

Kỳ thi chọn ĐTQG tỉnh Đắk Lắk 2026-2027

Ngày thi thứ nhất: 22/09/2026.

Thời gian làm bài: 180 phút.

Câu 1. (5,00 điểm) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = 4 \left(\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} \right) - \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Câu 2. (5,00 điểm) Cho hàm số $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

- i) $f(p) = 1$, với mọi p nguyên tố;
- ii) $f(xy) = yf(x) + xf(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{N}^*$.

Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $n \geq 2026$ và $f(n) = n$.

Câu 3. (5,00 điểm) Cho tam giác ABC ($AB < AC$), một đường tròn (O) thay đổi luôn đi qua B, C và lần lượt cắt các đoạn thẳng AB, AC tại F, E (F khác A và B ; E khác A và C). Gọi I là giao điểm của BE và CF , đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại P .

- a) Gọi X, Y lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên AB và AC ; đường thẳng PO cắt AB và AC lần lượt tại K, L . Chứng minh rằng X, Y, K, L cùng nằm trên một đường tròn.
- b) Gọi D là giao điểm của AI và BC . Đường thẳng qua D song song với EF cắt AB, AC lần lượt tại Q và R . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR luôn đi qua một điểm cố định khi đường tròn (O) thay đổi.

Câu 4. (5,00 điểm) Một số nguyên dương $n \geq 3$ được gọi là số cân bằng nếu như tồn tại một tập hợp S gồm n số nguyên dương sao cho nếu ta bỏ đi bất kì một phần tử nào của S thì tất cả các phần tử còn lại có thể chia ra làm hai tập mà tổng các phần tử trong mỗi tập bằng nhau (số các số trong các tập có thể khác nhau).

- a) Chứng minh rằng nếu n là số cân bằng thì n lẻ và $n \geq 7$.
- b) Hãy tìm tất cả các số cân bằng.

———— HẾT ————

Kỳ thi chọn ĐTQG tỉnh Đắk Lắk 2026-2027

Ngày thi thứ hai: 23/09/2026.

Thời gian làm bài: 180 phút.

Câu 1 (5,0 điểm): Cho dãy số (x_n) xác định bởi
$$\begin{cases} x_1 = \frac{9}{8} \\ 3(n+3)^2 x_n = 3n^2 x_{n+1} - (2n+3)x_{n+1}x_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$$
 Tìm $\lim x_n$.

Câu 2 (5,0 điểm): Cho $P(x)$ là đa thức bậc n (với $n \in \mathbb{N}^*$) có hệ số cao nhất bằng 1 và có đúng n nghiệm thực phân biệt. Biết rằng tồn tại duy nhất số thực a mà

$$P(4a^2 + 4a + 2026) = 0$$

Chứng minh đa thức $P(4x^2 + 4x + 2026)$ chia hết cho đa thức $(2x+1)^2$ và $P(2026) \geq 1$.

Câu 3 (5,0 điểm): Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c, p sao cho p và $p+2$ đều là các số nguyên tố lẻ thỏa mãn:

$$2^a p^b = (p+2)^c - 1.$$

Câu 4 (5,0 điểm): Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nhọn và nội tiếp đường tròn (O) có tâm O , bán kính R . Đường thẳng vuông góc với BC tại trung điểm M của BC cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại Y và X .

- Gọi I, r' lần lượt là tâm và bán kính đường tròn đường kính XY . Chứng minh rằng $OI^2 = R^2 + r'^2$.
- Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt đường thẳng OM tại P . Qua I kẻ đường thẳng song song với AO cắt đường thẳng qua P song song với BC tại Z . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng H, M, Z thẳng hàng.

———— HẾT ————

LỜI GIẢI

Huỳnh Trần Gia Huy	–	Chuyên Toán 1 khóa 23-26, THPT chuyên Lương Văn Chánh
Nguyễn Nguyên Khôi	–	Chuyên Toán 1 khóa 23-26, THPT chuyên Lương Văn Chánh
Ngô Bảo Phong	–	Chuyên Toán khóa 23-26, THPT chuyên Nguyễn Du
Nguyễn Phan Thế Trình	–	Chuyên Toán khóa 23-26, THPT chuyên Nguyễn Du
Võ Lê Anh Khoa	–	Chuyên Toán khóa 23-26, THPT chuyên Nguyễn Du

Câu 1

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = 4 \left(\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} \right) - \frac{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

 **Lời giải.**

Ta có:
$$\frac{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$$

Ta chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} P &\leq \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow 4 \cdot \sum_{cyc} \frac{1}{2a+b+c} &\leq \frac{3}{2} + \sum_{cyc} \frac{1}{a+b} \end{aligned}$$

