

CHỦ ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC SƠ CẤP

I. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

☑ Loại 1: Phương trình $\sin x = m$

▪ Nếu $|m| > 1 \longrightarrow$ phương trình vô nghiệm, vì $-1 \leq \sin x \leq 1$ với mọi x .

▪ Nếu $|m| \leq 1 \longrightarrow$ phương trình có nghiệm

- Với m đẹp, cụ thể $m \in \left\{0; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1\right\}$

Khi đó $\sin x = m \Leftrightarrow \sin x = \sin a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

- Với m không đẹp, cụ thể $m \notin \left\{0; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1\right\}$.

Khi đó $\sin x = m \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin m + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

☑ Loại 2: Phương trình $\cos x = m$

▪ Nếu $|m| > 1 \longrightarrow$ phương trình vô nghiệm, vì $-1 \leq \cos x \leq 1$ với mọi x .

▪ Nếu $|m| \leq 1 \longrightarrow$ phương trình có nghiệm

- Với m đẹp, cụ thể $m \in \left\{0; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1\right\}$.

Khi đó $\cos x = m \Leftrightarrow \cos x = \cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

- Với m không đẹp, cụ thể $m \notin \left\{0; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm 1\right\}$

Khi đó $\cos x = m \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos m + k2\pi \\ x = -\arccos m + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

☑ Loại 3: Phương trình $\tan x = m$

▪ Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

▪ Nếu $m \in \left\{0; \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \pm 1; \pm \sqrt{3}\right\}$. Khi đó $\tan x = m \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

▪ Nếu $m \notin \left\{0; \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \pm 1; \pm \sqrt{3}\right\}$. Khi đó $\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

☑ Loại 4: Phương trình $\cot x = m$

▪ Điều kiện: $x \neq \pi + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

▪ Nếu $m \in \left\{0; \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \pm 1; \pm \sqrt{3}\right\}$. Khi đó $\cot x = m \Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

▪ Nếu $m \notin \left\{0; \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \pm 1; \pm \sqrt{3}\right\}$. Khi đó $\cot x = m \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} m + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

II. HỆ THỐNG VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau

a) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0$

c) $2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} = 0$

d) $\cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Lời giải:

a) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

b) $PT \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

c) $PT \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

d) $\cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ -x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau

a) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

b) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{5} - x\right) = -1$

d) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

Lời giải:

a) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

b) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 4x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

$$c) \cos\left(\frac{\pi}{5} - x\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{5} - x = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{5} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$d) \cos\left(\frac{\pi}{5} - x\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{5} - x = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{4\pi}{5} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau

$$a) \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$b) \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = -1$$

$$c) \sin(3x+1) = \frac{1}{2}$$

$$d) \cos(x-15^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Lời giải:

$$a) \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + k4\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$b) \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$c) \sin(3x+1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 3x+1 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} - \frac{1}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$d) \cos(x-15^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-15^\circ = 45^\circ + k.360^\circ \\ x-15^\circ = -45^\circ + k.360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60^\circ + k.360^\circ \\ x = -30^\circ + k.360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau

$$a) \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b) \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -\frac{1}{2}$$

$$c) \tan(2x-1) = \sqrt{3}$$

$$d) \cot(3x+10^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Lời giải:

$$a) \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k4\pi \\ x = \frac{10\pi}{3} + k4\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$b) \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6} - 2x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{\pi}{6} - 2x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$c) \tan(2x-1) = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x-1 = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$$

$$d) \cot(3x+10^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 3x+10^\circ = 60^\circ + k.180^\circ \Leftrightarrow x = \left(\frac{50}{3}\right)^\circ + k60^\circ (k \in \mathbb{Z})$$

