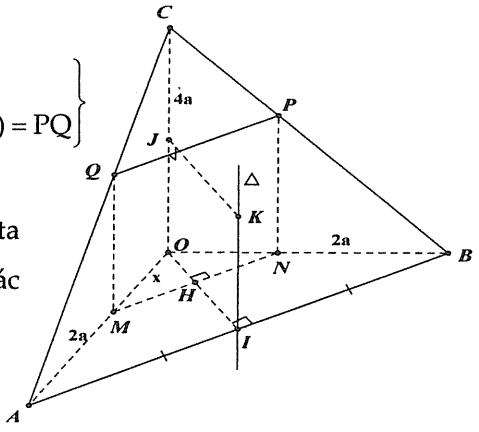
a) Tứ giác MNPQ là hình gì?

Tính diện tích của nó theo a và x:

Ta có: $\left.\begin{array}{l}(\alpha)\ //\ AB, AB=(OAB)\cap(CAB)\\ (\alpha)\cap(OAB)=MN,\ (\alpha)\cap(CAB)=PQ\end{array}\right\}$

$\Rightarrow MN\ //\ PQ\ //\ AB$

Với $(\alpha)\ //\ OC$, lập luận tương tự ta được $MQ\ //\ NP\ //\ OC$. Do đó tứ giác MNPQ là một hình bình hành.



Mặt khác $OC\perp(OAB)$ và $MQ\ //\ OC$

$\Rightarrow MQ\perp(OAB)\Rightarrow MQ\perp MN$.

Như vậy: tứ giác MNPQ là một hình chữ nhật.

Tam giác OAB vuông cân tại O.

Mà MN // AB nên ΔOMN vuông cân tại O. Do đó $MN=x\sqrt{2}$.

Trong ΔOAC:

$$MQ\ //\ OC\Rightarrow\frac{MQ}{OC}=\frac{AM}{AO}\Rightarrow MQ=\frac{OC.AM}{AO}=\frac{4a(2a-x)}{2a}=2(2a-x)$$

Ta được $S_{MNPQ}=MN.MQ=2\sqrt{2}x(2a-x)$.

b) Tính thể tích V của khối chóp O.MNPQ theo a và x.

Gọi I là trung điểm của AB và H là giao điểm của OI với MN.

Ta có $OH \perp MN, OH \perp MQ \Rightarrow OH \perp (MNPQ)$

Do đó: $V = \frac{1}{3}S_{MNPQ}.OH = \frac{1}{3}.2\sqrt{2}x(2a-x).\frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $V = \frac{2}{3}x^2(2a-x), (0 < x < 2a)$.

c) Xác định vị trí của M để V đạt giá trị lớn nhất.

Ta viết: $V = \frac{1}{3}.x.x.(4a-2x)$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si: $x.x.(4a-2x) \le \left(\frac{x+x+(4a-2x)}{3}\right)^3 = \frac{64a^3}{27}$

Suy ra: $V \le \frac{64a^3}{81}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 4a-2x \Leftrightarrow x = \frac{4a}{3}$

Vậy: $V_{max} = \frac{64a^3}{81}$ khi $x = OM = \frac{4a}{3}$.

d) Tam giác OAB vuông tại O nên trung điểm I của AB là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOAB.

Từ giả thiết ta suy ra $OC \perp (OAB)$. Do đó nếu qua I dựng đường thẳng Δ vuông góc với mp(OAB) thì Δ là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔOAB. Qua trung điểm J của OC ta dựng mặt trung trực của OC, mặt phẳng này cắt Δ tại K. Điểm K là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp O.ABC.

Ta có: $OI = \frac{AB}{2} = a\sqrt{2}; IK = OJ = 2a$

Từ tam giác OIK vuông cân tại I:

$OK = \sqrt{OI^2 + IK^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + (2a)^2} = a\sqrt{6}$

Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp O.ABC là:

$S_c = 4\pi R^2 = 4\pi\left(a\sqrt{6}\right)^2 = 24\pi a^2$

e) Tính diện tích của mặt cầu nội tiếp hình chóp O.ABC.

Gọi r là bán kính của mặt cầu (π) nội tiếp hình chóp O.ABC.

Thể tích V của khối chóp O.ABC cho bởi: $V = \frac{1}{3}S_{tp}.r \Leftrightarrow r = \frac{3V}{S_{tp}}$

$V = \frac{1}{6}OA.OB.OC = \frac{1}{6}2a.2a.4a = \frac{8}{3}a^3$

$S_{tp} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA} + S_{ABC}$; $S_{OAB} = 2a^2, S_{OBC} = 4a^2, S_{OCA} = 4a^2$.

Tam giác OAB vuông cân tại O, nên $OI \perp AB$. Suy ra $CI \perp AB$.

Tam giác OCI vuông tại O $\Rightarrow CI = \sqrt{OI^2 + CI^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(4a\right)^2} = 3a\sqrt{2}$

Do đó: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.CI = \frac{1}{2}2a\sqrt{2}.3a\sqrt{2} = 6a^3$.

Suy ra: $S_{tp} = 2a^2 + 4a^2 + 4a^2 + 6a^2 \Rightarrow r = \frac{\frac{8a^3}{3}}{16a^2} = \frac{a}{6}$.

Diện tích của mặt cầu (π) nội tiếp O.ABC: $S_\pi = 4\pi r^2 = 4\pi\left(\frac{a}{6}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{9}$.

Cho khối chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy và cạnh bên bằng a.

a) Tính thể tích V của khối chóp.

b) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, SC. Mặt phẳng (MNP) cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại E và F. Tính độ dài các đoạn thẳng EB, FD.

c) Chứng minh rằng mặt phẳng (MNP) chia khối chóp S.ABCD thành hai phần có thể tích bằng nhau.

LỜI GIẢI

a) Kẻ đường cao SH.

Vì S.ABCD là hình chóp đều nên:

H trùng với tâm của đáy ABCD.

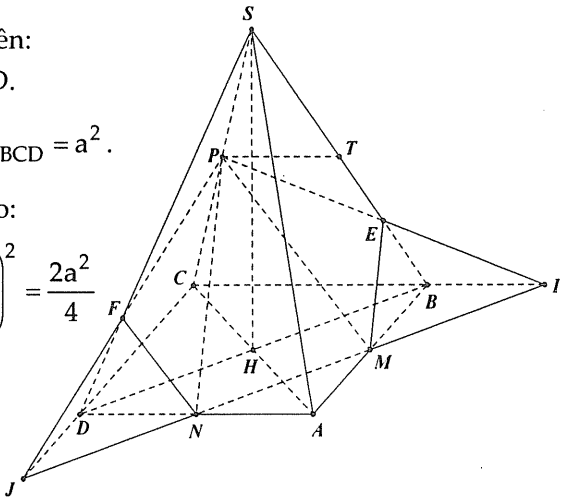
Ta có: $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH$, với $S_{ABCD} = a^2$.

Tam giác SHA vuông tại H cho:

$SH^2 = SA^2 - HA^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4}$

$\Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy: $V = \frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{6}$.



b). Đường thẳng MN cắt các đường thẳng BC và CD lần lượt tại I và J.

Nhận thấy các tam giác vuông cân BMI, AMN, DNJ bằng nhau.

Suy ra $DJ = BI = AM = \frac{a}{2}$.

Trong ΔSBC kẻ đoạn thẳng PT song song với $BC(T \in SB)$.

Ta thấy hai tam giác PTE và BEI bằng nhau.

Suy ra $ET = EB = \frac{SB}{4} = \frac{a}{4}$. Chứng minh tương tự $FD = \frac{a}{4}$.

c). Gọi chiều cao của khối chóp S.ABCD là h.

Mặt phẳng (MNP) chia khối chóp thành hai phần.

Gọi V_1 là thể tích phần chứa điểm C và V_2 là thể tích của phần còn lại.

Vì P là trung điểm của SC nên $d\left(P,(ABCD)\right) = \frac{1}{2}d\left(S,(ABCD)\right) = \frac{h}{2}$.

Vì $FD = \frac{1}{4}SD$ nên $d\left(F,(ABCD)\right) = \frac{1}{4}d(S,(ABCD)) = \frac{h}{4}$.

Để ý rằng $V_{P.DNJ} = V_{E.BMI}$. Từ các kết quả trên ta có:

$$V_1 = V_{P.CIJ} - 2V_{P.DNJ} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.CI^2.\frac{h}{2} - 2.\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}DN.DJ\right).\frac{h}{4}$$

$$V_1 = \frac{1}{12}\left(\frac{3a}{2}\right)^2.h - \frac{1}{12}.\left(\frac{a}{2}.\frac{a}{2}\right).h = \frac{1}{6}a^2h = \frac{V}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

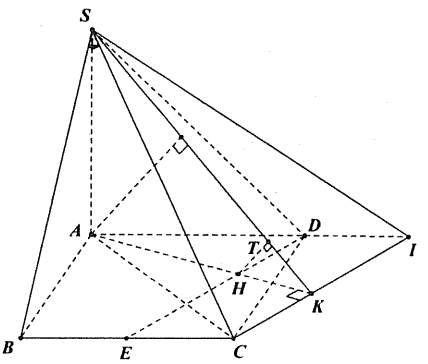
Suy ra: $V_2 = \frac{V}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Vậy $V_1 = V_2$.

CHƯƠNG VII: BÀI TẬP TỔNG HỢP PHẦN KHỐI CHÓP

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với mặt đáy (ABCD). Góc tạo bởi SC và mặt phẳng (SAB) bằng 30^0. Gọi E là trung điểm của cạnh BC. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng DE , SC theo a.

LỜI GIẢI



Vì CB ⊥ AB, CB ⊥ SA nên CB ⊥ mp (SAB).

⇒ SB là hình chiếu của SC trên mp (SAB).

Do đó $\left(\widehat{SC,(SAB)}\right)=\left(\widehat{SC,SB}\right)=\widehat{CSB}=30^0$.

$SB=BC.\cot 30^0=a\sqrt{3}$.

$\Rightarrow SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=\sqrt{3a^2-a^2}=a\sqrt{2}$.

Thể tích khối chóp S.ABCD là:

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}a\sqrt{2}.a^2=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}.$$

Từ C, dựng CI // DE $\Rightarrow CE=DI=\frac{a}{2}$ và DE // (SCI).

Vậy: $d(DE,SC)=d\left(DE,(SCI)\right)$

Từ A kẻ AK ⊥ CI cắt ED tại H , cắt CI tại K.

Ta có: $\begin{cases}SA\perp CI\\AK\perp CI\end{cases}\Rightarrow CI\perp mp(SAK)$.

Mà $CI\subset(SCI)\Rightarrow(SCI)\perp(SAK)$ theo giao tuyến SK.

Trong mặt phẳng (SAK) kẻ HT ⊥ AK $\Rightarrow HT\perp mp(SCI)$.

Vậy: $d(DE,SC)=d\left(DE,(SCI)\right)=d\left(H,(SCI)\right)=HT$.

Xét ΔACI có: $S_{\Delta ACI}=\frac{1}{2}AK.CI=\frac{1}{2}CD.AI$

$$\Rightarrow AK=\frac{CD.AI}{CI}=\frac{a.\frac{3}{2}a}{\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}}=\frac{3a}{\sqrt{5}}$$

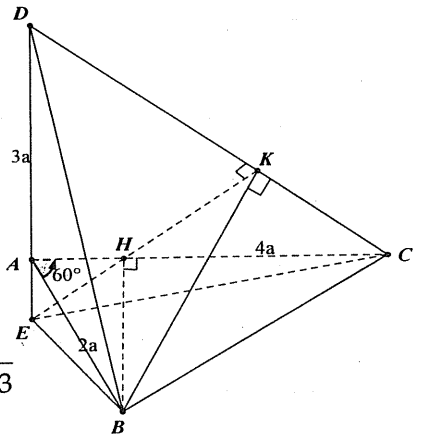
Xét ΔAKI có DH // IK $\Rightarrow \frac{AH}{AK}=\frac{AD}{AI}=\frac{DH}{IK}=\frac{2}{3}\Rightarrow HK=\frac{1}{3}AK=\frac{a}{\sqrt{5}}$.

Lại có: $\sin\widehat{SKA}=\dfrac{SA}{SK}=\dfrac{HT}{HK}\Rightarrow HT=\dfrac{SA.HK}{SK}=\dfrac{a\sqrt{2}.\dfrac{a}{\sqrt{5}}}{\sqrt{2a^2+\dfrac{9a^2}{5}}}=\dfrac{a\sqrt{38}}{19}$.

Vậy: $d(SE,SC)=d(DE,(SCI))=d(H,(SCI))=HT=\dfrac{a\sqrt{38}}{19}$.

Cho tứ diện ABCD có AD vuông góc với mp (ABC). $AD=3a, AB=2a, AC=4a, \widehat{BAC}=60^0$. Gọi H, K là hình chiếu vuông góc của B trên AC và CD. Đường thẳng HK cắt đường thẳng AD tại E. Chứng minh BE vuông góc với CD và tính thể tích khối tứ diện BCDE.

LỜI GIẢI



Ta có: H là trực tâm của tam giác CDE.

Suy ra: $EK\perp CD$

$\begin{cases}EK\perp CD\\BK\perp CD\end{cases}\Rightarrow CD\perp mp(BKE)\Rightarrow BE\perp CD$

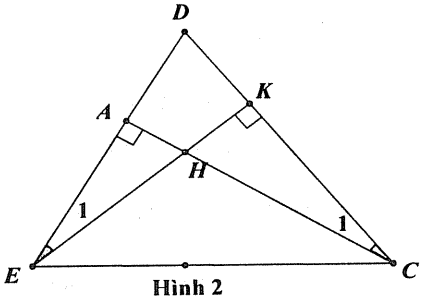
ΔACD vuông tại A có:

$CD=\sqrt{AD^2+AC^2}=5a$.

ΔABH vuông tai H: $\begin{cases}AH=AB.\cos 60^0=a\\BH=AB.\sin 60^0=a\sqrt{3}\end{cases}$

ΔCDE được vẽ lại ở hình 2, có:

$\widehat{E_1}=\widehat{C_1}$ (Vì cùng phụ với $\widehat{EDC}$), nên có:



Hình 2

$\Delta EAH\sim\Delta CAD(g.g)\Rightarrow\dfrac{EA}{CA}=\dfrac{AH}{AD}$

$\Leftrightarrow EA=\dfrac{a}{3a}.4a=\dfrac{4a}{3}$.

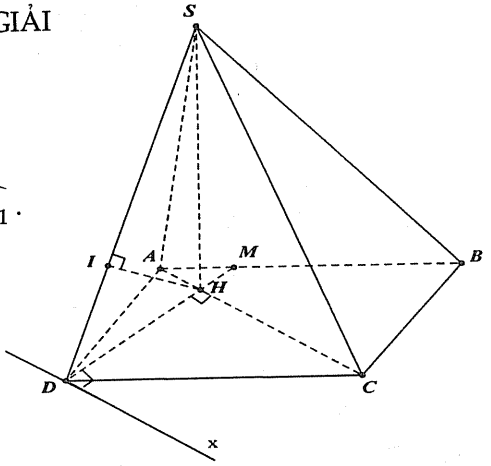
$V_{BCDE}=V_{D.ABC}+V_{E.ABC}$

$=\dfrac{1}{3}AD.S_{ABC}+\dfrac{1}{3}EA.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}DE.S_{ABC}$

$V_{BCDE}=\dfrac{1}{3}\left(3a+\dfrac{4}{3}a\right).\dfrac{1}{2}a\sqrt{3}.4a=\dfrac{26a^3\sqrt{3}}{9}$.

Cho khối chóp S.ABCD có ABCD là hình chữ nhật, biết AB = 2a, AD = a. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $AM=\dfrac{a}{2}$, cạnh AC cắt MD tại H. Biết SH vuông góc với mp(ABCD) và SH = a. Tính thể tích khối chóp S.HCD và khoảng cách giữa 2 đường thẳng SD và AC.

LỜI GIẢI



a) Ta có: $\begin{cases} \dfrac{AM}{BC} = \dfrac{AD}{BA} \\ \widehat{DAM} = \widehat{CBA} = 90^0 \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta AMD \backsim \Delta BCA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{C_1}$.

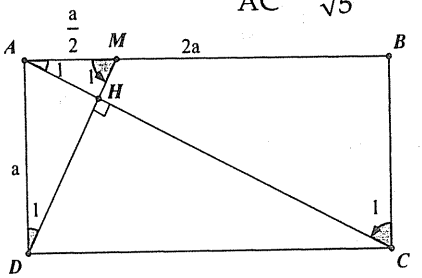
Mà $\widehat{A_1} + \widehat{C_1} = 90^0 \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{M_1} = 90^0$.

Vậy: $AC \perp DM$ tại H.

$DM = \sqrt{AD^2 + AM^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$;

$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = a\sqrt{5}$

$AD^2 = DH.DM \Rightarrow DH = \dfrac{AD^2}{DM} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$; $CD^2 = CH.AC \Rightarrow CH = \dfrac{CD^2}{AC} = \dfrac{4a}{\sqrt{5}}$



$S_{\Delta CDH} = \dfrac{1}{2}.DH.CH = \dfrac{1}{2}.\dfrac{2a}{\sqrt{5}}.\dfrac{4a}{\sqrt{5}} = \dfrac{4a^2}{5}$.

$V_{S.CDH} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{\Delta CDH} = \dfrac{1}{3}.a.\dfrac{4a^2}{5} = \dfrac{4a^3}{15}$.

b) Kẻ $HI \perp SD$ tại I (1)

Ta có: $\begin{cases} AC \perp DH \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp mp(DSH) \Rightarrow AC \perp HI$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $HI = d(AC, SD)$.

Ta có: $\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{HD^2} + \dfrac{1}{HS^2} = \dfrac{5}{4a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{9}{4a^2} \Rightarrow IH = \dfrac{2a}{3}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật $AB = 2a, AD = 4a$, $SA \perp mp(ABCD)$ và góc giữa SC và mp(ABCD) bằng 30^0. Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB, BC. N ở trên cạnh AD sao cho DN = a. Tính thể tích khối chóp S.AHMN và tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng MN và SB.

LỜI GIẢI

* Tính thể tích khối chóp S.AHMN:

AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mp(ABCD).

Nên $\left[(SC,(ABCD))\right] = \widehat{SCA} = 30^0$;

Có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a\sqrt{5}$; $SA = AC \tan\widehat{SCA} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

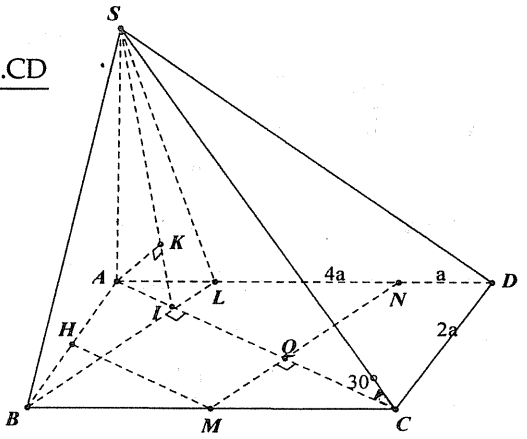
$S_{AHMN} = S_{ABCD} - S_{BHM} - S_{CDNM}$

$= AB.AD - \frac{1}{2}BH.BM - \frac{(MC+ND).CD}{2}$

$= 8a^2 - a^2 - 3a^2 = 4a^2$.

$V_{S.AHMN} = \frac{1}{3}.SA.S_{AHMN}$

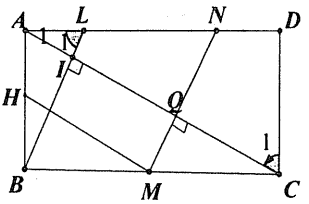
$= \frac{1}{3}.\frac{2a\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.4a^2 = \frac{8a^3\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$.



* Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng MN và SB:

Qua B kẻ đường thẳng song song với MN cắt AC tại I và cắt AD tại L.

Ta có: $\begin{cases} \frac{LA}{CD} = \frac{AB}{AD} = \frac{1}{2} \\ \widehat{LAB} = \widehat{CDA} = 90^0 \end{cases} \Rightarrow \Delta LAB \sim \Delta CBA (c.g.c)$



$\Rightarrow \widehat{L_1} = \widehat{C_1}$, mà $\widehat{A_1} + \widehat{C_1} = 90^0 \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{L_1} = 90^0$.

Vậy: $AC \perp BL$ tại I.

Gọi $Q = AC \cap MN$.

Trong tam giác CIB: M trung điểm của BC, BI // MQ $\Rightarrow$ Q trung điểm CI.

Ta có: $CI = AC - AI = 2a\sqrt{5} - \frac{2a}{\sqrt{5}} = \frac{8a}{\sqrt{5}} \Rightarrow QI = \frac{4a}{\sqrt{5}}$.

$BL = \sqrt{AB^2 + AL^2} = a\sqrt{5}$; $AI.BL = AB.AL \Rightarrow AI = \frac{2a.a}{a\sqrt{5}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Vì $BL // MN \Rightarrow MN // (SBL)$.

Vậy: $d(MN,SB) = d(MN,(SBL)) = d(Q,(SBL))$.

Ta có: $\begin{cases} AC \perp BL \\ AC \perp SA \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBL) \Rightarrow (SAC) \perp (SBL)$: hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SI.

Kẻ $AK \perp SI$ tại $K \Rightarrow AK \perp (SBL)$.

Vậy: $d(A,SBL) = AK$. $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{5}{4a^2} + \frac{3}{20a^2} = \frac{28}{20a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$

$AQ \cap mp(SBL) = I \Rightarrow \frac{d_{(Q,(SBL))}}{d_{(A,(SBL))}} = \frac{QI}{AI} = 2 \Rightarrow d_{(Q,(SBL))} = \frac{2a\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$.