Đặt $x = a + b$, $y = b + c$, $z = c + a$ thì $x, y, z > 0$; $x + y + z = 6$ và ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} 4 \cdot \sum_{cyc} \frac{1}{x+y} &\leq \frac{3}{2} + \sum_{cyc} \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{1}{x} - \frac{3}{2} &\leq \sum_{cyc} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{4}{x+y} \right) \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{1}{x} - \frac{3}{2} &\leq \sum_{cyc} \frac{(x-y)^2}{xy \cdot (x+y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Thật vậy ta có: } \sum_{cyc} \frac{1}{x} - \frac{3}{2} &= \frac{xy + yz + zx}{xyz} - \frac{3}{2} = \frac{(x+y+z)(xy+yz+zx)}{6xyz} - \frac{3}{2} \\ &= \frac{(x+y+z)(xy+yz+zx) - 9xyz}{6xyz} \\ &= \frac{(x^2y + y^2z + z^2x) + (xy^2 + yz^2 + zx^2) - 6xyz}{6xyz} \\ &= \frac{x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2}{6xyz} \\ &= \frac{(x-y)^2}{6xy} + \frac{(y-z)^2}{6yz} + \frac{(z-x)^2}{6zx} \end{aligned}$$

Mà $x + y + z = 6$ nên $6 > \max\{x + y; y + z; z + x\}$

Cho nên:

$$\frac{(x-y)^2}{6xy} + \frac{(y-z)^2}{6yz} + \frac{(z-x)^2}{6zx} \leq \frac{(x-y)^2}{xy(x+y)} + \frac{(y-z)^2}{yz(y+z)} + \frac{(z-x)^2}{zx(z+x)} \quad (\text{đpcm})$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 2 \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Vậy GTLN của P là $\frac{3}{2}$.

Câu 2

Cho hàm số $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

- i) $f(p) = 1$, với mọi p nguyên tố;
- ii) $f(xy) = yf(x) + xf(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{N}^*$.

Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $n \geq 2026$ và $f(n) = n$.



Lời giải.

Trong đẳng thức (ii), chọn $x = y = 1$, ta thu được:

$$f(1) = 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(1) = 2f(1) \implies f(1) = 0$$

Với mọi $x, y \in \mathbb{N}^*$, chia cả hai vế của (ii) cho xy , ta có:

$$\frac{f(xy)}{xy} = \frac{f(x)}{x} + \frac{f(y)}{y}$$

Xét hàm số $g : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$ xác định bởi $g(n) = \frac{f(n)}{n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Ta thu được:

$$g(xy) = g(x) + g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{N}^* \quad (*)$$

Từ điều kiện (i), với mọi số nguyên tố p , ta có:

$$g(p) = \frac{f(p)}{p} = \frac{1}{p}$$

Giả sử số nguyên dương $n > 1$ có dạng phân tích tiêu chuẩn ra thừa số nguyên tố là:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

trong đó $k \geq 1$, các số nguyên tố $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ và các số mũ $\alpha_i \in \mathbb{N}^*, \forall i = \overline{1, n}$. Từ (*) ta suy ra:

$$g(n) = \sum_{i=1}^k \alpha_i g(p_i) = \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{p_i}$$

Do đó, biểu thức của $f(n)$ là:

$$f(n) = n \cdot g(n) = n \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{p_i}$$

Vì $n \geq 2026 > 0$, điều kiện $f(n) = n$ tương đương với:

$$g(n) = 1 \iff \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{p_i} = 1 \quad (*)$$

Ta xét các trường hợp sau

Trường hợp 1: $k \geq 2$.

Quy đồng mẫu số đẳng thức (*) bằng cách nhân cả hai vế với tích $P = \prod_{j=1}^k p_j$:

$$\prod_{j=1}^k p_j = \sum_{i=1}^k \left(\alpha_i \prod_{j \neq i} p_j \right)$$

Xét một chỉ số $m \in \{1, 2, \dots, k\}$ bất kỳ. Ta xét đồng dư modulo p_m :

$$\prod_{j=1}^k p_j \equiv 0 \pmod{p_m}$$

Ở vế phải, với mọi $i \neq m$, tích $\prod_{j \neq i} p_j$ luôn chứa thừa số p_m , dẫn tới:

$$\alpha_i \prod_{j \neq i} p_j \equiv 0 \pmod{p_m}, \quad \forall i \neq m$$

Do đó, số hạng ứng với $i = m$ phải thỏa mãn:

$$\alpha_m \prod_{j \neq m} p_j \equiv 0 \pmod{p_m} \implies p_m \mid \left(\alpha_m \prod_{j \neq m} p_j \right)$$

Vì các số nguyên tố đôi một phân biệt nên $\gcd \left(p_m, \prod_{j \neq m} p_j \right) = 1$. Suy ra:

$$p_m \mid \alpha_m$$

Do $\alpha_m \in \mathbb{N}^*$, ta có $\alpha_m \geq p_m$. Đánh giá này đúng với mọi $m \in \{1, 2, \dots, k\}$, kéo theo:

$$1 = \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{p_i} \geq \sum_{i=1}^k \frac{p_i}{p_i} = \sum_{i=1}^k 1 = k \geq 2$$

Điều này dẫn đến $1 \geq 2$ (mâu thuẫn). Do đó, trường hợp $k \geq 2$ không tồn tại nghiệm.

Trường hợp 2: $k = 1$.