Ví dụ 5. Giải các phương trình sau

a) $\sin(3x+1) = \sin(x-2)$

b) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

c) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

d) $\sin(x - 120^\circ) + \cos 2x = 0$

Lời giải:

a) $\sin(3x+1) = \sin(x-2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 = x-2+k2\pi \\ 3x+1 = \pi - x - 2 + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2}k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

b) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{6} = x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{6} = -x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{18} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

c) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = -x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

d) $\sin(x - 120^\circ) + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin(x - 120^\circ) = \cos(-2x) \Leftrightarrow \sin(x - 120^\circ) = \sin(-2x + 90^\circ)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 120^\circ = -2x + 90^\circ + k.360^\circ \\ x - 120^\circ = 2x + 90^\circ + k.360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 70^\circ + k.180^\circ \\ x = -210^\circ + k.360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

Ví dụ 6. Giải các phương trình sau

a) $\tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cot\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

b) $\tan(x^2 + 2x + 3) = \tan 2$

c) $|\cos x| = \frac{1}{2}$

d) $\sin^2 x = \frac{1}{2}$

Lời giải:

a) $PT \Leftrightarrow \tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} - 2x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{60} + \frac{k\pi}{5}, (k \in \mathbb{Z})$

b) $PT \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 = 2 + k\pi \Leftrightarrow (x+1)^2 = k\pi \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{k\pi} - 1, (k \in \mathbb{Z}^*)$.

c) $PT \Leftrightarrow |\cos x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

d) Ta có $\sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

Ví dụ 7. Giải các phương trình sau

a) $\frac{\sqrt{3} \cos x - 2}{2 \sin x - 1} = 0$

b) $\frac{\sqrt{3} \tan x - 1}{2 \cos x + \sqrt{3}} = 0$

Lời giải:

a) Phương trình tương đương với $\frac{\sqrt{3} \cos x - 2}{2 \sin x - 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{2}{\sqrt{3}} > 1 \\ \sin x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$

b) Phương trình tương đương với $\frac{\sqrt{3} \tan x - 1}{2 \cos x + \sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos x \notin \left\{0; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Ví dụ 8. Giải các phương trình sau

a) $\frac{\sqrt{3} - \cot x}{2 \sin 2x + \sqrt{3}} = 0$

b) $\frac{4 \cos^2 x + 2 \sin x - 5}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$

Lời giải:

a) PT tương đương với $\frac{\sqrt{3} - \cot x}{2 \sin 2x + \sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cot x = \sqrt{3} \\ \sin 2x \notin \left\{0; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

b) PT tương đương với $\frac{4 \cos^2 x + 2 \sin x - 5}{\tan x + \sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow \frac{4 - 4 \sin^2 x + 2 \sin x - 5}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0 \\ \tan x \neq -\sqrt{3}; \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \sin^2 x + (\sin x - 1)2 = 0 \\ \tan x \neq -\sqrt{3}; \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$

Ví dụ 9. Giải các phương trình sau

a) $\frac{2 \sin 2x - 1}{\tan x + 1} = 0$

b) $\frac{2 \tan^2 x - \sqrt{3} \tan x - 3}{2 \cos x - 1} = 0$

Lời giải:

a) PT tương đương $\frac{2 \sin 2x - 1}{\tan x + 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = \frac{1}{2} \\ \tan x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

b) PT tương đương $\begin{cases} (\tan x - \sqrt{3})(2 \tan x + \sqrt{3}) = 0 \\ \cos x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k\pi \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}$

Ví dụ 10. Giải các phương trình sau

$$\text{a) } \frac{\sqrt{3} + 2 \cos 2x}{1 - \sqrt{2} \sin 3x} = 0$$

$$\text{b) } \frac{2 \cos 2x + 1}{\sqrt{3} - \tan x} = 0$$

Lời giải:

a) Phương trình đã cho tương đương

$$\frac{\sqrt{3} + 2 \cos 2x}{1 - \sqrt{2} \sin 3x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 3x \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{5\pi}{12} + k\pi \\ \sin 3x \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{b) Phương trình tương đương } \frac{2 \cos 2x + 1}{\sqrt{3} - \tan x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x \neq \sqrt{3} \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi.$$

Ví dụ 11. Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ trên đường tròn lượng giác là?