Cho tứ diện ABCD có mp(ABC) vuông góc với mp(BCD), tam giác BCD vuông tại D. Biết $AB = a\sqrt{15}, BC = 3a\sqrt{3}, AC = a\sqrt{6}$, góc giữa 2 mp (ACD) và (BCD) bằng 60^0. Tính thể tích khối tứ diện ABCD và khoảng cách từ B đến mp(ACD) theo a.

LỜI GIẢI

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB.BC} = \frac{15a^2 + 27a^2 - 6a^2}{18a^2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

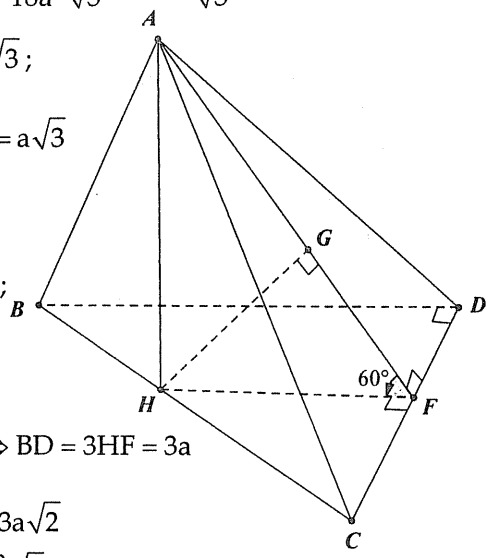
$$BH = AB.\cos\widehat{ABC} = a\sqrt{15}.\frac{2}{\sqrt{5}} = 2a\sqrt{3};$$

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{15a^2 - 12a^2} = a\sqrt{3}$$

Hạ $HF \perp CD \Rightarrow CD \perp mp(AHF)$

$\Rightarrow CD \perp AF$.

Vậy: $\left[(ACD),(BCD)\right] = \widehat{AFH} = 60^0$;



$$HF = \frac{AH}{\tan 60^0} = a \ .$$

Ta có: $HF // BD \Rightarrow \frac{CH}{CB} = \frac{HF}{BD} = \frac{1}{3} \Rightarrow BD = 3HF = 3a$

$$CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{27a^2 - 9a^2} = 3a\sqrt{2}$$

$$S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}.BD.CD = \frac{1}{2}3a.3a\sqrt{2} = \frac{9a^2\sqrt{2}}{2}$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}.AH.S_{\Delta BCD} = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{9a^2\sqrt{2}}{2} = \frac{3a^3\sqrt{6}}{2}$$

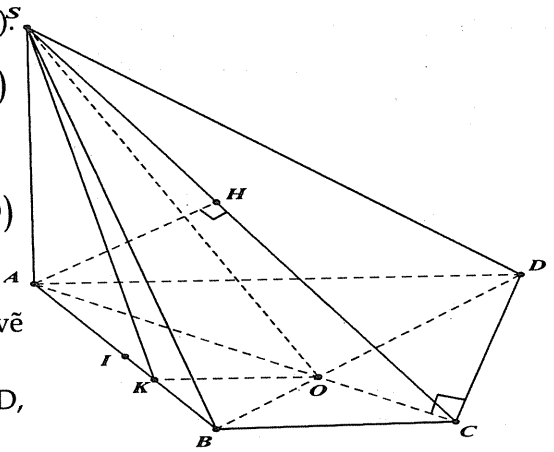
Kẻ $HG \perp SF \Rightarrow d_{(H,(SCD))} = HG$.

$$\frac{1}{HG^2} = \frac{1}{HF^2} + \frac{1}{HA^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow HG = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$BH \cap mp(ACD) = C \Rightarrow \frac{d(B,(ACD))}{d(H,(ACD))} = \frac{BC}{HC} = 3 \Rightarrow d(B,(ACD)) = \frac{3a\sqrt{3}}{2}.$$

Cho hình chóp SABCD có SA vuông góc với đáy, đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính AD, với AD = 2a. Gọi I là trung điểm của AB, biết khoảng cách từ I tới mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{3a\sqrt{3}}{8}$. Tính thể tích khối chóp SABCD theo a và cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng SO và AD, với O là giao điểm của AC và BD.

LỜI GIẢI



$AC \perp CD$ (Vì AD là đường kính).

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$

$\Rightarrow (SCD) \perp (SAC)$.

Hạ $AH \perp SC \Rightarrow AH \perp mp(SCD)$

$\Rightarrow d_{(A,(SCD))} = AH$.

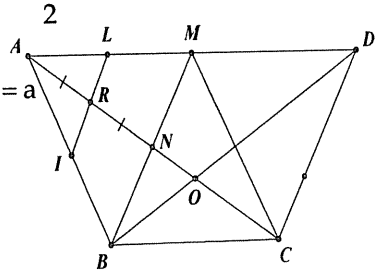
Mặt phẳng đáy (ABCD) được vẽ lại ở hình bên.

Gọi M là trung điểm của AD, $N = BM \cap AC$.

Qua I kẻ đường thẳng song song với BM, đường thẳng này cắt AC và AD lần lượt tại R và L. Vì ABCD là nửa lục giác đều suy ra ABCM và BCDM là hai hình thoi, nên có N là trung điểm của AC, và R là trung điểm của AN.

Vì $IL // CD \Rightarrow IL // (SCD)$, nên $d(I,(SCD)) = d(R,(SCD)) = \dfrac{3a\sqrt{3}}{8}$.

Hai điểm A và R nằm trên đường thẳng có giao điểm với mp(SCD) tại C nên có: $\dfrac{d(A,(SCD))}{d(I,(SCD))} = \dfrac{AC}{RC} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow d(A,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$



$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow \dfrac{1}{AS^2} = \dfrac{4}{3a^2} - \dfrac{1}{3a^2} \Rightarrow AS = a$

$S_{ABCD} = 3.S_{ABM} = 3.\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Kẻ $OK // AD$. Góc giữa AD và SO chính là góc giữa OK và SO.

$AO = \dfrac{2}{3}AC = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$; $KO = \dfrac{2}{3}AD = \dfrac{4a}{3}$; $AK = \dfrac{2}{3}AB = \dfrac{2a}{3}$.

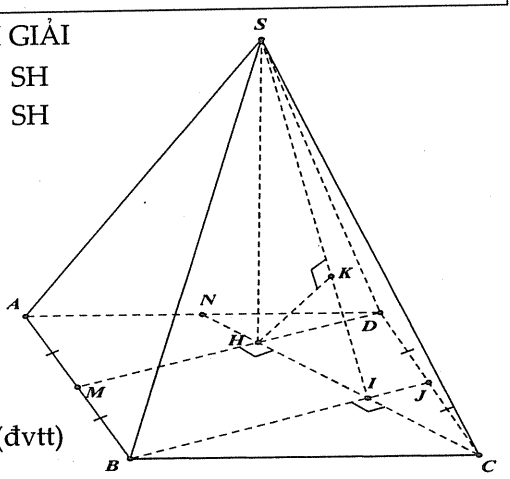
$SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{12a^2}{9}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{3}$;

$SK = \sqrt{SA^2 + AK^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{4a^2}{9}} = \dfrac{a\sqrt{13}}{3}$

$\cos\widehat{SOK} = \dfrac{OS^2 + OK^2 - SK^2}{2OS.OK} = \dfrac{1}{\sqrt{21}}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AD, H là giao điểm của CN và DM. Biết hai mặt phẳng (SHC) và (SHD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.CDNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SB.

LỜI GIẢI



(SHC) và (SHD) có giao tuyến là SH cùng vuông góc với (ABCD) nên SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

$S_{CDNM} = S_{ABCD} - S_{BCM} - S_{AMN}$

$= a^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{8} = \frac{5a^2}{8}$.

$\Rightarrow V_{S.CDNM} = \frac{1}{3}SH.S_{CDNM}$

$= \frac{1}{3}a\sqrt{3}.\frac{5a^2}{8} = \frac{5\sqrt{3}a^3}{24}$ (đvtt)

Gọi J là trung điểm của CD. Khi đó DM // (SBJ) nên:

$d(DM,SB) = d(DM,(SBJ)) = d(H,(SBJ))$

Trong (ABCD), CN cắt BJ tại I. Trong (SHI) hạ HK vuông góc với SI tại K. Chứng minh được CN vuông góc với BJ và HK vuông góc với (SHI).

Khi đó $d(H,(SBJ)) = HK$.

$CN = \sqrt{CD^2 + DN^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}, CH = \frac{CD^2}{CN} = \frac{2a}{\sqrt{5}}, HI = \frac{1}{2}CH = \frac{a}{\sqrt{5}}$

$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HI^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{5}{a^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Cho hình chóp S.ABC có đáy (ABC) là tam giác đều cạnh 4a. M là trung điểm BC, H là trung điểm của AM và $SH \perp (ABC)$. Góc giữa mp (SAB) và (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABC và góc giữa 2 mp (SAB) và (SAC).

LỜI GIẢI

Kẻ $HE \perp AB$.

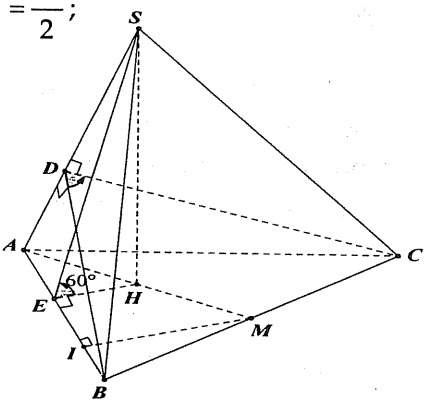
$\begin{cases} AB \perp HE \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp mp(SHE) \Rightarrow AB \perp SE$.

Vậy: $[(SAB),(ABC)] = \widehat{SEH} = 60^0$.

Kẻ $MI \perp AB \Rightarrow MI \,//\, HE$.

Ta có: $AM = \dfrac{AB.\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}$; $IM = BM.\sin 60^0 = a\sqrt{3}$.

Vậy: $EH = \dfrac{1}{2}MI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SH = HE.\tan 60^0 = \dfrac{3a}{2}$;



$S_{ABC} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 4a^2\sqrt{3}$

Thể tích khối chóp S.ABC:

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = 2a^3\sqrt{3}$

$\Delta SAB = \Delta SAC(c.c.c)$, có SA cạnh chung.

Kẻ $BD \perp SA \Rightarrow CD \perp SA$.

Vậy: $\left[(SAB),(SAC)\right] = \widehat{BDC}$

Trong tam giác SAH vuông tại H: $SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{2}$

Trong tam giác SAB: $BD.SA = AB.SE \Rightarrow BD = \dfrac{AB.SE}{SA} = \dfrac{8a}{\sqrt{7}}$

Ta có BD = CD (2 đường cao xuất phát từ 2 đỉnh tương ứng bằng nhau)

$\cos\widehat{BDC} = \dfrac{BD^2 + CD^2 - BC^2}{2BD.CD} = \dfrac{1}{8} > 0$ (thỏa) $\Rightarrow \widehat{BDC} = \arccos\dfrac{1}{8}$

Cho hình chóp S.ABCD có $SC \perp (ABCD)$, đáy ABCD là hình thoi có cạnh bằng $a\sqrt{3}$ và $\widehat{ABC} = 120^0$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) bằng 45^0. Tính theo a thể tích khối chóp SABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD C đến mặt phẳng (SBD).

LỜI GIẢI

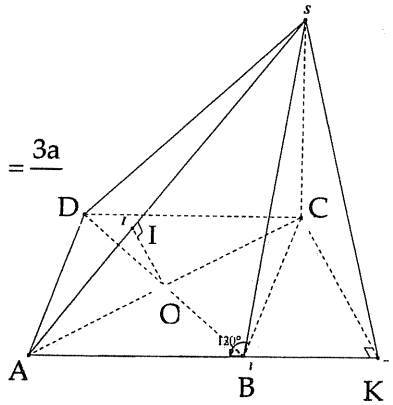
Kẻ $SK \perp AB \Rightarrow$ hình chiếu $CK \perp AB$

$\Rightarrow \left[(SAB),(ABCD)\right] = \widehat{SKC} = 45^0$.

$\widehat{ABC} = 120^0 \Rightarrow \widehat{CBK} = 60^0 \Rightarrow CK = CB\sin 60^0 = \dfrac{3a}{}$

$\Rightarrow SC = CK\tan 45^0 = \dfrac{3a}{2}$ (1)

$S_{ABCD} = AB.BC\sin 120^0 = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2}$ (2)



Từ (1) và (2) $\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SC.S_{ABCD} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$

Gọi $O = AC \cap BD$.

Vì $BD \perp AC$, $BD \perp SC$ nên $BD \perp (SAC)$ tại O.

Kẻ $OI \perp SA \Rightarrow OI$ là đường vuông góc chung của BD và SA.

Sử dụng hai tam giác đồng dạng AOI và ASC hoặc đường cao của tam giác SAC.

$\Rightarrow OI = \frac{3a}{2\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}a}{10} \Rightarrow d(SA, BD) = \frac{3\sqrt{5}a}{10}$.

Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với đáy, ABCD là hình chữ nhật với $AB = 3a\sqrt{2}, BC = 3a$. Gọi M là trung điểm CD và góc giữa (ABCD) với (SBC) bằng 60^0. Chứng minh rằng $(SBM) \perp (SAC)$ và tính thể tích tứ diện SABM.

LỜI GIẢI

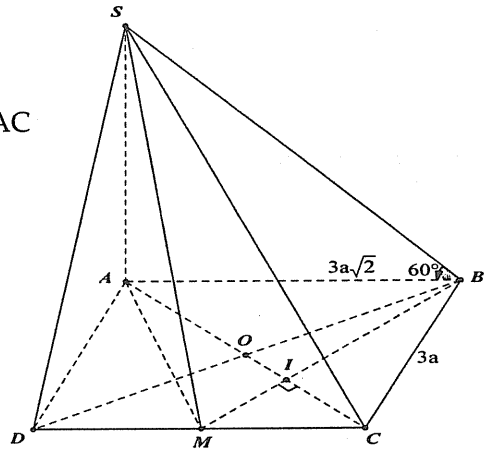
Gọi $I = BM \cap AC \Rightarrow$ I là trọng tâm của tam giác BCD

$\Rightarrow IM = \frac{1}{3}BM = \frac{a\sqrt{6}}{2}; IC = \frac{1}{3}AC = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow IM^2 + IC^2 = \frac{18a^2}{4} = CM^2 \Rightarrow BM \perp AC$

Mặt khác: $BM \perp SA \Rightarrow BM \perp (SAC)$

$\Rightarrow (SBM) \perp (SAC)$



Ta có: $S_{ABM} = \frac{1}{2}AB.d(M, AB)$

$= \frac{1}{2}3a\sqrt{2}.3a = \frac{9a^2\sqrt{2}}{2}$

Theo bài ra $\widehat{SBA} = 60^0$.

Xét tam giác vuông SAB có: $SA = AB\tan 60^0 = 3a\sqrt{6}$

$\Rightarrow V_{SABM} = \frac{1}{3}\frac{9a^2\sqrt{2}}{2}3a\sqrt{6} = 9a^3\sqrt{3}$ (đvtt)

Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC vuông tại C, AB = 5 cm, BC = 4 cm. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và góc giữa cạnh bên SC với mặt đáy (ABC) bằng 60°. Gọi D là trung điểm của cạnh AB .Tính thể tích khối chóp S.ABC .Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BC .

LỜI GIẢI

Vì tam giác ABC vuông tại C nên:

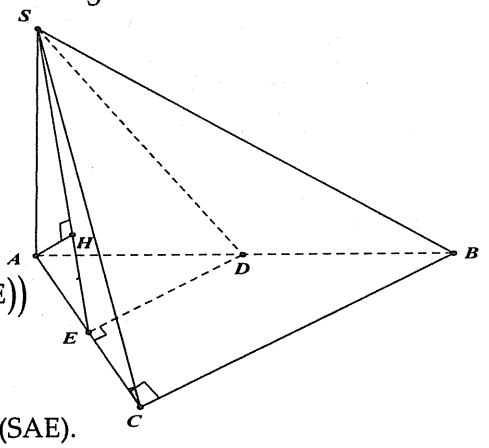
$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (cm) $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.BC = \frac{1}{2}.3.4 = 6$ (cm²)

Vì $SA \perp (ABC)$ nên AC là hình chiếu của SC trên (ABC).

$\Rightarrow$ góc giữa SC với (ABC) là $\widehat{SCA} = 60^0$.

Trong tam giác vuông SAC có: $SA = AC.\tan 60° = 3\sqrt{3}$

Do $SA \perp (ABC)$ nên: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \frac{1}{3}.3\sqrt{3}.6 = 6\sqrt{3}$ (cm³).



Gọi E là trung điểm AC.
Mà D là trung điểm AB nên DE là đường trung bình trong ΔABC
$\Rightarrow DE // BC \Rightarrow BC // (SDE)$.
Mà $SD \subset (SDE)$ nên:

$$d(BC,SD) = d(BC,(SDE)) = d(B,(SDE)) = d(A,(SDE))$$

(vì D là trung điểm AB)
Vì $BC \perp AC \Rightarrow DE \perp AC$.
Mà $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp DE \Rightarrow DE \perp (SAE)$.
$\Rightarrow (SDE) \perp (SAE)$ mà $(SDE) \cap (SAE) = SE$.
Trong (SAE) kẻ $AH \perp SE \Rightarrow AH \perp (SAE) \Rightarrow AH = d(A,(SDE))$.

Trong tam giác vuông SAE có AH là đường cao nên:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{27} + \frac{4}{9} = \frac{13}{27} \Rightarrow AH = \frac{3\sqrt{39}}{13}.$$

Vậy: $d(BC,SD) = \frac{3\sqrt{39}}{13}$.

Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AD = a\sqrt{2}, CD = 2a$, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi K là trung điểm cạnh CD, góc giữa hai mặt phẳng (SBK) và (ABCD) bằng 60^0. Chứng minh BK vuông góc với mặt phẳng (SAC). Tính thể tích khối chóp S.BCK theo a.

LỜI GIẢI

Gọi $O = AC \cap BD$, $E = AC \cap BK$.
Ta có E là trọng tâm của tam giác BCD,

$$AC = a\sqrt{6},\ OC = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow CE = \frac{2}{3}OC = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$BK = \sqrt{CK^2 + BC^2} = a\sqrt{3};\ BE = \frac{2}{3}BK = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Ta có: $BE^2 + CE^2 = \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2$

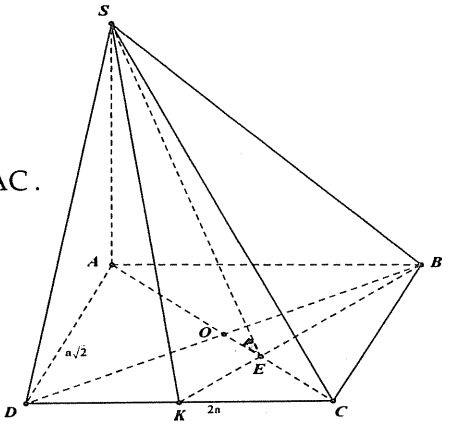
$= 2a^2 = BC^2$

Vậy: tam giác BCE vuông tại E $\Rightarrow BK \perp AC$.

$\begin{cases} BK \perp AC \\ BK \perp SA \end{cases} \Rightarrow BK \perp mp(SAC)$.

$\left[(SBK),(ABCD)\right] = \widehat{SEA} = 60^0$.

Có $SA = AE.\tan 60^0 = \frac{2}{3}AC.\sqrt{3} = 2a\sqrt{2}$.



$V_{S.BCK} = \frac{1}{3}SA.S_{BCK} = \frac{1}{3}2a\sqrt{2}.\frac{1}{2}a.a\sqrt{2} = \frac{2a^3}{3}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M , N , P , K lần lượt là trung điểm của BC, CD, SD, SB.

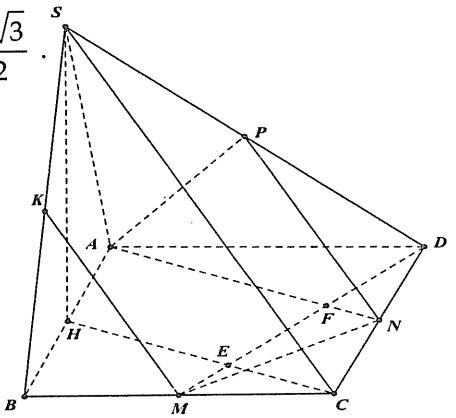
a) Tính thể tích của khối chóp S.ABMN.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MK và AP.

LỜI GIẢI

a) Gọi H trung điểm AB, thì SH ⊥ AB (SAB đều).

Vậy $SH \perp mp(ABCD)$; $SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Có: $S_{ABMN} = S_{ABCD} - S_{ADN} - S_{MCN}$

$= a^2 - \frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{5a^2}{8}$

$V_{S.ABMN} = \frac{1}{3}SH.S_{ABMN} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{5a^2}{8}$

$= \frac{5a^3\sqrt{3}}{48}$.

b) Gọi $E = HC \cap MD, F = AN \cap MD$

DM ⊥ HC (tính chất hình vuông); DM ⊥ SH .Vậy $DM \perp (SHC)$.

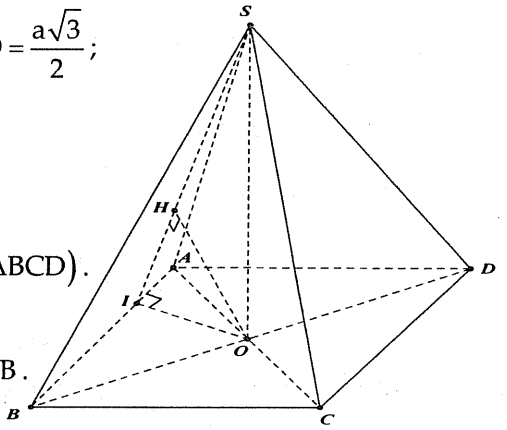
Ta có: $mp(SHC) // mp(APN) \Rightarrow DM \perp mp(APN)$.