Khi đó $n = p_1^{\alpha_1}$. Đẳng thức (*) trở thành:

$$\frac{\alpha_1}{p_1} = 1 \implies \alpha_1 = p_1$$

Như vậy, n có dạng $n = p^p$ với p là một số nguyên tố.

Xét các số nguyên tố p theo thứ tự tăng dần:

○ Với $p = 2 \implies n = 2^2 = 4 < 2026$ (loại).

- Với $p = 3 \implies n = 3^3 = 27 < 2026$ (loại).
- Với $p = 5 \implies n = 5^5 = 3125 \geq 2026$ (thỏa mãn).
- Với các số nguyên tố $p \geq 7 \implies n = p^p \geq 7^7 = 823543 > 3125$.

Vậy số tự nhiên nhỏ nhất thỏa mãn đề bài là:

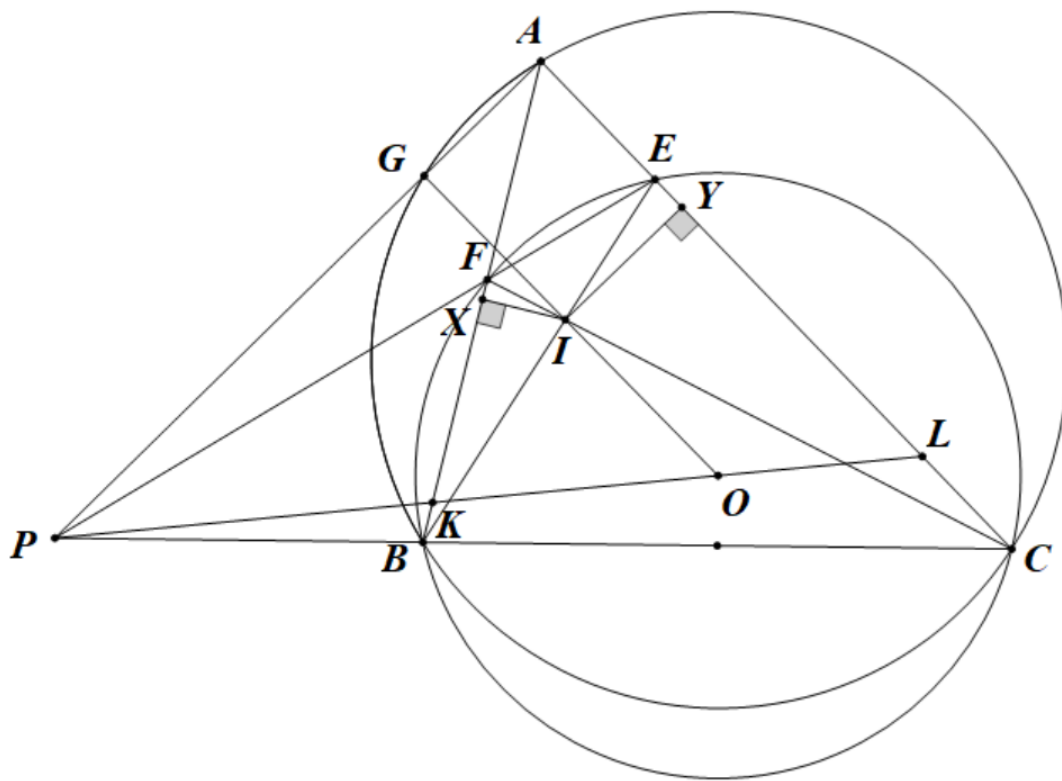
$$\mathbf{n = 3125}$$

Câu 3

Cho tam giác ABC ($AB < AC$), một đường tròn (O) thay đổi luôn đi qua B, C và lần lượt cắt các đoạn thẳng AB, AC tại F, E (F khác A và B ; E khác A và C). Gọi I là giao điểm của BE và CF , đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại P .

- Gọi X, Y lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên AB và AC ; đường thẳng PO cắt AB và AC lần lượt tại K, L . Chứng minh rằng X, Y, K, L cùng nằm trên một đường tròn.
- Gọi D là giao điểm của AI và BC . Đường thẳng qua D song song với EF cắt AB, AC lần lượt tại Q và R . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR luôn đi qua một điểm cố định khi đường tròn (O) thay đổi.

 **Lời giải.**



a)

Lời giải 1:

Gọi G là Miquel của tứ giác toàn phần $BCEF.PA$.

Có $\widehat{AGI} = 90^\circ$, $AI \perp PO$ (theo định lý Brocard).

Khi đó ta có $GXYA$ nội tiếp đường tròn đường kính AI .

Xét trục đẳng phương của (AFE) , (O) , (ABC) ta có A, G, P thẳng hàng

Ta có: $\widehat{APK} = \widehat{APO} = \widehat{AIG} = \widehat{AXG}$ nên tứ giác $GPKX$ nội tiếp.