A. 1.

B. 2.

C. 4.

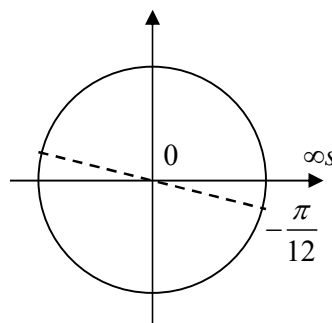
D. 6.

Lời giải:

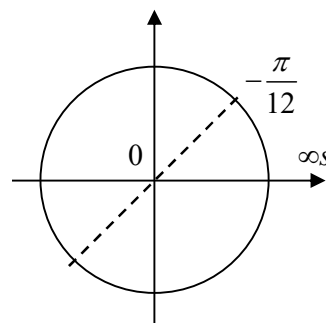
$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Biểu diễn nghiệm $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ trên đường tròn lượng giác ta được 2 vị trí (hình 1).

Biểu diễn nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ trên đường tròn lượng giác ta được 2 vị trí (hình 2).



Hình 1



Hình 2

Vậy có tất cả 4 vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình. **Chọn C.**

Cách giải nhanh trắc nghiệm.

Ta đưa về dạng $x = \alpha + k \frac{2\pi}{n} \longrightarrow$ số vị trí biểu diễn trên đường tròn lượng giác là n.

▪ Xét $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{2} \longrightarrow$ có 2 vị trí biểu diễn.

▪ Xét $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{2} \longrightarrow$ có 2 vị trí biểu diễn.

Ví dụ 12. Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\frac{2\cos 2x}{1-\sin 2x} = 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$. B. $x_0 \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$. C. $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$. D. $x_0 \in \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$.

Lời giải:

Điều kiện $1 - \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 1$.

Phương trình $\frac{2\cos 2x}{1-\sin 2x} = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \xrightarrow{\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1} \begin{cases} \sin 2x = 1 \text{ (loại)} \\ \sin 2x = -1 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Cho $-\frac{\pi}{4} + k\pi > 0 \longrightarrow k > \frac{1}{4}$.

Do đó nghiệm dương nhỏ nhất ứng với $k = 1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \in \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$. **Chọn D.**

Ví dụ 13. Hỏi trên đoạn $[-2017; 2017]$, phương trình $(\sin x + 1)(\sin x - \sqrt{2}) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

- A. 4034. B. 4035. C. 641. D. 642.

Lời giải:

Phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \sqrt{2} \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Theo giả thiết $-2017 \leq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq 2017 \Leftrightarrow \frac{-2017 + \frac{\pi}{2}}{2\pi} \leq k \leq \frac{2017 + \frac{\pi}{2}}{2\pi}$

$\xrightarrow{\text{xấp xỉ}} -320,765 \leq k \leq 321,265 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{-320; -319; \dots; 321\}$.

Vậy có tất cả 642 giá trị nguyên của k tương ứng với có 642 nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn D.**

Ví dụ 14. Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin x \left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ bằng:

- A. $\frac{\pi}{9}$. B. $-\frac{\pi}{6}$. C. $\frac{\pi}{6}$. D. $-\frac{\pi}{9}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \\ 3x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{11\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{TH1. Với } x = \frac{7\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \xrightarrow{\text{Cho}} \begin{cases} x > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{7}{24} \Rightarrow k_{\min} = 0 \rightarrow x = \frac{7\pi}{36} \\ x < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{7}{24} \Rightarrow k_{\max} = -1 \rightarrow x = -\frac{17\pi}{36} \end{cases}.$$

$$\text{TH2. Với } x = \frac{11\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \xrightarrow{\text{Cho}} \begin{cases} x > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{11}{24} \Rightarrow k_{\min} = 0 \rightarrow x = \frac{11\pi}{36} \\ x < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{11}{24} \Rightarrow k_{\max} = -1 \rightarrow x = -\frac{13\pi}{36} \end{cases}$$

So sánh bốn nghiệm âm lớn nhất là $x = -\frac{13\pi}{36}$ và nghiệm dương nhỏ nhất là $x = \frac{7\pi}{36}$. Khi đó tổng hai nghiệm này bằng $-\frac{13\pi}{36} + \frac{7\pi}{36} = -\frac{\pi}{6}$. **Chọn B.**