Ta cũng có: $KM // (APN)$.

Vậy: $d(KM,AP) = d(KM,(APN)) = d(M,(APN)) = MF = \frac{3MD}{5} = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và có góc $\widehat{ABC} = 60^0$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy (ABCD). Gọi điểm I thuộc cạnh AB sao cho IB = 3IA. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, CD theo a, biết SI = a/2.

LỜI GIẢI



Ta có: ΔABC đều, nên có $AC = a, BO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Gọi $O = AC \cap BC$.

$\begin{cases}(SAC) \perp (SBD) \\ (SAC) \cap (SBD) = SO\end{cases} \Rightarrow SO \perp mp(ABCD)$.

Ta có: $AO^2 = AI.AB = \frac{a^2}{4} \Rightarrow OI \perp AB$.

$OI.AB = OA.OB \Rightarrow OI = \frac{\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Có: $SO = \sqrt{SI^2 - OI^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{a}{4}$

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

$CD \,//\, AB \Rightarrow d(CD, SA) = d(CD, (SAB)) = d(C, (SAB)) = 2d(O, (SAB))$.

Hạ $OH \perp SI \Rightarrow d(O, (SAB)) = OH$.

Có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{16}{a^2} + \frac{16}{3a^2} = \frac{64}{3a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{8}$

Vậy: $d(C, (SAB)) = 2d(O, (SAB)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Cho hình chóp S.ABC có SA = 3a, SA tạo với đáy (ABC) một góc 60^0. Tam giác ABC vuông tại B, $\widehat{ACB} = 30^0$. Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của Δ ABC. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và SC theo a.

LỜI GIẢI

Đặt $AB = t \Rightarrow AC = 2t, BC = t\sqrt{3}$.

AG là hình chiếu vuông góc của SA trên mp (ABC) nên:

$\left[SA,(ABC)\right]=\widehat{SAG}=60^0 \Rightarrow AG=SA.\cos 60^0=\dfrac{3a}{2}$;

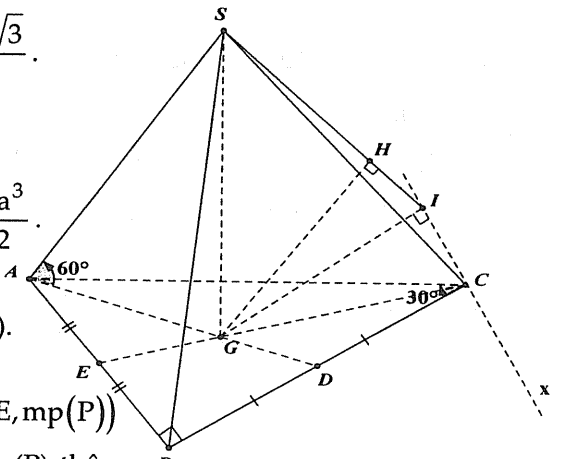
$SG=SA.\sin 60^0=\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$;

$AD^2=\dfrac{AB^2+AC^2}{2}-\dfrac{BC^2}{4} \Leftrightarrow \left(\dfrac{9a}{4}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{7}t}{2}\right)^2 \Rightarrow t=\dfrac{9a}{2\sqrt{7}}$

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}BA.BC=\dfrac{t^2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{81a^2\sqrt{3}}{56}$.

$V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SG.S_{ABC}$

$=\dfrac{1}{3}.\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{81a^2\sqrt{3}}{56}=\dfrac{243a^3}{112}$.



Kẻ Cx // AB.

Đặt mp chứa Cx và SC là mp (P).

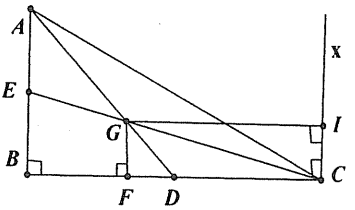
Vậy: AB // mp(P).

$d\left(AB,SC\right)=d\left(AB,mp\left(P\right)\right)=d\left(E,mp\left(P\right)\right)$

Tính khoảng cách từ E đến mp (P) thông qua khoảng cách từ G đến mp(P).

Kẻ $GI \perp Cx$ tại I. Nối SI, Kẻ $GH \perp SI$.

$\Rightarrow GH \perp mp\left(P\right) \Rightarrow d\left(G,mp\left(P\right)\right)=GH$



Ta có $GI=FC=\dfrac{2}{3}BC=\dfrac{3a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$;

$\dfrac{1}{GH^2}=\dfrac{1}{GS^2}+\dfrac{1}{GI^2}=\dfrac{4}{27a^2}+\dfrac{7}{27a^2}=\dfrac{11}{27a^2} \Rightarrow GH=\dfrac{3a\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$

$EG \cap mp\left(P\right)=C \Rightarrow \dfrac{d\left(E,mp\left(P\right)\right)}{d\left(G,mp\left(P\right)\right)}=\dfrac{EC}{GC}=\dfrac{3}{2} \Rightarrow d\left(E,mp\left(P\right)\right)=\dfrac{9a\sqrt{3}}{2\sqrt{11}}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, $AD=a\sqrt{5}$. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SA=a, SB=\dfrac{a}{2}, \widehat{ASB}=120^0$. Gọi E là trung điểm của AD. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SBCE theo a.

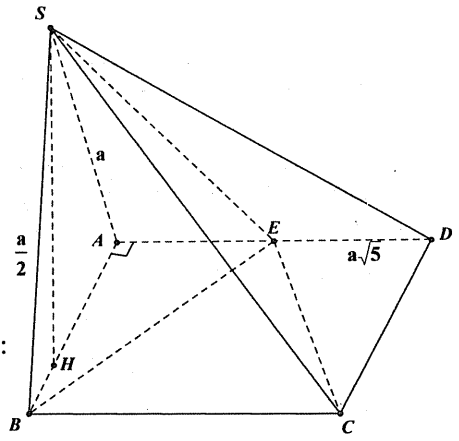
LỜI GIẢI

$AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA.SB.\cos 120^0 = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow AB = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Ta có: $S_{SAB} = \frac{1}{2}SH.AB = \frac{1}{2}SA.SB.\sin 120^0 \Rightarrow SH = \frac{SA.SB.\sin 120^0}{AB} = \frac{a\sqrt{21}}{14}$

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD}$

$= \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{21}}{14}.\frac{a^2\sqrt{35}}{2} = \frac{a^3\sqrt{15}}{12}$



Vì $CB \perp AB, CB \perp SH \Rightarrow CB \perp mp(SAB)$

$\Rightarrow CB \perp SB$ (*)

Tương tự: $AD \perp mp(SAB) \Rightarrow AD \perp SA$

Áp dụng Pitago cho các tam giác vuông: CDE , EAS , SBC

$CE^2 = CD^2 + ED^2 = \frac{7a^2}{4} + \frac{5a^2}{4} = \frac{12a^2}{4}$ (1)

$SE^2 = SA^2 + AE^2 = a^2 + \frac{5a^2}{4} = \frac{9a^2}{4}$ (2)

$SC^2 = SB^2 + CB^2 = \frac{a^2}{4} + 5a^2 = \frac{21a^2}{4}$ (3)

Từ (1) , (2) , (3) suy ra: $SC^2 = SE^2 + CE^2 \Rightarrow CE \perp SE$ (**)

Từ (*) ,(**) suy ra tứ diện S.BCE nội tiếp trong mặt cầu đường kính SC.

Vậy: $R = \frac{SC}{2} = \frac{a\sqrt{21}}{4}$

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA = a và SA tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng 30^0. Chân đường vuông góc hạ từ S xuống mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc đường thẳng BC, điểm M thuộc cạnh SA sao cho SM = 2MA. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC, SA và thể tích tứ diện SMHC theo a.

LỜI GIẢI

Xét ΔSHA (vuông tại H), có: $AH = SA\cos 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mà ΔABC đều cạnh a ⇒ H là trung điểm cạnh BC.

Vậy: AH ⊥ BC.

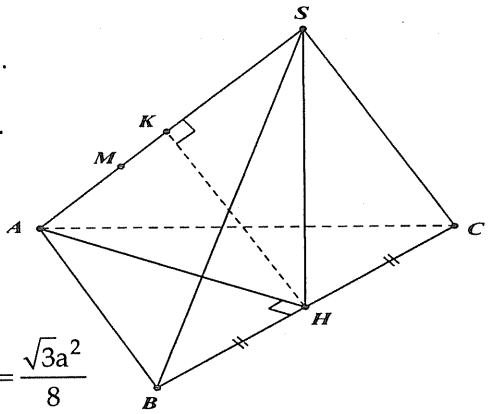
Lại có: SH ⊥ BC ⇒ BC⊥(SAH).

Hạ HK vuông góc với SA

$\Rightarrow$ HK là khoảng cách giữa BC và SA.

Ta có: $HK = AH\sin 30^0 = \dfrac{AH}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy: $d(BC,SA) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.



Dễ thấy: $SH = \dfrac{a}{2} \Rightarrow S_{SHA} = \dfrac{1}{2}.SH.AH$

$= \dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{8}$

$\Rightarrow S_{SMH} = \dfrac{2}{3}S_{SAH} = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{12}$.

Mà $CH \perp (SHA) \Rightarrow V_{SMHC} = \dfrac{1}{3}CH.S_{SMH} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{\sqrt{3}a^2}{12} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{72}$.

Cho hình chóp S.ABCD có $SA = a\sqrt{3}$. Tứ giác ABCD là hình thang cân với đáy lớn là AD, $AB = BC = CD = a$, $\widehat{BAD} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) thuộc đoạn thẳng AD, mặt bên (SAB) tạo với mặt phẳng (ABCD) một góc 45^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.ABCD.

LỜI GIẢI

Kẻ $SH \perp AD$ tại H $\Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp AB$.

Kẻ $HI \perp AB$ tại I. $\Rightarrow AB \perp (SHI) \Rightarrow AB \perp SI$

$\Rightarrow \left[\widehat{(SAB),(ABCD)}\right] = \widehat{SIH} = 45^o \Rightarrow SH = HI$

Vì H thuộc đoạn AD nên I thuộc tia AB

$\Rightarrow \widehat{IAH} = \widehat{BAD} = 60^O$

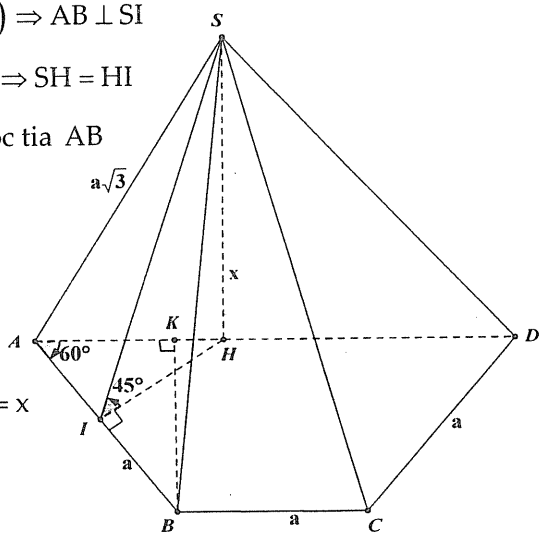
Đặt $SH = x, (0 < x < a\sqrt{3})$

$\Rightarrow AH^2 = SA^2 - SH^2 = 3a^2 - x^2$;

Mặt khác:

$HI = AH.\sin 60^o = \dfrac{\sqrt{3(3a^2 - x^2)}}{2} = x$

$\Leftrightarrow 9a^2 - 3x^2 = 4x^2 \Rightarrow x = \dfrac{3a}{\sqrt{7}}$.



Gọi K là hình chiếu vuông góc của B trên AD $\Rightarrow AK = AB.\cos 60^o = \frac{a}{2}$;

$BK = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AD = BC + 2.AK = 2a$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}BK.(AD + BC) = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2}(a + 2a) = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{3a}{\sqrt{7}}.\frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{21}}{28}$ (đvtt)

Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân tại C, cạnh huyền bằng 3a, G là trọng tâm tam giác ABC, $SG \perp (ABC)$, $SB = \frac{a\sqrt{14}}{2}$. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

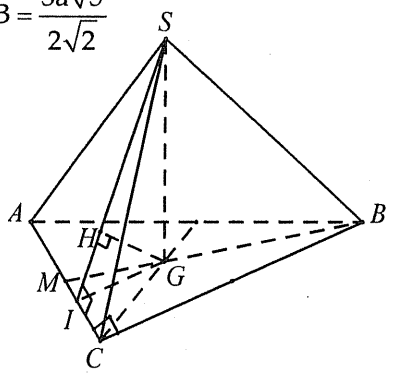
LỜI GIẢI

Vì tam giác ABC vuông cân tại C: $AB = 3a \Rightarrow CA = CB = \frac{3a}{\sqrt{2}}$

Gọi M là trung điểm $AC \Rightarrow MC = \frac{3a}{2\sqrt{2}} \Rightarrow MB = \frac{3a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow BG = \frac{2}{3}BM = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \Rightarrow SG = \sqrt{SB^2 - BG^2} = a$

$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SG.S_{\Delta ABC} = \frac{3a^3}{4}$ (đvtt)



Kẻ $GI \perp AC (I \in AC) \Rightarrow AC \perp (SGI)$.

Ta có $GI = \frac{1}{3}BC = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Kẻ $GH \perp SI (H \in SI) \Rightarrow GH \perp (SAC) \Rightarrow d(G,(SAC)) = GH$

Ta có: $\frac{1}{GH^2} = \frac{1}{GS^2} + \frac{1}{GI^2} \Rightarrow GH = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow d(B,(SAC)) = 3d(G,(SAC)) = 3GH = a\sqrt{3}$ (vì BM = 3GM)

Cho hình chóp S.ABC có AB = AC = a, $BC = \frac{a}{2}$, $SA = a\sqrt{3}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SAC} = 30^0$. Tính thể tích khối chóp S.ABC.

LỜI GIẢI

Theo định lí côsin ta có:

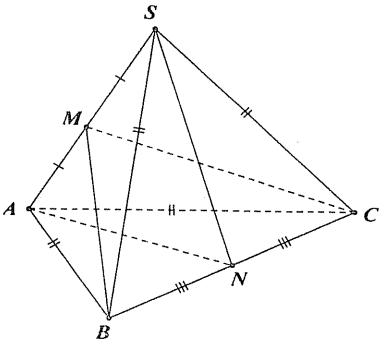
$SB^2 = SA^2 + AB^2 - 2SA.AB.\cos\widehat{SAB} = 3a^2 + a^2 - 2.a\sqrt{3}.a.\cos 30^0 = a^2$

$\Rightarrow SB = a$.

Tương tự ta cũng có: $SC = a$.

Gọi M là trung điểm của SA.

Do hai tam giác SAB và SAC là hai ta, giác cân nên: $MB \perp SA$, $MC \perp SA \Rightarrow SA \perp (MBC)$.



Ta có: $V_{S.ABC} = V_{S.MBC} + V_{A.MBC}$

$= \frac{1}{3}MA.S_{MBC} + \frac{1}{3}SA.S_{MBC} = \frac{1}{3}SA.S_{MBC}$.

Hai tam giác SAB và SAC có ba cặp cạnh tương ứng bằng nhau nên chúng bằng nhau. Do đó MB = MC hay tam giác MBC cân tại M.

Gọi N là trung điểm của BC suy ra $MN \perp BC$.

Tương tự: ta cũng có $MN \perp SA$.

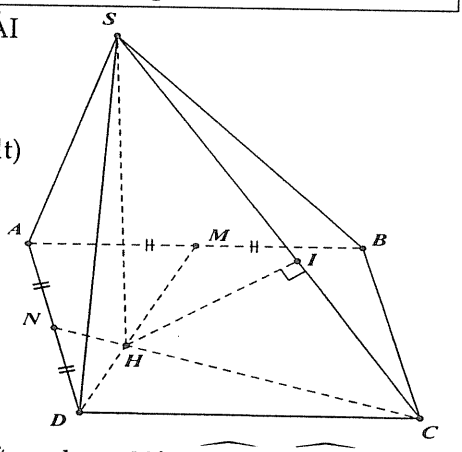
$$MN^2 = AN^2 - AM^2 = AB^2 - BN^2 - AM^2 = a^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{16}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Do đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}MN.BC = \frac{1}{6}a\sqrt{3}.\frac{a\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{2} = \frac{a^3}{16}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SH = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.CDNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

LỜI GIẢI



$S_{NDCM} = S_{ABCD} - S_{\Delta AMN} - S_{\Delta BCM}$

$= a^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{a}{2}a = \frac{5a^2}{8}$ (đvdt)

Tính thể tích khối chóp S.CDNM:

$V_{(S.NDCM)} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}\frac{5a^2}{8} = \frac{5a^3\sqrt{3}}{24}$ (đvtt)

$NC = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Ta có 2 tam giác vuông AMD và NDC bằng nhau . Nên $\widehat{NCD} = \widehat{ADM}$.

Vậy: DM vuông NC. Vậy ta có: $DC^2 = HC.NC \Rightarrow HC = \dfrac{a^2}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$

Ta có tam giác SHC vuông tại H, và khoảng cách của DM và SC chính là chiều cao h vẽ từ H trong tam giác SHC.

Nên: $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{HC^2} + \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{5}{4a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{19}{12a^2} \Rightarrow h = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

Cho hình vuông ABCD cạnh a.Gọi O là giao điểm hai đường chéo. Trên nửa đường thẳng Ox vuông góc với mặt phẳng chứa hình vuông, ta lấy điểm S sao cho góc $\widehat{SCB} = 60^0$.

a) Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng BC và SD

b) Gọi (α) là mặt phẳng chứa BC và vuông góc với mặt phẳng (SAD) .Tính diện tích thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp S.ABCD.

LỜI GIẢI

a) Khoảng cách giữa BC và SD.

Ta có: SO là trục hình vuông ABCD và $\widehat{SCB} = 60^0$.

$\Rightarrow SA = SB = SC = SD = CB = a$

Và BC // mp(SAD) nên $d(BC,SD) = d(I, mp(SAD))$

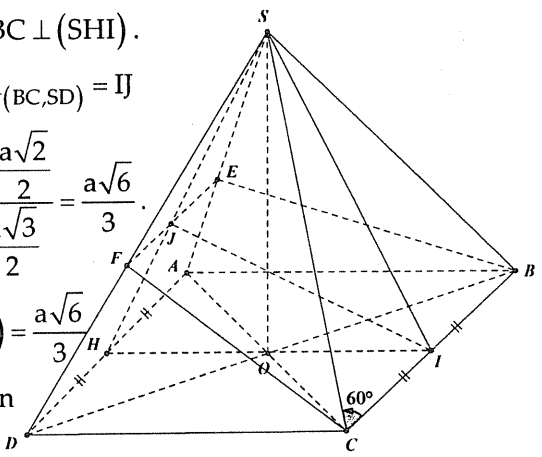
Với I là trung điểm CB.

Gọi H là trung điểm AD. Ta có: $BC \perp (SHI)$.

Vẽ $IJ \perp SH$ ta có $IJ \perp (SAD) \Rightarrow d_{(BC,SD)} = IJ$

Tam giác SIH có: $IJ = \dfrac{SO.HI}{SH} = \dfrac{a.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy: $d(BC,SD) = d(I, mp(SAD)) = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$



b) (α) Cắt hình chóp theo thiết diện là hình thang BCFE.

Do hình chóp đều nên BCFE là hình thang cân:

Ta có: $HJ = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}, SJ = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}, SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do EF//AD nên: $\frac{EF}{AD}=\frac{SJ}{SH}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{3}\Rightarrow EF=\frac{a}{2}$.

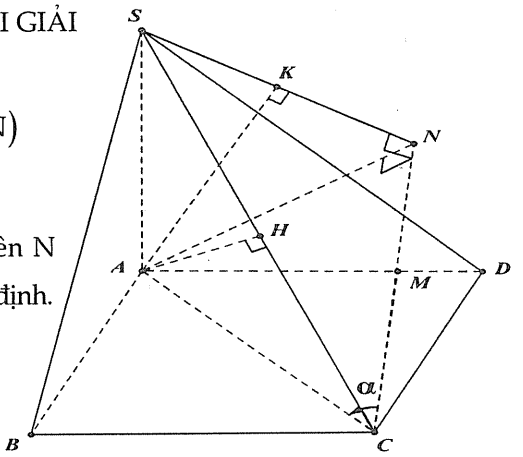
Vậy: $S_{BCFE}=\frac{(EF+BC).IJ}{2}=\frac{\left(\frac{a}{2}+a\right)\frac{a\sqrt{6}}{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD), SA=a\sqrt{2}$. Trên cạnh AD lấy điểm M thay đổi. Đặt góc $\widehat{ACM}=\alpha$. Hạ $SN\perp CM$.

a) Chứng minh N luôn thuộc một đường tròn cố định và tính thể tích tứ diện SACN theo a và α.

b) Hạ $AH\perp SC, AK\perp SN$. Chứng minh rằng $SC\perp(AHK)$ và tính độ dài đoạn HK.

LỜI GIẢI



a) N thuộc đường tròn cố định.

Ta có: $\begin{cases}SN\perp CN\\SA\perp CN\end{cases}\Rightarrow CN\perp mp(SAN)$

$\Rightarrow CN\perp AN$

$N\in mp(ABCD)$ và $\widehat{ANC}=90^0$ nên N thuộc đường tròn đường kính AC cố định.

Ta có: $CN=AC.\cos\alpha=a\sqrt{2}\cos\alpha$

Vậy: $V_{SACN}=\frac{1}{3}SA.S_{ACN}$

$=\frac{1}{3}.SA.\frac{1}{2}AC.CN.\sin\alpha$

$=\frac{1}{6}.a\sqrt{2}.a\sqrt{2}.a\sqrt{2}.\cos\alpha.\sin\alpha=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}\sin 2\alpha$

b) Tính độ dài đoan HK.