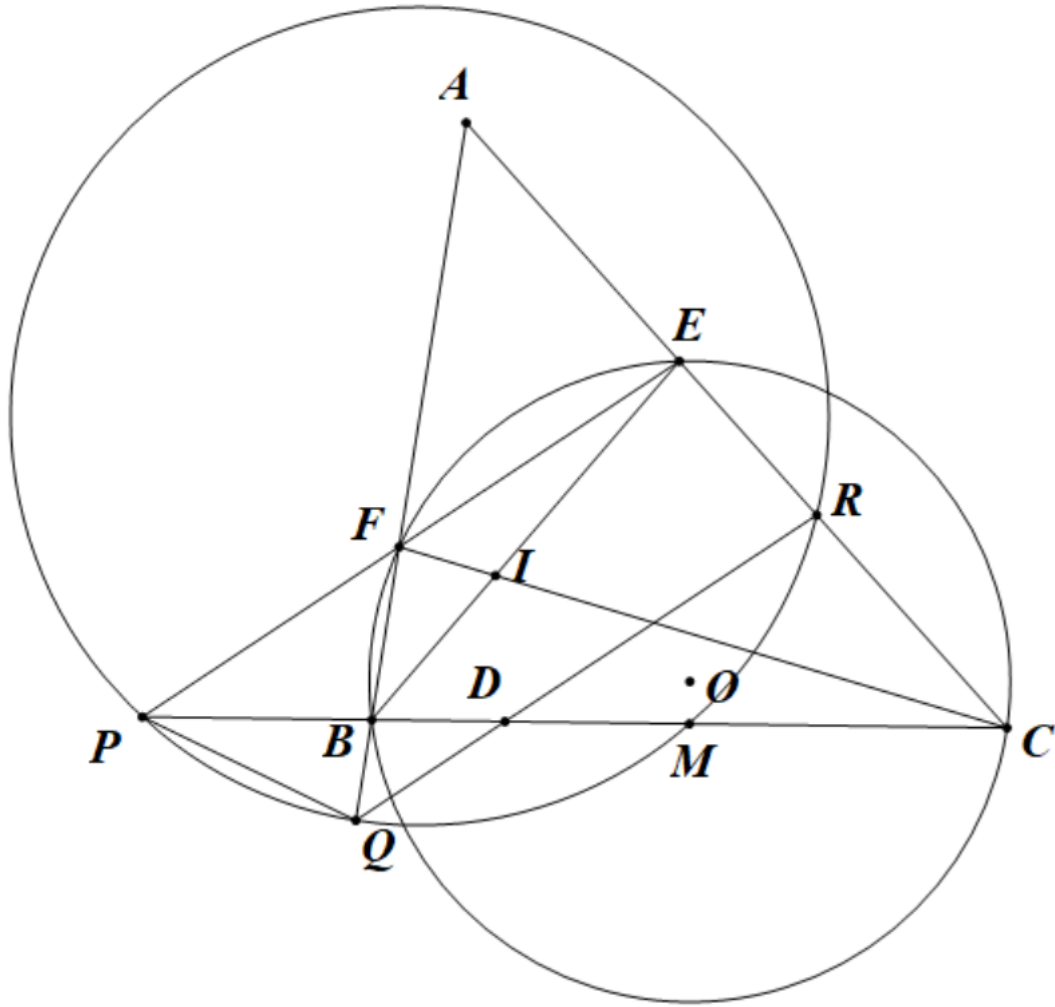
Ta có $\widehat{AYX} = \widehat{XGP} = \widehat{XKL}$ nên X, Y, K, L cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải 2:

Theo định lý Brocard ta có $AI \perp PO$ nên suy ra $\widehat{AKL} = \widehat{AIX} = \widehat{AYX}$

Do đó X, Y, K, L cùng nằm trên một đường tròn.

b)



Gọi M là trung điểm BC . Ta có $\widehat{AQR} = \widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ nên $QBRC$ nội tiếp.

Mặt khác ta có $(PDBC) = -1$ nên $\overline{DP} \cdot \overline{DM} = \overline{DB} \cdot \overline{DC} = \overline{DQ} \cdot \overline{DR}$.

Do đó $PQMR$ nội tiếp nên (PQR) đi qua điểm M cố định.

Câu 4

Một số nguyên dương $n \geq 3$ được gọi là số cân bằng nếu như tồn tại một tập hợp S gồm n số nguyên dương sao cho nếu ta bỏ đi bất kì một phần tử nào của S thì tất cả các phần tử còn lại có thể chia ra làm hai tập mà tổng các phần tử trong mỗi tập bằng nhau (số các số trong các tập có thể khác nhau).

- Chứng minh rằng nếu n là số cân bằng thì n lẻ và $n \geq 7$.
- Hãy tìm tất cả các số cân bằng.

 Lời giải.

a) Giả sử n là một số cân bằng. Khi đó tồn tại tập hợp $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^*$ gồm n phần tử phân biệt thỏa mãn điều kiện bài toán.

• **Chứng minh n là số lẻ:**

Đặt $d = \gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq 1$ và xét tập hợp $S' = \left\{ \frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, \dots, \frac{a_n}{d} \right\} = \{a'_1, a'_2, \dots, a'_n\}$.