Ví dụ 15. Gọi x_0 là nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\cos(5x - 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0 \in (-30^\circ; 0^\circ)$

B. $x_0 \in (-45^\circ; -30^\circ)$

C. $x_0 \in (-60^\circ; -45^\circ)$

D. $x_0 \in (-90^\circ; -60^\circ)$

Lời giải:

$$\text{Ta có } \cos(5x - 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(5x - 45^\circ) = \cos 30^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 45^\circ = 30^\circ + k360^\circ \\ 5x - 45^\circ = -30^\circ + k360^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 75^\circ + k360^\circ \\ 5x = 15^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15^\circ + k72^\circ \\ x = 3^\circ + k72^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{TH1. Với } x = 15^\circ + k72^\circ < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{5}{24} \Rightarrow k_{\max} = -1 \rightarrow x = -57^\circ.$$

$$\text{TH2. Với } x = 3^\circ + k72^\circ < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{1}{24} \Rightarrow k_{\max} = -1 \Rightarrow x = -69^\circ.$$

So sánh 2 nghiệm ta được nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $x = -57^\circ$. **Chọn C.**

Ví dụ 16. Gọi X là tập nghiệm của phương trình $\cos\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \sin x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $290^\circ \in X$.

B. $20^\circ \in X$.

C. $220^\circ \in X$.

D. $240^\circ \in X$.

Lời giải:

Ta có $\cos\left(\frac{x}{2}+15^\circ\right)=\sin x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}+15^\circ\right)=\cos(90^\circ-x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}+15^\circ=90^\circ-x+k360^\circ \\ \frac{x}{2}+15^\circ=-(90^\circ-x)+k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=50^\circ+k240^\circ \\ x=210^\circ-k240^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Nhận thấy $290^\circ \in X$ (do ứng với $k=1$ của nghiệm $x=50^\circ+k240^\circ$). **Chọn A.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Giải phương trình $\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=0$.

A. $x=k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x=\frac{2\pi}{3}+\frac{k3\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x=\frac{\pi}{3}+k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x=\frac{\pi}{2}+\frac{k3\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 2. Số nghiệm của phương trình $\sin(2x-40^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ với $-180^\circ \leq x \leq 180^\circ$ là

A. 2

B. 4

C. 6

D. 7

Câu 3. Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số $y=\sin 3x$ và $y=\sin x$ bằng nhau?

A. $\begin{cases} x=k2\pi \\ x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

B. $\begin{cases} x=k\pi \\ x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x=k\frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x=k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 4. Tính tổng T các nghiệm của phương trình $\sin 2x - \cos x = 0$ trên $[0; 2\pi]$.

A. $T=3\pi$.

B. $T=\frac{5\pi}{2}$.

C. $T=2\pi$.

D. $T=\pi$.

Câu 5. Trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$, phương trình $\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=\sin x$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3

B. 4

C. 5

D. 2

Câu 6. Tổng các nghiệm của phương trình $\tan(2x-15^\circ)=1$ trên khoảng $(-90^\circ; 90^\circ)$ bằng

A. 0°

B. -30°

C. 30°

D. -60°

Câu 7. Giải phương trình $\cot(3x-1)=-\sqrt{3}$.

A. $x=\frac{1}{3}+\frac{5\pi}{18}+k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 8. Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số $y = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ và $y = \tan 2x$ bằng nhau?

A. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \frac{\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \left(k \neq \frac{3m+1}{2}; k, m \in \mathbb{Z}\right)$.

Câu 9. Số nghiệm của phương trình $\tan x = \tan \frac{3\pi}{11}$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right)$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 10. Tổng các nghiệm của phương trình $\tan 5x - \tan x = 0$ trên nửa khoảng $[0; \pi)$ bằng

A. π .

B. $\frac{3\pi}{2}$.

C. 2π .

D. $\frac{5\pi}{2}$.

Câu 11. Giải phương trình $\tan 3x \cot 2x = 1$.