Ta có $CN\perp(SAN)\Rightarrow CN\perp AK$ (1)

Và $AK\perp SN$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow AK\perp mp(SCN)\Rightarrow \Delta AKH$ vuông tại K.

Ta có: $AN=AC.\sin\alpha=a\sqrt{2}\sin\alpha$

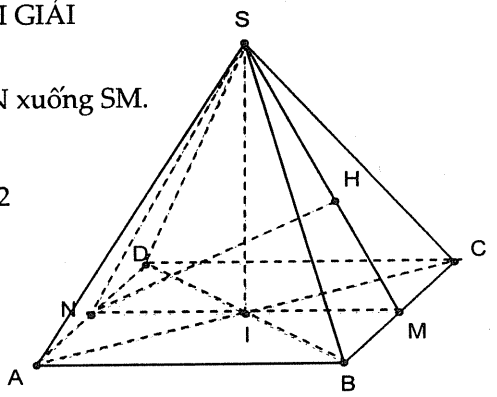
ΔSAN có $\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{2a^2.\sin^2\alpha}\Rightarrow AK=\frac{a\sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$

Tam giác SAC có AH= a.

Vậy: $HK^2=AH^2-AK^2=a^2-\frac{2a^2\sin^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}=\frac{a^2\left(1-\sin^2\alpha\right)}{1+\sin^2\alpha}\Rightarrow HK=\frac{a.\cos\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$.

Hình chóp tứ giác đều SABCD có khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 2. Với giá trị nào của góc α giữa mặt bên và mặt đáy của chóp thì thể tích của hình chóp nhỏ nhất?

LỜI GIẢI



Gọi M, N là trung điểm BC, AD.

Gọi H là hình chiếu vuông góc từ N xuống SM.

Ta có: $\widehat{SMN}=\alpha$

$d\left(A;(SBC)\right)=d\left(N;(SBC)\right)=NH=2$

$\Rightarrow MN=\frac{NH}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}$

$\Rightarrow S_{ABCD}=MN^2=\frac{4}{\sin^2\alpha}$

$SI=MI.\tan\alpha=\frac{\tan\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}\Rightarrow V_{SABCD}=\frac{1}{3}.\frac{4}{\sin^2\alpha}.\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{4}{3.\sin^2\alpha.\cos\alpha}$

$\sin^2\alpha.\sin^2\alpha.2\cos^2\alpha\le\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}{3}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow\sin^2\alpha.\cos\alpha\le\frac{1}{\sqrt{3}}$

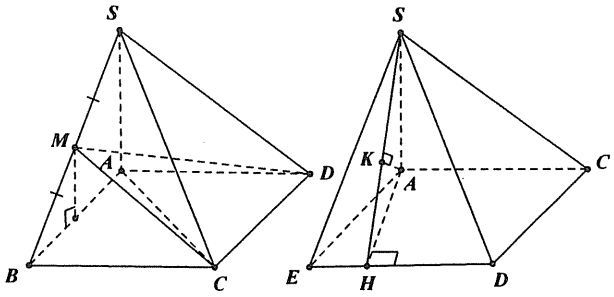
V_{SABCD} min $\Leftrightarrow\sin^2\alpha.\cos\alpha$ max $\Leftrightarrow\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha\Leftrightarrow\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. SA vuông góc mặt đáy và SA = 2a.

a) Gọi M là trung điểm SB, V_1 là thể tích tứ diện S.AMC, V_2 là thể tích tứ diện M.ACD. Tính tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD.

LỜI GIẢI



Ta có: $\frac{V_{S.AMC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA}.\frac{SM}{SB}.\frac{SC}{SC} = \frac{1}{2}$; $V_{M.ACD} = V_{M.ABC} = \frac{1}{2}V_{S.ABC}$.

Vậy: $\frac{V_1}{V_2} = 1$

Gọi E là điểm đối xứng của B qua A.

Ta có: AEDC là hình bình hành và góc EAC bằng 135^0, CD = a và $AC = a\sqrt{2}$

AC // ED nên AC // (SDE) $\supset$ SD nên d(AC,SD) = d(AC, (SDE)) = d(A, (SDE))

Kẻ AH $\perp$ ED (H$\in$ ED) $\Rightarrow$ ED$\perp$(SAH) $\Rightarrow$ (SED)$\perp$(SAH)

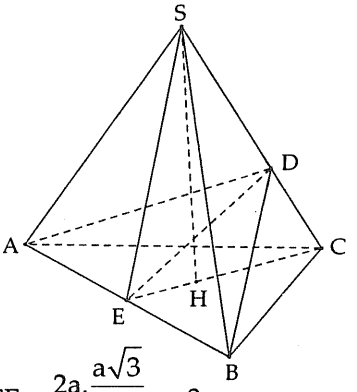
Kẻ AK$\perp$ SH $\Rightarrow$ AK $\perp$ (SDE) vậy AK = d(AC,SD)

Trong tam giác SAH có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{4a^2}$.

Vậy: AK = d(AC,SD) = $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng 2a. Mặt phẳng (P) đi qua AB và vuông góc với SC, (P) cắt SC tại D. Tính thể tích khối chóp S.ABD.

LỜI GIẢI



Gọi H là tâm tam giác ABC ta có SH $\perp$ (ABC).

Gọi E là trung điểm AB thì H nằm trên CE.

Trong Δ đều ABC có $CE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $CH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong ΔSHC vuông tại H có:

$SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{13}{3}}$

Trong ΔSEC có SH.CE = SC.ED $\Rightarrow$ $ED = \frac{SH.CE}{SC} = \frac{2a.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{\frac{13}{3}}} = \frac{3a}{\sqrt{13}}$

$S_{ABD} = \frac{1}{2}AB.DE = \frac{1}{2}.a.\frac{3a}{\sqrt{13}} = \frac{3a^2}{2\sqrt{13}}$.

Trong ΔECD vuông tại D có $CD = \sqrt{CE^2 - ED^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{9a^2}{13}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{13}}$

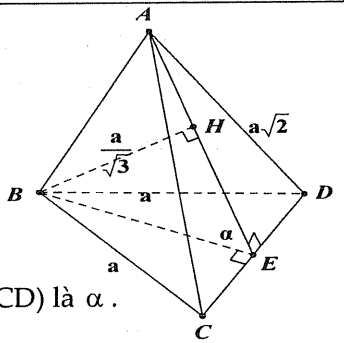
Ngoài ra: $SD = SC - CD = a\sqrt{\frac{13}{3}} - \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{13}} = \frac{23a}{2.\sqrt{3}.\sqrt{13}}$

Thể tích khối chóp S.ABD là $V = \frac{1}{3}S_{ABD}.SD = \frac{1}{3}.\frac{3a^2}{2\sqrt{13}}.\frac{23a}{2.\sqrt{3}.\sqrt{13}} = \frac{23a^3}{52\sqrt{3}}$.

Cho tứ diện ABCD có $AC = AD = a\sqrt{2}$, $BC = BD = a$, khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACD) bằng $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD).

Biết thể tích của khối tứ diện ABCD bằng $\frac{a^3\sqrt{15}}{27}$.

LỜI GIẢI



Gọi E là trung điểm của CD, kẻ $BH \perp AE$.

Ta có: ΔACD cân tại A nên $CD \perp AE$.

Tương tự: ΔBCD cân tại B nên $CD \perp BE$

$\Rightarrow CD \perp (ABE) \Rightarrow CD \perp BH$

Mà $BH \perp AE \Rightarrow BH \perp (ACD)$.

Do đó $BH = \frac{a}{\sqrt{3}}$ và góc giữa hai mp (ACD) và (BCD) là α.

Thể tích của khối tứ diện ABCD là:

$V = \frac{1}{3}BH.S_{\Delta ACD} = \frac{a^3\sqrt{5}}{27} \Rightarrow S_{\Delta ACD} = \frac{a^2\sqrt{5}}{3}$

$\Rightarrow AE.DE = \frac{a^2\sqrt{5}}{3} \Rightarrow AE^2.DE^2 = \frac{5a^4}{9}$. Mà $AE^2 + ED^2 = 2a^2$.

Khi đó AE^2, DE^2 là nghiệm của phương trình: $x^2 - 2a^2x + \frac{5a^4}{9} = 0$.

Giải nghiệm được: $\begin{cases} AE^2 = \frac{a^2}{3} \\ DE^2 = \frac{5a^2}{3} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} AE^2 = \frac{5a^2}{3} \\ DE^2 = \frac{a^2}{3} \end{cases}$.

Trường hợp $DE^2 = \frac{5a^2}{3}$ loại vì (DE > (BC+BD).

Xét ΔBDE vuông tại E có $BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Xét ΔBHE vuông tại H có $\sin\alpha = \frac{BH}{BE} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^0$.

Kết luận góc giữa hai mp(ACD) và (BCD) là $\alpha = 45^0$.

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác cân tại A, $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 120^0$. Biết $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^0$, góc giữa 2 mp (SBC) và (ABC) bằng 45^0. Tính thể tích khối chóp S.ABC, tính góc giữa (SAB) và (ABC).

LỜI GIẢI

a) Gọi F là hình chiếu vuông góc của S trên mp (ABC).

Ta có: $\Delta SBA = \Delta SCA$ (cạnh huyền cạnh góc vuông).

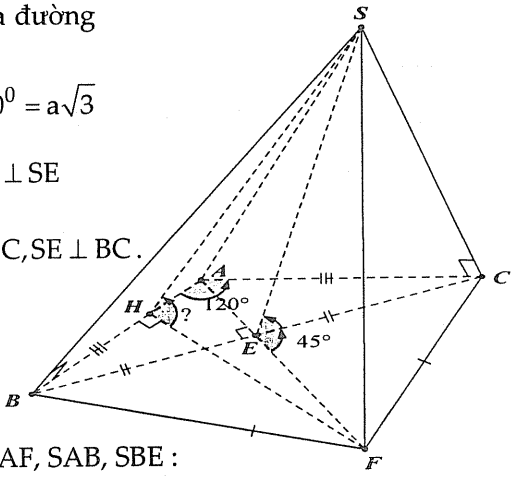
Vậy SB = SC. Vì SB = SC nên F nằm trên đường trung trực của đoạn BC.

Gọi E trung điểm của BC, theo đề bài $AE \perp BC$.

Vậy F thuộc đường thẳng AE và nằm ngoài đoạn AE về phía E.

Vì $SA > SB \Rightarrow FA > FB$ (đường xiên dài hơn thì hình chiếu dài hơn).

Tam giác ABC cân tại A, nên AF là đường cao đồng thời là đường phân giác.



$AE = AB.\cos 60^0 = a, BE = AB.\sin 60^0 = a\sqrt{3}$

$\begin{cases} BC \perp AF \\ BC \perp SF \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(SAF) \Rightarrow BC \perp SE$

Ta có: $(SBC) \cap (ABC) = BC, AF \perp BC, SE \perp BC$.

Vậy: $[(SBC),(ABC)] = \widehat{SEF} = 45^0$.

ΔSEF vuông cân tại F.

Đặt $EF = SF = h \Rightarrow SE = h\sqrt{2}$

Áp dụng pitago cho các Δ vuông SAF, SAB, SBE :

$$\begin{cases} SA^2 = AF^2 + SF^2 \\ SA^2 = AB^2 + SB^2 \Rightarrow AF^2 + SF^2 = AB^2 + BE^2 + SE^2 \\ SB^2 = BE^2 + SE^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (AE + EF)^2 + SF^2 = AB^2 + BE^2 + SE^2$$

$$\Leftrightarrow (a + h)^2 + h^2 = (2a)^2 + (a\sqrt{3})^2 + (h\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow h = 3a$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AE.BC = a^2\sqrt{3}.$$

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SF.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}3a.a^2\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$

b). Hạ $FH \perp AB \Rightarrow AB \perp mp(SHF) \Rightarrow AB \perp SH \Rightarrow \left[\widehat{(SAB),(ABC)}\right] = \widehat{SHF}$

Trong tam giác AHF vuông tại H: $HF = AF.\sin 60^0 = 2a\sqrt{3}$

Trong tam giác SHF vuông tại F: $\tan\widehat{SHF} = \frac{SF}{HF} = \frac{3a}{2a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Cho hình chóp SABC có góc $\left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = 60^o$, ABC và SBC là các tam giác đều cạnh a. Tính theo a khoảng cách từ đỉnh B đến mp(SAC).

LỜI GIẢI

Gọi M là trung điểm của BC thì $SM \perp BC$, $AM \perp BC$

$\Rightarrow \widehat{SMA} = (SBC,\ ABC) = 60^o \Rightarrow \Delta SMA$ đều có cạnh bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $S_{SMA} = \frac{1}{2}.SM.AM.\sin 60^o = \frac{1}{2}.\frac{3a^2}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$.

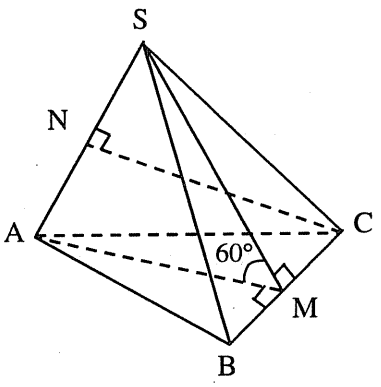
Ta có: $V_{SABC} = 2V_{SBAM} = 2.\frac{1}{3}.BM.S_{SAM} = \frac{1}{3}.a.\frac{3a^2\sqrt{3}}{16} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$

Gọi N là trung điểm của đoạn SA.

Ta có $CN \perp SA$

$\Rightarrow CN = \frac{a\sqrt{13}}{4}$ (vì ΔSCN vuông tại N)

$\Rightarrow S_{SCA} = \frac{1}{2}.AS.CN = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{13}}{4} = \frac{a^2\sqrt{39}}{16}$



Ta có: $V_{SABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16} = \frac{1}{3}.S_{SCA}.d(B,\ SAC)$

$= \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{39}}{16}.d(B,\ SAC)$

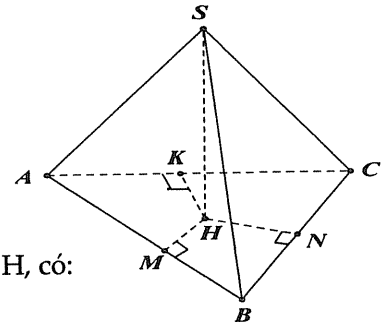
$\Rightarrow d(B,SAC) = a^3\sqrt{3}\frac{3}{a^2\sqrt{39}} = \frac{3a}{\sqrt{13}}$

Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A , AB = 3, AC = 4. Góc tạo bởi các mặt bên và đáy bằng 60^o. Tính thể tích của khối chóp S.ABC.

LỜI GIẢI

Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC);

M , N , K lần lượt là hình chiếu của H lên cạnh AB, BC, AC. Khi đó thể tích V của khối chóp được tính bởi công thức:



$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH$ mà $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = 6$

Tính SH:

Xét các tam giác SHM, SHN, SHK vuông tại H, có:

Các góc SMH , SNH , SKH bằng 60^0.

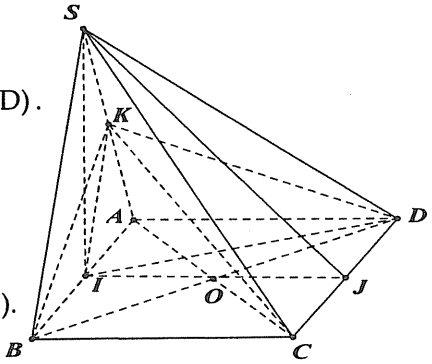
Do đó HM = HN = HK $\Rightarrow$ H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

$\Rightarrow HM = \frac{2S_{ABC}}{AB + BC + CA} = 1 \Rightarrow SH = HM.\tan 60^0 = \sqrt{3}$.

Vậy: $V = \frac{1}{3}\sqrt{3}.6 = 2\sqrt{3}$ (đvtt)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a , tam giác SAB đều, tam giác SCD vuông cân tại S. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, SA. Chứng minh rằng (SIJ) $\perp$ (ABCD) . Tính thể tích khối chóp K.IBCD.

LỜI GIẢI



Có: $\begin{cases} AB \perp SI \\ AB \perp IJ \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SIJ) \Rightarrow (SIJ) \perp (ABCD)$.

$SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, IJ = a , $SJ = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$.

Có $SI^2 + SJ^2 = IJ^2 \Rightarrow \Delta SIJ$ vuông tại S.

Trong mp (SIJ) kẻ SH $\perp$ IJ $\Rightarrow$ SH $\perp$ (ABCD).

Trong tam giác vuông SIJ có:

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{SJ^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Gọi h là khoảng cách từ K đến mặt phẳng (ABCD). Có $h = \frac{1}{2}SH = \frac{a\sqrt{3}}{8}$.

$$S_{IBCD} = \frac{1}{2}(IB + CD).BC = \frac{1}{2}(\frac{a}{2} + a).a = \frac{3a^2}{4}$$

$$V_{K.IBCD} = \frac{1}{3}h.S_{IBCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{8}.\frac{3a^2}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{32} \text{ (đvtt).}$$

Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy là hình chữ nhật với SA vuông góc với đáy, G là trọng tâm tam giác SAC, mặt phẳng (ABG) cắt SC tại M, cắt SD tại N. Tính thể tích của khối đa diện MNABCD biết SA = AB = a và góc hợp bởi đường thẳng AN và mp(ABCD) bằng 30^0.

LỜI GIẢI

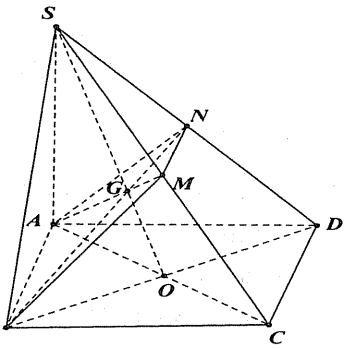
Trong mp(SAC) kẻ AG cắt SC tại M.

Trong mp(SBD) kẻ BG cắt SD tại N.

Vì G là trọng tâm tam giác SAC nên dễ có: $\frac{SG}{SO}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ G cũng là trọng tâm ΔSBD.

Từ đó suy ra: M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD.



Dễ có: $V_{S.ABD}=V_{S.BCD}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}=\frac{1}{2}V$.

Theo công thức tỷ số thể tích ta có:

$$\frac{V_{S.ABN}}{V_{S.ABD}}=\frac{SA}{SA}.\frac{SB}{SB}.\frac{SN}{SD}=1.1.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow V_{S.ABN}=\frac{1}{4}V$$

$$\frac{V_{S.BMN}}{V_{S.BCD}}=\frac{SB}{SB}.\frac{SM}{SC}.\frac{SN}{SD}=1.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\Rightarrow V_{S.BMN}=\frac{1}{8}V$$

Từ đó suy ra: $V_{S.ABMN}=V_{S.ABN}+V_{S.BMN}=\frac{3}{8}V$.

Ta có: $V=\frac{1}{3}SA.dt(ABCD)$; Mà theo giả thiết $SA\perp(ABCD)$

Nên góc hợp bởi AN với mp(ABCD) chính là góc $\widehat{NAD}$.

Lại có: N là trung điểm của SD nên tam giác NAD cân tại N.

Suy ra $\widehat{NAD}=\widehat{NDA}=30^0$. Suy ra: $AD=\frac{SA}{\tan 30^0}=a\sqrt{3}$.

Suy ra: $V=\frac{1}{3}SA.dt(ABCD)=\frac{1}{3}a.a.a\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$.

Vậy: thể tích cần tìm là:

$$V_{MNABCD}=V_{S.ABCD}-V_{S.ABMN}=V-\frac{3}{8}V=\frac{5}{8}V=\frac{5\sqrt{3}a^3}{24}.$$

Cho hình chóp S.ABCD. Đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B với AB = BC = a, AD=2a. Các mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt đáy (ABCD). Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp và khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SB.

LỜI GIẢI

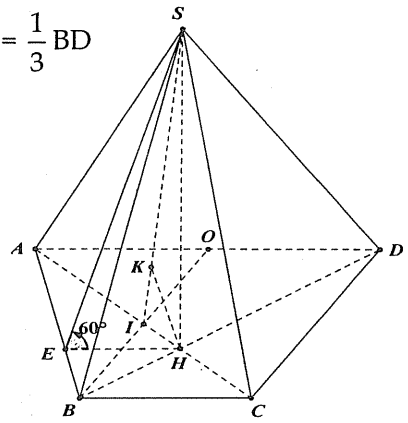
Gọi $H = AC \cap BD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ và $BH = \frac{1}{3}BD$

Kẻ $HE \perp AB \Rightarrow HE \perp mp(SHE)$.

Vậy: $\left[\widehat{(SAB),(ABCD)}\right] = \widehat{SEH} = 60^0$

Mà: $HE = \frac{1}{3}AD = \frac{2a}{3} \Rightarrow SH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow V_{SABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$



Gọi O là trung điểm AD.

Ta có: BCDO là hình bình hành: $BC \,//\, CD, BC \subset mp(SBO)$

$\Rightarrow d(SB,CD) = d(CD,(SBO)) = d(C,(SBO))$.

Gọi $I = BO \cap AC$.

Xét tam giác BCO có: H là trọng tâm của tam giác.

Tính chất trọng tâm tam giác có: $IH = \frac{1}{3}IC = \frac{a\sqrt{2}}{6} \Rightarrow IS = \sqrt{IH^2 + HS^2} = \frac{5a\sqrt{2}}{6}$

Kẻ $CK \perp SI$ mà $CK \perp BO \Rightarrow CK \perp mp(SBO) \Rightarrow d(C,(SBO)) = CK$.