Rõ ràng S' cũng là một tập hợp thỏa mãn tính chất cân bằng và $\gcd(a'_1, a'_2, \dots, a'_n) = 1$.
Đặt $T = \sum_{x \in S'} x$. Theo giả thiết, với mỗi phần tử $x \in S'$, tập hợp $S' \setminus \{x\}$ có thể phân hoạch thành hai tập con có tổng các phần tử bằng nhau, do đó tổng các phần tử của $S' \setminus \{x\}$ phải là một số chẵn:

$$T - x \equiv 0 \pmod{2} \implies x \equiv T \pmod{2}, \quad \forall x \in S'$$

Điều này chỉ ra rằng tất cả các phần tử của S' đều có cùng tính chẵn lẻ.

Do $\gcd(a'_1, a'_2, \dots, a'_n) = 1$, các phần tử của S' không thể cùng là số chẵn. Vì vậy, mọi phần tử của S' đều là số lẻ, tức là:

$$x \equiv 1 \pmod{2}, \quad \forall x \in S'$$

Từ đó suy ra:

$$T = \sum_{x \in S'} x \equiv n \cdot 1 \equiv n \pmod{2}$$

Mặt khác, ta đã có $T \equiv x \equiv 1 \pmod{2}$. Do đó:

$$n \equiv 1 \pmod{2}$$

hay n bắt buộc phải là số lẻ.

• **Chứng minh $n \geq 7$:**

Vì $n \geq 3$ và n lẻ, ta chỉ cần chứng minh $n \neq 3$ và $n \neq 5$ bằng phương pháp phản chứng. Giả sử các phần tử của S được sắp thứ tự tăng dần: $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

- Nếu $n = 3$: Loại bỏ phần tử a_3 , hai phần tử còn lại là a_1, a_2 . Để chia thành hai tập có tổng bằng nhau thì bắt buộc $a_1 = a_2$, mâu thuẫn với giả thiết các phần tử của tập hợp S đôi một phân biệt. Vậy $n \neq 3$.

- Nếu $n = 5$: Giả sử tồn tại tập hợp $S = \{a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5\} \subset \mathbb{N}^*$ thỏa mãn. Với bốn số nguyên dương bất kỳ $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, để phân hoạch chúng thành hai tập có tổng bằng nhau, ta chỉ có hai dạng phân hoạch có thể xảy ra:
(1) Dạng $(2, 2)$: Vì $x_4 + x_3 > x_2 + x_1$ và $x_4 + x_2 > x_3 + x_1$, đẳng thức duy nhất có thể xảy ra là:

$$x_4 + x_1 = x_2 + x_3$$

- (2) Dạng $(1, 3)$: Vì phần tử đơn lẻ phải là phần tử lớn nhất x_4 , đẳng thức duy nhất có thể xảy ra là:

$$x_4 = x_1 + x_2 + x_3$$

Bây giờ, ta xét hai trường hợp loại bỏ phần tử:

- Khi loại bỏ a_1 , bốn phần tử còn lại là $a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. Theo nhận xét trên, ta chỉ có thể có:

$$\begin{cases} a_5 + a_2 = a_3 + a_4 & (\text{dạng } 2 - 2) \\ a_5 = a_2 + a_3 + a_4 & (\text{dạng } 1 - 3) \end{cases}$$

- Khi loại bỏ a_2 , bốn phần tử còn lại là $a_1 < a_3 < a_4 < a_5$. Tương tự, ta chỉ có thể có:

$$\begin{cases} a_5 + a_1 = a_3 + a_4 & (\text{dạng } 2 - 2) \\ a_5 = a_1 + a_3 + a_4 & (\text{dạng } 1 - 3) \end{cases}$$

Kết hợp các khả năng:

- Nếu cả hai đều thuộc dạng $(2, 2)$: Ta có $a_5 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_1 \implies a_1 = a_2$ (mâu thuẫn).
- Nếu loại a_1 ra dạng $(2, 2)$ và loại a_2 ra dạng $(1, 3)$: Ta có $a_5 + a_2 = a_3 + a_4$ và $a_5 = a_1 + a_3 + a_4$. Thay a_5 vào đẳng thức trước được $(a_1 + a_3 + a_4) + a_2 = a_3 + a_4 \implies a_1 + a_2 = 0$ (vô lý vì $a_1, a_2 \in \mathbb{N}^*$).
- Nếu loại a_1 ra dạng $(1, 3)$ và loại a_2 ra dạng $(2, 2)$: Ta có $a_5 = a_2 + a_3 + a_4$ và $a_5 + a_1 = a_3 + a_4 \implies (a_2 + a_3 + a_4) + a_1 = a_3 + a_4 \implies a_1 + a_2 = 0$ (vô lý).
- Nếu cả hai đều thuộc dạng $(1, 3)$: Ta có $a_5 = a_2 + a_3 + a_4 = a_1 + a_3 + a_4 \implies a_1 = a_2$ (mâu thuẫn).

Như vậy trong mọi khả năng đều dẫn tới mâu thuẫn, suy ra $n \neq 5$.

Từ các lập luận trên, ta kết luận: n lẻ và $n \geq 7$.

b) Ta sẽ chứng minh mọi số nguyên lẻ $n \geq 7$ đều là số cân bằng.