A. $x = k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

D. Vô nghiệm.

Câu 12. Cho $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 = 0$. Tính $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

A. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

B. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Câu 13. Phương trình nào dưới đây có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình $\tan x = 1$?

A. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\cot x = 1$.

D. $\cot^2 x = 1$.

Câu 14. Giải phương trình $\cos 2x \tan x = 0$.

A. $x = k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 15. Tính tổng các nghiệm trong đoạn $[0; 30]$ của phương trình $\tan x = \tan 3x$.

- A. 55π . B. $\frac{171\pi}{2}$. C. 45π . D. $\frac{190\pi}{2}$.

Câu 16. Tổng các nghiệm của phương trình $3\cos x - 1 = 0$ trên đoạn $[0; 4\pi]$ là

- A. $S = \frac{15\pi}{2}$. B. $S = 6\pi$. C. $S = \frac{17\pi}{2}$. D. $S = 8\pi$.

Câu 17. Tính tổng các nghiệm trong đoạn $[0; 30]$ của phương trình $\tan x = \tan 3x$.

- A. 55π B. $\frac{171\pi}{2}$. C. 45π . D. $\frac{190\pi}{2}$.

Câu 18. Trong các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm?

- A. $2\sin 2x - \sqrt{3} = 0$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - 1 = 0$.
C. $2\sin x - 3 = 0$. D. $\sin x \cos x - 1 = 0$.

Câu 19. Khẳng định nào đúng?

- A. $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$. B. $\cot 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.
C. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi$. D. $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k\pi$.

Câu 20. Cho phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$. Tính tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ của phương trình trên.

- A. $\frac{7\pi}{2}$. B. π . C. $\frac{3\pi}{2}$. D. $\frac{\pi}{4}$.

Câu 21. Trong các phương trình sau, phương trình nào vô nghiệm?

- A. $\tan x = 99$. B. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$. C. $\cot 2018x = 2017$. D. $\sin 2x = -\frac{3}{4}$.

Câu 22. Số nghiệm của phương trình $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ trên đoạn $[0; 2\pi]$ là

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Câu 23. Số nghiệm của phương trình $\frac{\sin 3x}{1 - \cos x} = 0$ trên đoạn $[0; \pi]$ là

- A. 4. B. 2. C. 3. D. Vô số.

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sin x = m$ có nghiệm.

- A. $m \leq 1$. B. $m \geq -1$. C. $-1 \leq m \leq 1$. D. $m \leq -1$.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos x - m = 0$ vô nghiệm.

- A. $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. B. $m \in (1; +\infty)$.
C. $m \in [-1; 1]$. D. $m \in (-\infty; -1)$.

Câu 26. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos x = m + 1$ có nghiệm?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

Câu 27. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2$ có nghiệm. Tính tổng T của các phần tử trong S .

A. $T = 6$.B. $T = 3$.C. $T = -2$.D. $T = -6$.

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3\sin 2x - m^2 + 5 = 0$ có nghiệm?

A. 6.

B. 2.

C. 1.

D. 7.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Ta có $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{k3\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$. **Chọn D.**

Câu 2: Phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 40^\circ = 60^\circ + k.360^\circ \\ 2x - 40^\circ = 180^\circ - 60^\circ + k.360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50^\circ + k.180^\circ \\ x = 80^\circ + k.180^\circ \end{cases}$

Mặt khác $-180^\circ \leq x \leq 180^\circ \longrightarrow \begin{cases} x = -130^\circ; 50^\circ \\ x = -100^\circ; 80^\circ \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 3: Có $\sin 3x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + k2\pi \\ 3x = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 4: Ta có $\sin 2x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \cos x \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{Vì } x \in [0; 2\pi], \text{ suy ra } \begin{cases} 0 \leq \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \leq 2\pi \\ 0 \leq \frac{\pi}{2} + k2\pi \leq 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{11}{4} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2\} \\ -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{3}{4} \Rightarrow k \in \{0\} \end{cases}$$