Trong tam giác SIC có: $S_{\Delta SIC} = \frac{1}{2}SH.IC = \frac{1}{2}SI.CK \Rightarrow CK = \frac{SH.IC}{SI} = \frac{2a\sqrt{3}}{5}$

Vậy: $d(CD,SB) = \frac{2a\sqrt{3}}{5}$

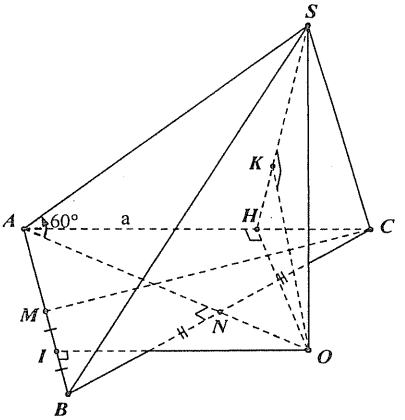
Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, AB = AC = a và M là trung điểm của cạnh AB. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMC và góc giữa SA với mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích khối chóp S.BMC và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC).

LỜI GIẢI

Gọi N là trung điểm của BC.

I trung điểm của MB. Hai đường trung trực của tam giác BCM cắt nhau tại O.

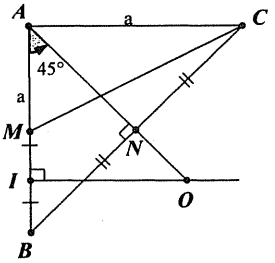
Theo đề bài O là hình chiếu vuông góc của S trên mp (ABC). AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mp (ABC). $\left[SA,(ABC)\right] = \widehat{SAO} = 60^0$.



Ta có AIO là tam giác vuông cân tại I,

và: $AI = \frac{3}{4}AB = \frac{3a}{4} \Rightarrow AO = AI\sqrt{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$

Trong tam giác vuông SAO: $SO = AO.\tan 60^0 = \frac{3a\sqrt{6}}{4}$



$S_{\Delta BCM} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ACM} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}.$

$V_{S.BCM} = \frac{1}{3}.SO.S_{BCM} = \frac{1}{3}.\frac{3a\sqrt{6}}{4}.\frac{a^2}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{16}$

Hạ $OH \perp AC \Rightarrow AC \perp mp(SHO)$.

Kẻ $OK \perp SH \Rightarrow OK \perp mp(SAC)$.

Vậy: $d(O,(SAC)) = OK$

$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{16}{9a^2} + \frac{16}{54a^2} = \frac{7.16}{54a^2} \Rightarrow OK = \frac{3a\sqrt{6}}{4\sqrt{7}}.$

Do $OI // AC, AC \subset mp(SAC) \Rightarrow d(O,(SAC)) = d(I,(SAC)) = \frac{3a\sqrt{6}}{4\sqrt{7}}.$

$BI \cap mp(SAC) = A \Rightarrow \frac{d(B,(SAC))}{d(I,(SAC))} = \frac{BA}{IA} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow d(B,(SAC)) = \frac{4}{3}.\frac{3a\sqrt{6}}{4\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}.$

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, với AB = 3, BC = 6. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABCD) nằm trên tia đối của tia AB; Các mặt phẳng (SBC) và (SCD) cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau. Hơn nữa, khoảng cách giữa các đường thẳng BD và SA bằng $\sqrt{6}$. Tính thể tích khối chóp và côsin góc giữa hai đường thẳng SA và BD.

LỜI GIẢI

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD).

Theo đề bài: $SH \perp AB$ tại H. Hạ $HK \perp CD$.

Ta có: $BC \perp mp(SAB), CK \perp mp(SHK)$.

Theo đề bài:

$\left[\widehat{(SBC),(ABCD)}\right] = \left[\widehat{(SCD),(ABCD)}\right]$

$\Leftrightarrow \widehat{SBH} = \widehat{SKH} = \alpha$

Theo cách dựng HK thì:

$HK \,//\, BC, HK = BC = 6$.

$\Delta SHK = \Delta SHB$ (cạnh huyền–cạnh góc vuông)

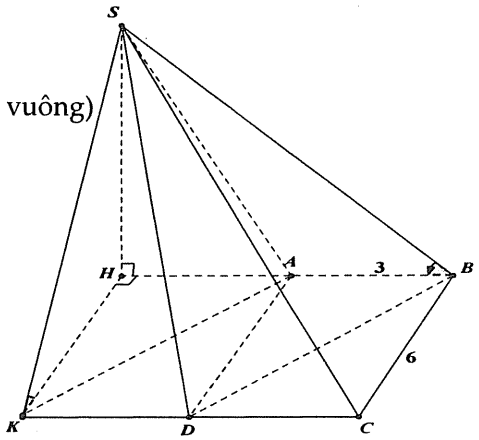
$\Rightarrow HB = HK$.

Vậy HBCK là hình vuông

$\Rightarrow$ A là trung điểm của HB.

Ta có: BD // AK

$$\Rightarrow d(BD,SA) = d(BD,(SAK)) = d(B,(SAK)) = d(H,(SAK)) = \sqrt{6}$$



Trong tứ diện H.SAK có HS, HK, HA vuông góc với nhau từng đôi một:

$$\frac{1}{d^2(H,(SAK))} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HA^2} + \frac{1}{HK^2} \Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} \Rightarrow HS = 6$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.6.3.6 = 36 \text{ (đvtt)}$$

Trong 2 tam giác vuông SHK, SHA:

$SK = \sqrt{HS^2 + HK^2} = 6\sqrt{2}$, $SA = \sqrt{HS^2 + HA^2} = 3\sqrt{5}$

Ta có: $BD \,//\, AK \Rightarrow \left[\widehat{BD,SA}\right] = \left[\widehat{AK,SA}\right] = \widehat{SAK}$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác SAK:

$$\cos\widehat{SAK} = \frac{AS^2 + AK^2 - SK^2}{2.AS.AK} = \frac{45 + 45 - 72}{2.3\sqrt{5}.3\sqrt{5}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \widehat{SAK} = \arccos\frac{1}{5}.$$

Cho hình chóp S.ABC có $AB = AC = 4, BC = 2, SA = 4\sqrt{3}, \widehat{SAB} = \widehat{SAC} = 30^0$.
Tính thể tích khối chóp S.ABC.

LỜI GIẢI

Áp dụng định lý cosin cho 2 tam giác SAB, SAC:

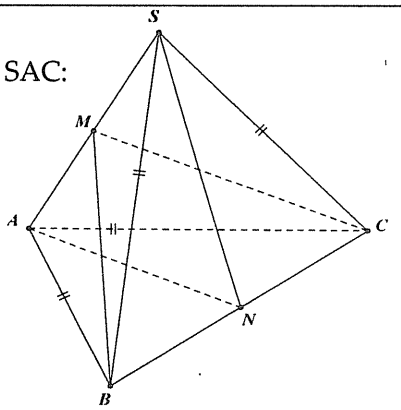
$$SB^2 = AB^2 + AS^2 - 2AB.SA.\cos 30^0$$

$$= 16 + 48 - 2.4.4\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 16 \Rightarrow SB = 4$$

$$SC^2 = AC^2 + AS^2 - 2AC.SA.\cos 30^0$$

$$= 16 + 48 - 2.4.4\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 16 \Rightarrow SC = 4$$

Vậy $AB = AC = SB = SC = 4$.



Gọi M, N là trung điểm của SA, BC.

Vì tam giác SAB cân tại B, SAC cân tại C nên: $\begin{cases} BM \perp SA \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp mp(BCM)$

Ta có: $\Delta BAM = \Delta CAM (c.g.c) \Rightarrow BM = CM$.

Vậy: ΔBCM cân tại M,nên $MN \perp BC$.

Trong tam giác ABM vuông tại M: $BM = AB.\sin 30^0 = 2$.

Vậy ΔBCM đều (vì $BM = CM = BC = 2$)

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta BCM} = \frac{1}{3}SA.\frac{BM^2.\sqrt{3}}{4} = 4 \text{ (đvtt)}$$

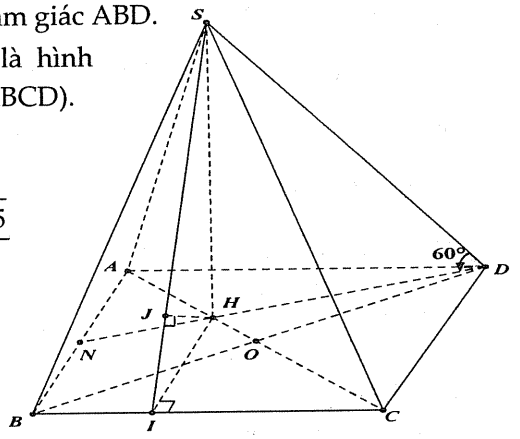
Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABCD) trùng với trọng tâm tam giác ABD. Cạnh SD tạo với đáy (ABCD) một góc bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ A tới mặt phẳng (SBC) theo a.

LỜI GIẢI

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mp (ABCD).

Theo đề bài thì H là trực tâm của tam giác ABD.

Gọi N trung điểm của AB. HD là hình chiếu vuông góc của SD trên mp(ABCD).



$\left[\widehat{SD,(ABCD)}\right] = \widehat{SDH} = 60^0$;

$$HD = \frac{2}{3}ND = \frac{2}{3}\sqrt{AD^2 + AN^2} = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

$$SH = HD.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{15}}{3}.$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{15}}{3}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{15}}{9} \text{ (đvtt)}$$

Tính khoảng cách từ A đến mp(SBC) phải thông qua khoảng cách từ H đến mp (SBC) (H là hình chiếu của đỉnh trên mp (ABCD)).

$HI \perp BC \Rightarrow BC \perp mp(SHI)$; $HJ \perp SI \Rightarrow HJ \perp mp(SBC) \Rightarrow d_{(H,(SBC))} = HJ$

$$\frac{1}{HJ^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HI^2} = \frac{9}{15a^2} + \frac{9}{4a^2} = \frac{57}{20a^2} \Rightarrow HJ = \frac{a\sqrt{20}}{\sqrt{57}}$$

Có $AH \cap mp(SBC) = C \Rightarrow \dfrac{d(A,(SBC))}{d(H,(SBC))} = \dfrac{AC}{HC} = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow d(A,(SBC)) = \dfrac{3a\sqrt{5}}{\sqrt{57}}$ (đvdt)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, tam giác SBC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy ABCD, đường thẳng SD hợp với mặt phẳng (SBC) một góc 60^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD). Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SG và CD.

LỜI GIẢI

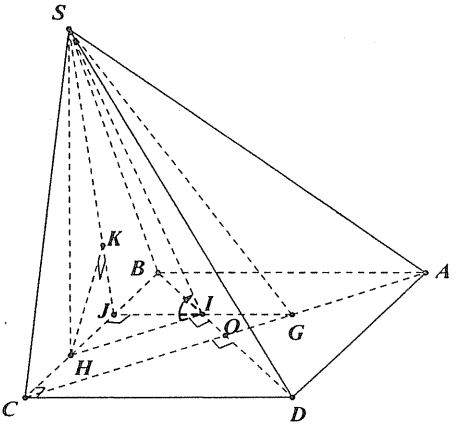
Vì hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) vuông góc với nhau theo giao tuyến BC.

Dựng $SH \perp BC$ tại H thì $SH \perp (ABCD)$.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp BC \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SBC)$.

Vậy: góc giữa SD và (SBC) là góc $\widehat{DSC} = 60^0$

Trong ΔSCD có $SC = \dfrac{CD}{\tan \widehat{DSC}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.



Trong ΔSBC vuông tại S có:

$SB = \sqrt{BC^2 - SC^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$;

$SH.BC = SB.SC \Leftrightarrow SH.a = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}.\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$;

$CH = \sqrt{SC^2 - SH^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{3} - \dfrac{2a^2}{9}} = \dfrac{a}{3} \Rightarrow BH = \dfrac{2a}{3}$.

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{2}}{3}.a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Dựng $HI \perp BD (I \in BD) \Rightarrow SI \perp BD$ (định lý ba đường vuông góc).

Suy ra góc giữa (SBD) và (ABCD) là góc $\widehat{SIH}$.

Vì $HI \perp BD \Rightarrow HI // CO$ nên có: $\dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BI}{BO} = \dfrac{HI}{CO} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow HI = \dfrac{2}{3}CO = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Trong ΔSHI vuông cân (vì HI = SH) tại H $\Rightarrow \widehat{SIH} = 45^0$.

Dựng GJ // $CD(J \in BC) \Rightarrow CD // (SGJ)$.

Từ đó suy ra: $d(SG,CD) = d(CD,(SGJ)) = d(C,(SGJ))$

Vì $CD \perp (SBC) \Rightarrow GJ \perp (SBC) \Rightarrow (SGJ) \perp (SBC)$: Hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SJ.

Dựng $HK \perp SJ \Rightarrow HK \perp (SGJ) \Rightarrow d(H,(SGJ)) = HK$.

Trong ΔCAB có: $\frac{CJ}{JB} = \frac{CG}{GA} = 2 \Rightarrow CJ = 2IB \Rightarrow$ J trung điểm của HB.

Ta có: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HJ^2} = \frac{9}{2a^2} + \frac{9}{a^2} = \frac{27}{2a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{6}}{9}$.

Vì H trung điểm của CJ nên $d(C,(SGJ)) = 2d(H,(SGJ)) = \frac{2a\sqrt{6}}{9}$.

Kết luận: $d(SG,CD) = \frac{2a\sqrt{6}}{9}$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP PHẦN HÌNH LĂNG TRỤ

Cho hình lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B biết AB = BC = a, $\widehat{BA'C} = 30^0$. Tính theo a thể tích khối tứ diện ABA'C' và khoảng cách từ C đến mp (A'BC').

LỜI GIẢI

Có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(ABB'A') \Rightarrow BC \perp BA'$

Có: $BA' = \frac{BC}{\tan \widehat{BA'C}} = a\sqrt{3}$; $AA' = \sqrt{BA'^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$

Thể tích khối tứ diện ABA'C':

$V_{ABA'C'} = \frac{1}{3}C'B'.S_{\Delta ABA'} = \frac{1}{3}a.\frac{1}{2}a.a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

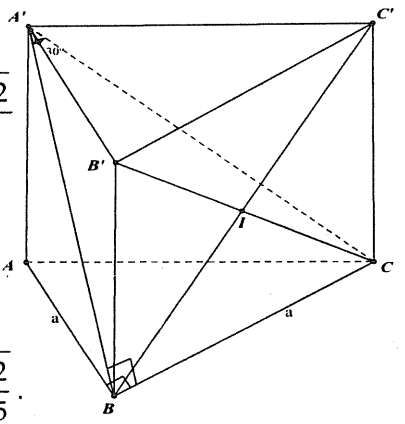
Ta có $CB' \cap (BA'C') = I$.

Mà I trung điểm của CB', nên:

$d(C,(BA'C')) = d(B',(BA'C')) = h$.

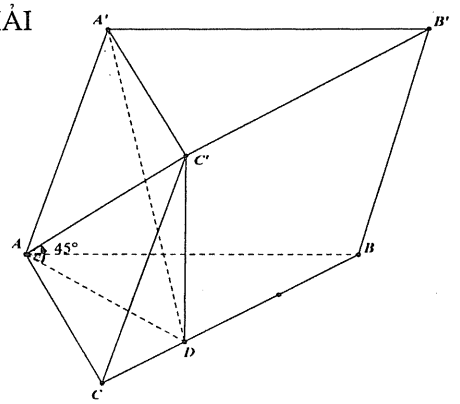
Vì B'A', B'C', B'B $\perp$ với nhau từng đôi một

$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{B'A'^2} + \frac{1}{B'C'^2} + \frac{1}{B'B^2} = \frac{5}{2a^2} \Rightarrow h = a.\sqrt{\frac{2}{5}}$.



Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh 3a. Hình chiếu vuông góc của C' trên mp (ABC) là điểm D thỏa $\overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DB}$. Góc giữa đường thẳng AC' là mp (A'B'C') bằng 45^0. Tính theo a thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và tính cosin góc giữa hai đường thẳng BB' và AD.

LỜI GIẢI



$C'D \perp mp(ABC) \Rightarrow$ AD là hình chiếu vuông góc của C'A trên mp (ABC).

Vì $mp(A'B'C') // mp(ABC)$.

Nên: $[AC',(A'B'C')] = [AC',(ABC)]$

$= \widehat{C'AD} = 45^0$

Áp dụng định lý cosin cho ΔACD có:

$AD = a\sqrt{7}$; $C'D = AD.\tan 45^0 = a\sqrt{7}$.

$$V_{ABC.A'B'C'} = C'D.S_{ABC} = a\sqrt{7}.\frac{(3a)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9a^3\sqrt{21}}{4}$$

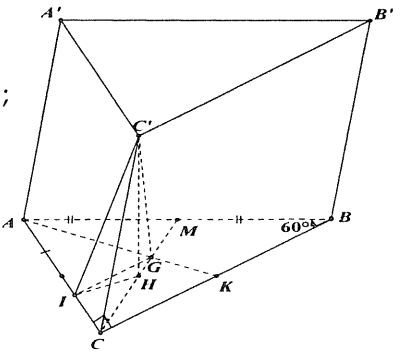
Vì BB' // AA' $\Rightarrow \left[\widehat{BB',AD}\right] = \left[\widehat{AA',AD}\right] = \widehat{DAA'}$

$CC' = \sqrt{CD^2 + DC'^2} = a\sqrt{11}$; $DA' = \sqrt{A'C^2 + DC'^2} = 4a$

$$\cos\widehat{DAA'} = \frac{AD^2 + AA'^2 - DA'^2}{2.AD.AA'} = \frac{7a^2 + 11a^2 - 16a^2}{2.a\sqrt{7}.a\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{77}}$$

Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có M là trung điểm cạnh AB, G là trọng tâm tam giác ABC, BC = 2a, góc $\widehat{ACB} = 90^0, \widehat{ABC} = 60^0$. Góc giữa cạnh bên CC' và mặt đáy (ABC) là 45^0, hình chiếu vuông góc của C' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của CM. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và cosin của góc giữa hai đường thẳng BC và C'G.

LỜI GIẢI



Tính thể tích khối lăng trụ:

Trong tam giác ABC có: $AC = 2a\sqrt{3}, AB = 4a$;

$CM = \frac{1}{2}AB = 2a, CH = \frac{1}{2}CM = a$

CH là hình chiếu vuông góc của CC' trên mp (ABC).

$[CC',(ABC)] = \widehat{HCC'} = 45^0$

Trong Δ vuông CHC' có: $HC' = HC.\tan 45^0 = a$.

$V_{ABC.A'B'C'} = HC'.S_{ABC} = a.\frac{1}{2}2a\sqrt{3}.2a = 2a^3\sqrt{3}$

Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng BC và C'G:

Kẻ GI // BC $\Rightarrow (BC, GC') = (GI, GC') = \widehat{IGC'}$, và:

$\frac{AG}{AK} = \frac{AI}{AC} = \frac{IG}{CK} = \frac{2}{3} \Rightarrow IG = \frac{2a}{3}, IC = \frac{1}{3}AC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Ta có: $MA = MB = MC \Rightarrow \widehat{MCA} = \widehat{MAC} = 30^0$

$HI^2 = CH^2 + CI^2 - 2CH.CI.\cos 30^0 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow HI = \frac{a}{\sqrt{3}}$. $HG = \frac{1}{3}CM = \frac{2a}{3}$.

$IC' = \sqrt{HI^2 + HC'^2} = \frac{2a}{\sqrt{3}}, GC' = \sqrt{HC'^2 + HG^2} = \frac{a\sqrt{13}}{3}$

$\cos\widehat{IGC'} = \frac{GI^2 + GC'^2 - IC'^2}{2GI.GC'} = \frac{5}{4\sqrt{13}}$.

Cho lăng trụ xiên ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông tại C, AB = 2a, cạnh bên $AA' = a\sqrt{3}$. Đỉnh B' có hình chiếu vuông góc trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC. Góc giữa cạnh bên và đáy bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và góc giữa hai mặt phẳng (BCC'B') và (ABB'A').

LỜI GIẢI

Gọi H là trung điểm BC có $B'H \perp (ABC)$ (gt).

BH là hình chiếu vuông góc của BB' trên mp(ABC), nên:

$\left[\widehat{BB', (ABC)}\right] = \widehat{B'BH} = 60^0 \Rightarrow HB' = BB'.\sin 60^0 = \frac{3a}{2}$,

$BH = BB'.\cos 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$; $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = a$

Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C':

$V = HB'.S_{ABC} = \frac{3a}{2}.\frac{1}{2}.a\sqrt{3}.a = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$

Góc giữa hai mặt phẳng (BCC'B') và (ABB'A')

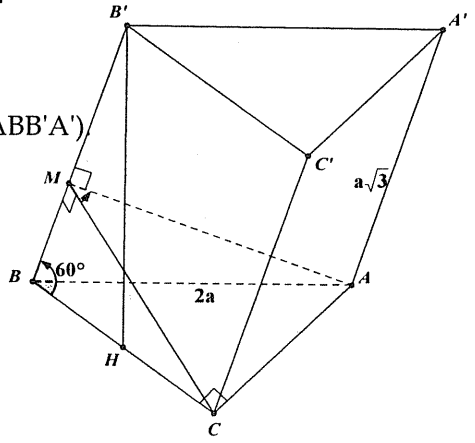
Kẻ $CM \perp BB'$ (1)

Vì $AC \perp HB', AC \perp BC$

$\Rightarrow AC \perp mp(BCC'B') \Rightarrow AC \perp BB'$

Và $BB' \perp AC, BB' \perp CM$

$\Rightarrow BB' \perp mp(CMA) \Rightarrow BB' \perp AM$ (2)



Từ (1), (2) suy ra: $\left[\widehat{(BCC'B'),(ABB'A')}\right]=\widehat{AMC}$

Theo chứng minh trên $\Delta CBB'$ đều ,vậy M trung điểm BB'.

$MA=\sqrt{AB^2-BM^2}=\frac{a\sqrt{13}}{2};MC=\frac{BC.\sqrt{3}}{2}=\frac{3a}{2}$

$\cos\widehat{AMC}=\frac{AM^2+CM^2-AC^2}{2AM.CM}=\frac{3}{\sqrt{13}}\Rightarrow\widehat{AMC}=\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}$

Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác cân tại C, cạnh đáy AB bằng 2a và góc $\widehat{ABC}=30^0$. Mặt phẳng (C'AB) tạo với đáy (ABC) một góc 60^0. Tính thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CB'.