Xét tập hợp gồm n số lẻ liên tiếp đầu tiên:

$$S = \{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}$$

Tổng của tất cả các phần tử trong S là $T = \sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$.

Với mỗi phần tử bị loại bỏ $x = 2k - 1 \in S$ ($1 \leq k \leq n$), tổng của các phần tử còn lại trong $S \setminus \{x\}$ là:

$$T - x = n^2 - (2k - 1)$$

là một số chẵn. Ta cần chỉ ra sự tồn tại của một tập con $A \subset S \setminus \{x\}$ sao cho tổng các phần tử của A bằng:

$$T_k = \frac{n^2 - (2k - 1)}{2} = \frac{n^2 + 1}{2} - k$$

• Trường hợp cơ sở $n = 7$: Khi đó $S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ và $T = 49$. Với từng phần tử x bị loại, ta có các phân hoạch cụ thể như sau:

- Bỏ $x = 1$: $T_1 = 24$. Ta chọn hai tập $\{11, 13\}$ và $\{3, 5, 7, 9\}$ (tổng cùng bằng 24).
- Bỏ $x = 3$: $T_2 = 23$. Ta chọn hai tập $\{1, 9, 13\}$ và $\{5, 7, 11\}$ (tổng cùng bằng 23).
- Bỏ $x = 5$: $T_3 = 22$. Ta chọn hai tập $\{9, 13\}$ và $\{1, 3, 7, 11\}$ (tổng cùng bằng 22).
- Bỏ $x = 7$: $T_4 = 21$. Ta chọn hai tập $\{3, 5, 13\}$ và $\{1, 9, 11\}$ (tổng cùng bằng 21).
- Bỏ $x = 9$: $T_5 = 20$. Ta chọn hai tập $\{7, 13\}$ và $\{1, 3, 5, 11\}$ (tổng cùng bằng 20).
- Bỏ $x = 11$: $T_6 = 19$. Ta chọn hai tập $\{1, 5, 13\}$ và $\{3, 7, 9\}$ (tổng cùng bằng 19).
- Bỏ $x = 13$: $T_7 = 18$. Ta chọn hai tập $\{7, 11\}$ và $\{1, 3, 5, 9\}$ (tổng cùng bằng 18).

Như vậy, $n = 7$ là một số cân bằng.

• Trường hợp tổng quát với mọi số lẻ $n \geq 7$:

Đặt $n = 2m + 1$ với $m \geq 3$ ($m \in \mathbb{N}$). Khi đó $S = \{1, 3, 5, \dots, 4m + 1\}$ có tổng $T = (2m + 1)^2$. Mục tiêu là tìm tập con $A \subset S \setminus \{x\}$ có tổng bằng T_k . Chú ý rằng:

$$\frac{(n - 1)^2}{2} = 2m^2 \leq T_k \leq 2m^2 + 2m = \frac{n^2 - 1}{2}$$

Xét các tập con gồm m phần tử của $S \setminus \{x\}$.

- Tổng nhỏ nhất của một tập con gồm m phần tử lấy từ $S \setminus \{x\}$ đạt giá trị lớn nhất khi $x \in \{1, 3, \dots, 2m - 1\}$, và tổng này không vượt quá:

$$\sum_{i=1}^{m+1} (2i - 1) - 1 = (m + 1)^2 - 1 = m^2 + 2m$$

Với mọi $m \geq 3$, ta luôn có $m^2 + 2m \leq 2m^2 \leq T_k$ (do $m^2 - 2m = m(m - 2) > 0$).

- Tổng lớn nhất của một tập con gồm m phần tử lấy từ $S \setminus \{x\}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x \in \{4m + 3 - 2m, \dots, 4m + 1\}$, và tổng này không nhỏ hơn:

$$\sum_{i=m+1}^{2m+1} (2i - 1) - (4m + 1) = (2m + 1)^2 - m^2 - (4m + 1) = 3m^2$$

Với mọi $m \geq 3$, ta luôn có $3m^2 \geq 2m^2 + 2m \geq T_k$ (do $m^2 - 2m = m(m - 2) > 0$).

Do tập hợp $S \setminus \{x\}$ gồm các số lẻ có bước nhảy liên tiếp bằng 2 (hoặc một bước nhảy bằng 4 tại vị trí bỏ x), quá trình biến đổi liên tục từ tập con m phần tử có tổng nhỏ nhất sang tập con có tổng lớn nhất bằng cách thay thế từng phần tử bởi phần tử kế tiếp trong $S \setminus \{x\}$ sẽ quét qua tất cả các giá trị nguyên có cùng tính chẵn lẻ với m trong đoạn $[m^2 + 2m, 3m^2]$.

Nếu $T_k \not\equiv m \pmod{2}$, ta hoàn toàn tương tự xét họ các tập con gồm $m + 1$ phần tử; khoảng giá trị tổng của chúng cũng bao phủ hoàn toàn giá trị T_k . Do đó, luôn luôn tồn tại tập con $A \subset S \setminus \{x\}$ có tổng đúng bằng T_k .

Kết luận: Tập hợp tất cả các số cân bằng là toàn bộ các số nguyên lẻ $n \geq 7$.