Từ đó suy ra các nghiệm của phương trình trên đoạn $[0; 2\pi]$ là $\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rightarrow T = 3\pi$. **Chọn A.**

Câu 5: Ta có $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \sin x \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6} - 2x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ \frac{\pi}{6} - 2x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} - k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{9} - \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vì } x \in \left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right), \text{ suy ra } \begin{cases} \frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{3} - k2\pi < 2\pi \\ \frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{9} - \frac{k2\pi}{3} < 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{6} \leq k \leq -\frac{5}{12} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = -1 \\ -\frac{8}{3} \leq k \leq -\frac{5}{12} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = \{-2; -1\} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã có 3 nghiệm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$. **Chọn A.**

Câu 6: Ta có $\tan(2x - 15^\circ) = 1 \Leftrightarrow 2x - 15^\circ = 45^\circ + k.180^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ + k.90^\circ$

Do $x \in (-90^\circ; 90^\circ) \longrightarrow -90^\circ < 30^\circ + k.90^\circ < 90^\circ \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < k < \frac{2}{3}$

$\xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} k = -1 \rightarrow x = -60^\circ \\ k = 0 \rightarrow x = 30^\circ \end{cases} \longrightarrow -60^\circ + 30^\circ = -30^\circ$. **Chọn B.**

Câu 7: Ta có $\cot(3x - 1) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot(3x - 1) = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow 3x - 1 = -\frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{k=1} x = \frac{1}{3} + \frac{5\pi}{18}$. **Chọn A.**

Câu 8: Điều kiện: $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{4} - m\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} - x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

Đổi chiều điều kiện, ta cần có $\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow k \neq \frac{3m+1}{2} (k, m \in \mathbb{Z})$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \left(k \neq \frac{3m+1}{2}; k, m \in \mathbb{Z}\right)$. **Chọn D.**

Câu 9: Ta có $\tan x = \tan \frac{3\pi}{11} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{11} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Do $x \in \left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right) \rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{11} + k\pi < 2\pi \xrightarrow[\text{xấp xỉ}]{\text{CASIO}} -0,027 < k < 1,72 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{0; 1\}$. **Chọn B.**

Câu 10: Ta có $\tan 5x - \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan 5x = \tan x \Leftrightarrow 5x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$.

Vì $x \in [0; \pi)$, suy ra $0 \leq \frac{k\pi}{4} < \pi \Leftrightarrow 0 \leq k < 4 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = \{0; 1; 2; 3\}$.

Suy ra các nghiệm của phương trình trên $[0; \pi)$ là $\left\{0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right\}$.

Suy ra $0 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$. **Chọn B.**

Câu 11: Điều kiện $\begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \\ x \neq k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Phương trình $\Leftrightarrow \tan 3x = \frac{1}{\cot 2x} \Leftrightarrow \tan 3x = \tan 2x \Leftrightarrow 3x = 2x + k\pi \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

Đối chiếu điều kiện, ta thấy nghiệm $x = k\pi$ không thỏa mãn $x \neq k\frac{\pi}{2}$.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm. **Chọn D.**

Câu 12: Phương trình $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

Suy ra $2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \rightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

Do đó $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3} + k2\pi\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. **Chọn C.**

Câu 13: Ta có $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

Xét đáp án C, ta có $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. **Chọn C.**

Câu 14: Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

Phương trình $\cos 2x \cdot \tan x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \tan x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$ **Chọn C.**

Câu 15: Phương trình $\tan 3x = \tan x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

Ta có $0 \leq x \leq 30 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{k\pi}{2} \leq 30 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{60}{\pi}$ mà $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = \{0; 1; \dots; 19\}$

Vậy tổng các nghiệm cần tính là $\sum_{k=0}^{19} \left(\frac{k\pi}{2}\right) = 95\pi$. **Chọn D.**

Câu 16: Ta có $3\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{1}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