LỜI GIẢI

Gọi M là trung điểm của AB. Tam giác CAB cân tại C suy ra $AB\perp CM$.

Mặt khác: $AB\perp CC'\Rightarrow AB\perp(CMC')$.

Vậy: $\left[\widehat{(C'AB),(ABC)}\right]=\widehat{CMC'}=60^0$.

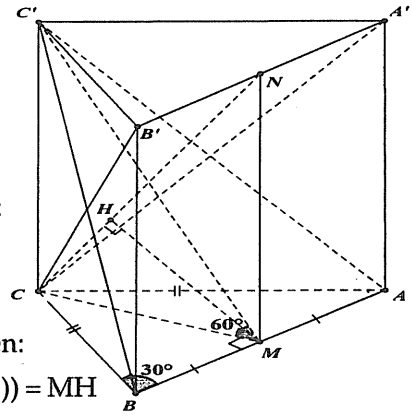
Ta có: $CM=BM.\tan 30^0=\frac{a}{\sqrt{3}}$;

$CC'=CM.\tan 60^0=\frac{a}{\sqrt{3}}.\sqrt{3}=a$.

Vậy: $S_{ABC}=\frac{1}{2}CM.AB=\frac{a^2}{\sqrt{3}}$.

Gọi V là thể tích lăng trụ ABC.A'B'C' thì:

$V=S_{ABC}.CC'=\frac{a^2}{\sqrt{3}}.a=\frac{a^3}{\sqrt{3}}$.



Mặt phẳng (CA'B') chứa CB' và // AB nên:

$d(AB;CB')=d(AB;(CA'B'))=d(M;(CA'B'))=MH$

Với N là trung điểm của A'B' và H là hình chiếu của M trên CN.

Do $MH\perp CN, MH\perp A'B'\Rightarrow MH\perp(CA'B')$

Tam giác CMN vuông tại M nên: $\frac{1}{MH^2}=\frac{1}{MC^2}+\frac{1}{MN^2}=\frac{4}{a^2}$

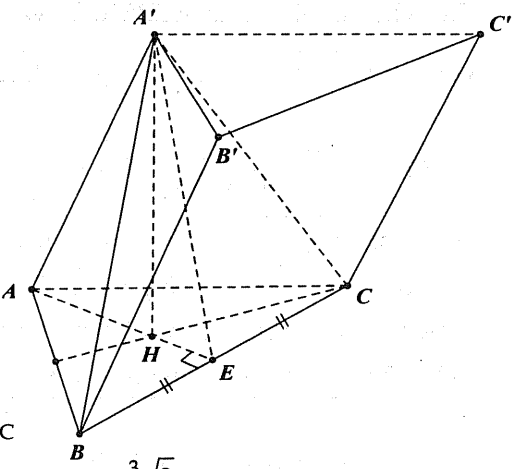
$\Rightarrow d(AB;CB')=MH=\frac{a}{2}$.

Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có A'.ABC là hình chóp tam giác đều, AC = a, $A'B=a\sqrt{3}$.. Tính theo a thể tích của khối chóp A'.BB'C'C.

LỜI GIẢI

Gọi E là trung điểm của BC; H là tâm của tam giác đều ABC

$\Rightarrow A'H \perp mp(ABC)$.



Ta có: $AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \frac{2\sqrt{6}a}{3}$

$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}$

$= A'H.S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow V_{A'BB'CC'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A'.ABC}$

$= \frac{2}{3}A'H.S_{ABC} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ (đvtt).

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt bên kề nhau có độ dài bằng a. Tính theo a thể tích khối lập phương ABCD.A'B'C'D' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và B'D'.

LỜI GIẢI

Gọi M,N lần lượt là 2 tâm của 2 hình vuông ABB'A' , ADD'A'

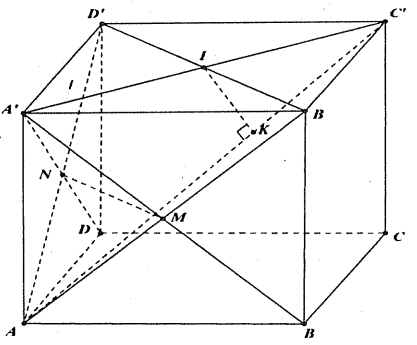
$\Rightarrow MN = \frac{1}{2}B'D' \Rightarrow B'D' = 2a \Rightarrow A'B' = a\sqrt{2}$.

$V_{ABCDA'B'C'D'} = AA'.S_{A'B'C'D'} = a\sqrt{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2 = 2\sqrt{2}a^3$ (đvtt).

Gọi I là giao điểm của B'D' và A'C'

Trong (AA'C') kẻ $IK \perp AC' \left(K \in AC'\right)$ (1)

Vì: $\left.\begin{array}{l} AA' \perp B'D' \\ A'C' \perp B'D' \end{array}\right\} \Rightarrow (AA'C) \perp B'D' \Rightarrow IK \perp B'D'$ (2)



Từ (1) , (2) suy ra $d_{(AC',B'D')} = IK$.

Ta có : $\Delta C'IK \sim \Delta C'AA'(g.g) \Rightarrow \frac{IK}{AA'} = \frac{C'I}{C'A}$

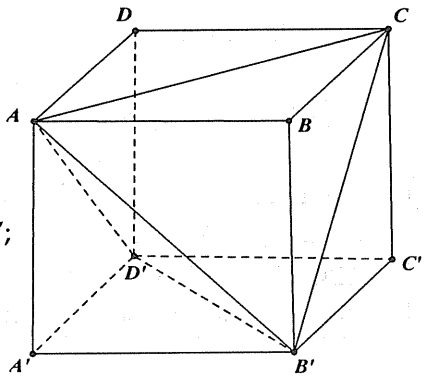
$\Rightarrow IK = \frac{AA'.C'I}{C'A} = \frac{a\sqrt{2}.a}{a\sqrt{6}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$\left(AC' = \sqrt{AA'^2 + A'C'^2} = a\sqrt{6}\right)$

Kết luận: Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC′ và B′D′ bằng $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Cho hình lập phương ABCD.A′B′C′D′, biết bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện ACB′D′ là r. Hãy tính thể tích hình lập phương theo r.

LỜI GIẢI



Gọi cạnh hình lập phương là a.

Tứ diện ACB′D′ là tứ diện đều.

Cạnh bằng $a\sqrt{2}$.

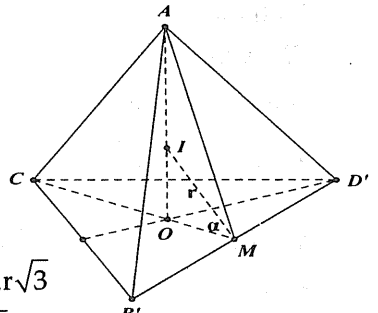
O là trọng tâm của tam giác CB′D′;

I là tâm của mặt cầu nội tiếp tứ diện ACB′D′;

M là trung điểm của B′D′

Ta có: $OM = \frac{1}{3}CM = \frac{a\sqrt{6}}{6}$, $CO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow AO = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$; $\tan 2\alpha = 2\sqrt{2}$.



Ta có: $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $(\widehat{IMO} = \alpha)$

Vậy: ΔIOM vuông cân tại $O \Rightarrow r = IO \Rightarrow a = 2r\sqrt{3}$

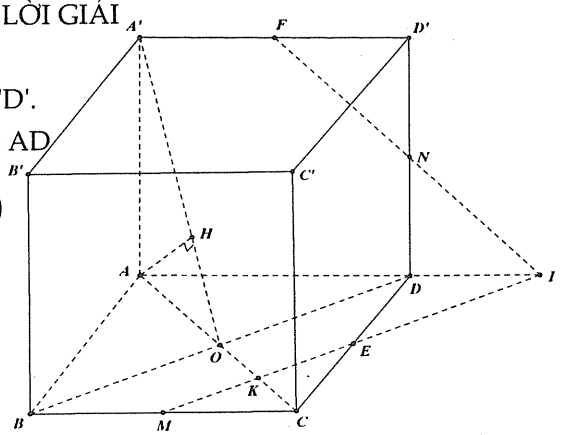
Vậy: hình lập phương có thể tích: $V = 24r^3\sqrt{3}$ (đvtt).

Cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D' với cạnh bằng a. Giả sử M và N lần lượt là các trung điểm của BC và DD'.

a) Chứng minh rằng MN song song với mặt phẳng (A'BD).

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và MN theo a .

LỜI GIẢI



a) MN//(A'BD)

Gọi E, F là trung điểm CD và A'D'.

Ta có: FN và ME cắt nhau tại $I \in AD$

$\begin{cases} FN \,//\, A'D \\ ME \,//\, BD \end{cases} \Rightarrow (FIM) \,//\, (A'BD)$

$\Rightarrow MN \,//\, (A'BD)$

b) Khoảng cách giữa BD và MN.

Ta có: (A'BD) // (FIM) nên:

$d(BD,MN) = d\big((ABD,(FIM))\big)$

Vẽ $AH \perp OA'$

Ta có: $BD \perp AH \Rightarrow AH \perp mp(A'BD)$

Gọi ℓ là khoảng cách từ A đến (FIM). Ta có: $\frac{AH}{\ell} = \frac{AO}{AK} = \frac{2}{3} \Rightarrow \ell = \frac{2}{3}AH$;

$d\big((A'BD),(FIM)\big) = \ell - AH = \frac{1}{2}AH = \frac{a}{2\sqrt{3}}$

Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có $AB = a, BC = 2a, \widehat{ABC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC và góc giữa AA' tạo với mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp A'.ABC và khoảng cách từ G đến mặt phẳng (A'BC).

LỜI GIẢI

Tính thể tích khối chóp A'.ABC:

Từ $A'G \perp (ABC) \Rightarrow AG$ là hình chiếu của AA' lên (ABC)

Gọi M là trung điểm BC. Từ giả thiết ta có:

$BC = 2a,\ AG = \frac{2}{3}AI = \frac{2a}{3};\ \widehat{A'AG} = 60^0 \Rightarrow A'G = AG.\tan 60^0 = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Vì $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos 60^0 = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$

Mặt khác: $AB^2 + AC^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 = BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Và $A'G \perp (ABC)$ nên A'G là chiều cao của khối chóp A'.ABC.

Thể tích của khối chóp A'.ABC được tính bởi:

$V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.A'G = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AB.AC.A'G = \frac{1}{6}a.a\sqrt{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3}{3}$ (đvtt)

Khoảng cách từ G đến mp (A'BC):

Kẻ $AK \perp BC$ tại K và $GI \perp BC$ tại I

$\Rightarrow GI // AK \Rightarrow \frac{GI}{AK} = \frac{MG}{MA} = \frac{1}{3}$

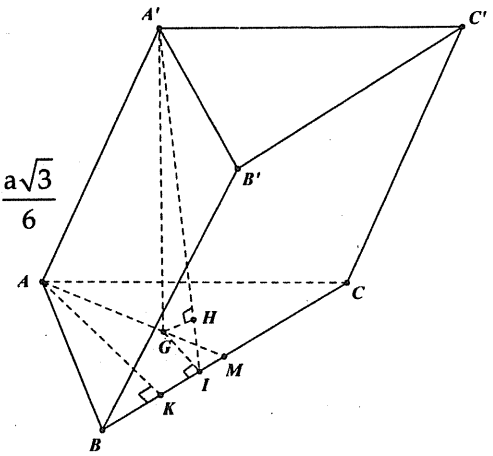
$\Rightarrow GI = \frac{1}{3}AK = \frac{1}{3}.\frac{AB.AC}{BC} = \frac{1}{3}\frac{a.a\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Kẻ $GH \perp A'I$ tại H (1)

Do: $\left.\begin{matrix} BC \perp GI \\ BC \perp A'G \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp GH$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow GH \perp (A'BC)$

$\Rightarrow d[G,(A'BC)] = GH$



Ta có: $\Delta A'GI$ vuông tại G có GH là đường cao nên:

$$d[G,(A'BC)] = GH = \frac{A'G.GI}{\sqrt{A'G^2 + GI^2}} = \frac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{\frac{12a^2}{9} + \frac{3a^2}{36}}} = \frac{2a}{\sqrt{51}} = \frac{2a\sqrt{51}}{51}.$$

Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có $AB = a, BC = 2a, \widehat{ACB} = 30^0$, hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC và góc giữa AA' tạo với mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối đa diện BCC'B'A' và khoảng cách giữa B'C' và A'C.

LỜI GIẢI

Tính thể tích khối đa diện BCC'B'A':

Từ $A'G \perp (ABC) \Rightarrow AG$ là hình chiếu của AA' lên (ABC).

Gọi M là trung điểm BC.

Từ giả thiết, ta có: $BC = 2a, AG = \frac{2}{3}AI = \frac{2a}{3}; \widehat{A'AG} = 60^0$

$$\Rightarrow A'G = AG.\tan 60^0 = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Đặt $AC = x > 0$.

Ta có: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC.\cos 30^0$

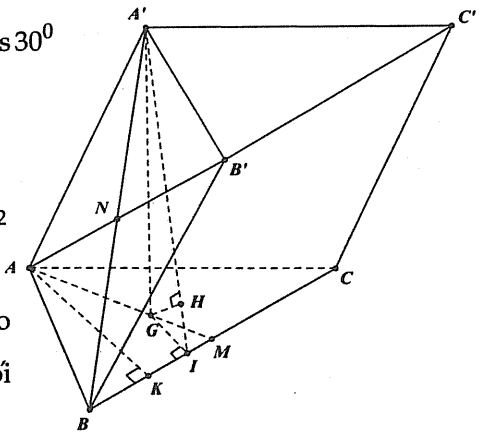
$$\Rightarrow a^2 = x^2 + 4a^2 - 2.x.2a.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AC = x = a\sqrt{3}.$$

Nên $AB^2 + AC^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 = BC^2$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A

Vì $A'G \perp (ABC)$ nên $A'G$ là chiều cao của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khối chóp $A'.ABC$.



Thể tích của khối đa diện BCC'B'A' được tính bởi:

$$V_{BCC'B'A'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A'.ABC} = \left(1 - \frac{1}{3}\right)S_{ABC}.A'G$$

$$= \frac{2}{3}.\frac{1}{2}AB.AC.A'G = \frac{1}{3}a.a\sqrt{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}a^3 \text{ (đvtt)}.$$

Khoảng cách giữa B'C' và A'C:

Kẻ $AK \perp BC$ tại K và $GI \perp BC$ tại $I \Rightarrow GI // AK$

$$\Rightarrow \frac{GI}{AK}=\frac{MG}{MA}=\frac{1}{3}\Rightarrow GI=\frac{1}{3}AK=\frac{1}{3}.\frac{AB.AC}{BC}=\frac{1}{3}\frac{a.a\sqrt{3}}{2a}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Kẻ $GH\perp A'I$ tại H (1)

Do: $\left.\begin{matrix}BC\perp GI\\ BC\perp A'G\end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp GH$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow GH\perp (A'BC)\Rightarrow d[G,(A'BC)]=GH$.

Vì $B'C'\ //\ BC$, $BC\subset (A'BC)$ nên $B'C'\ //\ (A'BC)$ và $A'C\subset (A'BC)$.

$\Rightarrow d(B'C',A'C)=d[B'C',(A'BC)]=d[B',(A'BC)]$

Mặt khác: ta thấy AB' cắt mp (A'BC) tại N là trung điểm của AB'.

Do đó: $d[B',(A'BC)]=d[A,(A'BC)]=3d[G,(A'BC)]=3GH$

$$=\frac{3.A'G.GI}{\sqrt{A'G^2+GI^2}}=\frac{3.\frac{2a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{\frac{12a^2}{9}+\frac{3a^2}{36}}}=\frac{6a}{\sqrt{51}}=\frac{2a\sqrt{51}}{17}.$$

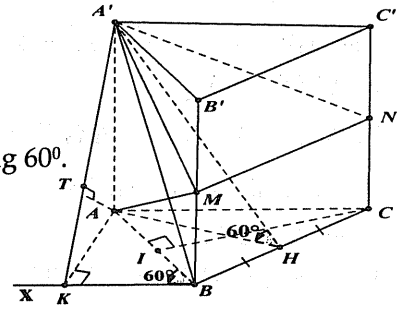
Vậy: $d(B'C',A'C)=\frac{2a\sqrt{51}}{17}$

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều và mặt phẳng (A'BC) tạo với đáy góc 60^0, tam giác A'BC có diện tích bằng $8\sqrt{3}$.

a) Gọi M ,N lần lượt là trung điểm của BB' và CC'. Tính thể tích khối tứ diện A/AMN.

b) Tính khoảng cách giữa hai cạnh A/B và AC.

LỜI GIẢI



Cách 1: Ta có $AA'\perp (ABC)$.

Gọi H là trung điểm BC;

AH ⊥ BC nên A/H ⊥ BC. Vậy góc A/HA bằng 60^0.

Trong tam giác vuông A'HA có:

$$A'H=\frac{AH}{\cos 60^0}=2\frac{BC\sqrt{3}}{2}=BC\sqrt{3}$$

Diện tích tam giác A/BC: $S=\frac{1}{2}BC.A'H=\frac{BC^2\sqrt{3}}{2}$

$S=8\sqrt{3}$ nên $BC=4$, $AA'=AH\tan 60^0=6$.

$V_{A'AMN}=V_{ABC.A'B'C'}-2V_{A.BMNC}=8\sqrt{3}$ (đvtt)

Cách 2: Hạ $CI\perp AB\Rightarrow CI\perp mp(ABB'A')$.

$S_{\Delta AMA'} = \frac{1}{2}AA'.AB = \frac{1}{2}6.4 = 12 \left(d_{(M,AA')} = d_{(B,AA')} = AB\right)$

$V_{NMAA'} = \frac{1}{3}CI.S_{\Delta AMA'} = \frac{1}{3}.2\sqrt{3}.12 = 8\sqrt{3}$

* Tính khoảng cách giữa hai đoạn thẳng A'B và AC:

Dựng $Bx // AC \Rightarrow d(AC, A'B) = d(AC,(A'Bx)) = d(A,(A'Bx))$

Hạ $AK \perp Bx \Rightarrow Bx \perp (A'AK)$.

Hạ $AT \perp A'K \Rightarrow AT \perp (A'Bx) \Rightarrow d(A,(A'Bx)) = AT$

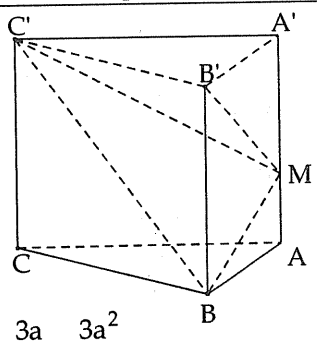
Trong ΔAKB vuông tại K: $AK = AB.\sin 60^0 = 4.\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Trong $\Delta AKA'$ vuông tại A:

$$\frac{1}{AT^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{A'A^2} = \frac{1}{\left(2\sqrt{3}\right)^2} + \frac{1}{6^2} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \Rightarrow AT = 3 \text{ (đvđd)}$$

Cho lăng trụ đứng ABC.A′B′C′ có đáy ABC là tam giác vuông với AB = BC = a, cạnh bên $AA' = \frac{3a}{\sqrt{2}}$. M là điểm trên cạnh AA′ sao cho AA'=3AM. Tính thể tích của khối tứ diện MB′BC′. Tính khoảng cách từ B′ đến mặt phẳng (C′BM).

LỜI GIẢI



ABC.A′B′C′ là lăng trụ đứng $\Rightarrow C'B' \perp BB'$

Δ A′B′C′ vuông tại B′ $\Rightarrow B'C' \perp A'B'$

$\Rightarrow B'C' \perp (ABB'A')$

$\Rightarrow$B′C′ là đường cao của khối chóp C′.B′BM

Ta thấy: $S_{\Delta B'BM} = \frac{1}{2}.d(M,BB').BB'$

$$= \frac{1}{2}.d(A,BB').BB' \quad \frac{1}{2}.AB.BB' = \frac{1}{2}.a.\frac{3a}{\sqrt{2}} = \frac{3a^2}{2\sqrt{2}}$$

Vì $BC = B'C' = a \Rightarrow V_{C'.A'BM} = \frac{1}{3}.C'B'.S_{\Delta B'BM} = \frac{a^3}{2\sqrt{2}}$

Vì $C'B = \frac{a\sqrt{22}}{2}$, $MB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và MC′=2a

$\Rightarrow MB^2 + MC'^2 = C'B^2 \Rightarrow \Delta$ C′BM vuông tại M

$\Rightarrow S_{\Delta C'BM} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2} \Rightarrow d(B',(BC'M)) = \frac{3.V_{C'B'BM}}{S_{\Delta C'BM}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a . K là giao điểm của AC' và mặt phẳng $(A'BD)$. Tính thể tích tứ diện KCC'D' và khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(KC'D')$.

LỜI GIẢI

Gọi O là tâm hình vuông ABCD.

Ta có: $(A'BD)\cap(AA'C'C)=OA', AC'\subset(AA'C'C')\Rightarrow K=OA'\cap AC'$

Ta có: $\Delta KAO\sim\Delta KA'C'(g.g)$.

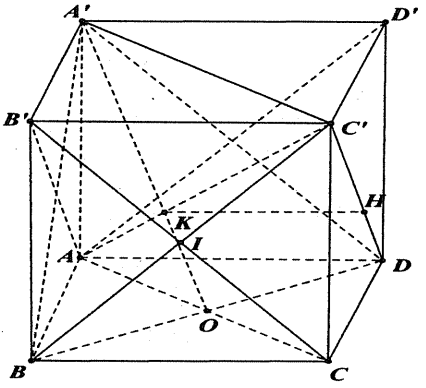
Suy ra: $\frac{KA}{KC'}=\frac{OA}{A'C'}=\frac{1}{2}\Rightarrow KA=\frac{1}{2}KC'\Rightarrow AK=\frac{1}{3}AC'$.