Câu 5

Cho dãy số (x_n) xác định bởi
$$\begin{cases} x_1 = \frac{9}{8} \\ 3(n+3)^2 x_n = 3n^2 x_{n+1} - (2n+3)x_{n+1}x_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

 Tìm $\lim x_n$.

 Lời giải.

Ta có: $9(n+3)^2 x_n = 9n^2 x_{n+1} - (6n+9)x_{n+1}x_n = 9n^2 x_{n+1} - ((n+3)^2 - n^2)x_{n+1}x_n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$
 $\Leftrightarrow (n+3)^2 x_n \cdot (x_{n+1} + 9) = n^2 \cdot x_{n+1} (x_n + 9), \forall n \in \mathbb{Z}^+.$

Rõ ràng $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Do đó: $\frac{x_{n+1} + 9}{x_{n+1}} = \left(\frac{n}{n+3}\right)^2 \cdot \frac{x_n + 9}{x_n}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Nên ta có được $\frac{x_{n+1} + 9}{x_{n+1}} = \prod_{k=1}^n \left(\frac{k}{k+3}\right)^2 \cdot \frac{x_1 + 9}{x_1} = 9 \cdot \left(\prod_{k=1}^n \frac{k}{k+3}\right)^2, \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Ta có bất đẳng thức phụ: $\frac{1}{x-1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$ với mọi $x > 0$.

Khi đó: $\ln\left(\prod_{k=1}^n \frac{k+3}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{3}{k}\right) > \sum_{k=1}^n \frac{3}{k+3}, \forall n \in \mathbb{Z}^+.$

Cho $n \rightarrow +\infty$ ta thu được $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\prod_{k=1}^n \frac{k+3}{k}\right) = +\infty$

Nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{k+3}{k} = +\infty$, kéo theo $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+3} = 0$.

Từ đó ta thu được $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{9}{x_n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 9 \cdot \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+3}\right)^2 = 0$.

Vì vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -9$

Câu 6

Cho $P(x)$ là đa thức bậc n (với $n \in \mathbb{N}^*$) có hệ số cao nhất bằng 1 và có đúng n nghiệm thực phân biệt. Biết rằng tồn tại duy nhất số thực a mà

$$P(4a^2 + 4a + 2026) = 0$$

Chứng minh đa thức $P(4x^2 + 4x + 2026)$ chia hết cho đa thức $(2x + 1)^2$ và $P(2026) \geq 1$.

 Lời giải.

Giả sử n nghiệm thực phân biệt của đa thức $P(x)$ là $x_1, x_2, \dots, x_n$. Không mất tính tổng quát, ta có thể sắp thứ tự:

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

Do $P(x)$ có bậc n và hệ số của số hạng bậc cao nhất bằng 1 nên ta có:

$$P(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

Xét hàm số $f(x) = 4x^2 + 4x + 2026$ xác định trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó: } P(f(x)) = \prod_{i=1}^n (4x^2 + 4x + 2026 - x_i)$$

Với mỗi tam thức bậc hai $4x^2 + 4x + 2026 - x_i$ ta xét delta

$$\Delta_i = 4^2 - 4^2 \cdot (2026 - x_i) = 16 \cdot (x_i - 2025), \forall i = \overline{1, n}$$

Theo giả thiết $P(f(x))$ có duy nhất một nghiệm thực cho nên tồn tại $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho

$$\begin{cases} \Delta_k = 0 \\ \Delta_j < 0, \forall j \neq k \end{cases}$$

Vì vậy $x_k = 2025$ và $x_j < 2025, \forall j \neq k$

Mà $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ nên $k = n$.

Chứng minh $P(f(x))$ chia hết cho $(2x + 1)^2$.

$$\text{Ta có: } P(f(x)) = (f(x) - 2025) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (f(x) - x_i) = (2x + 1)^2 \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (f(x) - x_i).$$

Vì vậy $P(f(x))$ chia hết cho $(2x + 1)^2$.

Chứng minh $P(2026) \geq 1$.

- Nếu $n = 1$, đa thức có dạng $P(x) = x - 2025$. Khi đó:

$$P(2026) = 2026 - 2025 = 1 \geq 1$$

- Nếu $n \geq 2$, do $x_i < 2025$ với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$, suy ra:

$$P(2026) = (2026 - 2025) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (2026 - x_i) > 1$$

Vì vậy ta luôn có $P(2026) \geq 1$.

Bài toán được chứng minh hoàn tất.

Câu 7

Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c, p sao cho p và $p + 2$ đều là các số nguyên tố lẻ thỏa mãn:

$$2^a p^b = (p + 2)^c - 1.$$



Trường hợp 1: $p \equiv 1 \pmod{3}$

Khi đó: $3 \mid p + 2$, vì $p + 2$ là số nguyên tố nên $p + 2 = 3$.

Do đó: $p = 1$ (Vô lí).