TH1. Với $x = \arccos \frac{1}{3} + k2\pi \xrightarrow[k \in \mathbb{Z}]{x \in [0; 4\pi]} k = \{0; 1\} \Rightarrow \begin{cases} x = \arccos \frac{1}{3} \\ x = \arccos \frac{1}{3} + 2\pi \end{cases}$

TH2. Với $x = -\arccos \frac{1}{3} + k2\pi \xrightarrow[k \in \mathbb{Z}]{x \in [0; 4\pi]} k = \{1; 2\} \Rightarrow \begin{cases} x = -\arccos \frac{1}{3} + 2\pi \\ x = -\arccos \frac{1}{3} + 4\pi \end{cases}$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là $S = 8\pi$. **Chọn D.**

Câu 17: Điều kiện $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x(4\cos^2 x - 3) \neq 0$

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos 3x = \cos x \cdot \sin 3x$

$\Leftrightarrow \sin x \cos 3x - \cos x \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \sin(3x - x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x \cos x = 0$

$\xrightarrow{\cos x \neq 0} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ (thỏa mãn)

Kết hợp $[0; 30] \Leftrightarrow 0 \leq k\pi \leq 30 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 9$

Tổng các nghiệm của phương trình là $(0+1+2+\dots+9)\pi = 45\pi$. **Chọn C.**

Câu 18: Phương trình $2\sin 2x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ có nghiệm.

Phương trình $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{2}{\sqrt{3}} > 1$ vô nghiệm.

Phương trình $2\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{3}{2} > 1$ vô nghiệm.

Phương trình $\sin x \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 2$ vô nghiệm. **Chọn A.**

Câu 19: Ta có $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ và $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k\pi$. **Chọn D.**

Câu 20: Phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \pi - x - \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ 3x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2}{3}\pi \end{cases}$

Với $x \in (0; \pi)$ ta giải điều kiện $0 < \frac{\pi}{6} + k\frac{2}{3}\pi < \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < 1,25 \Leftrightarrow k = \{0; 1\}$

Suy ra nghiệm của phương trình là $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

Tổng các nghiệm của phương trình là π . **Chọn B.**

Câu 21: Do $\frac{2\pi}{3} > 1$ nên phương trình $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$ vô nghiệm. **Chọn B.**

Câu 22: Phương trình $2\sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$

Kết hợp $x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$. **Chọn D.**

Câu 23: Điều kiện $\cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi$

Phương trình $\Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}$

Với $x \in [0; \pi] \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{2\pi}{3} \\ x = \pi \end{cases}$, kết hợp điều kiện suy ra phương trình có 3 nghiệm $x = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \pi\right\}$ trên đoạn

$[0; \pi]$. **Chọn C.**

Câu 24: Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta luôn có $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Do đó, phương trình $\sin x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq m \leq 1$. **Chọn C.**

Câu 25: Áp dụng điều kiện có nghiệm của phương trình $\cos x = a$.

▪ Phương trình có nghiệm khi $|a| \leq 1$.

▪ Phương trình vô nghiệm khi $|a| > 1$.

Phương trình $\cos x - m = 0 \Leftrightarrow \cos x = m$.

Do đó, phương trình $\cos x = m$ vô nghiệm $\Leftrightarrow |m| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 26: Áp dụng điều kiện có nghiệm của phương trình $\cos x = a$.

▪ Phương trình có nghiệm khi $|a| \leq 1$.

▪ Phương trình vô nghiệm khi $|a| > 1$.

Do đó, phương trình $\cos x = m + 1$ có nghiệm khi và chỉ khi $|m + 1| \leq 1$

$\Leftrightarrow -1 \leq m + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-2; -1; 0\}$. **Chọn C.**

Câu 27: Phương trình $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = m + 2$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \leq m + 2 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1$

$$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} S = \{-3; -2; -1\} \longrightarrow T - (-3) + (-2) + (-1) = -6. \text{ Chọn D.}$$

Câu 28: $PT \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{m^2 - 5}{3}$ có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \leq \frac{m^2 - 5}{3} \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq m^2 \leq 8$

Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{\pm 2\} \Rightarrow$ có 2 giá trị nguyên của m . **Chọn B.**