Trong hình bình hành ADC'B'.

Từ K kẻ KH vuông góc với DC' tại H.

Ta có KH // AD

$\Rightarrow \frac{KH}{AD}=\frac{C'K}{C'A}=\frac{2}{3}\Rightarrow KH=\frac{2}{3}a$.



$V_{K.CC'D'}=\frac{1}{3}KH.S_{CC'D'}=\frac{1}{3}.\frac{2}{3}a.\frac{1}{2}.a^2=\frac{a^3}{9}$.

$d\left(C,mp\left(KC'D'\right)\right)=d\left(C,mp\left(ABC'D'\right)\right)$

CB' cắt BC' tại I.

Ta có CI vuông góc với BC' và AB. Suy ra CI vuông góc với mp(ABC'D').

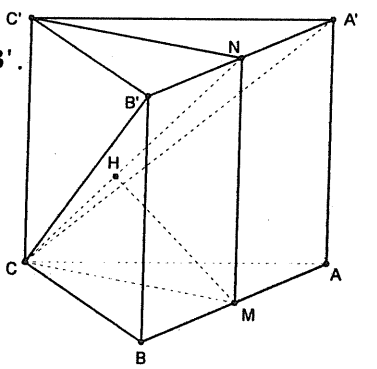
Suy ra: d(C, mp(KC'D')) = CI.

Mặt khác, CBB'C' là hình vuông , nên $CI=a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác cân tại C, cạnh đáy AB bằng 2a và góc ABC bằng 30^0. Tính thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CB' bằng $\frac{a}{2}$.

LỜI GIẢI

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và A'B'.



Tam giác CAB cân tại $C\Rightarrow AB\perp CM$.

Mặt khác: $AB\perp CC'$

$\Rightarrow AB\perp(CMNC')\Rightarrow A'B'\perp(CMNC')$.

Kẻ $MH\perp CN\ (H\in CN);\ MH\subset(CMNC')$

$\Rightarrow MH\perp A'B'\Rightarrow MH\perp(CA'B')$

Mp (CA'B') chứa CB' và // với AB nên:

$d(AB,CB') = d(AB,(CA'B'))$

$= d(M,(CA'B')) = MH = \dfrac{a}{2}$

Tam giác vuông $BMC \Rightarrow CM = BM.\tan 30^0 = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

Δ vuông $CMN \Rightarrow \dfrac{1}{MH^2} = \dfrac{1}{MC^2} + \dfrac{1}{MN^2} \Leftrightarrow \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{3}{a^2} + \dfrac{1}{MN^2} \Leftrightarrow MN = a$

Từ đó $\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.MN = \dfrac{1}{2}.2a.\dfrac{a}{\sqrt{3}}.a = \dfrac{a^3}{\sqrt{3}}$.

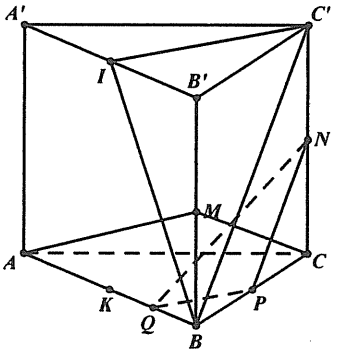
Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác cân đỉnh C; đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng (ABB'A') góc 60^0 và AB = AA' = a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BB', CC', BC và Q là một điểm trên cạnh AB sao cho $BQ = \dfrac{a}{4}$. Tính theo a thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và chứng minh rằng $(MAC) \perp (NPQ)$.

LỜI GIẢI

Gọi I là trung điểm A'B' thì $\left.\begin{array}{l} C'I \perp A'B' \\ C'I \perp AA' \end{array}\right\} \Rightarrow C'I \perp (ABA'B')$.

Suy ra góc giữa BC' và mp(ABB'A') chính là góc $\widehat{C'BI} \Rightarrow \widehat{C'BI} = 60^0$.

$C'I = BI.\tan\widehat{C'BI} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.



$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{A'B'C'} = AA'\cdot\dfrac{1}{2}\cdot CI.A'B'$

$= \dfrac{a^3.\sqrt{15}}{4}$

$\left.\begin{array}{l} NP // BC' \\ PQ // C'I \end{array}\right\} \Rightarrow (NPQ) // (C'BI)$ (1)

$\Delta ABM = \Delta BB'I$ $(c-g-c) \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{BIB'} \Rightarrow \widehat{AMB} + \widehat{B'BI} = 90^0 \Rightarrow AM \perp BI$

Mặt khác: Theo chứng minh trên $C'I \perp AM$ nên $AM \perp (C'BI)$

Suy ra $(AMC) \perp (C'BI)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(MAC) \perp (NPQ)$.

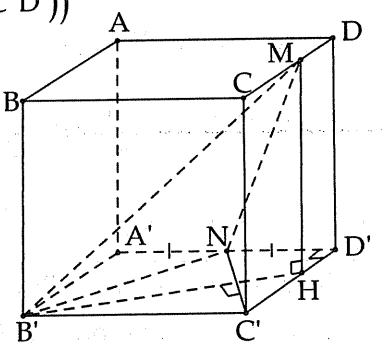
Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. M là điểm thuộc cạnh CD với $CM = x$ $(0 < x < a)$, N là trung điểm cạnh A'D'. Tính theo a thể tích của khối tứ diện B'MC'N. Xác định x để hai đường thẳng B'M và C'N vuông góc với nhau.

LỜI GIẢI

Tính thể tích tứ diện B′MC'N:

$$V_{B'MC'N} = V_{M.B'C'N} = \frac{1}{3}S_{\Delta B'C'N}.d\left(M,\left(A'B'C'D'\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}A'B'.B'C'\right).AA' = \frac{a^3}{6}$$



Tìm x để $B'M \perp C'N$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên (A′B′C′) $\Rightarrow$ B′H là hình chiếu vuông góc của B′M trên (A′B′C′).

Vậy $B'M \perp C'N \Leftrightarrow B'H \perp C'N$

$$\Leftrightarrow \widehat{C'B'H} = \widehat{D'C'N} \Leftrightarrow \Delta B'C'H = \Delta C'D'N \Leftrightarrow C'H = D'N \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}.$$

Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC vuông tại A. $AB = a$, $BC = 2a$. Hình chiếu vuông goác của A' trên mp(ABC) trùng với trung điểm của AC.Góc giữa 2 mp (BCC'B') và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa 2 đường thẳng AA' và BC.

LỜI GIẢI

Gọi H là trung điểm của AC. Kẻ Ax // BC.

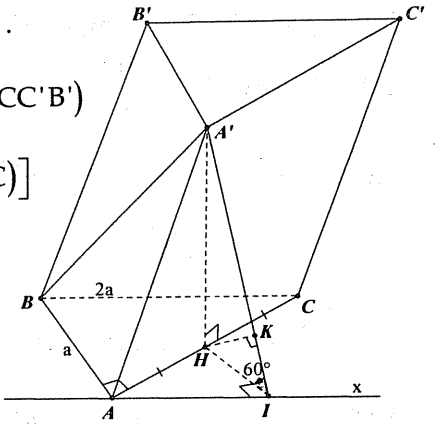
Ta có: $\begin{cases} Ax \,//\, BC \\ BB' \,//\, AA' \end{cases} \Rightarrow mp\left(A'Ax\right) \,//\, mp\left(BCC'B'\right)$

Vậy : $\left[\left(BCC'B'\right),\left(ABC\right)\right] = \left[\left(A'Ax\right),\left(ABC\right)\right]$

Kẻ $HI \perp Ax$.

Ta có: $\begin{cases} Ax \perp A'H \\ Ax \perp HI \end{cases} \Rightarrow Ax \perp mp\left(A'HI\right)$.

Vậy: $\left[\left(A'Ax\right),\left(ABC\right)\right] = \widehat{HIA'} = 60^0$



$$\tan\widehat{ACB} = \tan\widehat{HAx} \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{HI}{AH} \Rightarrow HI = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2};$$

$$\tan\widehat{HIA'} = \frac{HA'}{HI} \Rightarrow HA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Thể tích khối lăng trụ:

$$V_{ABC.A'B'C'} = HA'.S_{\Delta ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}.a.a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$$

Khoảng cách giữa 2 đường thẳng AA' và BC:

Vì $BC \,//\, (A'Ax) \Rightarrow d(BC, AA') = d(BC,(A'Ax)) = d(C,(A'Ax))$

Có hai mặt phẳng (A'Ax) và (A'HI) vuông góc với nhau theo giao tuyến A'I.

Từ H dựng HK vuông góc với A'I tại K $\Rightarrow HK \perp (A'Ax)$.

Vậy: $d(H,(A'Ax)) = HK$.

Có: $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HI^2} + \dfrac{1}{HA'^2} = \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{16}{3a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Hai điểm C và H nằm trên đường thẳng có giao điểm với mp (A'Ax) tại A.

Có: $\dfrac{d(C,(A'Ax))}{d(H,(A'Ax))} = \dfrac{CA}{HA} = 2 \Rightarrow d(C,(A'Ax)) = 2d(H,(A'Ax)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Kết luận: $d(BC, AA') = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

DỰ BỊ ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2006

Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có A'ABC là hình chóp tam giác đều, cạnh đáy AB = a, cạnh bên AA' = b. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (A'BC). Tính $\tan\alpha$ và thể tích khối chóp A'BB'C'C.

LỜI GIẢI

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC).

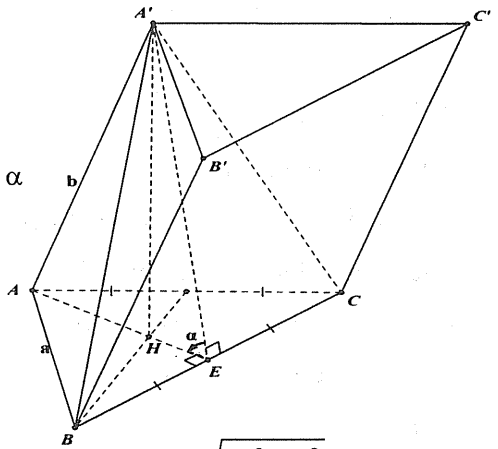
Vì A'.ABC là hình chóp tam giác đều nên H là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi E là trung điểm của BC.

Có: $\begin{cases} BC \perp A'H \\ BC \perp AE \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(AEA')$

$\Rightarrow BC \perp A'E$.

Vậy: góc $\left[\widehat{(A'BC),(ABC)}\right] = \widehat{AEA'} = \alpha$



Trong tam giác đều ABC có:

$AE = \dfrac{AB.\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$AH = \dfrac{2}{3}AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}, HE = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

Trong tam giác vuông AHA': $HA' = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \dfrac{\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{3}}$

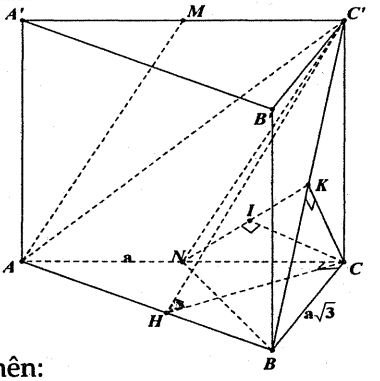
Trong tam giác vuông A'HE: $\tan\alpha = \dfrac{HA'}{HE} = \dfrac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{a}$.

$V_{A'BCC'B'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A'.ABC} = HA'.S_{ABC} - \dfrac{1}{3}HA'.S_{ABC} = \dfrac{2}{3}HA'.S_{ABC}$.

$= \dfrac{2}{3}\dfrac{\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{3}}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{6}$

Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có tam giác ABC vuông tại C. M là trung điểm của A'C'. Biết AC = a, BC = $a\sqrt{3}$; mặt phẳng (ABC') hợp với mặt phẳng (ABC) góc 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách AM và BC' theo a.

LỜI GIẢI



Từ giả thiết có: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.CC'$.

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}CA.CB = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Ta có: $(ABC') \cap (ABC) = AB$.

Kẻ $CH \perp AB$ tại $H \Rightarrow AB \perp (CC'H)$

$\Rightarrow \left[\widehat{(ABC'),(ABC)}\right] = \left[\widehat{CH,HC'}\right] = \widehat{CHC'} = 60^0$

Xét tam giác vuông ABC có CH là chiều cao nên:

$\dfrac{1}{CH^2} = \dfrac{1}{CA^2} + \dfrac{1}{CB^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác vuông CHC' có: $CC' = HC\tan 60^0 = \dfrac{3a}{2}$

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.\dfrac{3a}{2} = \dfrac{a^3 3\sqrt{3}}{4}$

N là trung điểm của AC thì AM // C'N nên AM // mp(BC'N).

$d(AM, BC') = d(AM,(BC'N)) = d(A,(BC'N))$.

N là trung điểm của AC nên $d(A,(BC'N)) = d(C,(BC'N))$.

Kẻ CK vuông góc với BC' $\Rightarrow BC' \perp (NCK)$

$(\text{vì } AC \perp BC \Rightarrow AC \perp (BCC'B') \Rightarrow (CNK) \perp (BNC') = NK)$

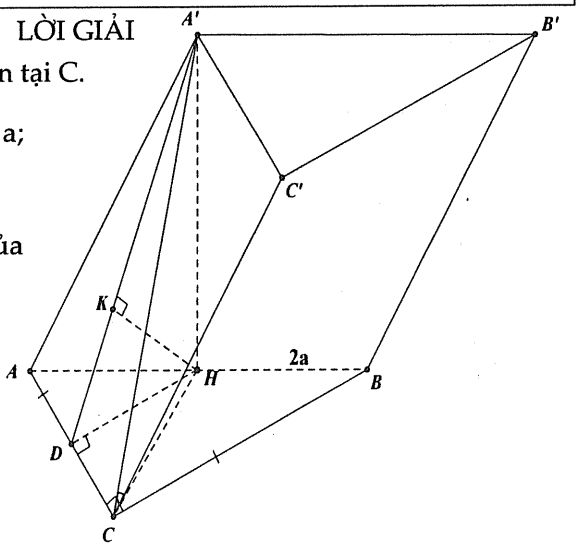
Kẻ CI vuông góc với NK tại I ta có $d(C,(BC'N)) = CI$

$\dfrac{1}{CI^2} = \dfrac{1}{CN^2} + \dfrac{1}{CK^2} = \dfrac{1}{CN^2} + \dfrac{1}{CB^2} + \dfrac{1}{CC'^2} = \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{4}{9a^2} = \dfrac{43}{9a^2} \Rightarrow CI = \dfrac{3a}{\sqrt{43}}$

Vậy: $d\left(C,\left(BC'N\right)\right)=CI=\frac{3a}{\sqrt{43}}$.

Cho khối lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C, AB=2a (a > 0). Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của AB.Góc của đường thẳng A'C và mặt phẳng (ABC) có số đo bằng 45^0. Tính theo a thể tích khối lăng trụ đã cho và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB', A'C.

LỜI GIẢI



Trong tam giác ABC vuông cân tại C.

Ta có: $HA=HB=HC=\frac{1}{2}AB=a$;

$CA=CB=a\sqrt{2}$

CH là hình chiếu vuông góc của A'C trên mp(ABC), có:

$\left[\widehat{A'C.\left(ABC\right)}\right]=\widehat{A'CH}=45^0$

Trong tam giác vuông A'CH:

$HA'=CH.\tan 45^0=a$

Thể tích khối lăng trụ:

$V_{ABC.A'B'C'}=AH'.S_{ABC}=a^3$.

Khoảng cách giữa 2 đường thẳng BB' và A'C được tìm rất đơn giản. Nhìn hình vẽ ta chuyển ngay sang khoảng cách từ 1 điểm đến 1 mặt phẳng.

Bây giờ ta chứng minh: $\begin{cases}BB'\ //\ AA'\\ AA'\subset\left(ACC'A'\right)\Rightarrow BB'\ //\ \left(ACC'A'\right)\\ CA'\subset\left(ACC'A'\right)\end{cases}$

$\Rightarrow d\left(BB',CA'\right)=d\left(BB',\left(ACC'A'\right)\right)=d\left(B,\left(ACC'A'\right)\right)$

Gọi D là trung điểm của AC.

Ta có $HD\perp AC$. Kẻ $HK\perp DA'$, ta chứng minh được:

$HK\perp mp\left(ACC'A'\right)\Rightarrow d\left(H,\left(ACC'A'\right)\right)=HK$

Trong Δ vuông A'HD: $\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{HD^2}+\frac{1}{HA'^2}=\frac{2}{a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{3}{a^2}\Rightarrow HK=\frac{a}{\sqrt{3}}$

Vì H trung điểm của AB nên $d\left(B,\left(ACC'A'\right)\right)=2d\left(H,\left(ACC'A'\right)\right)=\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông, AC = BC = a, góc giữa A'B và mặt phẳng (ACC'A') bằng 30^0. Gọi M là trung điểm của A'B' .Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách từ M đến mp (A'BC).

LỜI GIẢI

$BC \perp AC, BC \perp CC' \Rightarrow BC \perp mp(ACC'A')$

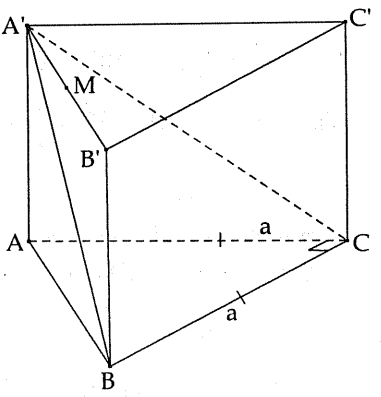
Vậy: A'C là hình chiếu vuông góc của A'B trên mp (ACC'A').

$\left[\widehat{A'B,(ACC'A')}\right] = \widehat{BA'C} = 30^0$;

$A'C = BC : \tan 30^0 = a\sqrt{3}$;

$AA' = \sqrt{A'C^2 - AC^2} = a\sqrt{2}$

$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = a\sqrt{2}.\frac{1}{2}a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$



* Tính khoảng cách từ M đến mp(A'BC):

Câu này các bạn phải "lanh mắt" khi đã có kinh nghiệm nhìn hình ,là dựa vào thể tích để mình tính khoảng cách:

Ta có: $\begin{cases} BM \cap mp(BCA') = A' \Rightarrow \dfrac{d(M,(BCA'))}{d(B',(BCA'))} = \dfrac{MA'}{BA'} = \dfrac{1}{2} \\ \begin{cases} B'C' \,//\, BC \\ BC \subset (BCA') \end{cases} \Rightarrow d(B',(BCA')) = d(C',(BCA')) \end{cases}$

$\Leftrightarrow d(M,(BCA')) = \frac{1}{2}d(B',(BCA'))$

$V_{C'.BCA'} = V_{B.CA'C'} \Leftrightarrow \frac{1}{3}d(C',(BCA')).S_{\Delta BCA'} = \frac{1}{3}BC.S_{\Delta CA'C'}$

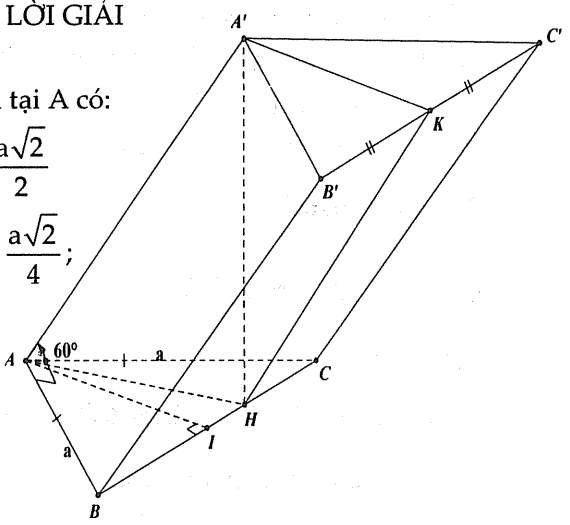
$\Leftrightarrow d(C',(BCA')).\frac{1}{2}.CB.CA' = BC.\frac{1}{2}.C'C.C'A'$

$d(C',(BCA')).a\sqrt{3} = a\sqrt{2}.a \Rightarrow d(C',(BCA')) = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Vậy: $d(M,(BCA')) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, AB = AC = a, hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là điểm H nằm trên cạnh BC sao cho BH = 3CH, góc giữa BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0 . Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' theo a và tính côsin góc tạo bởi mặt phẳng (BCC'B') với mặt phẳng (ABC).

LỜI GIẢI



Gọi I là trung điểm của BC.

Trong tam giác ABC vuông cân tại A có:

$BC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}, AI = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$CH = \frac{1}{4}CB = \frac{1}{2}CI \Rightarrow HI = \frac{1}{2}CI = \frac{a\sqrt{2}}{4};$

$AH = \sqrt{AI^2 - HI^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$

$A'H = AH.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{30}}{4};$

$AA' = \frac{AH}{\cos 60^0} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

$V_{ABC.A'B'C'} = HA'.S_{ABC} = \frac{a\sqrt{30}}{4}.\frac{1}{2}a^2 = \frac{a^3\sqrt{30}}{8}$

Ta có $mp(ABC) // mp(A'B'C')$, nên:

$\left[\widehat{(BCC'B'),(ABC)}\right] = \left[\widehat{(BCC'B'),(A'B'C')}\right]$

Gọi K là trung điểm của B'C'.

$\begin{cases} B'C' \perp KA' \\ B'C' \perp HA' \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp mp(HKA') \Rightarrow B'C' \perp HK$

Vậy: $\left[\widehat{(BCC'B'),(A'B'C')}\right] = \widehat{HKA'}$.