Trường hợp 2: $p \equiv 2 \pmod{3}$

Ta có: $2^a p^b = (p + 2)^c - 1 \equiv (2 + 2)^c - 1 \equiv 0 \pmod{3}$

Cho nên $3 \mid 2^a p^b$ (Vô lí)

Trường hợp 3: $p \equiv 0 \pmod{3}$, tức là $p = 3$

Thay $p = 3$ vào phương trình thu được

$$2^a \cdot 3^b = 5^c - 1$$

Vì $3 \mid 5^c - 1$ nên ta có c là số chẵn.

Đặt $c = 2k$ với k là số nguyên dương.

Áp dụng định lí LTE:

$$v_2(5^c - 1) = v_2(5^2 - 1) + v_2(c) - 1 = v_2(c) + 2 = v_3(k) + 3$$

Do đó: $a = v_2(k) + 3$.

Lại có:

$$v_3(5^c - 1) = v_3(25^k - 1) = v_3(25 - 1) + v_3(k) = v_3(k) + 1$$

Nên $b = v_3(k) + 1$

Vì vậy ta thu được $a \leq \log_2(k) + 3$ và $b \leq \log_3(k) + 1$.

Khi đó: $25^k - 1 = 2^a \cdot 3^b \leq 2^{\log_2(k) + 3} \cdot 3^{\log_3(k) + 1} = 24k^2$.

Dễ dàng quy nạp được $25^t - 1 \geq 24t^2$, với mọi số nguyên dương $t \geq 1$.

Do đó ta thu được $k = 1$, kéo theo $c = 2$, $a = 3$, $b = 1$.

Thử lại ta thấy $(a; b; c; p) = (3; 1; 2; 3)$ thỏa.

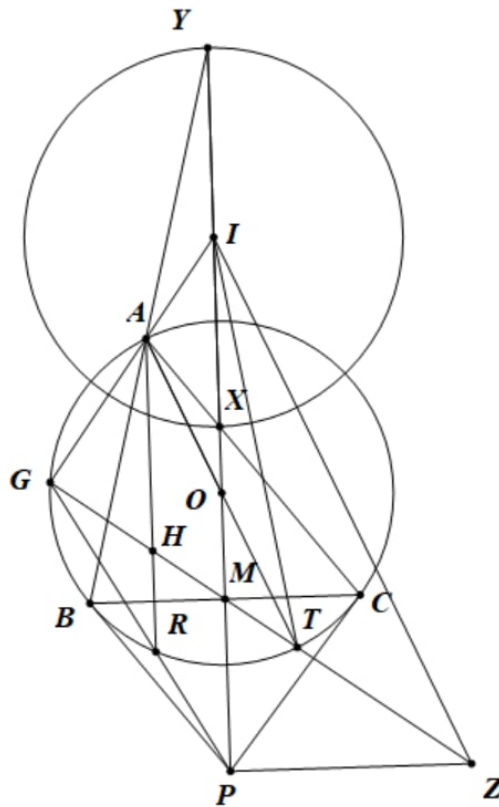
Vậy $(a; b; c; p) = (3; 1; 2; 3)$

Câu 8

Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nhọn và nội tiếp đường tròn (O) có tâm O , bán kính R . Đường thẳng vuông góc với BC tại trung điểm M của BC cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại Y và X .

- Gọi I, r' lần lượt là tâm và bán kính đường tròn đường kính XY . Chứng minh rằng $OI^2 = R^2 + r'^2$.
- Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt đường thẳng OM tại P . Qua I kẻ đường thẳng song song với AO cắt đường thẳng qua P song song với BC tại Z . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Chứng minh rằng H, M, Z thẳng hàng.

 **Lời giải.**



a)

Ta có : $\widehat{XYA} = 90^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{OAX}$.

Do đó: $\triangle OAX \sim \triangle OYA$ (g-g).

Dẫn tới: $OA^2 = OX \cdot OY = \mathcal{P}_{O/(I)} = OI^2 - (r')^2$.

Vì vậy ta thu được $OI^2 = R^2 + (r')^2$.

b)

Kẻ đường kính AT của (O) . Gọi G là giao của HT với (O) .

Gọi AH giao (O) tại R

Cho đường thẳng qua P song song với BC cắt HT tại Z' .

Ta sẽ chứng minh $Z' \equiv Z$:

Gọi G' là giao của IA với (O) .

Ta có $A(RIXY) = -1$ chiếu lên (O) ta được $(RG'BC) = -1$ (1).

Mặt khác: $A(GHBC) = -1$ chiếu lên (O) ta được $(RGBC) = -1$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $G' \equiv G$ hay I, G, A thẳng hàng.

Cũng từ (2) ta có $RBGC$ là tứ giác điều hoà nên P, R, G thẳng hàng.

Để ý là R, T đối xứng nhau qua trung trực của BC kết hợp với $PZ' \parallel BC$ nên

$P(Z'MTR) = -1$ chiếu lên HM ta được $(Z'MTG) = -1$.

Xét $I(Z'MTG) = I(Z'OTA) = -1$ do đó $IZ' \parallel AO$.

Tóm lại $IZ' \parallel AO$ và $PZ' \parallel BC$ nên $Z' \equiv Z$ có nghĩa là Z nằm trên HM (đpcm)