$HK = \sqrt{HA'^2 + KA'^2} = \sqrt{\frac{30a^2}{16} + \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{38}}{4}; \cos\widehat{HKA'} = \frac{KA'}{HK} = \frac{2}{\sqrt{19}}.$

Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C', BB' = a góc giữa BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tam giác ABC vuông tại C, $\widehat{BAC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của B' trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm của tam giác ABC.

a). Tính thể tích tứ diện A'ABC.

b). Tính khoảng cách giữa AC và BB'.

LỜI GIẢI

a) Tính thể tích tứ diện A'ABC:

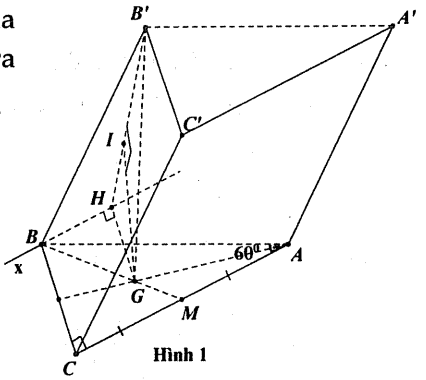
Gọi M là trung điểm của AC.

Ta có: BG là hình chiếu vuông góc của BB' trên mặt phẳng (ABC) nên góc giữa BB' và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{B'BG}=60^0$.

Trong $\Delta B'BG$ vuông tại G có:

$BG=BB'.\cos 60^0=\frac{a}{2}$;

$B'G=BB'.\sin 60^0=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Hình 1

Đặt $AC=x$.

Trong ΔABC có $BC=AC.\tan 60^0=x\sqrt{3}$, $BM=\frac{3}{2}BG=\frac{3a}{4}$.

Trong ΔBCM vuông tại C có:

$$BM^2=BC^2+CM^2\Leftrightarrow\left(\frac{3a}{4}\right)^2=\left(x\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2\Leftrightarrow\left(\frac{3a}{4}\right)^2=\frac{13x^2}{4}\Rightarrow x=\frac{3\sqrt{13}a}{26}.$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}CB.CA=\frac{1}{2}.x\sqrt{3}.x=\frac{\sqrt{3}}{2}.x^2=\frac{\sqrt{3}}{2}.\left(\frac{3\sqrt{13}a}{26}\right)^2=\frac{9a^2\sqrt{3}}{104}.$$

$$V_{A'ABC}=\frac{1}{3}.B'G.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{9a^2\sqrt{3}}{104}=\frac{9a^3}{208}.$$

b) Tính khoảng cách giữa AC và BB':

Trong mặt phẳng (ABC) kẻ Bx // AC.

Gọi mặt phẳng α chứa hai đường thẳng BB' và Bx, thì ta có $AC\ //\ mp(\alpha)$, nên $d(AC,BB')=d(AC,mp(\alpha))=d(M,mp(\alpha))\ \ (M\in AC)$.

Bước đầu tiên tính khoảng cách từ G là hình chiếu của đỉnh B' đến mặt phẳng α, sau đó sử dụng công thức tính tỉ lệ khoảng cách ta tính được khoảng cách từ M đến mặt phẳng α.

Dựng $GH\perp Bx(H\in Bx)$.

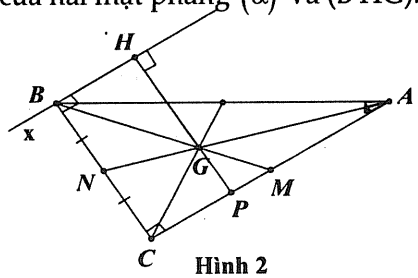
Ta có: $\begin{cases}Bx\perp GH\\Bx\perp GB'\end{cases}\Rightarrow Bx\perp mp(B'HG)\Rightarrow mp(\alpha)\perp mp(B'HG)(Bx\subset(\alpha))$.

Dựng GI vuông góc với B'H là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (B'HG).

Suy ra: $GI\perp mp(\alpha)\Rightarrow d(G,mp(\alpha))=GI$

Gọi $P=GH\cap AC$, N trung điểm BC.

Ta có: $\frac{AG}{AN}=\frac{AP}{AC}=\frac{2}{3}\Rightarrow AP=\frac{2}{3}AC$



Hình 2

$\Rightarrow CP = \frac{1}{3}AC = \frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{13}a}{26} = \frac{\sqrt{13}a}{26}$

Vì BCPH là hình chữ nhật nên $BH = CP = \frac{\sqrt{13}a}{26}$.

Pitago cho tam giác BGH có $HG = \sqrt{BG^2 - BH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{52}} = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Trong $\Delta HGB'$ có $\frac{1}{GI^2} = \frac{1}{GB'^2} + \frac{1}{GH^2} = \frac{4a^2}{3} + \frac{13a^2}{3} = \frac{17a^2}{3} \Rightarrow GI = \frac{a\sqrt{51}}{17}$.

Ba điểm M , G , B thẳng hàng và $B \in mp(\alpha)$.

Theo công thức tính tỉ lệ khoảng cách có :

$\frac{d(M,(\alpha))}{d(G,(\alpha))} = \frac{MB}{GB} = \frac{3}{2} \Rightarrow d(M,(\alpha)) = \frac{3}{2}d(G,(\alpha))$

$\Leftrightarrow d(M,(\alpha)) = \frac{3}{2}.\frac{a\sqrt{51}}{17} = \frac{3a\sqrt{51}}{34}$

Kết luận: $d(AC, BB') = \frac{3a\sqrt{51}}{34}$

Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' biết rằng A'.ABC là tứ diện đều cạnh a. Tính thể tích khối trụ A.BCC'B' và khoảng cách từ B' đến mặt phẳng (A'BC).

LỜI GIẢI

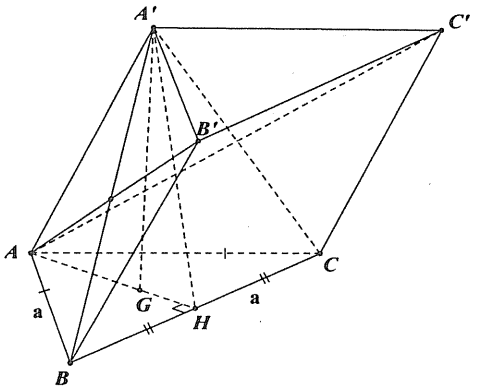
Gọi G tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC; H là trung điểm BC.

Vì A'.ABC là hình tứ diện đều nên: $A'G \perp (ABC)$.

Vì tam giác ABC đều có: $AH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AG = \frac{2}{3}AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong $\Delta AGA'$ vuông tại G có:

$GA' = \sqrt{AA'^2 - AG^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.



Gọi V là thể tích lăng trụ ABC.A'B'C':

$V = GA'.S_{\Delta ABC} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$

$V_{A.BCC'B'} = V - V_{A.A'B'C'} = V - V_{A'.ABC}$

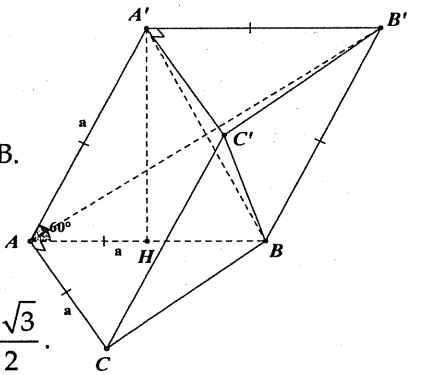
$= V - \frac{1}{3}V = \frac{2}{3}V = \frac{2}{3}.\frac{a^3\sqrt{2}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Vì A'.ABC là tứ diện đều nên $d\left(A',\left(ABC\right)\right)=d\left(A,\left(A'BC\right)\right)=A'G=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Ta có: $d\left(B',\left(A'BC\right)\right)=d\left(A,\left(A'BC\right)\right)=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , mặt bên ABB'A' là hình thoi cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy ABC. Góc $\widehat{A'AB}=60^0$. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC' .

LỜI GIẢI



Vì ABB'A' là hình thoi có góc $\widehat{A'AB}=60^0$
$\Rightarrow \Delta A'AB$ đều.

Gọi H trung điểm của AB, suy ra $A'H\perp AB$.

Vì hai mặt phẳng (ABB'A') và (ABC) vuông góc với nhau theo giao tuyến AB, từ đó suy ra: $A'H\perp (ABC)$.

Trong hình thoi ABB'A' cạnh a có: $A'H=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích lăng trụ ABCA'B'C':

$$V=A'H.S_{\Delta ABC}=A'H.\frac{1}{2}AB.AC=\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}.a^2=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$$

Vì $\begin{cases}CA\perp AB\\CA\perp A'H\end{cases}\Rightarrow CA\perp (ABB'A')$. Mà $CA\,//\,C'A'\Rightarrow C'A'\perp (ABB'A')$.

Các bạn cũng có thể chứng minh trực tiếp:

$$\begin{cases}C'A'\perp A'B'\\C'A'\perp A'H'\end{cases}\Rightarrow C'A'\perp \left(ABB'A'\right)$$

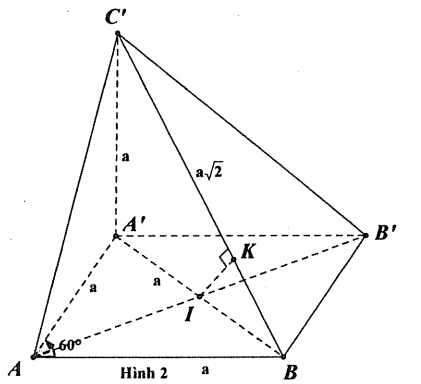
Khối chóp C'.ABB'A' được vẽ lại ở hình 2 , để các bạn dễ nhìn:

Ta có: $AB'\perp A'B$ (hai đường chéo của hình thoi); $AB'\perp A'C'$ nên suy ra $AB'\perp (C'A'B)$.

Gọi $I=AB'\cap A'B$.

Dựng $IK\perp BC'$ ($K\in BC'$), thì IK là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB' và BC', và $d\left(AB',BC'\right)=IK$.

Ta có: $\Delta BKI\backsim\Delta BA'C'$ (g.g)



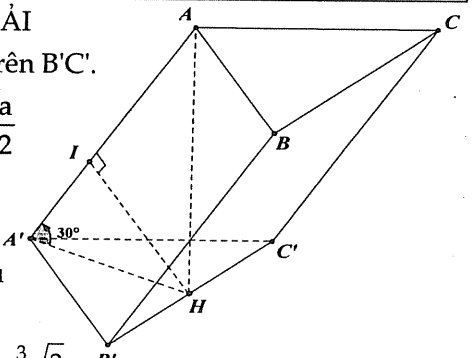
Hình 2

$$\Rightarrow \frac{KI}{A'C'} = \frac{BI}{BC'} \Leftrightarrow \frac{KI}{a} = \frac{\frac{a}{2}}{a\sqrt{2}} \Rightarrow KI = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Kết luận: $d(AB', BC') = IK = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (A'B'C') thuộc đường thẳng B'C'. Tính thể tích khối chóp A.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và B'C'.

LỜI GIẢI



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên B'C'.

Trong $\Delta AHA'$ có: $AH = AA'.\sin 30^0 = \frac{a}{2}$

$A'H = AA'.\cos 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

Suy ra A'H là đường cao của Δ đều A'B'C' và H là trung điểm của B'C' .

$$V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3}AH.S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}.$$

Ta có: $\begin{cases} B'C' \perp AH \\ B'C' \perp A'H \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AHA')$. Dựng $HI \perp AA' \Rightarrow B'C' \perp HI$.

Suy ra HI là đoạn vuông góc chung của AA' và B'C', và $FA = 2FD$.

Trong $\Delta AHA'$ có: $HIAA' = HA.HA' \Leftrightarrow HI.a = \frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Kết luận: $d(AA', B'C') = HI = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C', có B'ABC là tứ diện đều cạnh a.

a) Tính thể tích khối lăng trụ.

b) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện C'ABC.

LỜI GIẢI

Gọi G là tâm của đáy ABC.

Ta có: $B'G \perp (ABC)$

Có: $CG = \frac{2}{3}CH = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $B'G = \sqrt{B'C^2 - CG^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

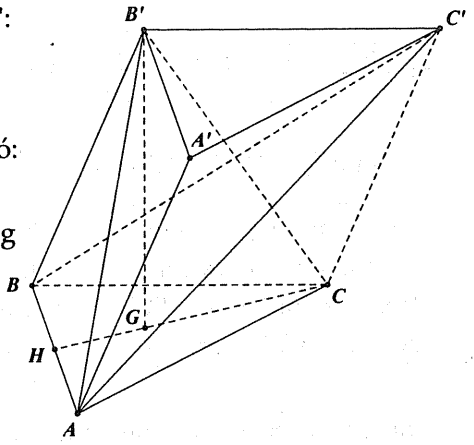
Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C':

$$V = B'G.S_{\Delta ABC} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$$

Vì B'.ABC là tứ diện đều cạnh a nên có:

$B'C' = B'A = B'B = B'C = a$.

Suy ra: tứ diện C'.ABC nội tiếp trong mặt cầu tâm B' có bán kính R = a.



Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C', có A'ABC là hình chóp đều có cạnh đáy bằng a , (A'BC) vuông góc với (BCC'B') .

Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và B'C.

LỜI GIẢI

Gọi G là tâm của $F = AD \cap (IJK)$. Vì A'.ABC là hình chóp đều.

Nên G là hình chiếu vuông của A' trên mp(ABC) nên có $A'G \perp (ABC)$.

Gọi H và H' lần lượt là trung điểm của BC và B'C' .

Suy ra HH' là đường trung bình của hình bình hành BCC'B' $\Rightarrow \overline{BB'} = \overline{HH'}$.

Mà $\overline{BB'} = \overline{AA'}$. Từ đó có: $\overline{HH'} = \overline{AA'}$

$\Rightarrow$ AHH'A' là hình bình hành .

Có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp A'G \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AH)$

$\Rightarrow \begin{cases} BC \perp HA' \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BC \perp HA' \\ BC \perp HH' \end{cases}$.

Từ đó suy ra góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (BCC'B') là góc giữa HA' và HH'.

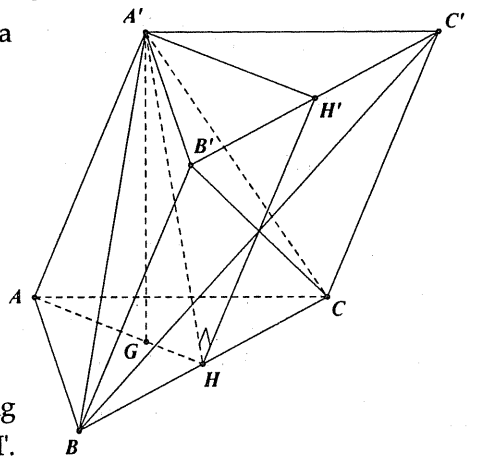
Theo đề bài thì (A'BC) $\perp$ (BCC'B')

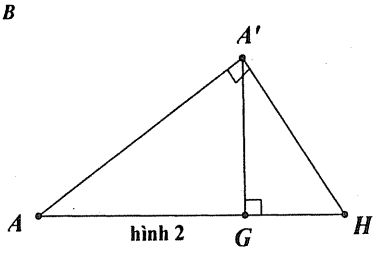
$\Rightarrow \widehat{A'HH'} = 90^0 \Rightarrow HA' \perp (BCC'B')$.

Vì AHH'A' là hình bình hành

$\Rightarrow \widehat{AA'H} = 90^0$.

ΔCAB được vẽ lại ở hình 2.





hình 2

Trong $\Delta AA'H$ có:

$A'G^2 = GA.GH = \frac{2}{3}AH.\frac{1}{3}AH = \frac{2}{9}AH^2 \Rightarrow A'G = \frac{AH.\sqrt{2}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$;

$A'H = \sqrt{A'G^2 + GH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{12}} = \frac{a}{2}$

Thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C': $V = A'G.S_{\Delta ABC} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}$

Ta có: $CB' \subset (BCC'B')$ và $AA' // (BCC'B')$.

Suy ra $d(AA', CB') = d(AA', (BCC'B')) = d(A', (BCC'B'))$

Theo chứng minh ở trên có: $HA' \perp (BCC'B') \Rightarrow d(A', (BCC'B')) = HA'$

Kết luận: $d(AA', CB') = HA' = \frac{a}{2}$.

Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại C, BC = a, hình chiếu vuông góc của B' xuống đáy (ABC) là trung điểm của BC, góc giữa hai mặt phẳng (ABB'A') và (BCC'B') bằng 60. Cạnh bên tạo với đáy một góc 45. Tính thể tích hình lăng trụ.

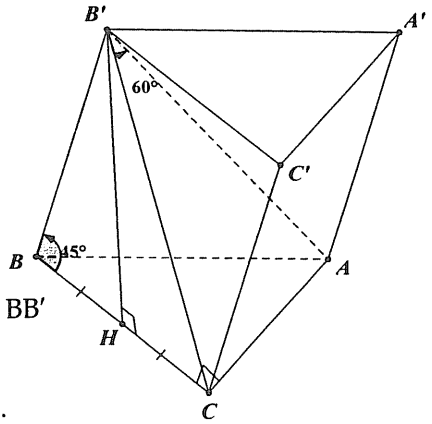
LỜI GIẢI

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B' trên mp(ABC) thì H trung điểm của BC.

Có: BH là hình chiếu vuông góc của BB' trên mp(ABC) nên:

$(\widehat{BB', (ABC)}) = \widehat{HBB'} = 45^0 \Rightarrow \Delta HBB'$ vuông cân tại H có:

$HB = HB' = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$, $BB' = HB\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Ngoài ra: trong $\Delta B'BC$ có đường trung tuyến $B'H = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \Delta B'BC$ vuông cân tại B'.

Có: $\begin{cases} AC \perp BC \\ AC \perp B'H \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BCC'B') \Rightarrow AC \perp BB'$

Vì $\begin{cases} BB' \perp B'C \\ BB' \perp AC \end{cases} \Rightarrow BB' \perp ACB' \Rightarrow BB' \perp AB'$.

Từ đó suy ra: $(\widehat{(ABB'A'), (BCC'B')}) = \widehat{AB'C} = 60^0$.

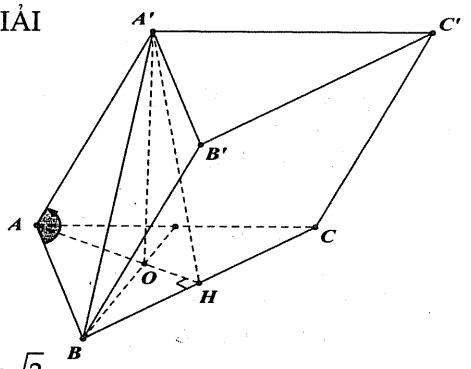
Trong $\Delta ACB'$ vuông tại C có: $AC = CB'.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C':

$$V = B'H.S_{\Delta ABC} = B'H.\frac{1}{2}.CA.CB = \frac{a}{2}.\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2}.a = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}.$$

Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' xuống mặt phẳng (ABC) là tâm O của tam giác ABC. Biết góc $\widehat{BAA'} = 45^0$. Tính thể tích khối lăng trụ và chứng minh BCC'B' là hình chữ nhật.

LỜI GIẢI



Có OA và OB lần lượt là hình chiếu vuông góc của AA' và BA'.
Vì OA = OB nên AA' = BA',

Theo đề bài: $\widehat{BAA'} = 45^0$

Từ đó $\Rightarrow \Delta ABA'$ vuông cân tại A'.

$$\Rightarrow AA' = BA' = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Tam giác ABC đều có: $AO = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong $\Delta AOA'$ có: $OA' = \sqrt{AA'^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C':

$$V = OA'.S_{\Delta ABC} = OA'.\frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}.$$

Gọi H là trung điểm của BC. Có $BC \perp AH$ và $BC \perp A'O$

$\Rightarrow BC \perp (AHA') \Rightarrow BC \perp (AHA')$.

Vì $AA' // BB' \Rightarrow BC \perp BB'$. Từ đó suy ra: BCC'B' là hình chữ nhật.

MỤC LỤC

Chương I: Đại cương hình học không gian 3
Chương II: Quan hệ song song 54
Chương III: Quan hệ vuông góc 129
Chương IV: Thể tích khối chóp, khối lăng trụ 270
Chương V: Mặt cầu hình trụ – Mặt nón 335
Chương VI: Bài tập tổng hợp lớp 12 học kỳ I 398
Chương VII: Bài tập tổng hợp luyện thi đại học 431

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại : Biên tập – Chế bản: (04) 39714896;
Hành chính: (04) 39714899; Tổng biên tập: (04) 39714897
Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc - Tổng biên tập : **TS. PHẠM THỊ TRÂM**

Biên tập	:	**LAN HƯƠNG**
Chế bản	:	**CÔNG TY KHANG VIỆT**
Trình bày bìa	:	**CÔNG TY KHANG VIỆT**

Tổng phát hành và đối tác liên kết xuất bản:

CÔNG TY TNHH MTV
DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANG VIỆT

Địa chỉ: 71 Đinh Tiên Hoàng - P.Đa Kao - Q.1 - TP.HCM
Điện thoại: 08. 39115694 - 39105797 - 39111969 - 39111968
Fax: 08. 3911 0880
Email: khangvietbookstore@yahoo.com.vn
Website: www.nhasachkhangviet.vn

SÁCH LIÊN KẾT

CHUYÊN ĐỀ TRỌNG ĐIỂM BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI
HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Mã số: 1L–125ĐH2014
Mã số ISBN: 978–604–939–452–2
In 2.000 cuốn, khổ 16×24 cm
Tại: **Cty TNHH MTV IN ẤN MAI THỊNH ĐỨC**
Địa chỉ: 71, Kha Vạn Cân, P. Hiệp Bình Chánh, Q. Thủ Đức, TP. Hồ Chí Minh
Số xuất bản: 390 – 2014/CXB/13 – 58/ĐHQGHN ngày 05/03/2014.
Quyết định xuất bản số: 117LK-TN/QĐ-NXBĐHQGHN, cấp ngày 10/03/2014
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2014